LETTRE

DE M. EULER A M. DE LA GRANGE.

DEpuis ma derniére lettre j' ai réuſſi à ramener au calcul la propagation du Son, en ſuppoſant à l' air toutes les trois dimenſions, & quoique je ne doute pas que Vous n' y ſoyés parvenu plus heureuſement, je ne crois pouvoir mieux témoigner mon attachement envers Votre Illuſtre Société qu'en lui préſentant mes Recherches ſur ce même ſujet.

RECHERCHES SUR LA PROPAGATION DES ÉBRANLEMENS DANS UNE MILIEU ÉLASTIQUE.

EN conſidérant le milieu dans l' état d' équilibre ſoit ſa denſité $= 1$, & ſon élaſticité balancée par le poid d' une colomne du même fluide, dont la hauteur $= h$; Je commence par conſidérer un élément quelconque du fluide qui dans l' état d' équilibre ſe trouve au point Z (*fig.* 1.) déterminé par les trois coordonnées perpendiculaires entr'elles $AX = X$, $XY = Y$ & $YZ = Z$, & que par l' agitation ce même élément ait été tranſporté en ζ, dont les coordonnées ſoient $Ax = x$, $xy = y$, $y\zeta = \zeta$, qui ſeront certaines fonctions des premiéres X, Y, Z pour un inſtant donné. Soit donc

$$dx = LdX + MdY + NdZ$$
$$dy = PdX + QdY + RdZ$$
$$d\zeta = SdX + TdY + VdZ.$$

Enſuite je conſidére un volume infiniment petit de fluide, qui dans l' état d' équilibre ait la figure piramidale $Z\xi\eta\theta$ (*fig.* 2.) rectangulaire, qui par l' agitation ſoit tranſporté en $\zeta\lambda\mu\nu$, dont la figure ſera auſſi piramidale, & poſant pour l' état d' équilibre

du point	les coordonnées		
Z	$X,$	$Y,$	Z
ξ	$X+\alpha,$	$Y,$	Z
η	$X,$	$Y+\beta,$	Z
θ	$X,$	$Y,$	$Z+\gamma$

le volume de la piramide $Z\xi\eta\theta$ ſera $= \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$.
On aura enſuite pour l'état d'agitation

du point	les trois coordonnées		
$\zeta.$	$Ax = x,$	$xy = y,$	$y\zeta = \zeta$
$\lambda.$	$AL = x + L\alpha,$	$Ll = y + P\alpha,$	$l\gamma = \zeta + S\alpha$
$\mu.$	$AM = x + M\beta,$	$Mm = y + Q\beta,$	$m\mu = \zeta + T\beta$
$\nu.$	$AN = x + N\gamma,$	$Nn = y + R\gamma,$	$n\nu = \zeta + V\gamma$

Il s'agit maintenant de trouver le volume de la nouvelle piramide $\zeta\lambda\mu\nu$, qu'on voit être compoſée de ces priſmes $ymn\zeta\mu\nu + yln\zeta\lambda\nu + lmn\lambda\mu\nu - ylm\zeta\lambda\mu$. Prenant pour cela la ſolidité de chaque part, on trouvera cette ſolidité $=$

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(y\zeta + l\lambda + n\nu)\,\Delta\, yln \\ +\frac{1}{3}(y\zeta + m\mu + n\nu)\,\Delta\, ymn \\ +\frac{1}{3}(l\lambda + m\mu + n\nu)\,\Delta\, lmn \\ -\frac{1}{3}(y\zeta + l\lambda + m\mu)\,\Delta\, ylm \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + V\gamma)\,\Delta\, yln \\ +\frac{1}{3}(3\zeta + T\beta + V\gamma)\,\Delta\, ymn \\ +\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + T\beta + V\gamma)\,\Delta\, lmn \\ -\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + T\beta)\,\Delta\, ylm \end{array}\right\} =$$

$$-\frac{1}{3}S\alpha\Delta ymn - \frac{1}{3}T\beta\Delta yln + \frac{1}{3}V\gamma\Delta ylm.$$

Enſuite

Enſuite on trouve les aires de ces triangles, à cauſe de $xL = L\alpha$, $xM = M\beta$, $xN = N\gamma$, comme il ſuit

$$\Delta ymn = \tfrac{1}{2} xM(2y + Q\beta) + \tfrac{1}{2} MN(2y + Q\beta + R\gamma)$$

$$- \tfrac{1}{2} xN(2y + R\gamma) = \tfrac{1}{2} Q\beta \times xN - \tfrac{1}{2} R\gamma \times xM$$

$$= \tfrac{1}{2} \beta\gamma (NQ - MR).$$

$$\Delta yln = \tfrac{1}{2} xN(2y + R\gamma) + \tfrac{1}{2} LN(2y + P\alpha + R\gamma)$$

$$- \tfrac{1}{2} xL(2y + P\alpha) = \tfrac{1}{2} R\gamma \times xL - \tfrac{1}{2} P\alpha \times xN$$

$$= \tfrac{1}{2} \alpha\gamma (LR - NP).$$

$$\Delta ylm = \tfrac{1}{2} xM(2y + Q\beta) + \tfrac{1}{2} LM(2y + P\alpha + Q\beta)$$

$$- \tfrac{1}{2} xL(2y + P\alpha) = \tfrac{1}{2} Q\beta \times xL - \tfrac{1}{2} P\alpha \times xM$$

$$= \tfrac{1}{2} \alpha\beta (LQ - MP).$$

De-là nous tirons la ſolidité de notre piramide $\zeta\lambda\mu\nu$ dans l'état d'agitation $= -\tfrac{1}{6} \alpha\beta\gamma S(NQ - MR) - \tfrac{1}{6} \alpha\beta\gamma T$ $(LR - NP) + \tfrac{1}{6} \alpha\beta\gamma V (LQ - MP)$, & partant la denſité du milieu agité en ζ ſera $= 1 : (LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT)$, & poſant Π pour la hauteur de la colomne qui y balance l'élaſticité, nous aurons $\Pi = h : (LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT)$, laquelle étant une fonction des trois variables X, Y, Z poſons $d\Pi = EdX + FdY + GdZ$, de ſorte que $E = (\frac{d\Pi}{dX})$, $F = (\frac{d\Pi}{dY})$, $G = (\frac{d\Pi}{dZ})$. Soit pour abréger

LQV

$LQV + MPV + MRS - NQS + NPT - LRT = K$, de ſorte que $\Pi = \frac{h}{K}$; ſi nous concevons dans l'état d'équilibre un point Z' infiniment proche de Z déterminé par ces coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, ce point ſe trouvera après l'agitation en ζ', dont les coordonnées ſeront

$$x + LdX + MdY + NdZ,$$
$$y + PdX + QdY + RdZ,$$
$$\zeta + SdX + TdY + VdZ,$$

donc réciproquement la poſition du point ζ' infiniment proche de ζ dans l'état troublé étant donnée par les coordonnées $X + \alpha$, $Y + \beta$, $Z + \gamma$ ſon lieu dans l'état d'équilibre ſera déterminé par les coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, de ſorte que

$$dX = \frac{\alpha(QV - RT) + \beta(NT - MV) + \gamma(MR - NQ)}{K}$$

$$dY = \frac{\alpha(RS - PV) + \beta(LV - NS) + \gamma(NP - LR)}{K}$$

$$dZ = \frac{\alpha(PT - QS) + \beta(MS - LT) + \gamma(LQ - MP)}{K}.$$

Delà l'élaſticité en ζ étant $\Pi = \frac{h}{K}$, elle ſera en $\zeta' = \Pi + EdX + FdY + GdZ$, ou bien ſi nous poſons pour abréger

$$E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) = A$$
$$E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) = B$$
$$E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) = C$$

l'élaſticité en ζ' ſera exprimée par $\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}$

la denſité y étant $\frac{1}{K}$.

Conſidérons maintenant un parallélepipéde rectangle infiniment petit $\zeta bcd\alpha\beta\gamma\delta$ (fig. 3.) dont les cotés paralleles à

nos

nos coordonnées ſoient $\zeta b = \alpha$, $\zeta c = \beta$, $\zeta d = \gamma$, ſon volume ſera $= \alpha\beta\gamma$ & ſa maſſe $= \frac{\alpha\beta\gamma}{K}$. Pour connoître les forces, dont ce parallélepipéde eſt ſollicité, cherchons d'abord l'élaſticité du milieu à chacun de ſes angles de la manière ſuivante

du point	les coordonnées	l'élaſticité
ζ	$x, \quad y, \quad \zeta$	Π
b	$x+\alpha, \quad y, \quad \zeta$	$\Pi + \frac{A\alpha}{K}$
c	$x, \quad y+\beta, \quad \zeta$	$\Pi + \frac{B\beta}{K}$
d	$x+\alpha, \quad y+\beta, \quad \zeta$	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta}{K}$
α	$x, \quad y, \quad \zeta+\gamma$	$\Pi + \frac{C\gamma}{K}$
β	$x+\alpha, \quad y, \quad \zeta+\gamma$	$\Pi + \frac{A\alpha + C\gamma}{K}$
γ	$x, \quad y+\beta, \quad \zeta+\gamma$	$\Pi + \frac{B\beta + C\gamma}{K}$
δ	$x+\alpha, \quad y+\beta, \quad \zeta+\gamma$	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}$

De-là il eſt clair, que conſidérant les faces oppoſées $\zeta c \alpha \gamma$ & $b d \beta \delta$, les preſſions ſur celle-ci ſurpaſſent les preſſions ſur celle-là de la quantité $\frac{A\alpha}{K}$; donc l'aire de ces faces étant $\beta\gamma$, il en réſulte une force ſuivant la direction $Ax = -\frac{A\alpha\beta\gamma}{K}$; de la même manière le parallélepipéde ſera pouſſé ſuivant la direction xy par la force $= -\frac{B\alpha\beta\gamma}{K}$, & ſuivant la direction $y\zeta$ par la force $= -\frac{C\alpha\beta\gamma}{K}$. Donc la

maſſe

masse de ce parallélepipéde étant $\frac{\alpha\beta\gamma}{K}$ si nous introduisons la hauteur g, par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, en exprimant le tems écoulé t en secondes, nous aurons pour la connoissance du mouvement les trois équations suivantes.

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = -2gA,$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -2gB,$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -2gC.$$

Ces formules étant générales pour toutes les agitations possibles, je ne considére ici que les cas où ces agitations sont quasi infiniment petites; pour cet effet je pose $x = X + p$, $y = Y + q$, & $z = Z + r$, de sorte que p, q, r sont des quantités infiniment petites; delà nous aurons

$$dp = (L - 1)\,dX + M\,dY + N\,dZ;$$
$$dq = P\,dX + (Q - 1)\,dY + R\,dZ$$
$$dr = S\,dX + T\,dV + (V - 1)\,dZ,$$

& partant à peu-près $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$, $V = 1$, & $K = 1$; mais pour le différentiel de Π nous aurons

$$E = -h\left(\left(\frac{dL}{dX}\right) + \left(\frac{dQ}{dX}\right) + \left(\frac{dV}{dX}\right)\right)$$

$$F = -h\left(\left(\frac{dL}{dY}\right) + \left(\frac{dQ}{dY}\right) + \left(\frac{dV}{dY}\right)\right)$$

$$G = -h\left(\left(\frac{dL}{dZ}\right) + \left(\frac{dQ}{dZ}\right) + \left(\frac{dV}{dZ}\right)\right)$$

Ensuite nous trouvons $A = E$, $B = F$, $C = G$. Pour nous débarasser encore des autres lettres, remarquons que

$$L = 1 + \left(\frac{dp}{dX}\right),\ Q = 1 + \left(\frac{dq}{dY}\right),\ V = 1 + \left(\frac{dr}{dZ}\right)$$

de sorte qu'outre les coordonnées X, Y, Z, avec le tems t

il

il ne reſte dans le calcul que les lettres p, q, r, qui marquent le déplacement de chaque point. Car ſubſtituant ces valeurs, que nous venons de trouver, le mouvement cauſé par une agitation quelconque mais fort petite, ſera déterminé par les trois équations ſuivantes

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dYdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdZ}\right) + \left(\frac{ddq}{dYdZ}\right) + \left(\frac{ddr}{dZ^2}\right).$$

ou bien poſant $\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = u$ nous aurons

$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dX}\right)$, $\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dY}\right)$, &

$\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dZ}\right)$, d'où il eſt aiſé de conclure

$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dZ^2}\right)$, d'où il faut déterminer la nature de la fonction u déterminée par les coordonnées X, Y, Z, & le tems t.

Delà il n'eſt pas difficile de trouver une infinité de ſolutions particuliéres, comme

$$p = \beta\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$
$$q = \gamma\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$
$$r = \delta\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$

pourvû que $\alpha = \sqrt{2gh(\beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta)}$ où β, γ, δ ſont des quantités quelconques, & φ marque une fonction quelconque. Donc quelques valeurs qu'on prenne on aura toujours le cas d'un certain ébranlement, dont on pourra déterminer la continuation. Mais pour notre deſſein il s'agit de trouver un tel cas, où l'ébranlement initial aura été renfermé dans un petit eſpace, d'où il s'eſt répandu enſuite en tout ſens.

Soit

Soit donc A le centre de l'agitation primitive & posons $p = Xs$, $q = Ys$, $r = Zs$, & s sera une fonction du tems t, & de la quantité $V(XX + YY + ZZ) = V$ qui marque la distance du point A. Donc puisque $ds = dt(\frac{ds}{dt}) + dV(\frac{ds}{dV})$ nous aurons $ds = dt(\frac{ds}{dt}) + (\frac{XdX + YdY + ZdZ}{V})\times(\frac{ds}{dV})$, & puis $(\frac{dp}{dX}) = s + \frac{X^2}{V}(\frac{ds}{dV})$, $(\frac{dq}{dY}) = s + \frac{Y^2}{V}(\frac{ds}{dV})$, $(\frac{dr}{dZ}) = s + \frac{Z^2}{V}(\frac{ds}{dV})$, donc $u = (\frac{dp}{dX}) + (\frac{dq}{dY}) + (\frac{dr}{dZ}) = 3s + V(\frac{ds}{dV})$; maintenant aiant $(\frac{ds}{dX}) = \frac{X}{V}(\frac{ds}{dV})$. $(\frac{dV}{dX}) = \frac{X}{V}$, notre premiére équation deviendra $\frac{1}{2gb}(\frac{ddx}{dt^2}) = \frac{3X}{V}(\frac{ds}{dV}) + \frac{X}{V}(\frac{ds}{dV}) + X(\frac{ddx}{dV^2})$ ou $\frac{1}{2gb}(\frac{ddx}{dt^2}) = \frac{4}{V}(\frac{ds}{dV}) + (\frac{ddx}{dV^2})$, à laquelle se réduisent aussi les deux autres; & l'éloignement du point Z depuis le centre A sera $Vs = s\sqrt{(XX + YY + ZZ)} = \sqrt{(pp + qq + rr)}$ qui en marque le déplacement par rapport à l'état d'équilibre, de sorte que le rayon d'une couche spherique, qui dans l'état d'équilibre étoit $= V$, sera à présent $= V + Vs$. Donc si nous posons $Vs = u$, ou $s = \frac{u}{V}$ afin que u exprime le changement de cette couche, la particule u sera déterminée par cette équation

$$\frac{1}{2gb}(\frac{ddu}{dt^2}) = \frac{-2u}{V^2} + \frac{2}{V}(\frac{du}{dV}) + (\frac{ddu}{dV^2}).$$

Après plusieurs recherches j'ai enfin trouvé que cette équation admet une résolution générale semblable au cas, où l'on ne suppose à l'air qu'une seule dimension. Que

$\varphi\zeta$ marque une fonction quelconque de ζ, & qu'on indique ſon différentiel de cette façon $d\cdot\varphi\zeta = d\zeta\,\varphi'\zeta$. Cela poſé, on verra qu'on ſatisfait à notre équation en ſuppoſant

$$u = \frac{A}{V^2}\varphi[V \pm t\sqrt{(2ggh)}] - \frac{A}{V}\varphi'[V \pm t\sqrt{(2gh)}].$$

Donc pour le commencement de l'agitation nous aurons cette équation $u = \frac{A}{V^2}\varphi V - \frac{A}{V}\varphi' V$; d'où l'on voit que pour appliquer cette formule à la propagation du Son la fonction $\varphi\zeta$ doit toujours être $= o$ excepté le cas, où la quantité ζ eſt extrémement petite. Or il faut que la fonction $\varphi'\zeta$ ait la même proprieté & encore celle-ci $\varphi''\zeta$, en ſuppoſant $d\varphi'\zeta = d\zeta\,\varphi''\zeta$, afin que non ſeulement la quantité u, mais auſſi la viteſſe $(\frac{du}{dt})$ s'évanoüiſſe au commencement par tout, excepté dans le petit eſpace autour de A où s'eſt fait l'ébranlement primitif.

Que le caractère ψ marque des fonctions diſcontinues de la même nature, & nous aurons la ſolution générale qui ſuit

$$u = \frac{A}{V^2}\varphi[V + t\sqrt{(2gh)}] - \frac{A}{V}\varphi'[V + t\sqrt{(2gh)}]$$
$$+ \frac{B}{V^2}\psi[V - t\sqrt{(2gh)}] - \frac{B}{V}\psi'[V - t\sqrt{(2gh)}]$$

& pour la viteſſe

$$(\frac{du}{dt}) = \frac{A\sqrt{(2gh)}}{V^2}\varphi'[V + t\sqrt{(2gh)}]$$
$$- \frac{A\sqrt{(2gh)}}{V}\varphi''[V + t\sqrt{(2gh)}]$$
$$- \frac{B\sqrt{(2gh)}}{V^2}\psi'[V - t\sqrt{(2gh)}]$$
$$+ \frac{B\sqrt{(2gh)}}{V}\psi''[V - t\sqrt{(2gh)}].$$

Delà il eſt clair qu'une couche ſphérique, dont le rayon $= V$ demeure en repos tant que la formule $V - t\sqrt{(2gh)}$

ne devient aſsès petite, ou moindre que le rayon de la petite ſpĕre ébranlée au commencement; & partant l'agitation primitive ſera répandue à la diſtance $= V$ après le tems $t = \frac{V}{\sqrt{(2gh)}}$ ſecondes, d'où il s'enſuit la même viteſſe du Son que Newton a trouvé, c'eſt-à-dire plus petite que ſelon les expériences. D'où je conclus qu'aïant ſuppoſé dans ce calcul les ébranlemens infiniment petits, leur grandeur cauſe une propagation plus prompte.

Enſuite ces formules nous apprennent que lorſque les diſtances V ſont fort grandes, en ſorte que les termes diviſés par V^2 s'évanoüiſſent à l'égard des autres diviſés par V, tant les petits eſpaces u, que les viteſſes $(\frac{du}{dt})$ diminuent en raiſon des diſtances; d'où l'on peut juſtement juger de l'affoibliſſement du Son par des grandes diſtances.

Voila mes Recherches que vous pourrés inſérer, MONSIEUR, *dans vôtre ſecond Volume ſi vous le jugés à propos, &c.*

Berlin ce 1.r Janvier 1760.