

Mémoires sur différens  
sujets de mathématiques / ,  
par M. Diderot

Diderot / Denis / 1713-1784 / 0070. Mémoires sur différens sujets de mathématiques / , par M. Diderot. 1748.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

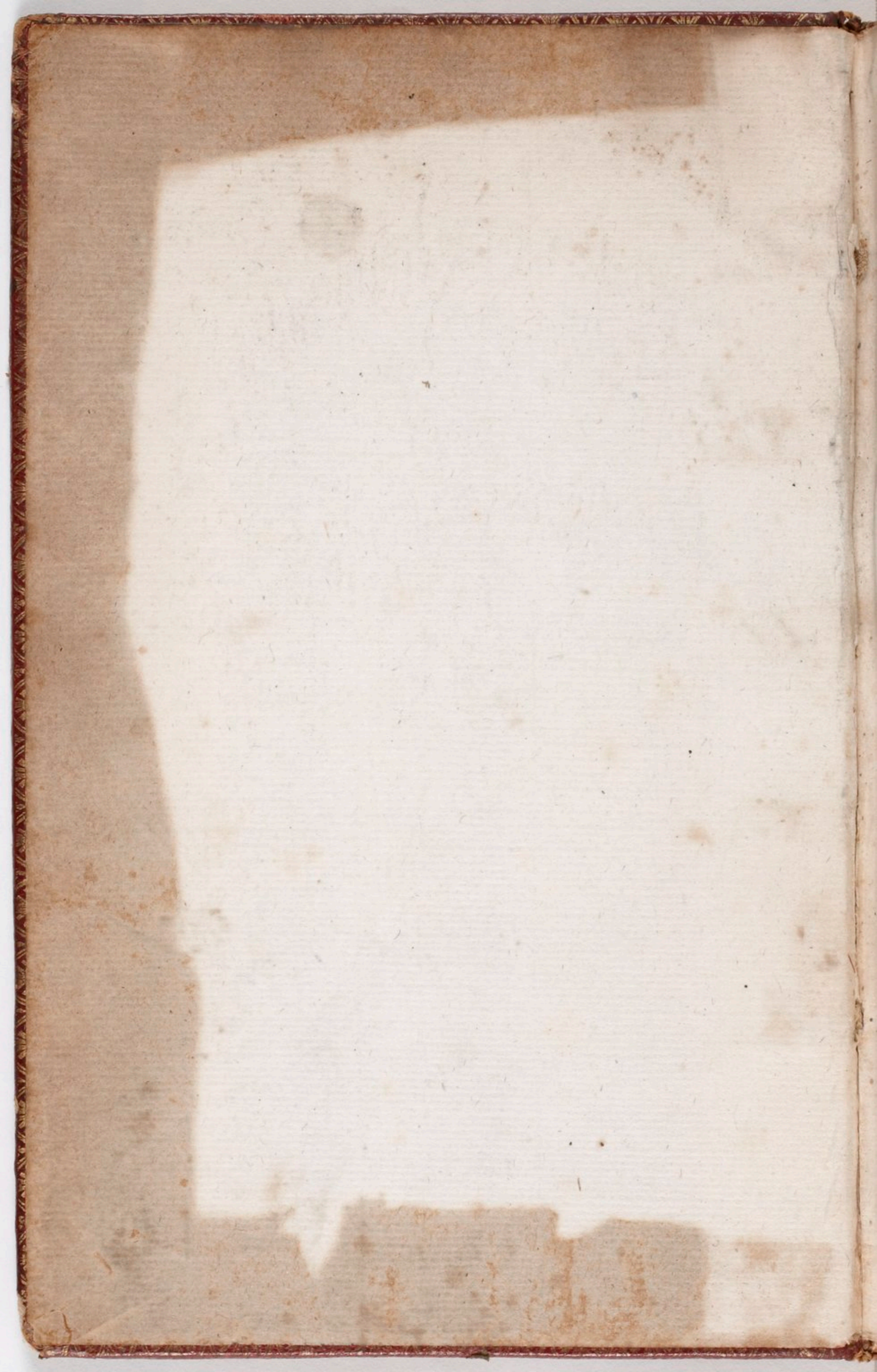
**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

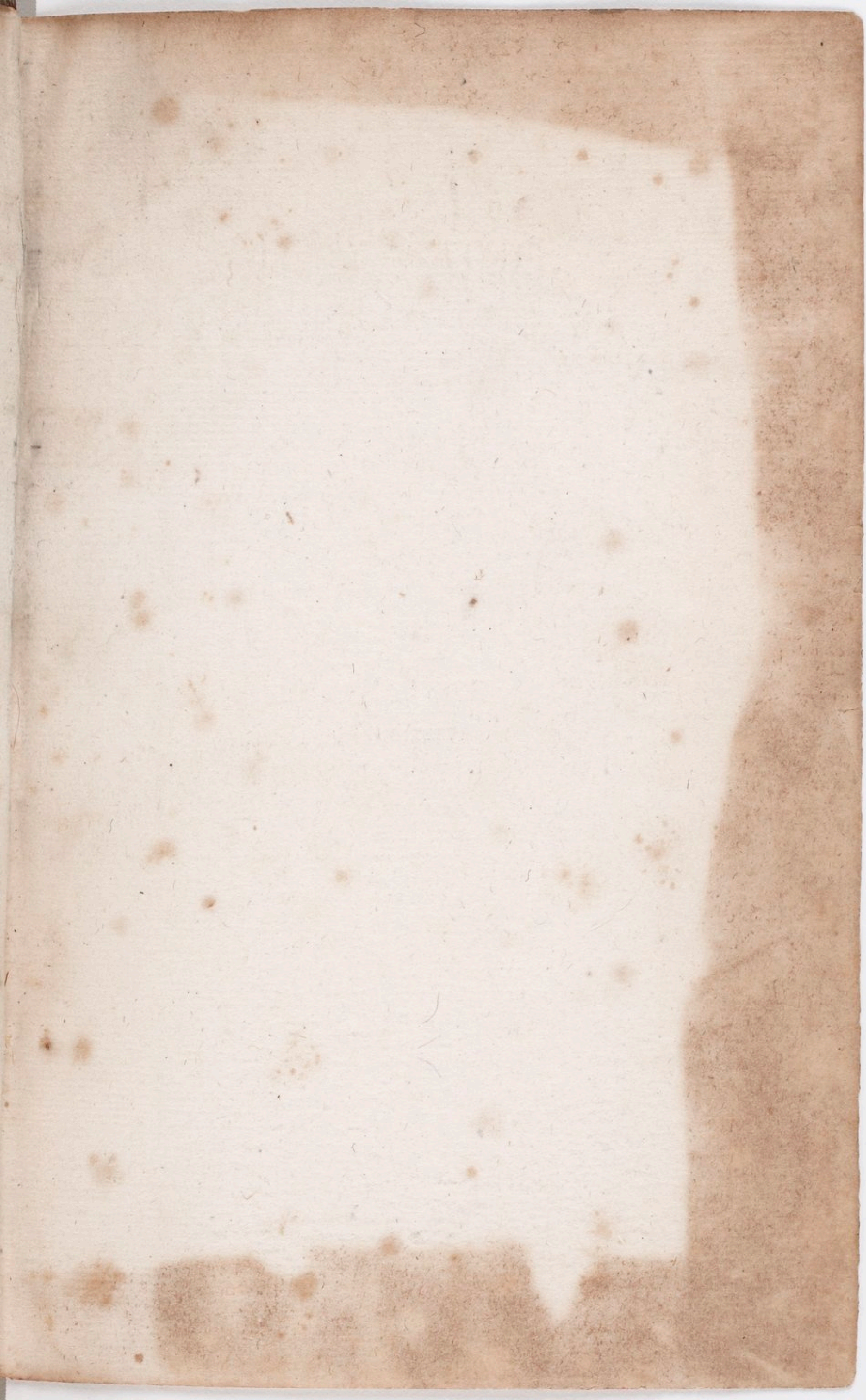
**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

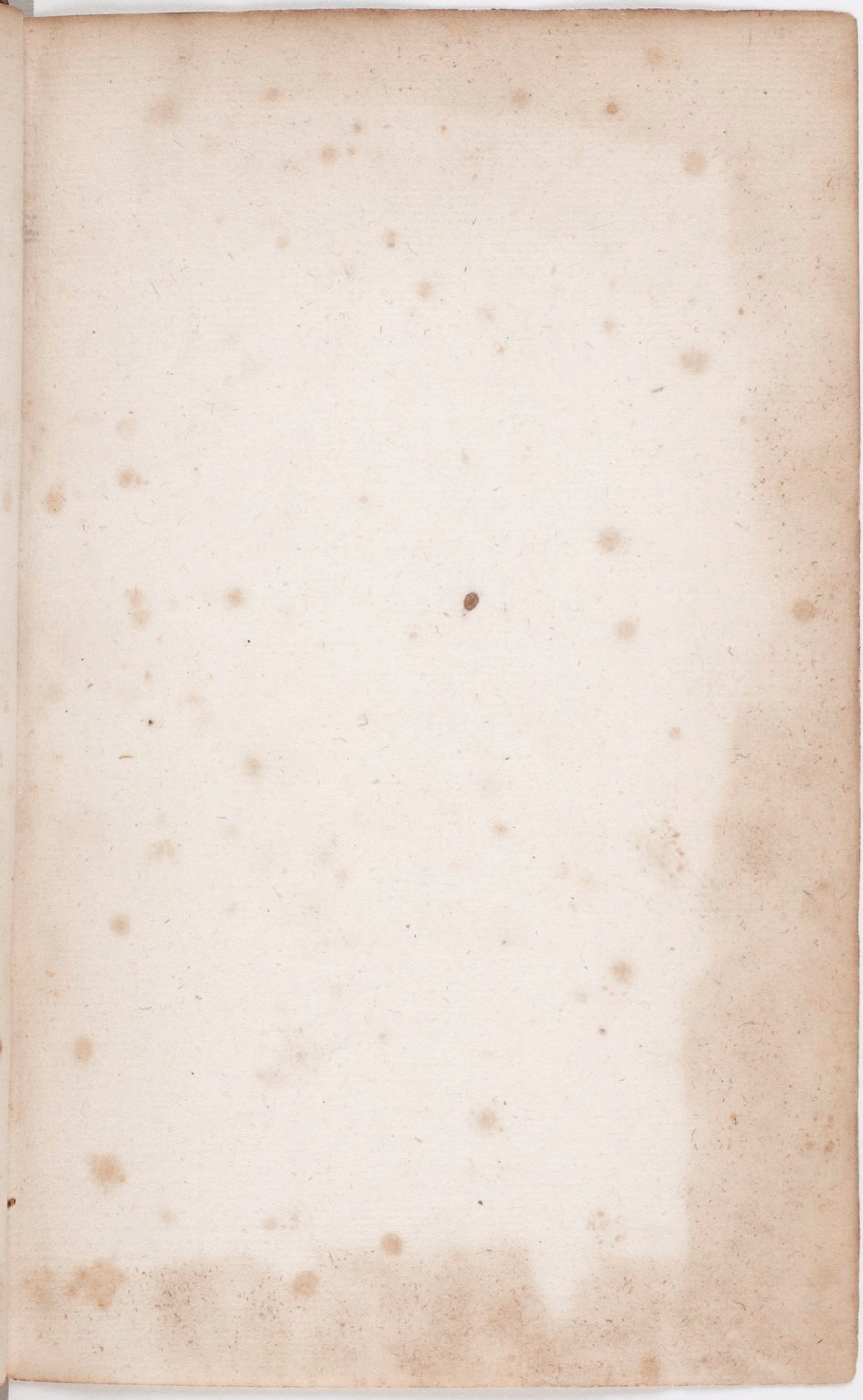
**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [utilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:utilisationcommerciale@bnf.fr).





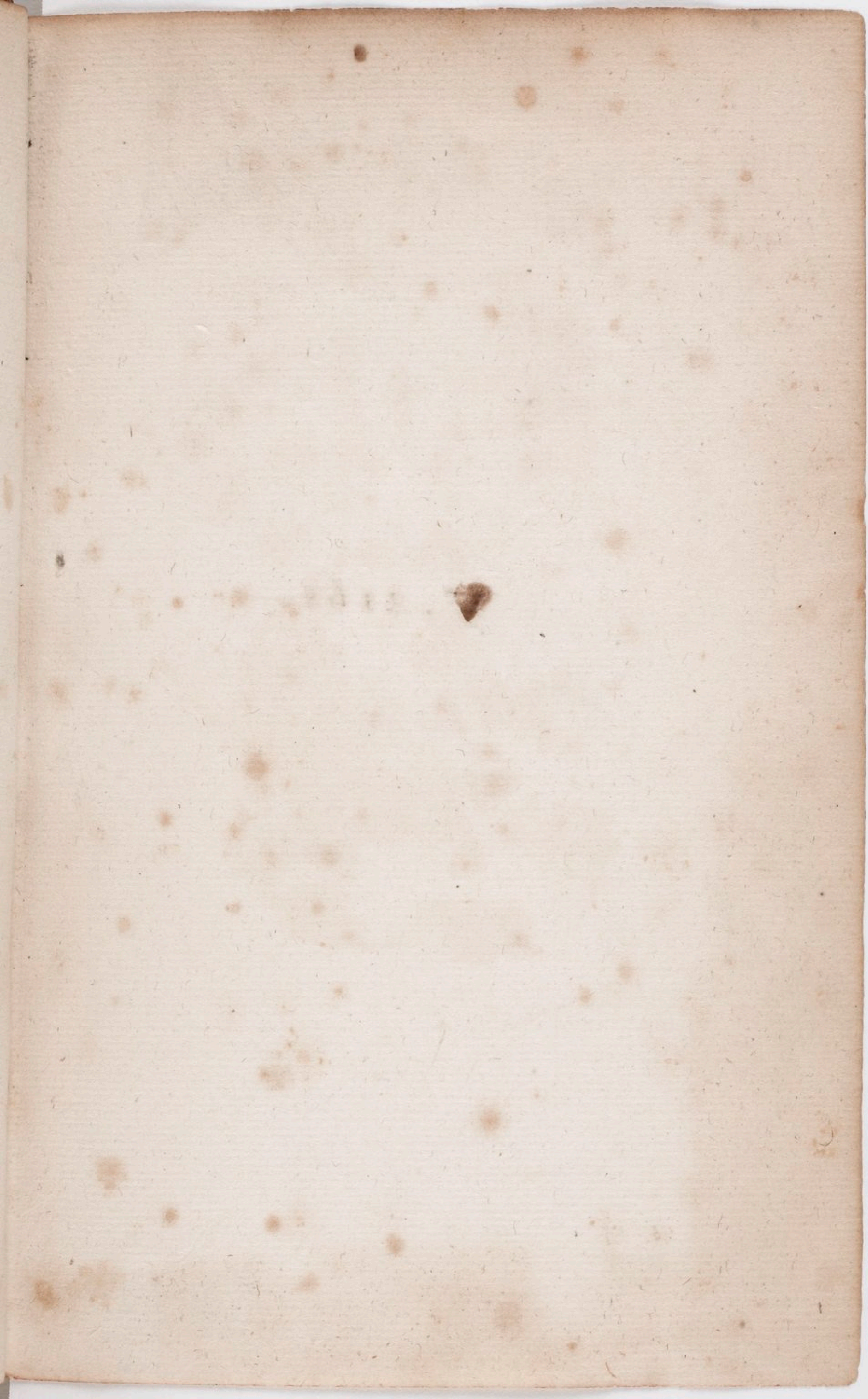












V. 2168 —

20127

MEMOIRES  
SUR  
DIFFÉRENS SUJETS  
DE  
MATHEMATIQUES.

Par M. DIDEROT.

*Amoto quæramus sexia ludo. Horat.*



A PARIS, RUE SAINT JACQUES,  
Chez { DURAND, Libraire, au Griffon.  
      { PISSOT, Quay des Augustins, à la Sagesse.

---

M. DCC. XLVIII.  
*Avec Approbation & Privilège du Roy.*

M. B. ...

DIFFERENTIAL ...

... ..

... ..

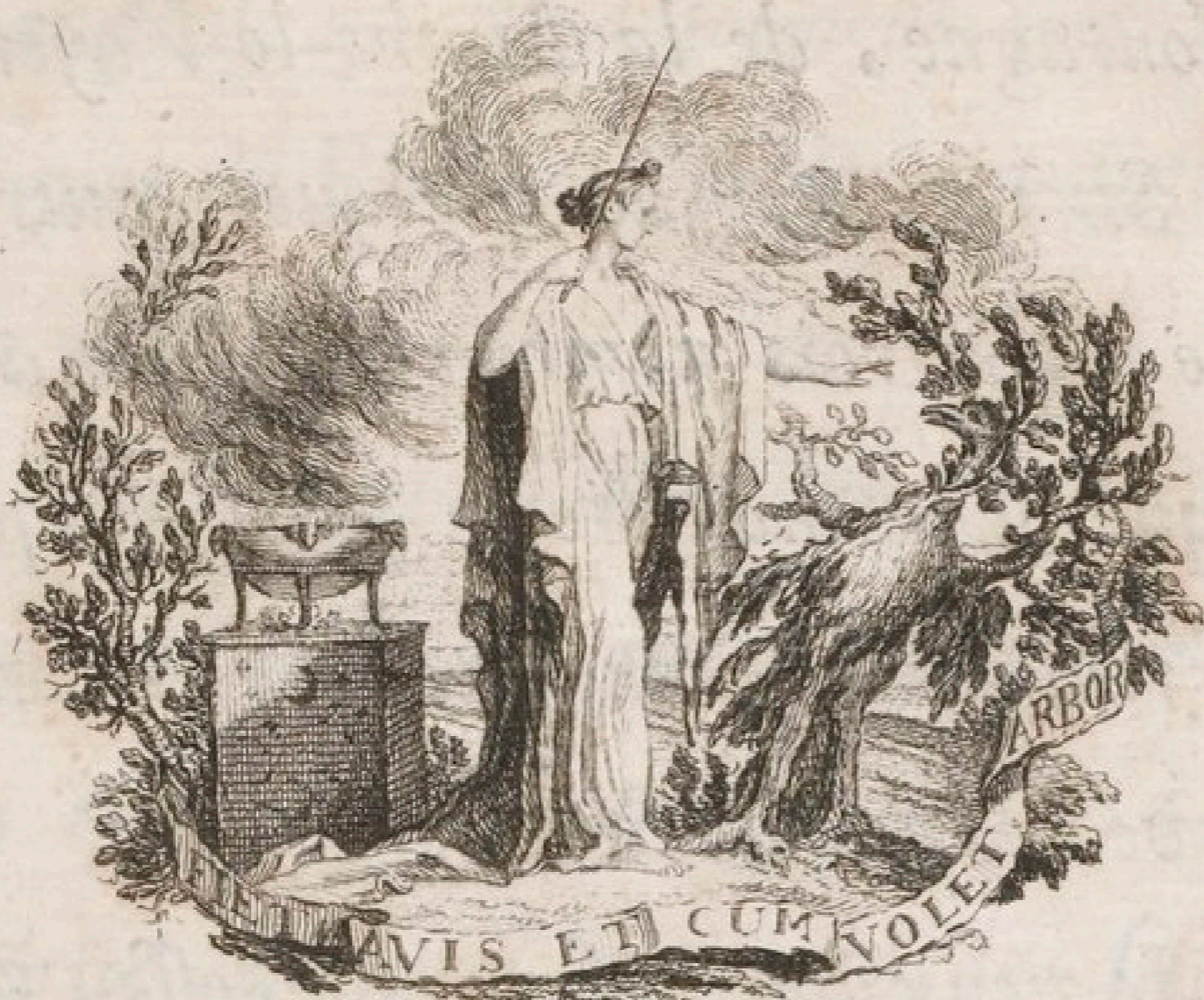


... ..

... ..

M. B. ...

... ..



*N. Blakey inv. Ingram Sculp.*

A

MADAME DE P\*\*\*



ADAME;

*JE n'opposerai point à vos reproches l'exemple de Rabelais, de*

*a ij*

*Montagne, de la Mothe-le-Vayer ;  
de Swift, & de quelques autres  
que je pourrois nommer, qui ont at-  
taqué de la maniere la plus cynique  
les ridicules de leurs tems, & con-  
servé le titre de Sages.*

*Je veux que le scandale cesse, &  
sans perdre le tems en apologie, j'a-  
bandonne la marotte & les grelots,  
pour ne les reprendre jamais, & je  
reviens à Socrate.*

*Sachez cependant qu'entre tous  
les avantages qu'il vous a plu  
d'attacher à ce retour, celui de  
vous en consacrer les premiers  
fruits est le seul qui m'ait flaté.*

E P I T R E. V

*J'ai pensé qu'ils ne seroient pas indignes du Public, s'ils étoient dignes de vous.*

*Puissiez-vous donc les agréer & voir avec indulgence votre nom à la tête d'un Ouvrage, triste à la vérité, mais où l'on traite des sujets qui vous sont familiers, & d'une façon qui ne vous est pas tout à fait étrangère.*

*Ce n'est, MADAME, ni à votre esprit ni à vos charmes; mais c'est seulement à vos talens & à vos connoissances que je me suis proposé de rendre hommage pour cette fois.*

*J'ai l'honneur d'être avec un  
profond respect,*

**MADAME,**

Votre très-humble & très-  
obéissant Serviteur,  
**DIDEROT.**



---

---

## *AVERTISSEMENT.*

**L**ES Mémoires que je présente au Public, en très-petit nombre, sont presque tous sur des sujets intéressans. J'ai désiré de les traiter d'une façon qui fut à la portée de la plûpart des Lecteurs; mais après quelques efforts inutiles, il en a fallu venir aux calculs, & il ne m'est resté d'autre ressource que de placer mes  $x$  & mes  $y$ , de maniere que ceux qui n'ont aucune connoissance de l'Algèbre, pussent les omettre, sans que ni le fil ni la clarté du discours en souffrissent. C'est ce que j'ai exécuté assez heureusement dans le premier Mémoire. La

## AVERTISSEMENT.

chose étoit impossible dans le second. On peut lire, sans presque aucune teinture de Mathématique, le troisième & le quatrième. Le cinquième s'est trouvé dans le cas du second. Je n'aurois point eu cet Avertissement à faire, si les Personnes, entre les mains de qui ce Livre pourra tomber, étoient toutes aussi instruites que celle qui m'a permis de le lui dédier : ses Ouvrages prouveront incessamment, que l'éloge que je fais ici de son esprit & de ses connoissances, est dans l'exacte vérité.

---

---

# T A B L E

## D E S M E M O I R E S.

### PREMIER MEMOIRE.

**P**RINCIPES généraux de la Science  
du Son, avec une méthode singuliere  
de fixer le son ; de maniere qu'on puisse  
jouer en quelque tems & en quelque  
lieu que ce soit, un morceau de Musi-  
sique exactement sur le même ton,  
page 1

### SECOND MEMOIRE.

Nouveau Compas fait du Cercle & de sa  
dévelopante, avec quelques uns de ses  
usages, 121

### TROISIE' ME MEMOIRE.

Examen d'un paradoxe de Mécanique sur  
la tension des cordes : ou maniere de dé-  
terminer par le son, si une corde atta-  
chée par une de ses extrémités à un point  
fixe & tirée de l'autre par un poids,

*n'est ni plus ni moins tendue , que si  
l'on substituoit au point fixe un poids  
égal à celui qui la tend déjà , pag. 163*

#### QUATRIÈME MEMOIRE.

*Projet d'un nouvel Orgue sur lequel on  
peut jouer toute piece sans sçavoir de  
Musique , avec quelques observations  
sur les Chronomètres. 169*

#### CINQUIÈME MEMOIRE.

*Lettre sur la résistance de l'air au mou-  
vement des Pendules , avec l'examen  
de la Théorie de Newton sur ce sujet.*

Fin de la Table.

---

#### E R R A T A.

*Page 29. ligne 9. largeur , lisez lon-  
gueur.*

*Page 80. ligne 6. celles , lisez celle.*

---

A P P R O B A T I O N.

**J'**Ay lu, par ordre de Monseigneur le Chancelier, un Manuscrit comprenant des *Mémoires sur différens sujets de Mathématiques, Acoustique, Méchanique & Géométrie*, qui m'ont paru traités avec beaucoup de sagacité. A la Fere le premier Mars 1748.

Signé, BELIDOR.

---

P R I V I L E G E D U R O I.

**L**OUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT : Notre bien amé LAURENT DURAND, Libraire à Paris, Nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage qui a pour titre : *Mémoires sur différens sujets de Mathématique, Acoustique, Méchanique & Géométrie*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer ledit Ouvrage en un ou plusieurs Volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre, & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de neuf années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes; faisons défenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucuns Extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changemens, ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de 3000 liv. d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts. A la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires &

Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression de cet Ouvrage sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beau caractère, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modèle sous le contre-scel des Présentes ; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725 ; qu'avant de les exposer en vente, le Manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit Ouvrage sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier le sieur Daguesseau, Chancelier de France, le tout à peine de nullité des présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposé ou ses ayant cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchemens. Voulons que la copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenue pour dûment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraires : CAR tel est notre plaisir. **DONNE'** à Versailles le 10 jour du mois de May, l'an de grace 1748, & de notre Regne le trente-troisième, Par le Roi en son Conseil.

S A I N S O N.

*Registré sur le Registre 11 de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N<sup>o</sup>. 947, fol 837, conformément aux anciens Réglemens confirmés par celui du 28 Février 1723. A Paris le 26 May 1748.*

G. CAVELIER, Syndic.

**PREMIER**



*N. Blakey Londineus pin.*

*D. Sornique Sculp.*

# PREMIER MÉMOIRE.

*Principes généraux d'Acoustique.*

I.

**A** NE considérer que les sons, leur véhicule & la conformation des organes, on croiroit qu'un Adagio de Michel, une Gigue de Corelli, une Ouverture de Rameau, une Chaconne de Lulli, auroient été il y a deux mille ans comme aujourd'hui, & de-

A

vroient être au fond de la Tartarie comme à Paris, des pieces de Musique admirables. Cependant rien de plus contraire à l'expérience. Si nous détestons la Musique des Barbares, les Barbares n'ont guères de goût pour la nôtre; & en admettant toutes les merveilles qu'on raconte de la Musique des Anciens, il est à présumer que nos plus beaux Concerts auroient été fort insipides pour eux. Mais sans exercer la crédulité du Lecteur, en sortant de notre âge & de notre voisinage; les Italiens ne font pas grand cas de la Musique Française, & il n'y a pas long-tems que les François avoient un mépris souverain pour la Musique Italienne. Quoi donc, la Musique seroit-elle une de ces choses soumises aux caprices des peuples, à la diversité des lieux & à la révolution des tems?

On s'accorde cependant en un



point ; c'est que , tout étant égal d'ailleurs , l'octave , la quinte , la quarte , les tierces & les sixtes employées dans l'harmonie , affectent l'oreille plus agréablement que les septièmes , les secondes , le triton & les autres intervalles que nous appellons dissonans. Cela posé , je raisonne ainsi.

Si ce consentement unanime avoit un fondement réel dans la nature ; si en effet tous les sons n'étoient pas également propres à former des consonances agréables , pourroit-on regarder la succession des sons & des consonances , comme arbitraire ? Quoi , les sons plairoient à l'oreille en se succédant indistinctement , tandis qu'il y auroit un choix délicat à faire pour arriver au même but , en les unissant. Cela n'est pas vraisemblable.

I I.

Dans toutes les conjonctures où  
Aij

#### 4 PRINCIPES GENERAUX

nos sens sont interessés , il faut avoir égard à l'objet , à l'état du sens , à l'image ou à l'impression transmise à l'esprit , à la condition de l'esprit dans le moment qu'il la reçoit & au jugement qu'il en porte.

L'état de l'objet est quelquefois indépendant de moi , mais je connoîtrai toujours si cet état est bon ou mauvais , par l'usage auquel l'objet est destiné. L'organe peut être pur ou vicié. L'image ou l'impression suit la condition de l'organe. L'esprit est sujet à des révolutions ; & de-là naît une foule de jugemens divers.

Qui prendrai - je pour guide ? A qui m'en rapporterai - je ? Est-ce à vous ? Est - ce à moi ? C'est à celui qui bien instruit de la destination de l'objet , ne risque pas de se tromper sur sa condition ; qui a l'organe pur ; qui jouit d'un esprit sain , & en qui les images des objets ne sont point défigurées par les sens.

Je ne m'arrêterai point à l'application de ces principes à la science des sons; elle est trop facile à faire. J'observerai seulement en général qu'un objet est plus ou moins compliqué, selon qu'il offre à l'esprit plus ou moins de rapports à saisir & à combiner en même-tems, & selon que ces rapports sont plus ou moins éloignés.

Nous démontrerons dans la suite que le plaisir musical consiste dans la perception des rapports des sons. D'où il s'enfuit évidemment, qu'il sera d'autant plus difficile de juger d'une piece de Musique, qu'elle sera plus chargée de ces rapports & que ces rapports seront plus éloignés.

Quand on sçaura comment l'oreille estime les intervalles des sons, on ne balancera point à prononcer qu'elle appercevra plus facilement le rapport de deux sons qui sont l'un à l'autre comme 1 à 2, que s'ils étoient entr'eux

6 PRINCIPES GENERAUX

comme 18 à 19. Cela posé, les rapports d'une suite de tons requereroient plus de talent, d'exercice & d'attention pour être apperçus & conséquemment écoutés avec plaisir, qu'il n'en faudroit pour chacun de ces rapports pris en particulier. Autre chose est, estimer les rapports des sons qui se succedent dans une piece; autre chose, combiner ces rapports entr'eux, les comparer, les distinguer tous offerts en même tems dans une harmonie, & conférer les parties successives de cette harmonie les unes avec les autres. Tel peut embrasser dans sa tête toutes les parties d'un édifice immense; tel autre fait à peine le rapport d'une colonne avec son piedestal.

Si donc la mélodie & l'harmonie multiplient dans un ouvrage les rapports, de sorte qu'il n'y ait qu'une oreille des mieux exercées qui puisse les saisir tous, elle ne sera goûtée que

d'un petit nombre, de ceux qui auront dans l'organe une aptitude, un discernement proportionné à la multitude de ces rapports; & c'est ainsi qu'il arrivera que le chant des Barbares sera trop simple pour nous, & le notre trop composé pour eux.

L'expérience vient à l'appui de mes idées. On nous assure qu'un Payfan, doué d'une oreille délicate, ne pût supporter l'ensemble d'un excellent duo de Flutes dont les parties séparées l'avoient enchanté tour à tour.

La Musique a donc des principes invariables & une théorie. C'est une vérité que les Anciens ont connue. Pithagore posa les premiers fondemens de la science des sons. Il ignora comment l'oreille apprétie les rapports; il se trompa même sur leurs limites, mais il découvrit que leur perception étoit la source du plaisir musical.

Aristoxene , ne rencontrant point dans la doctrine de Pithagore les vrais principes de l'harmonie, regarda comme fausse une méthode qui n'étoit que défectueuse , & sans s'occuper à la rectifier , bannit de la composition , les nombres & le calcul & s'en remit à l'oreille seule du choix & de la succession des consonances. Ensorte qu'on peut dire que Pithagore se trompa en donnant trop à ses proportions , & Aristoxtene , en les réduisant à rien. Si Pithagore , après avoir compris que le plaisir qui naît de l'harmonie , consiste dans la perception des rapports des sons , eût consulté l'expérience pour fixer les limites de ces rapports , Aristoxtene eût été satisfait. Celui-ci ne poussa point toutefois le scepticisme musical , jusqu'à traiter l'harmonie , de science arbitraire.

## III.

La Musique a le son pour objet ; & le plaisir de l'oreille est sa fin. Que le son existe dans l'air, c'est un fait constaté par le raisonnement & par l'expérience. Un corps sonore ne communique avec nos oreilles, que par l'air qui les environne ; où prendrions-nous donc le véhicule du son, si ce fluide ne l'étoit pas ? Car il n'en est pas de l'ouïe, comme de l'odorat & de la vue ; & ce ne sont pas des molécules échappées du corps sonore qui viennent frapper nos oreilles. Le son d'une cloche renfermée dans la machine pneumatique s'affoiblit à mesure qu'on pompe l'air, & s'éteint quand le récipient est vuide.

L'air est donc le véhicule du son. Mais quelle est l'altération qui survient dans ce milieu à l'occasion du corps sonore ? C'est ce que nous allons ex-

poser. Si vous pincez une corde d'instrument, vous y remarquerez un mouvement qui la fait aller & venir avec vitesse en delà & en deçà de son état de repos, & ce mouvement sera d'autant plus sensible que la corde sera plus grosse. Appliquez votre main sur une cloche en volée & vous la sentirez frémir. La corde vient-elle à se détendre ou la cloche à se fendre ? Plus de frémissement ; plus de son.

L'air n'agit donc sur nos oreilles qu'en conséquence de ce frémissement. C'est donc ce frémissement qui le modifie. Mais comment ? le voici. En vertu des vibrations du corps sonore, l'air environnant en prend & exerce de semblables sur ses particules les plus voisines, celles-ci sur d'autres qui leur sont contiguës, & ainsi de suite, avec cette différence seule, que l'action des particules les unes sur les autres est d'autant plus grande,



que la distance au corps sonore est plus petite.

L'air mis en ondulations par le corps sonore vient frapper le tympan. Le tympan est une membrane tendue au fond de l'oreille, comme la peau sur un tambour; & c'est de-là que cette membrane a pris son nom. L'air agit sur elle & lui communique des pulsations qu'elle transmet aux nerfs auditifs. C'est ainsi que se produit la sensation que nous appellons son.

Le son par rapport à nous n'est donc autre chose qu'une sensation excitée à l'occasion des pulsations successives que le tympan reçoit de l'air ondulant qui remplit nos oreilles.

Il suit de-là que la propagation du son n'est pas instantanée. Le son ne parcourt un espace déterminé que dans un tems fini. Mais ce que je regarde comme un des phénomènes de la nature les plus inexplicables, c'est que

son mouvement est uniforme. Fort ou foible, grave ou aigu, sa vitesse est constante. Les vicissitudes que la différence des lieux & des températures peut causer dans la densité de l'air & la force élastique de ses molécules, augmenteront ou diminueront la vitesse du son; mais si l'on trouve qu'il parcourt  $m$  de pieds dans une seconde; quoique  $m$  puisse varier d'un instant à l'autre, il parcourra  $2m$  de pieds en 2 secondes,  $3m$  de pieds en 3 secondes, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il se fasse quelque révolution dans l'air.

Si l'on s'en rapporte à Halley & à Flamsteed, le son parcourt en Angleterre 1070 pieds de France en une seconde de tems. Sur la parole du Pere Mersene & de Gassendi, on assuroit, il n'y a pas encore long-tems, que le vent favorable n'accélérerait point le son, & qu'il n'étoit point retardé par un vent contraire. Mais depuis les ex-

périences de Derham & celles que l'Académie a faites il y a quelques années, cela passe pour une erreur.

## I V.

Après avoir parlé du son en général, il est naturel de passer aux especes de son. Les causes nous en indiquent une distribution fort simple.

Le son naît ou des vibrations d'un corps tel que les cordes & les cloches; ou de la dilatation subite d'un air comprimé, tel que le bruit des Fusils, des Canons, du Tonnerre & des corps agités ou lancés dans l'air; ou de l'inspiration dans un instrument à vent, tel qu'une Flute, un Basson, un Hautbois, une Trompette.

Les cordes tendues, soit de léton, soit à boyaux, frémissent, oscillent, lorsqu'elles sont frappées. Le coup qu'on leur donne avec une touche ou un archet, les écarte de l'état de re-

pos ; elles passent & repassent en delà & en deçà de la ligne droite , d'un mouvement accéléré qui ne leur permet de s'y fixer, que quand il s'éteint par la résistance qui ralentit peu à peu les vibrations.

Connoissant la longueur d'une corde , son poids avec celui qui la tend , on détermine le nombre des vibrations qu'elle fait dans un tems donné. M. Taylor , contemporain de Newton , tenta le premier la solution de ce Problème. Ayant à déduire de ses formules tout ce qui concerne les cordes , je ne peux me dispenser d'indiquer la route qu'il faut suivre pour les obtenir & les raisons qu'on a de les regarder comme exactes , quoique la première de ses propositions soit fausse , comme nous aurons en même tems l'occasion de l'observer.

La solution de M. de Taylor est fondée sur deux faits d'expérience ;

l'un que la plus grande excursion de la corde au delà de la ligne de repos est fort petite relativement à sa longueur ; & l'autre que tous ses points parviennent en même tems à la ligne de repos. On peut s'affurer par les yeux de la premiere de ces suppositions , & consulter les élémens de Physique de Gravesande & l'harmonie universelle du Pere Mersene sur la seconde.

## L E M M E I.

*Si les ordonnées SB, SP, (Fig. 1.) de deux courbes AB, AP, dont l'abscisse est commune, ont entr'elles une raison donnée ; les courbures au sommet des ordonnées seront entr'elles comme les ordonnées, lorsque les ordonnées seront infiniment petites, & les courbes sur le point de coïncider avec leur axe AS.*

## DÉMONSTRATION.

Les ordonnées étant en raison donnée, les tangentes aux points  $B$  &  $P$  concourront en un même point  $T$  de l'axe  $AS$ . Car menant  $Kh$  infiniment proche de  $SB$ , on aura par hypothèse  $ql. rh :: SP. SB$ , ou  $ql. SP :: rh. SB$ ; & par la similitude des triangles,  $ql. SP :: qP$  ou  $SK. ST$ , &  $rh. SB :: rB$  ou  $SK. St$ . Donc  $SK. ST :: SK. St$ . Donc  $ST = St$ .

On a donc  $sC. SB :: sc. SP$ . Mais par hypothèse  $SB. SP :: sb. sp$ . Donc  $sC. sc :: sb. sp$ , &  $sC - sb, sc - sp :: bC. pc :: SB. SP$ .

Soient maintenant les ordonnées  $sb$ ,  $SB$  infiniment proches;  $bC$  &  $pc$  pourront être regardées comme la mesure des angles de contact, lorsque  $SB$  &  $SP$  décroissant à l'infini, les courbes feront sur le point de coïncider avec l'axe  $As$ . Car dans ce cas  $Bb$  se rectifiant

rectifiant devient égale à  $Pp$ ; de plus les angles de contact sont entr'eux comme  $\frac{bC}{Bb}$  à  $\frac{pc}{Pp}$ .

Car (*Fig. 2.*) l'angle  $APB$  est à l'angle  $BPC$  ou  $EPF$  comme  $AB$  à  $BC$  ou comme  $\frac{AB}{AP}$  à  $\frac{BC}{AP}$ . Mais  $\frac{BC}{AP} = \frac{EF}{EP}$ . Donc l'angle  $APB$  est à l'angle  $EPF$  comme  $\frac{AB}{AP}$  à  $\frac{EF}{EP}$ .

Donc les courbures en  $B$  &  $P$  (*Fig. 1.*) étant proportionnelles aux angles de contact, seront ici comme  $\frac{bC}{Bb}$  à  $\frac{pc}{Pp}$ . C'est-à-dire, à cause de  $Bb = Pp$ , comme  $bC$  à  $pc$ , ou comme  $SB$  à  $SP$ . Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME II.

La force accélératrice d'un point quelconque  $P$ , (*Fig. 3.*) d'un fil élastique tendu & d'une grosseur uniforme, est dans  
B

18 PRINCIPES GÉNÉRAUX  
ses petites vibrations, comme la courbure  
du fil en ce point.

DEMONSTRATION.

Supposez que le fil élastique  $AC$  prenne dans une de ses vibrations, la figure  $APC$  infiniment proche de l'axe  $AC$ . Le fil étant également tendu dans toute sa longueur  $AC$  par le poids  $G$ , la tension fera à peu près la même, à tous les points de la courbe  $APC$ .

Soit  $p$  infiniment proche de  $P$ . Tirez les tangentes  $Pt, pt$ . Achevez le parallélogramme  $ptPr$ . Abaissez les perpendiculaires  $PO, pO$  sur les tangentes. Supposons maintenant que les forces égales qui tirent en sens contraires le petit arc  $Pp$ , soient exprimées par les tangentes  $tP; tp$ . Décomposez ces forces en deux autres  $pZ, PZ$  &  $tZ, pZ$ . Les forces égales & directement opposées  $pZ, PZ$  se détrui-



sent. Le petit arc  $Pp$  n'est donc animé que des deux forces conjointes  $tZ$ , c'est-à-dire de la force  $tr$  dans la direction  $tr$  ou  $PO$ . La force motrice de cet arc dans la direction  $tr$  est donc à la tension du fil en  $P$  comme  $tr$  à  $tP$ . Mais  $Pp$  pouvant passer pour un arc de cercle décrit du centre  $O$ , on a par la nature du cercle, l'angle  $tPr =$  l'angle  $POp$ . Donc les triangles isocèles  $tPr$  &  $POp$  sont semblables. Donc  $Pp \cdot PO :: tr \cdot tP$ . Donc la force motrice qui anime  $Pp$  dans la direction  $tr$ , est à la tension du fil donnée  $G$ , comme  $Pp$  à  $PO$ . Or  $G$  est constante; donc cette force motrice sera comme  $\frac{Pp}{PO}$ . Mais la force accélératrice est toujours en raison composée de la directe de la force motrice & de l'inverse de la matière à mouvoir. La matière à mouvoir est ici comme  $Pp$ , à cause de la grosseur unifor-

20 PRINCIPES GÉNÉRAUX  
me du fil. Donc la force accélératrice  
est comme  $\frac{1}{PO}$ , ou en raison inverse  
du rayon osculateur, ou de la cour-  
bure au point  $P$ . Ce q. f. d.

Après avoir établi ces Lemmes, M.  
Taylor prétend, que si une corde  $AC$   
(*Fig. 4.*) d'une grosseur uniforme &  
tenduë par le poids  $G$  oscille, de ma-  
niere que son plus grand écart de la  
ligne de repos  $AC$ , soit presque insen-  
sible, & conséquemment que son ac-  
croissement en longueur, dans sa plus  
grande vibration, ne cause aucune  
inégalité dans la tension, & qu'on puis-  
se négliger sans erreur l'inclinaison  
des rayons osculateurs sur l'axe; il pré-  
tend, dis-je, que la nature de la cour-  
be  $AQPC$  sera telle, qu'ayant tiré  
deux ordonnées quelconques  $QR$ ,  
 $PS$ , la courbure en  $R$  sera à la cour-  
bure en  $P$  comme  $QR$  à  $PS$ .

Mais il est constant que la corde

peut prendre une infinité d'autres figures que celle que cet Auteur lui assigne , & que tous ses points peuvent arriver à la fois à la ligne droite dans une infinité d'autres cas où elle n'a point cette figure. On déduit d'un Mémoire que M. d'Alembert a envoyé à l'Académie de Berlin , sur les cordes vibrantes , qu'en nommant  $a$  l'espace qu'un corps pesant parcourt en descendant librement pendant un tems donné  $\theta$  ,  $m$  le rapport de la force tendante au poids de la corde ,  $l$  la longueur de la corde , entendant par ce mot la longueur d'une partie interceptée entre deux chevalets , & supposant que la courbe n'a point de ventres ni de nœuds , on déduit , dis-je , que le tems d'une vibration est  $= \frac{2\theta\sqrt{l}}{\sqrt{2am}}$  , quelque figure que la corde prenne.

Mais la proposition de M. Taylor deviendra vraie , si on la rend condi-

22 *PRINCIPES GENERAUX*  
tionelle , & si on l'énonce de la ma-  
niere suivante.

PROPOSITION I.

*Si la nature de la courbe APQL,*  
(Fig. 4.) *est telle qu'ayant tiré deux or-*  
*données quelconques QR, PS, la cour-*  
*bure en Q soit à la courbure en P, comme*  
*QP à PS, je dis que tous les points de*  
*cette courbe arriveront en même tems à la*  
*ligne droite.*

DEMONSTRATION.

Puisque , par hypothese , la courbu-  
re en *P* est à la courbure en *Q* comme  
*PS* à *QR* ; donc par le Lemme 2 ,  
la force accélératrice en *P* est à la for-  
ce accélératrice en *Q* , comme *PS* à  
*QR* ; donc les espaces parcourus en  
tems égaux *Pp* , *Qq* , sont entr'eux  
comme *PS* à *QR* , ou *sub-trahendo* ,  
comme *pS* à *qR*. Donc *pS* & *qR* sont  
dans la raison donnée de *PS* à *QR* ;

donc, Lemme premier, les courbures en  $p$  &  $q$ ; & Lemme 2, les forces accélératrices en ces points, & par conséquent les espaces parcourus  $pm$ ,  $qn$ , font entr'eux comme  $pS$  à  $qR$ , ou *sub-trahendo*, comme  $mS$  à  $nR$ ; donc en continuant le même raisonnement, les forces accélératrices font toujours comme les espaces qui restent à parcourir; donc, pag. 31. Cor. 1. liv. 1. princip. math. les points  $P$  &  $Q$  arriveront en même tems à la ligne de repos. Ce q. f. d.

## PROPOSITION II.

*Les axes AC & BD étant donnés, décrire la courbe musicale de Taylor.*

## SOLUTION.

Tracez (*Fig. 6.*) la développante  $Eeg$  du quart de cercle  $BNE$ . Tirez les tangentes  $Bg$ ,  $Ne$ . Prenez  $Mh = Ne$  &  $hF = Bg$ . Faites  $hi$  égale

B iij

& parallèle à  $DC$ , c'est-à-dire, à la moitié de la corde. Achevez le triangle  $Fhi$ . Je dis que le point  $P$  où la ligne  $Fi$  coupe la perpendiculaire  $MP$ , appartient à la courbe musicale.

## DEMONSTRATION.

Soit (*Fig. 5.*)  $BD = a$ ,  $AC = l$ ,  $BM = x$ ,  $PM = y$ , l'arc  $BP = s$ , & le rayon osculateur en  $B = r$ . En faisant  $Pp$  constante, les formules donnent pour le rayon osculateur en  $P$  ou pour  $PO$ ,  $-\frac{ds dx}{dy}$ .

On a donc par la nature de la courbe  $a - x :: -\frac{ds dx}{dy} \cdot r$ . Donc  $rady = xdxds - a dxds$ . Intégrant & ajoutant la constante  $Q ds$ , il vient  $rady = \frac{1}{2} xxds - axds + Q ds$ . Mais en supposant  $x = 0$ , on voit que  $dy = ds$ . Donc  $Q = ra$ . Donc l'équation  $rady = ra + \frac{xx}{2} - axds$  exprime la nature de la courbe.

Soit  $ax - \frac{1}{2}xx = zz$ , on aura  $rad y$   
 $= \frac{ra - zz ds}{ds}$ ; &  $rraady^2 = \frac{ra - zz}{ds^2}$   
 $\times ds^2$ . Mais  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ . Ce  
 qui donne  $\frac{2razz - z^4 dy^2}{ra - zz^2} =$   
 $ra - zz dx^2$ . Mais la courbe  $ABC$  se  
 confondant presque avec l'axe  $AC$  par  
 hypothese; la quantité  $zz =$  presque  $0$   
 relativement à  $ra$ ; car  $r$  est très-grande  
 par rapport à  $a$  &  $x$ . L'équation se trans-  
 forme donc en  $2razz dy^2 = rradx^2$ .

D'où l'on tire  $dy = \frac{r^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$

$\times \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$ .

Soit une ordonnée  $mn$  infiniment  
 proche de  $MN$ , &  $Nt$  parallele à  
 $BD$ . Par la nature du cercle  $MN$ .  
 $ND :: Nt. Nn$ , ou  $\sqrt{2ax - xx}$ .  
 $a :: dx. Nn = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$ . On a donc  
 $dy = Nn \times \sqrt{\frac{r}{a}}$ , & intégrant  $y =$   
 $BN \times \sqrt{\frac{r}{a}}$ , à quoi il ne faut ni ajou-

ter, ni ôter; car faisant  $y=0$ ,  $BN$  devient aussi 0.

Mais lorsque  $PM=CD$ , ou  $y=\frac{l}{2}$ ; alors  $BN=BNE$  & par conséquent  $\frac{l}{2}=BNE \times \sqrt{\frac{r}{a}}$  ou  $\sqrt{\frac{r}{a}}=\frac{\frac{l}{2}}{BNE}$ .  
Donc en tout point de la courbe, substitution faite, on aura  $y=\frac{BN \times \frac{l}{2}}{BNE}$  ou  $y \cdot \frac{l}{2} :: BN \cdot BNE$ .

Mais (Fig. 6.)  $Fh=BNE$ ,  $MF=BN$ ,  $hi=DC=\frac{l}{2}$ . Donc  $MP=y$ . Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE.

$PS$  étant à  $BD$  comme  $r$  à  $PO$ , on aura  $PO \times PS=ar$ . Soit  $i$  à  $c$  comme le diamètre à la circonférence, & par conséquent  $a \cdot BNE :: i \cdot \frac{l}{2}c$ , ou  $BNE = \frac{l}{2}ac$ . Et puisque  $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{l}{2}}{BNE}$ ;  $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{l}{ac}$ , &  $\frac{r}{a} = \frac{ll}{aacc}$  ou  $r = \frac{ll}{acc}$  &  $PO \times PS = \frac{ll}{cc}$ .



PROPOSITION III.

Soit le rapport du diametre à la circonférence  $= \frac{1}{c}$ , la longueur d'une corde d'instrument uniformément épaisse  $= 1$ , son poids  $= P$ ; le poids qui la tend  $= G$  & la longueur d'un pendule qui se meut dans une cycloïde  $= D$ .

Je dis que le tems d'une vibration de la corde sera au tems d'une oscillation du pendule, en raison sous-doublée de  $P1$  à  $c c D G$ , & le nombre des vibrations de la corde dans le tems d'une oscillation du pendule  $= \frac{c \sqrt{D G}}{P1}$ .

DEMONSTRATION.

Premiere partie. Soit la force dont la particule  $Pp$  est pressée au lieu  $P = A$ ; son poids  $= B$ . On a, Lemme 2,  $A. G :: Pp. PO$ , & à cause de l'uniformité d'épaisseur,  $P. B :: l. Pp$ , & conjungendo  $P \times A. B \times G :: l.$

$PO$ , ou  $A. B :: G \times l. PO \times P$ .

Maintenant si la particule  $Pp$  oscilloit dans une cycloïde dont le périmètre entier fut égal à  $2PS$ , en vertu d'une force motrice ou d'un poids  $A$ ; le tems d'une de ses oscillations dans la cycloïde feroit égal au tems d'une de ses vibrations sur la corde; car la force accélératrice de la particule dans la cycloïde décroît en raison de la distance au point le plus bas, de même que dans la corde en raison de la distance au point  $S$ ; & d'ailleurs, la force motrice de la particule dans la cycloïde feroit à son point le plus haut,  $A$  ou telle qu'on l'a supposée à la même particule sur la corde. *Voy.* le Corol. de la propos. 51. du liv. 1. de Newton.

Mais si l'élément  $Pp$ , au lieu de se mouvoir dans une cycloïde dont le périmètre feroit égal à  $2PS$  & la force motrice feroit  $A$ , oscilloit dans une cycloïde dont le périmètre fut  $2D$ ,

en vertu de son poids  $B$  ; par une propriété de la cycloïde, démontrée corol. de la propof. 50. du liv. 1. des princip. math. de Neuton ; la longueur de ce second pendule seroit  $= D$ . Or par la propof. 24. du même Auteur, liv. 2 ; les quantités de matiere suspenduës étant égales, le tems d'une oscillation d'un pendule, dont la largeur est  $D$ , & dont la force motrice en commençant est  $B$ , est au tems d'un oscillation d'un pendule, dont la longueur est  $PS$  & la force motrice  $A$ , en raison composée de la sous-doublée de la longueur  $D$  à la longueur  $PS$ , & de la sous-doublée de la force  $A$  au poids  $B$ . Mais le tems d'une vibration de l'élément  $Pp$  animé sur la corde, d'une force  $A$ , est égal au tems d'une oscillation de cet élément dans une cycloïde dont le périmètre seroit  $2PS$  & partant  $PS$ , la longueur du pendule mû en vertu de la même force

$A$ , comme nous avons vû.

Donc le tems d'une vibration de la corde ou de la particule  $Pp$  animée de la force  $A$ , est au tems d'une oscillation d'un pendule, dont la longueur est  $D$  & dont la force motrice en commençant est  $B$ , en raison composée de la sous-doublée de la longueur  $PS$  à la longueur  $D$  & de la sous-doublée du poids  $B$  à la force  $A$ . C'est-à-dire, en raison sous-doublée de la quantité  $PO \times PS \times P$  à la quantité  $GlD$ ; & à cause de  $PO \times PS = \frac{ll}{cc}$  en raison sous-doublée de  $Pl$  à  $ccDG$ .

Il ne me reste plus à trouver que le nombre des vibrations isochrones que la corde fait pendant une oscillation du pendule. C'est la seconde partie de la démonstration.

Seconde partie. Soit ce nombre  $= n$ . Soit  $T$  le tems d'une vibration de la corde.  $t$  le tems d'une oscilla-

tion du pendule. Le tems d'une vibration de la corde pris autant de fois qu'elle fait de vibrations pendant une oscillation du pendule, doit être égal au tems d'une seule oscillation du pendule ; c'est-à-dire, que  $nT = t$ , ou  $n. 1. :: t. T$ . Mais  $t. T :: \sqrt{ccDG}. \sqrt{Pl}$ . Donc  $n. 1 :: \sqrt{ccDG}. \sqrt{Pl}$ . Donc  $n = c\sqrt{\frac{GD}{Pl}}$ . Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si l'on compare deux cordes différentes entr'elles ;  $C$  &  $D$  étant des quantités constantes, les nombres de vibrations faites dans un tems donné feront comme  $\sqrt{\frac{G}{Pl}}$  ; mais les nombres de vibrations faites dans un tems donné étant d'autant plus grands que le tems d'une seule vibration est petit, on a  $\sqrt{\frac{G}{Pl}}. \sqrt{\frac{g}{pl}} :: t. T$ . ou  $T. t. ::$

$\sqrt{\frac{PL}{G}}$ .  $\sqrt{\frac{pl}{g}}$ , ou les tems des vibrations comme  $\sqrt{\frac{PL}{G}}$ .

## COROLLAIRE II.

Le Pendule dont la longueur  $D$  est de trois pieds , huit lignes  $\frac{1}{2}$  , ou de  $\frac{381}{24}$  pouces , fait une oscillation à chaque seconde , &  $c$  est à  $c$  comme 113 à 355. Substituant ces valeurs dans la

formule  $c \sqrt{\frac{GD}{PL}}$  , on trouve le nombre des vibrations d'une corde dans une seconde , à peu près comme

$$\frac{355}{113} \sqrt{\frac{881G}{24PL}} = 19.0341 \sqrt{\frac{G}{PL}}.$$

## REMARQUE I.

On n'entend dans tout ce calcul , par la longueur & le poids de la corde , que la longueur & le poids de la partie interceptée entre deux chevalets & qu'on fait résonner ; c'est à l'aide de ces

ces chevalets qu'on empêche la corde entière de frémir.

## R E M A R Q U E I I.

Quoique les formules de M. Taylor ne paroissent pas d'abord applicables à tous les cas, mais seulement à celui où la corde vibrante prend une certaine figure; elles sont cependant bonnes pour tous ceux où les points de la corde arrivent en même tems à la ligne de repos.

Car soit (*Fig. 7.*) une corde  $AB$ , fixe par ses deux extrémités en  $A$  & en  $B$ : si l'on imprime perpendiculairement à chaque point de cette corde une certaine vitesse, il est évident que cette corde mise en mouvement fera des vibrations. Si les vitesses imprimées à chaque point sont telles que tous les points arrivent en même tems à la ligne droite  $AB$ , en faisant leurs vibrations; alors le tems de ces vibra-

tions fera le même, quelle que soit la vitesse primitive imprimée à chaque point. Ainsi, soit que la corde doive prendre la figure donnée par Taylor, soit qu'elle en doive prendre une autre, le tems de ses vibrations fera toujours le même, & par conséquent elle fera entendre le même son. Nous nous contentons d'énoncer ces Propositions, dont la démonstration rigoureuse est difficile & nous meneroit trop loin.

Il en seroit de même si la corde avoit d'abord une figure  $ABC$  qu'elle eût été obligée de prendre par l'action de quelques puissances. Car il est évident que relâchant subitement cette corde elle fera des vibrations autour des points  $A$  &  $B$ ; & que si tous ses points doivent arriver en même tems à la ligne droite  $AB$ , sa figure ne fait rien à la durée de ses vibrations ni par conséquent au son qu'elle produit, du



moins relativement à son degré du grave à l'aigu ; quant à sa véhémence & à son uniformité, ce pourroit être autre chose.

Mais il est d'expérience, qu'une corde qui a été frappée par un archet, prend en assez peu de tems une figure telle que tous ses points arrivent en même tems à la ligne de repos. Ainsi les formules de Taylor peuvent être regardées comme générales & comme exprimant assez exactement le nombre des vibrations des cordes.

Cependant on trouve que, si l'on éloigne une corde de son point de repos en la touchant par son milieu, & que ses deux parties conservent toujours dans leurs vibrations la figure mixtiligne, ces vibrations seront de plus longue durée, que si on frappoit la corde en un autre point ; ce qui donne lieu de croire que ce n'est qu'après un certain nombre de vibrations, que

la corde acquiert une figure telle que tous ses points arrivent en même tems à la ligne droite, & que ses premières vibrations sont d'autant plus courtes qu'on la frappe plus loin de son milieu. C'est apparemment pour cette raison qu'une corde de violon, que l'on touche à vuide près du chevalet, rend un son plus aigu que si on la touche par son milieu.

Il en est de même si le coup dont on la frappe n'est pas appliqué avec une certaine modération. Le coup d'archet est-il violent, & l'écart de la ligne de repos devient-il sensible, les vibrations cessent d'être isochrones & se font en commençant un peu plus vite que dans la suite. Il en est encore en cela des vibrations des cordes, comme des oscillations d'un pendule qui ne sont isochrones que lorsqu'elles sont fort petites.

Il est inutile d'insister sur les varié-

tés que les suppositions qu'on peut faire, introduisent dans les formules précédentes. Il est évident que le nombre des vibrations d'une corde étant dans un tems donné comme la racine quarrée du poids qui la tend, divisé par le produit fait du poids de la corde & de sa longueur, si deux cordes sont de même longueur, les nombres de leurs vibrations dans un tems donné, feront comme les racines quarrées des poids qui les tendent divisés par les poids des cordes, & ainsi des autres hypotheses.

## V.

Les vibrations d'une corde produisent des ondulations dans l'air. L'air agite le tympan. Le tympan transmet son frémissement aux nerfs auditifs; & les nerfs auditifs ne font peut-être que répéter les vibrations de la corde. Cela supposé, l'oreille est un vrai tam-

bour de Basque. Le tympan represente la peau. Les nerfs auditifs répondent à la corde qui traverse la base ; & l'air fait l'office des baguettes ou des doigts.

Quoiqu'il en soit , il est certain que la célérité plus ou moins grande des vibrations distingue les sons en graves & en aigus. Un son est d'autant plus grave , que le nombre des vibrations qui frappent l'oreille dans un tems donné est petit. Un son est d'autant plus aigu que le nombre des vibrations est plus grand dans le même tems. Ceci est d'expérience. Attachez successivement différens poids à la même corde , vous en tirerez des sons d'autant plus aigus que les poids seront plus grands. Or il est évident que plus les poids sont grands , plus les vibrations sont promptes.

Nous avons donc une façon d'exprimer les rapports des sons du grave

à l'aigu. Il ne s'agit que de les considérer comme des quantités dont les nombres des vibrations produites dans un tems donné sont les mesures; car la longueur d'une corde, sa grosseur & le poids qui la tend, étant donnés, on a par les propositions précédentes l'expression en nombre, des vibrations produites dans un tems limité.

Voici donc ce que l'on entend précisément en Musique par une octave, une seconde, une tierce, une quarte, &c. Si vous pincez une corde & qu'elle fasse un certain nombre de vibrations dans un tems donné, 4 vibrations par exemple; trouvez moyen, soit en la raccourcissant, soit en la tendant d'un plus grand poids, de lui faire produire 8 vibrations dans le même tems donné & vous aurez un son qui sera, ce qu'on appelle, à l'octave du premier.

Si vous pincez une corde & qu'elle fasse deux vibrations dans un tems don-

né, trouvez moyen, soit en la raccourcissant, soit en la tendant d'un plus grand poids de lui faire produire 3 vibrations dans le même tems, & vous aurez l'intervalle du grave à l'aigu que les Musiciens appellent une quinte.

Or les formules précédentes donneront toujours de combien la corde doit être raccourcie, ou tendue de plus qu'elle ne l'étoit.

Mais il y a des mesures à garder avec nos sens, un tempérament à observer dans les choses qu'on leur présente. Ils ne peuvent embrasser un objet trop étendu. Un trop petit leur échappe. Tous les sons sensibles sont renfermés dans des limites au-delà desquels, ou trop graves ou trop aigus, ils deviennent inappréhensibles à l'oreille. Or on peut en quelque façon fixer ces limites. C'est ce que M. Euler a exécuté; & selon ses expériences & son calcul, tous les sons sensibles sont

compris en 30 & 7552, intervalle qui renferme huit octaves. C'est-à-dire que, selon ce sçavant Auteur, le son le plus grave appréciable à notre oreille, fait 30 vibrations par seconde, & le plus aigu, 7552 vibrations dans le même tems donné.

Un intervalle en général est la mesure de la différence de deux sons, dont l'un est grave & l'autre aigu.

Soient trois sons  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ;  $a$  est le plus grave;  $c$  le plus aigu;  $b$  est moyen entre  $a$  &  $c$ . Il est évident par la définition précédente, que l'intervalle de  $a$  à  $c$  est fait des intervalles de  $a$  à  $b$  & de  $b$  à  $c$ .

Si l'intervalle de  $a$  à  $b$  est égal à l'intervalle de  $b$  à  $c$ ; ce qui arrive toutes les fois que  $a. b :: b. c$ . Alors l'intervalle de  $a$  à  $c$ , fera double de l'intervalle de  $a$  à  $b$ .

D'où il s'enfuit que les intervalles doivent être exprimés par les valeurs

42 *PRINCIPES GÉNÉRAUX*  
des rapports que les sons ont entr'eux.  
Ainsi l'intervalle de  $a$  à  $b$ , doit être ex-  
primé par  $\frac{b}{a}$ , celui de  $b$  à  $c$ , par  $\frac{c}{b}$ ; ou  
ce qui est encore plus commode, on  
représentera le 1<sup>r</sup> par  $\log. b - \log. a$ ,  
& le second par  $\log. c - \log. b$ ; &  
faisant  $a = 2$ , &  $b = 3$ , on aura pour  
l'expression de l'intervalle que les Mu-  
siciens appellent une quinte  $l_3 - l_2$ .  
D'où l'on voit que, l'expression de  
l'octave étant  $l_2 - l_1$ , l'octave & la  
quinte sont des intervalles incommen-  
surables entr'eux, enforte qu'il n'y a  
aucun intervalle, quelque petit qu'il  
soit, qui les mesure exactement l'un  
& l'autre; ou aucune aliquote commu-  
ne entre  $l_1^2$  &  $l_2^3$ . Car il n'y a aucune  
puissance  $x$  entière ou fractionnaire qui  
soit telle que  $\frac{3^x}{2} = 2$ . En effet, soit  $x$   
 $= \frac{m}{n}$ . Donc  $\frac{3^m}{2^n} = 2^n$ . Ce qui est im-  
possible.



Il en fera de même de tous les intervalles qui seront exprimés par des logarithmes qui différencieront entr'eux comme  $l\frac{3}{2}$  &  $l\frac{5}{4}$ .

Au contraire, on pourra comparer les intervalles qui seront exprimés par des logarithmes de nombres qui seront des puissances d'une même racine. Ainsi l'intervalle  $\frac{27}{8}$  est à l'intervalle  $\frac{2}{4}$  comme 3 à 2. Car le premier est  $3 l\frac{3}{2}$  & le second est  $2 l\frac{3}{2}$ .

On a par la même voye que nous venons de suivre, la facilité d'ôter un intervalle d'un autre & de connoître l'intervalle restant. Si on demande, par exemple, quel est l'intervalle restant, après qu'on a ôté la quinte de l'octave; j'ôte  $l_3 - l_2$  de  $l_2$ , & j'ai  $2l_2 - l_3$ . Mais  $2l_2 = l_4$ . Donc  $2l_2 - l_3 = l_4 - l_3$  ou  $l\frac{4}{3}$  ou  $\frac{4}{3}$ , expression de l'intervalle connu sous le nom de quarte.

Lorsque les intervalles sont incom-

44 *PRINCIPES GENERAUX*  
 menfurables , on peut à l'aide des lo-  
 garithmes avoir en nombres leur rap-  
 port approché. Ainsi  $l_2 = 0.3010300$   
 &  $l_3 - l_2 = 0.1760913$ . L'intervalle  
 de l'octave est donc à l'intervalle de la  
 quinte comme 3010300 à 1760913.

*R E M A R Q U E.*

Pour abaisser cette fraction & avoir  
 des rapports , de plus en plus appro-  
 chés de celui qu'on cherche , il faut  
 diviser 301300 par 1760913. Il vient  
 pour quotient un entier plus un reste.  
 Soit cet entier  $= q$  & le reste  $= \frac{m}{n}$ .

Transformez  $\frac{m}{n}$  en  $\frac{1}{\frac{n}{m}}$ ; & le quotient  
 trouvé fera  $q + \frac{1}{\frac{n}{m}}$ . Soit le quotient  
 de  $\frac{n}{m} = r + \frac{s}{t}$  , le quotient trouvé  
 fera donc transformé derechef en  $q$   
 $+ \frac{1}{r + \frac{s}{t}}$ . Changez la fraction  $\frac{s}{t}$  en

$\frac{r}{t}$  & vous transformerez encore le

premier quotient en  $q + \frac{1}{r + \frac{1}{t}}$ , &

ainsi de suite.

Il est évident qu'à chaque transformation, on aura un nouveau rapport, plus approché du vrai que le rapport qui l'aura précédé.

Voici maintenant la manière de diviser un intervalle quelconque en parties égales. Prenez le logarithme de cet intervalle ; divisez - le en tant de parties que l'on voudra. Cherchez ensuite dans la table, le nombre qui correspondra à l'une de ces parties. Il est évident que ce nombre aura à l'unité le rapport cherché. Ainsi soit demandé un intervalle trois fois moindre que l'octave. Je cherche le logarithme de 2. J'en prens la troisième partie. Je regarde dans la table le nombre corres-

pendant à cette troisième partie, & il exprime par son rapport à l'unité, l'intervalle demandé.

*R E M A R Q U E.*

Mais on pourroit chercher pourquoi j'exprime indifféremment un intervalle par  $\frac{b}{a}$  ou par  $\log. b - \log. a$ , ces quantités n'étant pas les mêmes.

En voici la raison.  $\frac{b}{a}$  exprime proprement le rapport des nombres de vibrations qui constituent les sons; mais  $\log. b - \log. a$ , peut être regardé comme exprimant les intervalles, puisque si l'on fait glisser un chevalet sous une corde, tandis qu'à l'aide d'un archet on en tirera un son non interrompu, on entendra ce son croissant, pour ainsi dire, uniformément, depuis le degré le plus grave ou le son de la corde entière jusqu'à son octave & par delà.

Du reste il n'y auroit pas d'inconvénient à ne prendre ces expressions logarithmiques que comme une hypothèse. Il n'y a pas même d'apparence que M. Euler qui nous les propose, prétende les faire valoir davantage. Car on ne peut guère calculer ou comparer les sons en tant que sensations. Les longueurs des cordes & les nombres des vibrations qui les constituent, sont les seules choses comparables. Mais pour représenter les intervalles par des logarithmes, il faudroit, par exemple, qu'en entonnant une tierce majeure, l'excès de la sensation du dernier son sur la sensation du second, fût double de l'excès de la sensation de celui-ci sur le premier. Mais qu'est-ce que cela signifie ? & quand cela auroit un sens bien précis, qui sçait s'il est vrai ?

## V I.

La distinction des sons en graves &

en aigus n'est pas la seule qu'on puisse faire. On les considère encore comme forts & foibles. La force du son varie selon la distance au corps sonore. Il en est du son comme de la lumière, & en general de tout ce qui émane d'un point considéré comme centre. Plus la distance à laquelle le son est parvenu est grande, plus il s'est affoibli; & cet affoiblissement suit ordinairement la raison des quarrés des distances; c'est-à-dire, qu'à une distance double il est quatre fois plus foible; neuf fois à une distance triple, seize fois à une distance quadruple, & ainsi de suite; en supposant toutefois que sa propagation est libre: car si le son est dirigé de quelque côté par des causes particulières, à l'Orient, par exemple, lorsqu'il tend naturellement à se propager vers le Midi; la règle n'a plus lieu.

Si le son se répand & s'affoiblit  
comme

comme la lumière, il se réfléchit aussi comme elle, & il peut arriver qu'à la rencontre d'une surface dure & polie, plusieurs fibres sonores se réunissent dans un même lieu. Lorsque l'on se trouvera dans quelques unes de ces chambres artificielles aux angles desquelles des personnes parlent bas & s'entendent, malgré l'intervalle qui les sépare; on n'aura qu'à lever les yeux au plafond & l'on appercevra dans sa figure elliptique, la raison de ce phénomène.

Il est démontré que, si des foyers d'une ellipse, on tire deux lignes qui se coupent en un point quelconque de cette courbe, ces lignes feront sur la tangente en ce point, deux angles égaux. C'est-à-dire, qu'en considérant l'un comme angle d'incidence, l'autre fera l'angle de réflexion. Or les plafonds de ces chambres sont des ellipses dont les interlocuteurs occu-

50 *PRINCIPES GÉNÉRAUX*  
pent les foyers & où les fibres sonores qui partent de leurs bouches achèvent la figure 25 planche 4, des sections coniques du Marquis de l'Hôpital.

Les excursions d'une corde au-delà de la ligne de repos peuvent être plus ou moins grandes, sans augmenter ni diminuer en nombre dans un tems donné, c'est-là ce qui rend le son plus ou moins fort, sans changer son rapport à un autre son plus ou moins grave.

Il y a donc trois choses à considérer dans les vibrations, leur étendue qui fait l'intensité ou la véhémence du son; leur nombre qui le rend plus ou moins aigu, & leur isochronisme d'où dépend son uniformité.

J'entens par un son uniforme, celui qui est pendant toute sa durée également grave ou aigu. Si l'on veut qu'un son soit uniforme, ou garde en s'éteignant le même rapport à un son don-



né, que celui qu'il avoit en commençant, il faut que les vibrations qui fixent son degré, soient isochrones; & pour cet effet, la corde doit être suffisamment tendue, & le coup dont elle est frappée, modéré. Sans ces deux conditions, elle s'écartera sensiblement de la ligne de repos; ses premières vibrations feront plus promptes que les suivantes; aussi-tôt le son ne sera plus uniforme, & l'oreille se révoltera.

Le chagrin de l'organe naît de ce que le défaut d'isochronisme dans les vibrations, rendant le rapport d'un son variable, il ne sçait en quelle raison ce son qui le frappe est à celui qui le précède, l'accompagne ou le suit. Ce qui démontre que le plaisir musical consiste dans la perception des rapports des sons.

## REMARQUE.

Mais cette origine n'est pas particulière au plaisir musical. Le plaisir en général consiste dans la perception des rapports : ce principe a lieu en Poësie, en Peinture, en Architecture, en Morale, dans tous les arts & dans toutes les sciences. Une belle machine, un beau tableau, un beau portique ne nous plaisent que par les rapports que nous y remarquons : ne peut-on pas même dire, qu'il en est en cela d'une belle vie comme d'un beau concert. La perception des rapports est l'unique fondement de notre admiration & de nos plaisirs ; & c'est de là qu'il faut partir pour expliquer les phénomènes les plus délicats qui nous sont offerts par les sciences & les arts. Les choses qui nous paroissent les plus arbitraires, ont été suggérées par les rapports : & ce prin-

cipe doit servir de base à un essai philosophique sur le goût, s'il se trouve jamais quelqu'un assez instruit pour en faire une application générale à tout ce qu'il embrasse.

Mais si vous admettez une fois que le plaisir consiste dans la perception des rapports; vous serez contraint de faire un pas de plus, & de convenir que le plaisir doit varier avec les rapports, & que les rapports les plus simples se saisissant avec plus de facilité que les autres, doivent aussi plaire plus généralement. Or de tous les rapports, le plus simple, c'est celui d'égalité; il étoit donc naturel que l'esprit humain cherchât à l'introduire partout où il pouvoit avoir lieu. Aussi cela est-il arrivé. C'est par cette raison qu'on fait les aîles d'un bâtiment égales, & les côtés d'une fenêtre parallèles. Si la raison d'utilité demande qu'on s'en écarte, on lui obéit; mais c'est com-

me à regret , & l'artiste ne manque jamais de revenir au rapport d'égalité dont il s'étoit écarté. Ce retour que l'on attribue vulgairement à l'instinct , au caprice , à la fantaisie , n'est autre chose qu'un hommage rendu aux attraits naturels de l'harmonie & des rapports ; & c'est à lui que nous sommes redevables d'une infinité de petits ornemens minutieux que l'on traite tous les jours d'arbitraires & qui ne font rien moins. La seule architecture m'en fourniroit mille exemples ; mais ils seroient ici déplacés.

Je me contenterai d'appliquer mes idées à une observation que ceux qui ont quelque habitude d'entendre ou de lire de la Musique , auront faite ; c'est qu'ordinairement les sons aigus tiennent moins que les graves. Les dessus se précipitent , tandis que les basses vont lentement , à moins que le sujet n'exige qu'elles doublent le

pas. Croit-on que ce soit sans raison que les Musiciens ayent pratiqué de cette maniere, & que leur caprice est la seule regle qu'ils ayent suivie. Si on le croit, on se trompe.

Ils étoient secretement guidés par la perception des rapports : s'ils ont permis aux sons aigus de courir, & s'ils ont arrêté les sons graves; c'est que les rapports que ceux-ci ont entr'eux sont plus difficiles à saisir que les rapports de ceux là, tout étant égal d'ailleurs; puisque la corde qui rend des sons aigus fait beaucoup plus de vibrations dans un tems donné, que celle qui rend des sons graves. Voilà pour l'emploi des rapports simples, & maintenant voici pour le retour des rapports composés aux rapports simples.

Si l'esprit, qui est naturellement paresseux, s'accommode volontiers des rapports simples; comme il n'aime

pas moins la variété qu'il craint la fatigue, on est quelquefois forcé d'user de rapports composés, tantôt pour faire valoir les rapports simples, tantôt pour éviter la monotonie, tantôt pour ajouter à l'expression, & c'est de là que naît en Musique l'emploi que nous faisons de la dissonance; emploi plus ou moins fréquent, mais presque toujours nécessaire: mais la dissonance, selon les Musiciens, veut ordinairement être préparée & sauvée; ce qui bien entendu, ne signifie rien autre chose, que si l'on a de bonnes raisons d'abandonner les rapports simples pour en présenter à l'oreille de composés, il faut revenir sur le champ à l'emploi des premiers.

### O B J E C T I O N.

Mais comment se peut-il faire, dirait-on, que le plaisir des accords consiste dans la perception des rapports

des sons ? La connoissance de ces rapports accompagne-t-elle donc toujours la sensation ? c'est ce qu'il paroît difficile d'admettre ; car combien de gens , dont l'oreille est très-délicate , ignorent quel est le rapport des vibrations qui forment la quinte ou l'octave , à celles qui donnent le son fondamental. L'ame a-t-elle ces connoissances sans s'en appercevoir ; à peu près comme elle estime la grandeur & la distance des objets, sans la moindre notion de Géométrie ; quoi qu'une espece de Trigonométrie naturelle & secrete paroisse entrer pour beaucoup dans le jugement qu'elle en porte ?

## R E P O N S E.

Nous ne déciderons rien la dessus ; nous nous contenterons d'observer qu'il est d'expérience que les accords les plus parfaits sont formés par les sons qui ont entr'eux les rapports les

plus simples ; que ces rapports peuvent affecter notre ame de deux manieres , par sentiment ou par perception , & qu'ils n'affectent peut-être la plûpart des hommes que de la premiere maniere.

L'expérience apprend à modérer un archet selon la véhémence qu'on veut donner aux sons. Quant à la tension des cordes , on peut observer la regle suivante.

Il faut tendre les cordes autant qu'il est possible sans les rompre. Les résistances que des cordes minces d'une même matiere font à une puissance qui les tire dans le sens de leur longueur , sont comme leurs épaisseurs , & les épaisseurs comme les poids divisés par les longueurs. On prendra donc les poids tendans en raison composée de la directe des poids des cordes & de l'inverse de leurs longueurs.

Si le poids de la corde =  $q$ , sa lon-



gueur  $= a$ , & le poids tendant  $= p$ : il faut que  $p$  soit comme  $\frac{q}{a}$ , & par conséquent la fraction  $\frac{ap}{q}$  est constante.

Car  $P. p :: \frac{Q}{A}. \frac{q}{a}$ . Donc  $\frac{pQ}{A} = \frac{Pq}{a}$  &  
 $\frac{AP}{Q} = \frac{ap}{q}$ .

En prenant cette précaution, on pourra se promettre des sons également graves ou aigus pendant toute leur durée. Voyons maintenant ce qu'il y auroit à faire pour les avoir également forts.

## V I I.

Pour donner à des sons la même véhémence ; outre la longueur & le poids de la corde, il faudroit considérer encore & la force qui la met en mouvement & le lieu où cette force est appliquée. Mais la plupart des instrumens à cordes sont fabriqués de

maniere que la force pulsante est la même , & pour simplifier le calcul , nous supposerons qu'elle agit sur les cordes en des lieux semblables ; c'est-à-dire , ou aux milieux , ou aux tiers , ou aux quarts , &c.

Cela posé , la véhémence du son ne dépendra plus que de la vitesse avec laquelle les particules de l'air viendront frapper l'oreille à chaque vibration de la corde. Or cette vitesse des molécules de l'air qui constitue la force du son , est proportionnelle à la plus grande vitesse de la corde , & la plus grande vitesse de la corde est selon M. Euler , en raison sous-doublée de la directe du poids qui la tend & de l'inverse de sa longueur ; c'est-à-dire , en conservant les mêmes expressions que ci-devant , comme  $\sqrt{\frac{G}{L}}$ .

On lit page 11 de ses *tentamina Musicae* , *vehementia soni pendet à celeritate*

*quâ aeris particulæ quâvis chordæ vibratione in aurem impingunt ; hæcque ex celeritate chordæ maximâ est æstimanda. Est vero hæc celeritas proportionalis radici quadratæ ex pondere chordam tendente diviso per longitudinem ejus. D'où il conclut que pour que la force de deux sons soit la même , il faut que*

$$\sqrt{\frac{G}{L}} = \sqrt{\frac{g}{l}} , \text{ \& par conséquent que}$$

*les poids tendans soient comme les longueurs des cordes. Consequenter quò soni fiant æquabiles , necesse est ut pondus tendens semper sit ut chordæ longitudo.*

Mais j'avouerais que , de quelque façon que je me sois retourné , je n'ai jamais pû trouver la plus grande vitesse de la corde , comme la racine quarrée du poids qui la tend , divisé par sa longueur , sans supposer la masse de la corde constante. Or cette supposition n'a point été faite , & je doute qu'elle puisse avoir lieu ; car dans les

62 PRINCIPES GÉNÉRAUX  
 instrumens à cordes de léton, où l'é-  
 paisseur des cordes étant la même,  
 elles ne diffèrent que par leur lon-  
 gueur & leur tension, & dans ceux  
 où les cordes ont différentes longueur,  
 épaisseur & tension, la masse n'est assu-  
 rément pas la même dans chaque  
 corde.

Si M. Euler entend par la plus gran-  
 de vitesse de la corde, celle qu'elle  
 a en achevant sa première demi-vibra-  
 tion, je vais démontrer que  $\frac{c a \sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$  est  
 son expression.

### PROBLÈME.

*Trouver la plus grande vitesse de la  
 corde, ou celle qu'elle a en achevant sa  
 première demi-vibration.*

### SOLUTION.

Soient comme dans la Fig. 5.  $BD$   
 $= a$ ,  $AC = L$ ,  $BM = x$ ,  $PM = y$ ,

l'arc  $BP = s$ ; la masse de la corde  
 $= M$ . Le rayon osculateur en  $B = r$ .

Le rayon osculateur en  $P = -\frac{ds dx}{dy}$   
 & le rapport de la circonférence au  
 diamètre  $= \frac{1}{c}$ .

La masse de l'élément  $pP$  sera  $\frac{M.Pp}{L}$ .

Car à cause de l'uniformité de la cor-  
 de  $L$ .  $M :: Pp$ . à la masse de l'élément  
 $Pp$ . Donc cette masse  $= \frac{M.Pp}{L}$ .

La force motrice en  $B$  est par le  
 Lemme 2,  $\frac{G.Pp}{r}$ . Or la force accélé-  
 ratrice étant en raison composée de la  
 directe de la force motrice & de l'in-  
 verse de la matiere à mouvoir, & la  
 matiere à mouvoir étant ici  $\frac{M.Pp}{L}$ , on  
 aura pour la force accélératrice en  $B$ ,  
 $\frac{GL}{Mr}$ .

Mais Corol. 1. Propos. 1.  $r = \frac{LL}{a.c^2}$ .

Donc la force accélératrice en  $B$  sera

$$\frac{G.a.c^2}{ML}.$$

Soit  $DM = z$ .

La force accélératrice en  $M$  sera

$$\frac{G.a.c^2}{ML} \times \frac{DM}{BD} = \frac{G.c^2.z}{ML}.$$

Donc par le principe  $p dt = du$ , nommant  $u$  la vitesse en  $M$ , on aura l'équation suivante

$$\frac{G.c^2.z dz}{ML} = u du, \text{ car } dt = \frac{dz}{u}.$$

Donc intégrant & complétant

$$\frac{u^2}{2} = \frac{G.c^2}{ML} \times \frac{aa - zz}{2}.$$

Donc lorsque  $z = 0$ ; on a  $uu = \frac{G.c^2.a^2}{ML}$  &  $u = \frac{ac\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$ .

Ce que j'avois à démontrer.

#### R E M A R Q U E.

Mais pour vérifier cette expression de la vitesse, supposons-là telle que nous venons de la trouver, & cherchons par son moyen le rapport des tems d'une vibration de la corde  $L$  & d'une

d'une oscillation d'un pendule dont la longueur soit  $D$ .

Nous avons trouvé  $u = \frac{c\sqrt{G}}{\sqrt{ML}} \times aa$

—  $zz$ , mais  $dt = \frac{dz}{u}$ . Donc  $dt =$

$$\frac{dz\sqrt{ML}}{c.\sqrt{G}.\sqrt{aa-zz}} = \frac{\sqrt{ML}}{c.\sqrt{G}} \times \frac{dz}{\sqrt{aa-zz}}$$

$= \frac{\sqrt{ML}}{c\sqrt{G}}$  multiplié par l'élément du

quart de cercle  $BNE$  dont  $\frac{dz}{\sqrt{aa-zz}}$

est l'expression. Donc le tems d'une

demi-vibration  $= \frac{\sqrt{ML}}{c.\sqrt{G}} \times \frac{BNE}{BD} =$

$$\frac{\sqrt{ML}}{c\sqrt{G}} \times \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{ML}}{2\sqrt{G}}.$$

Soit maintenant (*Fig. 8.*) le pendule  $CA$  dont la longueur  $CA = D$ . La

pesanteur  $= p$ . L'arc  $AB = e$ .  $AN$

$= x$ . L'effort en  $B$  est  $\frac{p \times AB}{CA}$ . L'effort

en  $N$  est  $\frac{p \times AN}{CA} = \frac{p x}{D}$ . Donc par le

principe  $p dt = du$ , on a  $\frac{p x dx}{D} = u du$ .

Donc intégrant & complétant  $u =$

$$\frac{vp}{vD} \times \sqrt{ee - xx}. \text{ Donc } dt = - \frac{dx}{u}$$

$$= \frac{vD}{vp} \times \frac{dx}{\sqrt{ee - xx}}. \text{ Donc le tems}$$

$$\text{d'une demi-oscillation} = \frac{vD}{vp} \times \frac{c}{2}$$

Donc le tems d'une demi-vibration est au tems d'une demi-oscillation comme

$$\frac{\sqrt{ML}}{2\sqrt{G}} \text{ à } \frac{vD}{vp} \times \frac{c}{2} \text{ ou comme } \sqrt{pML} \text{ à}$$

$$\sqrt{ccDG}.$$

Mais la masse multipliée par la pesanteur d'une particule est égale au poids ou  $pM = P$ . Donc  $\sqrt{pML} = \sqrt{PL}$ . Donc le tems d'une vibration est au tems d'une oscillation comme  $\sqrt{PL}$  à  $\sqrt{ccDG}$ . Or c'est précisément ce que nous avons démontré ailleurs, & ce que M. Euler suppose dans toutes ses propositions sur les cordes.

Cependant comme il est beaucoup plus vraisemblable que je n'entens point cet endroit de M. Euler, qu'il



ne l'est qu'il se soit trompé ; je supposerai qu'afin que la véhémence de deux sons soit la même , il faut que les poids tendans soient proportionels aux longueurs des cordes ; d'où nous déduirons avec lui une règle qui peut être d'usage dans la construction des instrumens.

Conservant toujours les mêmes expressions ;  $\frac{G}{L}$  ,  $\frac{GL}{P}$  ,  $\frac{LL}{P}$  quotient de  $\frac{GL}{P}$  divisé par  $\frac{G}{L}$  & le rapport de  $\frac{P}{L}$  à  $L$  sont tous constans :  $\frac{G}{L}$  , parce que les poids tendans doivent toujours être comme les longueurs , pour que la véhémence des sons soit la même ;  $\frac{GL}{P}$  , parce que les poids tendans doivent toujours être en raison composée de la directe des poids des cordes & de l'inverse de leurs longueurs , pour que les sons soient uniformes. Et ces deux raisons constantes divisées

l'une par l'autre donnent le rapport constant de  $LL$  à  $P$ , ou celui de  $\frac{P}{L}$  à  $L$ . Mais  $\frac{P}{L}$  est l'épaisseur de la corde ; l'épaisseur de la corde doit donc être comme sa longueur, & la longueur comme le poids tendant.

D'ailleurs le son est, ainsi que nous l'avons démontré, comme  $\sqrt{\frac{G}{PL}}$  & mettant à la place de  $G$  & de  $P$  leurs proportionnelles  $L$  &  $LL$ , on trouve le son réciproquement comme la longueur de la corde.

Ainsi, selon le sçavant Auteur que nous avons cité, pour conserver à un son l'uniformité, & l'égalité de force entre plusieurs sons, il faut que le poids tendant, la longueur de la corde & son propre poids soient tous réciproquement comme le son ou comme le nombre des vibrations à produire dans un tems donné, la force

pulsante étant la même.

## R E M A R Q U E.

Mais tout cela n'est vrai que dans la supposition, que l'expression de la plus grande vitesse n'est pas telle que nous l'avons trouvée. Car si  $u = \frac{ac\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$ , on aura pour que les véhémences soient égales  $\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{ML}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{ml}}$  & par conséquent  $\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$  constante. D'ailleurs lorsque les cordes sont de même matière, les masses sont comme les poids: donc substituant  $P$  à  $M$ , on aura  $\sqrt{\frac{G}{PL}}$  constante. Or  $\sqrt{\frac{G}{PL}}$  est l'expression du son. Donc la force pulsante étant la même, il faut que les sons soient les mêmes pour être également forts, ou des sons différens ne peuvent être également forts, la force pulsante étant

la même ; resultat bien différent de celui que donne l'expression que M. Euler assigne à  $u$  ; & cependant assez conforme à l'expérience.

On pourroit se proposer ici un Problème dont je vais donner la solution, c'est de trouver le plus grand écart de la corde, la force pulsante étant donnée.

### PROBLEME.

*La force pulsante étant donnée, trouver le plus grand écart de la corde.*

### SOLUTION.

Soit (*Fig. 5.*)  $F$  la force pulsante. Les points  $S$  de la corde partiront avec des vitesses qui seront comme  $SP$ , car je suppose que la corde prend tout en partant, la forme de la courbe musicale ; & chaque particule de cette corde étant supposée animée de sa vitesse initiale, la somme des forces qui

en resultera , sera égale à  $F$ .

Soit  $u$  la vitesse en  $D$ ,  $\frac{uz}{a}$  sera la vitesse en  $S$ ,  $Pp = dy$ , & par conséquent la masse  $Pp = \frac{Pdy}{L}$ , & la quantité de mouvement en  $S = \frac{uz}{a} \times \frac{Pdy}{L}$ . Substituant à  $dy$  & à  $z$  leurs valeurs tirées de l'équation de la courbe, l'expression précédente se transformera

en  $\frac{u.P.r^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}}{L} \times \frac{a-x dx}{\sqrt{2ax-xx}}$ , dont l'in-

tégrale est  $\frac{u.P.r^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}}{L} \times \sqrt{2ax-xx}$  qu'il faut doubler & compléter; je dis doubler, parce que l'intégrale prise sans être doublée ne donneroit que la quantité de mouvement de la partie  $CD$ .

On a donc  $\frac{2uPr^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} \times a}{L} = \frac{2uPr^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}}{L}$  qu'il faut faire égal à  $F$ . Mais  $r = \frac{ll}{a.c^2}$ , donc  $r^{\frac{1}{2}} = \frac{L}{a^{\frac{1}{2}}c}$ . Donc  $F = \frac{2uP}{c}$ .

Mais  $u = \frac{ac\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$ . Donc  $\frac{F.c}{2P} =$   
 $\frac{ac\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$ . Or les cordes étant supposées  
 de même matiere,  $M=P$ . Donc  $a =$   
 $\frac{F\sqrt{L}}{2\sqrt{PG}}$ . Ce qu'il falloit trouver.

Cette derniere expression peut en-  
 core se simplifier ; car nous avons dit  
 que pour avoir des sons uniformes ,  
 il falloit que  $G$  fût comme  $\frac{P}{L}$  ; substi-  
 tuant donc cette valeur , il vient  $a =$   
 $\frac{FL}{2P}$ .

Nous allons passer à quelques au-  
 tres sons de la premiere espece , &  
 abandonner les cordes pour n'y re-  
 venir que lorsque l'analogie des corps  
 sonores dont nous avons encore à  
 parler, nous y raménera.

## VIII.

On peut rapporter à la premiere  
 espece de son, les cloches, les ver-

ges de métaux & même les bâtons durcis au feu ; mais on sçait peu de chose sur ces corps. Il est presque impossible de déterminer le son d'une cloche par sa forme & son poids. Il faudroit entrer dans des considérations vagues sur l'élasticité & la cohésion des parties de la matiere dont on les fond. Ce que l'on peut avancer, c'est que les sons de deux cloches de même matiere & de figures semblables, feront entr'eux réciproquement comme les racines cubiques des poids ; c'est-à-dire, que si l'une pese huit fois moins que l'autre, elle fera dans le même tems un nombre double de vibrations ; un nombre triple, si elle pese vingt-sept fois moins ; & ainsi de suite. Car en leur appliquant ce que nous avons dit des cordes, & faisant le poids tendant  $G$  comme  $\frac{P}{L}$ , la formule  $\sqrt{\frac{G}{PL}}$  se réduit à  $\frac{1}{L}$  ; mais lorsque

74 *PRINCIPES GENERAUX*  
 des corps homogènes sont semblables,  
 leurs poids sont entr'eux comme les  
 cubes de leurs côtés homologues,  
 & par conséquent leurs côtés homo-  
 logues, comme les racines cubiques  
 de leurs poids; donc les nombres de  
 vibrations produites dans un tems don-  
 né étant comme  $\frac{1}{L}$ , elles seront aussi  
 comme  $\frac{1}{\sqrt[3]{P}}$ .

Quant aux verges sonores, si, pour  
 estimer le rapport de leurs sons, il ne  
 faut avoir égard qu'à leurs longueurs,  
 comme M. Euler le prétend; s'il faut  
 considérer les fibres qui les compo-  
 sent comme autant de cordes qui font  
 leurs vibrations séparément; s'il faut  
 négliger la force tendante; la for-  
 mule  $\sqrt{\frac{G}{PL}}$  devient alors  $\sqrt{\frac{1}{PL}}$ . Mais  
 si les verges sont semblables & de mê-  
 me matière,  $P$  sera comme  $L^3$ . Donc  
 $\sqrt{\frac{1}{PL}}$  se réduit à  $\frac{1}{L^2}$ , c'est-à-dire, que



les nombres de vibrations produites dans un tems donné , seront réciproquement comme les quarrés des longueurs.

## R E M A R Q U E.

Mais , dira-t-on , pourquoi négliger dans le cas des verges la force tendante que l'on fait entrer en calcul , lorsqu'il est question des cloches ?

C'est que la roideur des verges est si grande , relativement à la force pulsante qui les fait résonner , qu'on peut sans erreur sensible traiter comme constante , la force qui les tend. Mais il n'en est pas ainsi des cloches. La figure d'une cloche s'altere sensiblement , quand elle est en volée. De ronde qu'elle étoit , en repos ; le coup du batant la rend ovale , & l'œil aperçoit cet effet qui sera d'autant moins sensible que le poids de la cloche sera grand , eu égard à son diamètre ; c'est-à-dire , que la force tendante

peut être supposée comme  $\frac{P}{L}$ .

La dilatation & la percussion subite de l'air, qui sont les deux causes des sons de la seconde espece, agissent à peu près de la même maniere.

L'extrême vitesse de l'air, dans la dilatation; ou celle d'un corps mu, dans la percussion, donne lieu à une compression; l'air comprimé tend à se restituer dans son état naturel: mais d'un mouvement accéléré en vertu duquel il exerce des vibrations semblables à celles d'une corde. Or c'est par ces vibrations qu'il faut expliquer le bruit, ou plutôt le son des vents, du tonnerre, de la poudre à canon & de tout corps lancé dans l'air avec vitesse. Mais comme il est impossible d'appliquer à ces phénomènes le calcul, je passe aux sons de la troisième espece, après avoir observé qu'il y a entre le bruit & le son une grande différence.

Le bruit est un ; le son au contraire est composé ; un son ne frappe jamais seul nos oreilles ; on entend avec lui d'autres sons concomitans , qu'on appelle ses harmoniques. C'est de là que M. Rameau est parti dans sa génération harmonique ; voilà l'expérience qui sert de base à son admirable système de composition , qu'il seroit à souhaiter que quelqu'un tirât des obscurités qui l'envelopent , & mit à la portée de tout le monde ; moins pour la gloire de son Inventeur , que pour les progrès de la science des sons.

## I X.

Plus la cause d'un phénomène est cachée , moins on fait d'efforts pour la découvrir. Mais cette paresse , ou ce découragement des esprits , n'est ni le seul , ni peut-être le plus grand obstacle à la perfection des arts & des sciences. Il y a une sorte de vanité qui aime

78 *PRINCIPES GÉNÉRAUX*  
mieux s'attacher à des mots , à des  
qualités occultes , ou à quelque hypo-  
these frivole , que d'avouer de l'igno-  
rance ; & cette vanité leur est plus fune-  
ste encore. Bien ou mal , on veut tout  
expliquer , & c'est , grace à cette manie,  
que l'horreur du vuide a fait monter  
l'eau dans les pompes , que les tourbil-  
lons ont été la cause des mouvemens  
céléstes , que l'attraction sera long-  
tems encore celle de la pesanteur des  
corps , & pour en revenir à mon su-  
jet , qu'on avoit attribué jusqu'à pré-  
sent au fremissement de la surface in-  
térieure du tuyau , le son & les autres  
propriétés des Flutes. Ces instrumens  
avoient beau rendre le même son ,  
quoique l'épaisseur , la matiere & l'ou-  
verture en fussent différentes ; on s'en  
tenoit opiniâtrément à un systême que  
la diversité seule de la matiere étoit  
capable de renverser.

Enfin M. Euler , après avoir soi-

gneusement examiné la structure des Flutes , trouva une maniere d'en expliquer les effets , aussi solide qu'ingénieuse. Ce morceau de Physique est peu connu , quoique ce soit un des plus beaux que nous ayons ; ce sont ces deux motifs réunis au besoin que j'en ai pour les conséquences que j'en tirerai , qui me déterminent à l'insérer ici.

La Flute est composée ainsi que les tuyaux appellés dans un buffet d'Orgue , tuyaux à bouche ou de mutation ; du pied *AABB* qui est en bec ou en cône ; c'est ce bec qui introduit le vent qui fait résonner le tuyau. A ce pied est joint le corps *BBDD* du tuyau. Il y a entre le pied & le corps un diaphragme *EEF* percé d'une ouverture par où le vent s'échappe. On appelle cette ouverture , lumière. Enfin au-dessous de cette ouverture est la bouche *BBCC* du tuyau. C'est

une espece de fenêtré dont la levre d'en bas *CC*, qui est en biseau, coupe le vent au fortir de la lumiere, & n'en admet dans le tuyau qu'une couche légère. Telle est aussi la figure des anches & celles que prennent les levres au défaut d'anches ; ce qui fait rentrer les flutes traversieres & autres, dans la classe des Flutes à bec ou tuyaux de mutation.

Il faut observer de plus que dans tous les instrumens à vent, les parois intérieurs sont durs & polis & que l'air n'y rencontre aucun obstacle.

Il suit de cette construction que l'air au fortir de la lumiere rase la surface intérieure du tuyau & comprime celui dont il étoit rempli. Cet air comprimé se dilate à son tour & le son est produit par ces vibrations réciproques qui naissent de l'inspiration & qui durent autant qu'elle.

Cela supposé, dit M. Euler, cherchons

chons le son d'une Flute dont la longueur & la capacité soient données, & renonçons à cette explication, si la solution de ce problème ne s'accorde pas avec les expériences.

Le corps sonore dont les vibrations transmises à l'air viennent frapper notre oreille, c'est l'air même contenu dans le tuyau, dont la quantité se déterminera par la longueur & la capacité de la Flute.

La pesanteur de l'atmosphère qui contraint l'air, dont la Flute est remplie, d'exercer des vibrations, fait ici la fonction de poids tendant, & ce poids sera connu par la hauteur à laquelle le vis-argent est suspendu dans le tube de Torricelli.

Voilà donc le cas des Flutes réduit à celui des cordes & soumis à la formule  $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ .

Soit  $a$  la longueur d'une Flute ;  $b b$   
F

82 PRINCIPES GÉNÉRAUX  
 son ouverture ; le rapport de la pesanteur de l'air à celle du vif-argent  $\frac{m}{n}$  ; la hauteur du mercure dans le baromètre  $k$  , c'est-à-dire que nous avons une corde dont la longueur est  $a$  , le poids  $mabb$  , & la tension égale à la pression de l'atmosphère. Mais les pressions des fluides sont , comme on le démontre en hydrodynamique , comme les bases multipliées par les hauteurs. La base est ici  $bb$  ; & la hauteur  $k$  ; donc le poids tendant est comme  $nkbb$  : & par conséquent le nombre des oscillations faites dans une seconde

$$\text{comme } \frac{355}{113} \sqrt{\frac{881nkbb}{24a \times mabb}}$$

$$\frac{355}{113a} \sqrt{\frac{881nk}{24m}} = \text{au son qu'il falloit déterminer.}$$

Or la raison de  $m$  à  $n$  étant toujours à peu près la même , & les différentes températures de l'air n'influent pas considérablement sur la hauteur  $k$  , les



sons des Flutes cylindriques ou prismatiques seront entr'eux reciproquement comme les longueurs. Car effaçant toutes les constantes, l'équation précédente se réduit à  $\frac{1}{a}$ .

Mais entrons dans le détail des phénomènes, c'est lui qui ruine ou soutient une hypothese. Cherchons donc en demeurant dans celle de M. Euler, comment le son d'une Flute, dont la longueur est donnée, est au son d'une corde dont la longueur, le poids & la tension sont connus. Si l'expérience & le calcul conservent entre la corde & la Flute l'unisson que nous y supposons, il en résultera pour la théorie que nous venons d'exposer, un grand degré de certitude.

Soit la plus grande valeur de  $\frac{112}{112}$  dans les tems chauds 12000. Sa plus petite valeur dans les tems froids 1000. La plus grande hauteur  $k$  du mercure,

dans le Baromètre 2460. Sa plus petite hauteur 2260. Donc le Baromètre & Thermomètre étant l'un & l'autre à leurs plus grandes hauteurs, le son d'une Flute quelconque  $a$ , fera comme  $\frac{960771}{a}$ ; & lorsqu'ils seront à leurs plus petites hauteurs, comme  $\frac{840714}{a}$ ; & prenant un milieu entre ces deux expressions, on aura  $\frac{900000}{a}$  pour le nombre des vibrations, & par conséquent pour le son d'une Flute  $a$ , dans les tems ordinaires, lorsqu'il ne fait ni bien froid ni bien chaud. Donc une flute qui fait 100 vibrations par seconde a 9000 scrupules ou 9 pieds du Rhin de longueur. Donc une Flute qui feroit 118 vibrations par seconde & qui résoneroit le  $c$  ou le C sol ut, auroit 7627 scrupules ou  $7\frac{1}{2}$  pieds du Rhin de longueur. Ce qui s'accorde avec l'expérience; car c'est en effet

cette longueur que l'on donne aux tuyaux que l'on prend pour le C sol ut.

Mais, dira-t-on, ce n'est pas  $7\frac{1}{2}$  pieds qu'on leur donne; mais 8 pieds communément.

J'en conviens; mais il faut négliger cette différence; car selon la température de l'air, le tuyau rendra des sons qui seront entr'eux dans la raison des nombres 840714, 960771 ou dans le rapport de 8 à 9, ce qui prend plus d'un demi pied sur la longueur entière du tuyau.

Ces altérations successives dans le son d'une même Flute achevent de confirmer le système de M. Euler. Car les Musiciens éprouvent tous les jours dans la comparaison qu'ils ont à faire des instrumens à corde avec les instrumens à vent, que pour les mettre à l'unisson, il faut tantôt diminuer, tantôt augmenter la tension des cordes, & que la plus grande différence

est d'un ton majeur entier, intervalle exprimé par le rapport de 8 à 9.

On observe encore que les Flutes ont plus de haut dans un tems serein & chaud, que dans un tems froid & orageux, & qu'elles deviennent un peu plus aiguës, pendant qu'on en jouë. Ces deux phénomènes partent de la même cause. C'est que la chaleur naturelle de l'air dans un tems serein, ou celle qu'il reçoit pendant l'inspiration, rend ses vibrations un peu plus promptes, & par conséquent le son un peu plus aigu; & d'ailleurs le poids de l'air  $m$  étant moindre, la fraction  $\frac{n}{m}$  est plus grande, & par conséquent le nombre des vibrations plus grand.

La force du son dépend dans les Flutes de la violence de l'inspiration, & du rapport de la capacité du tuyau à sa longueur. Il en est encore en ce-

la de ces instrumens , comme des cordes. La longueur & l'épaisseur de celles-ci répondent à la longueur & à la capacité de ceux-là.

Toute corde n'est pas propre à rendre tout son. Il lui faut quelquefois une certaine grosseur pour un son donné. On ne peut pas non plus augmenter ou diminuer à discretion la capacité d'une Flute de longueur donnée. Il y a des limites au-delà desquelles elle ne résonne plus. Mais appliquant aux tuyaux à bouche , ce que nous avons dit de la longueur , du poids & de la tension des cordes ; pour en tirer des sons uniformes , il faut faire la base ou la capacité proportionnelle à la longueur , & la longueur proportionnelle à la pression de l'athmosphère qui est toujours proportionnelle à l'ouverture.

Quant à l'inspiration , elle a aussi ses loix. Trop foible , la Flute ne rend

point de son. Trop forte, elle fait résonner la Flute une octave au-dessus de son ton. Plus forte encore, elle rendra la douzième, la quinzième & ainsi de suite.

Pour découvrir le rapport de ces degrés successifs, nous serons forcés de revenir aux cordes & d'en examiner quelques propriétés. En attendant, nous observerons que, la force du son dans les Flutes étant proportionnelle à celle de l'inspiration; plus l'inspiration sera violente, le son demeurant le même quant au degré du grave à l'aigu; plus les vibrations de l'air contenu dans le tuyau seront grandes, sans toutesfois qu'elles en deviennent plus fréquentes. Mais la grandeur ou l'amplitude des vibrations est tellement déterminée par la capacité ou le diamètre de la Flute, que le même son ne peut pas subsister & conserver son degré, dans toutes les variations

possibles de l'inspiration. Il faut même qu'après avoir passé successivement par différens degrés du grave à l'aigu, il s'éteigne entièrement.

## X.

Ce paragraphe sera sans doute un des meilleurs de ce Mémoire, je le dois presque en entier à M. de Fontenelle. Cet Auteur dit ingénieusement à son ordinaire, Hist. de l'Acad. ann. 1700, qu'une recherche ou même une découverte n'est, pour ainsi parler, que l'épisode d'une autre. M. Sauveur, ajoute-t-il, en examinant la théorie de certains instrumens qui vont par *sauts* & passent irrégulièrement d'un ton à un autre, fut obligé, pour en rendre raison, de recourir à des expériences qui lui produisirent un phénomène dont il fut extrêmement surpris; car quel Philosophe auroit cru qu'un corps mis en mouve-

ment de manière que toutes ses parties y doivent être, en conservent cependant quelques unes immobiles dans de certains intervalles, ou plutôt en rend quelquesunes immobiles par une distribution singuliere qu'il semble faire entr'elles du mouvement qu'il a reçu.

Si une corde d'instrument est tendue sur une table, & qu'un chevalet mobile qui glisse sous la corde soit arrêté à quelqu'un de ses points, en sorte que, quand on pincera par le milieu l'une des deux parties déterminées par la position du chevalet, l'autre ne participe point du tout à l'ébranlement, on sçait que le ton de la partie pincée, fera au ton de toute la corde, en raison des longueurs de cette partie & de la corde entière. Si cette partie est  $\frac{1}{4}$ , elle fera à la double octave en haut de toute la corde. Si elle est  $\frac{1}{2}$ , elle fera à son octave; & si



au lieu de pincer  $\frac{1}{4}$ , on pinçoit la partie  $\frac{3}{4}$ , il est encore indubitable que les longueurs de cette partie & de la corde entière étant comme 3 à 4, l'une résonneroit la quarte de l'autre.

Mais si le chevalier n'empêche pas entièrement la communication des vibrations des deux parties ; si ce n'est qu'un obstacle léger, comme le bout d'une plume ; si la corde est menuë, les deux parties, quoiqu'inégales, rendront le même ton & formeront le même intervalle avec la corde entière.

Il ne seroit pas étonnant qu'elles fussent toutes deux à l'unisson de la corde entière ; on concevrait alors que l'obstacle léger ne les empêcheroit pas de faire les mêmes vibrations que la corde entière, & qu'il ne tiendroit lieu de rien. Mais il est effectivement obstacle ; il détermine les parties de la corde à être effectivement

92 PRINCIPES GÉNÉRAUX

parties & à rendre un son différent de la toute, & le merveilleux est qu'il laisse le même ton à des parties inégales. Si, par exemple, l'obstacle est au quart de la corde, non-seulement ce quart étant pincé rend la double octave aiguë de la toute; mais l'autre partie qui est trois quarts & qui devrait donner la quarte de la toute, donne la même double octave.

Sur ce phénomène si bizarre, M. Sauveur imagina que, puisque  $\frac{3}{4}$  rendoient le même ton que  $\frac{1}{4}$ , ils ne devoient pas faire des vibrations proportionnées à leurs longueurs; qu'il falloit qu'ils se partageassent en trois parties égales chacune au premier quart, & qui fissent chacune leurs vibrations séparément. En ce cas, c'eût été la même chose que si l'on eût pincé à la fois ces trois parties égales. Elles eussent été toutes à l'unisson entr'elles & avec le premier quart; c'est-à-dire

à la double octave aiguë de la corde entière. Mais cela supposé comme vrai, il y auroit donc eu nécessairement entre les vibrations de deux parties égales un point immobile qui ne suivoit ni l'une ni l'autre vibration, & par conséquent deux points immobiles sur les  $\frac{2}{3}$  de la corde, & 3 dans la corde entière; en comptant pour un de ces points celui où est posé l'obstacle léger, parce qu'il est effectivement entre deux vibrations. M. Sauveur appelle ces vibrations partielles & séparées, ondulations; leurs points immobiles, nœuds; & le point du milieu de chaque vibration, le ventre de l'ondulation.

Lorsque M. Sauveur apporta à l'Académie cette expérience de deux tons égaux sur les deux parties inégales d'une corde, elle y fut reçue avec tout le plaisir que font les nouvelles découvertes. Mais quelqu'un de la

compagnie se souvint qu'elle étoit déjà dans un ouvrage de M. Wallis. Quant à la pensée des nœuds qui n'étoit qu'un petit système , on trouva dans l'assemblée le moyen d'éprouver si elle étoit vraie. On mit sur les points de la corde où , suivant la supposition , se devoient faire les nœuds & les ventres des ondulations , de très-petits morceaux de papier à demi pliés qui pouvoient tomber sans peine au moindre mouvement. On pinça la corde & l'on vit avec contentement & même avec admiration que les petits papiers des ventres tomberent aussi-tôt , & que ceux des nœuds demeurèrent en place ; dans la suite pour les distinguer mieux , on fit les uns rouges & on laissa les autres blancs ; de sorte que les rouges & les blancs étoient disposés alternativement, & l'on vit toujours qu'il n'y avoit que ceux d'une couleur qui tombassent. Les points qui d'espa-

ce en espace se maintiennent immobiles entre tous les autres points qui se meuvent, & dans un corps qui auroit dû prendre du mouvement selon toute sa longueur, auroient été sans doute une grande merveille pour un Physicien qui n'y auroit pas été préparé & amené par degrés.

Il paroît par là que l'obstacle léger placé comme nous l'avons supposé jusqu'ici sur un quart de la corde, n'empêche pas à la vérité la communication des vibrations de deux parties de la corde, parce qu'il est léger; mais qu'au moins il empêche une communication facile, parce qu'il est obstacle. Il détermine d'abord les deux parties à faire séparément & indépendamment l'une de l'autre, leurs vibrations. Mais comme elles sont inégales, la plus petite fait ses vibrations beaucoup plus vite, & parce qu'elle communique toujours avec l'autre qui

est beaucoup plus lente , elle la hâte & la force à suivre son mouvement. Or cette partie plus grande ne peut jamais , à cause de sa longueur , faire ses vibrations en même tems que la plus petite , & lui obéir , à moins qu'elle ne se partage en parties toutes égales à cette partie qui domine à cause de sa vitesse.

Si au lieu de mettre l'obstacle sur  $\frac{1}{4}$  , on le met sur  $\frac{1}{3}$  ,  $\frac{1}{5}$  ,  $\frac{1}{6}$  , &c. ce fera toujours la même chose & le ton des  $\frac{2}{3}$  ,  $\frac{3}{4}$  ,  $\frac{4}{5}$  , &c. ne fera que celui de  $\frac{1}{3}$  ,  $\frac{1}{5}$  , &c. en un mot , l'obstacle léger étant posé sur une partie aliquote quelconque de la toute , c'est elle seule qui donne le ton à la partie plus grande qui est de l'autre côté.

Mais si l'obstacle n'est point sur une partie aliquote ; par exemple , si la corde ayant cinq parties , il est sur les  $\frac{2}{5}$  ; ces  $\frac{2}{5}$  forçant d'abord les  $\frac{3}{5}$  qui sont de l'autre côté à prendre une vitesse égale à

à la leur, ces  $\frac{3}{5}$  ne la peuvent prendre qu'en s'accourcissant & en s'égalant aux  $\frac{2}{5}$ . Il reste donc  $\frac{1}{5}$  qui est la plus petite partie & dont les vibrations font les plus promptes. Cette petite partie qui n'a point été déterminée d'abord par la position de l'obstacle, & qui ne se forme que dans la suite & par une conséquence de la formation des autres, ne laisse pas de donner la loi à tout le reste, & les  $\frac{2}{5}$  & les  $\frac{3}{5}$  ne rendront le ton que de  $\frac{1}{5}$ . Si l'obstacle étoit mis sur  $\frac{4}{7}$ , il est évident par la même raison qu'elle se partageroit aussi en 7 parties; c'est la même chose pour tous les autres cas semblables.

En appliquant cette hypothese sur trois vingtièmes, il semble que ces  $\frac{3}{20}$  partageant d'abord la corde en parties égales à elles, il resteroit pour petite partie qui devoit dominer le reste  $\frac{2}{20}$  ou  $\frac{1}{10}$ , & qu'ainsi la corde se partageroit en dixièmes. Mais il faut

remarquer que l'obstacle doit toujours former un nœud à l'endroit où il est, parce qu'effectivement il arrête en partie les vibrations & qu'il est le premier principe qui les change. Or dans l'hypothese presente, si la corde se partageoit en dixièmes, l'obstacle se trouveroit sur un ventre & non sur un nœud; ce qui est impossible, & par conséquent il faut que la corde se partage en vingtièmes.

Donc, que l'obstacle soit mis sur une partie aliquote ou non, la corde se partagera toujours dans le nombre de parties marqué par le dénominateur de la fraction.

Il s'ensuit de-là que quelques différentes que soient les parties où l'on met l'obstacle, le ton est le même toutes les fois que le dénominateur de la fraction est nécessairement le même. Par exemple, la corde étant de 20 parties, il sera indifférent de mettre



l'obstacle sur  $\frac{1}{20}$ ,  $\frac{3}{20}$ ,  $\frac{7}{20}$ ,  $\frac{9}{20}$ ,  $\frac{11}{20}$ ,  $\frac{13}{20}$ ,  $\frac{17}{20}$ ,  $\frac{19}{20}$ . Mais non pas sur  $\frac{2}{20}$ ,  $\frac{4}{20}$ ,  $\frac{5}{20}$ , &c. parce que ces fractions pouvant se réduire, le dénominateur n'est pas nécessairement le même.

En faisant couler l'obstacle sous les 20 divisions de la corde, il est aisé de voir quels sont les nœuds ou intervalles des sons des différentes parties de la corde, comparés au son de la corde entière. En voici une petite Table tirée de l'Hist. de l'Acad.

T A B L E

<i>Parties de la corde divisée en vingtièmes.</i>	<i>Intervalles rendus par les différentes parties relativement à la corde entière.</i>
---	--

$\frac{1}{20}$ , $\frac{3}{20}$ , $\frac{7}{20}$ , $\frac{9}{20}$ , $\frac{11}{20}$ , $\frac{13}{20}$ , $\frac{17}{20}$ , $\frac{19}{20}$ .	$\frac{1}{16}$ est la quatrième octave de 1.
--	--

$\frac{1}{16}$  &  $\frac{1}{20}$  font entr'eux comme 4 à 5, expression de la tierce majeure. C'est-à-dire, que si l'on divise une corde 1 en vingtièmes, &

que si l'on met d'un côté d'un obstacle léger  $\frac{1}{20}$ , & de l'autre  $\frac{1}{20}$ , ou  $\frac{3}{20}$  &  $\frac{1}{20}$  ou  $\frac{7}{20}$  &  $\frac{1}{20}$ , &c. les sons rendus par les deux parties de la corde feront une tierce majeure avec la quatrième octave de la corde entière.

Ou  $\frac{2}{30}$   $\frac{1}{8}$  est la troisième octave de 1. Or les sons rendus par  $\frac{1}{8}$  &  $\frac{1}{10}$  sont entr'eux réciproquement comme ces longueurs, c'est-à-dire, comme 8 à 10, ou 4 à 5, tierce majeure. Donc les parties de la corde entière  $\frac{2}{10}$  &  $\frac{1}{10}$ , &  $\frac{1}{10}$  &  $\frac{2}{10}$  divisée par un obstacle léger, donneront des sons qui feront à la tierce majeure de la troisième octave aiguë de la corde entière.

Ou  $\frac{4}{20}$   $\frac{1}{4}$  est la seconde octave de 1. Mais les sons rendus par  $\frac{1}{4}$  &  $\frac{1}{5}$ , sont entr'eux réciproquement comme ces longueurs ou comme 4 à 5, c'est-à-dire, qu'ils feront à la tierce majeure

D'ACOUSTIQUE. 101  
de la seconde octave de 1 ou de la  
corde entière.

R E M A R Q U E.

Une expérience qui méritoit bien  
d'être faite & qu'il ne paroît pas qu'on  
ait tentée ; c'eût été de diviser la cor-  
de entière en parties égales , & une de  
ces parties égales en deux autres qui  
eussent un rapport incommensurable  
entr'elles , comme celui de 1 à  $\sqrt{2}$  ,  
ou  $\sqrt{3}$  , ou  $\sqrt{5}$  , & de laisser l'incom-  
mensurable d'un côté de l'obstacle lé-  
ger & le reste de la corde de l'autre.

Q U E S T I O N S.

Si les deux parties dans lesquelles  
la corde entière est divisée par l'ob-  
stacle léger , sont incommensurables  
entr'elles.

1°. Quel sera le son rendu par les  
deux parties.

2°. Quel rapport aura ce son avec

celui de la corde entière.

3°. Y aura-t-il sur la corde pincée, après avoir ainsi placé l'obstacle léger, des ondulations, des nœuds, des ventres & des points immobiles.

4°. Dans la supposition qu'il y ait des nœuds, où seront-ils placés.

### *R E P O N S E.*

Lorsque les parties de la corde sont incommensurables, n'arrivera-t-il pas un phénomène analogue à celui que rapportent quelques Auteurs d'optique qu'il a si fort embarrassés. C'est la vision confuse de l'objet, lorsque les rayons réfléchis ou rompus, entrent dans l'œil convergens; c'est-à-dire, comme s'ils venoient d'un point placé derrière l'œil. Si cela est; voilà des choses communes, entre deux sensations d'une espece bien différente.

Il est évident qu'en continuant la Table précédente, le mouvement

de l'obstacle léger, toujours promené de l'une de ces parties à l'autre, produiroit une suite irrégulière de tons, tantôt les mêmes, tantôt différens, & qu'un instrument de Musique en qui il se trouveroit quelque chose de pareil, feroit ce qu'on appelle des fauts & passeroit d'un ton à l'autre, ou reviendroit au même, sans aucune proportion sensible, sans degrés successifs & contre toutes regles connuës. Aussi la Trompette marine qui n'est qu'un monocorde où le doigt tient lieu de l'obstacle léger a-t-elle de ces bizarreries qui avoient été inexplicables jusqu'à M. Sauveur, & qui deviennent fort claires par le systême des ondulations. La Trompette ordinaire, le Cors de chasse, les grands instrumens à vent sont pareillement sujets à ces irrégularités, elles naissent de la violence de l'inspiration. Si les deux moitiés de l'instrument font

féparement leurs oscillations , le son monte à l'octave. Si la force de l'inspiration étant augmentée , les tiers de l'instrument , ou plutôt de l'air qu'il contient , font féparement leurs oscillations , on aura la douzième. Si on augmente successivement l'inspiration & qu'on fasse osciller les  $\frac{1}{4}$ , les  $\frac{1}{5}$  & les  $\frac{1}{6}$ , &c. l'instrument fera des sauts & rendra des sons dont il est facile de connoître le rapport au son le plus grave.

La division de l'air contenu dans les tuyaux des flutes , suit cette progression  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8},$  &c. & quoique la nature des Cors de chasse , des Clairons , & des Trompettes ne soit pas tout-à-fait la même que celle de ces instrumens , l'inspiration produit en eux les mêmes divisions. D'où il est aisé de conclure qu'ils n'ont aucun son moyen entre la première octave & la seconde, qu'un

seul son moyen entre la seconde octave & la troisième ; que trois sons moyens entre la troisième octave & la quatrième, &c.

On peut proposer ici un problème. La longueur de la Flute & son ouverture étant données, trouver la force de l'inspiration pour que l'instrument fasse des sauts, passe par exemple de la première octave 1 à la seconde  $\frac{1}{2}$ .

Voici comment je le résous. Il est à présumer que les deux parties de l'air contenu dans l'instrument ne commencent à osciller séparément, que lorsque l'inspiration a été assez forte pour donner à l'air entier la plus grande vibration qu'il peut exercer & le couper, pour ainsi dire, en deux parties égales. Mais en considérant, comme nous avons fait jusqu'à présent & comme le calcul & l'expérience nous y autorisoient, l'air contenu dans la

Flute, comme une corde dont le poids de l'atmosphère étoit le poids tendant, il est évident que la plus grande oscillation de l'air contenu dans la Flute repondra au plus grand écart de la corde. Or nous avons trouvé le plus grand écart de la corde, la force pulsante étant donnée; nous trouverons donc ici par la même voye & par la même formule, la force pulsante, ou la violence de l'inspiration, si le plus grand écart est donné. Mais le plus grand écart est donné; c'est le diamètre de l'ouverture de la Flute; donc nous aurons la violence de l'inspiration ou la force pulsante  $F = \frac{2a\sqrt{PG}}{\sqrt{L}}$ .

La même formule aura lieu pour tous les autres sauts, en supposant la Flute raccourcie: ainsi veut-on avoir la violence de l'inspiration, pour que l'air contenu se divise en trois parties, & par conséquent pour que la Flute fasse



le faut  $\frac{1}{3}$ , on n'a qu'à employer dans la formule au lieu de  $L$ ,  $\frac{2L}{3}$ , & ainsi des autres fauts.

On observera que tout ce que j'ai dit jusqu'à présent concerne les tuyaux prismatiques & cylindriques. Il seroit peut-être plus difficile de déterminer leurs sons, s'ils étoient supposés de quelque figure dont les côtés fussent convergens ou divergens. Mais on pourroit toujours rapporter l'air qu'ils contiendroient à une corde, le poids de l'atmosphère au poids tendant, & résoudre les problêmes par les formules que nous avons données.

On peut tirer de ce que nous avons dit sur les Flutes une maniere de fixer le son. Ce sera le sujet de ce dernier paragraphe.

## X I.

Avant qu'une corde, dont la longueur est 2, soit accourcie jusqu'à n'être

tre plus que 1 , c'est-à-dire , à l'octave en haut du son qu'elle rendoit auparavant , elle peut passer par autant de divisions que l'on voudra. M. Sauveur dans son nouveau système de Musique , fixe ce nombre de divisions à 43 , & ces 43 parties qu'il appelle *mérides* & qui remplissent toute l'étendue de l'octave , donnent les tons les plus sensibles & les plus ordinaires qui y soient compris. Mais si l'on veut aller à des divisions de sons plus délicates , il faut encore diviser chaque méride en 7 parties qui s'appelleront *eptamérides* ; & l'on aura par conséquent dans une octave 301 eptamérides.

Les vibrations de deux cordes égales doivent toujours aller ensemble , commencer, finir, recommencer dans le même instant. Mais celles de deux cordes inégales , doivent être tantôt séparées & tantôt réunies , & d'autant

plus long-tems séparées que les nombres qui expriment l'inégalité de ces cordes seront plus grands. Car que deux cordes soient entr'elles comme 1 à 2 , & qu'elles commencent en même tems leurs vibrations , il est évident par tout ce que nous avons dit jusqu'à présent , qu'après deux vibrations de la plus courte & de la plus aiguë & une vibration de l'autre , elles recommenceront à partir ensemble , & qu'ainsi sur deux vibrations de la plus courte , il y aura toujours une réunion de vibrations de toutes les deux. Si elles étoient comme 24 à 25 , il n'y auroit une réunion de leurs vibrations qu'à chaque vingt-cinquième vibration , & il est clair que pour de plus grands nombres les réunions sont encore plus rares.

Voilà bien des rapports , mais rien d'absolu. Pour s'entendre , il faudroit fixer un terme au-dessus duquel on prit

les tons aigus , & au-deffous , les tons graves. A cet effet , on s'est servi , & on se sert encore d'un petit tuyau de bois ou de métal , ajusté à l'extrémité d'un soufflet chargé d'un poids qui en chasse l'air & qui fait résonner le tuyau. Cet instrument s'appelle un ton. Ce nom lui vient de son usage ; car c'est par son moyen que l'on détermine le ton sur lequel les voix & les instrumens doivent s'accorder dans un concert. Et comme les Musiciens souhaitent que ce ton soit toujours le même , ils supposent que l'instrument dont ils usent pour le retrouver d'un jour à l'autre , le rend exactement. Supposition qui n'est pas vraie à la rigueur ; car 1°. Un tuyau d'orgue de quatre pieds , qui par sa nature est beaucoup plus juste qu'un petit instrument de bois ou de métal , ne donne pas toujours le même son. 2°. La matiere du petit tuyau étant susceptible d'alté-

ration, le seul usage qu'on en fait, le tems, cent autres accidens doivent en changer sensiblement le son au bout de quelques années. 3°. Il est constant que l'inspiration plus ou moins forte hausse ou baisse le son dans un tuyau. 4°. Les changemens qui se font dans le poids & la chaleur de l'atmosphère, &c.

Ce sont ces raisons & d'autres qui déterminèrent M. Sauveur à chercher par une autre méthode à fixer le son. On peut voir de quelle manière il s'y prit, dans l'Hist. de l'Acad. ann. 1700. pag. 137. & quel fut son succès. Lorsque M. Sauveur communiqua ses vûës à l'Académie, on pensa d'abord, dit M. de Fontenelle, à s'assurer des expériences sur lesquelles il fondeoit la détermination du son fixe, & des Commissaires furent nommés à cet effet. M. Sauveur en rendit compte lui-même & avoua que pour cette fois

elles n'avoient pas réussi. La difficulté de les recommencer , l'appareil qu'il faut pour cela , furent cause qu'on en demeura là. Soit donc qu'il y eût de l'incertitude dans la méthode de M. Sauveur , ou beaucoup de difficulté à s'en servir , le petit tuyau prévalut & continua de donner le ton dans la Chapelle & dans l'Opera.

Cependant les objections qu'on peut faire contre cet instrument sont solides , & je ne doute nullement qu'en l'employant sans précaution , il ne donne en différentes contrées , & dans un même lieu sous différentes températures de l'air , le ton ou un peu plus haut ou un peu plus bas. Mais n'y auroit-il pas moyen d'obvier aux altérations qui surviennent , soit dans la matière de l'instrument , soit dans le poids tendant , ou dans l'atmosphère. C'est surquoi je vais communiquer mes conjectures.

J'ai

J'ai décrit plus haut la construction du ton tel que nous l'employons aujourd'hui, voici comment je désirerois qu'on le corrigeât.

Je voudrois qu'il fut composé de deux parties mobiles en vertu desquelles il put s'allonger ou s'accourcir. Car après cela, il ne s'agiroit plus que de sçavoir quand & de combien précisément il faudroit l'allonger ou l'accourcir, pour lui conserver le même son.

Pour parvenir à cette connoissance, revoyons les causes qui produisent de l'altération dans le ton, tel que nous l'avons. S'il n'y en a que trois, & que nous puissions prévenir l'une & calculer les effets des deux autres, il ne sera pas difficile de conserver le même son au ton composé de deux parties mobiles.

L'altération de l'atmosphère quant au poids ; son altération quant à la

H

chaleur, & les changemens que ces deux causes occasionnent dans la matière de l'instrument, sont les trois inconvéniens auxquels il faut remédier.

On remédiera au dernier en donnant au ton une extrême épaisseur relativement à sa longueur, & en le construisant du métal sur lequel le froid & le chaud font le moins d'impression. Cette précaution est d'autant plus sûre, qu'il n'y a que le changement dans la longueur d'un tuyau qui en rende le son plus ou moins aigu; ainsi que l'expérience nous l'apprend & que nous l'avons trouvé par le calcul.

Pour ce qui regarde la température de l'air, le Thermometre indiquera les vicissitudes de l'état de l'atmosphère quant à la chaleur; & le Barometre, ses altérations quant à sa pesanteur. Il ne seroit plus question que de graduer le tuyau mobile, eu égard



XV D'ACOUSTIQUE. 115  
aux effets de ces deux causes, pour le même lieu, & eu égard aux mêmes effets & au poids du mercure, pour deux différens lieux de la Terre.

Des expériences réitérées apprendroient ce que la première, ou les vicissitudes de l'état de l'atmosphère quant à la chaleur, produisent sur le son; & le moyen de faire ces expériences, ce seroit d'avoir deux monocordes à l'unisson, & de les placer en deux endroits où la chaleur de l'air fût fort différente, & assez voisins pour qu'on put les entendre en même tems & comparer les sons qu'ils rendroient.

Le calcul donneroit exactement les effets de l'altération de l'atmosphère quant à son poids. Car connoissant la plus grande & la plus petite hauteur du vis-argent dans le Baromètre, on trouveroit aisément le ton pour ces grande & petite hauteurs & pour tou-

tes les intermédiaires, & par conséquent la quantité précise dont il faudroit allonger ou accourcir l'instrument d'un moment à l'autre, pour lui conserver le même son.

Quand à l'aide de l'expérience & du calcul, on auroit gradué un tel instrument, je crois qu'on pourroit se promettre d'exécuter un Concert dans dix ans & à mille lieues sur le même ton qu'on l'auroit exécuté aujourd'hui à Paris. On n'auroit pour cela qu'à sçavoir quelles étoient les hauteurs du Baromètre & du Thermomètre à Paris; & consulter ailleurs ou dans un autre tems, les mêmes machines pour en apprendre de combien il feroit à propos d'allonger ou d'accourcir le ton gradué; à moins qu'il ne fallut le laisser au même degré, ce qu'elles diroient aussi. Si le Thermomètre demandoit qu'on l'allongeât d'une partie, & le Baromètre d'un autre, on

l'allongeroit de deux , & ainsi pour toute autre supposition.

Il n'y a plus que l'inspiration plus ou moins forte qui put tromper l'attente. Mais quiconque sçait emboucher un instrument , ménagera son haleine de maniere à ne pas faire sauter le ton ; ce qui suffira , car il n'importe aucunement qu'il soit plus ou moins fort. Il ne s'agit que de ne point occasionner de sauts à l'instrument , ce qui est toujours facile.

### R E S U L T A T.

Pour avoir le son fixe , il faut donc construire un instrument de deux parties mobiles , d'un métal sur lequel le froid & le chaud fassent le moins d'impression.

Anéantir cette impression par l'épaisseur considérable que l'on donnera au tuyau relativement à sa longueur.

Graduer ce tuyau sur les altérations

qui surviennent dans le poids tendant ou dans la pesanteur de l'atmosphère, à l'aide du calcul & du Baromètre.

Corriger cette première graduation par les expériences que nous avons indiquées sur les effets de la chaleur, dont le Thermomètre indiquera la quantité.

Cette préparation suffit pour un même lieu de la Terre; mais il faudra encore avoir égard à la pesanteur du mercure, pour deux lieux différens.

### O B J E C T I O N.

Ce système de la graduation d'un tuyau composé de deux parties mobiles, suppose, me dira-t-on, que la différence qui survient dans le poids tendant, à l'occasion des vicissitudes de l'atmosphère, influe sensiblement sur la longueur du tuyau. Car si la quantité dont il faudroit l'allonger ou le raccourcir pour le conserver au mê-

me ton , étoit peu considérable , la graduation pourroit devenir impraticable , & l'expédient proposé pour la fixation du son , se réduire à rien.

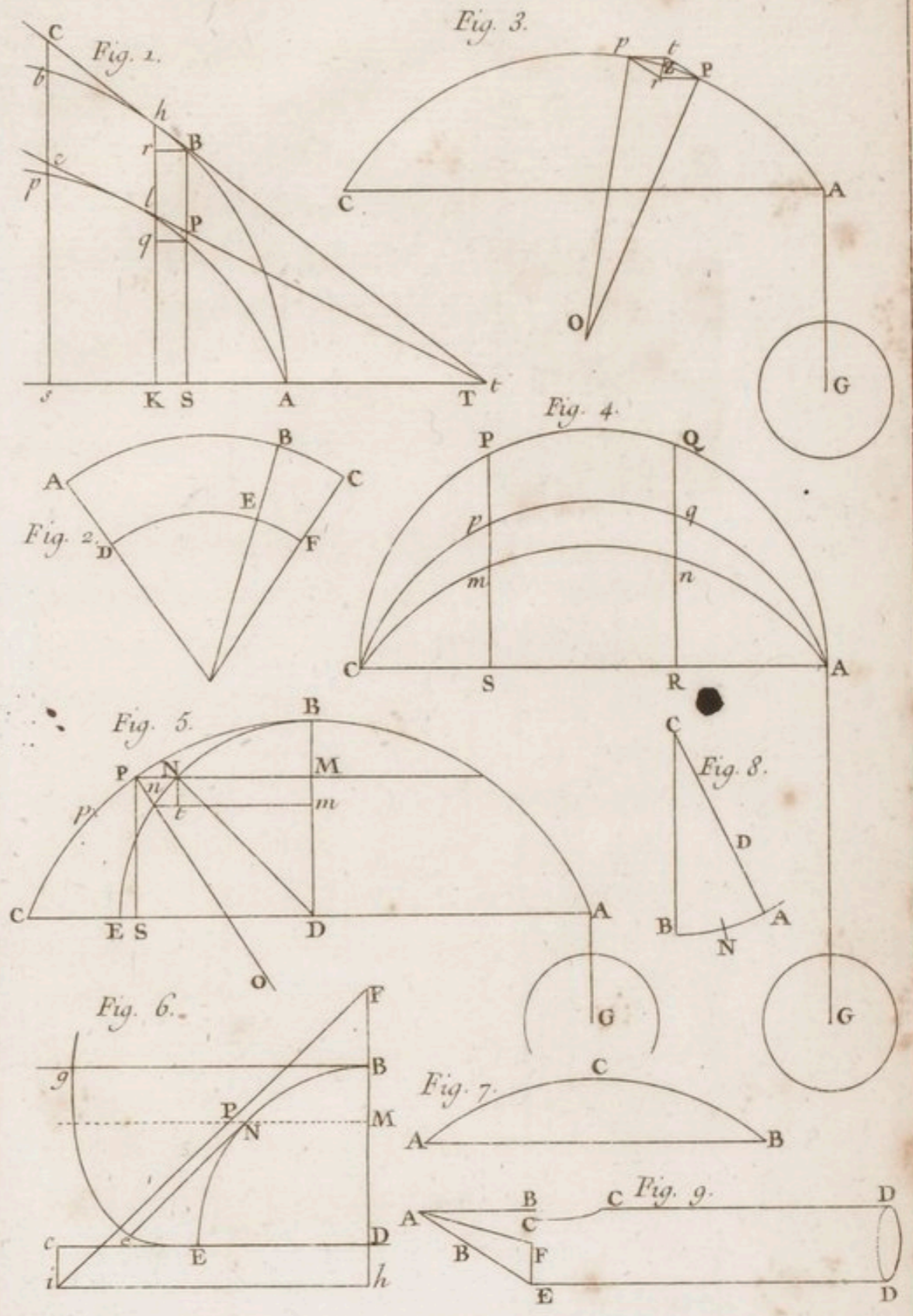
## R E P O N S E.

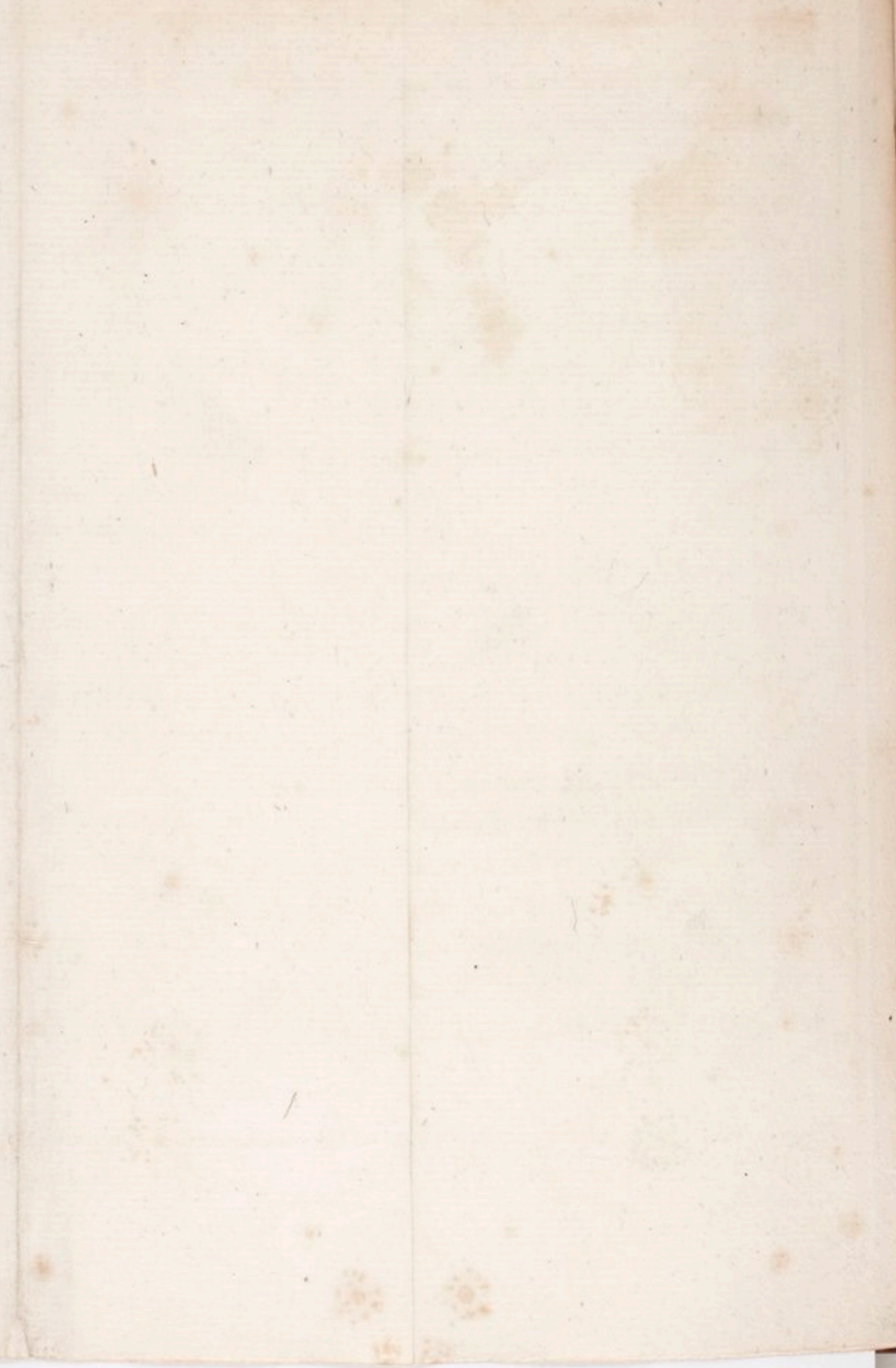
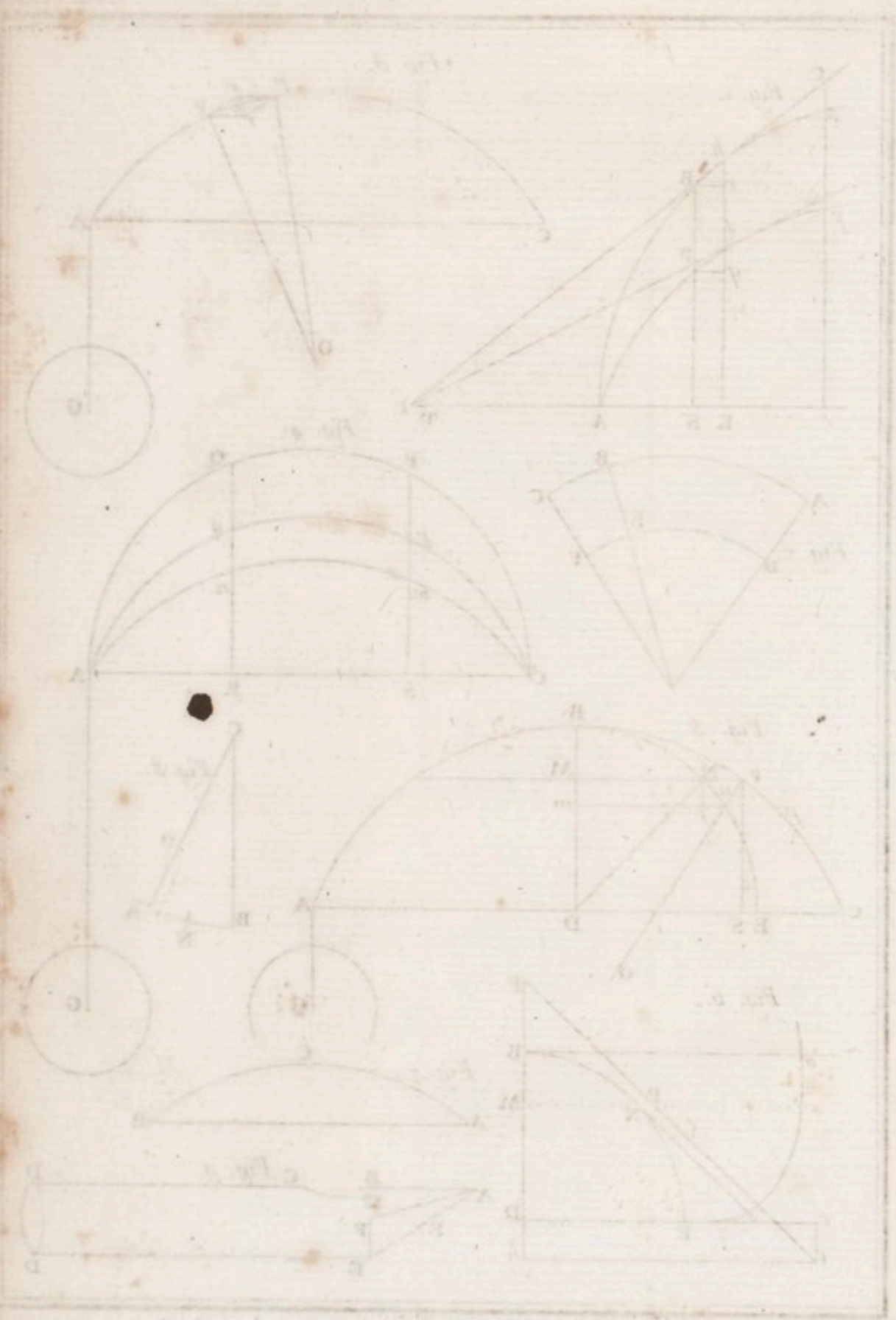
Ce raisonnement est juste , & je conviens que la graduation du tuyau est impossible , si la différence qui survient dans le poids tendant ou dans la pesanteur de l'atmosphère n'influe pas sensiblement sur la longueur du tuyau. Mais l'effet de cette différence est considérable ; car selon la température de l'air , il y a tel tuyau qui rend des sons qui sont entr'eux dans la raison des nombres 840714 , 960771 , ou dans le rapport de 8 à 9 , ainsi qu'on l'a vû ci-dessus ; ce qui prend plus d'un demi-pied sur la longueur entière d'un tuyau de 8 pieds.

Or quel inconvenient y auroit-il à se servir d'un tuyau de cette longueur

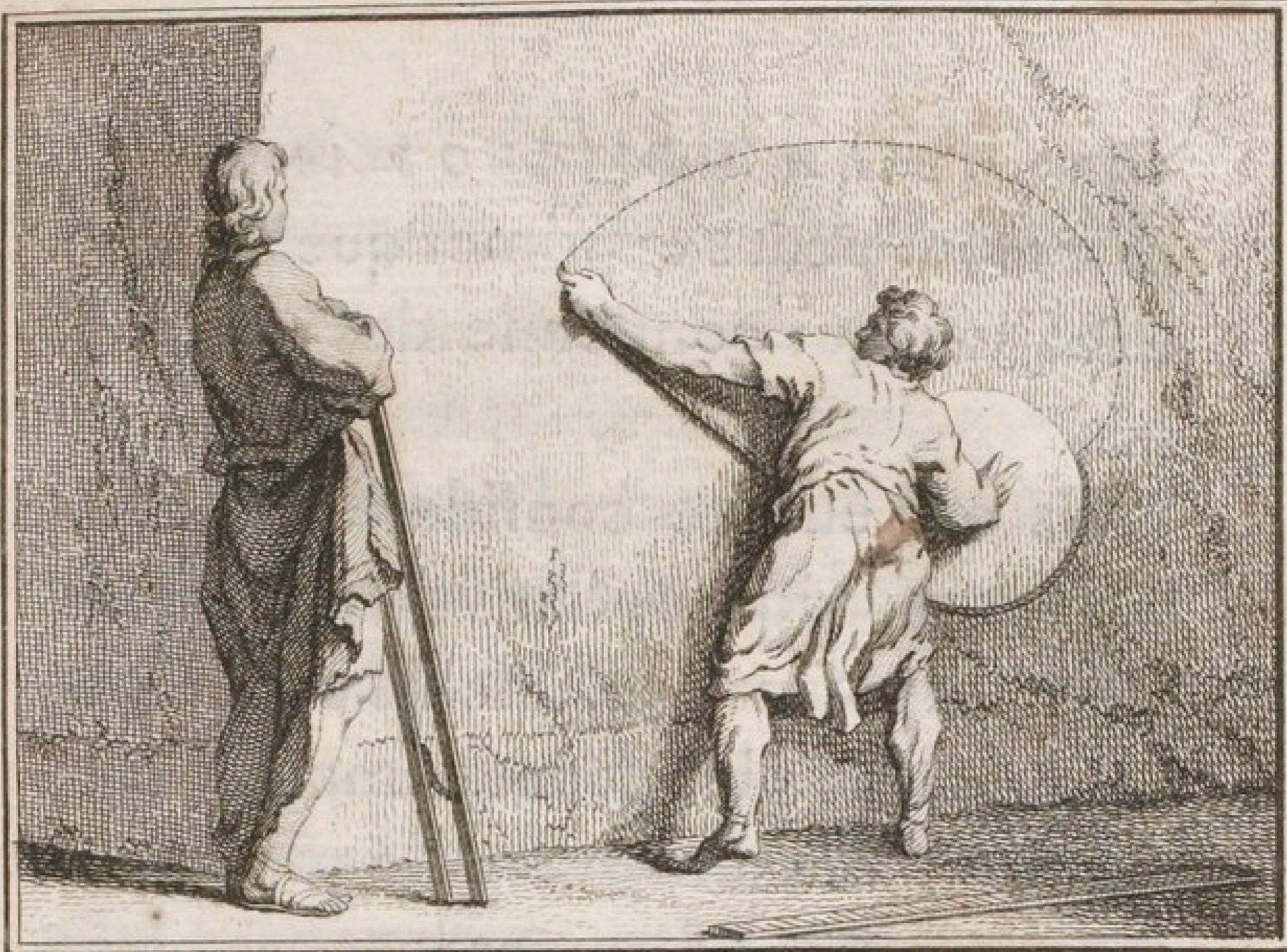
pour fixer le son. On auroit donc alors l'espace de plus d'un demi pied à grader; or cet espace est assez considerable pour admettre un très-grand nombre de divisions & promettre dans la fixation du son toute l'exactitude qu'on peut désirer.

*Fin du premier Mémoire.*









*N. Blakewell Londineus inv.*

*D. Sornique Sculp.*

## SECONDE MÉMOIRE:

*Examen de la développante du Cercle.*



Les Géomètres ont distingué des courbes de deux espèces, des courbes géométriques & des courbes mécaniques.

Ils entendent par une courbe géométrique celle dont la nature est exprimée par une équation qui ne contient que des quantités finies; & par une courbe mécanique, celle dont la

nature ne peut s'exprimer que par une équation qui contienne des différences.

Ils ont ensuite considéré les courbes géométriques relativement au plus grand exposant de l'abscisse ou de l'ordonnée ; ou plus généralement, relativement à la dimension du produit le plus grand que forment les variables, soit séparées, soit mêlées ensemble, dans les équations qui expriment la nature de ces courbes ; & ils en ont fait différens genres selon ce plus haut exposant de l'abscisse & de l'ordonnée, ou selon cette dimension du plus grand produit que forment les variables, soit séparées, soit mêlées.

Ainsi ils ont appelé courbes du second genre, celles dont la nature est exprimée par des équations où 2 est le plus haut exposant de l'abscisse  $x$ , ou de l'ordonnée  $y$  ; ou par des équations dans lesquelles  $xy$  produit de

deux dimensions est le plus haut qui s'y rencontre. De même que, selon eux, les courbes du troisième genre, sont celles dont la nature est exprimée par des équations où 3 est le plus haut exposant de l'abscisse  $x$ , ou de l'ordonnée  $y$ ; ou par des équations dans lesquelles il ne se rencontre point de plus haut produit, que  $xyy$  ou  $xxxy$  de trois dimensions, & ainsi de suite.

Je n'ai garde de traiter ces distinctions d'arbitraires; elles sont fondées dans la nature des choses. Il y a en effet des courbes dont l'équation contient nécessairement des différences & d'autres dont l'équation n'en contient point; des courbes dont la nature s'exprime par une équation où le plus haut produit des variables n'est que de deux dimensions, & d'autres dont la nature s'exprime par une équation où ce produit est de trois, quatre, cinq, &c. dimensions.

Mais je crains bien qu'on n'ait eu trop d'égard à ces distinctions, & que par je ne sçais quelle délicatesse, on n'ait pas fait des courbes mécaniques autant d'usage qu'on auroit pû, & qu'on n'ait attaché une élégance imaginaire à n'employer dans la construction des équations qu'une courbe d'un certain genre, dans des cas où une courbe d'un genre supérieur satisfaisoit également, & se traçoit avec plus de facilité.

Cependant Newton & Leibnitz, dont l'autorité étoit assez grande en Mathématiques pour entraîner le reste des Géomètres, ont reconnu, il y a long-tems, que les courbes géométriques d'une construction simple devoient être préférées dans la solution des Problèmes à des courbes d'une équation moins compliquée, mais d'une construction plus difficile; & c'est par cette seule raison que tous les

Géomètres abandonnent unanimement la parabole pour le cercle, sans en excepter Descartes qui, perdant ailleurs de vûë la facilité de la description, prononce généralement que dans les constructions des équations, il faut bien se garder d'employer une courbe d'un genre supérieur, quand celle d'un genre inférieur suffit.

Mais pourquoi n'en feroit-il pas des courbes mécaniques, lorsqu'elles sont faciles à décrire, ainsi que des courbes géométriques qui ont cet avantage? Cette question est d'autant plus fondée que la description d'une ligne géométrique quelconque, même du cercle & de la ligne droite, est une opération mécanique & toujours sujette à erreur, mais que la Géométrie suppose exacte.

Cette science n'auroit-elle de l'indulgence que dans ces deux occasions? Si l'on augmentoit le nombre

de ses instrumens d'un nouveau compas qui fût d'un usage aussi sûr & aussi exact que celui dont on se sert pour tracer le cercle & qui facilitât un grand nombre d'opérations, seroit-elle bien fondée à le rejeter?

Si deux branches de cuivre ou d'acier sont assemblées fixement en un point, & que l'extrémité de l'une tourne autour de l'extrémité de l'autre, la première tracera sur un plan une courbe fort connue.

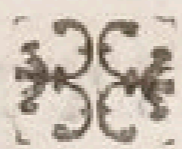
Si vous enveloppez un cercle de cuivre ou d'acier d'une chaîne fort mince; l'extrémité de cette chaîne tracera, soit en s'enveloppant, soit en se développant, une courbe dont personne, à ce que je crois, n'a encore recherché les propriétés.

Le premier de ces instrumens est un compas ordinaire, & la courbe tracée est un cercle: le second est le compas que je propose, & la courbe

tracée fera la développante du cercle.

Or conçoit-on que l'un soit plus simple que l'autre, & que la description du cercle puisse être plus facile & plus rigoureuse que celle de sa développante.

C'est la facilité qu'on a de tracer cette développante, & la multitude des cas où sa description peut avoir lieu qui m'ont déterminé à en examiner les propriétés. Je souhaite que le peu que j'en ai découvert, engage, sinon les Géomètres, du moins les faiseurs d'instrumens de Mathématiques à s'en servir. C'est en leur faveur que j'ai laissé dans ce Mémoire quelques Problèmes que j'en aurois bannis, si je n'avois écrit que pour les sçavans.



## PROBLEME I.

*Diviser un arc de cercle AFB (Fig. 1.) en une raison quelconque commensurable ou incommensurable. Soit par exemple, proposé de trouver le point F, tel que AF soit à FB comme 1 à  $\sqrt{5}$ .*

## SOLUTION.

Tracez la développante *ADE*, tirez de l'extrémité *B* de l'arc donné la tangente *BGE*; divisez cette tangente au point *G* en deux parties qui soient entr'elles dans la raison donnée de 1 à  $\sqrt{5}$ . Décrivez du rayon *CG*, l'arc *GD* qui rencontre la développante en *D*. Achevez sur *CD*, qui est égale à *CG*, le triangle *CDF* entièrement égal au triangle *CBG*. Je dis que le point *F* est le point cherché.

## DEMONSTRATION.

Le triangle *DFC* étant tout-à-fait  
égal



égal au triangle  $CBG$ ; le côté  $DF$  touche le cercle en  $F$ , donc par la nature de la développante, il est égal à l'arc  $AF$ ; il est de plus égal au côté  $BG$  du triangle  $CBG$ . Mais la ligne entiere  $BGE$  est égale à l'arc entier  $AFB$ . Donc la partie  $BF$  de cet arc est égale à  $GE$ .

$DF = BG = AF$  &  $BF = GE$ .  
 Mais  $BG. GE :: 1. \sqrt{5}$ . Donc  $AF. FB :: 1. \sqrt{5}$ . Ce q. f. d.

C O R O L L A I R E.

On a donc par le moyen de cette développante, celui d'inscrire dans un cercle, tel poligone régulier ou irrégulier qu'on désirera.

P R O B L E M E I I.

*Trouver un secteur de cercle  $ACD$  égal à un espace quelconque donné  $ab$ , Fig. 2.*

## SOLUTION.

Je fais  $a. CD :: x. b.$  & j'ai  $x = \frac{ab}{CD}$ . Je tire ensuite une tangente indéterminée au cercle donné. Je prens sur cette tangente la partie  $DE = \frac{ab}{CD}$ . Je décris avec l'instrument que j'ai proposé la développante  $AE$  qui passe par le point  $E$ . Je dis que le double du secteur  $ACD$  est égal à l'espace donné  $ab$ .

## DEMONSTRATION.

Le secteur  $ACD = \frac{AD \times CD}{2}$ . Mais  $DE = AD$ . Donc le secteur  $= \frac{DE \times CD}{2}$ . Substituez à  $DE$  sa valeur  $\frac{ab}{CD}$  & il vous viendra le secteur  $= \frac{ab}{2}$ . Donc le double du secteur  $= ab$ .  
Ce qu'il falloit démontrer.

P R O B L E M E III.

*Trouver un espace rectiligne égal au secteur extérieur quelconque AHB. Fig. 3.*

S O L U T I O N .

Prolongez le côté *HA* en *F* où ce côté soit rencontré par la ligne *BCF* qui part du point *B* & qui passe par le centre *C* du cercle. Prolongez cette ligne *BCF* en *I*. Tirez les perpendiculaires *HI* & *AL*. Tracez du point *A* la développante *AE*, & tirez la tangente *BE*. Je dis que l'espace *ABH*

$$= \frac{FB \times HI}{2} = \frac{FC \times FA \times HI}{2FH} = \frac{BC \times BE}{2} \circ$$

D E M O N S T R A T I O N .

La surface du triangle *FBH*  $\equiv \frac{FB \times HI}{2}$ . Mais *FH. HI :: FA. AL*  
 $\equiv \frac{FA \times HI}{FH}$ . Donc la surface du trian-

gle  $FAC = \frac{FC \times FA \times HI}{2FH}$ . Donc l'es-

pace  $ACBH = \frac{FB \times HI}{2} = \frac{FC \times FA \times HI}{2FH}$ .

Mais l'espace  $ACB = \frac{BC \times BE}{2}$ . Donc

l'espace  $ABH = \frac{FB \times HI}{2} = \frac{FC \times FA \times HI}{2FH}$

$= \frac{BC \times BE}{2}$ . Ce q. f. d.

### PROBLEME IV.

*Trouver par le moyen de la développante  
AE un espace rectiligne égal au segment  
AQF. Voy. Fig. 4.*

### SOLUTION.

Prenez sur la tangente  $EF$  la ligne  
 $EK =$  au sinus  $AB$ . Je dis que le  
triangle  $CFK$  est égal au segment  
 $AQF$ .

### DEMONSTRATION.

Le triangle  $CFK = \frac{CF \times FK}{2} = CE$

$$\times \frac{FE - EK}{2} = \frac{CF \times \text{arc } AQF}{2} = \frac{CF \times AB}{2}$$

= au secteur  $ACFQ$  — le triangle  $ACF$  = au segment  $AQF$ . C. q. f. d.

PROBLEME V.

Trouver un espace rectiligne égal à une portion quelconque  $AFB$  du segment circulaire,  $AB$  étant perpendiculaire ou non à  $FC$ . Voy. Fig. 4.

SOLUTION.

Ayant mené du point  $B$  la perpendiculaire  $BD$  sur  $AC$ , on prendra sur la tangente  $EF$ , la partie  $EV = BD$ , & ayant joint  $VC$ , on aura le triangle  $CFV =$  à l'espace  $AQFB$ .

DEMONSTRATION.

$$\begin{aligned} CFV &= \frac{CF \times FV}{2} = CF \times \frac{FE - EV}{2} \\ &= \frac{CF \times \text{arc } AQF}{2} = \frac{CF \times BD}{2} \\ &= \frac{CF \times \text{arc } AQF}{2} = \frac{CA \times BD}{2} = \text{au secteur} \end{aligned}$$

134 DE LA DEVELOPANTE  
 $AQFC$  — le triangle  $ABC$  = l'espace  
curviligne  $AQFB$ . Ce q. f. d.

### PROBLEME VI.

*Trouver une ligne droite égale à une  
portion quelconque  $AEG$  de la dévelo-  
pante du cercle.*

### SOLUTION.

Soient (*Fig. 5.*) du point  $E$  la tan-  
gente  $EF$  & la perpendiculaire  $EO$  à  
 $CE$ ; que cette perpendiculaire soit  
rencontrée en  $O$  par la ligne  $CF$  pro-  
longée & qui passe par le point de con-  
tengence  $F$ , Je dis que l'arc  $AEG$   
est égal à la moitié de la ligne  $FO$ .

### DEMONSTRATION.

Ayant tiré la tangente  $ef$  infiniment  
proche de  $EF$  & nommé  $CA$  ou  $CF$ ,  
 $a$ ; l'arc  $AF$ ,  $x$ ; l'élément  $Ff$ ,  $dx$ . Les  
secteurs semblables  $CFf$ ,  $Eef$  donne-

ront  $CF, a. fF, dx :: EF, x. Ee = \frac{xx dx}{a}$  & intégrant on aura  $AE = \frac{xx}{2a}$ .

Mais à cause des triangles rectangles semblables  $CFE, FEO$ ; on a  $CF, a.$

$FE, x :: FE, x. FO = \frac{xx}{a}$ . Donc  $FO = 2AE$  ou  $AE = \frac{FO}{2}$ . C. q. f. d.

PROBLEME VII.

*Trouver un espace rectiligne égal à l'espace A F E G. Voy. Fig. 5.*

S O L U T I O N.

Je dis que l'espace  $A F E G$  est égal au tiers du triangle  $E F O$ .

D E M O N S T R A T I O N.

Le secteur élémentaire  $E f e = \frac{Ee \times EF}{2} = \frac{xx dx}{2a}$ , par la proposition précédente, dont l'intégrale donne l'espace  $A F E G = \frac{x^3}{2.3a}$ . Mais le trian-

gle  $EFO = \frac{EF \times FO}{2} = \frac{x^3}{2a}$ . Donc  
 l'espace  $AFEG = \frac{1}{3}$  du triangle  $EFO$ .  
 Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE I.

Si l'on prend  $FK = \frac{1}{3} FO$  & qu'on  
 tire  $EK$ . Je dis que le triangle  $CEK$  fera  
 égal à l'espace mixtiligne  $CAGEF$ .

Car  $EFK = AGEF$  &  $CFE =$   
 $CABF$ . Donc  $CABF + AGEF$  ou  
 l'espace mixtiligne  $CAGEF = CFE$   
 $+ EFK$  ou  $CEK$ .

## COROLLAIRE II.

Si on retranche des espaces  $CEK$  ;  
 $CAGEF$ , la partie commune  $CEF$ , on  
 aura  $CAGE = EKF = \frac{1}{3} FEO = AGEF$ .

Ce que l'on peut démontrer encore  
 en cette sorte.  $CEF = CABF$ . Donc  
 en ôtant la partie commune  $CBF$ ,  
 reste  $BEF = CBA$ , & ajoutant de  
 part & d'autre  $BAGE$ , on a  $CAGE =$   
 $AGEF$ .



## COROLLAIRE III.

Si l'on avoit la rectification d'un arc de cercle quelconque, la développante donneroit la quadrature du cercle. Parce que faisant de la ligne droite une tangente au cercle, à l'extrémité de l'arc auquel elle seroit égale, l'autre extrémité de cet arc seroit l'origine de la développante. Or on va voir qu'un point de la courbe étant donné avec son origine, on a la quadrature du cercle.

## COROLLAIRE IV.

Si, le point  $E$  de la développante, la rectification de la partie  $AE$ , la quadrature de l'espace  $CAE$ , étant donnés, on peut trouver l'origine  $A$  de la courbe, on aura la quadrature du cercle, car  $FA$  fera toujours égale à  $FE$ .

## COROLLAIRE V.

Si l'on peut trouver la quadrature du segment  $AGE$  ; la ratification de la partie de la courbe  $AGE$ , le point  $E$  de la courbe, la quadrature de l'espace  $CAGE$ , étant donnés ; sans supposer l'origine de la courbe donnée ; on aura bientôt cette origine ; car ôtant de l'espace quarrable  $CAGE$ , l'espace  $AGE$ , il restera la surface du triangle  $CAE$  dont les deux côtés  $CA$ ,  $CE$  sont donnés de longueur, le côté  $CE$  de position & le lieu du sommet  $A$  dans la circonférence du cercle. Mais par le Corollaire précédent, si l'on a l'origine de la courbe  $A$  & le point  $E$ , on a la quadrature du cercle.



R R O B L E M E V I I I.

*L'origine de la développante  $AE$  étant donnée, avec un de ses points  $E$ , trouver ses autres points. Fig. 6.*

S O L U T I O N.

Tirez du point  $E$  la tangente  $FE$ . Divisez l'arc  $AF$  en un certain nombre de parties égales  $Aa, aa, aa, \&c.$  Divisez la tangente  $FE$  en un même nombre de parties égales. Prenez l'arc  $Ff =$  une des parties égales de l'arc  $AF$ . Tirez la tangente  $fe$ . Prenez  $fe = FE \div$  une des parties égales de  $FE$ . Je dis que l'extrémité  $e$  de la ligne  $fe$  appartiendra à la développante.

D E M O N S T R A T I O N.

Il est évident que chaque partie de la tangente  $FE$  est égale à chaque par-

tie  $Aa$ , de l'arc  $AF$ ; donc si l'on augmente l'arc  $AF$  d'une partie égale aux précédentes, il faudra pareillement augmenter la tangente  $FE$  d'une partie égale à une de celles dans lesquelles on l'a divisée, pour avoir une ligne  $fe$  qui soit toujours égale à l'arc  $Af$  & qui étant supposée tangente en  $f$ , ait son extrémité dans la développante.

## PROBLEME IX.

*Deux points  $E, E$ , (Fig. 6.) de la développante étant donnés, trouver les autres.*

## SOLUTION.

Tirez les tangentes  $EF, fe$ ; prenez l'arc  $Fa = Ff$ . Tirez la tangente  $aE$ . Il est évident qu'il doit y avoir la même différence de  $aE$  à  $FE$ ; que de  $FE$  à  $fe$ .

On peut encore diviser l'arc  $Ff$  en

un certain nombre de parties égales, & partager la différence de  $fe$  à  $FE$  en un même nombre de parties égales. On voit, sans qu'il soit besoin de le démontrer, qu'en faisant  $Fa$  égale à une des parties de l'arc  $Ff$ , &  $aE$  égale à  $FE$  moins une des parties de la différence de  $fe$  à  $FE$ ; l'extrémité de  $aE$  appartiendra à la développante.

P R O B L E M E X.

*Trouver le centre de gravité d'un arc circulaire AF. Voy. Fig. 7.*

S O L U T I O N.

Tirez la ligne  $CP$  qui divise l'arc  $AF$  par la moitié. La tangente  $PO$  & le sinus  $AV$ . Joignez  $CO$  & menez  $AI$  parallèle à  $CP$  &  $IG$  parallèle à  $OP$ . Je dis que le point  $G$  fera le centre de gravité de l'arc.

## DEMONSTRATION.

Les Géomètres sçavent que le centre de gravité  $G$ , d'un arc  $APF$  doit être sur la ligne  $CP$ , à une distance du centre  $C$ , telle que  $CP \times AV = CG \times AP$ . C'est-à-dire, que  $CG$  soit à  $CP$  comme  $AV$  à l'arc  $AP$  ou à la tangente  $PO$ . Or c'est ce que donne la construction précédente. Car on a les triangles semblables  $CPO$ ,  $CGI$  & par conséquent  $CG. CP :: GI. PO :: AV. PO$ . Donc, &c. Ce q. f. d.

## COROLLAIRE.

Soit  $M$  le centre de gravité du secteur  $CAF$ . On sçait que  $CM = \frac{2}{3} CG$ . Ainsi ayant le centre de gravité  $G$  de l'arc, par le moyen de la développante  $AO$ , on aura facilement celui du secteur.

PROBLEME XI.

Construire une équation cubique de cette forme  $x^3 - px = \pm q$ ; où le cube de  $\frac{p}{3}$  est supposé plus grand ou non moindre que le quarré de  $\frac{q}{2}$ . Cette construction demande quelques préparations par lesquelles nous allons commencer.

LEMME I.

Dans tout quadrilatere inscrit, le rectangle fait des diagonales, est égal à la somme des deux rectangles faits des deux côtés opposés. Ainsi (Fig. 8.) je dis que dans le quadrilatere ABCD,  $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$ .

DEMONSTRATION.

Tirez la ligne  $AE$ , de maniere que l'angle  $BAE$  soit égal à l'angle  $CAD$  & que vous ayez par conséquent l'angle  $CAB = EAD$ . Mais les angles

$ABE$  &  $ACD$  sont égaux, de même que les angles  $ADE$  &  $ACB$ , parce que les deux premiers, de même que les deux seconds, sont appuyez sur le même arc. Donc les triangles  $ABE$  &  $ACD$ , & les triangles  $ADE$  &  $ACB$  sont semblables.

Les deux premiers donnent  $AB \cdot BE :: AC \cdot CD$ .

Les deux seconds donnent  $AD \cdot DE :: AC \cdot CB$ .

Donc  $AB \times CD = AC \times BE$ , &  $AD \times CB = AC \times DE$ . Et  $AC \times DE + AC \times BE = AB \times CD + AD \times CB$ . Ou  $AC \times \overline{BE + DE} = AB \times CD + AD \times CB$ . Ce q. f. d.

## L E M M E I I.

Si l'on inscrit dans un cercle (Fig. 9.) un triangle équilatéral  $ACB$  & que l'on tire d'un de ses angles  $A$  la ligne  $AE$ , & du point  $E$  les cordes  $CE$ ,  $EB$ ; je dis



dis que la corde  $AE$  sera égale à la somme des deux cordes  $CE, BE$ .

DEMONSTRATION.

Par le Lemme précédent,  $AE \times BC = EC \times AB + AC \times EB$ . Mais par supposition, les côtés du triangle sont égaux; donc en les ôtant des deux membres de l'équation, on aura  $AE = BE + EC$ . Ce q. f. d.

LEMME III.

Soit  $ABCD$ , (Fig. 10.) un arc d'un cercle donné dont le diamètre est  $AF$ ,  $AB$  le tiers de cet arc;  $AD$  la corde donnée de l'arc entier; trouver la valeur de la corde de l'arc  $AB$ .

Prenez l'arc  $BC =$  l'arc  $BA$ . Faites de l'extrémité  $F$  du diamètre les arcs  $FE, FG =$  l'arc  $AB$ . Tirez les cordes  $AB, BC, CD, AC, AD, BD$  &  $AE, EF, FG, EG$ . Nommez le

K

146 DE LA DEVELOPANTE  
diamètre  $AF$ ,  $2a$ ; la corde donnée  
 $AD$ ,  $2b$ ; la corde  $AB$  & ses égales  
 $x$ , la corde  $AC$  & ses égales,  $y$ .

A cause du triangle rectangle  $AEF$ ,  
on a  $\overline{AE}^2 = 4aa - xx$ . &  $AE$  ou  $AG$   
 $= \sqrt{4aa - xx}$ . Mais les deux figu-  
res à quatre côtés  $ABCD$  &  $AEFG$ ,  
donneront par le Lemme 1.  $yy = xx$   
 $+ 2bx$  &  $2ay = \sqrt{4a^2 - x^2} \times 2x$ ,  
d'où l'on tire  $yy = \frac{4aaxx - x^4}{aa}$ . Donc  
 $\frac{4aaxx - x^4}{aa} = xx + 2bx$ , ou  $x^3 =$   
 $3aax = -2aab$ .

### COROLLAIRE.

La corde  $AB$  est donc une des ra-  
cines affirmatives de l'équation  $x^3 =$   
 $3aax = -2aab$ , & la corde de la  
troisième partie de l'arc qui est de l'au-  
tre côté de  $AD$ , l'autre racine positi-  
ve de l'équation. Car on trouve la mê-  
me chose, soit que  $x$  signifie le tiers

de l'un de ces arcs ou le tiers de l'autre. Ce qui paroîtra en appliquant le même raisonnement à l'autre arc.

Il faut seulement remarquer que la quantité positive  $b$  ne peut surpasser  $a$ ; car si  $2b > 2a$ ; alors la corde  $AD$  fera plus grande que le diamètre.

Cela posé, je passe à la solution du Problème que je me suis proposé sçavoir de construire l'équation  $x^3 - px = \pm q$ .

S O L U T I O N.

Je commence par transformer la proposée en  $x^3 - 3ax = \pm 2ab$ , en substituant  $aa$  à  $\frac{p}{3}$  &  $2a^2b$  à  $q$ . J'observe après la transformation que  $\frac{p^3}{27}$  étant plus grand par supposition que  $\frac{qq}{4}$ ;  $a^6$  sera plus grand  $a^4bb$ ,  $aa$  que  $bb$  &  $a$  que  $b$ .

Je décris ensuite, (Fig. 11.) un cer-  
Kij

cle du rayon,  $a$ . Je tire la corde  $AD$  :  
 $= 2b$ . Je trace la développante  $AE$ . Je  
mene la tangente  $DE$  que je partage  
en trois parties égales; du centre  $O$  &  
du rayon  $OG$ , je décris l'arc de cer-  
cle  $GF$ ; je construis sur  $OF = OG$  le  
triangle  $OFB$  tout-à-fait égal au trian-  
gle  $ODG$ . Donc  $BF =$  l'arc  $AB$  &  
 $AB = \frac{1}{3} AD$ .

Je prens  $BC = AB$ ;  $CD$  fera donc  
égale à  $AB$ ; du point  $B$  & du côté  
 $BH$ ; j'inscris le triangle équilatéral  
 $BHK$  & je tire les cordes  $AB, HA,$   
 $AK$ . Je dis qu'elles feront les trois  
racines de l'équation  $x^3 - 3ax =$   
 $\pm 2ab$ .

## DEMONSTRATION.

Il est évident par le dernier Lemme,  
que si  $AB$  est la corde du tiers de l'arc  
 $AD$ , elle fera une des racines positives  
de l'équation  $x^3 - 3ax = -2ab$ .  
Et que la corde de la troisième partie

de l'arc  $AKHD$  fera l'autre racine positive de la même équation. Mais il n'est pas moins évident par la nature de la développante que l'arc  $AB$  est le tiers de l'arc  $AD$ .

Et voici comment je démontre que  $AK$  est le tiers de l'arc  $AKHD$ .

L'arc  $ABCD$  + l'arc  $AKHD$  = la circonférence. Mais l'arc  $AB$  + l'arc  $AK$  sont égaux pris ensemble au tiers de la circonférence. D'ailleurs l'arc  $AB$  est égal au tiers de l'arc  $ABCD$ . Donc l'arc  $AK$  est égal au tiers de l'arc  $AKHD$ .

Donc ces deux cordes sont les racines positives de l'équation proposée, & leur somme, la troisième racine, en changeant le signe, parce que le second terme de l'équation manque. Mais Lemme 2.  $AH = AB + AK$ . Donc  $AH$  est la troisième racine.

Donc  $AB, AK, - AH$  sont les

trois racines de  $x^3 - 3aax = -2aab$ .

Et  $AB$ ,  $-AK$ ,  $-AH$  les trois racines de  $x^3 - 3aax = +2aab$ .

Donc j'ai trouvé les trois racines de l'équation  $x^3 - 3aax = \pm 2aab$ . Donc j'ai construit l'équation proposée  $x^3 - px = \pm q$ .

## R E M A R Q U E.

Nous avons trouvé pour l'expression de la corde du tiers d'un arc, une équation du troisième degré. Il paroît cependant au premier coup d'œil que le problème ne devrait avoir qu'une solution, car il n'y a certainement qu'une seule & unique valeur possible de la corde  $AC$  qui soutend le tiers de l'arc  $AB$ . Mais on remarquera que l'équation algébrique à laquelle nous sommes parvenus, ne renferme point les arcs  $AB$ ,  $AC$ ; mais seulement leurs cordes; & que par conséquent  $x$  n'est pas simplement la corde du tiers

de l'arc  $ACB$ , mais la corde du tiers de tout arc qui a  $AB$  pour corde. Or tous les arcs qui ont  $AB$  pour corde sont en nommant  $c$  la circonférence, les arcs  $ACB$ ,  $ACB + c$ ,  $ACB + 2c$ ,  $ACB + 3c$ ,  $ACB + 4c$ ,  $ACB + 5c$ , &c. &  $c - ACB$  ou  $ADB$ ,  $2c - ACB$ ,  $3c - ACB$ ,  $4c - ACB$ , &c. Fig. 12.

Or je dis que la division de tous ces arcs en 3, fournit 3 cordes différentes & jamais plus de 3.

Car 1°. Soit le tiers de l'arc  $ACB = z$ , le tiers de l'arc  $ACB + c = y$ , le tiers de l'arc  $ACB + 2c = u$ . Cela donnera 3 arcs différens qui auront chacun leurs cordes. Voilà donc trois cordes différentes & par conséquent les 3 racines de l'équation.

2°. Il sembleroit d'abord que le tiers des autres arcs doit avoir aussi chacun sa corde, & que par conséquent le problème a une infinité de

solutions différentes. Mais on observera que l'arc  $ACB + 3c$ , a pour tiers  $c + z$ , dont la corde est la même que celle de  $z$ ; que l'arc  $ACB + AC$  a pour tiers  $c + y$ , dont la corde est la même que celle de  $y$ ; que l'arc  $ACB + 5c$  a pour tiers  $c + u$ , dont la corde est la même que celle de  $u$ ; & ainsi de suite.

De même, on trouvera que  $ADB$  ou  $c - ACB$  a pour tiers  $c - u$ , parce que  $3c - 3u = 3c - 2c - ABC$ . Or la corde de  $c - u$  est la même que celle de  $u$ . Par la même raison la corde du tiers de  $2c - ACB$  fera la même que celle de  $y$ , & celle de  $3c - ACB$  la même que celle de  $z$ ; & ainsi de suite.

Donc la division à l'infini de tous ces arcs en 3, donne 3 cordes différentes & n'en donne pas plus de trois. Voilà pourquoi le problème est du troisième degré,



Si on divisoit un arc en 4 parties, on trouveroit une équation du quatrième degré, & on pourroit prouver de la même manière qu'en effet cette division donne 4 cordes différentes, & jamais davantage; & en général que si l'on divise l'arc  $ACB$  en  $n$  parties, la corde de la  $n$  partie de  $nc + ACB$  fera la même que la corde de la  $n$  partie de  $ACB$ , & que par conséquent le problème aura  $n$  solutions & jamais plus. Voy. à ce sujet le Dict. univ. des Scien. & des Arts, d'où j'ai tiré cet article par anticipation. Art. Trisection.

PROBLEME XII.

*Une développante quelconque AE étant donnée, trouver par plusieurs points une autre développante ae Fig. 13.*

SOLUTION.

Soit  $CA$  le rayon de la développante donnée.  $Ca$ , celui de la développante

qu'on veut tracer. On fera  $Ce. CE :: Ca. CA$ , & le point  $e$  fera à la développante cherchée.

DEMONSTRATION.

Décrivant les cercles  $AF, af$ , & tirant la tangente  $EF$ , & la ligne  $CFf$ , puis joignant les points  $C, f$ , on aura par la construction  $CF. Cf :: CE. Ce$ . Donc  $FE$  &  $fe$  sont paralleles. Donc  $ef$  touche le cercle en  $f$ . De plus  $CF. Cf :: EF. ef$ . Donc  $ef = \frac{Cf \times EF}{CF} = Cf \times \frac{\text{arc} \times AF}{CF} = \text{arc } af$ . Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XIII.

*Ayant les deux tangentes  $AG, GE$  de la portion  $AE$  dont l'extrémité  $A$  est l'origine de la courbe, trouver le cercle générateur. Fig. 14.*

## SOLUTION.

En menant les perpendiculaires  $AN$ ,  $EN$  sur les deux tangentes, & prolongeant  $AG$  vers  $M$ ; il est clair que le centre du cercle cherché sera sur  $AM$ , & que ce cercle doit toucher les deux lignes  $AN, EN$  en quelque point. C'est pourquoi divisant l'angle  $ANO$  en deux parties égales par la ligne  $NC$ , le point  $C$  sera le centre &  $CA$  le rayon.

## PROBLEME XIV.

*Ayant les trois tangentes  $GV, VP, PF$  d'une portion quelconque  $GEF$  de la courbe, on demande le cercle générateur. Fig. 15.*

## SOLUTION.

Ayant mené les perpendiculaires  $GL, EN, FM$ , sur chaque tangen-

te, la question se réduit à trouver un cercle qui touche ces trois lignes; ou en général à trouver un cercle qui touche les trois lignes données de position (Fig. 16.)  $MVN$ ,  $VDL$ ,  $MLO$ . Or on trouvera le centre  $C$  de ce cercle, en divisant en deux parties égales, les angles  $V$ ,  $L$ , par les lignes  $VC$ ,  $LC$ . Le centre  $C$  étant trouvé, la perpendiculaire  $CD$  fera le rayon.

## THEOREME I.

*Soient décrits deux cercles concentriques à discretion  $FAB$ ,  $HI$ , (Fig. 17. 18. 19.) soient tirées la tangente  $FE$  & la ligne  $GI$ . Soit pris l'arc  $FA$  à l'arc  $AD$ ; comme  $FI^2 - GF^2$ .  $GF^2$ . Soit regardé le point  $D$  comme l'origine de la développante du cercle  $FAB$ , il arrivera de trois choses l'une, ou que cette développante passera au-dessus du point  $I$ , comme dans la fig. 18; ou qu'elle passera au-dessous, comme dans la fig. 19. ou qu'elle*

passera par ce point, comme fig. 17.

Je dis que, si elle passe au-dessus du point  $I$ , on aura la quadrature de la différence des espaces  $C$  &  $I$ ; que si elle passe au-dessous, on aura la quadrature de la somme de ces espaces, & que, si elle passe par le point  $I$ , on aura la quadrature de l'espace  $C$ .

#### DEMONSTRATION.

Premier cas, Fig. 18. où la développante passe au-dessus du point  $I$ . Par une proposition démontrée dans les Mémoires de l'Académie ann. 1703. L'espace  $A+B+C$  est quarrable. Par la nature de la développante, l'espace  $A+B+I$  est quarrable. Donc l'espace  $A+B+C - A, - B, - I$ , ou  $C - I$  est quarrable.

Second cas, Fig. 19. Où la développante passe au-dessous du point  $I$ , par la proposition que j'ai citée,  $A+B+C+I$ , est quarrable. Par la nature

de la développante  $A+B$  est quarrable.  
Donc  $A+B+C+I, -A, -B$  est quarrable, ou  $C+I$  est quarrable.

Troisième cas, Fig. 17.  $A+B+C$  est quarrable par la proposition citée.  $A+B$  l'est par la nature de la développante. Donc  $C$  est quarrable.

## COROLLAIRE I.

$C$  est quarrable dans le troisième cas, Fig. 17.  $B+D$  l'est aussi. Mais  $C+B+D$  est égal au secteur  $GHI$ . Donc ce secteur est quarrable.

## COROLLAIRE II.

$C-I$  est quarrable dans le premier cas, Fig. 18. Mais  $A+B+D+L+I$ , est aussi quarrable. Donc  $A+B+D+L+I+C, -I$ , ou  $A+B+D+C+L$ , est quarrable. Mais  $A+B+C$  est quarrable. Donc  $D+L$ , l'est aussi.

## COROLLAIRE III.

$C+I$  est quarrable, second cas Fig. 19.  $A+B+D+L$  l'est aussi. Donc  $A+B+D+L+C+I$  est quarrable. Donc  $A+B+C+I$  l'est. Donc  $D+L$ , est quarrable.

## COROLLAIRE IV.

Donc dans les cas où la développante, dont on suppose l'origine en  $D$  passe au-dessus ou au-dessous du point  $I$ , on a la quadrature du secteur circulaire  $D+L$ . Or dans le cas où elle passe par le point  $I$ , on a la quadrature du secteur  $BDC$ .

## THEOREME II.

*Si l'on trace un cercle  $AFG$ , avec la développante  $AE$ , & un autre cercle  $Afg$  dont le centre  $c$  soit sur une ligne qui parte du centre  $C$ , & qui passe par le point  $A$ , avec sa développante  $Ae$ . Je dis que l'es-*

pace  $AEe$  fait des deux développantes & d'une partie de la ligne  $CEe$  prolongée, est quarrable.

### DEMONSTRATION.

L'espace  $ACE$  est quarrable. L'espace  $Ace$  est quarrable. Otant le premier du second, le reste  $AEe + ACc$  sera quarrable. Mais  $ACc$  est un espace rectiligne; donc l'espace  $AEe$ , est quarrable. Ce que j'avois à démontrer.

### REMARQUE.

Puisque l'on peut considérer une courbe quelconque comme composée d'une infinité de très-petits arcs circulaires, il s'ensuit que tout ce que nous avons démontré du cercle & de sa développante, l'est aussi de ces petits arcs & de leurs développantes.

Soient donc l'arc infiniment petit  $abe$  d'une courbe quelconque;  $ag$  sa développante;



développante ;  $ca$  son rayon oscula-  
 teur ;  $eg$  sa tangente ; &  $cg$  une ligne  
 tirée du centre  $c$  au point  $g$  où la déve-  
 lopante du petit arc est rencontrée par  
 la tangente. Planche dernière de l'ou-  
 vrage , Fig. 1.

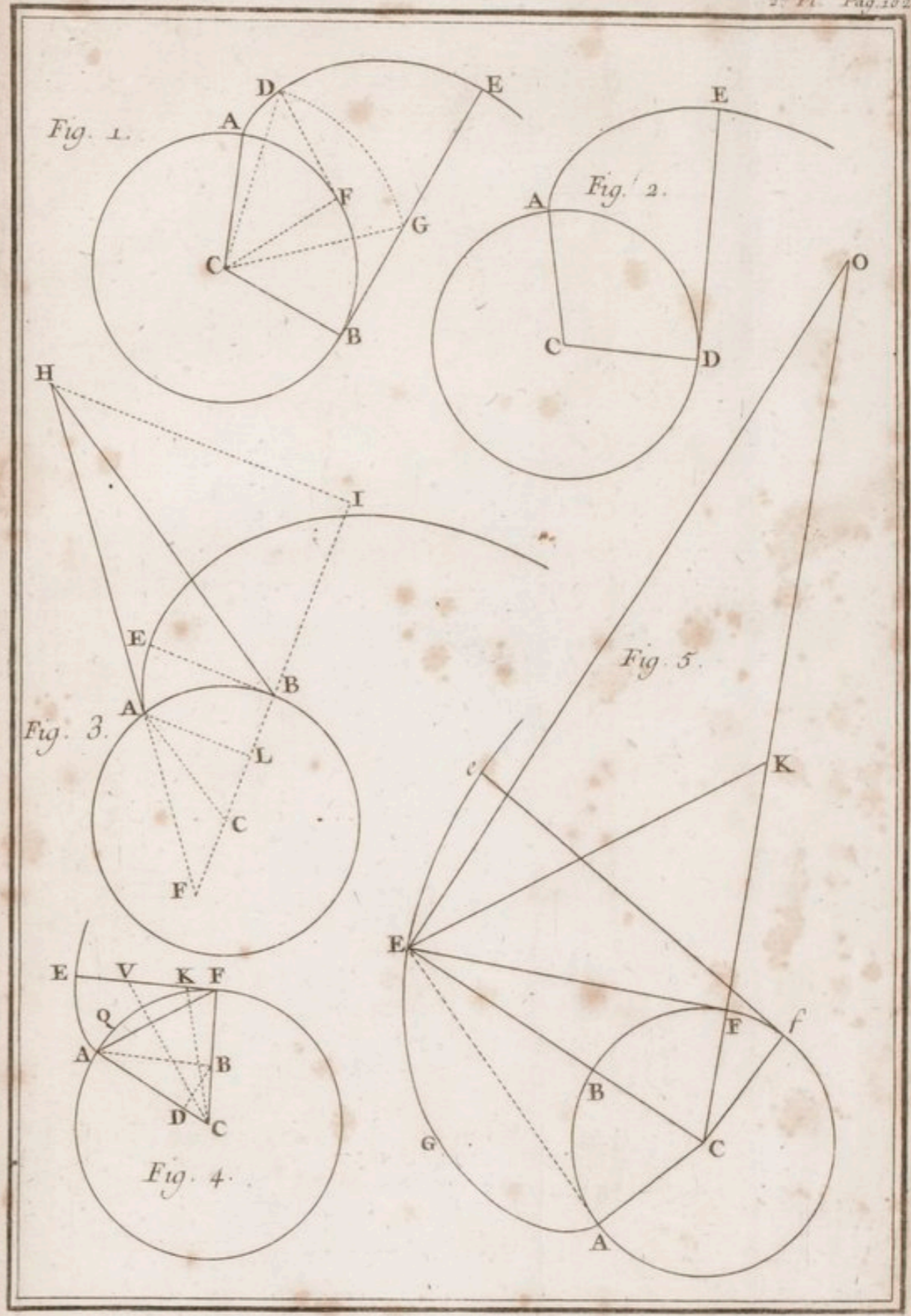
Il est constant par une des propofi-  
 tions que nous avons démontrée ci-  
 dessus que l'espace  $abeg =$  l'espace  
 $acbg$ . Otant donc de part & d'autre  
 l'espace commun  $abg$ , restera l'espa-  
 ce  $abc =$  l'espace  $gbe$ . Donc  $ac =$   
 $\frac{gb \times be}{ab} = \frac{gb \times ae}{ab}$ , car l'angle  $aeg$  étant  
 infiniment petit , on peut substituer  $ae$   
 à  $be$ . Or  $gb$  est le sinus de l'angle de  
 contingence  $aeg$ , &  $ab$  son sinus verse.

*Donc le rayon de la développée est tou-  
 jours comme l'arc infiniment petit, multi-  
 plié par le rapport du sinus de l'angle de  
 contingence au sinus verse du même angle.*

Fin du second Mémoire.

L







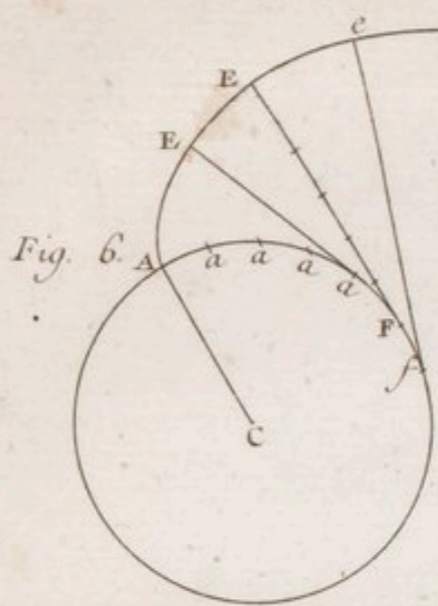


Fig. 6.

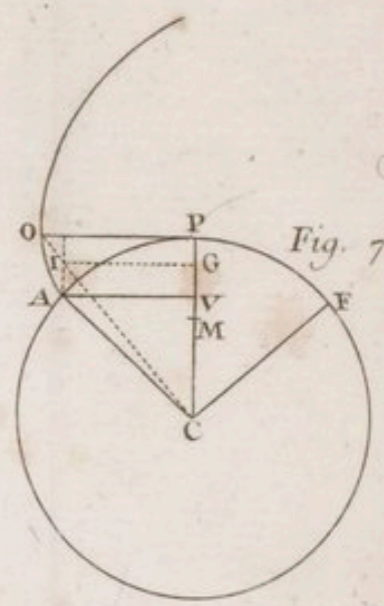


Fig. 7.

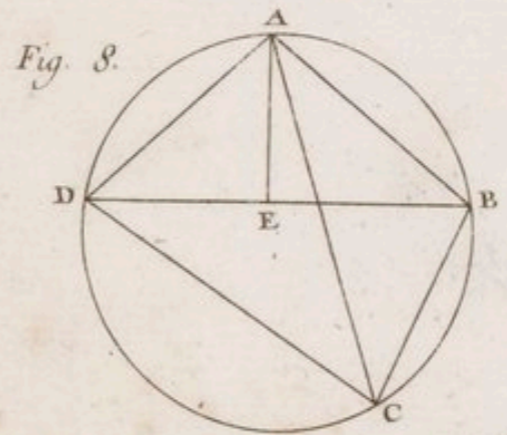


Fig. 8.

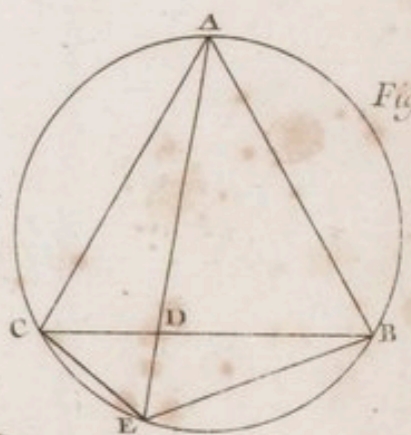


Fig. 9.

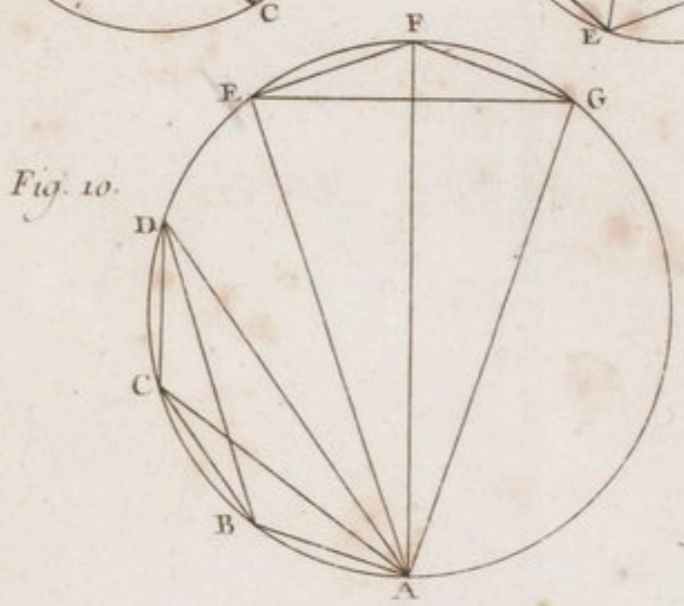
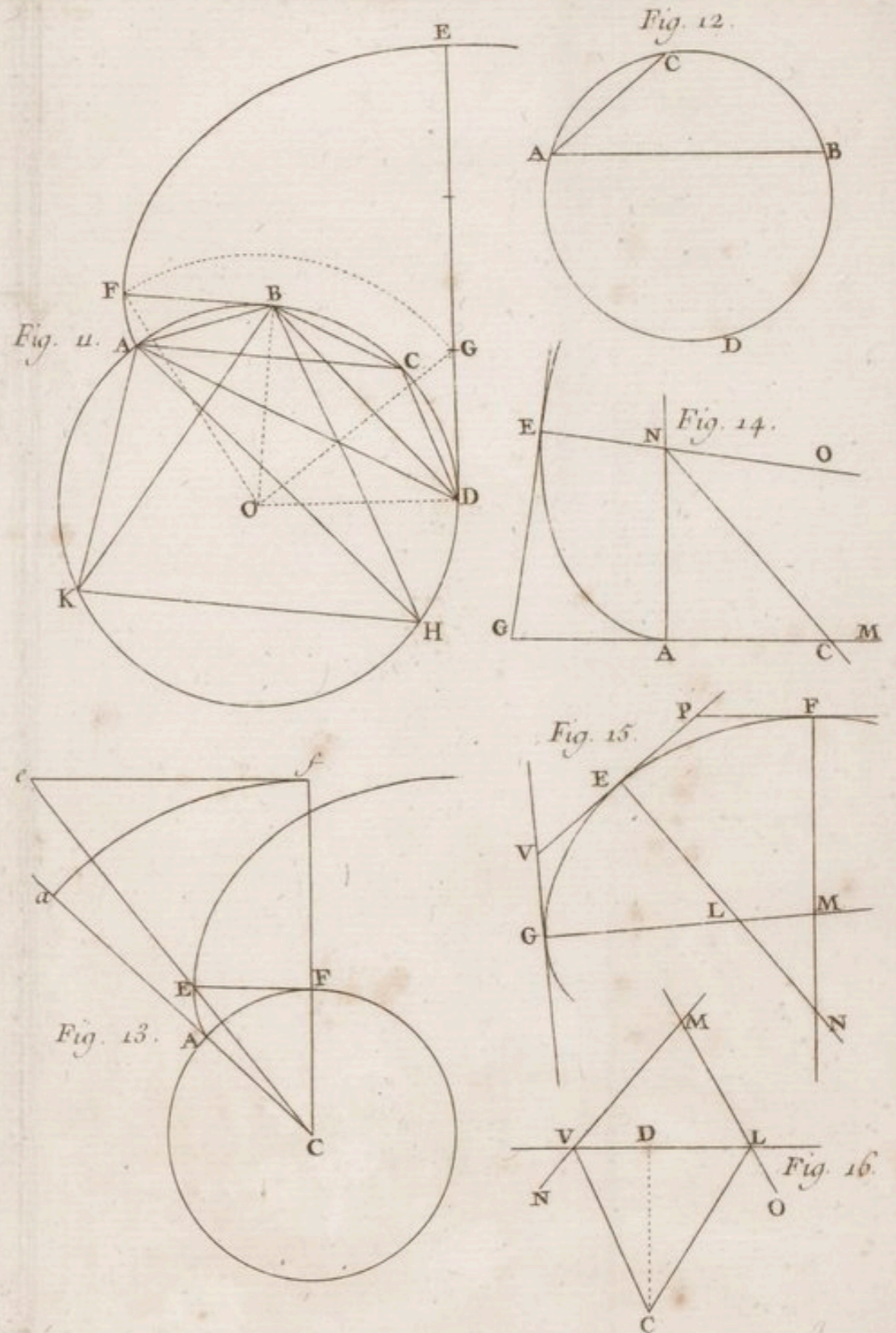
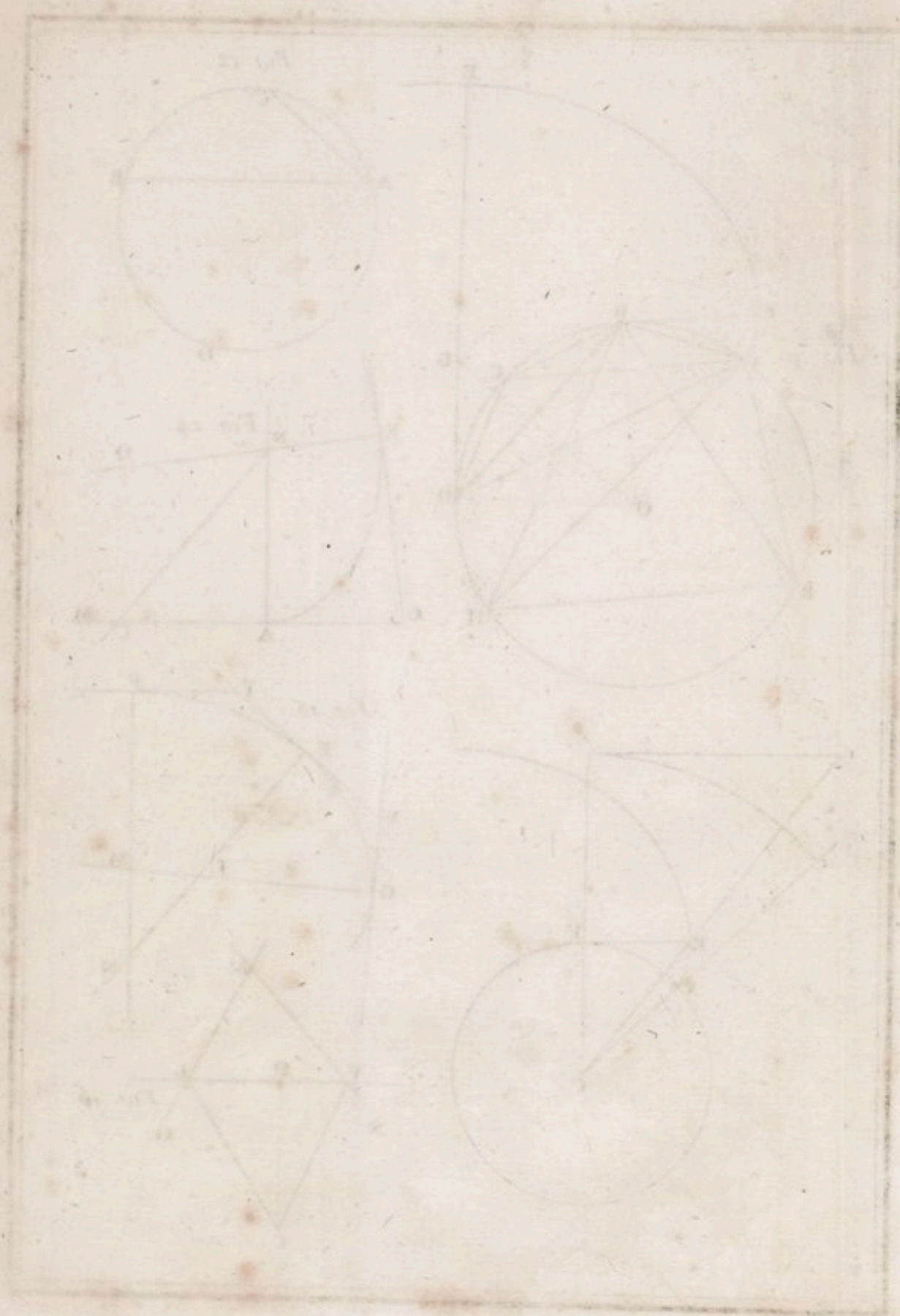


Fig. 10.









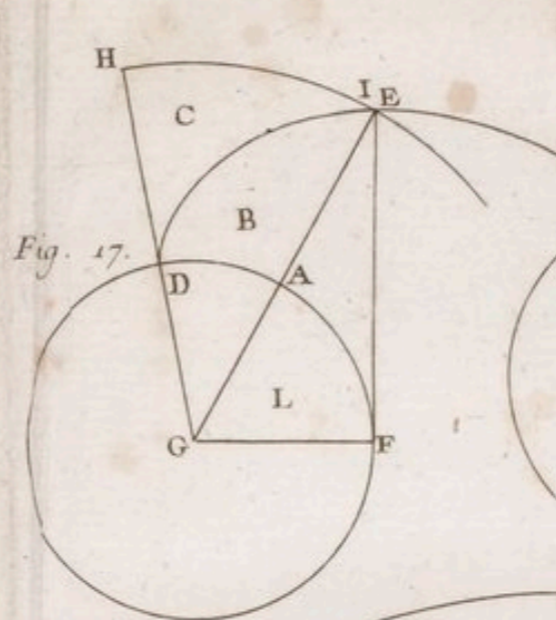


Fig. 17.

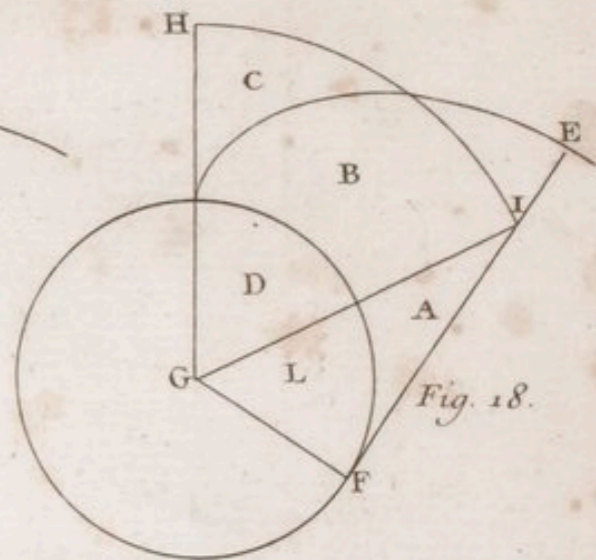


Fig. 18.

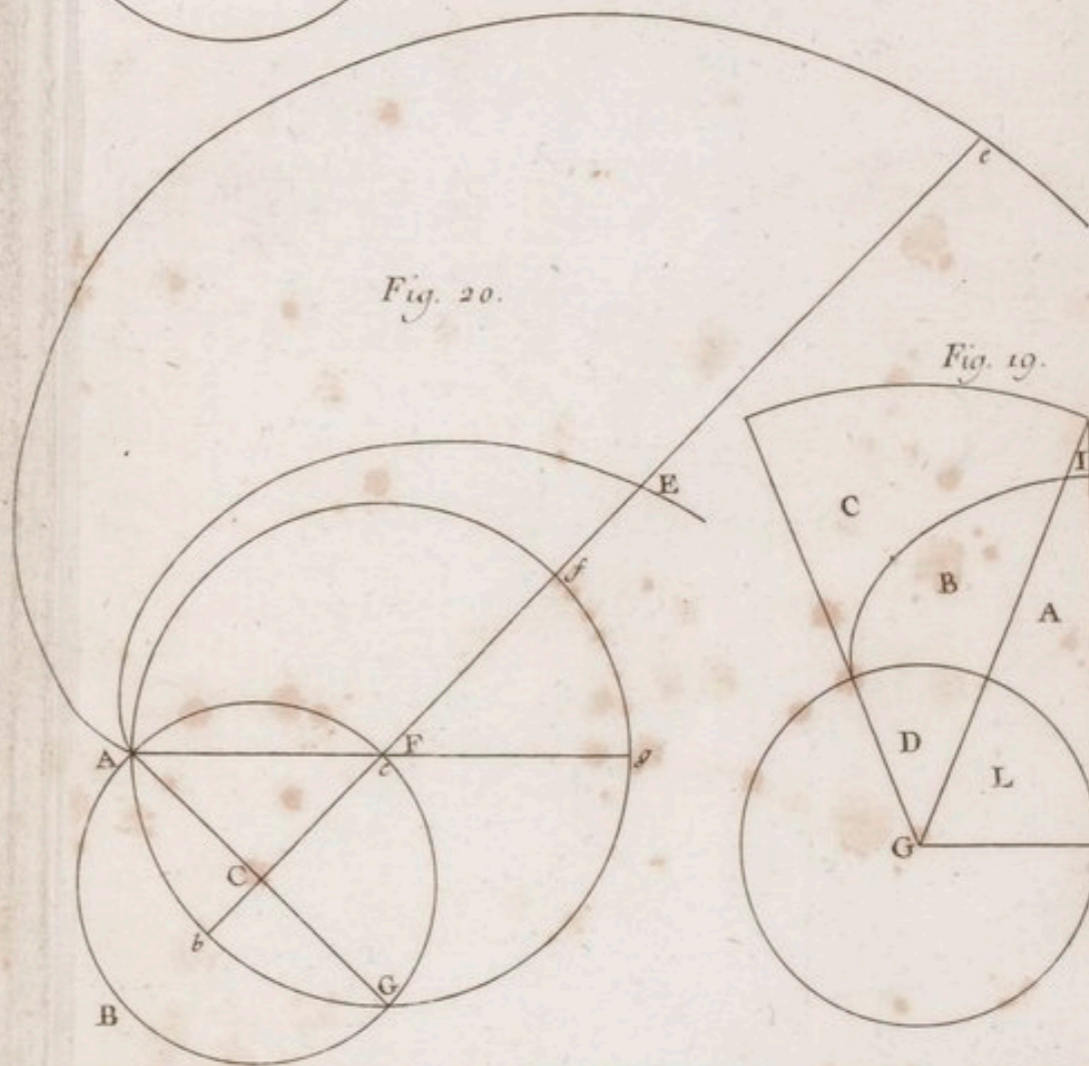
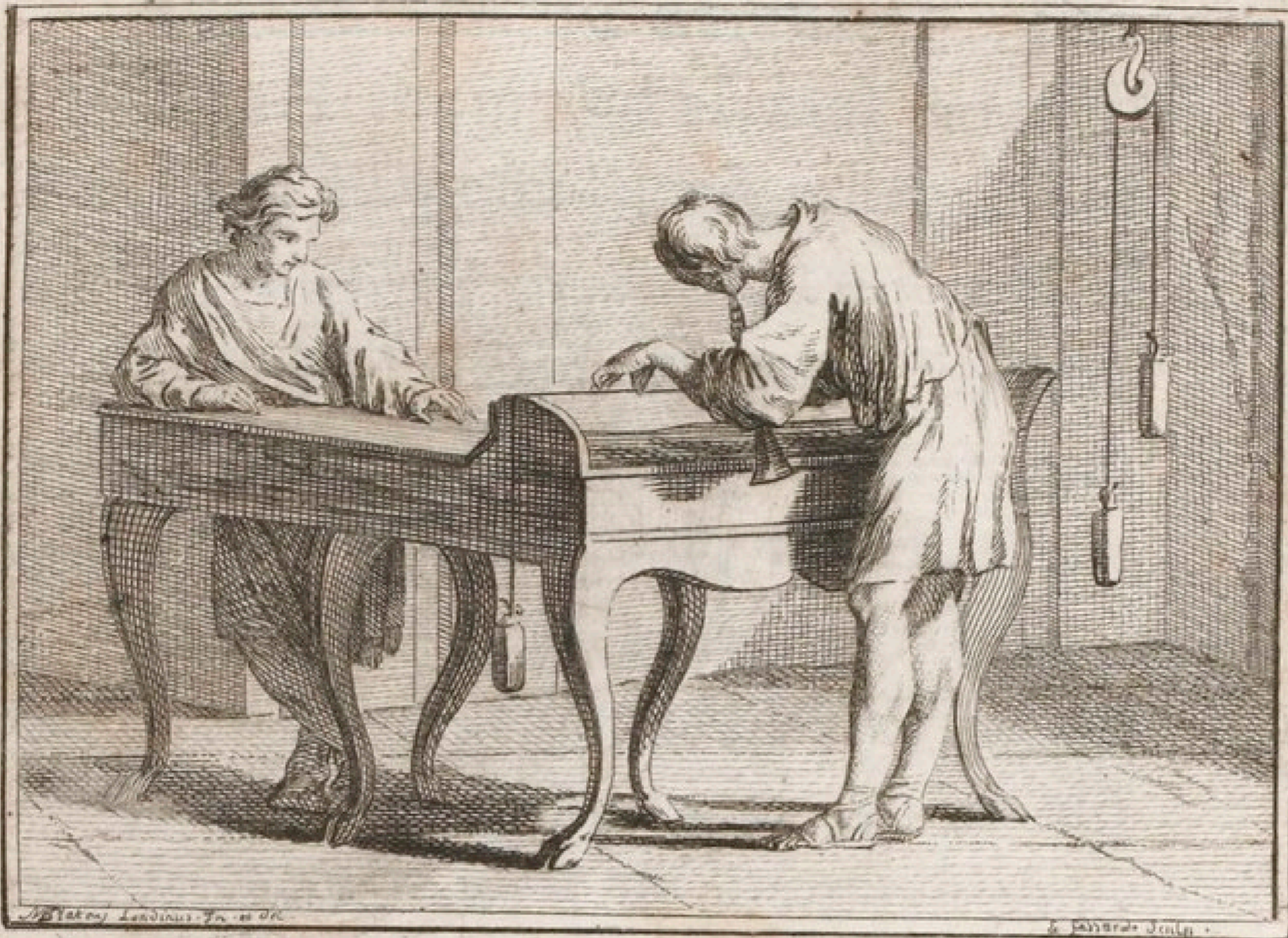


Fig. 20.

Fig. 19.





## TROISIÈME MÉMOIRE.

*Examen d'un principe de Mécanique sur  
la tension des Cordes.*

**S**I une corde  $AB$  est attachée à un point fixe  $B$ , & tirée suivant sa longueur par une force ou puissance quelconque  $A$ ; il est certain que cette corde souffrira une tension plus ou moins grande selon que la puissance  $A$  qui la tire sera plus ou moins grande. Fig. 10. Pl. dern.

Lij

Il en fera de même, si l'on substituë au point fixe  $B$  une puissance égale & contraire à la puissance  $A$ , il est constant que la corde fera d'autant plus tenduë que les puissances qui la tirent seront plus grandes.

Mais voici une question qui a jusqu'ici fort embarrassé les Mécaniciens. On demande si une corde  $AB$  attachée fixement en  $B$  & tenduë par une puissance quelconque  $A$ , est tenduë de la même maniere qu'elle le feroit, si au lieu du point fixe  $B$ , on substituait une puissance égale & contraire à la puissance  $A$ .

Plusieurs Auteurs ont écrit sur cette question que Borelli a le premier proposée. Voici comment on peut la résoudre, en regardant la corde tenduë comme un ressort dilaté dont les extrémités  $A$ ,  $B$  font également effort pour se rapprocher l'une de l'autre.

Je suppose d'abord que la corde soit

fixe en *B* & tenduë par une puissance appliquée en *A*, dont l'effort soit équivalent à un poids de 10 livres : il est certain que le point *A* sera tiré suivant *AD* avec un effort de 10 livres, & comme ce point *A*, par hypothese, est en repos, il s'ensuit que, par la résistance de la corde, il est tiré suivant *AB* avec une force de 10 livres & qu'il fait par conséquent un effort de 10 liv. pour se rapprocher du point *B*.

Mais par la nature du ressort, le point *B* fait le même effort de 10 liv. suivant *BA* pour se rapprocher du point *A*, & cet effort est soutenu & anéanti par la résistance du point fixe *B*.

Qu'on ôte maintenant le point fixe *B* & qu'on y substituë une puissance égale & contraire à *A*. Je dis que la corde demeurera tenduë de même; car l'effort de 10 livres que fait le point *B* suivant *BA*, sera soutenu par un effort

166 PRINCIPE DE MECANIQUE  
contraire de la puissance  $B$  suivant  $BC$ .  
La corde restera donc comme elle  
étoit auparavant.

Donc une corde  $AB$  fixe en  $B$ , est  
tendue par une puissance  $A$  appliquée  
à l'autre extrémité, comme elle le fe-  
roit, si au lieu du point  $B$ , on substi-  
tuoit une puissance égale & contraire  
à la puissance  $A$ .

Tel est le principe de mécanique  
que je me propose d'examiner. La  
démonstration que je viens d'en ap-  
porter est tirée du Dictionnaire univer-  
sel des Sciences & des Arts. Voyez,  
lorsque cet ouvrage paroîtra, les arti-  
cles corde, ou tension.

Si l'on veut s'assurer par expérience  
de la vérité de ce principe; il faut atta-  
cher une corde de léton à un point  
fixe; suspendre à son autre extrémité  
un poids quelconque; & faire glisser  
un chevalet sous sa longueur, jusqu'à  
ce qu'elle soit à l'unisson avec une des

touches d'un Clavecin. Cela fait, on laissera le chevalet où il est; & l'on substituera au point fixe, un poids égal au premier.

Il arrivera de deux choses l'une; ou que la corde continuera d'être à l'unisson avec la touche du Clavecin, ou qu'elle rendra un son plus aigu. Si elle rend un son plus aigu, la tension est plus grande avec deux poids égaux & agissans en sens contraires, qu'avec un seul poids & un point fixe.

Le rapport des deux sons donnera même la différence des tensions.

Un des avantages de cette expérience, c'est qu'elle fournit un moyen d'apprécier les tensions des cordes selon les poids qu'elles soutiennent; ce que l'on auroit peut-être bien de la peine à obtenir par une autre voye.

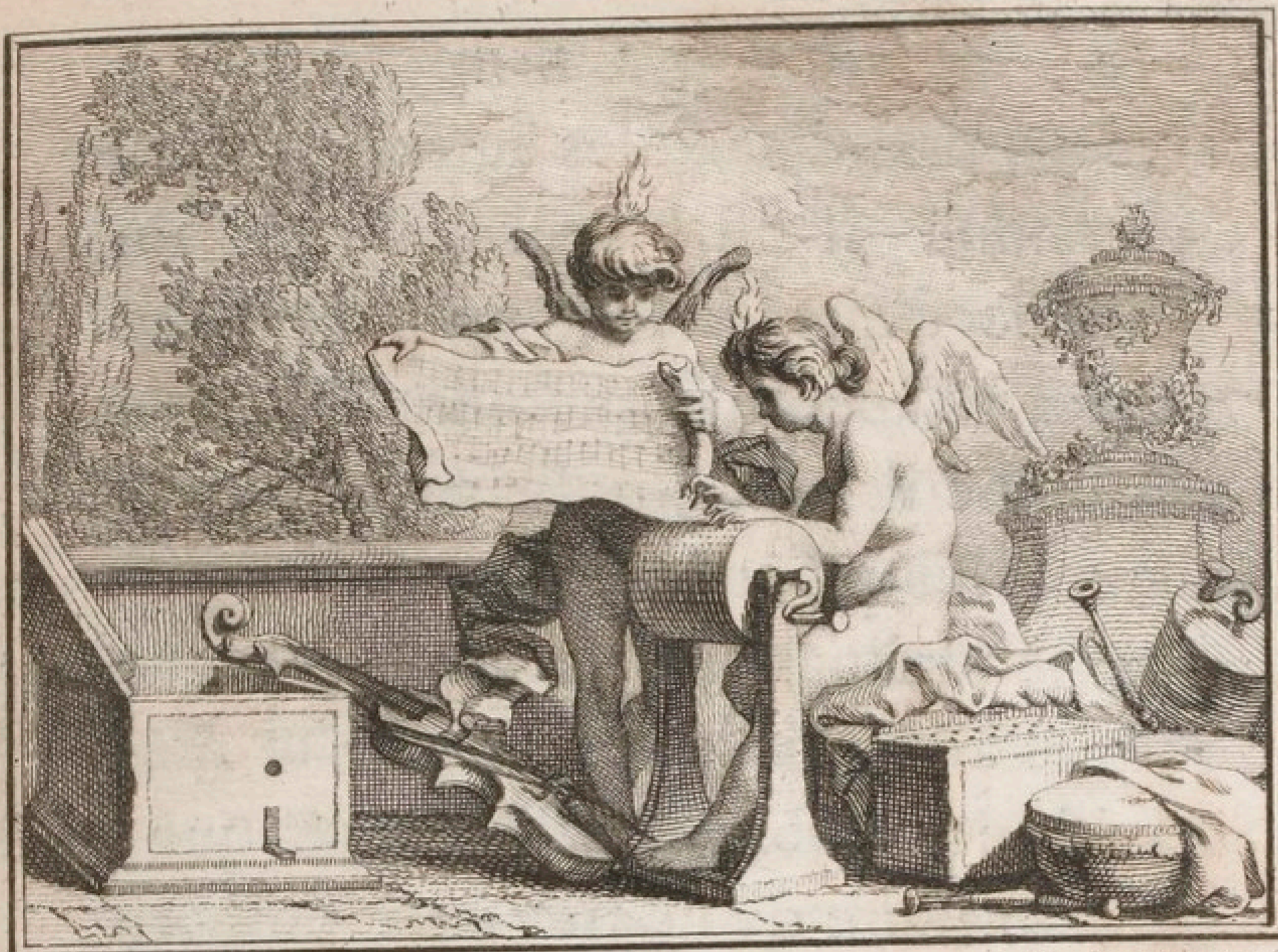
J'envoyois dans un des Mémoires précédens, au Thermomètre & au Baromètre pour avoir un son fixe, &

168 PRINCIPE DE MECANIQUE, &c.

j'envoie maintenant au Clavecin pour avoir la tension des cordes & la vérification d'un principe de mécanique.

*Fin du troisième Mémoire.*





*N. Blakeny Londineus inv.*

*D. Sorruque sculp.*

## QUATRIÈME MÉMOIRE:

*Projet d'un nouvel Orgue sur lequel on pourra exécuter toute piece de Musique à deux, trois, quatre, &c. parties, instrument également à l'usage de ceux qui sçavent assez de Musique pour composer, & de ceux qui n'en sçavent point du tout..*

**L**ENTRE tous les instrumens de Musique, il n'y en a peut-être aucun qui soit plus méprisé que l'Orgue d'Allemagne, & c'est à juste titre, car il rassemble les

défauts principaux des autres. Il a peu d'étendue, il est borné à un certain nombre d'airs & l'on ne peut l'employer à l'accompagnement. Mais en revanche il ne suppose aucun talent dans celui qui en joue, & l'on ne disconvient pas qu'il n'y ait quelque mérite à l'avoir inventé; que le mécanisme n'en soit assez délicat, & que, s'il n'exécute qu'un très-petit nombre de pièces, c'est avec tant de précision que les premiers Organistes de l'Europe, les Calvier & les Daquin en approchent à peine. Aussi les personnes sensibles à l'harmonie ne peuvent-elles quelquefois se défendre de lui prêter l'oreille; la douceur des sons, & l'exactitude de l'exécution suspendant en elles, le dédain qu'elles ont de l'instrument.

Mais c'est peut-être moins encore les imperfections de cet Orgue, l'usage qu'on en fait & le peu de mérite

qu'il y a à en jouer, qui l'ont avili, que les mains entre lesquelles il se trouve ordinairement. Le premier qui parut, fut admiré, il n'en faut point douter. Aujourd'hui que cet instrument est commun, les boëtes qui le renferment ne s'ouvrent guères que pour satisfaire la curiosité des enfans émerveillés d'entendre sortir des sons d'un corps qui par sa ressemblance extérieure à un morceau cubique de bois, ne leur paroît point fait pour cela.

Pour moi qui ne suis guères plus honteux & guères moins curieux qu'un enfant, je n'eus ni cesse ni repos que je n'eusse examiné le premier Orgue d'Allemagne que j'entendis: & comme je ne suis point Musicien, que j'aime beaucoup la Musique, & que je voudrois bien la sçavoir & ne la point apprendre; à l'inspection de cet instrument, il me vint en pensée

qu'il seroit bien commode pour moi & pour mes semblables qui ne sont pas en petit nombre, qu'il y eût un pareil Orgue ou quelque autre instrument qui n'exigeat ni plus d'aptitude naturelle, ni plus de connoissances acquises, & sur lequel on put exécuter toute pièce de Musique.

En appuyant sur cette idée, je ne la trouvai point aussi creuse que l'imaginèrent d'abord quelques personnes à qui je la communiquai. Il est vrai qu'elles avoient leurs talens à défendre, & qu'au fond de l'ame elles auroient été fâchées qu'on découvrit un moyen de faire à peu de frais & dans un moment, ce qui leur avoit couté beaucoup de tems, d'étude & d'exercice. » Eh oui, me dirent-elles, Monsieur le paresseux. On vous en fera » des Orgues d'Allemagne qui joueront tout sans que vous vous en mêliez. Ne faudroit-il pas encore vous

55 dispenser de tourner la manivelle ?  
 Je répondis qu'assurement cela n'en  
 feroit que mieux , mais que j'aimois  
 tant la Musique que je me résoudrois  
 à prendre cette peine , pourvû qu'on  
 m'épargnât celle d'avoir pendant quin-  
 ze ans les doigts sur un Clavecin, avant  
 que d'exécuter passablement une pié-  
 ce. Si le célèbre Vaucanson , ajoutai-  
 je , qui a fait manger & vivre un Ca-  
 nard de bois , & jouer de la Flute à  
 des statuës , se propoisoit cette autre  
 machine , je ne doute point qu'il n'en  
 vint à bout , & qu'on ne nous an-  
 nonçât incessamment un Organiste  
 Automate. Et pourquoi non ? Seroit-  
 ce le premier qu'on auroit vû ?

De réflexions en réflexions , moi-  
 tié sérieuses , moitié folâtres , car je  
 n'en fais guéres d'autres , je parvins  
 à me demander pourquoi le carillon  
 de la Samaritaine changeoit d'airs , &  
 pourquoi l'Orgue d'Allemagne jouoit

toujours les mêmes. Je me répondis par rapport à celui-ci , que c'est parce que les petites pointes , que les artistes appellent notes , qui agissent sur les touches , sont immobiles sur le cylindre ; & je conçus aussi-tôt un autre cylindre criblé de trous artistement disposés , dans lesquels des pointes mobiles pourroient , s'insérer , frapper les touches des tuyaux qu'on voudroit faire parler , & produire ensemble & successivement toutes sortes de sons à discretion.

Le mécanisme de ce cylindre, quoique de la dernière simplicité , ne fut d'abord que très-embrouillé dans ma tête ; mais en attendant que mes premières idées se nettoyaient , je fus si aise de les avoir eues que j'en tressaillais , & qu'il me sembla que j'exécutois déjà tout seul & sans sçavoir presque un mot de Musique , un Concert à quatre ou cinq parties. On va juger

si je présurai trop de ma découverte.

Mais pour bien entendre le reste de ce projet, il faudroit tâcher de vaincre sa honte, appeller la premiere Marmotte qu'on entendra jouer de l'Orgue d'Allemagne, se faire ouvrir la boîte & achever de lire, en donnant de tems en tems un coup d'œil sur la pièce de cette machine dont on voit ici le développement.

Imaginez d'abord un cylindre creux de quelque matiere solide, & auquel on donnera une épaisseur que l'usage qu'on en veut faire déterminera.

Que ce cylindre creux ait pour noyau un morceau de bois rond, ou un autre cylindre de bois, couvert de plusieurs doubles d'une étoffe compacte, qui forment sur lui une espece de pelote.

Que cette pelote dure remplisse exactement toute la cavité du cylindre creux.

Que ce cylindre creux soit percé de trous disposés de la maniere que je vais dire. Voy. à la fin de ce mém. la fig.

Les lignes verticales fol, 1, 2, 3, &c. fol ✕, 1, 2, 3, &c. la, 1, 2, 3, &c. sont des projections de plusieurs circonférences du cylindre: c'est sur ces circonférences qu'on placera des notes, ou pointes mobiles, ce qui suppose qu'elles seront percées de trous dans toute leur longueur.

Si ces petits trous n'étoient éloignés les uns des autres que d'une demie ligne, on pourroit placer seize pointes dans un espace de huit lignes, & chaque pointe exprimant par sa distance à celle qui la suit, la valeur d'une double croche, on auroit pour l'intervalle d'une mesure à quatre tems, huit lignes; pour l'intervalle d'une mesure à trois tems, six lignes, &c.

D'où il s'ensuit 1°. Que si le cylindre tourne sur lui-même d'une vitesse uniforme



uniforme , de la quantité 1 , 8 , & qu'il y ait une note , ou pointe fichée dans le premier trou de la ligne verticale *sol* , une autre dans le second trou de la verticale *D* , une autre dans le troisième trou de la verticale *la* , une autre dans le quatrième trou de la verticale *D* , & ainsi de suite , jusqu'au seizième trou de la seizième verticale , on entendra successivement dans un tems donné les seize sons , *sol* , *sol D* , *la* , *la D* , *si* , *ut* , *ut D* , &c. dans les trois quarts de ce tems donné , les douze sons *sol* , *sol D* , *la* , *la D* , *si* , *ut* , &c. Dans la moitié du même tems , les huit sons *sol* , *sol D* , *la* , *la D* , &c. Donc tous ces sons auront été parfaitement rendus en mesure.

2°. Que si la pointe que j'ai placée dans le premier trou de la verticale *sol* avoit eu de la continuité ; que si , par exemple , elle eût couvert les huit premiers trous de cette ligne , elle

M

eût représenté une blanche, & que si j'avois placé dans le neuvième trou de la verticale *ut* une autre pointe qui eût couvert les huit autres trous de la mesure, laissant à vuide les trous des autres verticales *D, la, D, si, D, re, D, &c.* au lieu d'entendre, dans le tems donné, pendant lequel le cylindre a tourné sur lui-même de la quantité *1, 8, sol, D, la, D, si, ut, &c.* doubles croches; on auroit seulement entendu *sol* blanche suivi de *ut* blanche.

3°. Qu'ayant des pointes de différentes longueurs, depuis la triple ou double croche jusqu'à la ronde & par-delà pour les tenuës de plusieurs mesures, des pointes pour la triple croche pointée, la double croche, la double croche pointée, la noire, la noire pointée, la blanche, la blanche pointée, la ronde ou la mesure, &c. Et jouissant en même tems de la com-

modité de les placer sous toute verticale *sol, D, la, D, si, ut, &c.* & dans quelque endroit de ces lignes qu'on désirera ; on pourra faire resonner à l'orgue tel son & de telle durée qu'on voudra ; & qu'en laissant des trous à vuide sur toutes les verticales en même tems, & autant de trous qu'il sera besoin ; on pratiquera tous les silences possibles, depuis le plus long jusqu'au plus court. Or ces deux points comprennent toute la mélodie.

Il faut observer seulement que si l'on veut que l'Orgue rende les triples croches ; quel que soit l'intervalle sur une verticale, ou quelle que soit la partie d'une circonférence du cylindre dont la verticale est une projection, que l'on prenne pour une mesure, il faudra percer cette partie, cet intervalle, ou cet arc de trente-deux trous.

4°. Que tandis qu'une pointe ou  
Mij

note placée sur telle verticale, & couvrant autant de trous qu'on le désirera, fera entendre tel son & de telle durée qu'on voudra; d'autres pointes ou notes placées sur d'autres verticales pourront faire entendre la même quantité de sons, & que chaque partie de cette quantité de sons fera plus ou moins longue, plus ou moins aiguë à discrétion. Deux points qui comprennent toute l'harmonie.

Or la mesure, la mélodie & l'harmonie constituent tout ce que nous entendons par Musique, & tout ce qui caractérise & différencie les pièces.

Il n'y a donc point de pièces qu'on ne pût jouer sur un instrument tel que celui que je viens de décrire.

5°. Que plus il y aura de verticales 1, 2, 3, &c. entre *sol* & *D*, entre *la* & *D*, entre *si* & *ut*, &c. plus le cylindre pourra contenir de morceaux de Musique différens à la fois.

6°. Que plus il y aura de verticales *sol, D, la, D, si, ut, &c.* plus l'instrument aura d'étendue, & on pourra lui en donner autant & plus qu'au Clavecin.

7°. Que plus les verticales *sol, 1, 2, 3, &c. la, 1, 2, 3, &c.* seront longues; plus elles contiendront de mesures; plus les pièces qu'on jouera pourront être longues. On peut donner à ces lignes ou à celles qu'elles représentent, ou au diamètre du cylindre, assez de longueur pour qu'on y puisse noter toutes sortes de pièces: je tiens de M. Richard, le plus habile constructeur d'Orgue d'Allemagne qu'il y ait à Paris, qu'on peut noter sur la circonférence d'un cylindre de deux pieds de diamètre plus de 120 mesures à quatre tems d'une *Allemanda largo*; or ces 120 mesures équivalent à plus de 160 d'un *Allegro*.

8°. Qu'à l'aide des lignes 1, 2, 3,

4, 5, &c. horizontales qui passent sur une rangée de trous & qui en contiennent entr'elles une autre rangée, on connoîtra toujours facilement les endroits des verticales où les notes ou pointes qui agissent sur les touches, se placeront.

9°. Que si l'on donne au cylindre la facilité de se mouvoir de droite à gauche ou de gauche à droite, on pourra faire enforte que les pointes placées sur les verticales *sol*, *D*, *la*, *D*, *si*, *ut*, &c. ne portent plus sur ces touches, mais tombent dans l'intervalle que ces touches laissent entr'elles, & que ces touches soient frappées des pointes placées sur d'autres verticales, d'où il s'ensuit qu'on aura sur le cylindre plusieurs pièces à la fois, & que le nombre en fera d'autant plus grand que l'intervalle laissé entre les touches permettra de laisser entre les verticales *sol*, *D*, *la* *D*, *si*,

*ut*, &c. plus d'autres verticales 1, 2, 3, &c.

10°. Qu'en notant la même pièce sur les verticales *sol*, *D*, *la*, *D*, *si*, *ut*, *D*, *re*, *D*, *mi*, *fa*, *D*; on l'essayeroit dans tous les tons possibles.

Il faut pratiquer à chaque petite pointe ou note un arrêt, afin qu'en agissant sur les touches, elles ne s'enfoncent pas plus qu'il ne faut.

Il n'y a pas à craindre qu'elles se détachent, si l'étoffe dont on aura couvert le cylindre intérieur & dans laquelle elles sont fichées par leur extrémité faite en épingle, est suffisamment compacte, & si l'on observe quand on recharge d'airs, de faire un peu tourner la pelote, afin que les trous faits dans l'étoffe par les épingles, pointes, ou notes qu'on vient de retirer, ne correspondent plus aux trous du cylindre de cuivre.

Elles se détacheront d'autant moins

que l'action des touches sur elles est très-foible & que d'ailleurs elle est oblique à leur enfoncement.

Il faut observer en perçant les trous, de ne laisser entr'eux que l'intervalle qui convient au mouvement le plus prompt ; parce que 1°. On placera sur une même circonférence un plus grand nombre de mesures. 2°. Qu'il vaut mieux avoir à rallentir le mouvement de la manivelle qu'à l'augmenter. On va toujours aussi lentement, mais non pas aussi vite qu'on veut.

*Avantages de l'instrument proposé.*

1°. Un enfant de l'âge de cinq ans pourroit sçavoir noter sur le cylindre le morceau le plus difficile & l'exécuter. Cela lui coûteroit moins que d'apprendre à lire par le Bureau Typographique : car les caractères & leurs combinaisons sont ici beaucoup moins nombreux que les lettres. Il y a



D'UN NOUVEL ORGUE. 185  
vingt-quatre lettres , & il ne me faut  
que onze caractères.

2°. Tout Musicien au lieu de composer sur le papier pourroit composer sur le cylindre même , éprouver à chaque instant ses accords & répéter sans aucun secours toute sa pièce.

3°. Cet exercice faciliteroit extrêmement aux enfans l'étude de la Musique , soit vocale , soit instrumentale ; car lors qu'ils se trouveroient vis-à-vis d'un Maître , ils auroient déjà fait pendant long-tems la comparaison des notes sur le papier & de leur effet sur le cylindre.

4°. Ils seroient plus avancés du côté de la composition , & ils auroient l'oreille plus faite à huit ans , qu'ils ne l'ont aujourd'hui communément à vingt , après avoir passé par les mains des plus habiles Maîtres.

5°. On auroit certainement plus de plaisir à entendre cet instrument qu'un

Organiste médiocre , comme la plupart le font , qui ne fait que balbutier sur son Orgue , ne marche jamais en mesure , pratique à chaque instant des accords déplacés , se répète fans fin , & ne répète jamais que de mauvaises choses , &c.

6°. On ne feroit plus exposé aux boutades d'un Musicien , habile à la vérité dans son art , mais souvent plus habile que dévot , à qui il prendra envie de jouer à la consécration , l'*Allegro* le plus badin ou la *Gigue* la plus folâtre , & d'inspirer à tout un Peuple de fidèles la démangeaison de danser devant l'Arche au moment où c'est la coutume de s'incliner.

7°. Beaucoup de personnes qui n'ont point de voix , qui manquent d'aptitude pour un instrument , qui n'ont point appris la Musique , qui l'aiment , & qui n'ont ni les moyens , ni le tems , ni la commodité de l'appren-

dre, pourroient toutesfois s'amuser à jouer toutes les pièces dont ils s'aviseroient.

8°. Cet exercice contribueroit nécessairement aux progrès de la Musique.

9°. On n'emploieroit à noter & à exécuter sur le nouvel Orgue guères plus de tems, qu'il n'en faut pour noter sur le papier telle pièce dont l'exécution sur le Clavecin, demanderoit des habiles, plus de tems qu'on n'en mettroit à en ranger & jouer sur le nouvel Orgue une douzaine d'autres.

10°. La difficulté de l'exécution n'empêcheroit plus de pratiquer certains tons peu usités avec lesquels cet Orgue familiariseroit, comme le *sol D*, le *la D*, &c. on pourroit composer dans tous ces tons; ce qui fourniroit peut-être, sinon des chants, du moins des traits d'harmonie & des expressions qui nous sont inconnuës.

11°. D'un moment à l'autre, on pourroit hauffer ou baisser une pièce d'un ton, d'un demi-ton, ou de tout autre intervalle.

12°. Les expériences sur les sons se multipliant facilement de jour en jour, & cela par des gens exercés à penser, on pourroit à la longue en amasser un assez grand nombre, pour fonder une bonne théorie & donner des regles sûres de pratique, ce qui n'arrivera pas tant que les phénomènes demeureront ensevelis dans les oreilles des Artistes.

13°. Un bon Orgue de cette espece rameneroit peut-être à l'Eglise de leur Paroisse, un grand nombre d'honnêtes gens qui ont de l'oreille, & qui en ont été chassés par un mauvais Organiste.

14°. Peut-être que la facilité qu'on auroit à exécuter les pièces les plus difficiles, empêcheroit que dans la

suite on ne continuât à les prendre pour les plus belles.

Je vais maintenant passer aux inconveniens de cet instrument, car il en a.

*Inconveniens de l'Orgue proposé.*

1°. C'est un ignorant en Musique qui le propose.

2°. Il ne seroit plus permis aux Organistes d'être médiocres.

3°. On n'auroit plus besoin de ces Maîtres d'accompagnement & de composition, qui ne nous prescrivent que des regles vagues dont un long usage peut seul déterminer l'emploi.

4°. Les Maîtres à chanter garderoient la moitié moins de tems leurs écoliers.

5°. Ils seroient contraints d'être la moitié plus habiles, ayant à montrer à des Ecoliers dont l'oreille seroit déjà faite, qui mépriseroient la regle de

transposition & qui demanderoient à chanter leur leçon comme ils la joueroient sur leur Orgue.

6°. On joueroit en quatre heures ; & cela avec la dernière précision , toutes les pièces de M. Rameau , qu'on n'apprend en plusieurs années que très-imparfaitement.

7°. Beaucoup de gens qui sont bien aise de s'amuser avec un instrument , abandonneroient le Clavecin, la Basse-de-Viole , le Violon , &c. & négligeroient l'honneur d'apprendre mal en cinq ou six années de tems , ce qu'ils pourroient exécuter parfaitement en dix jours.

8°. Nous deviendrions extrêmement difficiles sur l'exécution de la Musique instrumentale , d'où il arriveroit que la plupart de ceux qui s'en mêlent en feroient réduits à se perfectionner ou à brûler leurs instrumens.

9°. Comme une pièce ne me plaît

pas davantage à moi qui l'entens, soit qu'on ait employé beaucoup de tems à l'apprendre, soit qu'on l'ait aussi-bien apprise en un moment, l'oreille ne faisant point cette distinction, nous parviendrions peut-être à nous défaire d'un préjugé favorable à plusieurs choses fort estimées qui n'ont que le mérite de la difficulté.

Je sens toute l'importance de ces inconveniens. J'en suis frappé, & je prévois que beaucoup de gens ne manqueront pas d'en imaginer une infinité d'autres de la même force & de me traiter moi & mon Orgue d'impertinens. Mais le désir de servir en quelque chose au progrès des beaux arts, autant que je le pourrai sans nuire aux intérêts des Artistes auxquels je n'ai garde de le préférer, suffira pour me consoler des épithetes injurieuses que j'encourerai.

*Observations sur le Chronomètre.*

On entend par un Chronomètre ; un instrument propre à mesurer le tems. On prétend qu'il seroit fort à souhaiter qu'on eût un bon instrument de cette espece, afin de conserver par ce moyen le vrai mouvement d'un air, car les mots *allegro*, *vivace*, *presto*, *affettuoso*, *soavemente*, *piano*, &c. dont se servent les Musiciens seront toujours vagues, tant qu'on ne les rapportera point à un terme fixe de vitesse ou de lenteur, dont on fera convenu. Aussi voit-on aujourd'hui des personnes se plaindre que le mouvement de plusieurs airs de Lully est perdu. Si l'on eût eu l'attention, disent-ils, de se servir d'un pendule pour déterminer le tems de la mesure dans un air, & d'écrire à la tête des pièces de Musique, au lieu des *presto*, *prestissimo*, *andante*, &c. qu'on y lit, 1, 2, ou



ou 3 secondes par mesure, ou 5 secondes pour 1, 2, 3 ou 4 mesures; ou  $m$  de secondes pour  $n$  de mesures; on auroit évité cet inconvénient, & l'on auroit dans mille ans le plaisir d'entendre les airs admirables de M. Rameau, tels que l'Auteur les fait exécuter aujourd'hui.

Ceux qui s'en tiennent à l'écorce des choses trouveront peut-être ces observations solides; mais il n'en sera pas de même des connoisseurs en Musique.

Ils objecteront contre tout Chronomètre en général, qu'il n'y a peut-être pas dans un air quatre mesures qui soient exactement de la même durée; deux choses contribuant nécessairement à ralentir les unes & à précipiter les autres, le goût & l'harmonie dans les pièces à plusieurs parties; le goût & le pressentiment de l'harmonie dans les *solo*. Un Musicien qui

ſçait ſon art , n'a pas joué quatre meſures d'un air qu'il en faiſit le caractère & qu'il ſ'y abandonne : il n'y a que le plaifir de l'harmonie qui le ſuſpende ; il veut ici que les accords ſoient frappés , là qu'ils ſoient dérochés ; c'eſt-à-dire , qu'il chante ou jouë plus ou moins lentement d'une meſure à un autre & même d'un tems & d'un quart de tems à celui qui le ſuit.

Le ſeul bon Chronomètre que l'on puiſſe avoir , c'eſt un habile Muſicien qui ait du goût , qui ait bien lû la Muſique qu'il doit faire exécuter , & qui ſache en battre la meſure.

Si l'on ne jouë pas aujourd'hui certains airs de Lully dans le mouvement qu'il prétendoit qu'on leur donnât , peut-être n'y perdent-ils rien. Un Auteur n'eſt pas toujours celui qui déclame le mieux ſon ouvrage.

Mais ſi l'on ne trouve pas ces obſervations aſſez ſolides & qu'on perſiſte

à désirer un instrument qui mette des bornes au caprice des Musiciens, je commencerai par rejeter tous ceux qu'on a proposés jusqu'à présent, parce qu'on y a fait du Musicien & du Chronomètre deux machines distinctes, dont l'une ne peut jamais bien assujettir l'autre. Cela n'a presque pas besoin d'être démontré : il n'est pas possible que le Musicien ait pendant toute sa pièce l'œil au mouvement ou l'oreille au bruit du pendule, & s'il s'oublie un moment, adieu le frein qu'on a prétendu lui donner.

Mais comment, me demandera-t-on, faire du Musicien & du Chronomètre une seule & même machine. Il paroît que cela est impossible.

Je répons qu'il y a tout au plus quelque difficulté. Mais voici comment j'estime qu'on viendroit à bout de la surmonter : il faudroit d'abord que les Musiciens renoncassent aux signes

dont ils se sont servis jusqu'à present ; & qu'ils substituassent aux *piano, presto, vivace, allegro, &c.* qu'on trouve à la tête de leurs pièces, les tems employés à les jouer en entier ; & qu'au lieu d'écrire *giga, allegro* ; ils écrivissent *gigua, 12, 13, 14, &c.* secondes.

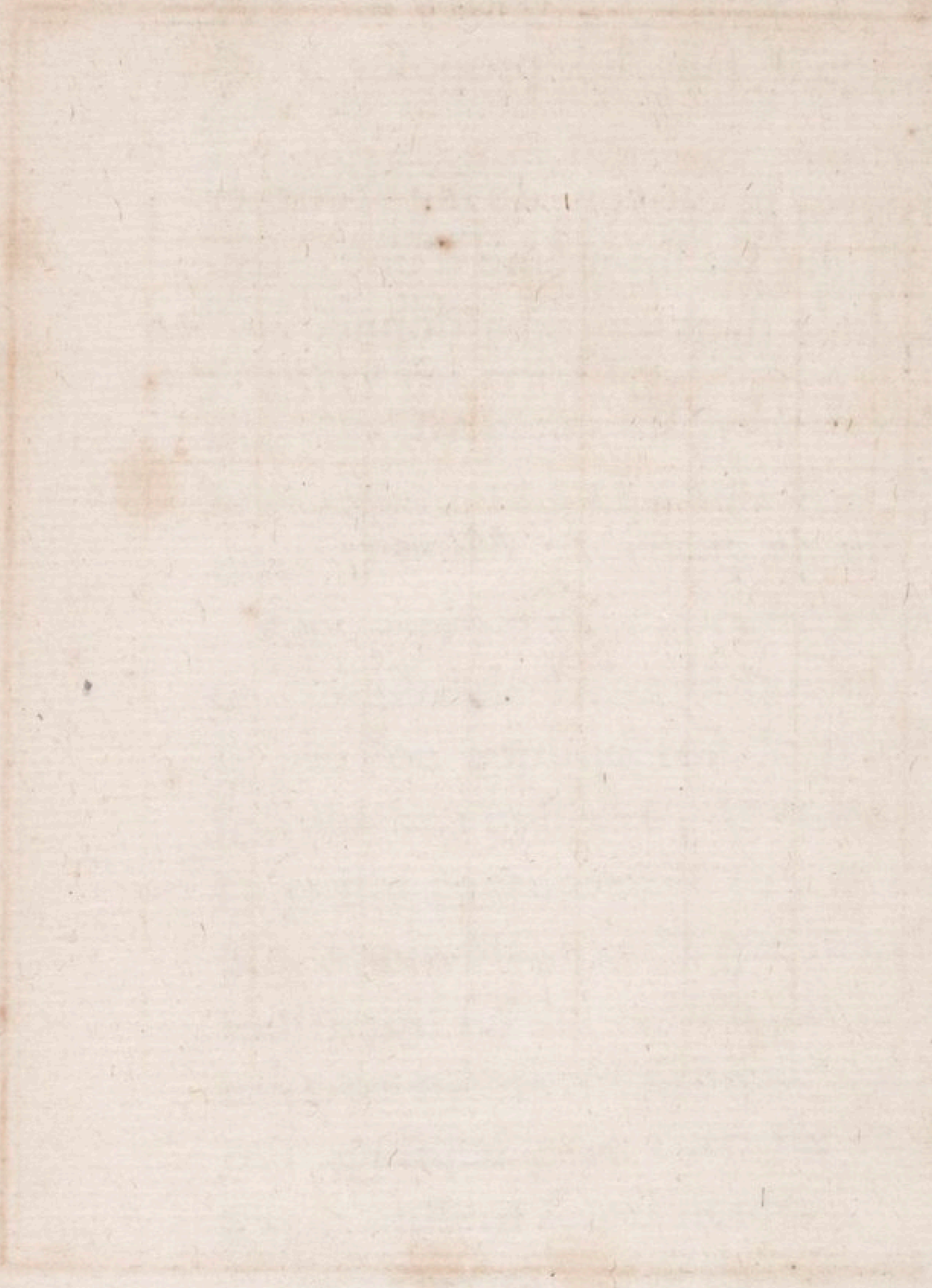
On noteroit ensuite cette gigue sur le cylindre de l'Orgue que je propose, & l'on appliqueroit le pendule à secondes au cylindre, de maniere que l'aiguille parcoureroit 12, 13 ou 14, &c. secondes ; tandis que le cylindre tourneroit sur lui-même par le mécanisme même du pendule qui lui seroit appliqué, de l'arc sur lequel la gigue entiere seroit notée.

Je n'entrerai point dans la maniere dont cette application du pendule au cylindre peut se faire ; c'est un bon Horloger qu'il faut consulter là-dessus. Voici seulement l'énoncé du pro-

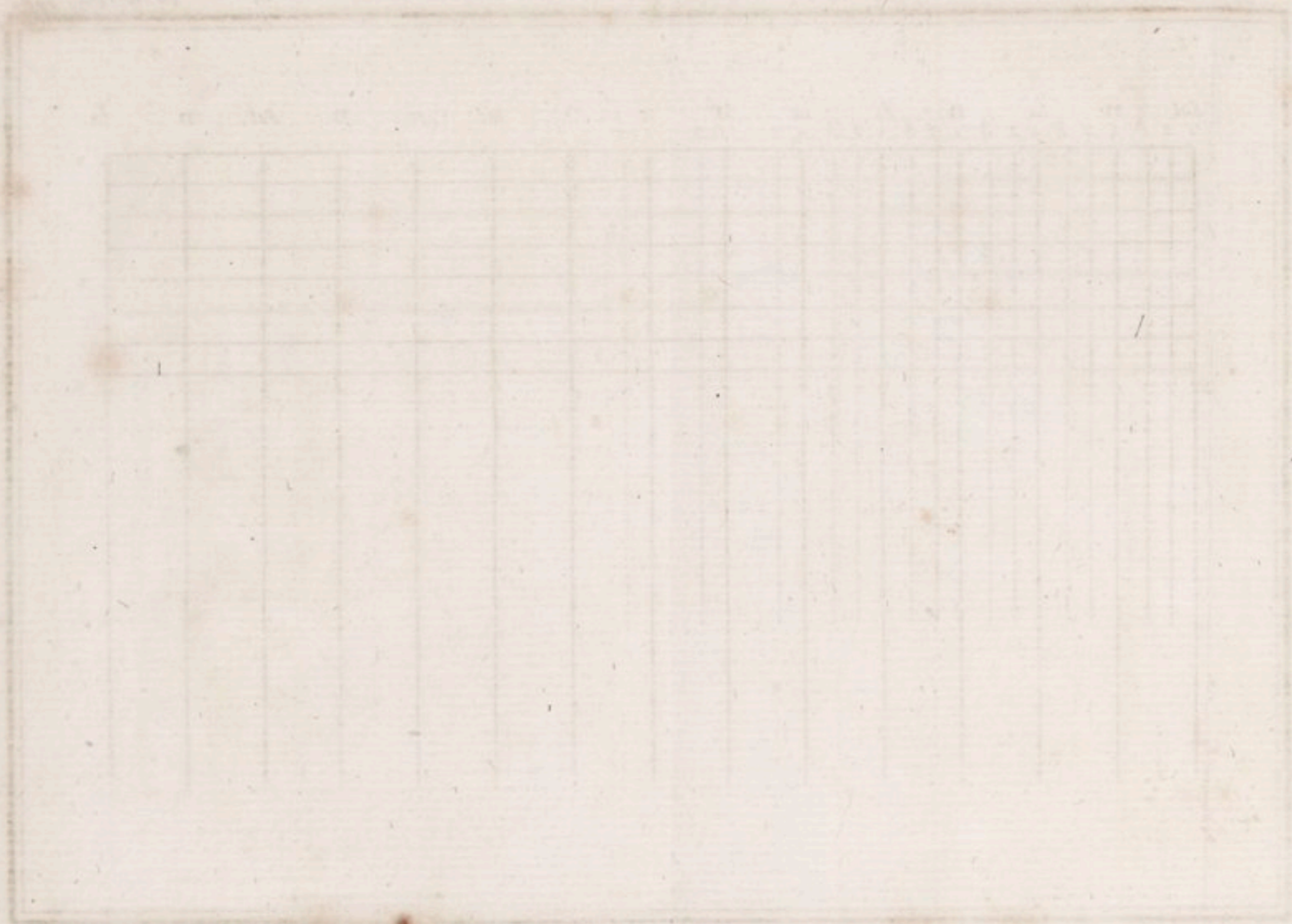
D'UN NOUVEL ORGUE. 197  
blême qu'il faut lui proposer à résoudre.

Trouver le moyen de faire tourner un cylindre sur lui-même d'une quantité donnée dans un tems donné.

*Fin du quatrième Mémoire.*









CINQUIÈME MÉMOIRE ,

O U

L E T T R E

SUR LA RÉSISTANCE DE L'AIR

*Au mouvement des Pendules.*





*N. Blakey inv. Ingram Sculp.*

## CINQUIÈME MÉMOIRE.



Si l'endroit où Newton calcule la résistance que l'air fait au mouvement d'un Pendule, vous embarrasse; que votre amour propre n'en soit point affligé. Il y a, vous diront les plus

grands Géomètres , dans la profondeur & la laconicité des *principes mathématiques* de quoi consoler par tout un homme pénétrant qui auroit quelque peine à entendre ; & vous verrez bientôt que vous avez ici pour vous une autre raison qui me paroît encore meilleure ; c'est que l'hypothese d'où cet Auteur est parti n'est peut-être pas exacte. Mais une chose me surprend , c'est que vous vous foyez avisé de vous adresser à moi , pour vous tirer d'embarras. Il est vrai que j'ai étudié Newton dans le dessein de l'éclaircir ; je vous avouerai même que ce travail avoit été poussé , sinon avec beaucoup de succès , du moins avec assez de vivacité ; mais je n'y pensois plus dès le tems que les RR. Peres le Sueur & Jacquier donnerent leur Commentaire, & je n'ai point été tenté de reprendre. Il y auroit eu dans mon ouvrage fort peu de choses qui ne soient dans

celui de ces Savans Géomètres, & il y en a tant dans la leur qu'assurément on n'eût pas rencontrées dans le mien. Qu'exigez-vous donc de moi? quand les sujets mathématiques m'auroient été jadis très-familiers; m'interroger aujourd'hui sur Newton, c'est me parler d'un rêve de l'an passé. Cependant pour persévérer dans l'habitude de vous satisfaire, je vais, à tout hazard, feuilleter mes paperasses abandonnées, consulter les lumières de mes amis, vous communiquer ce que j'en pourrai tirer & vous dire avec Horace, *si quid novisti rectius istis, candidus imperti; si non, his utere mecum.*

## PROPOSITION I.

### PROBLEME.

*Soit (Fig. 2.) un Pendule M qui décrit dans l'air l'arc BA, étant attaché à la verge GM fixe en G. On demande la*

vitesse de ce pendule en un point quelconque  $M$ , en supposant qu'il commence à tomber du point  $B$ .

Soient  $GM = a$ .  $NA = b$ .  $AP = x$ . la pesanteur  $= p$ . la résistance que l'air feroit au corpuscule  $M$ , s'il étoit mû avec une vitesse  $g$ ,  $= f$ . La vitesse du Pendule au point  $M = v$ .

## S O L U T I O N.

Si on suppose, avec tous les Physi-  
ciens, que la résistance de l'air & des  
autres fluides est comme le quarré de  
la vitesse; on aura la résistance au point  
 $M = \frac{fvv}{gg}$ ; & cette résistance agissant  
suivant  $mM$ , tend à diminuer la vi-  
tesse  $v$ . De plus la pesanteur  $p$  tirant  
suivant  $MQ$ , on voit facilement  
qu'elle se décompose en deux autres  
forces, dont l'une qui agit suivant  
 $MR$ , est arrêtée & anéantie par la  
résistance du fil ou de la verge  $GM$ ,

& dont l'autre a son effet suivant  $Mm$  perpendiculairement à  $GM$  & est égale à  $\frac{p \times MP}{GM} = \frac{p \sqrt{2ax - xx}}{a}$ . Donc la force accélératrice totale qui agit au point  $M$  pour mouvoir le corps suivant  $Mm = \frac{p \sqrt{2ax - xx}}{a} - \frac{fvv}{gg}$ .

Mais le tems employé à parcourir  $Mm$ ,  $= \frac{Mm}{v}$ , & l'élément ou l'accroissement de la vitesse est égal à la force accélératrice multipliée par le tems. Donc  $\left( \frac{p \sqrt{2ax - xx}}{a} - \frac{fvv}{gg} \right) \times \frac{Mm}{v} = dv$ . Dans cette équation, je mets au lieu du petit arc  $Mm$ , sa valeur  $-\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$ ; avec le signe  $-$ ; parce que  $v$  croissant à mesure que le pendule descend,  $x$  diminuë au contraire. J'ai  $-pdx + \frac{fvv \times adx}{gg \sqrt{2ax - xx}} = vdv$ ; dont l'intégrale est  $\frac{vv}{2} =$

$$pb - px + \int \frac{fvv \times adx}{gg \sqrt{2ax - xx}}$$

J'ai ajouté la constante  $pb$  ; afin que  $v$  fut  $= 0$  , lorsque  $x = b$  , c'est-à-dire , lorsque le pendule est au point  $B$  , d'où on suppose qu'il commence à descendre par sa seule pesanteur.

On remarquera d'abord dans cette équation que , si  $f = 0$  ; c'est-à-dire , si le Pendule se mouvoit dans le vuide ou dans un milieu non résistant , on auroit  $vv = 2pb - 2px$  ; mais comme la résistance de l'air est fort petite par rapport à la pesanteur  $p$  , la valeur réelle de  $vv$  différera très-peu de  $2pb - 2px$  & l'on pourra substituer  $f(2pb - 2px)$  à  $fvv$  , ce qui ne produira qu'une très-petite erreur.

Ainsi on aura  $vv = 2pb - 2px + 2 \int \frac{f(2pb - 2px) \times adx}{gg \sqrt{2ax - xx}}$  , pour la valeur approchée de  $vv$ .

Il s'agit à present de trouver l'inté-



grale du terme qui est sous le signe  $\int$ , & la difficulté est reduite à intégrer

$$\frac{b a d x - a x d x}{\sqrt{2 a x - x x}}$$

On remarquera que cette intégrale doit être prise de telle manière qu'elle soit = 0, quand  $x = b$ . Or l'intégrale

du premier terme  $\int \frac{b a d x}{\sqrt{2 a x - x x}}$  est  $b$

$\times$  (arc  $AM$  — arc  $AB$ ). Dans laquelle j'ai ajouté la constante —  $b \times$  arc

$AB$ ; afin que  $\int \frac{b a d x}{\sqrt{2 a x - x x}}$  fut = 0,

lorsque  $x$  seroit =  $b$ : on aura donc

$$\int \frac{b a d x}{\sqrt{2 a x - x x}} = - b \times \text{arc } BM.$$

Maintenant pour avoir l'intégrale

de  $\int \frac{- a x d x}{\sqrt{2 a x - x x}}$ , je l'écris ainsi

$$\int \frac{- a x d x}{\sqrt{2 a x - x x}} = \int \frac{a a d x - a x d x}{\sqrt{2 a x - x x}} - \int$$

$\int \frac{a a d x}{\sqrt{2 a x - x x}}$ , dont l'intégrale est

$a \sqrt{2 a x - x x} - a \times AM = a \times (MP - AM)$ , à laquelle il faut ajouter la

constante  $-a(BN - AB)$ ; pour la raison que nous avons dite ci-dessus;

on aura donc  $\int \frac{-ax dx}{\sqrt{2ax - xx}} = -a \times (BO - BM)$ .

$$\text{Donc } vv = 2pb - 2px - \frac{2f \times 2pb \times BM}{gg} \\ = 2f \times 2pa \times (BO - BM).$$

### COROLLAIRE I.

Donc lorsque le Pendule est arrivé en  $A$ , on a  $vv = 2pb - \frac{2f \times 2pb \times BA}{gg} - \frac{2f \times 2pa \times (BN - BA)}{gg}$ .

### COROLLAIRE II.

Donc, (*Fig. 3.*) si l'on fait  $An = b - \frac{2fb \times BA}{gg} - \frac{2fa \times (BN - BA)}{gg}$ , on aura  $vv = 2p \times An$ . C'est-à-dire, que la vitesse au point  $A$  seroit la même que celle que le Pendule auroit acquise en tombant dans le vuide du point  $b$  jusqu'en  $A$ .

COROL.

COROLLAIRE III.

Si l'arc  $AB$  ne contient que peu de degrés,  $BN$  fera presqu'égale à  $BA$ , & l'on pourra supposer  $vv = 2pb - \frac{2f. 2pb. BA}{gg}$ .

PROPOSITION II.

PROBLEME.

Supposons, (Fig. 4.) qu'un Pendule  $A$  placé dans la situation verticale  $GA$ , reçoive une impulsion ou vitesse  $h$  suivant l'horizontale  $AR$ . On demande sa vitesse en un point quelconque  $M$ .

SOLUTION.

Les mêmes noms étant supposés que ci-dessus, la force rétrograde sera ici  $\frac{p\sqrt{2ax - xx}}{a} + \frac{fvv}{gg}$ ; parce que la résistance s'ajoute à la pesanteur

O

pour diminuer continuellement la vitesse du Pendule, & on aura  $-du =$

$$\frac{adx}{v\sqrt{2ax-xx}} \times \left( \frac{p\sqrt{2ax-xx}}{a} + \frac{fvv}{gg} \right).$$

Je mets  $-du$ , parce que  $x$  croissant,  $v$  diminuë : donc  $-v dv =$

$$p dx + \frac{fvv \times adx}{gg\sqrt{2ax-xx}}, \text{ \& ajoutant les}$$

$$\text{constantes, } \frac{hh-vv}{2} = px +$$

$$\int \frac{fvv \times adx}{gg\sqrt{2ax-xx}}. \text{ Donc si } f=0; \text{ on au-}$$

ra  $vv = hh - 2px$ ; or l'on pourra, comme dans le Problème précédent, mettre au lieu de  $vv$  sa valeur approchée  $hh - 2px$ , dans le terme

$$\int \frac{fvv adx}{gg\sqrt{2ax-xx}}. \text{ Ce qui donnera } vv$$

$$= hh - 2px - 2 \int \frac{fhh adx}{gg\sqrt{2ax-xx}}$$

$$+ 2 \int \frac{f \times 2pax dx}{gg\sqrt{2ax-xx}} = hh - 2px$$

$$- \frac{2fhh}{gg} \times AM + \frac{2f \times 2pa}{gg} \times (+AM - MP).$$

Soit  $AN$  la hauteur à laquelle le

Pendule auroit remonté dans le vuide ; on aura  $hh = 2p \times AN$  ; &  $vv = 2p \times PN - \frac{2f \times 2p \times AN \times AM}{gg} + \frac{2f \times 2pa}{gg} \times (-MP + AM)$ .

COROLLAIRE I.

Donc (Fig. 5.) lorsque le corps est arrivé au point  $c$  , tel que  $Nn = \frac{2f \times AN \times Ac}{gg} + \frac{2f \times a \times (nc - Ac)}{gg}$  ; la vitesse  $v$  sera  $= 0$ .

COROLLAIRE II.

Comme  $nc$  &  $Ac$  différent très-peu de  $NC$  & de  $AC$  ; il s'ensuit que pour trouver le point  $c$  ou le corps , s'arrête ; ou la hauteur  $n$  à laquelle il remonte ; il faut prendre  $Nn = \frac{2f \times AN \times AC}{gg} + \frac{2fa \times (NC - AC)}{gg}$ .

## COROLLAIRE III.

Si l'arc  $AC$  ne contient que peu de degrés,  $AC$  sera presqu'égale à  $AN$ , & l'on aura à peu près  $Nn = \frac{2f \times AN \times AC}{gg}$ .

## COROLLAIRE IV.

Si un Pendule (*Fig. 6.*) descend du point  $B$ , sa vitesse en  $A$  que je nomme  $h$  sera égale, Corol. 2. Prop. 1. à celle qu'il auroit acquise en tombant dans le vuide de la hauteur  $An = b - \frac{2fb \times BA}{gg} - \frac{2fa \times (BN - BA)}{gg}$  & il remontera jusqu'à la hauteur  $Av$  (Corollaire 2. Propos. 2.)  $= An - \frac{2f \times An \times Ac}{gg} + \frac{2fa \times (nc - Ac)}{gg}$ . Et comme  $nc$  &  $Ac$  différent peu de  $BN$  & de  $BA$ , on aura  $Av = b - \frac{4fb \times BA}{gg} + \frac{4fa \times (BN - BA)}{gg}$ .

COROLLAIRE V.

Donc si l'arc  $BA$  contient peu de degrés, on aura  $Av = b - \frac{4fb \times BA}{gg}$   
 $= AN \times \frac{(1 - 4f \times BA)}{gg}$ . Or dans cette même supposition, les arcs  $AC, Ak$  font entr'eux, à très-peu près, comme les racines des abscisses  $AN, Av$ . Car dans le cercle, les cordes sont entr'elles comme les racines des abscisses; or les arcs peuvent être pris ici pour les cordes. Donc  $Ck = \frac{AC \times (\sqrt{AN} - \sqrt{Av})}{\sqrt{AN}}$ . Or  $\sqrt{Av} = \sqrt{AN} \times \sqrt{1 - \frac{4f \times BA}{gg}}$   
 $= \sqrt{AN} \times \sqrt{1 - \frac{4f \times BA}{gg}}$  & comme  $\frac{4f \times BA}{gg}$  est fort petite par rapport à 1, on peut au lieu de  $\sqrt{1 - \frac{4f \times BA}{gg}}$ , mettre  $1 - \frac{2f \times BA}{gg}$  qui lui est à peu près égale. Car on sçait que  $\sqrt{1 - \alpha}$ ,  $\alpha$  étant une très-

petite fraction, est  $1 - \frac{\alpha}{2}$  à très-peu

près. Donc  $Ck = AC \times \frac{2fBA}{gg} = \frac{2fAB^2}{gg}$ .

Donc la différence  $Ck$  entre l'arc descendu  $AB$  & l'arc remonté  $Ak$  est comme le quarré de l'arc  $AB$ .

## COROLLAIRE VI.

Donc (*Fig. 7.*) si on a l'arc  $BAC$  qu'un Pendule décrit dans l'air en tombant du point  $B$ , on aura facilement l'arc  $bAk$  qu'il doit décrire en tombant du point  $b$ . Car il ne faut que trouver  $Ak$  qu'on aura en faisant  $BA - AC. bA - Ak :: BA^2. bA^2$ .

## COROLLAIRE VII.

Donc (*Fig. 6.*) si un Pendule décrit l'arc  $BA$  dans l'air, on aura sa vitesse au point  $A$ , en divisant la ligne  $Nv$  en deux parties égales au point  $n$ . Car cette vitesse, Corol. 3. Prop. 1.



est à très-peu près égale à celle qu'il auroit acquise en tombant dans le vuide de la hauteur  $b - \frac{2f \times BA}{gg} = b - \frac{Nv}{2}$ .

COROLLAIRE VIII.

On a  $AC^2. Ac^2. :: AN. An$ . C'est-à-dire ,  $AC^2. AC^2 - 2Cc \times AC :: AN. AN - Nn$ . Donc  $Nn = \frac{2Cc \times AC \times AN}{AC^2} = \frac{2Cc \times AN}{AC}$ .

Par le même raisonnement on aura  $Nv = \frac{2Ck \times AN}{AC}$ . Donc  $Ck. Cc :: Nv. Nn$ . Donc  $c$  est le point de milieu de l'arc  $Ck$ . Donc au lieu de diviser  $Nv$  en deux parties égales, on pourra diviser  $Ck$  en deux parties égales pour avoir l'arc  $Ac$  que le corps  $A$  en remontant auroit parcouru dans le vuide.

COROLLAIRE IX.

Si le pendule  $A$  est un petit globe ; la résistance  $f$ , toutes choses d'ailleurs

égales, est en raison inverse du diamètre de ce globe & de sa densité; car la résistance de l'air à deux globes de différens diamètres est comme la surface ou le quarré des diamètres, & cette résistance doit être divisée par la masse, laquelle est comme la densité multipliée par le cube du diamètre. Donc l'arc  $Ck$ , toutes choses d'ailleurs égales, est comme  $AB^2$  divisé par le produit du diamètre du globe & de sa densité.

C'est à vous,  $M^* * *$ , à voir maintenant l'usage qu'on peut faire de ces propositions, lorsqu'on veut avoir égard à l'altération du mouvement que cause la résistance de l'air, dans les expériences par lesquelles on cherche avec des pendules, les loix du choc des corps. Vous appercevrez sans peine que les corollaires 6, 7, 8, donneront les vitesses que les deux pendules ont ou reçoivent au point

le plus bas où ils sont supposés se choquer.

M. Neuton qui, comme vous sçavez, n'a pas cru devoir négliger cette résistance, lorsqu'il a parlé des loix du choc des corps, dans le premier Livre de ses Principes, paroît avoir fait  $Ck$  proportionnelle, non au quarré de l'arc parcouru, comme nous l'avons trouvé, & comme peut-être vous le supposiez, lorsque cet endroit de son ouvrage vous a arrêté; mais à l'arc seulement: c'est ce qu'il me reste à vous démontrer. Pour cet effet je transcrirai son texte, & j'y ajouterai les éclaircissemens que je trouve dans les papiers que les R. Peres Jacquier & le Sueur ont condamnés à l'oubli, en prévenant par leur excellent Commentaire, celui que je méditois.



## Texte de Neuton.

» Soient , dit Neuton , Princip.  
 » Mathém. pag. 50. voy. la fig. 8. \* les

\* Pendeant corpora sphaerica A, B, filis parallelis  
 & æqualibus AC, BD, à centris C, D. His centris  
 & intervallis describantur semicirculi EAF, GBH,  
 radiis CA, DB bisecti. Trahatur eorpus A ad arcus  
 EAF punctum quodvis R, & subducto corpore B, de-  
 mittatur inde, redeatque post unam oscillationem, ad  
 punctum V. Est RV retardatio & resistentia aeris.  
 Hujus RV fiat ST pars quarta sita in medio, ita  
 scilicet ut RS, & TV æquentur, sitque RS, ad ST  
 ut 3 ad 2. & ista ST exhibebit retardationem in des-  
 censu ab S ad A quàm proximè. Restituatur corpus B  
 in locum suum. Cadat corpus A de puncto S, & velo-  
 citas ejus in loco reflexionis A sine errore sensibili  
 tanta erit, ac si in vacuo cecidisset de loco T. Exponatur  
 igitur hæc velocitas per chordam arcus TA; nam ve-  
 locitatem penduli in puncto infimo esse ut chordam  
 arcus, quem cadendo descripsit, propositio est Geome-  
 tris notissima. Post reflexionem perveniat corpus A ad  
 locum s, & corpus B ad locum K. Tollatur corpus B  
 & inveniatur locus u; à quo si corpus A demittatur,  
 & post unam oscillationem redeat ad locum r, sit st  
 pars quarta ipsius rv sita in medio, ita videlicet ut rs  
 & tu æquentur; & per chordam arcus tA exponatur  
 velocitas, quam corpus A proximè post reflexionem hæc

1<sup>o</sup> corps sphériques  $A$ ,  $B$  suspendus des  
 2<sup>o</sup> points  $C$ ,  $D$ , par fils paralleles &  
 3<sup>o</sup> égaux  $AC$ ,  $BD$ . De ces points &  
 4<sup>o</sup> de la longueur des fils soient dé-

*buit in loco A. Nam t erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus A, sublatâ aeris resistentiâ, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus K, ad quem corpus B ascendit, & inveniendus locus l, ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus A, ut ita dicam, in chordam arcûs TA, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco A proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcûs tA, ut habeatur motus ejus in loco A proxime post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante quam post reflexionem; & tum demùm conferendi sunt motus inter se, & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo, vel duodecim, vel sexdecim, concurrerent; reperi semper, sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuò occurrebant, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem semper esse æquales, &c.*

» crites les demi-circonférences  $EAF$ ,  
 »  $GBH$ , divisées en deux parties éga-  
 » les par les rayons  $CA$ ,  $CB$ . Faites  
 » remonter le corps  $A$  à quelque point  
 »  $R$  de l'arc  $EAF$ . Otez le corps  $B$ ,  
 » & laissez retomber le corps  $A$  : s'il  
 » remonte après une oscillation au  
 » point  $V$ ,  $RV$  exprimera la rétarda-  
 » tion causée par la résistance de l'air.  
 » Prenez  $ST$  égale à la quatrième par-  
 » tie de  $RV$ , placez-la dans le milieu ;  
 » de sorte que  $RS$  soit égale à  $TV$ , &  
 » que  $RS$  soit à  $ST$  comme 3 à 2,  
 »  $RS$  exprimera à peu près la rétarda-  
 » tion après la descente de  $S$  en  $A$ .  
 » Remettez à sa place le corps que  
 » vous aurez ôté. Laissez tomber le  
 » corps  $A$  du point  $S$ . Sa vitesse au  
 » point de réflexion  $A$  fera sans erreur  
 » sensible, la même que s'il étoit des-  
 » cendu dans le vuide, du point  $T$ .  
 » Soit donc cette vitesse exprimée par  
 » la corde  $TA$  ; car tous les Géomé-

5 tres ſçavent que la viteſſe d'un pen-  
30 dule au point le plus bas de l'arc qu'il  
30 décrit, eſt comme la corde de cet  
30 arc. Si le corps *A* remonte après le  
30 choc, au point *S*, & le corps *B* au  
30 point *K*; ôtez le corps *B* & trouvez  
30 le point *u* d'où laiſſant tomber le  
30 corps *A*, il remonte après une of-  
30 cillation au point *r*, tel que *st* ſoit la  
30 quatrième partie de *ru*, & *sr* égale  
30 à *tu*. La corde *tA* exprimera la vi-  
30 teſſe que le corps *A* avoit en *A*,  
30 après ſa réflexion; car *t* eſt le lieu  
30 vrai & corrigé, auquel le corps *A*  
30 feroit remonté ſans la réſiſtance de  
30 l'air. il faudra corriger de la même  
30 façon le lieu *K*, auquel le corps *B*  
30 eſt remonté, & trouver le point *l*  
30 qu'il eût atteint dans le vuide. C'eſt  
30 ainſi qu'on fera les expériences,  
30 comme dans le vuide. Enfin il fau-  
30 dra, pour ainſi dire, multiplier le  
30 corps *A* par la corde *TA*, qui ex-

» prime sa vitesse, pour avoir son mou-  
» vement au point *A*, immédiatement  
» avant le choc, & par la corde *t A*,  
» pour avoir son mouvement, après le  
» choc. Il faut chercher par la même  
» méthode les quantités de mouve-  
» ment qu'ont avant & après le choc,  
» deux corps qu'on a laissé tomber en  
» même tems de deux points différens,  
» & trouver par la comparaison de ces  
» mouvemens les effets du choc. C'est  
» ainsi, qu'en faisant mes expériences  
» sur des pendules de dix pieds de  
» long, tant avec des corps égaux  
» qu'avec des corps inégaux, que je  
» laissois tomber de fort loin, de la  
» distance, par exemple, de 8, 12,  
» 16 pieds, j'ai trouvé, sans avoir erré  
» dans mes mesures de la quantité de  
» trois doigts, que les changemens  
» que le choc direct fait en sens con-  
» traaires, aux mouvemens des corps,  
» étoient égaux; & par conséquent que



» l'action étoit toujours égale à la réac-  
 » tion, &c.

### ECLAIRCISSEMENS.

Voilà le texte de Neuton, & voici maintenant les éclaircissemens que je me suis engagé de vous donner. Si un corps tombe de  $R$  en  $A$ , Fig. 9. dans un milieu non résistant, sa vitesse est, comme on sçait, égale à celle qu'il auroit acquise en tombant d'une hauteur égale à celle de  $RA$ . Mais comme le milieu résiste ici, on peut supposer la vitesse du corps en  $A$ , égale à celle qu'il auroit acquise en tombant dans un milieu non résistant par un arc  $rA \leftarrow RA$ .

Arrivé en  $A$ , si le milieu ne résistoit point dans la branche  $AM$ , le corps remonteroit par un arc  $Ap = Ar$ ; mais la résistance du milieu fait qu'il ne remonte que jusqu'en  $N$ ; de  $N$  il descend en  $A$ , où l'on suppose qu'il ait

une vitesse égale à celle qu'il eût acquise en tombant par un arc  $nA \triangleleft NA$  dans un milieu non résistant, & au lieu de remonter par l'arc  $Ay = An$ , la résistance du milieu ne lui permet de remonter qu'en  $V$ .

Cela posé, l'arc  $RV$  exprime les retardations produites par la résistance du milieu dans toutes les oscillations dont je viens de parler. Mais ces oscillations étant toutes plus petites les unes que les autres, pour avoir la retardation de chacune d'elles en particulier, il faudroit partager inégalement l'arc  $RV$ ; & comme ces oscillations sont au nombre de quatre, la retardation pour la première oscillation est plus grande que la quatrième partie de  $RV$ ; & cette quatrième partie, trop grande pour la retardation de la quatrième oscillation. Mais il est un point  $S$  d'où le corps tombant jusqu'en  $A$ , la quatrième partie de  
 $RV$

$RV$  exprimera exactement la retardation pour l'arc  $SA$ .

Cherchons ce point  $S$ . Pour le trouver soit  $RA = 1$ ;  $RV = 4b$ ;  $SA = x$ . en supposant les retardations proportionnelles aux arcs parcourus, on aura  $Rr$  retardation de l'arc parcouru  $RA = \frac{b}{x}$ ; &  $A\rho$  second arc  $= Ar = RA - Rr = 1 - \frac{b}{x}$ ; de même  $\rho N$  retardation de l'arc  $A\rho = (1 - \frac{b}{x}) \times \frac{b}{x} = \frac{b}{x} - \frac{bb}{xx}$ . Donc  $AN$  3<sup>e</sup> arc  $= A\rho - \rho N = 1 - \frac{2b}{x} + \frac{bb}{xx}$ ; & la retardation  $Nn$  de l'arc  $AN = (1 - \frac{2b}{x} + \frac{bb}{xx}) \times \frac{b}{x} = \frac{b}{x} - \frac{2bb}{xx} + \frac{b^3}{x^3}$ .  
Donc  $Ay = An = AN - Nn$  quatrième arc  $= 1 - \frac{3b}{x} + \frac{3bb}{xx} - \frac{b^3}{x^3}$ .  
Donc  $Vy$  retardation du quatrième arc  $= \frac{b}{x} - \frac{3bb}{xx} + \frac{3b^3}{x^3} - \frac{b^4}{x^4}$ .

On a donc  $Rr$ , retardation du premier arc  $= \frac{b}{x}$ .

$\rho N$ , retardation du second  $= \frac{b}{x}$  —

$$\frac{bb}{xx}$$

$Nn$  retardement du troisième  $=$

$$\frac{b}{x} - \frac{2bb}{xx} + \frac{b^3}{x^3}$$

$Vy$ , retardation du quatrième  $=$

$$\frac{b}{x} - \frac{3bb}{xx} + \frac{3b^3}{x^3} - \frac{b^4}{x^4}$$

Et à cause que  $Rr + \rho N + Nn + Vy = VR = 4b$ , on a  $\frac{4b}{x} - \frac{6bb}{xx} +$

$$\frac{4b^3}{x^3} - \frac{b^4}{x^4} = 4b, \text{ ou } x^4 - x^3 + \frac{3bxx}{2}$$

$- b b x x + \frac{b^3}{4} = 0$ , équation dont la solution approchée donnera la valeur de  $x$ .

Pour cet effet, je retranche les deux derniers termes  $- b b x x + \frac{b^3}{4}$  qui sont insensibles par rapport aux autres, parce que  $b$  est fort petite; & il

reste  $x^4 - x^3 + \frac{3bx}{2} = 0$ , ou  $x^2 - x + \frac{3b}{2} = 0$ , équation dont la racine est  $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$ . Mais  $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$  est à peu près  $\frac{1}{2} - \frac{3b}{2}$ ; donc  $x$  est à peu près  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3b}{2} = 1 - \frac{3b}{2}$ .

*Remarques sur cette approximation.*

Remarquez 1°. Que  $-bbxx + \frac{b^3}{4} < 0$ ; parce que  $x > b$ , d'où il s'enfuit que  $x^4 - x^3 + \frac{3bx}{2} > 0$ . Donc  $x > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$ . Mais  $\frac{1}{2} - \frac{3b}{2}$  est un peu plus grand que  $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$ ; donc en mettant  $\frac{1}{2} - \frac{3b}{2}$  pour  $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$  on rend à  $x$  à peu près autant qu'on lui avoit ôté. D'où il suit que cette approximation est aussi simple & aussi exacte qu'on le puisse désirer;

dans la supposition que les retardations sont comme les arcs & non comme les quarrés des arcs.

2°. Que les retardations  $\frac{b}{x}$  ;  $\frac{b}{x} - \frac{bb}{xx}$  ; &c. sont en progression géométrique.

3°. Que pour résoudre exactement l'équation  $\frac{4b}{x} - \frac{6bb}{xx} + \frac{4b^3}{x^3} - \frac{b^4}{x^4} = 4b$  ; on eût fait  $1 - \frac{4b}{x} + \frac{6bb}{xx} - \frac{4b^3}{x^3} + \frac{b^4}{x^4} = 1 - 4b$ . Donc  $1 - \frac{b}{x} = \sqrt[4]{1 - 4b}$  ou  $x = \frac{b}{1 - \sqrt[4]{1 - 4b}}$ .

4°. Que pour trouver le lieu  $V$  ; on a  $st. tu :: 2.3$  , & que  $tu = sr$ . D'où il s'ensuit que  $su. sr :: 5.3$ . Soit donc  $As = 1$  ,  $sr = x$  , on a  $Au = 1 + \frac{5x}{4}$  ;  $Ar = 1 - x$ . Or  $Au$  est à  $Ar$  à peu près comme  $AV. AR$ . Donc si l'on fait  $AV. AR :: m. n$  , on aura  $m. n :: 1 + \frac{5x}{3}$  ,  $1 - x$  Donc  $n + \frac{5xn}{3} =$

$$m - m x. \text{ Donc } x = \frac{m - n}{m + \frac{5n}{3}} =$$

$$\frac{3 \times m - n}{3m + 5n} \times As \text{ parce qu'on a supposé } As = 1.$$

On peut encore chercher ce point  $V$  par expérience ; en laissant tomber le pendule d'un point  $V$  jusqu'à ce qu'il revienne en un point  $r$ , dont la distance  $sr$  au point  $s$  soit  $= su \times \frac{3}{5}$ , ou enfin on peut prendre simplement  $st = \frac{As}{AS} \times ST$ .

Voilà, ce me semble, tout l'endroit de Newton sur les retardations du pendule causées par la résistance de l'air, assez bien défriché. D'où il paroît s'ensuivre que cet Auteur suppose les retardations comme les arcs, au lieu que nous les trouvons par les propositions précédentes, comme les quarrés des arcs.

Vous m'objecterez sans doute que

Newton a l'expérience pour lui; & que c'est d'après cette hypothèse\* qu'il a trouvé que l'action est toujours égale à la réaction; & que, si, par exemple le corps *A*, après avoir choqué le corps *B* en repos avec 9 degrés de mouvement, continuoit d'aller avec deux; le corps *B* partoit avec sept degrés; que, si les corps se choquoient en sens contraires, *A* avec 12 degrés de mouvement, & *B* avec 6, & qu'*A* se réfléchit avec 2; *B* se réfléchissoit avec 8, &c.

Je vous répondrai que, quoiqu'on ne se soit jamais avisé de douter ni de l'exactitude, ni de la bonne foy de Newton, cela n'a pas empêché qu'on n'ait réitéré ses Expériences sur les

\* *Ut si corpus A incidebat in corpus B quiescens cum novem partibus motus, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus B resilliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant, A cum duodecim partibus & B cum sex, & redibat A cum duabus; redibat B cum octo, factâ &c.*



couleurs : Pourquoi n'en feroit-on pas autant dans cette occasion-ci, où cet Auteur est parti d'une hypothèse que le calcul contredit évidemment, & où il étoit d'autant plus facile de se tromper, que les vitesses sont représentées par des quantités dont les différences sont très-petites, sçavoir les cordes des arcs parcourus devant & après les retardations.

Si vous trouvez que ce ne soit pas assez accorder au grand nom de Newton, j'en suis fâché ; pour moi, je ne puis lui accorder davantage : J'ai pour Newton toute la déférence qu'on doit aux hommes uniques dans leur genre ; j'incline fort à croire qu'il a la vérité de son côté ; mais encore est il bon de s'en assurer. J'invite donc tous les amateurs de la bonne Physique à recommencer ses Expériences, & à nous apprendre si les retardations sont telles que Newton paroît les avoir sup-

posées , proportionnelles aux arcs parcourus ; ou telles que le calcul nous les donne , proportionnelles aux quarrés de ces arcs.

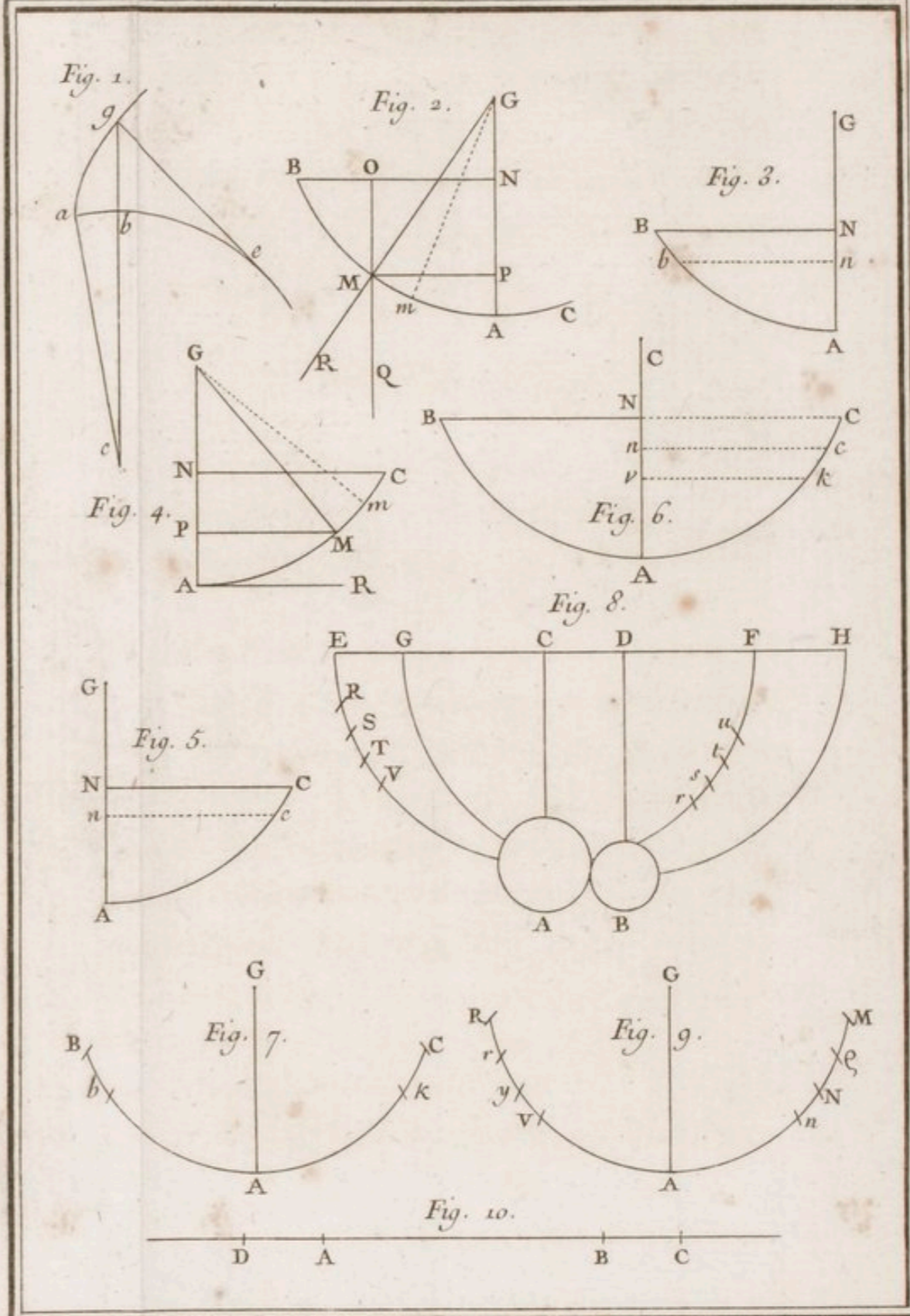
## C O N C L U S I O N

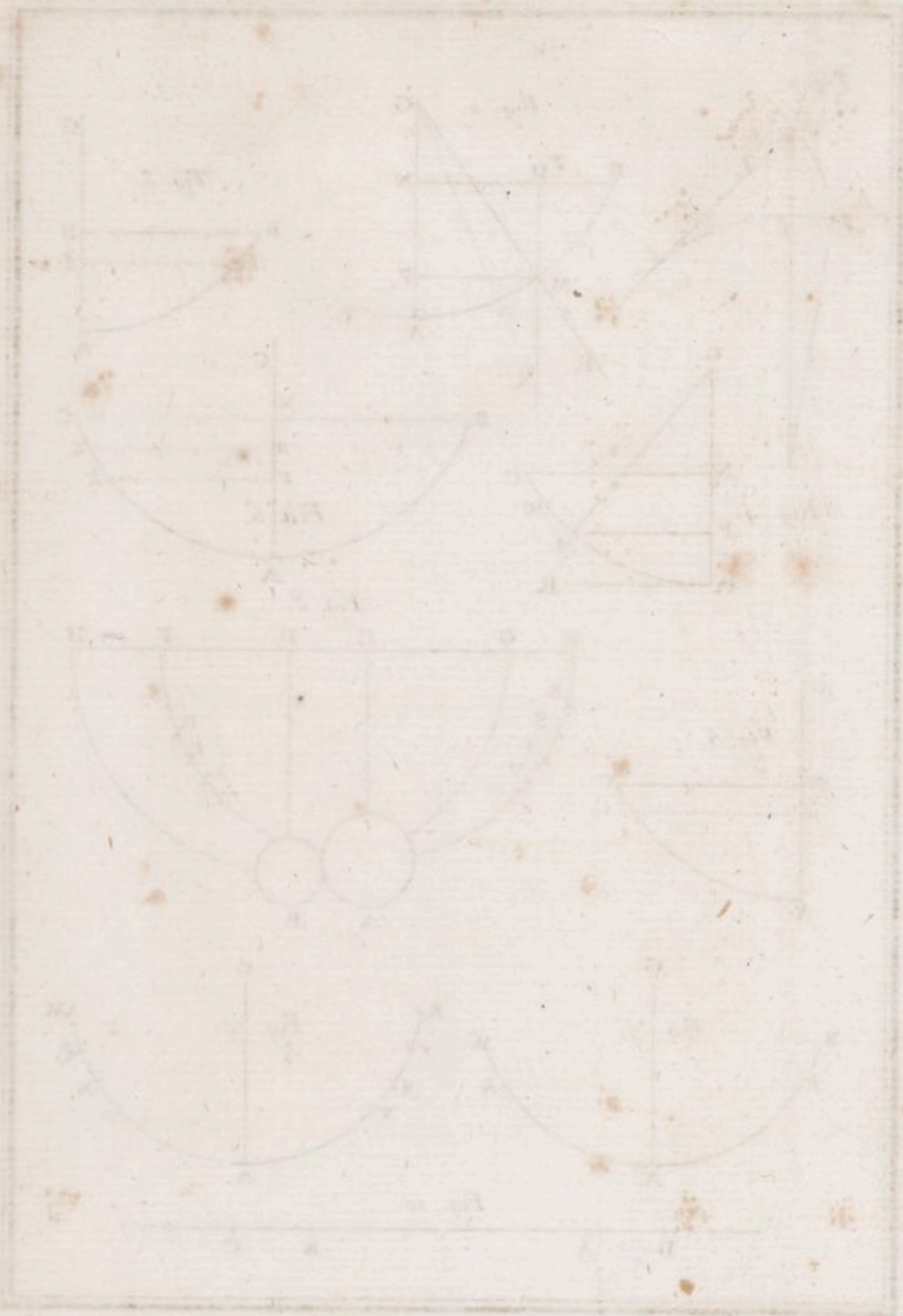
### *Des cinq Mémoires.*

Premiere Expérience. Graduer un tuyau composé de deux parties mobiles , & tenter par ce moyen la fixation du son.

Seconde Expérience. Construire un compas du cercle & de sa développante , & essayer si par ce moyen on n'obtiendra pas la division des arcs de cercles en parties commensurables ou incommensurables & d'autres opérations , & plus facilement & plus exactement que par toute autre voye.

Troisième Expérience. Déterminer par le son , si une corde attachée par une de ses extrémités à un point fixe ,





& tirée de l'autre par un poids, est aussi tendue que si elle étoit tirée à ses deux extrémités par deux poids égaux.

Quatrième Expérience. Construire un Harmonometre, ou un Orgue sur lequel on puisse jouer, ou même composer toutes pieces de Musique, & éprouver à chaque instant son harmonie.

Cinquième Expérience. S'assurer si les rétardations que l'air fait au mouvement des pendules, sont comme les arcs ou comme les quarrés des arcs, & recommencer les Expériences de Neuton sur le choc des corps.

---



---

# T A B L E

## DES MATIERES.

### PREMIER MEMOIRE.

- P** Rincipes généraux d'Acoustique. *Pag.* 1.  
*La Musique* n'est point une Science arbitraire ; *Parag.* premier. 1
- Fondement* de la Théorie de la science des Sons. Sentimens opposés de Pithagore & d'Aristoxene. *Parag.* 2. 3
- De l'objet* & de la fin de la Musique. Du Son en général. Qu'est-ce que le Son ? De son véhicule. Du corps sonore. Comment agit-il sur nos oreilles. De l'organe par lequel nous recevons la sensation du Son. De la propagation du Son. De sa vitesse. *Paragraphe* 3. 9
- Des espèces de Son.* Distribution du Son ; de sa premiere espèce , ou du Son rendu par les cordes. De leurs vibrations. Faits d'expérience sur lesquels les propositions de Taylor sont fondées. *Parag.* 4. 13
- Lemme I.* Si les Ordonnées de deux courbes dont l'abscisse est commune ; ont entr'elles une raison donnée ; les courbures

au sommet des ordonnées feront entr'elles comme les ordonnées, lorsque les ordonnées seront infiniment petites, & les courbes sur le point de coïncider avec leur axe.

15

*Lemme II.* La force accélératrice d'un point quelconque d'un fil élastique tendu & d'une grosseur uniforme, est dans ses petites vibrations, comme la courbure du fil en ce point.

18

*La corde vibrante* peut prendre une infinité d'autres figures que celles que Taylor lui assigne.

20

*Proposition première.* Si la nature d'une courbe  $APQL$ , *fig. 4.*, est telle qu'ayant tiré deux ordonnées quelconques  $QR$ ,  $PS$ , la courbure en  $R$  soit à la courbure en  $P$ , comme  $QP$ ,  $PS$ ; tous les points de cette courbe arriveront en même-tems à la ligne droite.

22

*Proposition II.* Tracer la courbe musicale dont les axes sont donnés.

23

*Proposition III.* Le tems d'une vibration de la corde est au tems d'une oscillation d'un Pendule de longueur déterminée, en raison sous doublée du poids de la corde multiplié par sa longueur; au poids qui la tend multiplié & par la longueur du Pendule & par le quarré du rapport de la circonférence au diamètre, d'où l'on tire le nombre des vibrations de la corde, pendant une

- oscillation du Pendule. pag. 27
- Remarque I.* Ce que l'on entend par la longueur & le poids de la corde. 32
- Remarque II.* Sur les formules de Taylor & leur généralité. 33
- Les vibrations* d'une corde sont d'un peu plus longue durée, si on la frappe dans son milieu, qu'en tout autre point. 35
- De l'isochronisme* des vibrations & du coup d'Archet. 36
- Corollaires* des Propositions précédentes. 37
- De l'oreille.* Du son considéré relativement à ses degrés du grave à l'aigu; ce qui constitue ces degrés. Des intervalles des Sons; de leurs limites; de leur expression en nombres. Ils sont commensurables & incommensurables. De l'Addition, Soustraction, Division, Multiplication, de ces intervalles; de l'impression approchée du rapport de deux Sons incommensurables. Paragraphe 5. 37
- Remarque* qui contient une méthode d'approcher de la valeur réelle d'un rapport, si près que l'on voudra. 44
- Remarque* sur l'impression logarithmique des intervalles des Sons. 46
- Du Son* considéré comme fort ou foible. De la force du Son par rapport à la distance au corps sonore. Des fibres sonores & de leur réunion en un point. Des chambres acoustiques. Les vibrations sont plus ou



DES MATIERES. 237

- moins grandes , sans que le son change de degré du grave à l'aigu. Trois choses à considérer dans le Son , leur nombre , leur étendue & leur isochronisme. De l'uniformité du Son ; ce que c'est. Suite du défaut d'uniformité. Preuve expérimentale que le plaisir musical consiste dans la perception des rapports des Sons. Paragraphe 6. pag. 47
- Remarque* importante sur l'origine du plaisir en général. Principe général sur le goût. Application de ce principe à des Phénomènes délicats. 52
- Objection* contre le fondement que nous donnons au plaisir musical. 56
- Réponse* à cette Objection. 57
- Règle* qu'on peut observer sur la tension des cordes. 58
- De la force du Son.* En quoi elle consiste. Sentimens de M. Euler. Parag. 7. 59
- Problème.* Trouver la plus grande vitesse d'une corde vibrante , ou celle qu'elle a en achevant sa première demi-vibration. 62
- Vérification* de l'expression de la vitesse trouvée dans la solution qui précède. 64
- Règle* qui peut être d'usage dans les constructions des Instrumens , selon M. Euler. 67
- Règle* qu'il faudroit observer selon nous. 69
- Problème.* La force pulsante étant donnée , trouver le plus grand écart d'une corde.

- De la seconde espèce de Son*, ou des cloches, des verges de métaux, & des bâtons durcis au feu. Le Son d'une cloche presque impossible à déterminer; rapport du Son de deux cloches de même matière & de figure semblables. Rapport des Sons de deux verges de métaux. Parag. 8. 72
- Remarque* sur une quantité négligée dans l'expression du Son des verges sonores & employée dans l'expression du Son des cloches. 75
- Du Son* produit par la dilatation & la percussion subite de l'air. Du bruit. 76
- De la troisième espèce de Son*, ou des Instrumens à vent. De la Flute. Système de M. Euler sur les Instrumens à vent, & particulièrement sur les Flutes. Description de la Flute. Trouver le Son rendu par une Flute donnée de longueur & de capacité. De la variation qui survient dans le Son des Flutes, quant au degré du grave à l'aigu. Explication de cette variation. De la force du Son des Flutes. De l'uniformité du Son des Flutes. De l'inspiration. Des sauts qu'elle occasionne. Du rapport de ces sauts. Parag. 9. 77
- Système des Sauts*, tiré de l'Histoire de l'Académie. Expérience singulière sur les Sons rendus par les deux parties d'une corde divisée inégalement par un obstacle léger. Table des sons rendus selon diffé-

DES MATIERES. 259

- rentes divisions de la corde, par l'obstacle leger. Parag. 10. pag. 89
- Expérience à faire.* Questions aux Physiciens. Conjectures sur ce que l'expérience donnera. De la Trompette marine & autres Instrumens semblables. Du Cors de Chasse, de la Trompette & autres Instrumens à vent. Des sauts de ces Instrumens & des intervalles qu'ils laissent entr'eux. 101
- Problème.* La longueur d'une Flute & son ouverture étant données, trouver la force de l'inspiration pour que l'Instrument fasse des sauts. 105
- De la fixation du Son;* des Expériences de M. Sauveur; de l'Instrument qu'on appelle *Ton*. Inconvénient de cet Instrument. Des causes qui en altèrent le Son. De sa correction & de la maniere de fixer le Son selon nous. Parag. 11. 107
- Objection* contre la méthode proposée & réponse. 118

SECOND MEMOIRE.

- Examen* de la développante du cercle 121
- Problème I.* Diviser un arc de cercle en une raison quelconque commensurable ou incommensurable. 128
- Problème II.* Trouver un secteur circulaire égal à un espace rectiligne donné. 129
- Problème III.* Trouver un espace rectiligne

- égal à un secteur circulaire extérieur quelconque. 131
- Problème IV.* Trouver un espace rectiligne égal à un segment circulaire quelconque. 132
- Problème V.* Trouver un espace rectiligne égal à une portion quelconque d'un segment circulaire. 133
- Problème VI.* Trouver une ligne droite égale à une portion quelconque de la développante du cercle, sans que l'origine de cette développante soit donnée. 134
- Problème VII.* Quadrature de certains espaces terminés par des lignes droites & par une portion de la développante du cercle avec plusieurs corollaires de cette proposition. 135
- Problème VIII.* L'origine de la développante avec un de ses points étant donnée; trouver ses autres points. 139
- Problème IX.* Deux points de la développante étant donnés, trouver les autres. 140
- Problème X.* Trouver par le moyen de la développante, le centre de gravité d'un arc & d'un secteur circulaire. 141
- Problème XI.* Construire une équation cubique d'une forme donnée avec certaines conditions. 143
- Lemme I.* Dans tout quadrilatère inscrit, le rectangle fait des diagonales est égal à la  
la

la somme des deux rectangles faits des deux côtés opposés. pag. 143

*Lemme II.* Si l'on inscrit un triangle équilatéral, & que l'on tire du sommet d'un de ses angles une ligne qui traverse la base & qui rencontre le cercle en un point; on aura une corde égale à la somme des deux cordes tirées du point où la première rencontre le cercle; aux deux extrémités de la base du triangle équilatéral. 144

*Lemme III.* Un arc de cercle étant donné, avec la corde entière de cet arc, trouver la valeur de la corde du tiers. 145

*Remarque importante* sur l'équation du troisième degré qui exprime la valeur de la corde du tiers d'un arc & sur le nombre de ses racines. 150

*Problème XII.* Une développante d'un cercle étant donnée, tracer par plusieurs points une autre développante. 153

*Problème XIII.* Deux tangentes d'une portion de la développante du cercle étant données, avec l'origine de cette courbe, trouver le cercle générateur. 154

*Problème XIV.* Trois tangentes d'une portion quelconque de la développante du cercle étant données, trouver le cercle générateur. 155

*Théoreme I.* Quadrature de quelques espaces terminés par des portions de la déve-

lopante.	pag. 156
<i>Théoreme II.</i> Quadrature de l'espace compris entre deux développantes.	169
<i>Application</i> des propositions précédentes sur la développante du cercle aux arcs infiniment petits des courbes en général ; avec une expression générale des rapports des rayons osculateurs.	160

## T R O I S I E' M E M E M O I R E.

<i>Examen</i> d'un Paradoxe de Mécanique sur la tension des cordes.	163
---	-----

## Q U A T R I E' M E M E M O I R E.

<i>Projet</i> d'un nouvel Orgue.	169
<i>Avantages</i> du nouvel Orgue.	184
<i>Inconveniens</i> du nouvel Orgue.	189
<i>Observations</i> sur le Chronomètre.	192

## C I N Q U I E' M E M E M O I R E.

<i>Lettre</i> sur la résistance de l'air aux mouvemens des Pendules.	201
<i>Problème I.</i> Trouver la vitesse d'un Pendule d'une longueur donnée , qui tombe d'une hauteur donnée , en un point quelconque de l'arc qu'il parcourt.	203
<i>Problème II.</i> Trouver la vitesse d'un Pendule d'une longueur donnée , en un point	

<b>DES MATIERES.</b>	<b>243</b>
quelconque de l'arc qu'il parcourt en remontant de la situation verticale en vertu d'une impulsion donnée.	<i>pag.</i> 209
<i>Examen</i> de la Théorie de Neuton sur la résistance que l'air apporte au mouvement des Pendules.	218
<i>Conclusion</i> de l'Ouvrage.	232

*Fin de la Table des Matieres.*

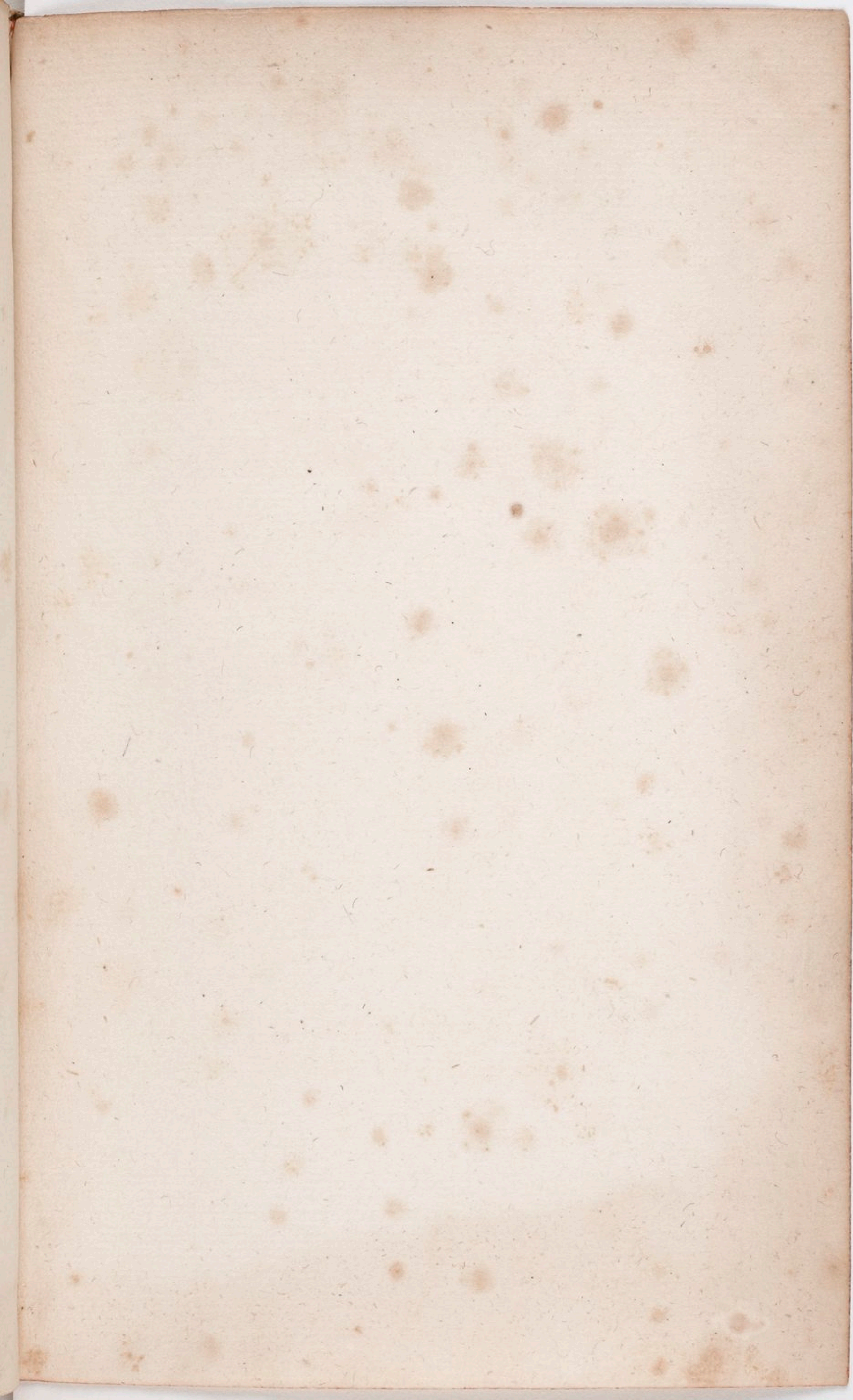
DES MATIÈRES.

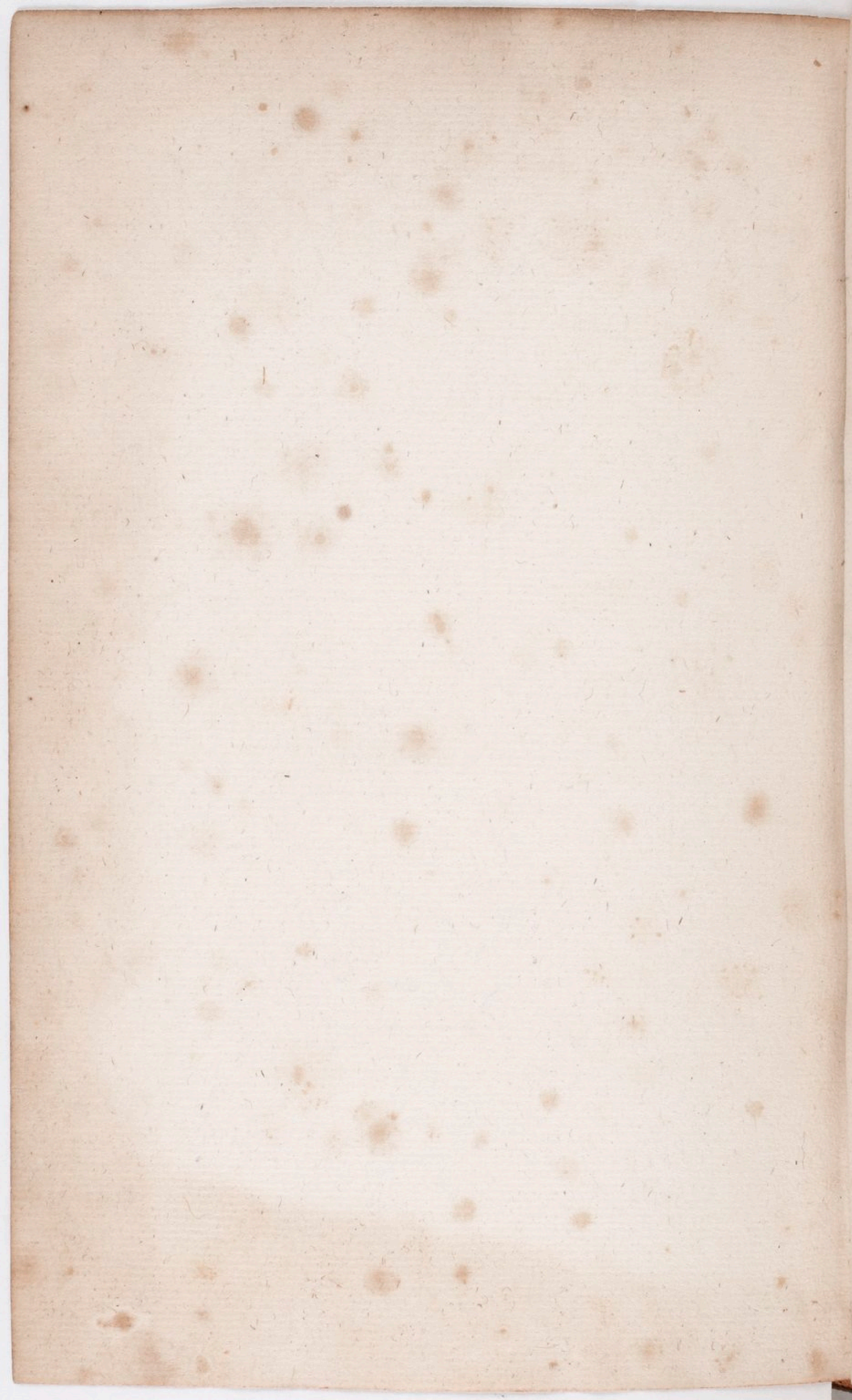
quelques de l'air de il parcoure  
 montant de la fraction verticale en vers  
 d'une impulsion donnée  
 l'air de la Théorie de l'air par  
 l'air que l'air supporte en mouvement  
 des pendules.  
 l'air de l'Ouvrage.

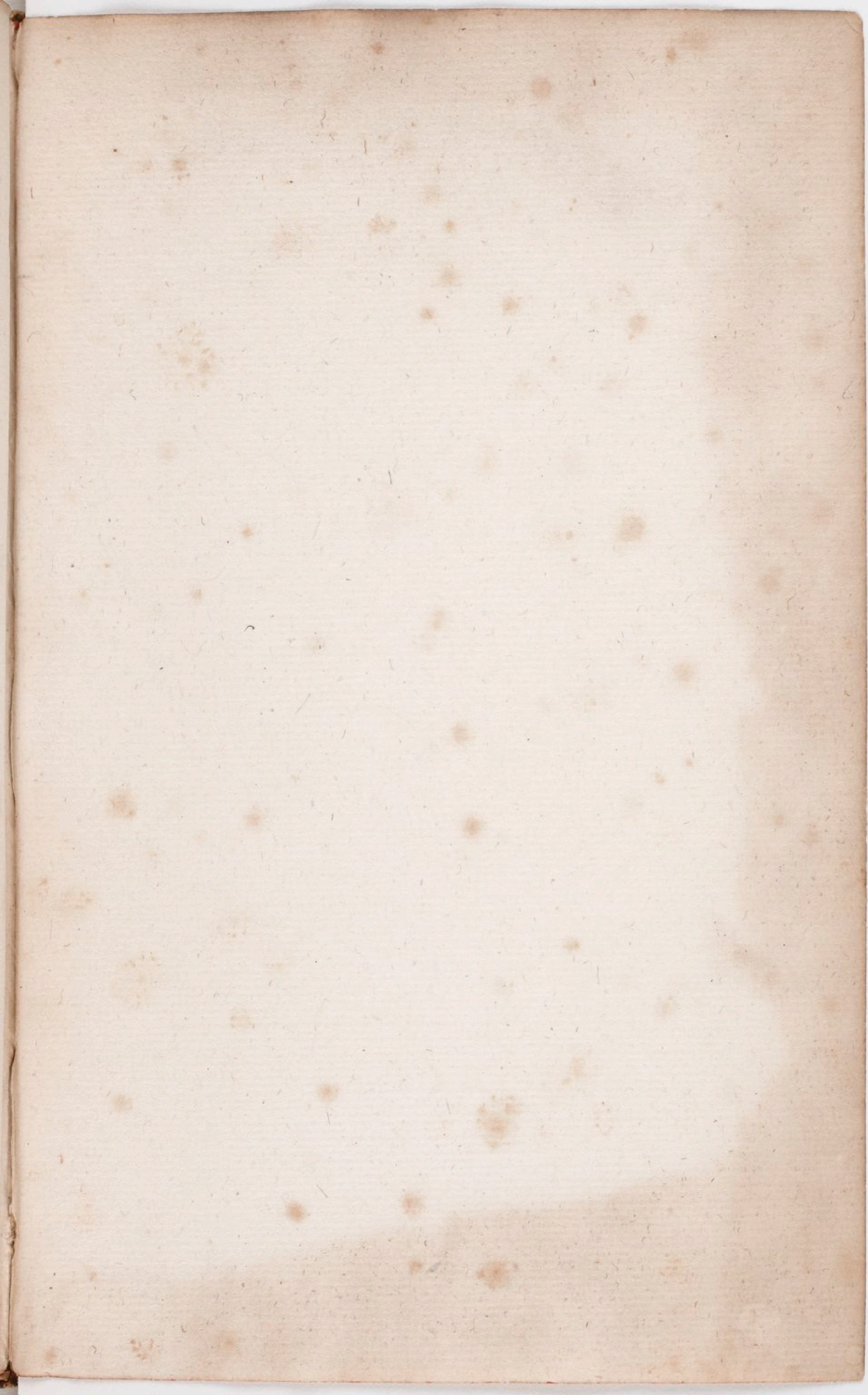
Fin de la Table des Matières.

Imprimé chez M. l'abbé de la Harpe.

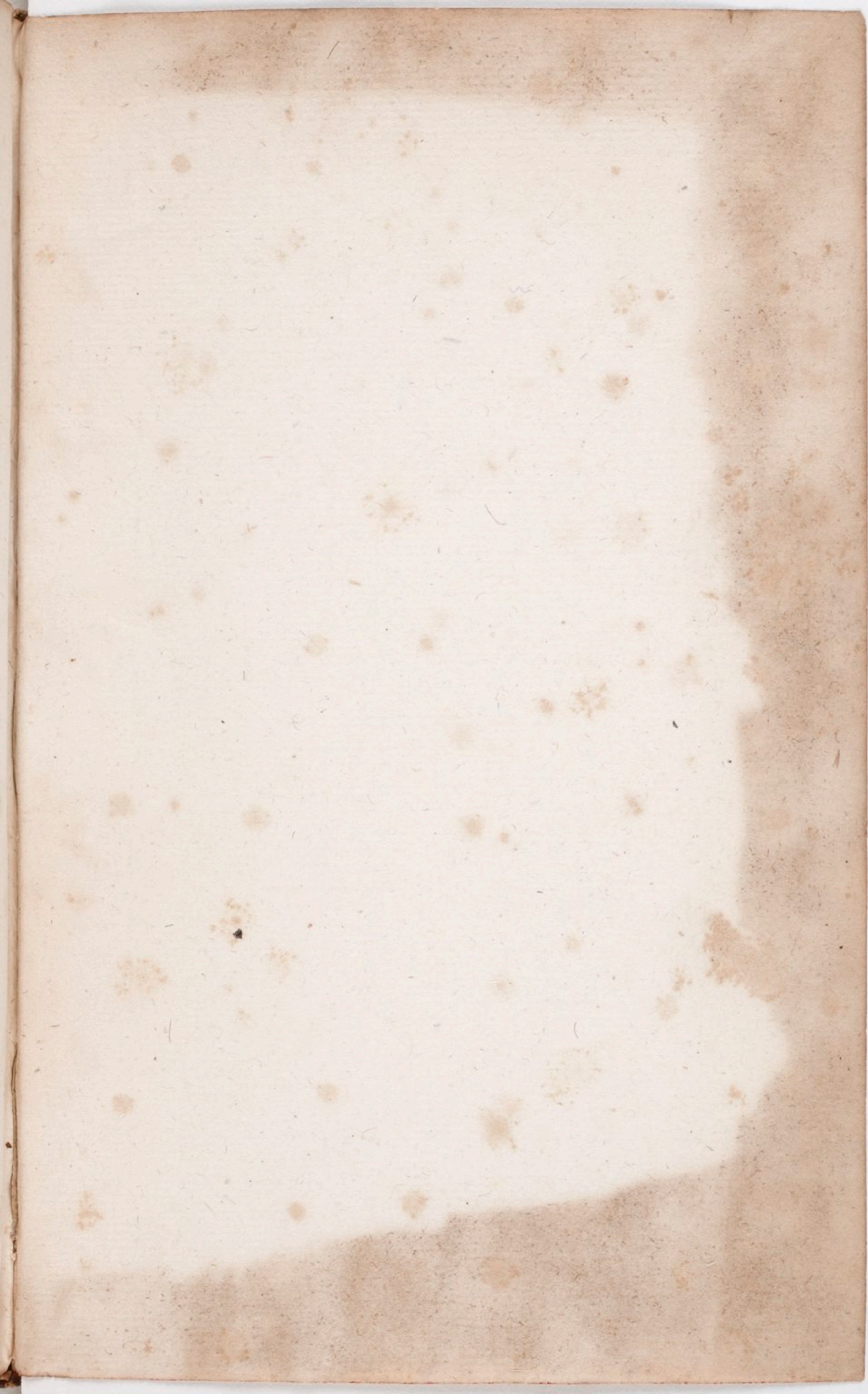




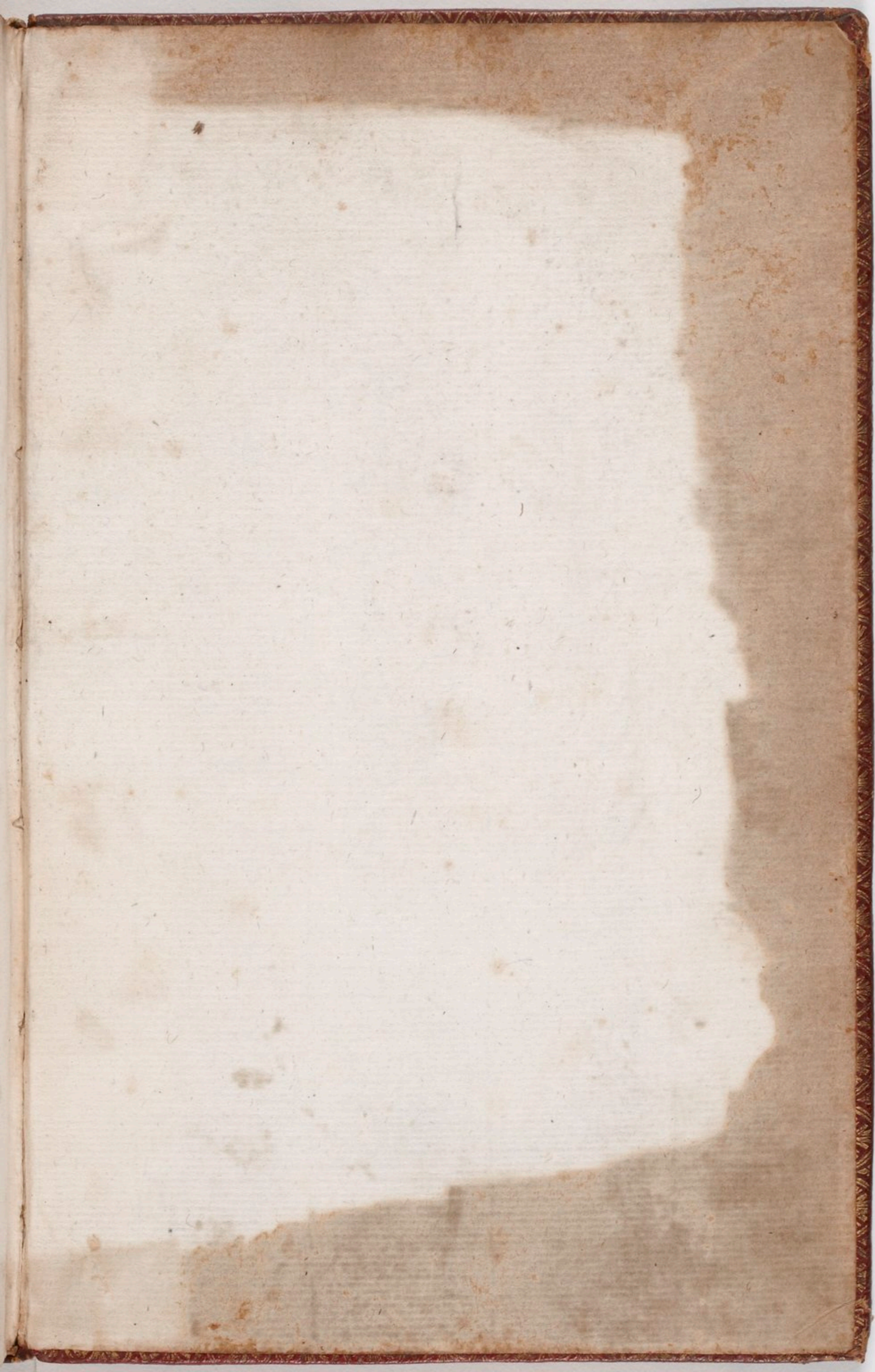
















MEMOIR  
DE  
MATHIEU

