Archives NAG: Publicatie No. 41 van de Geluidstichting, Fokker, A.D. (1942). Intervalsnippers en de verdeeling van octaaf en kwint in even groote deelen. Delft: Geluidstichting, 1942.

PUBLICATIE No. 41
VAN DE
GELUIDSTICHTING
DELFT - HOLLAND

Intervalsnippers en de verdeeling van octaaf en kwint in even groote deelen

door A. D. FOKKER

In de reeks der boventonen van een snaar krijgt men op de gemakkelijkste wijze de harmonische intervallen zuiver te hooren. Tusschen den grondtoon en de tweede bovenharmonische hoort men het oktaaf. Tusschen de tweede en derde bovenharmonische hoort men de kwint, en zoo voortgaande de klassieke intervallen, die hieronder geschreven staan, elk tusschen de nummers van de bovenharmonischen, die met elkander het interval insluiten.

1 — oktaaf — 2.
2 — kwint — 3 — kwart — 4.
4 — groote terts — 5 — kleine terts — 6
6 — vergroote (overmatige) sekunde — 7 — verkleinde terts — 8.
8 — groote groote sekunde — 9 — kleine groote sekunde 10.

De bovenharmonischen, hooger dan de tiende, zijn op de viool moeilijk afzonderlijk aan te strijken. Beter gaat dat op een cello of op een contrabas, omdat de snaren daar langer zijn, zoodat de vingers, die daar de zestiende flageolet kunnen spelen, minder fijn behoeven te zijn.

De intervallen tusschen de bovenharmonischen 10 — 11 — 12 — 13 — 14 — 15 dragen, voor zoover mij bekend, geen algemeen aanvaarden naam. Het interval tusschen de vijftiende en de zestiende harmonische daarentegen heet kleine hekunde.

* * *

Het ligt voor de hand, om ook te luisteren naar de intervallen tusschen de oneven harmonischen. Tusschen 1 en 3 hooren wij de duodeciem, tusschen 3 en 5 de kleine sext. Tusschen 5 en 7 hooren wij de harmonische tritonus. Tusschen 7 en 9 is het de verminderde kwart. Tusschen 9 en 11 ligt een interval dat halverwege staat tusschen de groote en de kleine terts. Het heeft geen naam, het mocht wel de halve kwint heeten. *)

Doordat deze intervallen weinig gebruikelijk zijn, klinken zij nog erg „apart". Nog minder krijgt men de intervallen 11 — 13, of 13 — 15 te hooren.

* * *

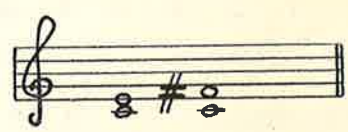
Een en hetzelfde interval kan men terugvinden tusschen verschillende paren van harmonischen. De bepaalde verhouding, die eigenaardige tegenstelling, die men het interval noemt tusschen tweede en derde harmonische, vindt men ook tusschen de vierde en de zesde, of tusschen de 10e en 15e, kortom tusschen de harmonischen 2n en 3n. Men kan aldus een interval in de rij der harmonischen verschuiven. Dat maakt het mogelijk intervallen met elkander te vergelijken.

Stel men wil met elkander in verband brengen de groote terts, en de tritonus, de intervallen tusschen de harmonischen 4 en 5, en 5 en 7.

De som van groote terts en tritonus geeft een vergroote sext.

Deze intervallen zijn al aangegeven met een gemeenschappelijke harmonische, die voor het eene interval de hoogste, voor het andere interval de laagste is: beide worden begrensd door de vijfde. Het interval tusschen de andere harmonischen, tusschen 4 en 7, bepaalt dan hun som, het is een vergroote sext.

Maar de intervallen kunnen ook worden aangegeven met een gemeenschappelijke harmonische, die voor beide de laagste is. De groote terts wordt ook gevonden tusschen 20 en 25, en de tritonus tusschen 20 en 28, beide gevormd met de 20e harmonische. Het interval tusschen de andere twee harmonischen levert nu het verschil tusschen tritonus en groote terts, dat is een interval tusschen 25 en 28, een groote sekunde.



Het verschil van tritonus en groote terts geeft een midgroote groote secunde.

Wij kunnen deze groote sekunde vergelijken met die wij reeds hebben, de groote groote, en de kleine groote, begrensd door de harmonischen 8 : 9 : 10. Deze zelfde groote sekunden vinden wij tusschen de harmonischen 200 : 225 : 250. De nieuwgevonden groote

*) Georges Enesco gebruikt het in zijn derde vioolsonate.

sekunde tusschen 25 en 28 vinden wij terug tusschen 200 (= 8 × 25) en 224 (= 8 × 28). Hij is dus een ietsje kleiner dan de groote groote sekunde (224/225). Wij vinden hem ook terug tusschen 225 (= 9 × 25) en 252 (= 9 × 28). Hij is dus een snippertje grooter dan de kleine groote sekunde (252/250 = 126/125). Zullen wij hem dan maar niet midgroote groote sekunde noemen?

Wij keeren nog even terug tot de groote terts (4 en 5) en de tritonus (5 en 7). Wij kunnen die intervallen ook zoodanig tusschen andere harmonischen leggen, dat zij hun hoogste harmonische gemeen hebben. De groote terts vinden wij tusschen 28 en 35, de tritonus tusschen 25 en 35. Als verschil tusschen tritonus en groote terts vinden wij ook op deze manier hetzelfde interval als daareven, begrensd door de harmonischen 28 en 25. Dat kon natuurlijk niet anders.

* * *

De zoo juist beschreven manier om het verschil tusschen twee intervallen te bepalen komt neer op een eenvoudigen rekenkundigen regel. Schrijf beide intervallen als breuken grooter dan 1, met de getallen van de harmonische tonen als teller en noemer. Deel de eene breuk door de andere. In het quotient vindt men het interval, dat het gezochte verschil is van de gegeven intervallen. Wij willen dezen regel toepassen om systematisch de verschillen na te gaan tusschen naburige intervallen die gevormd worden door opeenvolgende bovenharmonischen. Daartoe schrijven wij eerst de rij der bovenharmonische getallen neer en daaronder dezelfde rij, maar een plaats verschoven, aldus:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Om nu het verschil te vinden tusschen het interval 5 : 4 en het interval 4 : 3 nemen wij den getallenvierhoek

$$\begin{array}{cc} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{array}$$

en nemen de produkten van de getallen aan overstaande hoekpunten. Dat zijn 4 × 4 = 16 en 5 × 3 = 15. De breuk die wij daarmee maken kunnen zetten wij in het midden van den vierhoek:

$$\begin{array}{ccc} 4 & & 5 \\ & \frac{16}{15} & \\ 3 & & 4 \end{array}$$

Hetzelfde doen wij om het verschil te vinden tusschen de intervallen 6 : 5 en 5 : 4, en bij alle andere. Dat schrijven wij in een lange rij op:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 \\ & & & \frac{4}{3} & & \frac{9}{8} & & \frac{16}{15} & & \frac{25}{24} & & \frac{36}{35} & & \frac{49}{48} & \\ & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 8 & & 9 & & 10 & & 11 & & 12 & & 13 & \\ & \frac{64}{63} & & \frac{81}{80} & & \frac{100}{99} & & \frac{121}{120} & & \frac{144}{143} & & \text{enz.} \\ 7 & & 8 & & 9 & & 10 & & 11 & & 12 & \end{array}$$

De algemeene formule voor het verschil der intervallen (m—1) : m en m : (m + 1) is $m^2/(m^2-1)$.

De verschillen nemen snel af. Wij kunnen enkele orden van grootte onderscheiden. Allereerst hebben wij de kwart en de groote groote sekunde.

Dan komen er twee intervallen van de orde van halftonen, n.l. 16 : 15 en 25 : 24. Daarna volgen er drie van de orde van kwarttonen, n.l. 36 : 35, 49 : 48 en 64 : 63. Vervolgens krijgen wij een paar van de orde van achtste- en twaalfdetonen, n.l. de syntonische komma 81 : 80, voorts nog 100 : 99, 121 : 120 en 144 : 143.

Tenslotte komt een lange rij van nog kleinere intervalsnippers.

* * *

Natuurlijk verschilt het vermogen om deze kleine intervalverschillen te hooren aanmerkelijk van mensch tot mensch. Niet alleen de aanleg, ook de graad van geoefendheid van het gehoor is lang niet dezelfde bij iedereen. Menschen als Alois Haba zijn zeldzaam, die twaalfdetoonsintervallen zingen kunnen. Maar toonhoogteverschillen van een halftoon merkt iedereen op. Dat is niet zoo moeilijk. Om daarentegen het verschil te hooren tusschen de beide halftonen, 16 : 15 en 25 : 24, dat is een natuurlijke dièze 128/125, moet men zich wel geoefend hebben. Een violist, die bewust een zevende trap verschillend intoneert, al naarmate die als zuivere groote terts boven de vijfde trap of als leidtoon naar de achtste trap dient, onderscheidt ze natuurlijk terdege.**) Zulke verschillen zijn van de orde van kwarttonen, zij worden overigens in de normale halftoonstemming uitgewischt, opgeofferd mag men zeggen. De fijne nuances, bepaald door de achtstetoon-verschillen, worden vermoedelijk niet bewust, maar wel onbewust geproefd in het muzikale hooren. Is er geen verschil tusschen sol : la : si in den derden kerktoon van het Gregoriaansch en in den zevenden kerktoon? Zou tusschen de tonen hier de harmonische verhouding niet zijn 72 : 81 : 90, en ginds 72 : 80 : 90? Zou niet iets derge-

**) Zie Carl Flesch, Kunst van het Vioolspel.

lijks in het spel zijn, als een uiterst eerlijk en muzikaal zangleeraar verklaart, liederen van Russische componisten nooit zoo te kunnen zingen als hij het Russen hoort doen?

* * *

Wij kunnen ook de verschillen bestudeeren der intervallen, die in de natuurlijke rij niet naast elkaar staan, bijvoorb. de verschillen der intervallen 7 : 6 en 5 : 4. Bij die intervalverschillen zijn dan vier opeenvolgende getallen betrokken. Wij schrijven de rijen als volgt neer, op de wijze van het vorige voorbeeld:

3		4		5		6		7		8		9		10
	$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{6}$		$\frac{9}{10}$		$\frac{14}{15}$		$\frac{20}{21}$		$\frac{27}{28}$		$\frac{35}{36}$	
1		2		3		4		5		6		7		8

10		11		12		13		14		15		16
	$\frac{45}{44}$		$\frac{55}{54}$		$\frac{65}{64}$		$\frac{78}{77}$		$\frac{91}{90}$		$\frac{105}{104}$	
8		9		10		11		12		13		14

De algemeene formule is $(m^2 - {}^1/_4) \,/\, (m^2 - {}^9/_4)$, waarin m achtereenvolgens een der halfgetallen uit de rij $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$ .... enz. is. Behalve de herhaling van reeds bekende intervallen vinden wij hier ook nieuwe. Nieuw zijn er drie van de orde van h a l f t o n e n. De grootste daarvan is een variant van de kleine sekunde, 15 : 14. De beide andere zijn 21 : 20 en 28 : 27, een verzachte en een verscherpte variant van het „leidtoon"interval 25 : 24. Nieuw zijn ook drie intervallen voor de groep der k w a r t t o n e n. Daaronder is 45 : 44 zeer nabij de normale dièze, waarvan er 31 in een octaaf gaan. De andere nieuwe, 55 : 54 en 65 : 64, zijn iets kleiner. Nieuw zijn ook de achtstetonen en de daarop volgende nog kleinere snippers.

* * *

Op deze wijze kunnen wij doorgaan, en de intervallen vergelijken, die twee plaatsen van elkaar afstaan, bijvoorbeeld de groote terts 5 : 4 en de verkleinde terts 8 : 7. Het verschil is een interval 35 : 32, grooter dan een halftoon, kleiner dan een heeltoon. Het staat tusschen de intervallen 11 : 10 en 12 : 11, het dichtste bij dit laatste; hiervan verschilt het slechts 385/384. De algemeene formule is hier $(m^2 - 1) \,/\, (m^2 - 4)$, m een geheel getal zijnde.

* * *

Wij houden ook kleine intervalsnippers over wanneer wij trachten een octaaf, of een kwint, in een of ander aantal even groote intervallen te verdeelen. Wil men die deelen precies even groot krijgen, dan kunnen het geen harmonische intervallen zijn. De normale halftonen van de gewone stemming zijn disharmonische intervallen, omdat zij moeten worden voorgesteld door wat in de wiskunde heet onmeetbare getallen. Maar men kan vragen naar de eenvoudigste harmonische intervallen, die de evendeeling het dichtst benaderen.

Reeds ontmoetten wij in het interval 11 : 9, een h a l v e k w i n t. Verdubbelen wij het, dan ontstaat het interval 121 : 81. Een kwint is dat nog niet. Een kwint zou zijn 120 : 80 of 243 : 162. Wij hebben hier slechts 242 : 162. Er blijft dus nog een snipper over, 243 : 242, een derde gedeelte van een komma.

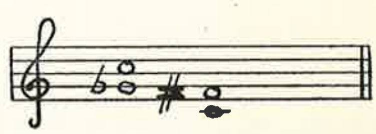
* * *

De h e l f t v a n h e t o c t a a f ligt tusschen de kwart en de kwint. Wil men die benaderen door een breuk met teller en noemer beneden 10, dan komt men op 7 : 5. Wil men toelaten dat teller en noemer tusschen 10 en 100 liggen, dan komt men het best uit met 41 : 29. Mogen er getallen van drie cijfers gebruikt worden, dan komt men nog beter uit met 238 : 169.

De harmonische tritonus 7 : 5 is de eenvoudigste en fraaist klinkende benadering.

Verdeelen wij het octaaf 70 : 35 op deze wijze:

70 : 50 : 49 : 35,



Het octaaf verdeeld in twee harmonische tritoni, er rest een dièze.

dan zien wij dat afsplitsen van de tritonus 70 : 50 en van de tritonus 49 : 35 overlaat een interval 50 : 49, ongeveer $^9/_{10}$ van een normale dièze.

Een andere benadering van het halve octaaf vindt men in de som van groote terts en pythagorese sekunde, dat is 45 : 32. Verdeelt men het octaaf 2880 : 1440 als volgt:

2880 : 2048 : 2025 : 1440,

dan staan aan de uiteinden intervallen 45 : 32, en na afsplitsing daarvan blijft van het octaaf over het interval 2048 : 2025. Dit staat bekend als het diaschisma. Het is iets kleiner dan een syntonische komma. Hoewel 45 : 32 beter een half octaaf benadert dan het interval 7 : 5, heeft dit laatste toch veel voor door zijn harmonischen eenvoud en doorzichtigheid. Gebruikt men getallen van twee cijfers, dan is trouwens de benadering 41 : 29 voor een half octaaf beter dan 45 : 32. ***)

* * *

De verdeeling van het octaaf i n d r i e ë n leidt tot de groote terts. Wij splitsen het octaaf 128 : 64 als volgt:

128 : 125 : 100 : 80 : 64,

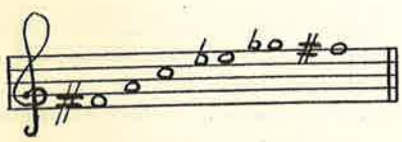
Het octaaf verdeeld in drie groote tertsen, er rest een dièze.

met drie groote tertsen aan den lagen kant, en er blijft over een natuurlijke dièze 128 : 125. Zooals men weet is een precies derde deel van het octaaf, de normale tweetoon aan de piano, te groot, ongeveer twee derde van een komma, of ongeveer 127 : 126 te groot. Opvolgende benaderingen heeft men, na de groote terts 5 : 4, in de verscherpte tertsen 24 : 19 of 73 : 58 of 291 : 231. De pythagorese terts 81 : 64 is grooter dan een derde deel van het octaaf: drie pythagorese tertsen steken 5531441 : 524288 over het octaaf heen.

* * *

De verdeeling van het octaaf i n v i e r e n leidt als eerste benadering tot kleine tertsen. Deze zijn echter grooter dan een kwart octaaf. Eerst nadat men het octaaf van 1250 : 625 vergroot heeft tot 1296 : 625 kan men er vier kleine tertsen uit maken:

1250 : 1296 : 1080 : 900 : 750 : 625.



Na vergrooting met een dièze is het octaaf verdeeld in vier kleine tertsen.

De laatste vier intervallen zijn elk 6 : 5. Zou men een v e r m i n d e r d s e p t i e m - a c c o o r d met louter gelijke intervallen maken, dan worden deze alle bijna vier vijfde komma kleiner dan een kleine terts. Wil men zooveel mogelijk kleine tertsen houden, dan moet een der intervallen tot een vergroote sekunde worden teruggebracht. De fraaiste constructie van het verminderd septiem accoord heeft men in de verdeeling van het octaaf 42 : 21 volgens de getallen

42 : 35 : 30 : 25 : 21.

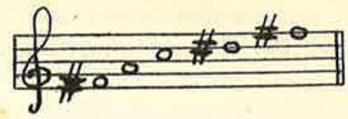
De vergroote sekunde 35 : 30 wordt hier symmetrisch geflankeerd door twee zuivere kleine tertsen. De kleine terts 25 : 21 is iets kleiner dan een zuivere kleine terts. Het scheelt een intervalsnippertje 126 : 125.

———

***) Dat ziet men aan de oktaafverdeeling 2378 : 1682 : 1681 : 1189, met aan weerskanten het interval 41 : 29. Het interval 1682 : 1681 is nog niet een twintigste deel van het diaschisma.

Minder symmetrisch is de verdeeling

42 : 36 : 30 : 25 : 21.



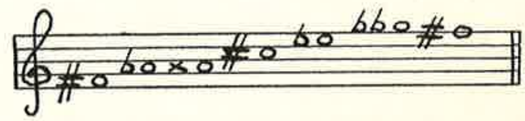
Het verminderd septiem accoord met de vergroote secunde (c' dis') geflankeerd door kleine tertsen.

* * *

Waarom zouden wij het octaaf ook niet eens i n v i j v e n verdeelen? Een eerste benadering daartoe levert ons de verkleinde terts 8 : 7. Na aftrek van vijf verkleinde tertsen blijft er slechts ongeveer een dièze over, n.l. 33614 : 32768, zooals uit de verdeeling van het octaaf 33614 : 16807 blijkt:

33614 : 32768 : 28672 : 25088 : 21952 :

: 19208 : 16807.



Het octaaf verdeeld in vijf verkleinde tertsen, over blijft een dièze.

De laatste vijf intervallen zijn elk 8 : 7. Heeft men van een octaaf vier maal een verkleinde terts afgenomen, dan blijft er een vergroote sekunde over.

Tot een verdeeling van het octaaf i n z e s s e n leveren de pythagorese sekunden ons een voor de hand liggende benadering. Zij zijn iets te groot. Met hun zessen geven zij een interval $(9:8)^6$, dat is 531441 : 262144, hetzelfde als drie pythagorese groote tertsen, een dikke komma meer dan een octaaf.

Ongeveer evenveel mis, maar naar den anderen kant, zijn de midgroote groote sekunden 28 : 25. Met hun zessen geven zij (afgekort) 241/244 van de octaafverhouding 2 : 1.

* * *

Om te besluiten merken wij op, dat d e k w i n t zich heel mooi i n d r i e ë n verdeelen laat door de verkleinde terts 8 : 7. Neem als kwint 1029 : 686 en schrijf neer de getallen

1029 : 1024 : 896 : 784 : 686.

Aan het eind staan drie intervallen 8 : 7. Kap die af en er blijft over 1029 : 1024, twee vijfde van een komma.

Aangezien de verkleinde terts zich gemakkelijk laat verdeelen in twee kleine sekunden, is ook de verdeeling van de kwint i n z e s s e n muzikaal niet moeilijk. De verkleinde terts 8 : 7 = 16 : 14 is de som van de intervallen 16 : 15 en 15 : 14. Deze twee kleine sekunden zijn niet precies gelijk. Zij verschillen van elkander met een derde komma, n.l. met een intervalsnipper 225 : 224.

Overdruk uit „Caecilia en de Muziek", No. 15, Dec. 1942, blz. 172–176.

K 1488