Helmholtz, Hermann. 1856. Ueber Combinationstöne. Annalen der Physik und Chemie 99: 497-540

1856. ANNALEN №. 12.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND XCIX.

I. *Ueber Combinationstöne; von H. Helmholtz.*

Man weiſs im Allgemeinen, daſs wenn in derselben Luftmasse von mehreren tönenden Körpern Schallwellenzüge erregt werden, jedes einzige Wellensystem sich so ausbreitet und so verhält, wie wenn die übrigen gar nicht vorhanden wären. Es findet eine ungestörte Superposition der verschiedenen Wellenzüge in der Luftmasse statt. Andrerseits weiſs man, daſs auch das menschliche Ohr, gleichzeitig von mehreren solchen Schallwellenzügen getroffen, die Fähigkeit hat, jeden einzelnen unter ihnen einzeln wahrzunehmen und zu erkennen. Aber das Ohr hört in solchem Falle nicht bloſs die verschiedenen von den tönenden Körpern erregten Töne, sondern es hört auſser diesen, wenn auch schwach, noch andere Töne, die Combinationstöne, welche nicht primär von einem der tönenden Körper, sondern erst secundär durch das Zusammentreffen zweier primären Töne entstehen. Da man der ungestörten Superposition der Schallwellenzüge in der Luft gewiſs zu seyn glaubte, hat man die Combinationstöne bisher stets als subjective Erscheinungen aufgefaſst, d. h. als solche, die nur in der besonderen Weise, wie der Hörnerv die Schallvibrationen empfindet, gegründet sind. Sobald es sich darum handelt, die fundamentalen Eigenschaften des Hörnerven festzustellen, bilden die Combinationstöne einen Gegenstand von besonderer Wichtigkeit. Da ich auſserdem fand, daſs sowohl in Bezug auf die Thatsachen noch Zweifel bestehen konnten, als auch die bisherigen Erklärungsweisen noch nicht eine feste Formulirung klarer Begriffe über die Thätigkeit des Hörnerven zuzulassen schienen, so glaubte ich es nützlich den genannten Gegenstand einer neuen Untersuchung zu unterwerfen. Dabei fand ich eine neue bisher unbekannte Klasse von Combinationstönen, welche in die bisherigen Theorien nicht hineinpafste; ich fand, dafs es auch objective Combinationstöne giebt, welche unabhängig vom menschlichen Ohre bestehen, und dafs man endlich eine von den bisherigen ganz verschiedene Theorie der Combinationstöne geben kann, bei welcher für ihre Erklärung keine besondere Eigenschaft des Hörnerven vorausgesetzt wird, und welche vollständiger als die bisherigen die Thatsachen umfafst.

1. Bestimmung der tieferen Combinationstöne von zwei einfachen Tönen.

Die ersten Angaben über die Höhe der im Jahre 1745 von Sorge entdeckten, später von Tartini weiter untersuchten Combinationstöne beziehen sich nur auf den Fall, wo das Schwingungsverhältnifs der beiden primären Töne durch zwei um eine Einheit verschiedene ganze Zahlen m und $m+1$ ausgedrückt werden kann. In derselben Zeit, wo die primären Töne m und $m+1$ Schwingungen vollführen, macht der Combinationston eine Schwingung (nicht, wie Tartini irrthümlich behauptete, zwei). Nach der Analogie dieses Falles hat Chladni [1]) die allgemeinere Regel ausgesprochen, dafs überhaupt in allen Fällen, wo das Schwingungsverhältnifs der primären Töne durch zwei relative Primzahlen m und n ausgedrückt werden kann, die Höhe des Combinationstons durch die Zahl 1 auszudrücken sey. Dieses Gesetz scheint er aber nur aus seiner theoretischen Ansicht über die Entstehungsweise der Combinationstöne gefolgert zu haben. W. Weber [2]) modificirte diefs Gesetz später noch weiter, so dafs es auch auf irrationelle Tonverhältnisse pafste, und schlofs sich dabei der

1) Akustik, Leipzig 1802, S. 207.
2) Diese Ann. Bd. XV, S. 216.

Beobachtung an, dafs auch ein nicht ganz rein gestimmtes Intervall ziemlich denselben Combinationston giebt wie ein rein gestimmtes. Er schrieb vor, das Schwingungsverhältnifs in einen Kettenbruch zu entwickeln, und daraus die Reihe der Näherungswerthe zu finden. Jedem einzelnen Näherungswerthe könnte dann ein besonderer Combinationston entsprechen.

Dagegen stellte Hällström [1]), sich auf eine grofse Reihe eigener Beobachtungen stützend, das Gesetz auf, dafs in jedem Falle, wenn m und n die Schwingungszahlen der primären Töne sind, die Schwingungszahl des ersten Combinationstones $m-n$ sey. Diese Regel fällt mit der älteren nur dann zusammen, wenn m und n ganze Multipla von $(m-n)$ sind, wenn also das Schwingungsverhältnifs der beiden primären Töne durch zwei um eine Einheit verschiedene ganze Zahlen ausgedrückt werden kann. Wäre aber zum Beispiel das Schwingungsverhältnifs 5:3, so würde nach Chladni der Combinationston 1, nach Hällström dagegen der Ton 2 entstehen.

Schon Thomas Young [2]) hatte bemerkt, dafs zuweilen zwei Combinationstöne zu hören sind, z. B. bei der grofsen Terz die Quarte unter dem Grundtone neben der zweiten tieferen Octave. Hällström erklärt das Entstehen solcher anderen Combinationstöne dadurch, dafs der erste Combinationston mit einem der primären Töne einen Combinationston zweiter Ordnung bilden könne, dieser wieder einen dritter Ordnung u. s. w. Sind also m und n die Schwingungszahlen, so giebt

m mit n	den Combinationston		$m-n$
n mit $m-n$	»	»	$2n-m$
m mit $2m-n$	»	»	$2m-2n$

Mit den Beobachtungen, welche Hällström über Violintöne angestellt hat, stimmt seine Berechnungsweise

1) Diese Ann. Bd. XXIV, S. 438.

2) *Philos. Transact.* 1800. *T. I, p.* 106—150.

der Combinationstöne vollständig überein, während die Berechnung durch Kettenbrüche nach W. Weber nur in einer kleinen Zahl von Fällen einigermafsen passende Ergebnisse liefert. Nur ist es auffallend, dafs Hällström verhältnifsmäfsig oft den ersten Combinationston nicht hören konnte, während andere deutlich waren, und dafs er bei denselben Intervallen der primären Töne, wenn sie in wenig von einander verschiedener Höhe angegeben wurden, oft verschiedene Combinationstöne hörte.

Hällström's Gesetze über die Höhe der Combinationstöne wurden von Scheibler [1]) und Roeber benutzt, um die Zahl der Schwebungen zu berechnen, welche beim Zusammenklingen zweier oder mehrerer Stimmgabeln von genau bekannten Schwingungszahlen entstehen, und hierbei wurde eine aufserordentliche genaue Uebereinstimmung der Rechnung mit der Beobachtung gefunden.

Gegen die Ansicht, dafs ein Combinationston erster Ordnung mit denselben zwei primären Tönen, durch deren Combination er entstanden ist, neue Combinationstöne zweiter und dritter Ordnung bilden könne, erhob Poggendorff [2]) theoretische Bedenken; Roeber [3]) selbst, der die Theorie der Versuche von Scheibler ausgearbeitet hatte, will die Herleitung der Stöfse aus den Combinationstönen höherer Ordnung keineswegs für den Ausdruck des eigentlichen physikalischen Vorganges ausgeben. Wenn also auch die wahrgenommenen Combinatiostöne sich in Bezug auf ihre Höhe unter Hällström's Gesetz bringen liefsen, so schienen doch ihre Ordnung und die Bedingungen ihrer Entstehung noch zweifelhaft zu bleiben. Zu bemerken ist übrigens, dafs auch der nach der älteren Theorie vorhandene Ton, dessen Schwingungszahl dem gröfsten gemeinschaftlichen Theiler derjenigen der primären Töne entspricht, in der Reihe der Töne von Hällström vorkommt.

1) Diese Annalen Bd. XXXII, S. 493 bis 503.

2) Ebendaselbst S. 522.

3) Dove und Moser, Repertorium Bd. III, S. 38.

Die Verschiedenheiten in den Resultaten von Hällström mochten zum Theil durch verschiedene Reinheit in der Stimmung der Intervalle, zum Theil durch das Vorhandenseyn starker höherer Nebentöne bedingt seyn; namentlich sind wohl Violintöne, an denen er die Beobachtungen anstellte, und in denen der Grundton sehr stark von seiner höheren Octave, und recht hörbar von deren Quinte begleitet wird, wenig geeignet zu diesen Versuchen. Da alle Combinationstöne höherer Ordnung nach ihm unter den Ausdruck $\mathfrak{a}m - \mathfrak{b}n$ fallen, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei beliebige ganze Zahlen, m und n die Schwingungszahlen der primären Töne bezeichnen, so können sie auch alle durch Combination von zwei Obertönen der primären Töne entstanden seyn [1]). Der erste Combinationston des $\mathfrak{a}$ten Obertones von m und des $\mathfrak{b}$ten von n, würde die Schwingungszahl $\mathfrak{a}m - \mathfrak{b}n$ haben müssen.

Um sich vom Einflusse der Obertöne frei zu machen, und wo möglich regelmäfsigere Resultate zu erhalten, schien es mir daher nothwendig zu seyn, wie auch G. S. Ohm schon vorgeschlagen hatte, die Combination solcher Töne zu beobachten, welche keine Obertöne haben. Es entstand also zunächst die Aufgabe, dergleichen Töne herzustellen, welche wir im Gegensatze zu den zusammengesetzten, von Obertönen begleiteten Tönen der gewöhnlichen musikalischen Instrumente *einfache Töne* nennen wollen.

Wir wollen im Laufe dieses Aufsatzes eine solche vibrirende Bewegung eines elastischen Körpers, bei welcher die Entfernung eines jeden schwingenden Theilchens von der Gleichgewichtslage als Function der Zeit ausgedrückt wird, durch ein einziges Glied von der Form

$$A \sin(2\mathfrak{a}mt + c),$$

eine *einfache Schwingungsbewegung* nennen, und wenn die Schwingungen sich durch ein elastisches Mittel fortpflanzten, eine *einfache Wellenbewegung*. So sind zum Beispiel die Aetherschwingungen, welche dem homogenen Lichte einer

1) S. Ohm in diesen Ann. Bd. XLVII, S. 463.

einfachen Farbe angehören, solche einfache Wellenbewegungen. Eine jede andere schwingende Bewegung dagegen, bei welcher die Elongationen der schwingenden Theilchen andere periodische Functionen der Zeit sind, und daher nicht durch ein einziges Glied von der Form $A \sin(2\alpha m t + c)$, sondern nur durch eine Summe solcher Glieder dargestellt werden können, nennen wir *zusammengesetzte Schwingungs- oder Wellenbewegungen.* Da nun die Erfahrung lehrt, dafs überall, wo die mathematisch-mechanische Untersuchung zusammengesetzte Wellenbewegungen nachweist, ein geübtes Ohr Töne unterscheiden kann, welche den darin enthaltenen einfachen Wellenbewegungen entsprechen, so verwandelt sich unsere Aufgabe in diejenige, einfache Wellenbewegungen in der Luft hervorzubringen.

Da alle tönenden elastischen Körper mehrfache Schwingungsformen annehmen können, wobei sie Töne verschiedener Höhe hervorbringen, und es im Allgemeinen nicht möglich ist, dem tönenden Körper einen solchen Anstofs zur Bewegung beizubringen, dafs er sich nur in einer einzigen dieser Formen bewegt, so mufste zur Lösung der gestellten Aufgabe ein mehr mittelbarer Weg eingeschlagen werden, wobei ich folgendem Princip folgte. Nehmen wir an, wir hätten zwei elastische Körper, welche in Schwingung versetzt, gleichen Grundton haben; der eine, der Tonerreger, möge, wenn er in Schwingung versetzt ist, seine Schwingungen möglichst wenig an die Luft abgeben, der andere, der Resonator, welcher von dem ersteren in Mitschwingung versetzt wird, sey dagegen so eingerichtet, dafs er seine Schwingungen leicht und stark der Luft mittheile. Während der Grundton beider Körper genau gleich ist, seyen sämmtliche höheren Nebentöne des einen von denen des andern verschieden. Bringt man nun den Tonerreger in Schwingung, so tönt der Resonator mit, aber nur in denjenigen Tönen, welche beiden gesmeinsam sind. Ist also nur der Grundton gemeinsam, so wird der Resonator nur von diesem erregt werden, und nur die Schwingungen des Grundtons der Luft mittheilen.

Stimmgabeln, die man in der Hand hält, haben ganz die Eigenschaften, welche wir von unserem Tonerreger verlangen. Als Resonator habe ich theils die Saite eines Monochordes, theils Lufträume gebraucht. Durch die letzteren erhielt ich einen stärkeren Ton, und habe sie deshalb namentlich für die Versuche über Combinationstöne gebraucht. Dagegen erwies sich eine eigenthümliche Verbindung der Stimmgabeln mit dem Monochord, als ein besonders brauchbares Mittel, um die Lage der höheren Nebentöne der Stimmgabeln zu bestimmen. Da die Untersuchung der letzteren den übrigen Versuchen vorausgehen mufste, beginne ich mit ihr.

Den Stimmgabeln, welche ich zu diesen Versuchen gebrauchte, gab ich am Ende ihres Stieles eine sattelförmige Fläche, die nach einer Richtung concav, nach der anderen convex war. Wenn man eine Gabel mit dieser Fläche auf eine gespannte Saite setzt, so berührt sie die Saite in einem Punkte, und kann nicht leicht seitlich abgleiten, während man sie längs der Saite hin und herschiebt. Uebrigens wurde noch der Stiel jeder Stimmgabel in ein Holzklötzchen befestigt, aus welchem unten nur die Spitze des Stiels mit der sattelförmigen Fläche hervorsah, und welches dazu diente, die Gabel zu fassen, ohne sie durch Berührung mit den Fingern zu erwärmen.

Wenn man eine solche Gabel anschlägt, und auf die Saite eines Monochordes setzt, so hört man im Allgemeinen den Ton der Gabel kaum vernehmbar ertönen, wenn nicht eine der Abtheilungen der Saite zwischen dem Berührungspunkte der Gabel und einem der Befestigungspunkte genau einen der Gabeltöne zum Grundton oder Oberton hat. Verschiebt man also die Gabel längs der Saite, bis man sich der Stelle nähert, wo die Saite abzugränzen wäre, um den Grundton der Gabel zu geben, so hört man mit einmal diesen Grundton laut anschwellen, und sowie man die Stelle überschreitet, den Ton ebenso schnell wieder verschwinden. Die Breite der Stelle, welche das Maximum der Resonanz giebt, ist sehr klein, noch nicht

$\frac{1}{2}$ Millimeter breit, so dafs man die entsprechenden Saitenlängen mit grofser Genauigkeit bestimmen kann, namentlich wenn man die Stimmgabel nicht am Ende der einfachen Saitenlänge ihres Grundtons, sondern am Ende der vierfachen oder sechsfachen Saitenlänge desselben aufsetzt. Man bekommt nämlich dieselbe starke Rosonanz des Grundtons, wenn die durch die Stimmgabel abgegränzte Saitenlänge ein Multiplum von der des Grundtons ist. Bequem ist es bei solchen Versuchen zwischen dem einen Endpunkte der Saite und der Stimmgabel eine Dämpfung anzubringen, indem man ein zusammengelegtes Tuch zwischen die Saite und den Resonanzboden einschiebt; dann kann nur die andere Abtheilung der Saite tönende Schwingungen geben.

Hat man dann die Saite zur Resonanz gebracht, und legt auf ihre tönende Abtheilung den Finger, so verschwindet der Ton augenblicklich, bis auf einen sehr kleinen Rest, der durch Längsschwingungen der Saite zu entstehen scheint, und der hörbar bleibt, an welcher Stelle der Saite man die Gabel auch aufsetzen möge, übrigens desto schwächer ist, je glatter die sich berührenden Oberflächen der Saite und Gabel sind.

Zwischen den Punkten der Saite, wo der Grundton der Stimmgabel hörbar wird, findet man leicht andere heraus, wo die höheren Nebentöne der Gabel resoniren. Da diese kräftig ertönen, während der Grundton kaum vernommen wird, ist es leicht, auch verhältnifsmäfsig schwache Obertöne wahrzunehmen. Aufser den schon von Chladni untersuchten sehr hohen Nebentönen der Stimmgabeln, welche durch Bildung von mehrfachen Knotenstellen an der Gabel entstehen, habe ich aber auch an allen von mir untersuchten Gabeln immer die schon von Roeber [1]) gehörte genaue Octave des Grundtons, wenn auch schwach gefunden.

So fand ich bei einer Gabel, welche den Ton *b* gab, folgende Saitenlängen, bei welchen die Saite am stärksten in Mitschwingung versetzt wurde:

1) Repertorium der Physik Bd. III, S. 55.

1. Gabel b.

	Ton b	Ton b_1	Ton g_3
	251	125,5	38
	500	376,5	76
Mittel	250,66	125,5	114
			151,5
			227
			302
			377
			37,81.

Bei vier anderen Gabeln, welche mit Hülfe der Schwebungen als genaue grofse Terz, Quinte, Octave und grofse Septime zu der eben genannten Gabel b gestimmt waren, fand ich folgende Saitenlängen.

2. Gabel d_1.

Ton d_1: 200
Ton d_2: 100
Ton ais_3: 31,9

3. Gabel f_1.

Ton f_1: 166,3
Ton f_2: 83,5
Ton cis_4: 26,7

4. Gabel b_1.

Ton b_1: 125,3
Ton b_2: 62,7
Ton f_4: 21,04

5. Gabel a_1.

Ton a_1: 133
Ton a_2: 66,5
Ton es_4: 23.

Der dritte bei jeder Gabel angegebene Ton entspricht dem ersten höheren Nebenton in Chladni's Beobachtungen, bei welchem die Gabel vier Schwingungsknoten zeigt. Sein Verhältnifs zum Grundton der Gabel, dem zwei Schwingungsknoten zukommen, ist nach Chladni $6\frac{1}{4}$; in den eben angeführten Beobachtungen schwankt es zwischen $5\frac{4}{5}$ und $6\frac{2}{3}$. Wegen der hohen Lage und unharmonischen Beschaffenheit dieses Tones ist sein Einfluſs bei den Versuchen über Combinationstöne meistentheils nicht zu fürchten.

Viel wichtiger ist der zweite Ton, welcher stets genau der Octave des Grundtons entspricht. Er befindet sich nicht unter den von Chladni beobachteten Tönen, welche durch Streichen mit dem Violinbogen von ihm auf der Gabel erzeugt wurden, scheint auch mit Henrici's [1]) schwachen Nebentönen zweiter Art nicht identisch zu seyn, da diese einen bis zwei Töne höher sind als die Octave des Grundtons. Davon, daſs die höhere Octave des Grundtons nicht bloſs durch die besondere Methode der Beobachtung, etwa als eine Art Klirrton an der Berührungsstelle der Gabel mit der Saite erzeugt wird, kann man sich überzeugen, wenn man die Gabeln vor der Mündung einer Resonanzröhre tönen läſst, deren eigener Ton die höhere Octave des Grundtons der Gabel ist. Man hört dann, wenn die Gabel stark angeschlagen ist, diese Octave ganz deutlich.

Uebrigens hat auch A. Seebeck [2]) ähnliche Beobachtungen gemacht, aus denen hervorgeht, daſs harmonische Obertöne auch bei Glocken und Stimmgabeln vorkommen, wo man der Theorie nach nur unharmonische erwarten sollte. Er fand, daſs der Ton d_1 eines gläsernen Pokals den Ton d_2 einer Saite zum Mitschwingen brachte, und a_1 einer Stimmgabel a_2 einer Saite. Ich glaube, daſs der Grund dieser Erscheinung darin zu suchen ist, daſs die Schwingungen der betreffenden elastischen Körper bei diesen Versuchen die Gränze überschreiten, innerhalb deren die elastischen Kräfte den Elongationen proportional sind.

1) Diese Annalen Bd. LVIII, S. 265. Uebrigens scheint bei Henrici leider ein Irrthum in der Bezeichnung der Töne vorgekommen zu seyn, da das Verhältniſs des ersten zu unserm dritten Tone bei ihm nur 2,7 bis 3, die Hälfte des wahren ist.

2) Repertorium der Physik, Bd. VIII, S. 69.

Dafs dadurch harmonische Obertöne entstehen müssen, läfst sich theoretisch durch eine ähnliche mathematische Entwickelung, wie wir sie später für die Theorie der Combinationstöne geben werden, zeigen. Dafs übrigens die Schwingungen einer stark angeschlagenen Gabel die bezeichnete Gränze wirklich überschreiten können, geht auch aus der von mehreren Beobachtern gemachten Wahrnehmung hervor, wonach auch die Tonhöhe der Gabel, während sie verklingt, sich merklich ändert. Es wird also auch der Isochronismus der Schwingungen bei starkem Anschlagen merklich gestört, und das kann nur geschehen, wenn bei starken Schwingungen die elastischen Kräfte den Elongationen nicht mehr genau proportional sind.

Wenn wir nun eine Stimmgabel an einer solchen Stelle auf eine Saite aufsetzen, wo diese in dem Grundtone der Gabel mitschwingt, so werden allerdings die höheren unharmonischen Töne der Gabel das Mitschwingen der Saite nicht erregen, und nicht auf deren Resonanzboden und die umgebende Luftmasse übertragen werden, wohl aber die höhere Octave des Grundtons. Um diese auszuschliefsen mufs man der Saite selbst unharmonische Obertöne geben, was sehr leicht zu bewirken ist, dadurch, dafs man in der Mitte des mitschwingenden Saitenstücks eine kleine Belastung anbringt. Wenn L die Saitenlänge ist, welche den Grundton der Stimmgabel giebt, so braucht man nur in der Entfernung von etwa $\frac{1}{3}$ Lin. vom Ende der Saite als Belastung derselben ein Tröpfchen Siegellack auf ihr zu befestigen. Man wird dann finden, dafs die Saitenlänge, welche den Grundton der Stimmgabel giebt, jetzt beträchtlich kleiner geworden ist, und dafs aufserdem der zweite Erregungspunkt der höheren Octaven des Grundtons, der ursprünglich mit dem ersten Erregungspunkte des Grundtons selbst zusammenfiel, jetzt von diesem getrennt ist. Wenn man also die Gabel nun in dem letzteren Punkte aufsetzt, erregt man nur den Grundton und nicht mehr gleichzeitig dessen höhere Octave [1]).

1) Die Theorie der Bewegung beschwerter Saiten siehe bei Duhamel,

Um bei der Ausführung der Versuche die Gabeln nicht immer in der Hand halten zu müssen, ohne sie doch mit einem schalleitenden Körper in Berührung zu bringen, ist es am besten, wenn man sie an der Saite aufhängt. Zu dem Ende stelle ich das Monochord so auf, dafs die Saiten nach unten gekehrt sind. In der Mitte der Saite wird ein Häkchen fest angekittet, an welches die Gabel, nachdem sie angeschlagen ist, gehängt werden kann. Auf der einen Seite des Häkchens dämpft man die Saite durch ein untergeschobenes Tuch; auf der anderen Seite wird das Siegellacktröpfchen, und weiterhin ein beweglicher Steg angebracht, den man so lange verschiebt, bis man das Maximum der Stromstärke erhält.

Man erhält auf diese Weise ziemlich laute und lang anhaltende reine Töne, welche verschwinden, so wie man die Saite zwischen der Gabel und dem Stege mit dem Finger berührt und dadurch ihre Querschwingungen dämpft. Die Klangfarbe dieser einfachen Töne ist im Ganzen der der Stimmgabeltöne ähnlich, nur etwas dumpfer, dem *U* ähnlich, und wenn man ihre Höhe an einem Claviere zu bestimmen sucht, wird man leicht verleitet, sie eine Octave tiefer zu suchen, als sie wirklich liegen.

Eine zweite Methode, den Grundton der Stimmgabeln mit Ausschlufs ihrer Obertöne der Luft mitzutheilen, beruht auf der Wirkung resonirender Röhren. Die Röhren, welche ich anwendete, waren aus Pappe verfertigt, cylindrisch, an beiden Enden durch einen ebenen Boden geschlossen, von denen der eine in der Mitte eine runde

Compt. rend. *XI*, 15 und 810. (Diese Annalen LVII. 392 u. 397.) Seebeck im Repertorium der Physik VIII. 33 giebt auch die Gleichung für die Höhe der Töne. Es sey M die Masse der Belastung, m die der Saite, $l_{,}$ und $l_{,,}$ die Länge ihrer beiden Stücke, in welche sie durch die Belastung getheilt wird, L die Länge einer unbelasteten Saite von gleicher Art und Spannung, deren Grundton dem betreffenden Tone der beschwerten Saite gleich ist, so wird L gegeben durch die trascendente Gleichung:

$$\operatorname{cotang} \frac{\mathfrak{a} l_{,}}{L} + \operatorname{cotang} \frac{\mathfrak{a} l_{,,}}{L} = \frac{\mathfrak{a} M (l_{,} + l_{,,})}{m L}.$$

Oeffnung besafs. Ich gebe hier folgend ihre Maafse in Centimetern an, und die Töne, welche ich erhalten konnte, indem ich durch eine enge Röhre gegen ihre Mündung blies.

Gehörig zur Gabel.	Länge.	Durchmesser der Röhre.	Durchmesser der Oeffnung.	Töne.
b	17,3	5,3	1,1	b, des_3
d_1	17,1	4,0	1,0	d_1, des_3, h_3
f_1	14,3	4,0	1,1	f_1, e_3
b_1	13,2	4,1	1,8	b_1, fis_3

Da die Mündungen dieser Röhren keine scharfen Ränder hatten, war das Anblasen schwierig, und es gelang mir deshalb nur bei einer von ihnen den dritten Ton zu erhalten. Um die Lage dieses Tons in noch anderen Fällen zu bestimmen, verfertigte ich mir noch eine Röhre von ähnlicher Gestalt, die durch Ausziehen eines hölzernen Stempels verlängert werden konnte, und deren Mündung einen scharfen Rand hatte, so dafs das Anblasen leichter war. Sie hatte 3,8 Centimeter, ihre Oeffnung 1 Centimeter Durchmesser und konnte bis auf 28,5 Centimeter verlängert werden. Auch hier konnte ich nur bei den niederen Tönen den zweiten Oberton durch stärkeres Anblasen erreichen.

Länge der Röhre.	Töne.		
26	c_1	gis_2	fis_3
22	d_1	ais_2	gis_3
17	f_1	d_3	cis_4

Das Verhältnifs des zweiten zum dritten Tone ist in allen diesen Fällen das einer kleinen oder grofsen Septime, und wir dürfen ihn deshalb wohl in den Fällen, wo er nicht durch Anblasen hervorgebracht werden konnte, nach diesem Verhältnisse ergänzen.

Ich stelle jetzt die verschiedenen Töne, welche die zusammengehörigen Röhren und Gabeln geben, unter einander, wobei die nicht direct beobachteten Obertöne eingeklammert sind:

1)	Gabel:	b,	b_1		g_3	
	Röhre:	b		des_3		(h_3)
2)	Gabel:	d_1	d_2		ais_3	
	Röhre:	d_1		des_3		h_3
3)	Gabel:	f_1	f_2		cis_4	
	Röhre:	f_1		e_3		(d_4)
4)	Gabel:	b_1	b_2		f_4	
	Röhre:	b_1		fis_3		(e_4)
5)	Gabel:	a_1	a_2		dis_4	
	Röhre:	a_1		fis_3		e_4

Man sieht aus dieser Zusammenstellung, dafs die ersten Obertöne der Gabeln, welche die höhere Octave des Grundtons bilden, durch die Resonanz der Röhren nicht verstärkt werden können. Dagegen kommen die zweiten Obertöne der Gabeln und Röhren sich einige Male ziemlich nahe. Indessen ergab der Versuch, dafs die Uebereinstimmung doch nicht grofs genug war, um eine wesentliche Verstärkung jener Obertöne durch die Resonanz der Röhren zu bedingen, in denen sich wahrscheinlich die durch Anblasen schwer zu erzeugenden Töne überhaupt schwer bilden. Wenn man die Gabeln mit einem harten Körper anschlägt, hört man die höheren Obertöne, welche einer vermehrten Zahl von Knoten entsprechen, deutlich neben dem Grundtone; doch verklingen sie schnell. Bringt man dann die Gabel vor die Mündung ihrer Resonanzröhre, so schwillt ihr Grundton mächtig an, während keine Verstärkung des höheren Tones wahrzunehmen ist.

Insbesondere überzeugte ich mich noch, dafs die Röhren nicht im Stande sind die Octave ihres Grundtons durch Resonanz zu verstärken. Wenn ich die Gabel b_1 vor die

Oeffnung der Röhre *b* hielt, war nicht die geringste Verstärkung des Tones zu bemerken. Dagegen verstärkten die Röhren die Töne, welche von ihrem Grundton um einen halben oder ganzen Ton abwichen, noch ziemlich bedeutend. Die Röhre für b_1 war eben so gut für a_1 zu gebrauchen, und selbst as_1 wurde noch beträchtlich dadurch verstärkt.

Da die Resonanz der Röhren einen merklich stärkeren Ton gab, als die der Saiten, und die Gabeln in ihrer Verbindung mit den Röhren auch leichter zu handhaben waren, habe ich die meisten Versuche über Combinationstöne mit den Röhren angestellt.

Bei den Versuchen mufs man darauf achten, dafs die schwingenden Stimmgabeln nirgends Klirren erregen. Am besten hält man sie in den Händen. Will man sie fest hinstellen, so müssen sie in einer hölzernen Unterlage durch stark angezogene Schrauben befestigt seyn, und diese mufs auf Leder oder einer dicken Lage Papier stehen, nicht auf dem blofsen Tische. Die klirrenden Töne, welche entstehen, wenn die Gabeln nicht ganz fest in ihrer hölzernen Unterlage sitzen, oder diese lose auf dem Tische steht, werden offenbar durch kleine Stöfse der betreffenden Körper gegen einander hervorgebracht, welche den Schwingungen der Gabel meist isochron sind. Daher ist der Klirrton meist gleich hoch, wie der Gabelton (zuweilen tiefer), aber da er nicht durch eine einfache Sinusbewegung hervorgebracht wird, hat er stark hervortretende Obertöne, welche ihm seinen spitzen Klang zu geben scheinen. Eben dieser Obertöne wegen, mufs das Klirren vermieden werden.

Mittels der mehrfach angeführten Gabeln und einer sechsten, deren Schwingungszahl zu der des *b* im Verhältnifs von 7 zu 4 stand, die also ein etwas tiefes as_1 gab und die ich durch aufgeklebte Wachsklümpchen bis auf g_1 erniedrigen konnte, waren folgende Combinationen von Tönen herzustellen, die ich hier folgend mit dem dabei gehörten Combinationstone angebe.

Primäre Töne.		Combinationston.	Schwingungsverhältniſs der primären Töne zu einander	des Combinationstons.
b	f_1	B	2 : 3	1
f_1	b_1	B	3 : 4	1
b	d_1	B_{-1}	4 : 5	1
d_1	f_1	B_{-1}	5 : 6	1
f_1	as_1	B_{-1}	6 : 7	1
as_1	b_1	B_{-1}	7 : 8	1
b	g_1	es	3 : 5	2
d_1	as_1	B	5 : 7	2
d_1	b_1	f	5 : 8	3
b	as_1	f	4 : 7	3

Ich war in allen diesen Fällen nicht im Stande, durch das Gehör das Vorhandenseyn anderer Combinationstöne zu erkennen, welche tiefer gewesen wären, als die primären Töne, während ich andrerseits bei je zwei Tönen von Orgelpfeifen, oder der Sirene oder der Violine sehr wohl im Stande war, Combinationstöne zweiter Ordnung wahrzunehmen. Indessen habe ich bei Orgelpfeifen und bei der Sirene kein Beispiel gefunden, wo nicht der Combinationston erster Ordnung bei Weitem der deutlichste gewesen wäre. Als Beispiele solcher Combinationstöne zweiter Ordnung, die ich hörte, führe ich an:

Neben den Tönen 4 und 5 den Ton $3 = 2.4 - 5$.
Neben den Tönen 5 und 7 den Ton $3 = 2.5 - 7$.
Neben den Tönen 5 und 8 den Ton $2 = 2.5 - 8$.
Neben den Tönen 3 und 5 den Ton $1 = 2.3 - 5$.

Die Violine, welche Tartini und Hällström anwendeten, scheint mir nach meinen eigenem Erfahrungen viel weniger zu den Untersuchungen über Combinationstöne geeignet zu seyn als die Orgelpfeifen und die Sirene. Ich hatte allerdings nur Gelegenheit, die Hülfe dilettirender Violinspieler in Anspruch zu nehmen, und kann daher nicht beurtheilen, ob eine künstlerische Vollendung der Bogenführung andere Resultate geben möchte. Die Combinationstöne waren dabei in einer eigenthümlichen Weise inconstant, hörten sich heulend an, indem sie bald etwas höher, bald etwas tiefer wurden, was namentlich dann sehr entschieden der Fall war, wenn nicht zwei ganze Saiten angestrichen wurden, sondern eine derselben an das Griffbrett gedrückt und verkürzt wurde. Aufserdem pflegten auch schnell hinter einander verschiedene Combinationstöne zu wechseln. Der Grund davon liegt wohl darin, dafs durch den Bogen die Saite nicht ganz gleichmäfsig bewegt wird, sondern fortdauernd die Form ihrer Schwingung wechselt, so dafs ihre Obertöne in Bezug auf Stärke und auf die Gleichzeitigkeit oder Ungleichzeitigkeit ihrer Wellenberge und Wellenthäler vielfach variiren, so dafs die verschiedenen Combinationstöne des Grundtons und seiner Obertöne sich bald gegenseitig verstärken, bald durch Interferenz aufheben, und deshalb bald der eine bald der andere Combinationston stärker hervortritt. Was das Heulen des Combinationstons betrifft, so mufs man bedenken, dafs wenn die primären Töne nahe bei einander liegen, aufserordentlich kleine Schwankungen ihrer Höhe sehr merklich die Höhe des Combinationstons verändern können. Geben doch schon die Terzen, welche nach der gleichschwebenden Temperatur gestimmt sind, Combinationstöne, welche um einen halben Ton verändert sind. Das Verhältnifs des c_1 zum e_1 in der reinen Temperatur ist 100 : 125, in der gleichschwebenden 100 : 126. Ersteres giebt den Combinationston C von 25 Schwingungen, letzteres einen Ton von 26 Schwingungen. Das Verhältnifs dieser beiden Combinationstöne ist also nahe gleich dem eines kleinen halben Tons 24 : 25. Statt C erhalten wir daher bei der Stimmung nach gleichschwebender Temperatur nahehin *Cis*, und, wenn wir e_1 und g_1 angeben, statt desselben C vielmehr H_{-1}. Bei einem Instrumente mit starken, gleichmäfsig anhaltenden Tönen, z. B. einer Physharmonika, welches nach gleichschwebender Temperatur gestimmt ist, bilden deshalb auch diese Combinationstöne für den, der darauf zu achten gewöhnt ist, eine unangenehme Störung der Harmonie.

Wir entnehmen aus den angeführten Thatsachen das Resultat, dafs das menschliche Ohr Hällström's Combinationstöne zweiter Ordnung bei einfachen Tönen von der Stärke, wie sie unsere mit Resonanzröhren versehenen Stimmgabeln geben, nicht zu erkennen vermag, wohl aber bei solchen Tönen gleicher Stärke, welche, wie die der Orgelpfeifen, Sirenen, Violinen mit Obertönen verbunden sind. Wir dürfen daraus wohl den Schlufs ziehen, dafs wenn wir bei Tönen mittlerer Stärke Combinationstöne zweiter oder höherer Ordnung deutlich hören, diese durch die höheren Nebentöne der primären Töne erzeugt sind.

Andrerseits ist noch eine Erscheinung zu erwähnen, aus der wir vielleicht schliefsen müssen, dafs auch bei den einfachen Tönen, wenn auch aufserordentlich schwach, Combinationstöne höherer Ordnung vorkommen. Es sind diefs die von Scheibler und Roeber untersuchten Schwebungen, welche bei nicht ganz reinen Consonanzen hörbar sind. Die Schwebungen sind in der That ein Mittel, durch welches man die Gegenwart sehr schwacher Töne oft besser erkennt als durch das Ohr.

Um das Intervall $b b_{\imath}$ meiner Stimmgabeln zu prüfen, habe ich mir eine Hülfsgabel gestimmt, welche vier Schwingungen weniger als $b_{\imath}$ in der Sekunde macht. Lasse ich die Gabel $b_{\imath}$ vor ihrer Resonanzröhre verklingen, und nähere der Röhre von Zeit zu Zeit die angeschlagene Hülfsgabel, so höre ich die Schwebungen noch zu einer Zeit, wo ich von dem Tone der verklingenden Gabel ohne dieses Hülfsmittel nichts mehr wahrnehmen kann. Wenn wir wie beim Lichte die Intensität des Schalls nach dem Quadrate der Schwingungsweite bestimmen, mufs in der That, wo zwei Schallwellenzüge von gleicher Stärke mit gleichen Phasen zusammen kommen, die Schwingungsweite verdoppelt, die Intensität vervierfacht werden. Wo entgegengesetzte Phasen zusammenfallen, wird die Intensität gleich Null. Nähern wir also die Hülfsgabel der Resonanzröhre so weit, dafs der Schall beider Gabeln die gleiche Stärke welche wir 1 nennen wollen, bekommt, so wechselt die Intensität des Tons zwischen 0 und 4, und dieser Wechsel kann also noch sehr wohl wahrnehmbar seyn, während die Intensität 1 schon nicht mehr wahrgenommen wird. Scheibler hat nun bekanntlich nachgewiesen, dafs die Zahl der Schwebungen, welche unrein gestimmte Octaven, Quinten, Quarten und Terzen geben, genau berechnet werden kann aus der Annahme, dafs dabei Combinationstöne verschiedener Ordnung von nahe gleicher Höhe mit einander interferiren. Läfst man diese Erklärungsweise von Scheibler zu, so würden die Schwebungen die Anwesenheit von Combinationstönen verrathen können, welche zu schwach sind, um ohne ihre Hülfe wahrgenommen zu werden. Ich habe deshalb Versuche über diese Schwebungen an den mit Resonanzröhren versehenen Gabeln gemacht. Verstimmen kann man sie leicht in beliebigem Grade, indem man Klümpchen Wachs an ihre Zinken klebt. So konnte ich die Schwebungen zweier Gabeln hören, welche eine schwach verstimmte Octave, Quinte, Quarte oder grofse Terz bilden. Aber während sie bei der Octave leicht und deutlich hörbar waren, zeigten sie sich bei jedem folgenden Intervalle schwächer und waren schon bei der grofsen Terz nur sehr schwer zu hören. Bei der kleinen Terz konnte ich die Schwebungen nicht mehr mit Bestimmtheit erkennen, ebenso wenig bei der kleinen Sexte.

Bei der unreinen Octave, deren Töne die Schwingungszahlen λ und $2\lambda + \delta$ haben mögen, ist es nach der Erklärung von Scheibler der Combinationston erster Ordnung $\lambda + \delta$, welcher mit dem Grundton λ Schwebungen von der Zahl δ hervorbringt.

Bei der unreinen Quinte, 2λ und $3\lambda + \delta$, ist es ein Combinationston erster Ordnung $\lambda + \delta$, welcher mit einem der zweiten Ordnung $2.(2\lambda) - (3\lambda + \delta) = \lambda - \delta$ Schwebungen von der Zahl 2δ hervorbringt.

Bei der unreinen Quarte 3λ und $4\lambda + \delta$ ist es ein Combinationston zweiter Ordnung $2(3\lambda) - (4\lambda + \delta) = 2\lambda - \delta$ und ein solcher dritter Ordnung $2(4\lambda + \delta) - 2(3\lambda) = 2\lambda + 2\delta$ welche 3δ Schwebungen hervorbringen.

Bei der unreinen grofsen Terz endlich 4λ und $5\lambda+\delta$ ist es ein Combinationston dritter Ordnung $2(5\lambda+\delta)-2(4\lambda)$ $=2\lambda+2\delta$, und ein solcher vierter Ordnung $3(4\lambda)-2(5\lambda+\delta)$ $=2\lambda-2\delta$, welche mit einander 4δ Schwebungen geben.

Auch Scheibler hat wahrgenommen, dafs die Schwebungen desto schwächer werden, einer je höheren Ordnung die Combinationstöne angehören, durch welche sie entstehen. Seiner Theorie gemäfs müfsten also Combinationstöne bis zur vierten Ordnung auch von einfachen Tönen erzeugt werden können. Scheibler hatte für seine Theorie nur die eine Bestätigung, welche in der genauen Uebereinstimmung der berechneten Zahl der Schwebungen mit der beobachteten lag. Ich hoffte noch eine zweite Bestätigung seiner Theorie gewinnen zu können, wenn ich auf die Höhe der als schwebend wahrgenommenen Töne achtete. In der That glaubte ich in allen Fällen die Töne schwebend zu hören, welche Scheibler's Theorie fordert, namentlich im Falle der unreinen Quarte f_1 b_1 den Combinationston zweiter Ordnung *b*, im Falle der unreinen grofsen Terz den Ton dritter Ordnung *B* mittels der Schwebungen wahrzunehmen. Doch stehe ich an, mich in diesem Falle auf die Aussagen meines Ohres fest zu verlassen, da es sehr schwierig ist, bei so aufserordentlich schwachen Tönen, die Octave, in der der Ton liegt, sicher zu bestimmen. Uebrigens lehrt auch eine vollständig durchgeführte Theorie dieser Schwebungen, dafs nicht blofs die von Scheibler als schwebend berechneten Töne Wechsel ihrer Stärke zeigen müssen, sondern schwächere Schwebungen auch bei den übrigen Combinationstönen anderer Ordnungen eintreten müssen.

Auch dadurch, dafs man dritte Töne daneben angiebt, kann man zuweilen Schwebungen hörbar machen, welche nicht durch Combinationstöne erster Ordnung, sondern nur durch solche höherer Ordnung erklärt werden können.

Wenn ich z. B. die einfachen Töne *b* und d_1 angab, und dazu auf dem Clavier *f*, welches nicht genau mit den beiden vorigen consonirte, so hörte ich sehr deutlich sowohl den Ton B_{-1} als den Ton f Schwebungen machen. Die ersteren erklären sich dadurch, dafs der erste Combinationston sowohl von f und b, wie von b und d_1, B_{-1} ist, und wenn das letztere Intervall nicht ganz rein ist, die beiden Combinationstöne nicht ganz übereinstimmen können, folglich Schwebungen geben müssen. Mit dem Ton f fällt aber kein Combinationston erster Ordnung zusammen, selbst wenn man die höheren Nebentöne von f hinzunimmt, wohl aber ist f ein Combinationston zweiter Ordnung von b und d_1. Dieses f wird dadurch, dafs man ein etwas verschiedenes f auf dem Claviere angiebt, und es dadurch in Schwebungen bringt, wahrnehmbar gemacht.

In derselben Weise konnte ich Schwebungen des zweiten Combinationstons b der kleinen Terz $d_1 f_1$ hörbar machen, wenn ich diefs b auf dem Claviere angab. Daneben hörte man ebenfalls Schwebungen des B_{-1}.

Eben so konnte ich deutlich die Schwebungen des f hören, wenn ich das b_1 der Stimmgabeln durch aufgeklebtes Wachs verstimmte, und nun zunächst b und b_1, beide gleichmäfsig stark, ertönen liefs. Unter diesen Umständen hört man die Schwebungen wenig, welche die unreine Octave sonst deutlich hören läfst, wenn der tiefere Ton an Stärke überwiegt. Sobald man aber zu den Tönen b und b_1 noch d_1 angiebt, hört man sehr deutlich das f schweben. Dieses f ist der erste Combinationston von $d_1 b_1$ und der zweite von $b d_1$. Ein anderer erster Combinationston fällt damit nicht zusammen, der die Schwebungen verursachen könnte.

Wenn wir nun auch **Scheibler's** und **Roeber's** Theorie der Schwebungen, welche die Erscheinungen mit grofser Genauigkeit erklärt, als gültig betrachten, und aus dem Vorhandenseyn der entsprechenden Schwebungen schliefsen, dafs auch einfache Töne zur Bildung von Combinationstönen höherer Ordnung Veranlassung geben, so folgt daraus keineswegs, dafs bei den Beobachtungen des blofsen Ohres, wo diese Töne nicht gehört werden konnten, ein Irrthum stattgefunden habe. Im Gegentheil, da die Schwebungen, welche durch Combinationstöne höherer Ordnung veranlaſst werden, in allen diesen Fällen auſserordentlich schwach sind, und andrerseits die Schwebungen ein so sehr viel ferneres Mittel der Wahrnehmung eines Tones abgeben, wird dadurch vielmehr bestätigt, daſs diese Combinationstöne durch das Ohr allein, namentlich neben anderen, sehr viel stärkeren Tönen, nicht wohl wahrgenommen werden konnten.

Als Resultat der bisherigen Untersuchung der tieferen Combinationstöne können wir aussprechen, daſs *einfache Töne nur solche tiefere Combinationstöne deutlich hören lassen, deren Schwingungszahl gleich der Differenz der Schwingungszahlen der primären Töne ist, und daſs, wenn Combinationstöne anderer Ordnung daneben existiren, diese zu schwach sind, um bei mäſsiger Stärke der primären Töne dem Ohre hörbar zu werden. Wenn bei zusammengesetzten Tönen Combinationstöne höherer Ordnung oft sehr deutlich auftreten, müssen wir diese daher für Combinationstöne der höheren Beitöne erklären.*

2. Ueber eine neue Art höherer Combinationstöne.

Auſser den bisher besprochenen Combinationstönen besteht noch eine zweite Klasse solcher Töne, welche, so viel ich finde, bisher noch niemals beobachtet worden zu seyn scheint, nämlich *Töne, deren Schwingungszahl gleich ist der Summe der primären Töne.* Ich werde diese neuen Töne mit dem Namen der *Summationstöne* bezeichnen, im Gegensatze zu den früher besprochenen und schon länger bekannten, welche wir *Differenztöne* nennen können, weil ihre Schwingungszahl der Differenz der Schwingungszahlen der primären oder ihrer combinirten Töne niederer Ordnung gleich ist. Ich wurde zuerst durch die theoretischen Entwickelungen, welche ich weiter unten geben werde, darauf aufmerksam, daſs solche Töne existiren möchten, und versuchte sie an den mit Resonanzröhren versehenen Stimmgabeln zu hören. Das gelang mir auch, aber nur sehr schwierig, weil die Töne der Stimmgabeln nur eine mäfsige Stärke haben, und da die Combinationstöne überhaupt bei gröfserer Stärke der primären Töne deutlicher werden. Die Summationstöne sind nun schwächer als die Differenztöne erster Ordnung, und es gehört deshalb grofse Uebung und Aufmerksamkeit dazu, sie bei geringerer Stärke der primären Töne zu hören. Indessen gelang es mir doch mittels der Stimmgabeln folgende Töne dieser Art wahrzunehmen.

Primäre Töne.	Summationston.	Schwingungsverhältnifs der primären Töne.	Schwingungsverhältnifs des Summationstones.
b, f_1	d_2	2 : 3	5
f_1, b_1	as_2	3 : 4	7
b, d_1	c_2	4 : 5	9

Viel leichter sind sie zu hören, wenn man stärkere Schallquellen anwendet, auch braucht man hierbei die Obertöne der primären Töne nicht zu fürchten. Einmal kann der Summationston mit keinem Oberton der primären Töne zusammenfallen, wenn nicht einer der primären Töne selbst ein Oberton des andern ist. Denn wenn m und n die Schwingungszahlen der primären Töne sind, so kann die Schwingungszahl des Summationstons $m+n$ kein Multiplum von m oder n seyn, wenn nicht m selbst ein Multiplum von n, oder n ein solches von m ist. Zweitens ist auch keine Täuschung durch Differenztöne der höheren Obertöne zu fürchten, weil es leicht gelingt, die Summationstöne eben so stark oder stärker zu erhalten, als die ersten und stärksten Obertöne, so dafs sie jedenfalls viel stärker werden als die Differenztöne dieser letzteren.

Recht gut hört man die Summationstöne bei Orgelpfeifen, namentlich, wenn man das Ohr den beiden Mundstücken der Pfeifen nähert. Man gebe erst den höheren der beiden Töne an, welche man combiniren will; indem man dann den tieferen auch beginnen läfst, hört man einen noch höheren, den Summationston hinzukommen. Auch die Physharmonika läfst die Summationstöne gut hören, wenn man starken Wind giebt. Von allen aber die beste Gelegenheit gewährt die von Dove [1]) beschriebene mehrstimmige Sirene, an welcher die Combinationstöne überhaupt so laut hervortreten, wie an keinem andern Instrumente. An ihr sind auch die Summationstöne so laut und auffallend, dafs sie gleichsam die Oberstimme des gehörten Accordes bilden, und sich auch ungeübten Ohren leicht bemerklich machen. Sie sind es auch, die die Accorde der Sirene häufig so rauh und mifstönend machen, weil sie meistens nicht in der Harmonie des Duraccords bleiben, wie diefs bei den Differenztönen der consonirenden Intervalle gewöhnlich der Fall ist.

Der Summationston der Octave, C und c, ist die Quinte des höheren Tons g. Selbst in diesem Falle, wo der zweite Oberton des C mit dem Summationstone zusammenfällt, kann man sich überzeugen, dafs ein Summationston da ist. Wenn man nämlich zuerst C angiebt, hört man anfangs schwach dessen zweiten Oberton g; sobald man nun aber daneben auch c angiebt, wird dieses g viel stärker als vorher, obgleich c keinen entsprechenden Oberton hat.

Neben der Quinte CG hört man, wie oben schon angegeben ist, die Decime des Grundtons, nämlich e. Es wird dadurch der Durdreiklang vollständig.

Zur grofsen Sexte $Ge\,(3:5)$ kommt c_1 (8) die kleine Sexte des höheren Tons. Der Differenzton ist C; so wird auch hier durch die Combinationstöne der Duraccord ergänzt.

Zur Quarte $Gc\,(3:4)$ kommt die etwas vertiefte kleine Septime b (7) des höheren Tones.

Zur grofsen Terz $CE\,(4:5)$ kommt die None des Grundtons d (9), welche den Eindruck des Duraccordes schon erheblich stört, wenn sie deutlich gehört wird.

Zur kleinen Terz $EG\,(5:6)$ kommt der Ton 11, welcher zwischen f und fis liegt, und die Harmonie in sehr unangenehmer Weise stört.

Einen eben so unangenehmen Mifsklang giebt bei der

1) Diese Annalen Bd. LXXXII, S. 596.

kleinen Sexte *Ec* (5 und 8) der Summationston 13 zwischen *b* und *h*. Auf der mehrstimmigen Sirene, wo die Combinationstöne so stark hervortreten, sind deshalb die grofse und kleine Terz, die kleine Sexte und alle Accorde, in denen sie vorkommen, sehr mifstönig, während die Octave, Quinte, Quarte und grofse Sexte einen sehr reinen Wohlklang geben, der durch die hinzukommenden die Harmonie ausfüllenden Combinationstöne noch gewinnt. Ich bemerke hierbei, dafs die bei der Quarte vorkommende etwas vertiefte kleine Septime, deren Schwingungszahl zu der des Grundtons im Verhältnifs von 7 : 4 steht, dem Ohre durchaus den Eindruck einer Consonanz macht.

Endlich war ich noch im Stande neben den bisher erwähnten Summationstönen bei der Sirene Summationstöne zweiter Ordnung schwach aber deutlich zu hören. Sind p und q die Schwingungszahlen der primären Töne, so ist die Schwingungszahl dieses zweiten Summationstons $2p+q$. Ich konnte wahrnehmen neben zwei Sirenentönen vom Schwingungsverhältnifs

2	zu	3	den	Ton	$2.2+3=7$ und
			»	»	$2.3+2=8$
3	»	4	»	»	$2.3+4=10$
5	»	6	»	»	$2.5+6=16$
4	»	5	»	»	$2.5+4=14$.

In jedem dieser Fälle hätten zwei Töne dieser Art, wie bei der Quinte gehört werden müssen, nämlich neben den Tönen 10, 16 und 14 noch 11, 17 und 13. Indessen ist es schwer die Aufmerksamkeit auf einen schwachen Ton zu lenken, der aufserhalb der musikalischen Tonleiter liegt, und dessen Höhe man sich nicht durch Auffassung einer bestimmten musikalischen Relation zu den übrigen Tönen zu fixiren weifs. Ich glaubte mitunter einen Augenblick die unharmonischen Töne zu hören, aber das Ohr lenkte immer so schnell wieder auf die nahe liegenden harmonischen ein, dafs ich mich der Höhe der ersteren nicht bestimmt versichern konnte.

3. Theorie der Combinationstöne.

Die bisher von Chladni[1]), Lagrange[2]), Th. Young[3]), Hällström und Roeber aufgestellten Ansichten über die Entstehung der Combinationstöne, obgleich sie sich in Einzelheiten unterscheiden, haben doch mehrere wesentliche Züge gemeinsam. Alle nehmen nämlich an, dafs eine ungestörte Superposition der Wellensysteme, welche den gleichzeitig erklingenden primären Tönen angehören, in der Luft und den schallleitenden Körpern überhaupt stattfinde, d. h. dafs bei gleichzeitig erklingenden Tönen die Bewegung jedes schwingenden Theilchens genau die Resultante derjenigen Bewegungen sey, welche jeder einzelne Ton für sich hervorrufen würde.

Wenn m und n zwei ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, und die Schwingungszahl des einen primären Tones mf, die des anderen nf ist, so wird die resultirende Luftbewegung periodisch, und die Zahl ihrer Perioden in der Sekunde wird gleich f seyn. Wir wissen nun, dafs eine jede regelmäfsig wiederkehrende periodische Bewegung der Luft, wenn die Zahl f der gleichen Perioden in der Sekunde grofs genug ist, in dem Ohre im Allgemeinen die Empfindung der Töne von f, $2f$, $3f$ u. s. w. Schwingungen, und zwar einiger oder aller von ihnen, hervorrufen kann. In der That gehören nun auch die Combinationstöne, welche man in einem solchen Falle hört, der Reihe der Töne von f, $2f$, $3f$ u. s. w. Schwingungen an. Wenn es sich nun aber weiter darum handelte zu bestimmen, welche von diesen Tönen, und wie stark die einzelnen, wirklich in einem gegebenen Falle gehört werden, so würde man vor allen Dingen haben suchen müssen, die Frage zu entscheiden, nach welchem Gesetze sich das Ohr eine solche periodische Luftbewegung in einzelne, einzelnen Tonempfindungen entsprechende, Theile zerlegt. Indessen hat man sich bei den Untersuchungen über Combinations-

1) Akustik, Leipzig 1802, S. 207.

2) *Misc. taurin. T. I, p.* 103 *bis* 105.

3) *Philos. Transact.* 1800, *T. I, p.* 130.

töne meist mit unbestimmteren Vorstellungen über die Rolle, welche das Ohr dabei spielt, begnügt, und erst später ist diese Frage, wenn auch nicht mit specieller Beziehung auf die Combinationstöne, Gegenstand des Streites zwischen G. S. Ohm und A. Seebeck gewesen. Sie ist offenbar von fundamentaler Wichtigkeit für die ganze Lehre von den Gehörempfindungen, und gerade die Erscheinungen der Combinationstöne schienen wichtige Entscheidungspunkte abgeben zu können.

G. S. Ohm [1]) hat bekanntlich eine bestimmte Annahme über die Art, wie das Ohr die periodischen Luftbewegungen in einzelne Töne zerlegt, aufgestellt, eine Annahme, die stillschweigend wohl schon vor ihm von den meisten mathematischen Physikern, die akustische Probleme behandelten, gemacht worden war. Er nimmt nämlich an, dafs das Ohr in seiner Empfindung die Luftbewegung genau eben so in einfache Schwingungsbewegungen (nach der oben S. 501 gegebenen Definition) zerlege, wie es der Mathematiker mittels der Sätze von Fourier in der Rechnung thut, und dafs das Ohr den einer jeden solchen einfachen Schwingungsbewegung entsprechenden Ton hört. Dieses von Ohm ausgesprochene Gesetz scheint mir in der That die aller auffallendste Bestätigung zu erhalten durch die Genauigkeit, mit welcher ein geübtes Ohr die theoretisch geforderten Töne zu hören im Stande ist. Ein auffallendes Beispiel, welches schon Th. Young [2]) besprochen hat, giebt die Bewegung der Saiten, deren Gesetze gut genug bekannt sind, um sie vollständig berechnen zu können. Wenn man eine Saite mit einem spitzen Stift seitwärts zieht, und dann von der Spitze abgleiten läfst, so dafs sie zu tönen anfängt, so kann man in dem Moment des Anfangs der Bewegung annehmen, dafs die Geschwindigkeit aller Theile der Saite gleich Null ist, ihre Gestalt aber aus zwei geraden Linien besteht, die an der Berührungsstelle einen Winkel bilden. Daraus berechnet

1) Diese Annalen Bd. LIX, S. 513.

2) *Phil. Transact.* 1800, *T. I*, *p.* 137.

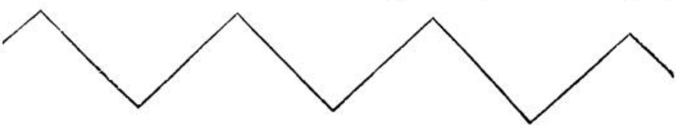
sich dann die ganze Bewegung der Saite nach bekannten Regeln. Ist l die Länge der Seite, T die Schwingungsdauer, y die Elongation des um x von der Mitte entfernten Punktes der Saite zur Zeit t, so ist

$$y = A\left\{\cos.\frac{\pi x}{l}\sin.\frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{9}\cos.\frac{3\pi x}{l}\sin.\frac{6\pi t}{T} + \frac{1}{25}\cos.\frac{5\pi x}{l}\sin.\frac{10\pi t}{T} + \text{etc.}\right\}.$$

Wenn der Grundton tief ist, hört ein etwas geübtes Ohr alle in dieser Reihe enthaltenen Obertöne selbst bis zum elften Tone der Saite, entsprechend dem Gliede

$$\frac{A}{121}\cos\frac{11\pi x}{l}\sin\frac{22\pi t}{T},$$

dessen Amplitude nur der 121ste Theil von der des Grundtons ist. Nehmen wir an, die letztere sey ein halber Zoll in der Mitte der Saite, was bei hörbaren Tönen vielleicht vorkommen kann, so würde die Amplitude des elften Tones $\frac{1}{20}$ Linie, also dem Auge nicht mehr wahrnehmbar seyn. Das Ohr unterscheidet demnach in diesem Falle die kleinen Glieder, die in der Bewegung enthalten sind, genauer als das Auge. Man bedenke ferner, dafs es in diesem Falle gar keinen Sinn hat von einer Schwingung zu reden, deren Periode die Dauer von $\frac{1}{11}T$ hat, aufser insofern man die Bewegung in eine Fourier'sche Reihe auflöst. Denn in Wahrheit findet sich in der Gesammtbewegung der einzelnen Saitenpunkte nichts, was in $\frac{1}{11}$ der Schwingungszeit periodisch wiederkehrte. Die Bewegung des Mittelpunkts der Saite wird nach Young als Function der Zeit durch eine Curve von der Form 1 dargestellt, die Bewegung

1. 

eines jeden anderen Punktes der Saite durch eine Curve ähnlich 2.

2. 

Erst wenn man die ersten neun Glieder der Fourier'schen Reihe von der Bewegung abgezogen hat, entsteht ein Rest, der innerhalb einer Wellenlänge des Grundtons etwas von einer elfmaligen periodischen Wiederkehr ähnlicher Theile zeigt. Th. Young beweist ferner, dafs wenn man die Saite in einem der Knotenpunkte ihrer Obertöne anschlägt, das diesem Obertone entsprechende Glied der Fourier'schen Reihe wegfällt. In diesem Falle verschwindet auch dem Ohre der entsprechende Oberton, was wenigstens nicht regelmäfsig der Fall seyn könnte, wenn etwa das Ohr die Gesammtbewegung der Luft in andere periodische Glieder als die der Fourier'schen Reihe zerlegte.

Gegen die Annahme von Ohm hat A. Seebeck[1]) einen Streit geführt, der leider durch den Tod der beiden ausgezeichneten Physiker beendigt worden ist. Seine Einwände sind meist von der Schwierigkeit hergenommen, welche das Ohr findet, die theoretisch geforderten Obertöne wahrzunehmen, so wie davon, dafs in vielen Fällen ein Ton durch Verstärkung seiner Obertöne stärker wird.

Indessen glaube ich, dafs wenn man in diesem Falle genau unterscheidet, was der sinnlichen Empfindung des Hörnerven, und was der physischen Thätigkeit angehört, die von ihm gefundenen Schwierigkeiten verschwinden. Wir wissen, dafs fast alle unsere Tonwerkzeuge zusammengesetzte Töne erzeugen, in denen der einfache Grundton immer mehr oder weniger stark von gewissen Obertönen begleitet ist, meist aber so, dafs der Grundton an Stärke überwiegt. Wir beurtheilen deshalb auch die Höhe des ganzen zusammengesetzten Tones nur nach der Höhe des Grundtons. Im Sinne der Ohm'schen Theorie müssen wir vermuthen, dafs die Klangverschiedenheiten solcher Töne, welche nicht discontinuirliche Bestandtheile enthalten, von der verschiedenen Stärke ihrer Obertöne herrühren. Ich will mir deshalb hier erlauben, um die Begriffe schärfer

1) Ohm, diese Annalen Bd. LIX, S. 513; Bd. LXII, S. 1. Seebeck, ebendaselbst Bd. LX, S. 449; Bd. LXIII, S. 353 und 368. Repert. d. Physik Bd. VIII, Abschn. XXI, S. 1.

herauszustellen, den zusammengesetzten Ton eines musikalischen Instruments *Klang* zu nennen, und den Namen des *Tones* nur auf einfache Töne anzuwenden. Ein *Klang* wäre danach also eigentlich ein Accord mit überwiegendem Grundton, seine Stärke würde gleich der Summe der Stärke der einzelnen in ihn eintretenden Töne seyn, seine Höhe gleich der Höhe seines Grundtons. Das Ohr ist nun gewöhnt, die Klänge der musikalischen Instrumente, der menschlichen Stimme u. s. w. immer in derselben Zusammensetzung wiederkehrend zu hören, so daſs sie ihm zu bestimmten und bekannten Sinneswahrnehmungen werden, über deren Zusammensetzung zu reflectiren es keine Veranlassung hat, eben so wenig, wie wir uns für gewöhnlich klar machen, daſs die sinnliche Anschauung eines körperlich ausgedehnten Gegenstandes aus zwei verschiedenen Netzhautbildern beider Augen zusammengesetzt ist. Wir beachten die Sinnesempfindungen im gewöhnlichen Gebrauche unserer Sinne ja überhaupt nur so weit, als sie uns dienen Gegenstände und Ereignisse der Auſsenwelt zu erkennen, und vernachlässigen, was dazu unnöthig ist, in solchem Grade, daſs eine besondere, oft schwierige Uebung der Aufmerksamkeit nöthig ist, um dergleichen wahrzunehmen. Ich erinnere an die Doppelbilder, die Erscheinungen des blinden Flecks. So ist uns ein gewisser zusammengesetzter Ton das ausreichende sinnliche Zeichen für die Anwesenheit eines gewissen tönenden Körpers, und insofern von Interesse. Die Art seiner Zusammensetzung dagegen interessirt erst den Physiker, und dieser muſs für die Wahrnehmung der Obertöne seine Aufmerksamkeit in ähnlicher Weise künstlich unterstützen, wie für die Wahrnehmung der Doppelbilder und des blinden Flecks. Ich finde, daſs für die Wahrnehmung der Obertöne keineswegs ein besonders geübtes musikalisches Gehör nöthig ist, denn es hören sie auch Personen von geringer musikalischer Uebung, wenn man nur passende Mittel anwendet, ihre Aufmerksamkeit auf den Ton zu lenken, der gehört werden soll. Ein geübtes musikalisches Ohr hat nur den Vorzug zu wissen, wie die

Octave, Duodecime u. s. w. des angegebenen Tones klingen mufs, und daher den betreffenden Ton ohne weitere Hülfe finden zu können. Sonst kann man sich helfen, wenn man kurz vorher den zu hörenden Oberton auf dem Klaviere angiebt. Bei aushaltenden Klängen ist es ein sehr vortheilhaftes Mittel, während sie erklingen, den Oberton auf dem Klaviere anzugeben und auf sein Verklingen zu achten. Existirt nun derselbe Ton in der angegebenen Klangmasse, so scheint der Klavierton nicht vollständig zu verklingen, sondern das Ohr wird von ihm unmittelbar auf den entsprechenden Oberton übergeleitet, und hält diesen für die Fortsetzung jenes. Nach dieser Methode hört man z. B. die Obertöne der Orgelpfeifen, der menschlichen Stimme, der Sirenentöne sehr gut.

Ein zusammengesetzter Klang erscheint uns also allerdings als eine einfache Sinnesempfindung, aber wir sind im Stande durch geeignete Leitung unserer Aufmerksamkeit verschiedene sinnliche Empfindungen in ihm zu entdecken, deren Verschmelzung und Vereinigung also, da sie durch die Aufmerksamkeit zu lösen ist, auch nicht durch die Thätigkeit des Nerven, sondern selbst nur durch physische Thätigkeit herbeigeführt seyn kann. Seebeck behauptet, dafs Ohm's Definition des Tones zu eng sey, dafs aufser der dem Grundton entsprechenden einfachen Wellenbewegung auch noch andere Glieder der Fourierschen Reihe die Empfindung des Grundtons verstärken könnten. Diefs erscheint ganz richtig, wenn er unter Ton das versteht, was wir eben mit dem Namen Klang bezeichnet haben, und was für die nur durch die Uebung des gewöhnlichen Lebens geschulte Aufmerksamkeit allerdings ein sinnliches Ganze ist, während die Ohm'sche Definition des Tons in der That das zu bezeichnen scheint, was in der Thätigkeit des Gehörnerven das einfachste Element ist [1]).

1) Ich bemerke hier noch, dafs in einzelnen von den Versuchen, die Seebeck in dieser Streitsache angestellt hat, wo er in eine Sirenenscheibe von zwei Seiten her angeblasen hat, die Berechtigung der von ihm ge-

Wenn wir nun Ohm's Definition des Tones auf die Entstehung der Combinationstöne anwenden, so ergiebt sich leicht, dafs ihr entsprechend Combinationstöne so lange gar nicht vorkommen können, als eine ungestörte Superposition der primären Tonwellen in der Luft stattfindet. Denn da jede periodische Function der Zeit nur in einer einzigen Weise durch eine Fourier'sche Reihe ausgedrückt werden kann, so kann auch die zusammengesetzte Luftbewegung mehrerer primärer Töne nur in dieselben einfachen Wellen wieder zerlegt werden, aus denen sie zusammengesetzt ist. Aber auch, wenn es gelänge, statt der von Ohm angenommenen Form der Luftbewegung für einen einfachen Ton eine andere bestimmte Form zu finden, welche die Phänomene der Obertöne genügend zu erklären zuliefse: auch dann würde doch immer die zusammengesetzte Luftbewegung vom Ohr nur wieder in dieselben den primären Tönen entsprechenden Glieder zu zerlegen seyn, aus denen sie entstanden war. Nehmen wir aber wie Seebeck an, dafs dem einfachen Tone viele verschiedene Formen der Luftbewegung entsprechen könnten, so würde es ganz unbestimmt bleiben, in welche Glieder das Ohr die durch zwei Töne erzeugte periodische Luftbewegung zerlegen. Bei einer solchen unbestimmten Annahme würde also wohl die allgemeine Möglichkeit offen gehalten werden, dafs das Ohr Combinationstöne hörte, deren Schwingungszahl dem gemeinschaftlichen Maafse der Schwingungszahlen der primären Töne gleich, oder ein Multiplum derselben wäre, indessen würde doch immer noch

zogenen Schlüsse zweifelhaft bleibt, weil die Schwingungsrichtung der Lufttheilchen bei der Ankunft der Wellen am Ohre möglicher Weise eine ganz andere seyn konnte, als er voraussetzt, wie er denn selbst in seinem Streite mit Savart (diese Annalen Bd. LIX, S. 177, Bd. LXVII, S. 145, Bd. LXVIII, S. 465) nachgewiesen hat, dafs die Schwingungsrichtung sich ändert, wenn sich die Fortpflanzungsrichtung ändert. Er giebt den Wellen, welche durch Anblasen in entgegengesetzter Richtung erzeugt waren, entgegengesetzte Vorzeichen, während sie an einzelnen Stellen des Raums parallel geworden seyn konnten und gleiche Vorzeichen haben mufsten.

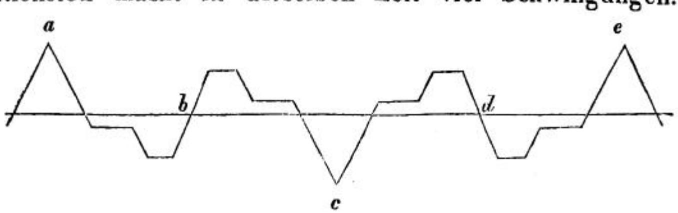
die Ursache zu finden seyn, welche das Ohr bestimmte, diesen oder jenen Ton wirklich zu hören. Aufserdem sehe ich nicht ein, wie diese Hypothese in Bezug auf irrationelle Tonverhältnisse zu anderen Folgerungen führen sollte, als die W. Weber daraus gezogen hat, wonach die angenäherten Verhältnisse der Kettenbrüche zu benutzen wären, um die Höhe der Combinationstöne zu finden. Aber gerade diese Folgerung stimmt nicht mit der Erfahrung überein.

Noch habe ich eine bestimmtere Annahme zu erwähnen, welche Young andeutet, und welche auch Hällström und Roeber benutzt haben; sie gründet sich auf die scheinbare Analogie der Stöfse zweier nahe gleich hoher Töne und der Combinationstöne. Die Zahl der Stöfse ist nämlich ebenso, wie die Schwingungszahl des Differenztones erster Ordnung, gleich der Differenz der Schwingungszahlen der primären Töne. Ist diese Differenz klein, so ist der Combinationston unhörbar tief, dagegen sind die Stöfse hörbar. Ist die Differenz grofs, so kann das Ohr die Zahl der Stöfse nicht mehr fassen, dagegen hört es den Combinationston. Die Stöfse entstehen bekanntlich dadurch, dafs die Wellensysteme zweier nicht genau gleich hoher Töne abwechselnd mit gleichen und entgegengesetzten Phasen zusammenfallen, und sich demgemäfs abwechselnd verstärken und schwächen. Jeder Stofs entspricht einer vorübergehenden Verstärkung der Luftvibrationen, umfafst also eine Reihe hin- und hergehender Bewegungen der Lufttheilchen. Young nahm nun an, dafs solche Stöfse zweier schwebenden Töne ebenso wie die einfachen Luftstöfse z. B. der Sirene, wenn sie schnell genug einander folgen, dem Ohre die Empfindung eines Tones geben könnten, und solch ein Ton sey der Combinationston. Diese Hypothese scheint sich viele Freunde erworben zu haben. Aber abgesehen davon, dafs sie den Ursprung der Summationstöne nicht erklärt, und nicht erklärt, warum die Stöfse bei den allerleisesten, die Combinationstöne nur bei starken Tönen hörbar sind, so pafst sie ganz allein auf solche Fälle, wo die Differenz der

Schwingungszahlen klein ist gegen die Schwingungszahlen selbst.

Es kommt bei dieser Annahme doch wesentlich darauf an, dafs sich nach Ablauf jeder Schwingungsdauer des Combinationstons ähnliche Eindrücke, nämlich die eines verstärkten Tones, für das Ohr wiederholen sollen. Wenn ein Ton A nun 100 Schwingungen macht, während der andere B 101 ausführt, und im Anfang der Bewegung zwei positive Maxima von A und B zusammenfallen, so wird das 100te Maximum von A mit dem 101ten von B zusammenfallen, und ein Maximum von doppelter Stärke erzeugen, aber auch das 101, 102, 103te Maximum von A wird genau genug mit dem 102, 103, 104ten von B zusammenfallen, um nahe ebenso starke zusammengesetzte Maxima zu geben. Auch wird es für den Grad der Tonverstärkung gleichgültig seyn, ob die positiven Maxima nach 100 Schwingungen von A und 101 von B, oder die negativen Maxima nach $99\frac{1}{2}$ und $101\frac{1}{2}$ Schwingungen beziehlich von A und B, oder die Nullpunkte nach $99\frac{3}{4}$ und $100\frac{3}{4}$ Schwingungen es sind, die genau zusammenfallen. Immer wird die Stärke der doppelten Maxima und Minima, und die Gestalt des zusammengesetzten Wellenzuges fast genau dieselbe seyn; aber, und das ist wohl zu beachten, diese Aehnlichkeit entsteht nur daher, dafs die Differenz der Schwingungsdauer gegen diese selbst sehr klein ist.

Jetzt wollen wir die entgegengesetzte Annahme machen. Die Curve 3 stellt die Resultante zweier Wellenzüge von gleicher lebendiger Kraft vor, deren jeder eine Gestalt wie die Curve 1 S. 524 hat, und deren einer zwischen a und e drei, der andere sieben Schwingungen macht. Ihr Combinationston macht in derselben Zeit vier Schwingungen.

3. 

Wenn wir also die Entfernung *ae* in vier gleiche Theile *ab*, *bc*, *cd*, *de* theilen, so müfsten zur Erzeugung des Combinationstons gleichartige Eindrücke auf das Ohr in folgenden Momenten hervorgebracht werden 1) durch die positiven gröfsten Maxima *a* und *e*; 2) durch den Nullpunkt der Curve *b*; 3) durch das negative Maximum *c*; 4) durch den Nullpunkt *d*. Hier kann von einer Aehnlichkeit dieser Curventheile keine Rede mehr seyn, und so scheint mir die gegebene Erklärung hier ihre Bedeutung zu verlieren. Man hat sie auf eine Eigenthümlichkeit der zusammengesetzten Wellenbewegung gegründet, welche unter den Umständen, wo Stöfse eintreten, bei verhältnifsmäfsig geringer Differenz der Schwingungszahlen stattfindet, aber gerade unter den Umständen, wo Combinationstöne eintreten, bei verhältnifsmäfsig grofser Differenz der Schwingungszahlen nicht mehr vorhanden ist.

Durch diese Ueberlegungen auf das Ungenügende der bisherigen Theorien aufmerksam gemacht, glaubte ich einen Fingerzeig, der auf den richtigen Weg führen konnte, in dem bisher wenig beobachteten Umstande zu entdecken, dafs die Combinationstöne nur bei starken primären Tönen auftreten, und ihre Intensität in einem viel schnelleren Verhältnisse zu wachsen scheint, als die der primären Töne. Danach glaubte ich vermuthen zu dürfen, dafs sie bei Wellenzügen von unendlich kleinen Amplituden, wie man theoretisch die Schallwellen gewöhnlich annimmt, nicht vorkommen möchten, sondern nur bei solchen von endlichen Amplituden.

Die daraus im Folgenden entwickelte Theorie führte mich auf die Entdeckung der Summationstöne, welche sowohl in auffallender Weise die Richtigkeit der neuen Theorie bestätigen, als auch eine von den früheren Theorien aus unerklärbare Erscheinung seyn möchten.

Während man bisher immer angenommen hat, dafs verschiedene Tonwellenzüge, welche gleichzeitig in der Luft oder einem andern elastischen Mittel erregt werden, sich einfach superponiren, ohne gegenseitig Einflufs auf einander zu haben, und man diese Annahme durch die bekannten Erfahrungen der Möglichkeit, gleichzeitig erklingende Töne verschiedener Instrumente oder menschlicher Stimmen, jede mit ihrer besonderen Tonhöhe und ihrer Klangfarbe, neben einander zu erkennen, hinreichend gerechtfertigt glaubte: so war doch andrerseits zu bedenken, daſs die theoretische Mechanik eine solche ungestörte Superposition nur für den Fall *unendlich kleiner* Schwingungen nachwies, während aus den Bewegungsgleichungen der Luft gleichzeitig ersehen werden konnte, daſs bei Wellenzügen von ~~un~~endlicher Gröſse der Amplituden eine solche ungestörte Superposition nicht stattfinden kann. Die theoretische Untersuchung der letztgenannten Fälle ergab mir nun, daſs verschiedene einfache Schwingungsbewegungen eines elastischen Körpers sich ungestört superponiren, so lange die Amplituden der Schwingungen so klein sind, daſs die durch die Verschiebungen hervorgebrachten Bewegungskräfte diesen Verschiebungen selbst merklich proportional sind. *Wenn aber die Amplituden der Schwingungen so groſs werden, daſs die Quadrate der Verschiebungen einen merklichen Einfluſs auf die Gröſse der Bewegungskräfte erhalten, so entstehen neue Systeme einfacher Schwingungsbewegungen, deren Schwingungsdauer derjenigen der bekannten Combinationstöne entspricht.*

Der einfachste Fall ist der, wo wir nur die Bewegungen eines einzelnen beweglichen Massenpunkts zu betrachten haben, der durch elastische Kräfte in einer bestimmten Gleichgewichtslage festgehalten wird, und den Tonwellenzüge des umgebenden elastischen Mittels erschüttern. Es ist dieser Fall den Verhältnissen in unserem Ohre einigermaſsen ähnlich. Der bewegliche Massenpunkt entspricht dem Stiele des Hammers, das Paukenfell einer elastischen Feder, die ihn in einer bestimmten Stellung festzuhalten sucht.

Die Masse des beweglichen Punktes sey m, seine Entfernung von der Gleichgewichtslage zur Zeit t sey x. Die Kraft k, welche ihn in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, sey abhängig nicht blos von der ersten, sondern auch von der zweiten Potenz der Elongation, also

$$k = ax + bx^2.$$

Aufserdem mögen zwei Schallwellenzüge den beweglichen Massenpunkt treffen, und auf ihn einen periodisch veränderlichen Druck $f \sin(pt)$ und $g \sin(qt+c)$ ausüben. Die Bewegungsgleichung des Massenpunktes ist alsdann:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} = ax + bx^2 + f\sin(pt) + g\sin(qt+c) \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Diese Gleichung kann man durch eine Reihe integriren, indem man darin setzt:

$$x = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \text{etc.} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} f = \varepsilon f_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g = \varepsilon g_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (2_a)$$

und die mit gleichen Potenzen von ε multiplicirten Glieder einzeln gleich Null setzt. Also:

$$ax_1 + m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -f_1\sin(pt) - g_1\sin(qt+c) \quad \ldots\ldots \quad (3_a)$$

$$ax_2 + m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -bx_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3_b)$$

$$ax_3 + m\frac{d^2x_3}{dt^2} = -2bx_1x_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3_c)$$

etc.

Das vollständige Integral der Gleichung (3_a) ist:

$$x_1 = A\sin\left(t\sqrt{\frac{a}{m}} + h\right) + u\sin(pt) + v\sin(qt+c) \quad \ldots \quad (5)$$

worin A und h die beiden Integrationsconstanten sind, u und v aber folgende Werthe haben:

$$u = \frac{f_1}{mp^2 - a} \text{ und } v = \frac{g_1}{mq^2 - a}.$$

Das erste Glied x_1 der Reihe 2 entspricht also drei Tönen, von denen der erste die Schwingungszahl $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{m}}$ hat, und dem eignen Tone des schwingenden Punktes entspricht. Dieser Ton, wenn er auch im Anfange der Bewegung vorhanden seyn möchte, erlöscht jedenfalls schnell.

Wir können also in unserem Falle A gleich Null setzen, und haben dann:

$$x_1 = u \sin(pt) + v \sin(qt + c) \quad . \quad . \quad (4)$$

Dieses erste Glied unserer Reihe läfst erkennen, dafs der schwingende Punkt zunächst die beiden erregenden Töne wiedergiebt. Dieses Glied würde das einzige der Reihe seyn, wenn die Kraft nicht vom Quadrat der Entfernung abhängig, also $b=0$, oder x so klein wäre, dafs bx^2 gegen ax vernachlässigt werden könnte. In diesem Gliede findet noch eine ungestörte Superposition der Schwingungen statt. Ihre Amplituden u und v fallen gleich grofs aus, gleichviel ob der andere Ton vorhanden ist oder nicht.

Setzt man den Werth x_1 aus der Gleichung 4 in 3, so erhält man:

$$\begin{aligned} a x_2 + m\frac{d^2x}{dt^2} &= -b\left\{u^2\sin^2(pt) + v^2\sin^2(qt+c)\right. \\ &\qquad \left. + 2uv\sin(pt)\sin(qt+c)\right\} \\ &= -b\left\{\tfrac{1}{2}(u^2+v^2) - \tfrac{1}{2}u^2\cos(2pt)\right. \\ &\qquad - \tfrac{1}{2}v^2\cos(2qt+2c) + uv\cos[(p-q)t-c] \\ &\qquad \left. - uv\cos[(p+q)t+c]\right\}. \end{aligned}$$

Das Integral dieser Gleichung ist folgendes, wenn man den eigenen Ton des schwingenden Punktes wieder fortläfst:

$$\begin{aligned} x_2 = &-\frac{b}{2a}(u^2+v^2) = \frac{bu^2}{2(4mp^2-a)}\cos)2pt \\ &- \frac{bv^2}{2(4mq^2-a)}\cos 2(qt+c) + \frac{buv}{m(p-q)^2-a}\cos[(p-q)t-c] \\ &+ \frac{buv}{m(p+q)^2-a}\cos[(p+q)t+c] \quad . \quad . \quad . \quad (5). \end{aligned}$$

Das zweite Glied unserer Reihe liefert uns also Töne von den Schwingungszahlen $\frac{2p}{2\pi}$, $\frac{2q}{2\pi}$, $\frac{p-q}{2\pi}$ und $\frac{p+q}{2\pi}$. Die ersten beiden sind höhere Nebentöne der primären Töne $\frac{p}{2\pi}$ und $\frac{q}{2\pi}$, der dritte ist der Differenzton erster Ordnung, und der vierte der Summationston erster Ordnung. Die

Amplitude der beiden Combinationstöne enthält als Factor das Product uv der Amplituden der primären Töne. Sind die letzteren also sehr klein, so ist die Amplitude der Combinationstöne eine kleine Gröfse zweiter Dimension, und wachsen u und v gleichmäfsig, so wächst uv im quadratischen Verhältnisse. Daraus folgt mit der Erfahrung übereinstimmend, dafs bei sehr schwachen primären Tönen die Combinationstöne unhörbar seyn müssen, bei starken primären Tönen die letzteren dagegen in einem stärkeren Verhältnisse wachsen müssen.

Den eigenen Ton des schlaff gespannten Trommelfells in seiner Verbindung mit den trägen Massen der Gehörknöchelchen und des Labyrinthwassers dürfen wir wohl als ziemlich tief ansehen, so dafs, wenn wir unsere Rechnung auf den Trommelfellapparat anwenden wollen, folgen würde, dafs

$$\sqrt{\frac{a}{m}} < p - q < p + q$$

oder

$$a < m(p-q)^2 < m(p+q)^2$$

und

$$\frac{buv}{m(p-q)^2 - a} > \frac{buv}{m(p+q)^2 - a},$$

dafs also die Amplitude des Differenztones gröfser ist als die des Summationstons. Vernachlässigen wir die Gröfse a, so würden sich bei der Quinte die Amplituden der beiden Combinationstöne zu einander verhalten wie $(3+2)^2:(3-2)^2 = 25:1$, bei der Quarte wie $49:1$, bei der Terz wie $81:1$. Wirklich finden wir, dieser Berechnung, entsprechend in der Erfahrung die Intensität des Summationstons stets sehr viel geringer als die des Differenztons.

Das dritte Glied der Reihe enthält die Töne, welche in 2π Sekunden $3p$, $3q$, $2p+q$, $2p-q$, $p+2q$, $p-2q$, p und q Schwingungen machen. Unter diesen sind die Töne $p \pm 2q$ und $q \pm 2p$ Combinationstöne zweiter Ordnung. Ihre Amplitude ist eine kleine Gröfse dritter Dimension. Ebenso läfst sich übersehen, dafs das $n$te Glied der Reihe Combinationstöne $n$ter Ordnung liefern wird, deren Amplitude eine kleine Gröfse $n$ter Dimension seyn wird.

Zu bemerken ist noch, dafs bei einem einzelnen schwingenden Massenpunkte das Quadrat der Elongationen nur dann Einflufs auf die Bewegungen haben kann, wenn er unsymmetrisch befestigt ist. Denn in der oben gemachten Annahme für die Gröfse der elastischen Kraft k, welche den Massenpunkt in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt,

$$k = ax + bx^2$$

liegt *implicite* die Bedingung, dafs eine Verschiebung in Richtung der negativen x eine andere elastische Kraft hervorrufe, als eine solche in Richtung der positiven x.

Unter den Theilen im Ohre finden wir nun namentlich das Trommelfell in höchst unsymmetrischer Weise gebildet. Der Stiel des ersten Gehörknöchelchens, des Hammers, ist in dasselbe eingewachsen, und zieht es trichterförmig nach innen. Eben dieser zur Entstehung der Combinationstöne nothwendigen unsymmetrischen Bildung wegen glaube ich annehmen zu dürfen, dafs wenn im Ohre Combinationstöne entstehen, namentlich das Trommelfell dabei betheiligt sey. Die Asymmetrie des Ohres spricht sich auch deutlich aus bei Scheibler's Versuchen über die Schwingungen unrein gestimmter harmonischer Intervalle, welche Versuche, wie ich oben erwähnt habe, auch mit einfachen Tönen gelingen. Es läfst sich aus Scheibler's Bestimmungen der Zahl der Stöfse nachweisen, dafs zwei Schallwellenzüge verschiedene Empfindungen im Ohre erregen, wenn die Elongationen der Lufttheilchen in ihnen in entsprechenden Zeitpunkten gleiche Gröfse, aber entgegengesetzte Richtung haben.

Nimmt man z. B. zwei Gabeln, die genau eine Octave mit einander bilden, und verstimmt die höhere um so viel, dafs sie in der Sekunde eine Schwingung mehr macht als vorher, so hört man beim Zusammenklingen beider Gabeln in jeder Sekunde eine Schwebung. Diese Schwebung giebt sich dem Ohre mehr durch einen Wechsel der Klangfarbe, als durch wechselnde Stärke des Tons zu erkennen. Es klingt ungefähr wie U — E — U — E — U — E u. s. w. Während also die beiden zusammenklingenden Töne zu

Anfang und Ende der Sekunde einen gewissen sinnlichen Eindruck *A* hervorbringen, bringen sie in der Mitte der Sekunde einen anderen sinnnlichen Eindruck *B* hervor. Eine leicht anzustellende Untersuchung der Bewegungsform der Lufttheilchen zeigt nun, dafs der Eindruck *B* in der Mitte der Sekunde einer Form der Schallwellen entspricht, welche das negative Abbild derjenigen ist, die zu Anfang und zu Ende der Sekunde den Eindruck *A* hervorbringt. Fallen z. B. die positiven Maxima des höheren Wellenzuges zu Anfang und Ende der Sekunde abwechselnd auf die positiven und negativen Maxima des tieferen Wellenzuges, so sind es in der Mitte der Sekunde die negativen Maxima des ersten die mit den Maximis des zweiten zusammenfallen, und die zweite Wellencurve bekommt von einem negativen Maximum angefangen ganz dieselbe Gestalt aber entgegengesetzte Lage, wie die erste Wellencurve von einem positiven Maximum angefangen. Daraus geht also hervor, dafs das Ohr von entgegengesetzt gerichteten, aber gleich grofsen Luftbewegungen ungleich afficirt wird.

Aus der gegebenen Entwickelung ergiebt sich, dafs wir den Ursprung der Combinationstöne nicht nothwendig in der Empfindungsweise des Hörnerven zu suchen haben, sondern dafs bei zwei gleichzeitig erklingenden Tönen von gehöriger Stärke den Combinationstönen wirkliche Schwingungen des Trommelfells und der Gehörknöchelchen entsprechen können, welche von dem Nervenapparate in der gewöhnlichen Weise empfunden werden. Danach würden die Combinationstöne nicht eine blofs subjective Existenz haben, sondern würden auch objectiv, wenn auch zunächst nur in den schwingenden Theilen des Ohres selbst bestehen können.

Wir haben die gegebene mechanische Entwickelung zunächst auf die Bewegungen des Apparats der Trommelhöhle bezogen; indessen ist klar, dafs ähnliche Verhältnisse sich auch aufserhalb des Ohres müssen wiederholen können, dafs also auch den Combinationstönen entsprechende Schwingungen ganz unabhängig vom menschlichen

Ohre und aufserhalb desselben unter geeigneten Umständen müssen vorkommen können.

Wir haben ferner nur die Bewegung eines einzelnen von elastischen Kräften festgehaltenen Massenpunktes der Berechnung unterworfen; indessen kann man aus der Analogie leicht schliefsen, dafs ähnliches auch bei Systemen von Massenpunkten, zwischen denen elastische Kräfte wirksam sind, also in elastischen festen oder flüssigen Körpern wird vorkommen können. Die mathematische Untersuchung der nicht unendlich kleinen Schwingungen elastischer Körper ist jedoch sehr weitläufig, und da ich bisher noch über keine Versuche zu berichten habe, zu deren Verständnifs eine ausführliche Kenntnifs der Theorie nothwendig wäre, so möge es hier genügen, anzuführen, was mich die theoretische Untersuchung der Bewegung der Luft in dieser Beziehung gelehrt hat.

Bei der mathematischen Untersuchung über die Schallbewegung in der Luft berücksichtigt man in der Regel nur die Glieder der Gleichungen, welche die ersten Potenzen der Elongationen der Lufttheilchen enthalten und vernachlässigt die höheren Potenzen derselben. Behält man auch die Glieder bei, welche die zweiten Potenzen der Elongationen enthalten, so findet man folgendes:

1) Jeder Punkt der Luftmasse, in welchem die Schwingungen, die einem einzelnen der angegebenen primären Töne angehören, heftig genug werden, wird Centrum von neuen secundären Wellensystemen, welche den harmonischen Obertönen des betreffenden Tones entsprechen.

2) Jeder Punkt der Luftmasse, wo die Schwingungen beider primär angegebenen Töne gleichzeitig hinreichende Gröfse erreichen, wird das Centrum neuer secundärer Wellensysteme, die den Combinationstönen entsprechen, und zwar entstehen daselbst sowohl Differenz- als Summationstöne, erster und höherer Ordnungen.

Wir werden die Bildung von Combinationstönen in der Luftmasse also namentlich dann zu erwarten haben, wenn die Centra der beiden primären Tonwellensysteme nahe an einander liegen, so dafs die zwischenliegende Luftmasse gleichzeitig von beiden Tönen heftig erschüttert wird.

Es ist möglich die objective Existenz von Combinationstönen durch das Mitschwingen dünner Membranen nachzuweisen. Aber nur bei der mehrstimmigen Sirene fand ich bisher die Combinationstöne stark genug für diesen Zweck. Ich spannte über die eine Oeffnung einer cylindrischen Röhre von $1\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser eine dünne Kautschukmembran. Das andere Ende der Röhre war durch einen Deckel mit engerer Oeffnung verschlossen. Wenn man gegen die Ränder dieser Oeffnung blies, konnte man verschiedene Töne erzeugen, wobei die Membran aufgestreuten Sand in verschiedene Klangfiguren ordnete. Der Grundton war e_1; wenn er angegeben wurde, sammelte sich aller Sand am Rande der Membran. Ich brachte nun die Mündung des Rohrs über die Scheibe der mehrstimmigen Sirene, während die Membran nach oben gewendet, und mit Sand bestreut war, und blies dann die Sirene an, so dafs diese allmählich immer schneller rotirte und Töne von wachsender Höhe gab, wobei ich zwei Löcherreihen öffnete. Zuerst tritt alsdann eine Bewegung des Sandes ein, wenn der höhere der beiden angegebenen Töne bis *e* gestiegen ist, so dafs der erste höhere Nebenton des *e* mit dem Tone der Membran zusammenstimmt. Bei weiter steigender Geschwindigkeit der Sirenenscheibe kam die Membran wieder zur Ruhe, und gerieth zum zweiten Male, und zwar in stärkere Bewegung, wenn der Summationston beider Töne bis e_1 gestiegen war. Vermittels der Sandfigur konnte man controliren, dafs die Membran in der That im Tone e_1 mitschwang. Auch stimmt der Summationston niemals mit einem der höheren Nebentöne der primären Töne überein, wenn nicht der eine primäre Ton selbst ein höherer Nebenton des andern ist. Es blieb also kein Zweifel, dafs die Membran durch den Summationston in Schwingung versetzt wurde, und dafs dieser Ton also objectiv vorhanden war.

Es möge hier genügen, durch einen Versuch das Factum festgestellt zu haben, dafs Combinationstöne unabhängig vom menschlichen Ohre entstehen können. Einen anderen Nachweis derselben Thatsache, der in mancher Beziehung noch lehrreicher ist, habe ich mittels einer eigenthümlichen Form der Sirene erhalten. Das neue Instrument und die damit auszuführenden Versuche behalte ich mir indessen vor in einem anderen Aufsatze im Zusammenhange zu beschreiben.

II. *Neue Beobachtungen und Versuche über eine eigenthümliche, noch wenig bekannte Reactionsthätigkeit des menschlichen Auges; vom Dr. J. J. Oppel.*

Auf einer Schweizerreise begriffen, wanderte ich am Abende des 13. Juli 1853 von dem westlichen Ende der Stadt *Schaffhausen* aus am rechten Ufer des Rheins hinab nach dem kaum eine kleine Stunde entfernten Dörfchen *Neuhausen,* um das allbekannte und vielgepriesene Wunderwerk der Gegend, den Rheinfall, in Augenschein zu nehmen.

Gleich beim Austritte aus der Stadt, oder vielmehr noch bei den letzten zu ihr gehörigen Landhäusern und Gärten, wo man den Flufs unmittelbar zur Linken hat, fesseln den Blick des Wanderers die mächtig brausenden und schäumenden *Stromschwellen,* — von den Anwohnern die „*Lechen*" (Lächen?) genannt, — die, durch zackige, bis zur Wasserfläche emporreichende Felsblöcke hervorgerufen, den Lauf des Stromes beunruhigen, und bei günstigem Wasserstande durch ihren in der That schon recht imposanten Anblick gleichsam auf das grofsartigere Schauspiel bei Neuhausen und Lauffen vorbereiten.

Feuerflammen, Wasserfälle, Meereswogen bieten durch