BnF Gallica

Annales de chimie et de physique

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque de Météo-France

BnF Gallica

Annales de chimie et de physique. 1857.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter
utilisationcommerciale@bnf.fr.

Le phosphate de lithine est insoluble comme le phosphate de magnésie.

La magnésie et la lithine ont de petits équivalents, l'un par rapport à la chaux, l'autre par rapport à la soude.

Enfin, il existe de telles analogies entre les réactions des sels de lithine et des sels correspondants de magnésie, qu'on ne connaît qu'un seul moyen de séparer ces deux bases, c'est l'emploi des alcalis caustiques qui précipitent la magnésie sans précipiter la lithine.

En résumé, le lithium me paraît jouer, dans la série des métaux alcalins, le même rôle que le magnésium dans la série des alcalino-terreux.

MÉMOIRE
SUR L'ÉTUDE OPTIQUE DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES;

PAR M. J. LISSAJOUS,
Professeur de Physique au Lycée Saint-Louis.

Mémoire présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 6 avril 1857.

Le Mémoire que j'ai l'honneur de soumettre à l'Académie a pour objet le développement d'une méthode optique propre à l'étude des mouvements vibratoires. Cette méthode, fondée sur la persistance des sensations visuelles, et sur la composition de deux ou plusieurs mouvements vibratoires simultanés, permet d'étudier sans le secours de l'oreille toute espèce de mouvements vibratoires, et par suite toute espèce de sons.

CHAPITRE PREMIER.

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE.

I. — *Moyen de rendre visible le mouvement vibratoire des corps.*

J'ai été conduit à imaginer cette méthode par le désir de rendre les phénomènes vibratoires visibles à tout un audi-

toire. Frappé de l'avantage que présente pour l'enseignement de l'acoustique l'emploi des méthodes de projection, dont M. Paul Desains a tiré un si grand parti dans son cours de physique à la Faculté des Sciences de Paris, j'ai voulu essayer de rendre visible le mouvement oscillatoire des corps vibrants, sans même avoir recours au tracé mécanique des vibrations, comme l'ont fait avec succès Young, Savart, M. Duhamel et M. Wertheim.

J'ai d'abord opéré avec des diapasons, ce petit appareil étant de tous les corps vibrants celui qui est le plus commode à manier ; ce n'était du reste que l'application particulière d'un principe dont la généralité ressortira nettement de ce qui va suivre.

Pour rendre visible, soit directement, soit par projection, le mouvement vibratoire d'un diapason, je fixe à l'extrémité d'une des branches sur la face convexe, *fig.* 1, *Pl. I*, un petit miroir plan en métal M. L'autre branche porte un contre-poids M′, afin que la surcharge soit égale sur les deux branches, ce qui est nécessaire pour que le diapason vibre facilement et longtemps. Je regarde dans ce miroir l'image réfléchie d'une bougie placée à quelques mètres de distance ; puis je fais vibrer le diapason : je vois aussitôt l'image s'élargir dans le sens de la longueur des branches : si je fais alors tourner le diapason autour de son axe, l'apparence change, et j'aperçois dans le miroir une ligne brillante et sinueuse, dont les ondulations accusent par leur forme même l'amplitude plus ou moins grande du mouvement vibratoire.

Si l'on veut agir par projection dans une chambre obscure, on fait tomber sur le miroir un faisceau de lumière solaire, le rayon réfléchi donne sur la muraille ou sur un écran une trace qui s'élargit dans le sens des vibrations dès que l'on ébranle le diapason, et qui se transforme en une ligne sinueuse dès que l'on fait tourner le diapason autour de son axe.

Le même procédé s'applique à des corps vibrants qui, par leur poids et leur disposition, ne se prêtent pas aisément à un déplacement rapide ; il suffit en effet, au lieu de faire tourner le corps, de recevoir le rayon réfléchi par le premier miroir sur un second miroir que l'on fait tourner plus ou moins vite autour d'un axe à la fois perpendiculaire à la direction moyenne du rayon réfléchi, et situé dans le plan même où ce rayon exécute ses vibrations ; on voit ainsi, soit directement dans le miroir mobile, soit par projection sur un écran, la ligne sinueuse qui démontre l'existence du mouvement vibratoire.

Si l'on veut rendre le phénonème plus net et plus brillant, on emploie les dispositions suivantes :

1°. *Par vision directe.* — On prend pour source de lumière une lampe entourée d'une cheminée opaque dans laquelle on a percé un petit trou, et l'on regarde le phénomène à l'aide d'une lunette que l'on a préalablement mise au point, de façon à voir nettement l'image réfléchie avant de donner aucun mouvement à l'appareil.

2°. *Par projection.* — On prend pour source de lumière le soleil ou la lumière électrique que l'on fait passer à travers un diaphragme étroit de forme circulaire O, *fig.* 2, on fait réfléchir sur les miroirs M et *m* le faisceau qui a traversé cette ouverture, puis on le fait passer à travers une lentille L (achromatique s'il est possible), que l'on place de façon à former sur l'écran EF une image I de l'ouverture aussi nette que possible.

L'explication de ces divers phénomènes est des plus simple. Le pinceau de lumière réfléchi par le miroir doit osciller dès que le miroir oscille lui-même ; l'extrémité de ce pinceau doit décrire dans l'œil ou sur l'écran une ligne droite H, *fig.* 3, dont les divers points restent illuminés pendant un certain temps, à cause de la persistance de la sensation dans l'œil. Si la durée de la sensation est supérieure de beaucoup à la durée d'une oscillation complète, la ligne paraît

éclairée dans toute son étendue d'une façon permanente, et elle est nécessairement plus lumineuse aux extrémités H et G, *fig.* 4, où le mouvement de l'image est moins rapide, parce que la somme des ébranlements reçus par l'œil dans le même temps est plus considérable. Si l'on joint au mouvement oscillatoire du miroir un mouvement de rotation autour de son axe, alors l'extrémité du pinceau réfléchi trace une ligne sinueuse S, *fig.* 3, soit dans l'œil, soit sur l'écran.

Les diverses parties de cette ligne deviennent successivement visibles, mais comme la sensation produite dans l'œil ne cesse pas immédiatement, cette ligne paraît illuminée dans une étendue qui dépend de la durée plus ou moins grande pendant laquelle la sensation persiste.

Ce principe peut du reste être mis en jeu de beaucoup de manières différentes, qui se réduisent aux éléments suivants: donner par un moyen quelconque un vif éclat à l'un des points du corps vibrant, de façon que le mouvement de ce point se distingue nettement du mouvement des autres ; secondement combiner le mouvement oscillatoire du point avec un déplacement continu dirigé perpendiculairement à la direction des vibrations. C'est ainsi, par exemple, que l'on peut rendre visible la ligne sinueuse qui représente le mouvement oscillatoire, en déplaçant l'œil avec rapidité dans un sens perpendiculaire aux vibrations.

Ces premières expériences ne sont en quelque sorte que les préliminaires de la méthode, le développement et l'application sous une autre forme d'idées déjà mises en œuvre dans d'autres appareils, notamment dans l'ingénieux kaléidophone de M. Wheastone. Je ne dois pas non plus dissimuler la part d'inspiration que j'ai due, lors de mes premières recherches, au souvenir de l'emploi des miroirs à rotation rapide, utilisés d'une façon si remarquable par MM. Wheastone, Arago, et en dernier lieu par M. Foucault.

Ce qui suit me paraît sortir tout à fait des errements antérieurs, et constitue à proprement dire la méthode optique, dont l'application générale me paraît réalisable aujourd'hui, comme on pourra le juger par les détails mêmes donnés dans le cours du Mémoire.

Le problème dont j'ai entrepris la solution est le suivant : Comparer, sans le secours de l'oreille, les mouvements vibratoires de deux corps, de façon à connaître le rapport exact des nombres de vibrations qu'ils exécutent dans le même temps, ainsi que toutes les circonstances qui, pendant la durée du phénomène, caractérisent leurs mouvements relatifs.

Ce problème peut être résolu en obtenant au moyen d'un artifice particulier la composition optique, si je puis m'exprimer ainsi, des deux mouvements vibratoires, soit suivant la même direction, soit suivant des directions rectangulaires.

II. — *Composition optique de deux mouvements vibratoires suivant la même direction.*

La composition des mouvements vibratoires suivant la même direction ne s'applique utilement qu'au cas où les deux corps sont à l'unisson l'un de l'autre ou dans le voisinage de l'unisson.

Pour obtenir cette composition, nous plaçons en regard l'un de l'autre deux diapasons armés de miroirs. La lumière partie du point O, *fig.* 5, tombe sur le premier miroir suivant une direction sensiblement normale à la surface M, de là sur le second M′, et de là dans l'œil ou sur un écran E (dans ce dernier cas, le faisceau doit traverser une lentille L afin de produire une image nette du point O).

Les axes des diapasons sont verticaux et les miroirs sensiblement parallèles.

Supposons d'abord les diapasons bien d'accord, faisons vibrer le premier seulement; l'image s'allonge, comme

nous l'avons vu précédemment. Faisons maintenant vibrer les deux diapasons à la fois, l'allongement de l'image devient plus grand ou plus petit, suivant qu'il y a ou non concordance entre les mouvements simultanés communiqués à l'image par la vibration des deux diapasons.

Si les deux diapasons passent en même temps et dans le même sens par leur forme d'équilibre, l'allongement de l'image atteint son maximum. Si au contraire ils y passent en même temps, mais en sens contraire, l'allongement atteint son minimum, et peut même être nul, si les amplitudes des mouvements vibratoires communiqués au faisceau réfléchi par les deux miroirs sont tout à fait égales. Enfin l'allongement de l'image prend des valeurs plus ou moins grandes, suivant qu'il s'écoule un temps plus ou moins long entre les moments précis où les deux diapasons passent par leur forme d'équilibre.

C'est le rapport entre ce temps et la durée d'une vibration double qui constitue ce que nous appellerons la *différence de phase*.

Dans le cas où les diapasons sont rigoureusement d'accord, la trace lumineuse éprouve simplement un décroissement progressif de longueur dû à l'extinction des vibrations. Mais dans le cas où l'accord est légèrement altéré, alors la trace lumineuse éprouve dans sa longueur des variations périodiques, et en même temps que l'oreille entend le battement qui accuse le défaut d'accord, l'œil aperçoit de la façon la plus nette les pulsations concomitantes de l'image.

Pour analyser ces phénomènes, nous commencerons par examiner comment se déplace l'image d'un point lumineux placé en avant d'un miroir qui tourne autour d'un axe situé dans son plan,

Soit O, *fig.* 6, le point lumineux ; je mène par ce point un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du miroir. Soient C la trace de l'axe sur ce plan et CM la trace du miroir.

Du point C comme centre, avec CO pour rayon, décrivons une circonférence, puis prenons l'arc MO' égal à MO; le point O' sera évidemment l'image du point O. Si le miroir tourne d'un certain angle MOM' mesuré par l'arc MM', le point O' se déplacera sur la circonférence en décrivant un arc OO' double de MM'.

Ceci posé, quand un miroir fixé à l'une des branches d'un diapason oscille en s'écartant infiniment peu de sa position d'équilibre, nous pouvons le considérer comme placé sensiblement dans les mêmes conditions que s'il oscillait autour d'un axe passant par le nœud de vibration. L'image réfléchie va donc décrire un très-petit arc de cercle, qui dans la pratique se réduira sensiblement à une ligne droite. Cette ligne paraîtra verticale, si le diapason a son axe vertical, et si on regarde dans le plan $COMO'$; mais si l'œil est placé en dehors de ce plan, à mesure que l'œil s'en écarte, la ligne paraît de plus en plus inclinée.

Néanmoins cette inclinaison apparente ne peut pas être plus grande que l'inclinaison réelle de la droite par rapport à la verticale. Or cette inclinaison peut être réduite sensiblement à zéro en opérant de la manière suivante. Il suffit pour cela de placer le point lumineux à la même hauteur que le centre du miroir sur une ligne sensiblement normale à celui-ci, et à une distance qui soit beaucoup plus grande que la longueur comprise entre le centre du miroir et le nœud de vibration. En effet, l'angle OCM est alors très-près d'être droit, il en est de même de l'angle $O'CM$, et l'arc $O''O'$ décrit par l'image est sensiblement vertical.

Soient maintenant M et M' nos deux miroirs, O le point lumineux, O' son image dans le premier miroir, O'' l'image de O' dans le second miroir; admettons les restrictions ci-dessus énoncées qui donnent aux images un mouvement sensiblement vertical. Pour un déplacement infiniment petit du miroir M, l'image O' se déplacera verticalement de la quantité $O'O'_1$, donc O'' se déplacera verticalement de la

même quantité $O'' O''_1$; si le miroir M′ éprouve aussi un petit mouvement, l'image O'_1 viendra en O''_2 dans la même verticale, et le déplacement total sera la somme algébrique des déplacements que l'image O″ prendrait sous l'influence des mouvements de chacun des mouvements des miroirs considérés séparément.

C'est seulement en se plaçant dans les conditions qui rendent ce principe exact, que l'on peut analyser sans trop de difficulté les phénomènes qui viennent d'être exposés.

Pour aborder cette question par des considérations purement géométriques, il est nécessaire d'admettre que les mouvements vibratoires dont il s'agit ne sont pas quelconques, mais qu'ils sont assujettis à la loi la plus simple qui régit les mouvements oscillatoires, c'est-à-dire à la loi des oscillations infiniment petites d'un pendule. Cette loi est du reste celle à laquelle satisfait le mouvement d'un point matériel ramené vers sa position d'équilibre stable par une action qui croît proportionnellement à l'écart qu'il subit.

Cette loi peut s'exprimer géométriquement de la manière suivante :

Soient O, *fig.* 8, la position d'équilibre du point matériel, AB la ligne suivant laquelle il oscille ; décrivons sur AB comme diamètre une circonférence AMB. Considérons maintenant le point mobile dans l'une quelconque de ses positions, en N par exemple. Menons en ce point une perpendiculaire NM à la ligne AB ; à mesure que le point N se déplace, le point M se meut aussi sur la circonférence AMB. Si le mouvement du point N est un mouvement oscillatoire semblable à celui d'un pendule écarté infiniment peu de sa position d'équilibre, le mouvement du point M sera un mouvement de révolution uniforme autour de la circonférence AB. Dans ce mouvement le point M fera un tour pendant la durée d'une vibration double du point N.

Nous appelons *phase du mouvement vibratoire* l'arc dé-

crit par le mobile M compté à partir d'un certain point du cercle pris pour origine du mouvement. Cet arc se mesure ordinairement en prenant pour unité la longueur de la circonférence. Dans tout ce qui va suivre nous choisirons pour origine le point S qui a pour projection le point O, position d'équilibre du point oscillant N. Quand la phase croît d'un nombre entier de circonférences, le point N reprend exactement la même position.

Supposons maintenant le point oscillant animé à la fois de deux mouvements oscillatoires dirigé suivant la même ligne droite OV, *fig.* 9. Supposons que le premier mouvement ait pour effet de transporter à un certain instant le point N à une distance du centre égale à OM, que le second mouvement le transporte au même instant à une distance du centre égale à ON; s'il est animé à la fois de ces deux mouvements, il devra être au même instant à une distance du centre égale à OM + ON. Nous pouvons considérer les deux mouvements vibratoires comme étant chacun la projection d'un mouvement de rotation uniforme accompli par un point qui tournerait autour d'une certaine circonférence. Soit donc *m* le mobile dont M est la projection, *n* le mobile qui a sa projection en N. Soient O*n* et O*m* les rayons des circonférences correspondantes, construisons le parallélogramme O*mpn*, puis abaissons sur OV la perpendiculaire *p*P, nous aurons par construction O*m* = *np*; ces deux lignes faisant le même angle avec la direction OX auront des projections égales OM = NP, donc OP = OM + ON; donc le point soumis à l'action simultanée des deux mouvements sera précisément à une distance du centre égale à OP.

Ceci posé, nous avons plusieurs cas à considérer.

1°. Supposons d'abord que les deux mouvements soient de même période, les deux mobiles *m* et *n* tournent du même angle dans le même temps, l'angle *mon* qui exprime à chaque instant la différence de phase reste constant, le parallélogramme conserve sa forme, tout en tournant au-

tour du point O, la distance Op reste constante, et le point p se meut d'un mouvement uniforme autour du point O dans un cercle de rayon Op.

Ainsi, dans ce cas, le mouvement résultant est assujetti à la même périodicité et à la même loi que les deux mouvements composants; seulement son amplitude est égale à Op, c'est-à-dire à la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont égaux aux amplitudes des deux mouvements composants, et dont l'angle au sommet est égal à la différence constante de phase de ces deux mouvements.

Si la différence de phase est nulle, l'amplitude du mouvement résultant est égale à la somme des amplitudes des mouvements composants.

Si la différence de phase est égale à $\frac{1}{2}$ unité, l'amplitude du mouvement résultant est égale à la différence des amplitudes des mouvements composants. Dans le cas où ces amplitudes seraient égales, l'amplitude du mouvement résultant se réduirait à zéro.

2°. Supposons que les deux mouvements soient à très-peu près de même période, alors la ligne pO va tourner autour du point O, et en même temps sa longueur va se modifier progressivement à mesure que la différence de phase va croître; le point p va donc décrire une spirale qui s'approchera du centre à mesure que la différence de phase variera de 0 à $\frac{1}{2}$, et s'en écartera ensuite quand cette même différence croîtra de $\frac{1}{2}$ à 1, s'en rapprochera de nouveau quand la différence croîtra de 1 à $\frac{3}{2}$, et s'en éloignera encore quand elle croîtra de $\frac{3}{2}$ à 2, et ainsi de suite. Dans l'hypothèse que nous avons admise, la longueur du rayon op variant très-peu pendant une révolution entière de ce rayon, le point P exécutera des oscillations successives dont chacune sera à très-peu près symétrique de part et d'autre du point o. L'amplitude de ces oscillations variera périodiquement entre deux limites extrêmes, dont l'une est égale à la somme des amplitudes des mouvements compo-

sants, et l'autre à leur différence. Supposons maintenant que la durée de la sensation visuelle corresponde à un nombre d'oscillations assez faible pour que pendant leur durée l'amplitude n'ait pas sensiblement varié, la grandeur de l'image produite par la composition des deux mouvements dépendra, à chaque instant, de l'amplitude présente du mouvement résultant, et comme cette amplitude varie périodiquement, l'image éprouvera elle-même dans sa grandeur des variations périodiques entre les deux limites indiquées ci-dessus.

Une pulsation complète de l'image sera accomplie quand la différence de phase aura augmenté d'une unité, c'est-à-dire quand, sous l'influence de l'un des mouvements, le point aura fait une oscillation complète de plus que sous l'influence de l'autre.

Les mêmes résultats peuvent être démontrés par le calcul, comme il suit :

Soient

x, l'écart produit dans le point O″, *fig.* 7, par le mouvement du premier miroir ;

x', l'écart produit dans le point O″ par le mouvement du second miroir ;

X, le déplacement résultant ;

τ, la durée de l'oscillation complète du premier miroir ;

τ', la durée de l'oscillation complète du second miroir ;

t, le temps compté à partir d'un des instants où $x = 0$.

Nous aurons

$$x = a \sin 2\pi \frac{t}{\tau}, \quad x' = a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau'} + \frac{\alpha}{\tau'} \right),$$

$$X = x + x'.$$

Posons

$$\frac{t}{\tau} = n, \quad \frac{t}{\tau'} = n + \omega.$$

n sera le nombre de vibrations exécutées en une seconde par le premier diapason.

Nous aurons

$$x = a \sin 2n\pi t, \quad x' = a' \sin\left[2n\pi t + 2\pi\left(\omega t + \frac{\alpha}{\tau'}\right)\right].$$

Posons

$$2n\pi t = p, \quad 2\pi\left(\omega t + \frac{\alpha}{\tau'}\right) = q,$$

il vient

$$\begin{aligned} X = x + x' &= a \sin p + a' \sin(p+q) \\ &= (a + a' \cos q) \sin p + a' \sin q \cos p. \end{aligned}$$

Si nous posons

$$X = A \sin(p + r),$$

nous en tirerons les équations de condition

$$A = \sqrt{a^2 + a'^2 + 2aa' \cos q},$$

$$\operatorname{tang} r = \frac{a' \sin q}{a + a' \cos q}.$$

Deux cas peuvent se présenter :

1°. $\tau = \tau'$. Nous rentrons dans un problème traité dans tous les livres d'optique, et nous déduisons de la simple inspection des formules, que le mouvement oscillatoire est de même période que les mouvements composants. De plus, son amplitude A peut varier depuis $a + a'$ jusqu'à $a - a'$, suivant la différence initiale de phase, seulement elle conserve une valeur constante tant que a et a' ne varient pas sensiblement.

2°. Si τ et τ' sont différents, alors le mouvement résultant se complique, car A et r sont fonctions de $a\,a'$ et de q qui est alors fonction de t; il y a donc dans le mouvement résultant changement continu dans l'amplitude; de plus, comme la quantité située sous le signe sinus $(p + r)$, de laquelle dépend la période du mouvement oscillatoire, ne varie pas proportionnellement au temps, les diverses oscillations n'ont pas la même durée.

Nous ne considérerons ici que le cas où l'accord des dia-

pasons est altéré très-faiblement. Dans ce cas ω est très-petit par rapport à n, r varie donc très-lentement avec le temps. Or la durée d'une oscillation est précisément la quantité dont il faut accroître le temps pour que $p + r$ augmente de 2π. Si r reste constant, cette quantité est égale à τ. Si r varie très-lentement, cette quantité diffère très-peu de τ. Il se produira donc un grand nombre d'oscillations du mouvement résultant avant que la différence de phase et l'amplitude aient sensiblement changé ; si ce temps est d'ailleurs supérieur à la durée de la sensation visuelle, la longueur de la trace lumineuse sera à chaque instant proportionnelle à la valeur de la quantité A, et comme cette quantité varie périodiquement de $a + a'$ à $a - a'$, nous aurons dans l'image ces pulsations régulières que l'expérience nous a permis de constater. Remarquons d'ailleurs que la quantité A reprendra la même valeur toutes les fois que q augmentera de 2π, c'est-à-dire toutes les fois que ωt augmentera de 1 ; donc la durée d'une pulsation complète de l'image sera $\frac{1}{\omega}$.

L'identité des équations que nous avons prises avec celles qui expriment le mouvement d'un point de l'air soumis à l'action simultanée de deux mouvements ondulatoires qui diffèrent par l'intensité et par la période, indique suffisamment la liaison intime qui existe entre cette sorte de battement optique et le battement acoustique. Les deux phénomènes sont assujettis à la même périodicité, mais leurs maximas ne coïncident pas rigoureusement à cause de la distance inégale que les ondes ont à parcourir pour atteindre l'oreille. Cette distance serait, du reste, avec les appareils ci-dessus décrits, assez difficile à évaluer rigoureusement, car chaque appareil ébranle l'air par une surface assez étendue, et ne peut pas être considéré comme formant un centre unique d'ondulations sonores.

C'est en employant des appareils qui réuniront une

grande sonorité à des dimensions très-restreintes, qu'on pourra constater la différence précise qui existe entre le moment du maximum optique et celui du maximum acoustique, et en déduire d'une façon directe la mesure de la longueur d'onde qui correspond à un son donné.

L'étude du phénomène des battements trouvera dans cette partie de notre méthode, et plus encore dans ce qui va suivre, un puissant auxiliaire. Il sera possible ainsi de contrôler avec efficacité les diverses théories proposées pour l'explication de ce phénomène. Notre méthode fournira surtout le moyen de déterminer la part réelle que peut avoir dans ce phénomène la réaction mutuelle des corps vibrants, réaction que nous sommes loin de nier, mais à laquelle nos expériences ne nous permettent pas dès à présent d'attribuer une importance aussi grande que l'avait fait Savart.

III. — *Composition optique de deux mouvements vibratoires dirigés dans des sens rectangulaires.*

C'est surtout en combinant dans deux sens rectangulaires les mouvements oscillatoires communiqués à l'image du point lumineux, que l'on arrive à trouver dans le phénomène qui se produit alors, de précieuses indications relativement au mouvement des deux corps vibrants.

Cette méthode peut s'expérimenter de la façon la plus commode à l'aide de deux diapasons, *fig.* 10. L'un des deux B a son axe vertical, l'autre A a son axe horizontal. Un pinceau de lumière parti de la lampe O tombe sur le miroir B, de là sur le miroir A, et arrive enfin dans l'œil armé d'une lunette. On ajuste la lunette de façon à voir nettement l'image de l'ouverture O dans le miroir A.

Si l'on fait vibrer le diapason A, l'image oscille rapidement dans le sens horizontal et prend l'apparence d'une ligne lumineuse dirigée horizontalement. Si l'on fait vibrer seulement le diapason vertical B, l'image s'allonge dans le sens vertical. Mais si l'on fait vibrer les deux diapasons à

la fois, l'image prend alors un mouvement complexe dû à la combinaison des deux mouvements, et décrit dans l'espace une courbe plus ou moins compliquée, dont la forme dépend du rapport entre les nombres de vibrations exécutées dans le même temps par les deux diapasons.

Cette courbe s'illumine dans une étendue plus ou moins grande, qui dépend de la durée de la sensation visuelle : de là résulte une série d'apparences que nous allons décrire, et dont nous donnerons ultérieurement la théorie (1).

1. *Diapasons à l'unisson. — Rapport des nombres de vibrations* 1 *à* 1.

Dans ce cas la courbe décrite par le point lumineux est une ligne droite ou une ellipse, dont les axes sont plus ou moins inclinés par rapport aux directions verticale et horizontale.

Ces diverses apparences sont représentées dans la *Pl. II*, *fig.* 11, et forment la série (1 : 1).

Lorsque les diapasons sont d'accord, la courbe conserve exactement la même forme pendant toute la durée des vibrations, à la condition toutefois que les amplitudes des deux vibrations rectangulaires décroissent dans le même rapport. La forme aperçue dépend de la différence initiale de phase, différence qui est déterminée par le hasard, sauf quand les diapasons sont montés sur le même support. Les figures successives de la série (1 : 1) représentent les diverses formes que prend la courbe pour toutes les différences de phase croissant de huitième en huitième, depuis 0 jusqu'à 1. Dans le cas où les amplitudes sont égales, la figure qui correspond aux différences $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ sont des cir-

(1) Cette courbe est en réalité une courbe à double courbure, mais pour l'œil l'apparence est la même que si elle était située entièrement dans un plan perpendiculaire à l'axe optique de la lunette.

conférences exactes; dans le cas contraire, ce sont des ellipses ayant leurs axes placés dans les directions horizontale et verticale.

Si les vibrations de l'un des diapasons s'éteignent plus rapidement que celles de l'autre, alors l'axe de l'ellipse se rapproche de la direction du diapason le plus fortement ébranlé, et en même temps l'ellipse tend vers la ligne droite.

Si les diapasons ne sont pas tout à fait d'accord, la différence initiale de phase ne se maintient pas, et la courbe passe par toutes ses variétés. Elle semble animée d'une sorte de balancement d'autant plus rapide, que les diapasons sont plus loin de l'accord. Lorsque la courbe a passé par toutes ces apparences distinctes pour revenir à sa forme initiale, on est sûr que l'un des diapasons a exécuté durant ce temps une vibration double de plus que l'autre.

2. — *Diapasons à l'octave.*

Quand les diapasons sont exactement à l'octave, ils donnent l'une des figures formant la série (1 : 2).

La figure apercue au premier instant conserve la même forme, si l'accord est irréprochable. S'il y a une petite différence d'accord, la figure passe par toutes les transformations indiquées; et elle a passé par toutes les formes possibles, quand le diapason le plus aigu a fait une vibration double de plus ou de moins que le nombre qu'il exécuterait s'il y avait accord.

3. — *Diapasons donnant, l'un le son* 1, *l'autre le son* 3.

Les diverses figures qui correspondent à cette hypothèse sont celles de la troisième ligne, série (1 : 3). Dans le cas d'un léger désaccord, mêmes observations que ci-dessus.

Comme exemple du cas où les diapasons exécutent dans le même temps des nombres de vibrations dont le rapport est celui de deux nombres entiers, nous avons figuré dans la quatrième et la cinquième ligne les courbes qui correspondent au rapport de quinte et de quarte.

4. — *Diapasons dont les nombres de vibrations sont dans le rapport de 2 à 3.*

Les figures correspondantes forment la série (1 : 3).

Dans le cas de désaccord, la figure passe par toutes ses transformations quand le diapason le plus aigu a fait une demi-vibration double de plus ou de moins que le nombre nécessaire pour qu'il y ait accord.

5. — *Diapasons dont les nombres de vibrations sont dans le rapport de 3 à 4.*

Série (3 : 4). Mêmes observations que précédemment.

Quand la figure a passé par toutes ses transformations, le diapason le plus aigu a fait un tiers de vibration double de plus ou de moins que le nombre nécessaire pour qu'il y ait accord.

Remarque. — La complication des figures s'accroît à mesure que les deux termes du rapport des nombres de vibrations supposé réduit à sa plus simple expression prennent une valeur plus élevée. Il serait donc impossible de reconnaître le rapport auquel on a affaire, si la courbe ne portait en elle-même l'indication précise des deux termes de ce rapport. Considérons en effet le cas où la courbe est complète, c'est-à-dire où il n'y a pas superposition des traits les uns sur les autres; il y a tout autour de la courbe un certain nombre de sommets situés sur les quatre côtés d'un rectangle dont les dimensions sont égales précisément aux amplitudes des vibrations horizontale et verticale. Comptons le nombre de sommets situés à la partie supérieure, puis le nombre de sommets situés sur l'un des côtés verticaux du rectangle, à droite par exemple : ces deux nombres sont le numérateur et le dénominateur de la fraction qui exprime le rapport des deux nombres de vibrations exécutées par ces deux corps, le numérateur correspondant au diapason vertical, le dénominateur au diapason

horizontal. Exemple : *fig.* 5, série (3 : 4), différence $\frac{2}{12}$; nous avons trois sommets à la partie supérieure, quatre à la droite de la courbe, le rapport des nombres de vibrations est $\frac{4}{3}$; le diapason vertical est à la quarte en dessous du diapason horizontal. Dans le cas où la figure se simplifie par la superposition d'une moitié du tracé sur l'autre, série (3 : 4), *fig.* 7, on arrive au rapport des nombres de vibrations en comptant comme doubles les sommets, et en comptant comme simples les points d'arrêt.

Nous avons exposé sommairement les principaux résultats fournis par ce mode d'expérimentation; entrons maintenant dans l'examen théorique des phénomènes. Afin d'en rendre l'intelligence facile, même aux personnes étrangères au maniement du calcul algébrique, nous avons tâché de tout interpréter par de simples considérations géométriques. Nous allons donc donner tout d'abord la théorie géométrique de ces phénomènes, nous réservant de les traiter ultérieurement par le calcul.

CHAPITRE II.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DE LA COMPOSITION DE DEUX MOUVEMENTS VIBRATOIRES RECTANGULAIRES.

Tracé graphique des courbes de vibration.

1. Nous admettons, comme dans ce qui précède, que les deux mouvements sont assujettis à la loi la plus simple qui régisse les mouvements oscillatoires, c'est-à-dire à la loi des oscillations infiniment petites d'un pendule. Nous considérerons donc, comme ci-dessus, le mouvement oscillatoire comme la projection sur un diamètre d'un cercle du mouvement d'un mobile qui parcourt la circonférence d'un mouvement uniforme.

Ce genre de considération nous fournit un moyen simple

et pratique de tracer par points la courbe qui correspond à un rapport quelconque dans les périodes et les amplitudes des deux mouvements composants.

Représentons, en effet, par O, *fig* 12, *Pl. I,* la position que l'image occupe dans le champ de lunette, les diapasons étant immobiles. Si l'on fait vibrer le diapason horizontal, l'image oscille entre les limites A et A′ également éloignées du point O. De même, si le diapason vertical vibre seul, l'image oscillera entre les limites B et B′ situées sur la verticale du point O. Supposons maintenant le point soumis aux deux mouvements à la fois, et soient P et Q les positions qu'il occuperait à un instant donné, s'il était soumis seulement à l'influence du mouvement horizontal, ou du mouvement vertical, il sera par l'effet de la composition des deux mouvements en R sur la diagonale du parallélogramme construit sur OP et OQ. Traçons maintenant les circonférences qui ont pour diamètres A′A et B′B. D'après ce que nous avons dit tout à l'heure, le point P sera la projection du point M′ et le point Q la projection du point M. Le point R étant déjà connu, pour avoir d'autres points de la courbe il suffit de faire tourner sur les circonférences AA′ et BB′ les points M et M′, de façon que leurs déplacements respectifs soient dans le rapport exact des nombres de vibrations exécutées dans le même temps par les deux corps vibrants. S'il s'agit, par exemple, de deux diapasons à la quinte l'un de l'autre, il faut, pour avoir un nouveau point R′ de la courbe, faire parcourir aux points M et M′ des arcs MM_1 $M'M'_1$ qui soient entre eux dans le rapport de 2 à 3, et mener par M'_1 une verticale, par M_1 une horizontale dont la rencontre se fera précisément en R′.

La solution de ce problème peut être realisée facilement au moyen d'un appareil à tracé continu, dont l'exécution ne présenterait aucune difficulté pour un mécanicien habitué à la construction des instruments de précision. J'avais

même essayé de mettre en jeu ces principes dans une machine grossièrement exécutée en bois. La construction même de l'appareil ne m'a pas permis d'obtenir des résultats suffisamment exacts, mais j'ai pu me convaincre par cet essai que le problème était susceptible d'une solution précise; j'ai dû seulement m'arrêter devant la perspective d'une dépense supérieure aux ressources dont je pouvais disposer (1). Néanmoins, pour éviter la perte énorme de temps qu'aurait entraînée le tracé graphique de mes courbes sans aucun autre auxiliaire que la règle et le compas, j'ai imaginé le moyen suivant pour avoir très-rapidement un nombre suffisant de points de chaque courbe.

Sur une plaque de laiton bien dressée j'ai fait tracer deux cercles AA′ et BB′, *fig.* 13, dont les diamètres étaient entre eux dans le rapport de 2 à 3 (on aurait pu prendre un autre rapport quelconque); on a mené par le centre commun O des deux cercles deux lignes rectangulaires; on a ensuite divisé dans chaque cercle chaque quadrant en huit parties égales (on aurait pu choisir un autre nombre); on a ensuite joint deux à deux les points de division du cercle AA′ par des lignes parallèles à BB′, et on a mené les tangentes en A et en A′. On a opéré de même sur le cercle BB′ au moyen de lignes de jonction parallèles à AA′. L'ensemble de ces lignes prolongées jusqu'à leur mutuelle rencontre a formé un rectangle quadrillé présentant un nombre de points d'intersection égal à 17×17 ou 289.

J'ai fait faire toute l'opération précédente par un graveur exercé, et on a ensuite tiré sur papier un certain nombre d'épreuves de cette figure. Chacun de ces papiers permettait, comme nous allons le voir, de tracer rapidement et avec exactitude les divers types de nos figures.

---

(1) J'espère être prochainement en mesure de combler cette lacune à l'aide des fonds que l'Académie des Sciences a bien voulu mettre à ma disposition.

Supposons, en effet, qu'il s'agisse de tracer la figure qui correspond au rapport de 2 à 3, 2 pour le diapason vertical, 3 pour le diapason horizontal; nous connaissons à l'avance la différence de phase, supposons qu'elle soit de $\frac{5}{32}$, et que le diapason horizontal soit en avance sur l'autre.

Nous comptons à partir de l'origine O cinq divisions sur le rayon OA. Nous marquons le point ainsi obtenu. Ce point appartient à la courbe, car il correspond à un déplacement nul dans le sens vertical, et à un déplacement dans le sens horizontal qui ferait parcourir au point M', *fig* 12, $\frac{5}{32}$ de tour, c'est-à-dire à la fraction de vibration qui correspond aux $\frac{5}{32}$ de la durée d'une vibration double.

Une fois ce point marqué, nous obtenons le suivant, en avançant de trois divisions dans le sens horizontal et de deux dans le sens vertical, et nous arrivons ainsi à un second point de la courbe. En effet, la quantité dont nous avons avancé dans le sens horizontal correspond à une rotation de $\frac{3}{32}$ du mobile M', et la quantité dont nous avons marché dans le sens vertical correspond à une rotation du mobile M égale à $\frac{3}{32}$ de tour. En continuant de même nous obtiendrons de nouveaux points de la courbe. Nous aurons soin, toutes les fois que nous atteindrons ainsi les limites du mouvement horizontal ou vertical, de rétrograder de façon à compléter le nombre de divisions que nous devons parcourir.

Nous continuerons ainsi jusqu'à ce que nous soyons revenu au point de départ. Nous réunirons ensuite tous les divers points par un tracé continu qui sera plus ou moins exact suivant que les points seront plus ou moins espacés. Nous ajouterons encore à la précision du tracé, en remarquant que la courbe doit être tangente aux quatre côtés du rectangle.

Ce procédé ne peut pas nous donner les figures d'une même série qui correspondent à toutes les différences imaginables de phase, cependant il peut en donner un grand

nombre, comme nous l'allons voir. Soit en effet $\frac{m}{n}$ le rapport des nombres de vibrations exécutées dans le même temps par les deux diapasons, m correspondant au diapason horizontal et n au diapason vertical. Supposons que nous prenions pour point de départ de notre tracé un point de notre papier quadrillé, dont la distance au diamètre A′A renferme h divisions, tandis que la distance au diamètre BB′ en renferme k; soit I, *fig.* 14, ce point de la courbe; supposons que la trajectoire avant d'arriver au point I ait coupé le diamètre AA′ en R. Si nous prenions le point R pour point de départ, la différence initiale de phase rapportée au mouvement horizontal serait l'arc de la circonférence AA′ qui a pour projection OR divisé par la circonférence entière, c'est-à-dire

$$\frac{\text{TS}}{2\pi \times \text{OA}} = \frac{\text{TG}}{2\pi \times \text{OA}} - \frac{\text{SG}}{2\pi \times \text{OA}}.$$

Mais

$$\frac{\text{SG}}{2\pi \times \text{OA}} = \frac{\text{NV}}{2\pi \times \text{OB}} \times \frac{m}{n};$$

or, par hypothèse,

$$\frac{\text{TG}}{2\pi \times \text{OA}} = \frac{k}{32}$$

et

$$\frac{\text{NV}}{2\pi \times \text{OB}} = \frac{h}{32};$$

donc la différence initiale de phase est donnée par la relation

$$\text{D} = \frac{k}{32} - \frac{h}{32} \times \frac{m}{n}.$$

Cette relation a été utilisée dans la série (3 : 4), ***Pl. II.*** En effet, dans cette série

$$\text{D} = \frac{P}{24};$$

or dans ce cas

$$\frac{m}{n} = \frac{4}{3},$$

il faut donc satisfaire à la relation

$$\frac{p}{24} = \frac{k}{32} - \frac{h}{32} \times \frac{4}{3}.$$

Posons

$$k = 0,$$

il viendra

$$h = -p,$$

c'est-à-dire qu'il faudra commencer le tracé par les diverses divisions de la ligne BB′ au-dessous de O.

Tel est le mode de tracé que nous avons employé pour obtenir les modèles des figures réduites dont le tableau forme la *fig.* 11.

J'avais d'abord fait construire une planche dont tous les points d'intersection étaient percés d'un trou d'aiguille, et j'obtenais les courbes en plaçant cette plaque sur le papier et piquant à l'aide d'une aiguille fine tous les points appartenant à la courbe que je voulais décrire. C'est d'après le conseil de M. Pouillet que j'ai fait tirer des épreuves sur papier de la planche divisée ; de cette manière on a plus de facilité pour faire le tracé avec exactitude, et surtout pour suivre la marche véritable de la courbe (1).

II. — *Interprétation géométrique des apparences présentées par les courbes lumineuses.*

Section A. *Principes généraux.* — Soient O, *fig.* 15, la position d'équilibre du point lumineux aperçu dans le champ de la lunette A′A, B′B les limites de son excursion oscillatoire dans le sens vertical et horizontal, ON et OM

(1) Toutes les courbes de la *Pl. II* ont été tracées par M. Dulos au moyen d'un diagramme réduit aux dimensions mêmes de ces figures et semblable à la *fig.* 13 ; aussi sont-elles exécutées avec la plus grande exactitude.

deux déplacements simultanés du point correspondant à un moment quelconque de son mouvement composé, le point se trouvera par l'effet de la composition des deux mouvements en P.

Prenons la ligne BB′ comme axe d'un cylindre à base circulaire ayant AA′ pour diamètre, traçons sur ce cylindre la circonférence A′HA que nous appellerons *circonférence moyenne;* puis, au moyen des perpendiculaires MQ et PR élevées sur le plan AOB, projetons les points M et P sur le cylindre en R et en Q; pendant que le point M et le point P se déplacent, le point Q se meut sur le cercle dont le diamètre est A′A, tandis que le point R oscille de part et d'autre de ce point d'une quantité égale à celle dont le point P se déplace dans le sens vertical, et cela en restant toujours sur la même arête du cylindre que le point Q.

La ligne sinueuse décrite par le point R dans l'espace a précisément pour projection celle que le point P décrit en réalité dans le plan AOB, et pour un observateur situé à une distance infinie sur le prolongement de la ligne OH, l'apparence produite par le mouvement du point P sur le plan est la même que celle produite par le mouvement du point R dans l'espace. Nous avons établi au début de ce chapitre, que le mouvement du point Q était uniforme, et qu'il décrivait un tour entier pendant la durée d'une vibration double du diapason horizontal. Quant au point R, il exécute de part et d'autre du point Q des oscillations régulières qui lui font parcourir sur la surface du cylindre une ligne sinueuse dont toutes les sinuosités sont égales.

Si le diapason vertical et le diapason horizontal effectuent dans le même temps des nombres de vibrations qui soient entre eux comme deux nombres entiers, 3 et 4 par exemple, le point R exécutera trois sinuosités complètes de part et d'autre du cercle moyen, tout en faisant quatre tours entiers autour du cylindre, et il continuera ensuite à se mouvoir en revenant sur le tracé primitif.

Quel que soit le rapport des deux nombres de vibrations, il arrivera toujours qu'après un nombre suffisant de tours le point mobile reviendra à l'origine de son mouvement, sinon rigoureusement, du moins assez approximativement pour que la courbe nouvelle ne se sépare pas sensiblement de la précédente. Seulement, si le nombre de vibrations que le point doit exécuter pour que cette condition soit remplie est trop considérable pour s'accomplir dans la durée pendant laquelle la sensation persiste dans l'œil, alors la courbe ne s'illumine que dans une portion de son étendue, et comme la partie visible change à chaque instant, il en résulte des apparences de mouvement que nous analyserons bientôt.

Section B. *Cas où les nombres de vibrations des deux diapasons sont entre eux dans un rapport simple.*—Nous supposerons la rapidité des vibrations assez grande pour que le point lumineux revienne sur le tracé qu'il a déjà parcouru, avant que la sensation soit éteinte dans l'œil. La courbe sera donc illuminée dans toute son étendue.

La forme qu'elle présentera dépendra du rapport des nombres de vibrations, et de la différence de temps qui existe entre les moments où l'image passe par le milieu de son excursion dans le sens vertical et dans le sens horizontal.

Si les diapasons partent en même temps de leur position d'équilibre, la courbe aperçue part du point O, *fig.* 16, et la courbe tracée sur le cylindre du point H. Si au contraire le point lumineux est déjà déplacé dans le sens horizontal de la quantité OM, au moment où il commence à se mouvoir verticalement, alors la courbe sinueuse tracée sur le cylindre partira d'un certain point Q, projection de M sur la circonférence moyenne. Ce point est situé à une certaine distance HQ du point H, et le rapport de HQ à la circonférence entière représentera la fraction de la durée d'une vibration double du diapason horizontal, qui s'écoule entre

les instants où les deux diapasons passent par leur position d'équilibre. Cette quantité est ce que nous appelons la différence initiale de phase.

Dans le second cas, la courbe tracée sur le cylindre a exactement la même forme que dans le premier, car elle est produite par l'oscillation régulière d'un point de part et d'autre d'un autre point qui court d'un mouvement uniforme le long de la circonférence moyenne. Or, tant qu'il n'y a de changement que dans la différence initiale de phase, le mouvement du point Q, *fig.* 15, s'effectue avec la même rapidité, et l'ocillation du point R, de part et d'autre du point Q, se fait suivant la même loi. Les courbes HF et QG, *fig.* 16, ont donc exactement la même forme. Il n'en est pas de même de leurs projections; et, dans le second cas, l'apparence est la même pour l'observateur que si, au lieu de tracer la courbe dans une autre région de la surface du cylindre, on avait simplement fait tourner le cylindre lui-même avec la courbe qu'il porte d'une fraction de tour égale au rapport de HQ à la circonférence entière, c'est-à-dire précisément de la différence de phase.

Ainsi les figures variées qui correspondent à un même rapport dans les nombres de vibrations, ne sont autre chose que les diverses apparences que présenterait une même courbe tracée, non pas sur un plan, mais dans l'espace sur un cylindre, si on faisait tourner ce cylindre autour de son axe, l'œil de l'observateur étant placé sur une perpendiculaire à l'axe située dans le plan de la *circonférence moyenne*.

Chaque figure, nous venons de le prouver, peut être considérée comme la projection d'une ligne sinueuse tracée sur un cylindre à axe vertical; mais on peut aussi la considérer comme la projection d'une ligne sinueuse tracée sur un cylindre à axe horizontal. Seulement, si dans le premier cas la ligne fait m sinuosités en n tours de cylindre, dans le second elle fera n sinuosités en m tours.

L'apparence de ces courbes à trois dimensions peut être présentée aux yeux d'une façon très-simple à l'aide du stéréoscope, comme nous l'avons indiqué dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 17 novembre 1856, et dont nous reproduisons ici un extrait :

NOTE

Sur un cas particulier de stéréoscopie fourni par l'étude optique des mouvements vibratoires.

. . . . . .

« Cette manière d'envisager la génération de ces sortes de lignes a l'avantage de ramener à un même type toutes les figures qui correspondent à un même rapport entre les nombres de vibrations fournis dans le même temps par les deux mouvements rectangulaires. Les figures du même type ne sont que les diverses perspectives d'une même courbe génératrice aperçues par une personne qui tournerait autour du cylindre en maintenant son œil dans le plan de la circonférence moyenne à une distance assez grande pour rendre cette perspective sensiblement orthogonale. L'angle dont l'œil se déplace autour du cylindre est précisément égal à la quantité dont croît la différence de phase entre les deux mouvements vibratoires, cette différence étant évaluée par rapport à la durée de la vibration horizontale. Deux de ces figures, prises en perspective suivant des directions inclinées d'un angle de 10 à 12 degrés, fournissent par leur vision simultanée dans le stéréoscope l'apparence de la courbe génératrice.

» Il résulte du mode de génération de ces figures qu'on peut, sans rien changer à la forme de la figure plane que l'on considère, supposer la courbe génératrice tracée sur un cylindre à axe vertical ou sur un cylindre à axe horizontal. Les deux courbes génératrices ainsi obtenues ont une seule et même projection, quoiqu'elles soient tout à fait distinctes.

» On en obtient la vue stéréoscopique de la manière suivante . on trace d'abord la figure qui correspond à une différence initiale de phase égale à 0; cette figure est symétrique par rapport à deux axes rectangulaires. On trace ensuite la figure qui correspond à une différence de phase égale à $\frac{1}{32}$ dans le sens horizontal; cette figure est symétrique par rapport à un axe horizontal seulement. Ces deux figures juxtaposées dans le stéréoscope donnent l'apparence de la première courbe génératrice. Si nous les tournons toutes deux de 90 degrés autour de leur centre, nous avons l'apparence de la deuxième courbe génératrice dont l'axe est venu se placer dans la verticale.

» Les points de croisement des deux figures planes fournissent dans la courbe stéréoscopique, les uns des intersections réelles, les autres des croisements en perspective. Quand on passe de la première courbe génératrice à la deuxième, toute intersection réelle devient un croisement en perspective et *vice versâ*. Quand on retourne à 180 degrés la première figure, ou quand on la fait passer de gauche à droite sans la retourner, la courbe stéréoscopique change d'aspect, tout en conservant la même forme; les parties qui étaient antérieures deviennent postérieures, et réciproquement. C'est un effet analogue à celui qu'on obtient quand dans une épreuve stéréoscopique on change l'effet de creux en effet de relief. Seulement il s'obtient dans le cas actuel par deux combinaisons différentes.

» Les angles stéréoscopiques ne sont pas les mêmes pour les deux courbes génératrices, parce que tous les effets se produisent avec deux figures seulement. Néanmoins l'effet stéréoscopique se produit aussi nettement dans les deux cas. Seulement l'un des genres de courbe présente moins de relief que l'autre et semble tracé sur un cylindre à base elliptique.

» En résumé, on peut combiner ces figures de huit manières différentes, et obtenir ainsi quatre apparences sté-

réoscopiques se rattachant à deux genres de courbe tout à fait distincts. »

Nous prendrons pour exemple la figure correspondant à la quinte. Nous supposerons l'axe du cylindre vertical, et la courbe génératrice produite par le mouvement d'un point qui fait deux oscillations de part et d'autre de la circonférence moyenne, tandis qu'il fait trois tours autour du cylindre; l'apparence de la courbe à trois dimensions s'obtiendra avec les deux figures conjuguées telles qu'elles sont dans la *fig.* 17.

Si au contraire nous admettons le deuxième mode de génération dans lequel le point fait trois oscillations autour de la circonférence moyenne du cylindre, tandis qu'il fait deux tours autour de celui-ci, la *fig.* 18 nous fournira les deux dessins conjugués qui doivent être mis dans le stéréoscope. Le dessin A′ n'est autre chose que le dessin A renversé à 90 degrés, et il en est de même des dessins B′ et B.

Il résulte évidemment du mode de génération de la courbe que la ligne sinueuse atteint *m* fois la limite supérieure et *m* fois la limite inférieure de son excursion verticale, tandis qu'elle atteint *n* fois chacune des limites de son excursion horizontale, *m* et *n* étant les deux termes du rapport des nombres de vibrations exécutées dans le même temps par le diapason vertical et le diapason horizontal.

Pour avoir la forme exacte de la courbe dans chaque cas, il faut nécessairement avoir recours au tracé graphique dont nous avons donné plus haut le détail. Néanmoins, comme conséquence géométrique de ce qui précède, nous pouvons démontrer que dans le cas de l'unisson la courbe n'a pas seulement l'apparence d'une ellipse, mais est encore une ellipse véritable.

En effet, dans le cas où la différence de phase est nulle, le point lumineux parti de la position moyenne O, *fig.* 19, s'élève dans le sens vertical de la quantité ON, tandis qu'il

avance dans le sens horizontal de la quantité OM. Les deux mouvements oscillatoires, étant sinon de même amplitude, du moins de même durée, produisent dans le même temps, à partir de l'origine O, des déplacements dont le rapport $\frac{PM}{OM}$ est constant; le point se meut donc suivant la ligne OP: or quand nous reportons toutes les positions du point P sur le cylindre dont le diamètre est AA', *fig.* 15, nous menons pour cela au plan NOM une infinité de perpendiculaires dont l'ensemble forme un plan; la courbe obtenue sur le cylindre est donc une ellipse. Nous avons démontré d'ailleurs que le changement dans la phase ne modifiait en aucune façon la courbe tracée sur le cylindre, cette courbe sera donc toujours une ellipse et aura par cela même pour projection une ellipse. Nous verrons donc suivant les diverses différences de phase les diverses varietés d'ellipse indiquées ci-dessus.

Le cas où la combinaison de deux mouvements vibratoires produit la ligne droite, l'ellipse ou le cercle, est utile à considérer, non-seulement en acoustique, mais aussi en optique. En effet, les diverses couches obtenues ainsi sont précisément les formes diverses qu'affecte la trajectoire d'une molécule d'éther soumise à l'action simultanée de deux mouvements ondulatoires polarisés dans deux plans rectangulaires.

Pour démontrer matériellement les résultats auxquels on arrive, soit par le calcul, soit par de simples considérations géométriques, j'ai imaginé l'appareil suivant, *fig.* 21. A un bâti en bois sont fixés deux ressorts en acier AB et CD, l'un horizontal, l'autre vertical. Le ressort AB est fixé par son extrémité A, le ressort CD par son extrémité C; ces deux ressorts sont dans deux plans verticaux très-voisins et portent chacun à leur extrémité libre une lentille; les deux lentilles sont d'égal foyer. Dans l'angle formé par les parties B et D des deux res-

sorts est un axe horizontal GI, *fig.* 22. Cet axe porte deux excentriques E et E′, fixés chacun à un manchon cylindrique qui peut tourner autour de l'axe; l'un de ces excentriques est fixé à demeure sur l'axe, au moyen d'une vis noyée dans le manchon correspondant; l'autre peut être calé dans diverses positions par rapport au premier, et arrêté à l'aide d'une vis de pression V. Sur chacun des excentriques s'appuie une pièce en bronze H H′, *fig.* 21, fixée à l'un des ressorts. L'axe porte une poulie P placée entre les deux excentriques. Une roue R et une corde sans fin permettent de donner à cette poulie, et par suite à l'axe, une vitesse de rotation suffisamment rapide. Durant ce mouvement de rotation, chaque excentrique communique au ressort correspondant un mouvement d'oscillation qui se transmet à la lentille portée par ce ressort.

Les deux lentilles sont disposées de telle sorte, que leurs axes optiques sont sur le prolongement l'un de l'autre, quand elles occupent exactement le point-milieu des lignes qu'elles décrivent dans leur mouvement d'oscillation.

Pour faire fonctionner l'appareil, on place le système devant une ouverture étroite que l'on éclaire vivement à l'aide de la lumière solaire ou de la lumière électrique. Le faisceau de lumière qui émane de cette ouverture est réfracté à travers les deux lentilles. On éloigne ou on rapproche l'appareil jusqu'à ce que le foyer conjugué de l'ouverture vienne se faire de l'autre côté à une distance égale à celle qui sépare l'appareil de l'ouverture elle-même. Si l'on fait alors tourner la roue, l'image se met à osciller dans le sens vertical par l'effet du mouvement vertical de la première lentille, et dans le sens horizontal par l'effet du mouvement horizontal de la seconde. A cause de la disposition de l'appareil et de la faible amplitude des mouvements communiqués aux lentilles, les mouvements rectangulaires de l'image sont sensiblement rectilignes, comme ils satisfont d'ailleurs à la loi d'oscillation du pendule

écarté infiniment peu de sa position d'équilibre, la trajectoire décrite par l'image sera, suivant la différence initiale de phase, une ligne droite, une ellipse ou un cercle. Une division tracée sur l'une des faces de la poulie et une aiguille S′, adaptée à l'excentrique mobile E′, *fig.* 22, permet de caler cet excentrique dans les positions qui correspondent aux diverses différences de phase.

Quand on a calé l'excentrique dans une position déterminée, on fait tourner la roue lentement d'abord, ce qui permet de suivre le mouvement de l'image, puis on accélère la rotation, et alors, par suite de la persistance, la trajectoire décrite par l'image s'illumine dans toute son étendue. On peut donc, à l'aide de cet appareil, constater non-seulement la forme de la trajectoire, mais aussi le sens dans lequel elle est parcourue.

Quand on veut opérer en projection dans un amphithéâtre, on reprend l'image formée au foyer conjugué des deux lentilles mobiles, et à l'aide d'une lentille de projection on la rejette tout amplifiée sur un écran placé à grande distance.

En général, dans les divers cas que nous avons considérés la trajectoire peut non-seulement changer de forme avec la différence de phase, mais elle peut aussi reprendre la même forme, tout en étant parcourue dans un sens différent par le mobile; c'est pour cela que sur le tableau de la *fig.* 11, *Pl. II,* nous avons représenté à côté de chaque courbe une flèche indiquant le sens dans lequel la courbe est parcourue par le mobile.

Section C. — *Cas où les nombres de vibrations ne sont pas dans un rapport simple.*

I. — Le rapport des nombres de vibrations diffère infiniment peu d'un rapport simple.

Si le rapport des nombres de vibrations diffère infiniment peu d'un rapport simple, du rapport de 2 à 3 par

exemple, pendant que le premier diapason exécute deux vibrations, le second en fait trois, plus ou moins une très-petite fraction de vibration. Le point lumineux, au lieu de revenir à son point de départ, revient à une distance infiniment petite et fournit alors un second tracé infiniment voisin du premier. Si l'image a une certaine largeur, le deuxième tracé se superpose en partie au tracé précédent, et, si la durée de la sensation correspond à un nombre assez grand de vibrations, l'effet aperçu est dû à la vue simultanée d'un certain nombre de courbes, qui, par suite de leur superposition incomplète, produiront dans le trait un élargissement plus ou moins grand. Mais, à mesure que le mouvement continue, la courbe perd en largeur d'un côté, par suite de l'extinction de la sensation, ce qu'elle gagne de l'autre et passe par des transformations successives semblables à celles qui se produiraient si le cylindre qui est censé porter la courbe tournait d'un mouvement continu autour de son axe, dans le sens même où la courbe se transporte. La courbe prend ainsi toutes les formes qui correspondent à toutes les valeurs par lesquelles peut passer la différence initiale de phase.

On peut facilement apprécier de combien le rapport des nombres de vibrations est éloigné du rapport simple le plus voisin, par la rapidité plus ou moins grande avec laquelle cette espèce de rotation s'accomplit.

Un calcul très-simple nous permet d'y arriver immédiatement.

Soient en effet :

τ la durée d'une vibration double du diapason vertical ;

τ' la durée d'une vibration double du diapason horizontal.

Supposons que pendant un certain temps t, le diapason vertical exécute Am vibrations doubles ; le diapason hori-

zontal exécute $An + \alpha$ vibrations doubles, α étant très-petit.

On a

$$\tau = \frac{t}{Am},$$

$$\tau' = \frac{t}{An + \alpha}.$$

Pendant le temps $m\tau$, le diapason 1 fait m oscillations complètes et verticales.

L'image a en outre tourné pendant le même temps autour du cylindre d'une quantité facile à évaluer en tours et fractions de tour.

En effet, elle tourne d'un tour dans le temps

$$\tau' = \frac{t}{An + \alpha},$$

elle tournera donc dans le temps $m\tau$ de

$$\frac{m\tau}{\tau'} = m \cdot \frac{An + a}{Am} = n + \frac{\alpha}{A}.$$

Par suite le tracé qu'elle parcourra pendant un nouvel intervalle $m\tau$ sera en avance sur le précédent d'une fraction de tour égale à $\frac{\alpha}{A}$.

Supposons maintenant que nous partions du moment où la figure se simplifie par la superposition de la partie antérieure et de la partie postérieure du dessin tracé sur le cylindre; pour que cette superposition ait lieu une seconde fois, il suffit que la figure tourne de la moitié de la fraction de tour comprise entre deux sommets successifs, c'est-à-dire de $\frac{1}{2m}$ de tour. Or la figure tourne de $\frac{\alpha}{A}$ dans le temps $m\tau$, elle tournera donc de $\frac{1}{2m}$ dans le temps $\frac{m\tau A}{2\alpha m} = \frac{A\tau}{2\alpha}$. Or pendant ce temps le premier diapason

fait

$$\frac{A}{2\alpha} \text{ vibrations doubles,}$$

et le second

$$\frac{A}{2\alpha} \times \frac{An + \alpha}{Am} = \frac{A}{2\alpha} \times \frac{n}{m} + \frac{1}{2m},$$

c'est-à-dire le nombre qui correspondait au rapport simple indiqué par la figure, plus $\frac{1}{m}$ de vibration simple.

Ainsi, par exemple, si le premier diapason fait 500^{v} par seconde et que le second soit à la quinte en dessus du premier, si d'ailleurs cette quinte est un peu forte et si l'intervalle entre deux coïncidences de la figure dure 25 secondes, on en conclura que pendant ces 25 secondes

Le premier fait. 12500^{v}.

Et le second... $12500 \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 18750 + \frac{1}{2}$.

II. — *Phénomènes particuliers qui se présentent quand les nombres de vibrations sont peu éloignés d'un rapport simple.*

Nous avons supposé dans le cas précédent les nombres de vibrations assez voisins d'un rapport simple, pour que le point lumineux, après avoir parcouru la courbe dans laquelle il se mouvrait constamment, si le rapport simple n'était pas altéré, revienne à une distance inappréciable de son point de départ. Si cette condition n'est plus sensiblement remplie, alors le point, après la période qui correspond à m vibrations doubles du premier diapason et n plus une fraction du second, trace à côté de la première courbe une seconde courbe *voisine et distincte de la précédente*, puis, à côté de cette dernière, une troisième, etc. Le nombre de ces courbes qui reste visible simultanément dépend de la durée de la sensation, et peut même en fournir une mesure approchée. En effet, si, par exemple, dans la figure

qui correspond au rapport $\frac{m}{n}$ le trait est triplé, cela indique que la durée de la sensation est égale environ au triple du temps pendant lequel le premier diapason fait m vibrations doubles, et le second n.

Ainsi, avec deux diapasons à l'octave, dont le plus grave fait environ 120 vibrations simples par seconde, le trait est triple pour certaines vues, quadruple pour d'autres; la durée de la sensation est donc égale à trois ou quatre fois le temps que le point met à accomplir une vibration double, c'est-à-dire à $\frac{3}{60}$ ou $\frac{4}{60}$ de seconde; cette durée est donc comprise entre $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{15}$ de seconde.

Ce résultat a sa vérification dans un autre phénomène, quand nous employons ce même diapason de 120 vibrations pour obtenir la figure qui correspond à l'intervalle de tierce majeure $\left(\frac{5}{4}\right)$. Cette figure, au lieu de nous présenter un trait continu et fixe, paraît animé d'une sorte de trémulation, comme si des ondes obscures couraient très-rapidement le long du trait entrelacé qui la constitue. En effet, dans ce cas, le point lumineux mobile doit employer pour parcourir la courbe tout entière $\frac{4}{60}$ ou $\frac{1}{15}$ de seconde, et cette durée étant supérieure à la durée de la sensation, le trait doit s'éteindre avant que ses deux extrémités se rejoignent. Il y a donc dans le trait une solution de continuité qui fait le tour de la figure en $\frac{1}{15}$ de seconde, et amène l'apparence de tremblement dont nous venons de parler.

Nous ferons observer en passant que la durée de la sensation est notablement modifiée par l'éclat relatif de la figure et du fond plus ou moins obscur sur lequel elle se détache.

III. — *Cas où le rapport des nombres de vibrations est quelconque.*

Dans ce cas, la figure que parcourt le point lumineux est très-compliquée, mais on n'en voit généralement qu'une partie à la fois, et comme cette partie change à chaque instant, la figure est le siége de transformations continuelles. Néanmoins, toutes les fois que l'on approche d'un rapport simple, on voit apparaître dans le dessin strié que la figure représente l'indication mobile de la figure stable qui correspond à ce rapport. A mesure que l'accord se perfectionne, les stries se serrent, la figure prend son apparence caractéristique, en même temps que son mouvement de révolution se ralentit, et enfin elle devient immobile dès que l'accord est atteint rigoureusement.

CHAPITRE III.

SECTION PREMIÈRE. — *Généralisation de la méthode.*

La méthode optique dont nous nous sommes servi d'abord pour étudier le mouvement des diapasons peut être généralisée et appliquée à l'étude de toute espèce de mouvements vibratoires. Il suffit en effet de composer rectangulairement le mouvement du corps que l'on veut étudier avec celui d'un autre corps qui serve de type.

La première condition à remplir est de ne pas altérer le mouvement vibratoire du corps que l'on étudie en le surchargeant d'un miroir ou de tout autre appareil optique. Nous y sommes parvenu par l'emploi d'un appareil auquel nous avons donné le nom de *comparateur* des mouvements vibratoires.

Cet appareil, dont la disposition peut varier suivant les applications qu'on en veut faire, se compose essentiellement d'un microscope dont l'oculaire et l'objectif sont indépendants, quoique placés à la distance convenable pour

produire leur effet habituel. L'oculaire est monté sur un support invariable, l'objectif est fixé à l'une des branches d'un diapason dont l'autre branche porte un contre-poids; le plan des deux branches du diapason est perpendiculaire à l'axe optique du microscope, de telle sorte que le diapason ne peut vibrer sans entraîner l'objectif dans son mouvement suivant une direction perpendiculaire à l'axe du microscope. Il résulte de là que tout point placé à une distance convenable de l'objectif pour être vu nettement dans le microscope, fournit au foyer de l'oculaire une image qui oscille rapidement dès que l'on fait vibrer le diapason, et se transforme ainsi en une ligne droite perpendiculaire aux branches du diapason.

Prenons maintenant le corps vibrant que nous voulons étudier, rendons un de ses points beaucoup plus brillant que les autres par un de ces moyens simples qu'il est facile d'imaginer dans chaque cas particulier, et dont l'emploi ne produit pas d'altération sensible dans le corps. Plaçons ce corps vis-à-vis du microscope, de façon que le point en question soit nettement visible, et orientons les deux appareils de telle sorte, que l'oscillation du point se fasse dans un plan parallèle à l'objectif et perpendiculaire à la ligne suivant laquelle vibre l'objectif; et alors l'image du point aperçue à travers le microscope sera animée à la fois de deux mouvements oscillatoires perpendiculaires entre eux. La composition de ces deux mouvements fournira l'une des courbes lumineuses étudiées ci-dessus, et permettra de se rendre exactement compte du mouvement dont le corps est animé.

Le diapason du comparateur pouvant être accordé à un ton quelconque, on pourra par exemple l'accorder à l'aide de l'œil sur un étalon donné; il suffira pour cela de marquer un point sur le bout d'une des branches à l'aide d'une pointe fine. Ce point, au moyen d'un éclairage convenable, apparaîtra dans le champ du microscope comme

un point brillant. On pourra ensuite substituer au diapason étalon le corps que l'on veut étudier, et reconnaître s'il donne exactement le même nombre de vibrations. C'est de cette manière que l'on arrivera, sans le secours de l'oreille, à régler autant de diapasons que l'on voudra sur un étalon donné, ou bien à vérifier les différences qui peuvent exister si les diapasons ont été étalonnés par une autre méthode. On peut aussi par le même moyen accorder des diapasons à la tierce, à la quinte, à l'octave, etc., d'un étalon donné.

Remarquons en passant que l'on peut arriver à une grande précision en établissant entre l'étalon et le comparateur une faible différence, que l'on appréciera par les oscillations de la courbe : il faudra, pour que les autres diapasons soient conformes à l'étalon primitif, qu'ils reproduisent dans le même temps exactement le même nombre d'oscillations de la courbe.

La *fig.* 20 représente l'appareil.

O oculaire ;

a objectif ;

M diapason du comparateur ;

D diapason que l'on étudie.

Notre méthode permet également d'étudier les mouvements des fluides. Il suffit à cet effet de coller sur une membrane un petit miroir d'un poids très-faible ; dès que la membrane vibre, le miroir oscille et communique son mouvement à un rayon lumineux que l'on fait réfléchir sur sa surface. Nous avons pu ainsi, dans l'amphithéâtre de la Sorbonne, rendre visible par projection l'oscillation d'une membrane ébranlée à l'aide d'un cornet à piston placé à plusieurs mètres de distance.

Section deuxième. — *Applications diverses.*

Nous allons signaler dans cette deuxième section les applications diverses que notre procédé d'étude nous a paru

susceptible de recevoir. Nous n'avons pas pu donner encore à chacune de ces applications tout le développement dont elle est susceptible. Nous croyons néanmoins devoir faire connaître quelques résultats curieux obtenus dans le courant de nos recherches, et qu'il nous a paru utile de signaler dès à présent.

1. *Etude des battements.*

La plus grande difficulté qui se présente dans l'étude des battements est de distinguer les effets dus à l'interférence des ondes envoyées dans l'espace par les deux corps vibrants, des effets dus à la réaction mutuelle que ces corps peuvent exercer l'un sur l'autre par suite de la communication du mouvement qui s'établit entre eux, soit par l'air, soit par les supports.

Notre méthode permettant d'étudier le phénomène tout à la fois avec l'oreille qui perçoit le battement, et avec l'œil qui apprécie le mouvement vibratoire des deux corps, pourra servir à démêler la part réelle de chacune de ces influences. Nous pouvons le dire dès à présent, la part faite par Savart à la réaction mutuelle des deux corps est beaucoup trop grande. Ainsi deux diapasons montés sur le même support ne réagissent pas sensiblement l'un sur l'autre dès qu'ils sont assez écartés de l'unisson pour produire des battements bien distincts.

2. *Etude des phénomènes de réaction qui se produisent entre des corps vibrants placés sur le même support.*

Deux diapasons à l'unisson, placés sur le même support, réagissent l'un sur l'autre de façon à prendre des mouvements vibratoires qui présentent toujours la même différence de phase. Si une cause quelconque vient à détruire cette différence, elle se rétablit progressivement par le seul fait de la réaction. Voici comment nous avons pu constater le fait précédent : nous avons monté sur le même support

deux diapasons rectangulaires armés de miroirs ; ces diapasons étaient à l'unisson ; ils étaient disposés, comme nous l'avons indiqué plus haut, de façon que l'on pût voir nettement la figure produite par la composition de leurs mouvements vibratoires.

Nous avons attaqué l'un des deux, le diapason horizontal par exemple, avec l'archet, et, au lieu de voir dans la lunette le point lumineux se transformer en une ligne horizontale, nous avons vu se dessiner une ellipse, ce qui indiquait que le diapason vertical vibrait immédiatement par communication. Cette ellipse se présentait toujours avec la même apparence, indiquant par là que la différence de phase était toujours la même. Nous avons ensuite attaqué le diapason vertical, le diapason horizontal étant préalablement ébranlé, et l'ellipse a changé d'inclinaison et de dimension comme cela devait avoir lieu par suite du changement apporté dans l'amplitude des vibrations du diapason vertical, mais elle n'a jamais éprouvé le renversement indiquant d'une façon certaine un changement de phase ; j'ai pu ainsi entretenir le mouvement des diapasons par des coups d'archet appliqués successivement à l'un et à l'autre diapason sans changer l'orientation de l'ellipse, de façon à faire passer son grand axe d'un côté à l'autre de la verticale ou de l'horizontale.

Cet effet s'est produit invariablement toutes les fois que j'ai employé l'archet convenablement, c'est-à dire de façon à entretenir le mouvement sans l'éteindre préalablement ; mais si j'employais à dessein l'archet d'une façon maladroite, c'est-à-dire si j'arrêtais le mouvement du diapason par le contact de l'archet, pour le rétablir immédiatement, alors la différence de phase était la plupart du temps modifiée ; l'ellipse n'était plus orientée de la même manière ; mais dès que l'archet était enlevé, on la voyait se déplacer graduellement et reprendre l'orientation qui correspondait à la différence normale de phase. Ainsi ces expériences établissent non-seulement le principe que nous avons posé en

commençant, mais encore le fait suivant relatif à l'action de l'archet. L'archet employé convenablement entretient le mouvement vibratoire sans modifier sa phase. Nous faisons, bien entendu, toutes réserves relativement aux circonstances exceptionnelles dans lesquelles, d'après M. Duhamel, l'archet abaisse le son.

3. *Vérification du défaut d'isochronisme des mouvements vibratoires, lorsque l'amplitude varie entre des limites trop étendues.*

Lorsqu'un diapason est fortement ébranlé, ses vibrations sont plus lentes. Il ne faut pas confondre cet abaissement, qui est inappréciable à l'oreille, avec l'abaissement apparent que subit le ton d'un diapason monté sur une caisse sonore. Il y a dans ce dernier cas une illusion due à l'intensité trop grande du son, illusion qui cesse dès que l'on affaiblit suffisamment l'intensité du son par un éloignement convenable. L'abaissement dont nous voulons parler est égal à une très-petite fraction de vibration en une seconde. Nous le constatons de la manière suivante.

Nous accordons deux diapasons à un intervalle simple quelconque, par exemple à l'intervalle de quinte. Nous tenons le diapason le plus aigu un peu trop haut; la figure lumineuse que fournissent nos diapasons combinés à angle droit oscille lentement. La rapidité de l'oscillation varie selon que nous ébranlons plus fortement le diapason grave ou le diapason aigu. Si c'est le diapason aigu qui vibre le plus fortement, le mouvement se ralentit, dans le cas contraire il s'accélère. On doit donc conclure de là que les vibrations de chaque diapason sont plus rapides quand l'amplitude diminue.

Les différents diapasons doivent suivant leur forme se rapprocher plus ou moins de l'isochronisme, toutes choses égales d'ailleurs. Y a-t-il à cet égard une forme qui corresponde à un minimum d'erreur? Y a-t-il même une forme

qui réalise l'isochronisme comme il est réalisé dans le pendule cycloïdal ? Ce sont là des questions que j'ai dû me poser, mais que le temps ne m'a pas encore permis de résoudre.

4. *Mesure du nombre absolu de vibrations qui correspond à un son donné.*

Notre méthode optique ne permet pas seulement de comparer les rapports numériques des sons, elle permet aussi de déterminer le nombre absolu de vibrations qui correspond à un son donné, et cela sans le secours de l'oreille.

Sauveur a donné une méthode ingénieuse pour déterminer un son fixe. Cette méthode consiste à accorder deux tuyaux graves à un intervalle musical assez petit pour qu'ils produisent des battements. La connaissance de l'intervalle musical donne le rapport numérique des nombres de vibrations, l'évaluation du nombre de battements produits dans un temps donné fournit la différence des nombres de vibrations produits dans l'unité de temps. On a donc tout ce qu'il faut pour calculer le nombre exact de vibrations exécutées par chaque tuyau dans l'unité de temps. Cette méthode, fondée sur des données dont l'évaluation précise est impossible, ne peut pas fournir de résultats exacts.

Scheibler a imaginé une méthode analogue quant à son principe, et qui consiste à régler cinquante-six diapasons de façon à remplir un intervalle d'octave. Ces diapasons doivent en outre présenter du premier au second, du second au troisième, etc., une différence constante de huit vibrations simples par seconde, et produire par conséquent quatre battements. Si ces conditions sont remplies, le premier diapason doit faire exactement 440 vibrations simples par seconde, et le dernier 880. Cette méthode présente dans la pratique de très-grandes difficultés, surtout à cause de la longueur rebutante du travail d'ajustement qu'elle entraîne avec elle.

Celle que nous proposons tient à la fois des deux méthodes, mais elle a sur celle de Sauveur l'avantage de l'exactitude, et sur celle de Scheibler l'avantage de la simplicité.

A cet effet je prends trois diapasons A, B, C, armés de miroirs : le diapason C fait environ 128 vibrations simples par seconde, le diapason A est accordé à la tierce mineure $\frac{5}{6}$ en dessous du diapason C, le diapason B est accordé à un intervalle plus faible, l'intervalle $\frac{6}{7}$; on a tenu chacun des diapasons A et B un peu bas.

Je dispose les trois diapasons sur une table. Chacun des supports ne touche la table qu'en trois points, et en ces points mêmes on a placé plusieurs épaisseurs de papier mou pour empêcher la communication des vibrations et les réactions qui pourraient en être la conséquence.

Les diapasons A et B sont verticaux, le diapason C est seul horizontal. Un pinceau de lumière, parti d'une lampe revêtue d'une cheminée opaque et percée seulement d'un petit trou, tombe sur le miroir du diapason A, de là sur celui du diapason B, de là sur le miroir du diapason C, et enfin dans la lunette qui sert à observer les phénomènes.

On fait d'abord vibrer A et C, on observe alors la figure qui correspond au rapport $\frac{5}{6}$. Cette figure n'étant pas absolument immobile, on compte le nombre n de coïncidences produit dans un certain temps t.

On fait ensuite la même observation sur les diapasons B et C; on voit alors la figure qui correspond à $\frac{6}{7}$, et l'on compte le nombre n' de coïncidences produites par la révolution de la figure dans le temps t'.

Enfin on fait vibrer à la fois A et B, d'après les nombres adoptés; ces deux diapasons font des nombres de vibrations assez voisins pour produire le phénomène des battements : on peut donc compter le nombre N de battements produits dans un certain temps T.

Soit maintenant x le nombre inconnu de vibrations simples produites par le diapason C dans une seconde.

Le diapason A fait dans une seconde... $x \times \frac{5}{6} - \frac{n}{t} \times \frac{1}{6}$.

Le diapason B..... $x \times \frac{6}{7} - \frac{n'}{t'} \times \frac{1}{7}$.

Donc

$$\left(x \times \frac{6}{7} - \frac{n'}{7t'}\right) - \left(x \times \frac{5}{6} - \frac{n}{6t}\right) = \frac{2N}{T},$$

d'où

$$x = 42.\left[\frac{2N}{T} - \frac{n}{6t} + \frac{n'}{7t'}\right].$$

Pour donner une idée des résultats que cette méthode peut fournir, je citerai ici trois observations faites sur l'invitation de la Commission de l'Académie des Sciences chargée de l'examen de ce travail.

L'observation du temps se faisait à l'aide d'un compteur à pointage que l'on avait soin de vérifier dans l'intervalle des observations sur un chronomètre.

Première expérience.

Comparaison du compteur au chronomètre.

Le compteur avance de 0″,6 en 3′ ou de 0″,2 en 1′.

Comparaison entre A et C. $\left(\text{Rapport environ } \frac{5}{6}\cdot \text{ A trop bas.}\right)$

12 coïncidences en $\begin{cases} 41'',4 \\ 43'',4 \end{cases}$

Moyenne... 12 coïncidences en 42″,4..

Comparaison entre B et C. $\left(\text{Rapport approché } \frac{6}{7}\cdot \text{ B trop bas.}\right)$

30 coïncidences en $\begin{cases} 64'' \\ 63'',2 \end{cases}$

Moyenne.. 30 coïncidences en 63″,6.

Comparaison de A avec B.

180 battements complets en $\begin{cases} 1' - 59'',2 \\ 1' - 59'',4 \end{cases}$

Moyenne... 180 battements en $1' - 59'',3$.

Vérification du compteur. Avance nulle en 3′.

Deuxième expérience.

Comparaison du compteur au chronomètre.
Le compteur avance de $0'',4$ en 2′ ou de $0'',2$ en 1′.

A et C donnent 12 coïncidences en :

$44'',8$
$45'',2$
$44'',6$

Moyenne... $44'',86$

B et C donnent 30 coïncidences en :

$64''$
$64''$
$63'',4$

Moyenne... $63'',8$

Vérification du compteur. Avance de $0'',4$ par minute.

A et B donnent 180 battements en :

$1' - 59'',2$
$1' - 59'',2$
$1' - 59'',2$

Vérification du compteur.

Le compteur avance de 1″ en 3′, soit $0'',333$ par 1′.

Troisième expérience.

Vérification du compteur. Le compteur avance de $1'',4$ en 3′, soit $0'',46$ en 1′.

A et C donnent 12 coïncidences en :

	35″,2
	36″,2
	35″,6
Moyenne...	35″,66

Vérification du compteur. Avance de 1″ en 3′ ou 0″,33 en 1′.

B et C donnent 30 coïncidences en :

	60″,8
	61″,4
	61″,0
Moyenne...	61″,06

Vérification du compteur. Le compteur avance de 0″,6 en 3′, soit de 0″,2 en 1′.

A et B donnent 180 battements en :

	1′ — 59″,0
	1′ — 59″,2
Moyenne...	1′ — 59″,1

Vérification du compteur. Le compteur avance de 0″,6 en 3′, soit 0″,2 en 1′.

Les résultats de ces trois expériences se résument dans le tableau suivant :

	n	t	n'	t'	N	T	AVANCE moyenne du compteur.	COEFFICIENT de correction pour le temps.	VALEUR de x.
1re expérience.	12	42″,4	30	63″,6	180	1′ 59″,3	0″,1 en 1′	$\frac{601}{600}$	127,80
2e expérience.	12	44,86	30	63,8	180	1′ 59″,2	0″,311 en 1′	$\frac{60311}{60000}$	128,45
3e expérience.	12	35,66	30	61,06	180	1′ 59″,1	0″,42 en 1′	$\frac{6041}{6000}$	128,07
								Moyenne....	128,08

Pour confirmer le résultat obtenu par cette méthode, j'ai, à l'aide du comparateur optique, comparé le diapason C avec un étalon ut_3 dont j'avais moi-même déterminé le nombre de vérification à l'aide de la sirène ; j'ai reconnu que le diapason C était un peu plus haut que la double octave grave du diapason ut_3, et qu'il fournissait au comparateur préalablement accordé au diapason ut_3 19 coïncidences en 76 secondes ; d'après cela le diapason ut_3 devra faire par seconde

$$128,08 \times 4 - \frac{19^v}{76} = 512,07.$$

La moyenne de cinq déterminations faites avec la sirène avait donné précédemment pour le diapason ut_3 512,77, ce qui fait une différence d'environ $\frac{1}{700}$.

L'exactitude de ce genre de déterminations est entravée un peu par le défaut d'isochronisme des diapasons. Si j'avais pu opérer avec des appareils ayant assez de masse pour que leur son durât longtemps en conservant sensiblement la même amplitude, je serais arrivé à des déterminations plus précises.

C'est surtout pour les deux diapasons destinés à déterminer le battement que la prolongation des vibrations est utile ; en effet, toute erreur faite sur ce nombre est multipliée par un coefficient élevé quand on passe par le calcul au nombre de vibrations du diapason fondamental.

Je suis parvenu à prolonger indéfiniment ces vibrations au moyen de l'ingénieux interrupteur à mercure imaginé récemment par M. Léon Foucault.

A cet effet le diapason à mettre en vibration est armé de deux morceaux de fer doux ; il est placé entre deux électro-aimants compris dans le même circuit. Le courant d'une pile passe à la fois dans ces électro-aimants, et dans l'interrupteur à mercure dont la lame oscille sous l'influence du courant. En faisant varier peu à peu la réaction de la lame par un changement de longueur ou une surcharge, on

l'amène à vibrer à l'unisson du diapason, ou à l'octave ou même à la double octave grave. Si c'est cette dernière condition qui est remplie, les électro-aimants du diapason impriment aux branches des secousses périodiques dont le rhythme concorde avec celui du diapason ; toutes les quatre vibrations, le mouvement du diapason est aidé par la secousse que l'attraction des électro-aimants lui communique, et il se met à vibrer comme sous l'influence d'une sorte d'archet électrique dont l'action lui restitue périodiquement la force vive perdue par la communication de son mouvement vibratoire aux corps ambiants.

Pour me rendre compte de la relation qui existe entre le mouvement de l'interrupteur et celui du diapason, j'ai placé sur l'interrupteur une petite lame métallique percée d'un trou que j'illumine à l'aide d'une lampe.

On regarde à l'aide de la lunette l'image de ce trou dans un petit miroir fixé sur l'extrémité du diapason, on aperçoit ainsi une figure dont la fixité est complète si les deux mouvements se font synchroniquement. Il est à remarquer que le diapason réagit par suite de l'induction des bobines des électro-aimants sur l'interrupteur, de façon à forcer celui-ci non-seulement à se mettre au ton du diapason, mais même à prendre relativement au mouvement du diapason la différence de phase la plus favorable à la conservation des deux mouvements. Bien entendu que cet effet ne se produit que quand l'accord entre les deux appareils est presque irréprochable. On peut du reste, en suivant dans la lunette les transformations de la figure, modifier les actions du ressort jusqu'à ce que l'on obtienne à la fois le maximum d'effet et la plus grande fixité possible.

La disposition générale de l'appareil est représentée par la *fig.* 24.

D diapason à mettre en vibration ;

EE′ électro-aimants qui agissent sur les petits contacts de fer doux fixés aux deux bouts du diapason ;

A électro-aimant de l'interrupteur ;
NQ lame de l'interrupteur ;
I vase renfermant du mercure dans lequel plonge périodiquement une pointe de platine fixée à la lame (ce mercure est recouvert d'une couche d'alcool) ;
H vis de rappel de l'électro-aimant A ;
R vis de rappel du vase I ;
M miroir fixé au bout de l'une des branches du diapason ;
L lunette destinée à observer dans le miroir M l'image réfléchie du trou pratiqué dans la plaque V qui sert de viseur ;
(On a pas figuré la lampe qui sert à éclairer la plaque V.)
P P éléments de pile dont le nombre varie avec la force du diapason, les dimensions de l'interrupteur et la disposition de l'électro-aimant.

5. *Etude des vibrations des cordes.*

Nous avons essayé d'appliquer notre méthode à l'étude des vibrations des cordes, et nous y sommes parvenu de la manière suivante : La corde était noircie au noir de fumée dans la région que l'on voulait étudier, puis on détachait à l'aide d'une pointe une parcelle de noir, de façon à mettre le métal à nu en un point. Ce point était rendu brillant au moyen d'un éclairage convenable. La corde était tendue horizontalement sur un sonomètre de 2 à 3 mètres de long, et on pouvait la faire vibrer soit en la pinçant, soit en l'attaquant à l'aide d'un marteau. Le point lumineux oscillait donc verticalement ; on le regardait à l'aide d'une lunette à court foyer dont l'oculaire était immobile, et l'objectif fixé à l'une des branches d'un diapason vertical. L'objectif oscillait donc horizontalement, et l'image du point lumineux décrivait dans le champ du microscope la courbe résultant de la composition des deux mouvements.

On pinçait la corde de façon à lui faire rendre le son

fondamental seulement, et l'on arrivait ainsi à l'accorder sur le diapason soit en la tendant progressivement, soit en modifiant le son du diapason à l'aide de deux curseurs dont il était muni.

Le son fondamental de la corde étant accordé sur le diapason, on apercevait dans le champ du microscope l'ellipse immobile. Si l'on venait alors à attaquer la corde avec le marteau ou à la pincer au hasard, on constatait que l'ellipse était déformée par l'introduction d'un certain nombre de dentelures correspondant à l'un des harmoniques qui accompagnaient le son fondamental. On pouvait ainsi en changeant le point où l'on examinait la corde, apercevoir l'indication de tel ou tel harmonique. Si cet harmonique était d'accord avec le son fondamental, la courbe restait immobile; s'il était en désaccord, les dentelures tournaient plus ou moins rapidement autour de l'ellipse. Si le son harmonique était d'accord avec le son du diapason pris pour son fondamental, il pouvait arriver alors que le son fondamental de la corde elle-même ne fût pas à l'unisson de celui du diapason. On voyait alors la corde osciller sans que les sinuosités eussent aucun mouvement de rotation, tandis que dans le cas où le diapason n'était d'accord ni avec le son fondamental ni avec l'harmonique, il y avait alors à la fois rotation des sinuosités et oscillation de la courbe.

Ce défaut d'accord entre l'harmonique et le son fondamental fournit un moyen très-sensible de reconnaître les défauts d'homogénéité d'une corde. En effet, ce défaut d'homogénéité ne peut pas avoir la même influence sur le son fondamental et sur les harmoniques ; il doit donc amener un désaccord, ou tout au moins modifier le désaccord qui existait primitivement. Ce résultat peut être mis en évidence de la manière suivante : On surcharge légèrement un des points de la corde, ou même on se contente de la recuire dans un de ses points, et immédiatement on reconnaît que les sinuosités indicatrices de la présence d'un har-

monique ne peuvent plus rester fixes même quand on a préalablement accordé le son fondamental de la corde sur le diapason.

L'emploi du noir de fumée présente quelques difficultés dans certains cas, et on peut même craindre, en l'appliquant au moyen d'une flamme, de modifier l'élasticité de la corde par le recuit.

On peut obtenir le même résultat en éclairant le point de la corde sur lequel est dirigé le comparateur, *fig.* 25, à l'aide d'une lentille cylindrique L. A cet effet on prend pour source de lumière une lampe revêtue d'une cheminée percée d'une fente étroite. Une lentille cylindrique placée à une distance convenable de la lampe concentre la lumière sur une ligne également verticale, on place au foyer le point de la corde que l'on examine. Si on fait vibrer la corde, le point illuminé ne s'éloigne pas sensiblement du foyer, et reste toujours éclairé comme dans l'expérience précédente. On peut alors l'examiner à l'aide du comparateur, et accorder ainsi la corde sans le secours de l'oreille, non-seulement à l'unisson, mais à l'octave, à la tierce, à la quinte, etc., du son du comparateur.

Je n'emploie plus d'autre moyen pour accorder mon sonomètre.

Nous n'insisterons pas davantage sur les applications diverses de la méthode optique décrite dans ce Mémoire. Nous espérons en tirer parti dans les recherches que nous pourrons entreprendre sur divers points de l'acoustique. Nous pensons du reste que son utilité sera généralement reconnue; elle aura sans doute son emploi dans d'autres branches de la physique, notamment en optique, pour mesurer la durée de la sensation visuelle, en électricité pour mesurer la durée de l'étincelle électrique. Mais son plus grand avantage à nos yeux, c'est de fournir aux acousticiens un moyen de contrôler, toutes les fois qu'ils le jugent nécessaire, les résultats obtenus avec le secours de l'oreille.

Ainsi c'est peut-être le moyen le plus sûr de terminer expérimentalement la discussion interminable des physiciens et des musiciens au sujet du dièze et du bémol, et des intervalles de la gamme. Avec des appareils dont les mouvements vibratoires seraient mesurés optiquement, on pourrait produire des sons dont l'appréciation serait confiée à des oreilles musicales, et lorsque les musiciens auraient choisi pour les notes de la gamme les sons qui leur paraîtraient les plus convenables, l'étude optique de ces sons établirait d'une façon incontestable leurs rapports numériques. On ferait ainsi la part naturelle des deux organes : à l'oreille le soin d'apprécier la justesse des sons, à l'œil le soin de compter exactement le nombre de leurs vibrations.

CHAPITRE IV.

Calcul de l'équation générale des courbes obtenues dans la composition des mouvements vibratoires rectangulaires.

Pour obtenir l'équation générale de ces courbes, il est d'abord nécessaire d'admettre quelques restrictions relativement à la loi du mouvement vibratoire auquel est assujetti le point que l'on observe.

Soit O le point lumineux dans sa position d'équilibre ; soient X'X, Y'Y, les directions horizontale et verticale suivant lesquelles il oscille ; soient y et x les coordonnées d'un point de la courbe, c'est-à-dire les distances variables qui correspondent aux déplacements simultanés du point lumineux O dans le sens horizontal et dans le sens vertical.

Nous admettrons que chacun des mouvements oscillatoires suive la loi du pendule, et de plus que dans un même temps θ, aussi long qu'il sera nécessaire, les deux mouvements fournissent des nombres entiers n et n' de vibrations doubles.

Soient

τ la durée de l'oscillation horizontale ;

τ' la durée de l'oscillation verticale.

Nous aurons

$$(1) \qquad x = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{s}{\tau}\right),$$

$$(2) \qquad y = b \sin 2\pi \frac{t}{\tau'},$$

$\frac{s}{\tau}$ étant la différence de phase, c'est-à-dire la fraction de la durée d'une vibration double du diapason horizontal qui s'écoule entre les instants où les deux diapasons passent par leur forme d'équilibre dans le sens qui communique au point lumineux un déplacement vers la partie positive des axes des coordonnées. Cette différence est positive si le diapason horizontal est en avance sur l'autre, négative dans le cas contraire.

Nous avons de plus

$$n\tau = \theta, \quad n'\tau' = \theta ;$$

donc

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta} (t + s),$$

$$y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta}.$$

Telles sont les équations de la courbe entre les trois variables x, y et t.

On pourrait tracer la courbe en donnant à t des valeurs successives, et on aurait ainsi la trajectoire du point lumineux et l'indication précise de la manière dont les diverses parties sont tracées. Mais ce qui nous importe, c'est moins d'avoir la trajectoire que la courbe d'impression, telle que l'œil l'aperçoit. Or cette courbe peut correspondre à des trajectoires tout à fait différentes. Nous laissons donc de côté

la trajectoire elle-même, et nous nous contentons de l'étude de la figure visible.

Nous pouvons, sans résoudre les équations, reconnaître quelques-unes des propriétés de la courbe.

Remarquons d'abord que nous obtiendrons tous les points de la courbe en faisant varier t de o à θ.

Ceci posé, quand n est pair et n' impair, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x.

Nous avons en effet

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}(t+s), \quad y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta},$$

Or, si nous changeons t en $t + \frac{\theta}{2}$, il vient

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}(t+s), \quad y = -b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta}.$$

c'est-à-dire que si une certaine valeur de x correspond à une certaine valeur de y, quand n reprendra la même valeur par suite de l'augmentation de t, nous trouverons pour y une valeur égale et contraire : ce qui démontre le principe énoncé.

On démontrerait de même que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y, lorsque n est impair et n' pair.

Quand n et n' sont impairs, le changement de t en $t + \frac{\theta}{2}$ change x en $-x$, y en $-y$; par suite, chaque point de la courbe obtenu par les valeurs de t comprises entre o et $\frac{\theta}{2}$ est reproduit à égale distance et de l'autre côté de l'origine quand on passe de $\frac{\theta}{2}$ à θ et inversement, c'est-à-dire que l'origine est un centre pour la courbe.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de démontrer que certains changements dans la valeur de s reproduisent la courbe primitive ou la symétrique par rapport à l'axe des x ou à l'axe des y

D'abord, toutes les fois que s augmente ou diminue de $\frac{2\theta}{2n}$, $\frac{4\theta}{2n}$, $\frac{6\theta}{2n}$, $\frac{2k\theta}{2n}$, x et y reprennent les mêmes valeurs pour les mêmes valeurs de t, par conséquent la courbe conserve sa forme.

Secondement, si s augmente ou diminue de $\frac{\theta}{2n}$, $\frac{3\theta}{2n}$, $\frac{(2k+1)\theta}{2n}$, l'arc compris sous le signe sinus augmente ou diminue de π, 3π, $(2k+1)\pi$; la valeur du sinus pour une même valeur de t change de signe; il en est de même de x qui prend pour les mêmes valeurs de t des valeurs égales à celles qu'il prenait précédemment, mais de signe contraire. Ainsi dans ce cas la courbe obtenue est la symétrique de la courbe primitive par rapport à l'axe des y.

Troisièmement, si s augmente de $\frac{2k\theta}{2n'}$, les équations deviennent

$$x = a \sin\left[\frac{2n\pi}{\theta}(t+s) + \frac{2nk}{n'}\pi\right],$$

$$y = b \sin\frac{2n'\pi t}{\theta}.$$

La courbe reprend alors sa forme primitive, seulement elle donne les mêmes valeurs de x et y pour une valeur de t différente et égale à $T+\Sigma$, Σ étant une certaine constante; en effet, faisons dans nos deux équations $t = T+\Sigma$, et représentons par x' et y' les valeurs correspondantes de x et de y, il vient

$$x' = a \sin\left[\frac{2n\pi}{\theta}(T+s) + \frac{2n\pi\Sigma}{\theta} + \frac{2nk\pi}{n'}\right],$$

$$y' = b \sin\left(\frac{2n'\pi T}{\theta} + \frac{2n'\pi\Sigma}{\theta}\right).$$

Or ces équations doivent pouvoir pour une certaine va-

leur de Σ devenir identiques aux équations primitives

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta} (T + s),$$

$$y = b \sin \frac{2n'\pi T}{\theta}.$$

Il faut pour cela choisir Σ de façon que $x = x'$, $y = y'$, quel que soit t.

Or il suffit pour cela que l'on ait

$$\frac{2n\pi\Sigma}{\theta} + \frac{2nk\pi}{n'} = 2h\pi,$$

h étant un nombre entier, et

$$\frac{2n'\pi\Sigma}{\theta} = 2h'\pi,$$

h' étant un nombre entier, Σ ayant la même valeur dans les deux équations.

Éliminons Σ entre ces deux équations, et il vient

$$n'h - nh' = nk,$$

équation qui peut toujours être satisfaite par des valeurs entières de h et de h', car n et n' sont premiers entre eux et entiers ainsi que k.

Ainsi, quand s augmente de $\frac{2k\theta}{2n'}$, la courbe reprend la même forme.

4°. Quand s augmente de $\frac{(2k+1)\theta}{2n'}$, les équations deviennent

$$x = a \sin \left[\frac{2n\pi}{\theta} (t + s) + \frac{(2k+1)n}{n'} \pi \right],$$

$$y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta}.$$

Faisons comme ci-dessus $t = T + \Sigma$, il vient

$$x' = a \sin \left[\frac{2n\pi}{\theta} ((T + s) + \frac{2n\pi\Sigma}{\theta} + \frac{(2k+1)n\pi}{n'} \right],$$

$$y' = b \sin \left(\frac{2n'\pi T}{\theta} + \frac{2n'\pi\Sigma}{\theta} \right).$$

Comparons ces équations aux équations primitives

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta} (T + s),$$

$$y = b \sin \frac{2n'\pi T}{\theta}.$$

Posons

$$\frac{2n'\pi\Sigma}{\theta} = (2h' - 1)\pi,$$

$$\frac{2n\pi\Sigma}{\theta} + \frac{(2k+1)n\pi}{n'} = 2h\pi.$$

Éliminons Σ entre ces deux équations, nous obtenons l'équation de condition

$$n'h - nh' = nk.$$

Cette équation peut toujours être satisfaite par des valeurs entières de h et de h', par suite nous pouvons toujours trouver une valeur de Σ telle, que

$$x = x', \quad y = -y',$$

quel que soit le temps.

Ainsi, quand s augmente de $\frac{(2k+1)\theta}{2n'}$, la courbe se change en sa symétrique par rapport à l'axe des x.

5°. Considérons maintenant le cas où S croît ou diminue de $\frac{2k\theta}{2nn'}$; les équations deviennent

$$x = a \sin \left[\frac{2n\pi}{\theta} (t + s) + \frac{2k\pi}{n'} \right],$$

$$y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta}.$$

Faisons, comme ci-dessus, $t = T + \Sigma$, il vient

$$x' = a \sin \left[\frac{2n\pi}{\theta} (T + s) + \frac{2n\pi\Sigma}{\theta} + \frac{2k\pi}{n'} \right],$$

$$y' = b \sin \left(\frac{2n'\pi T}{\theta} + \frac{2n'\pi\Sigma}{\theta} \right).$$

Pour identifier ces équations aux équations primitives, il faut poser

$$2h\pi = \frac{2n\pi\Sigma}{\theta} + \frac{2k\pi}{n'},$$

$$2h'\pi = \frac{2n'\pi\Sigma}{\theta};$$

d'où, en éliminant s entre ces deux équations,

$$n'h - nh' = k,$$

équation qui peut toujours être satisfaite par des valeurs entières de h et de h'; donc on peut toujours trouver une valeur de Σ qui donne $x = x', y = y'$.

6°. Si Σ croît de $\frac{(2k+1)\theta}{2nn'}$, les équations de la courbe deviennent

$$x = a \sin\left[\frac{2n\pi}{\theta}(t+s) + \frac{(2k+1)\pi}{n'}\right],$$

$$y = b \sin\frac{2n'\pi t}{\theta}.$$

Faisons comme ci-dessus $t = T + \Sigma$, il vient

$$x' = a \sin\left[\frac{2n\pi}{\theta}(T+s) + \frac{2n\pi\Sigma}{\theta} + \frac{(2k+1)\pi}{n'}\right],$$

$$y' = b \sin\left(\frac{2n'\pi T}{\theta} + \frac{2n'\pi\Sigma}{\theta}\right).$$

Or nous pouvons poser

$$\frac{2n\pi\Sigma}{\theta} + \frac{(2k+1)\pi}{n'} = 2h\pi,$$

$$\frac{2n'\pi\Sigma}{\theta} = (2h'-1)\pi.$$

Éliminons Σ entre ces deux équations, et il vient

$$(2k+1) = 2n'h - 2nh' + n$$

ou

$$2n'h - 2nh' = 2k + 1 + n.$$

Or cette équation ne peut se résoudre en nombres entiers que si n est impair, dans ce cas $x' = x, y' = y$: c'est-à-dire que la courbe nouvelle est la symétrique de la première par rapport à l'axe des x.

Si nous posions

$$\frac{2n\pi s}{\theta} = \frac{(2k+1)\pi}{n'} = (2h-1)\pi$$

et

$$\frac{2n'\pi s}{\theta} = 2h'\pi,$$

il viendrait

$$(2k+1) = 2n'h - n' - 2nh'$$

ou

$$2n'h - 2nh' = 2k + 1 + n',$$

équation qui ne peut se résoudre en nombres entiers que si n' est impair ; dans ce cas

$$x' = -x \quad \text{et} \quad y' = y.$$

La courbe nouvelle est symétrique de la première par rapport à l'axe des y.

Enfin si n et n' sont impairs tous deux, on peut donner à Σ une valeur telle, que

$$x = x', \quad \text{alors} \quad y = -y',$$

et si l'on donne à s une valeur telle, que

$$x = -x', \quad \text{alors} \quad y = y'.$$

Ainsi, quand s croît de $\frac{(2k+1)\theta}{2nn'}$, la courbe se change en sa symétrique par rapport à l'axe des x si n est impair, en sa symétrique par rapport à l'axe des y si n' est impair ; et si n et n' sont impairs, en sa symétrique soit par rapport à l'axe des x, soit par rapport à l'axe des y.

Du reste les deux courbes ainsi obtenues sont identiques, quoiqu'elles correspondent à des valeurs différentes de Σ.

En effet, dans le premier cas les équations de la courbe sont

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}(t+s),$$

$$y = -b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta}.$$

Changeons t en $t + \frac{\theta}{2}$, et observons que n et n' sont impairs; nous aurons alors

$$x = a \sin\left[\frac{2n\pi}{\theta}(t+s) + n\pi\right] = -a \sin \frac{2n\pi}{\theta}(t+s),$$

$$y = -b \sin\left(\frac{2n'\pi t}{\theta} + n'\pi\right) = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta},$$

équations de la courbe dans le second cas.

7°. Examinons ce qui arrive quand on change, dans l'équation en x, s en $-s$. Pour cela observons que nous pouvons obtenir le tracé de la courbe en donnant à t toutes les valeurs possibles positives ou négatives, seulement nous avons le tracé complet dès que nous avons parcouru un invalle de temps égal à θ.

Ceci posé, considérons les équations

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}(t+s), \quad y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta}$$

et

$$x' = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}(t-s), \quad y' = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta}.$$

Si nous prenons dans le deuxième groupe la série des valeurs négatives de t, de o à $-\theta$, ce sera comme si nous donnions à t toutes les valeurs positives depuis o jusqu'à θ dans les équations

$$x' = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}(-t-s), \quad y' = -b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta}$$

ou

$$x' = -a \sin \frac{2n\pi}{\theta}(t+s), \quad y' = -b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta};$$

donc

$$x = -x', \quad y = -y',$$

quel que soit t, c'est-à-dire que la courbe nouvelle s'obtient en renversant la courbe primitive d'abord autour de l'axe des y, puis autour de l'axe des x. Ce renversement a les conséquences suivantes :

Si n est impair et n' pair, le deuxième renversement n'a pas d'effet; la courbe nouvelle est donc la symétrique de la première par rapport à l'axe des y.

Si n est pair et n' impair, le premier renversement ne modifie pas la courbe, et le deuxième renversement nous donne la symétrique de la première courbe par rapport à l'axe des x.

Si n et n' sont impairs, le double renversement autour des deux axes ramène la courbe primitive.

8°. Le changement de t en $-t$ n'a pas d'influence sur la forme de la courbe, car on n'a qu'à donner dans les équations ainsi transformées à t toutes les valeurs négatives comprises entre o et $-\theta$, et on obtiendra les mêmes valeurs pour x et y, qu'en donnant dans les équations primitives à t toutes les valeurs comprises entre o et $+\theta$.

Ainsi, pour résumer la discussion précédente dont nous allons tirer parti dans la mise en équation de nos courbes :

1°. Quand n est pair et n' impair, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x.

2°. Quand n est impair et n' pair, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y.

3°. Quand n et n' sont impairs, la courbe a un centre qui est l'origine des coordonnées et elle revient à sa forme primitive par un double renversement autour des axes des coordonnées; en second lieu, le renversement de la courbe autour de l'axe des y donne le même résultat que son renversement autour de l'axe des x.

4°. Si S augmente ou diminue de $\frac{2k\theta}{2n}$, ou de $\frac{2k\theta}{2n'}$, ou de $\frac{2k\theta}{2nn'}$, la courbe conserve sa forme.

5°. Si S augmente ou diminue de $\frac{(2k+1)\theta}{2n}$, la courbe est remplacée par sa symétrique par rapport à l'axe des y.

Si S augmente ou diminue de $\frac{(2k+1)\theta}{2n'}$, la courbe est remplacée par sa symétrique par rapport à l'axe des x.

6°. Si S augmente ou diminue de $\frac{(2k+1)\theta}{2nn'}$, il y a trois cas à considérer :

Si n est impair, n' pair, la courbe est remplacée par la symétrique par rapport à l'axe des x.

Si n est pair, n' impair, la courbe est remplacée par la symétrique par rapport à l'axe des y.

Si n et n' sont impairs, la courbe est remplacée par la symétrique par rapport à l'un quelconque des axes.

7°. Si on change s en $-s$, il y a trois cas à considérer :

Si n est impair, n' pair, la courbe est remplacée par la symétrique par rapport à l'axe des y.

Si n est pair, n' impair, la courbe est remplacée par la symétrique par rapport à l'axe des x.

Si n et n' sont impairs, la courbe ne change pas.

8°. Le changement de t en $-t$ dans les deux équations ne change pas la forme de la courbe.

Revenons maintenant à la mise en équation de la courbe.

Posons

$$\frac{2n\pi t}{\theta} = p, \quad \frac{2n'\pi t}{\theta} = q, \quad \frac{2n\pi s}{\theta} = r,$$

nous aurons

$$pn' = qn; \tag{2}$$

donc

$$\cos pn' = \cos qn, \tag{3}$$

ou, en développant,

$$\begin{cases} (\cos p)^{n'} - \dfrac{n'(n'-1)}{1.2}\sin^2 p\,(\cos p)^{n'-2} + , \ldots , \\ = (\cos q)^{n} - \dfrac{n(n-1)}{1.2}\sin^2 q\,(\cos q)^{n-2} + \ldots . \end{cases} \tag{4}$$

Il ne reste plus qu'à substituer dans cette équation les valeurs de $\sin p$, $\cos p$, $\sin q$, $\cos q$, en fonction de x et y.

Or nous avons

$$(5)\quad \begin{cases} \sin q = \dfrac{y}{b}, \\ \cos q = \pm\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{b^2}}. \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \sin(p + r) = \sin p \cos r + \cos p \sin r \\ \qquad\qquad = \sin p \cos r \pm \sin r \sqrt{1 - \sin^2 p}, \end{cases}$$

d'où l'on tire, en faisant disparaître le radical,

$$-2\frac{x}{a}\sin p\cos r + \sin^2 p\cos^2 r - \sin^2 r + \sin^2 r\sin^2 p = 0,$$

d'où

$$\sin^2 p - 2\frac{x}{a}\cos r\sin p + \frac{x^2}{a^2} - \sin^2 r = 0,$$

d'où

$$(7)\qquad \sin p = \frac{x\cos r \pm \sin r\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

On arriverait par un calcul semblable à

$$(8)\qquad \cos p = \frac{x\sin r \mp \cos r\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

Nous devons prendre les signes contraires pour le radical dans les valeurs correspondantes du sinus et du cosinus, sans cela ces valeurs ne pourraient satisfaire à l'équation

$$\frac{x}{a} = \sin p\cos r + \cos p\sin r.$$

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de savoir si le double signe du radical n'introduit pas de solutions étrangères; à cet effet, remarquons que nous pouvons poser $p = \alpha - r$, α étant un certain arc convenablement choisi.

Dès lors

$$\sin p = \sin\alpha\cos r - \cos\alpha\sin r = \frac{x}{a}\cos r \pm \sin r\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

$$\cos p = \cos\alpha\cos r + \sin\alpha\sin r = \mp\cos r\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}\sin r.$$

Nous devons donc avoir

$$\sin\alpha = \frac{x}{a}, \quad \cos\alpha = \mp\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Appelons α la plus petite valeur qui correspond au signe $+$ du radical, toutes les valeurs qui correspondent au signe $+$ seront de la forme

$$2k\pi + \alpha;$$

toutes celles qui correspondent au signe — seront de la forme

$$(2k+1)\pi - \alpha.$$

Nous aurons donc deux séries de valeurs de p données par les relations suivantes :

La première série..... $p = 2k\pi + \alpha - r,$
La seconde série..... $p' = (2k+1)\pi - \alpha - r.$

Nous aurons donc entre p et p' la relation

$$p + p' = (2h+1)\pi - r,$$

d'où

$$p' = (2h+1)\pi - r - p.$$

L'introduction du double signe dans cos q nous donne aussi deux séries d'arcs :

La première de la forme. $q = 2k\pi + 6,$
La seconde..... $q' = (2k+1)\pi - 6;$

donc

$$q + q' = (2l+1)\pi,$$

l étant entier et quelconque ; d'où

$$q' = (2l+1)\pi - q.$$

L'équation (4) renfermera donc les courbes qui correspondent aux quatre combinaisons suivantes :

$$\begin{aligned} x &= a \sin(p+r), & y &= b \sin q, \\ x &= a \sin[(2h+1)\pi - r - p], & y &= b \sin q, \\ x &= a \sin(p+r), & y &= b \sin[(2l+1)\pi - q], \\ x &= a \sin[(2h+1)\pi - r - p], & y &= b \sin[(2l+1)\pi - q], \end{aligned}$$

Remplaçons p, q et r par leurs valeurs, il vient :

$$1^{\circ}.\quad x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}(t+s), \qquad y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta},$$

$$2^{\circ}.\quad x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}\left[\frac{(2h+1)\theta}{2n} - s - t\right], \qquad y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta},$$

$$3^{\circ}.\quad x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}(t+s), \qquad y = b \sin \frac{2n'\pi}{\theta}\left[\frac{(2l+1)\theta}{2n'} - t\right],$$

$$4^{\circ}.\quad x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}\left[\frac{(2h+1)\theta}{2n} - s - t\right], \qquad y = b \sin \frac{2n'\pi}{\theta}\left[\frac{(2l+1)\theta}{2n'} - t\right].$$

Le deuxième système équivaut à

$$x = -a \sin\left[\frac{2n\pi}{\theta}(t+s) - (2h+1)\pi\right], \qquad y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta},$$

ou à

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}(t+s), \qquad y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta},$$

c'est-à-dire qu'il rentre dans le premier.

Le troisième équivaut à

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}(t+s), \qquad y = -b \sin\left[\frac{2n'\pi}{\theta}t - (2l+1)\pi\right]$$

ou

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}(t+s), \qquad y = b \sin \frac{2n'\pi}{\theta}t,$$

c'est-à-dire au premier système.

Enfin le dernier, par les mêmes raisons, équivaut au premier; ainsi les doubles signes des radicaux n'introduisent pas de solutions étrangères. Nous pouvons donc substituer

les valeurs de $\sin p$, $\cos p$, $\sin q$, $\cos q$ dans l'équation

$$\cos pn' = \cos qn ;$$

il vient alors

$$(9)\begin{cases} \left(\dfrac{x\sin r \mp \cos r\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)^{n'} - \dfrac{n'(n'-1)}{1.2}\times \\ \times\left(\dfrac{x\cos r \pm \sin r\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)^2\left(\dfrac{x\sin r \mp \cos r\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)^{n'-2} + \ldots \\ = \left(\pm\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}\right)^n - \dfrac{n(n-1)}{1.2}\dfrac{y^2}{b^2}\left(\pm\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}\right)^{n-2} + \ldots \end{cases}$$

Nous pouvons arriver aussi à une équation en x et y en posant

$$\sin pn' = \sin qn,$$

d'où nous déduirons

$$\frac{n'}{1}(\cos p)^{n'-1}\sin p - \frac{n'(n'-1)(n'-2)}{1.2.3}\cos p^{n'-3}\sin^3 p + \ldots$$

$$= \frac{n}{1}(\cos q)^{n-1}\sin q - \ldots ;$$

d'où nous tirons, en remplaçant $\sin p$, $\cos p$, $\sin q$, $\cos q$, par leurs valeurs

$$(10)\begin{cases} \dfrac{n'}{1}\left(\dfrac{x\sin r \mp \cos r\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)^{n'-1}\times\left(\dfrac{x\cos r \pm \sin r\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) \\ -\dfrac{n'(n'-1)(n'-2)}{1.2.3}\left(\dfrac{x\sin r \mp \cos r\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)^{n'-3}\times \\ \times\left(\dfrac{x\cos r \pm \sin r\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)^3 + \ldots = \dfrac{n}{1}\left(\pm\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}\right)^{n-1}\times \\ \times\dfrac{y}{b} - \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\dfrac{y}{b}\right)^3\times\left(\pm\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}\right)^{n-3} + \ldots \end{cases}$$

Chacune de ces équations (9 et 10) ne représente pas seulement une courbe, mais un ensemble de courbes; en effet, les valeurs de p et q qui satisfont à l'équation

$$pn' = qn,$$

satisfont, soit à l'équation

$$\cos(pn') = \cos(qn),$$

soit à l'équation

$$\sin(pn') = \sin(qn).$$

Mais il y a aussi une infinité d'autres valeurs de p et de q qui satisfont à l'une ou à l'autre des deux dernières équations. En effet, de ce que $\cos(pn') = \cos(qn)$, il résulte que

$$pn' = 2k\pi + qn, \quad pn' = 2k\pi - qn.$$

La première de ces équations nous donne

$$p = \frac{2k\pi}{n'} + q\frac{n}{n'} = \frac{2k\pi}{n'} + \frac{2n\pi t}{\theta} :$$

ce qui revient à supposer que les équations du mouvement sont

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}\left(t + \frac{2k\theta}{2nn'} + s\right),$$

$$y = b \sin 2n' \frac{\pi t}{\theta},$$

c'est-à-dire que la quantité s a été augmentée de $\frac{2k\theta}{2nn'}$; or cette modification, comme nous l'avons vu plus haut, ne change pas la courbe.

Si nous considérons l'équation

$$pn' = (2k\pi - qn),$$

nous en tirons

$$p = \frac{2k\pi}{n'} - q\frac{n}{n'} = \frac{2k\pi}{n'} - \frac{2n\pi t}{\theta},$$

ce qui revient à supposer que les équations du mouvement sont

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}\left(-t + \frac{2k\theta}{nn'} + s\right),$$

$$y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta}.$$

Or la courbe ne change pas si nous changeons t en $-t$ dans les deux équations, ce qui nous donne

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}\left(t + \frac{2n\theta}{nn'} + s\right),$$

$$y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta},$$

équation qui représente la courbe symétrique de la précédente par rapport à l'axe des x; or cette courbe reproduit la courbe précédente lorsque n est pair et n' impair.

Si nous supposons maintenant que l'on fasse l'élimination avec l'équation

$$\sin(pn') = \sin(qn),$$

nous aurons alors

$$pn' = 2k\pi + qn, \quad pn' = (2k+1)\pi - qn,$$

la première hypothèse n'introduit point de solutions étrangères.

La seconde nous donne, outre la courbe primitive, celle dont les équations sont

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}\left[-t + \frac{(2k+1)\theta}{nn'} + s\right],$$

$$y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta}.$$

Changeons t en $-t$, il vient

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}\left[t - \frac{(2k+1)\theta}{nn'} + s\right],$$

$$y = -b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta}.$$

Si n est impair et n' pair, ce système équivaut au système

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta}(t+s),$$

$$y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta},$$

c'est-à-dire que nous retrouvons la courbe primitive.

Si n est pair et n' impair, le système équivaut à

$$x = -a \sin \frac{2n\pi}{\theta} (t+s),$$

$$y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta},$$

c'est-à-dire qu'il donne la symétrique de la courbe primitive par rapport à l'axe des y.

Si n et n' sont impairs, le système équivaut soit à

$$x = a \sin \frac{2n\pi}{\theta} (t+s), \qquad y = -b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta},$$

soit à

$$x = -a \sin \frac{2n\pi}{\theta} (t+s), \quad y = b \sin \frac{2n'\pi t}{\theta},$$

systèmes équivalents.

Ainsi, en résumé, si n est impair et n' pair, l'équation en sinus, $\sin pn' = \sin qn$, donne la courbe sans introduction de solutions étrangères.

Si n est pair et n' impair, c'est l'équation $\cos pn' = \cos qn$ qui donne la courbe sans introduire de solutions étrangères.

Enfin si n et n' sont impairs, l'une et l'autre équation donnent la courbe et sa symétrique par rapport à l'un quelconque des axes.

Nous avons été obligé d'entrer dans la discussion qui précède, afin d'être assuré à l'avance des résultats que le calcul devait nous fournir. Quoiqu'il soit possible d'établir l'équation de la figure lumineuse pour chaque cas particulier, la discussion devient difficile dès que le degré de l'équation s'élève: nous nous bornerons donc à discuter les courbes dans quelques cas particuliers qui sont les principaux que nous ayons à considérer afin de trouver dans le calcul une vérification nouvelle de résultats auxquels nous a conduit l'étude purement géométrique des phénomènes.

PREMIER CAS. — *Unisson.*

$$n = 1, \quad n' = 1.$$

La mise en équation générale nous conduit, en prenant l'équation

$$\sin pn' = \sin qn,$$

à l'équation

$$\frac{x\cos r \pm \sin r\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \pm\frac{y}{b}.$$

Nous tirons de là

$$bx\cos r \pm b\sin r\sqrt{a^2 - x^2} = \pm ay,$$

d'où

$$bx\cos r \pm ay = \pm b\sin r\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Élevons les deux membres au carré, il vient

$$b^2x^2\cos^2 r + a^2y^2 \pm 2abxy\cos r = a^2b^2\sin^2 r - b^2x^2\sin^2 r$$

ou

$$a^2y^2 + b^2x^2 \pm 2abxy\cos r = a^2b^2\sin^2 r.$$

Cette équation représente deux ellipses qui sont symétriques l'une de l'autre, soit par rapport à l'axe des x, soit par rapport à l'axe des y. On obtiendrait le même résultat en prenant l'équation

$$\cos pn' = \cos qn.$$

Si l'on veut obtenir immédiatement l'équation de la courbe, il faut employer le procédé employé dans tous les traités de Physique pour obtenir la trajectoire d'une molécule d'éther soumise à l'action de deux mouvements vibratoires polarisés à angle droit ; les équations du mouvement sont alors

$$x = a\sin(p + r),$$
$$y = b\sin p,$$

d'où

$$x = a\frac{y}{b}\cos r \pm a\sin r\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}},$$

d'où nous tirons

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 + 2abxy \cos r = a^2 b^2 \sin^2 r. \tag{11}$$

Cette courbe est une ellipse inscrite dans un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées, et viennent couper ces axes aux distances $x = \pm a, y = \pm b$.

Pour discuter cette courbe, nous allons d'abord chercher la direction et la valeur de ses axes.

Supposons, pour fixer les idées, $a > b$, faisons tourner les axes des coordonnées d'un angle φ positif ou négatif, et appelons x' et y' les coordonnées rapportées aux nouveaux axes, nous aurons

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$
$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi;$$

transportant cette valeur dans l'équation de la courbe, il vient en ordonnant les termes :

$$\left\{\begin{array}{l|l|l|l} a^2 \sin^2\varphi & x'^2 & +a^2 \cos^2\varphi & y'^2 + 2a^2 \cos\varphi \sin\varphi \\ +b^2 \cos^2\varphi & & +b^2 \sin^2\varphi & -2b^2 \cos\varphi \sin\varphi \\ -2ab \cos\varphi \sin\varphi \cos r & +2ab \cos\varphi \sin\varphi \cos r & & -2ab \cos^2\varphi \cos r \\ & & & +2ab \sin^2\varphi \cos r \end{array} \right| \quad x'y' = a^2 b^2 \sin^2 r \tag{12}$$

Pour que l'axe des x' soit dirigé suivant l'un des axes de la courbe, il faut que le coefficient du terme en $x'y'$ soit nul, ce qui donne l'équation

$$(a^2 - b^2) \sin 2\varphi - 2ab \cos 2\varphi \cos r = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2ab \cos r}{a^2 - b^2}. \tag{13}$$

Représentons par M le coefficient de y'^2 dans l'équation (12), par N le coefficient de x'^2, nous aurons

$$M + N = a^2 + b^2,$$
$$M - N = (a^2 - b^2) \cos 2\varphi + 2ab \sin 2\varphi \cos r.$$

Remplaçons $\cos 2\varphi$ et $\sin 2\varphi$ par leurs valeurs en fonc-

tion de a, b, et $\cos r$, et nous aurons

$$M - N = \frac{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 \cos^2 r}{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 \cos^2 r}}$$
$$= \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 \cos^2 r}.$$

Parmi toutes les valeurs de 2φ, il y en a nécessairement une, et une seule, comprise entre $+90$ degrés et -90 degrés.

Pour cette valeur, $\cos 2\varphi$ est positif, et $\sin 2\varphi$ est de même signe que $\operatorname{tang} 2\varphi$; par conséquent quand nous remplaçons $\sin 2\varphi$ et $\cos 2\varphi$ par leurs valeurs

$$\frac{\operatorname{tang} 2\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 2\varphi}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 2\varphi}},$$

le radical doit être pris avec le signe $+$.

Nous déduisons de ce qui précède

$$M = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 \cos^2 r},$$

$$N = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 \cos^2 r}.$$

Soient a' et b' les demi-axes de l'ellipse. Nous aurons

$$a'^2 = \frac{2a^2 b^2 \sin^2 r}{(a^2 + b^2) - \sqrt{(a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 r}},$$

$$b'^2 = \frac{2a^2 b^2 \sin^2 r}{(a^2 + b^2) + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 r}}.$$

Nous avons en outre

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2ab \cos r}{a^2 - b^2}.$$

Si nous prenons pour φ la plus petite valeur positive ou négative donnée par l'équation précédente, le grand axe de l'ellipse sera dirigé nécessairement suivant l'axe des x'.

Discutons maintenant la courbe.

1°. Soient $r = 0$, $r = 2\pi$, $r = 2n\pi$; l'équation devient

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - 2abxy = 0 \quad \text{ou} \quad ay - bx = 0.$$

Elle représente donc une droite faisant avec la direction horizontale un angle dont la tangente $= \frac{b}{a}$.

2°. Si $r = \pi$, $r = 3\pi$, $r = (2n+1)\pi$, l'équation devient

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 + 2ab\pi y = 0 \quad \text{ou} \quad ay + bx = 0.$$

Elle représente donc une droite faisant avec la direction horizontale un angle dont la tangente $= -\frac{b}{a}$; c'est-à-dire une droite symétrique de la précédente par rapport aux axes.

3°. Si $r = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{(2n+1)\pi}{2}$, l'équation devient

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

c'est-à-dire qu'elle représente une ellipse dont les axes sont dirigés horizontalement et verticalement, le plus grand axe correspondant au diapason le plus fortement ébranlé.

Quand $a = b$, l'ellipse se réduit à un cercle.

4°. Pour les valeurs intermédiaires de r la courbe est une ellipse dont le grand axe est dirigé dans l'angle de x et y positifs si la quantité r, qui est proportionnelle à la différence de phase, est comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$, ou entre π et $\frac{3\pi}{2}$; tandis que le grand axe de l'ellipse est dirigé dans l'angle complémentaire quand r est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π ou entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π. Remarquons d'ailleurs que la ligne droite est toujours dirigée dans l'angle formé par les axes des diapasons, quand les deux diapasons passent au même instant et dans le même sens par leur forme d'équilibre.

Ainsi, lorsqu'il y a changement dans le rapport des amplitudes des mouvements vibratoires sans changement de phase, l'ellipse a toujours un grand axe dirigé dans celui

des quatre quadrants formés par les axes des coordonnées dans lequel il se trouvait d'abord. Au contraire, dès qu'il y a déplacement du grand axe de l'ellipse d'un quadrant dans l'autre, cet effet ne peut être dû qu'à un changement dans la différence de phase.

Le cas où les amplitudes a et b sont égales mérite une mention particulière. En effet, quand $r = 0$, la courbe se réduit à une droite inclinée à 45 degrés par rapport aux axes.

Si r est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tang} 2\varphi$ conserve sa valeur; la courbe devient une ellipse dont le grand axe reste incliné à 45 degrés. Si $r = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{0}{0}$, la direction de l'axe devient indéterminée.

En effet, dans cette hypothèse la courbe se transforme en un cercle dont l'équation est

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Si r dépasse $\frac{\pi}{2}$ sans atteindre π, immédiatement

$$\operatorname{tang} 2\varphi = -\infty \text{ , car } \cos r \text{ est} < 0.$$

Le grand axe de la courbe passe donc à 45 degrés de l'autre côté de l'axe des x et conserve cette position jusqu'à ce que r devienne égal à π, alors la courbe redevient une ligne droite inclinée à 45 degrés au-dessous de l'axe des x; puis si r dépasse π, la courbe redevient une ellipse ayant son axe à 45 degrés au-dessous de la partie positive de l'axe des x. Quand r atteint $\frac{3\pi}{2}$, la courbe redevient un cercle. Enfin quand r dépasse $\frac{3\pi}{2}$, la courbe redevient une ellipse ayant son grand axe incliné à $+45^\circ$ par rapport à la partie positive de l'axe des x, et se réduit à une ligne droite inclinée à $+45^\circ$ quand $r = 2\pi$, pour repasser par la même série

d'évolutions à mesure que r croit des mêmes quantités à partir de 2π.

Deuxième cas. — *Les nombres de vibrations sont dans le rapport de* 1 *à* n.

Nous avons déduit l'équation de l'ellipse de l'équation générale en faisant $n = 1$, $n' = 1$. Nous pourrions en déduire aussi les équations qui correspondent à toutes les valeurs de n et de n'. Mais dans le cas où l'un des nombres n ou n' est égal à l'unité, on arrive plus commodément par la méthode suivante qui donne l'équation résolue par rapport à l'une des variables x et y.

Nous supposerons que le diapason le plus grave soit le diapason vertical, nous pouvons alors poser les équations suivantes :

$$x = a \sin(p + r),$$
$$y = b \sin q,$$
$$p = qn ;$$

alors

$$x = a \sin(nq + r),$$
$$= a \cos r \left[\frac{n}{1} (\cos q)^{n-1} \sin q - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} (\cos q)^{n-3} \sin^3 q + \dots \right]$$
$$+ a \sin r \left[(\cos q)^n - \frac{n(n-1)}{1.2} (\cos q)^{n-2} \sin^2 q + \dots \right].$$

Or

$$\sin q = \frac{y}{b}, \quad \cos q = \pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}};$$

donc

$$x = \left\{ \begin{array}{l} a \cos r \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{n}{1} \left(\pm \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{b^2}} \right)^{n-1} \times \dfrac{y}{b} \\ - \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \left(\pm \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{b^2}} \right)^{n-3} \times \dfrac{y^3}{b^3} + \dots \end{array} \right. \\ + a \sin r \left[\left(\pm \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{b^2}} \right)^n - \dfrac{n(n-1)}{1.2} \left(\pm \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{b^2}} \right)^{n-2} \dfrac{y^2}{b^2} + \dots \right]. \end{array} \right.$$

De là nous tirons les équations suivantes :

Pour $n = 2$ (octave) :

$$x = \pm a \cos r \left(2\frac{y}{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \right) + a \sin r \left(1-\frac{2y^2}{b^2} \right).$$

Pour $n = 3$ (quinte de l'octave) :

$$x = a \cos r \left(3-\frac{4y^2}{b^2} \right)\frac{y}{b} \pm a \sin r \left(1-\frac{4y^2}{b^2} \right)\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}.$$

On calculerait de même les équations qui correspondent à toutes les autres valeurs de n.

Le second membre de chacune de ces équations présente deux parties, l'une qui est de la forme $F(y)\cos r$, l'autre de la forme $f(y)\sin r$. L'une de ces parties est précédée du signe $\pm$. C'est la partie correspondant à $\cos r$ quand n est pair, à $\sin r$ quand n est impair. En effet, l'une de ces parties ne renferme que les puissances paires du radical, et l'autre les puissances impaires : il y a donc toujours une des parties qui ne conserve pas le radical et le double signe qui l'accompagne.

Il résulte de là que pour toutes les valeurs de r qui annulent $\cos r$ quand n est pair, et $\sin r$ quand n est impair, la figure se réduit à une courbe qui ne peut être coupée qu'en un point par une droite parallèle à l'axe des x, tandis que les valeurs de r qui annulent $\sin r$ quand n est pair, et $\cos r$ quand n est impair, donnent une courbe symétrique par rapport à l'axe des x.

Pour les valeurs intermédiaires de r, la courbe a un diamètre curviligne $x = f(y)\cos r$ ou $x = F(y)\cos r$, suivant que n est pair ou impair.

Toutes les fois que $\sin r = 0$, la courbe passe par l'origine, car l'équation est satisfaite quand on y fait $x = 0$, $y = 0$.

Dans ce cas la tangente à l'origine fait avec l'axe des x un angle dont la valeur est la limite de $\frac{y}{x}$ ou $\frac{t}{n}$.

Nous ne nous laisserons pas entraîner à discuter ces équa-

tions, cette discussion n'ayant qu'un intérêt purement algébrique. Nous nous bornerons à faire remarquer que la courbe qui correspond à $n = 2$ et à $\cos r = 0$, est une parabole du second degré dont l'équation est

$$x = a\left(1 - \frac{2y^2}{b}\right) \quad \text{quand} \quad \sin r = 1,$$

$$x = -a\left(1 - \frac{2y^2}{b}\right) \quad \text{quand} \quad \sin r = -1.$$

Quand $\cos r = 1$ et $\sin r = 0$, l'équation devient

$$x = \pm a\left(2\frac{y}{b}\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\right).$$

Cette équation représente la courbe en forme de 8 indiquée dans la figure (série 1 : 2, diff. 0, *Pl. II*), elle passe par l'origine, est symétrique par rapport à l'axe des y et par rapport à l'axe des x, l'origine est un point multiple, la courbe a deux sommets verticaux dont les coordonnées sont

$$x = 0, \quad y = \pm b.$$

Elle a quatre sommets horizontaux dont les coordonnées sont

$$x = \pm a, \quad y = \pm \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

On discuterait de même le cas où $n' = 1$, $n = 3$.

Quand $\cos r = 0$, la courbe se réduit à une espèce de 8 à double croisement dont l'équation est

$$x = \pm a\left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}};$$

x se réduit à 0 quand $y = \begin{cases} \pm b, & \text{sommet vertical,} \\ \pm \frac{b}{2}, & \text{point multiple.} \end{cases}$

Pour avoir les sommets horizontaux, il faut faire $x = \pm a$

dans l'équation de la courbe, ce qui donne

$$a^2 = a^2\left(1-\frac{4y^2}{b^2}\right)^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right),$$

d'où nous tirons

$$\frac{y^2}{b^2}\left(4\frac{y^2}{b^2}-3\right)^2 = 0.$$

Nous avons donc six sommets donnés par les coordonnées suivantes :

$x=a$, $x=-a$, $x=a$, $x=a$, $x=-a$, $x=-a$,

$y=0$, $y=0$, $y=b\sqrt{\frac{3}{4}}$, $y=-b\sqrt{\frac{3}{4}}$, $y=b\sqrt{\frac{3}{4}}$, $y=-b\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Quand $\sin r = 0$, l'équation devient

$$x = a\left(3-\frac{4y^2}{b^2}\right)\frac{y}{b} \quad \text{si} \quad \cos r = 1,$$

$$x = -a\left(3-\frac{4y^2}{b^2}\right)\frac{y}{b} \quad \text{si} \quad \cos r = 1.$$

La courbe passe par l'origine et présente deux sommets horizontaux ayant pour coordonnées :

L'un $\left(x=a, \quad y=\frac{b}{2}\right)$,

L'autre $\left(x=-a, \quad y=-\frac{b}{2}\right)$ quand $\cos r = 1$,

L'un $\left(x=-a, \quad y=\frac{b}{2}\right)$,

L'autre $\left(x=+a, \quad y=\frac{b}{2}\right)$ quand $\cos r = -1$.

Troisième cas. — *Les nombres de vibrations sont entre eux dans le rapport de deux nombres entiers* n *et* n′ *autres que l'unité.*

Nous prendrons pour exemple le cas où $n'=2$ et $n=3$ (quinte).

n étant impair et n' pair, il faut prendre l'équation en

sinus (équation 10); nous en déduisons, en donnant à n et n' leurs valeurs, l'équation

$$2\left(\frac{x\sin r \mp \cos r\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)\times\left(\frac{x\cos r \pm \sin r\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)$$
$$=3\left(\pm\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)^2\times\frac{y}{b}-\frac{y^3}{b^3},$$

ou, en simplifiant,

$$\left(2\frac{x^2}{a^2}-1\right)\sin 2r \mp 2\frac{x}{a}\cos 2r\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=3\frac{y}{b}-4\frac{y^3}{b^3}.$$

La courbe se discute aisément quand $\sin 2r$ ou $\cos 2r = 0$, c'est-à-dire quand la différence de phase $\frac{r}{2\pi}=\frac{2k+1}{8}$ ou quand $\frac{r}{2\pi}=\frac{2k}{8}$.

En effet dans le premier cas :

Si $k = 0$ ou un nombre pair,

$$\sin 2r = 1, \qquad \cos 2r = 0;$$

Si k est impair,

$$\sin 2r = -1, \qquad \cos 2r = 0.$$

L'équation devient alors :

Si k est pair,

$$\frac{2x^2}{a^2}-1=-4\frac{y^3}{b^3}+3\frac{y}{b};$$

Si k est impair,

$$\frac{2x^2}{a^2}-1=4\frac{y^3}{b^3}-3\frac{y}{b}.$$

La deuxième courbe n'est autre chose que la symétrique de la première par rapport à l'axe des x.

Nous tirons de la première équation :

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1+3\frac{y}{b}-4\frac{y^3}{b^3}}=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(b-y)(2y+b)^2}{b^3}}.$$

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des y.

Considérons seulement la partie qui correspond au signe $+$.

$$\text{Pour } y = 0, \quad n = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

A mesure que y croît, x croît et atteint son maximum,

$$x = a \quad \text{pour} \quad y = \frac{b}{2}.$$

Si y croît de $\frac{b}{2}$ à b, x décroît de a à 0.

Si nous faisons y négatif,

$$\text{De } y = 0 \text{ à } y = -\frac{b}{2}, \quad x \text{ décroît de } \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ à } 0;$$

$$\text{De } y = -\frac{b}{2} \text{ à } y = b, \quad x \text{ croît de } 0 \text{ à } a.$$

Nous n'avons pas à considérer la courbe au delà de ces limites, la partie restante étant étrangère à la question physique que nous étudions.

Nous avons donc dans la courbe un sommet vertical dont les coordonnées sont

$$x = 0, \quad y = b;$$

deux sommets horizontaux dont les coordonnées sont

$$x = a, \quad y = \frac{b}{2}; \quad x = -a, \quad y = \frac{b}{2};$$

un point multiple dont les coordonnées sont

$$x = 0, \quad y = -\frac{b}{2}.$$

Lorsque $\frac{r}{2\pi} = \frac{2k}{8} = \frac{k}{4}$, alors

$$\sin 2r = 0, \quad \cos 2r = -1 \text{ si } k \text{ est impair},$$
$$\cos 2r = +1 \text{ si } k \text{ est pair}.$$

Dans l'un et l'autre cas, nous aurons pour équation de la

courbe

$$4\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)=\left(\frac{4y^3-3b^2y}{b^3}\right)^2,$$

d'où

$$x^4-a^2x^2+\frac{a^4(4y^3-3b^2y)^2}{4b^6}=0,$$

d'où

$$x=\pm\sqrt{\frac{a^2}{2}\pm\sqrt{\frac{a^4}{4}-\frac{a^4(4y^3-3b^2y)^2}{4b^6}}},$$

d'où

$$x=\pm a\sqrt{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b^3-4y^3+3b^2y)(b^3+4y^3-3b^2y)}{b^6}}},$$

d'où

$$x=\pm a\sqrt{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(y+b)(2y-b)^2(b+2y)^2(b-y)}{b^6}}}.$$

La courbe est symétrique par rapport aux deux axes; il suffit donc de considérer la partie comprise dans l'angle des x et y positifs. Cette partie correspond au signe + du premier radical et aux valeurs positives de y qui rendent le deuxième radical réel ainsi que le premier. Si nous considérons la valeur de x sous sa première forme, nous voyons que toute valeur de y inférieure à b rend le second radical réel et égal au plus en valeur à $\frac{a^2}{2}$, ce qui rend le premier radical réel.

A chaque valeur de y correspondent deux valeurs de x, l'une

$$x'=a\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\ldots}},\quad \text{l'autre}\quad x''=a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\ldots}}$$

Pour $y=0$, $x'=a$, $x''=0$,
y croît. x' décroît. x'' croît.

$y=\frac{b}{2}$, $x'=x''=\frac{a}{\sqrt{2}}$,
y croît. x' croît. x'' décroît.

$$y = \frac{b\sqrt{3}}{2}, \quad x' = a, \quad x'' = 0,$$

$$y = b, \qquad x' = x'' = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

La courbe présente quatre sommets verticaux dont les coordonnées sont

$$y = b, \quad y = b, \quad y = -b, \quad y = -b,$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad x = \frac{-a}{\sqrt{2}}, \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad x = \frac{-a}{\sqrt{2}};$$

six sommets horizontaux ayant pour coordonnées

$$x = a, \quad x = -a, \quad x = a,$$

$$y = 0, \quad y = 0, \quad y = b\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x = -a, \quad x = a, \quad x = -a,$$

$$y = b\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = -b\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = -b\frac{\sqrt{3}}{2};$$

sept points multiples dont l'origine et six autres points ayant pour coordonnées

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad x = -\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad x = -\frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$y = \frac{b}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad y = \frac{-b}{2},$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad x = 0, \quad x = 0,$$

$$y = \frac{-b}{2}, \quad y = b\frac{\sqrt{3}}{b}, \quad y = -b\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si $n' = 3$ et $n = 4$, on arrive, toutes réductions faites, à l'équation

$$\sin 3r\left(3\frac{x}{a} - 4\frac{x^3}{a^3}\right) \mp \cos 3r\left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right)\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$= 1 - 8\frac{y^2}{b^2} + 8\frac{y^4}{b^4}.$$

Nous ne discuterons pas cette équation ; nous remarquerons seulement qu'elle est, comme la précédente, de la forme

$$A_{n'} \sin n' r \mp B_{n'} \cos n' r = C_n,$$

$A_{n'}$, $B_{n'}$ étant des fonctions algébriques de x du degré n' et C_n étant une fonction algébrique de y du degré n.

C'est là une forme générale de ces sortes d'équations, comme il est facile de le démontrer; en effet, dans le cas où n est impair et n' pair, nous obtenons l'équation de la courbe par l'élimination de p et de q entre les équations

$$x = a \sin (p + r), \quad y = b \sin q,$$
$$\sin pn' = \sin qn.$$

Or posons

$$p + r = \varphi;$$

nos équations deviennent

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \sin q,$$
$$\sin (n' \varphi - n' r) = \sin nq,$$

d'où

$$\sin n' \varphi \cos n' r - \sin n' r \cos n' \varphi = \sin nq;$$

comme d'ailleurs

$$\sin \varphi = \frac{x}{a}, \quad \sin q = \frac{y}{b},$$

il vient, toutes substitutions faites,

$$\left.\begin{aligned} &\cos n' r \left[\frac{n'}{1}\left(\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^{n'-1} \times \frac{x}{a} - \frac{n'(n'-1)(n'-2)}{1.2.3}\left(\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^{n'-3} \times \frac{x^3}{a^3} + \cdots\right] \\ &- \sin n' r \left[\left(\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^{n'} - \frac{n'(n'-1)}{1.2}\left(\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^{n'-2} \times \frac{x^2}{a^2} + \cdots\right] \end{aligned}\right\} =$$
$$= \frac{n}{1}\left(\pm\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)^{n-1} \times \frac{y}{b} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\pm\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)^{n-3} \times \frac{y^3}{b^3} + \cdots$$

n' étant pair et n impair, tous les radicaux disparaissent dans le facteur qui multiplie $\sin n' r$, ainsi que dans le second membre de l'équation. Nous tombons donc sur une

équation de la forme

$$A_{n'} \sin n' r \mp B_{n'} \cos n' r = C_n,$$

$B_{n'}$ renfermant seul des radicaux.

Dans le cas où n est pair et n' impair, il faut employer l'équation

$$\cos(n' \varphi - n' r) = \sin nq,$$

d'où

$$\cos n' \varphi \cos n' r + \sin n' \varphi \sin n' r = \sin nq,$$

d'où enfin

$$\cos n' r \left[\left(\pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)^{n'} - \dots \right]$$

$$+ \sin n' r \left[\frac{n'}{1} \left(\pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)^{n'-1} \frac{x}{a} - \dots \right] = \left(\pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \right)^{n'} - \dots .$$

n' étant impair et n pair, l'équation prend encore la forme

$$A_{n'} \sin n' r \mp B_{n'} \cos n' r = C_n.$$

Nous ne pousserons pas plus loin cette discussion.

L'analyse ne peut, en effet, ajouter que des données numériques aux résultats généraux déjà trouvés par la Géométrie seule.

Les moyens élémentaires employés dans le chapitre précédent nous fournissent des indications suffisantes pour l'application pratique de notre méthode d'observation.

Néanmoins l'étude algébrique de ces couches se rattachait d'une façon trop directe à notre travail pour que nous n'ayons pas cru devoir la tenter.

Nous n'avons pas la prétention d'avoir résolu le problème dans toutes ses parties ni par les méthodes les plus simples, nous laissons à d'autres le soin de faire mieux.