Max Planck Research Group
Epistemes of Modern Acoustics

Sound & Science: Digital Histories

Euclid, Stoicheia. Vol. 1. Edited by E. F. August. Trautwein. Berlin: 1826.

https://acoustics.mpiwg-berlin.mpg.de/node/413

Scan licensed under: CC BY-SA 3.0 DE | Max Planck Institute for the History of Science

MAX PLANCK INSTITUTE
FOR THE HISTORY OF SCIENCE

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

EUCLIDIS ELEMENTA

EX OPTIMIS LIBRIS

IN USUM TIRONUM

GRAECE EDITA

AB

ERNESTO FERDINANDO AUGUST,

GYMNASII COLONIENSIS AD SPREAM RECTORE.

PARS SECUNDA,

QUAE DECIMUM ET SEQUENTES CONTINET ELEMENTORUM LIBROS CUM TRIBUS APPENDICIBUS ET SEX TABULIS LITHOGRAPHICIS.

BEROLINI, MDCCCXXIX.

IMPENSIS T. TRAUTWEINII.

LONDINI, APUD TREUTTEL ET WÜRZ, TREUTTEL FILIUM ET RICHTER.

PARISIIS, APUD TREUTTEL ET WÜRZ.


WISSENSCHAFTLICHE
BIBLIOTHEK
BERLIN
Bibliotheca
Gymnasii Carolini
Neo-Strelitzici
Megapolitani
Bibliotheca
Gymnasii Carolini
Neo-Strelitzici
Megapolitani

Cum ante hos tres annos priorem Euclidis elementorum partem rerum mathematicarum studiosis traderem, sperabam, fore ut breviore temporis intervallo haec altera illam sequeretur. Novo autem suscepto publico munere auctisque inde curis atque negotiis, fieri non potuit, quin diminuerentur tempora illa subcisiva, quae sola his studiis possunt consecrari. Serius igitur in lucem prodit hic secundus elementorum tomus, sed eadem qua prior diligentia elaboratus. Omnes addidi in appendicibus sexta et septima varias codicum editionumque lectiones, ut, quod graecum textum attinet, haec mea editio omnibus satisfaceret lectoribus totumque contineret apparatum, quem dicunt, criticum. Multae quidem lectionum varietates quae notentur dignae non videntur; sed codicum editionumque inter se similitudinem et quasi cognationem perscrutanti maximi interdum momenti sunt ea, quae nonnisi argumentum ipsum spectantes parvi facere solent. Cum autem lectorum hujus operis majorem partem mathematicos, minorem criticos fore exspectarem, utrisque ut satisfacerem, nihil quidem minutarum istarum rerum plane omisi; sed ne asteriscis et uncis et notis marginalibus nimium distraherentur lectorum oculi, non singulis plagulis sed toti operi eas subnectere malui.

Quamquam vero magna laudabilique typothetae sedulitate factum est, ut quam minimo spatio haec adnotationes criticae imprimerentur, ita tamen plagularum numerum crescere vidi, ut indicem in praefatione tomi prioris promissum huic tomo adjungere non possem. Quamobrem tertium Euclidis operum tomum adjicere statui, qui Data, Phaenomena, Optica, Catoptrica, Regulam canonis, ceteraque continebit opuscula, quae quamvis in editione Oxonia conjuncta, novam tamen editoris operam quasi flagitare mihi videntur. Impune enim, ut uno tantum exemplo utar, usque ad nostra tempora illuditur a Savilio (ed. Ox. p. 649.) Catoptricorum quisquis est scriptor, qui non demonstratione absurda, ut ille perhibet, sed figura usus est a Saviliana diversa, eaque meliore, rei ipsi aptiore. Huic tertio tomo, qui separatim venibit, indicem omnium vocabulorum mathematicorum, quae apud Euclidem et apud Proclum inveniuntur, addam, finemque exoptatum, operi abhinc nono anno suscepto, favente Deo brevi tempore imponam.

Scripsi Berolini Calendis Octobribus
anni 1829.

August.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Ὅροι.

α. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα. 1.

β. Ἀσύμμετρα δὲ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι. 2.

γ. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται. 3.

δ. Ἀσύμμετροι δὲ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχεται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι. 4.

ε. Τούτων ὑποκειμένων δείκνυται ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει· καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητή. 5.

ς. Καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι, εἴτε μήκει καὶ δυνάμει, εἴτε δυνάμει μόνον, ῥηταί. 6.

ζ. Αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν. 7.

η. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον ῥητόν. 8.

θ. Καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα ῥητά. 9.

ι. Τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα ἄλογα καλείσθω. 10.

ιά. Καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτὰ ἄλογοι· εἰ μὲν τε- 11.
τράγωνα εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί· εἰ δὲ ἑτερά τινα
εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.

Πρότασις α'.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν 1.
ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ ἥμισυς
ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ ἀπὸ τοῦ καταλειπομένου
μεῖζον ἢ ἥμισυς ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ
γίγνηται· λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται
ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέ-
θους.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ Γ, ὧν μεῖζον Fig. 1.
τὸ ΑΒ· λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφαιρεθῇ μεῖζον
ἢ ἥμισυς ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ ἀπὸ τοῦ καταλειπομένου μεῖ-
ζον ἢ ἥμισυς ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφ-
θήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ Γ μεγέθους.

Τὸ γὰρ Γ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ
ΑΒ μεγέθους μεῖζον. Πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω
τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ ΑΒ μεῖζον,
καὶ διῃρήσθω τὸ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΔΖ ΖΗ
ΗΕ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ ΑΒ μεῖζον ἢ ἥμισυς
ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μεῖζον ἢ ἥμισυς
ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως ἂν
αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν
τῷ ΔΕ διαιρέσεσιν.

Ἔστωσαν οὖν αἱ ΑΚ ΚΘ ΘΒ διαιρέσεις ἰσο-
πληθεῖς οὖσαι ταῖς ΔΖ ΖΗ ΗΕ· καὶ ἐπεὶ μεῖζόν
ἐστι τὸ ΔΕ τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφῄρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ
ἔλασσον τοῦ ἡμίσους τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον
ἡμίσους ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοι-
ποῦ τοῦ ΘΑ μεῖζόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΔ
τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφῄρηται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, τοῦ

δὲ ΘΑ μεῖζον ἡμίσους ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ λοιποῦ τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. Ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. Ἔλασσον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ.

Καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΚ μέγεθος ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β.

Ἐὰν δύο μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη. 2.

Δύο γὰρ μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων τῶν ΑΒ ΓΔ, καὶ ὄντος ἐλάσσονος τοῦ ΑΒ, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρείτω τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ ΓΔ μεγέθη. Fig. 2.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Ε· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΔΖ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέγεθος, ὅ ἐστιν ἔλασσον τοῦ Ε. Γεγονέτω, καὶ λελείφθω τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΔΖ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. Ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ ΓΔ μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότατις γ.

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. 3.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ ΑΒ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. Fig. 3.

Τὸ ΑΒ γὰρ μέγεθος ἤτοι μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὔ. Εἰ μὲν οὖν τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· τὸ ΑΒ ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστὶ, καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον· μεῖζον γὰρ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΒ οὐ μετρήσει.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ· ἀνθυφαιρουμένου ἄρα τοῦ ἐλάσσονος ἀεὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ ΑΒ ΓΔ· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΕΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΕΓ, τὸ δὲ ΕΓ τὸ ΖΒ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΖ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρείτω.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μετρήσει τὸ ΑΖ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΛΕ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΛΕ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τὰ ΑΒ ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ ΑΖ, ὃ μετρήσει τὰ ΑΒ ΓΔ. Μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Η. Ἐπεὶ οὖν τὸ Η τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΕΔ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον

τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΕ μετρήσει τὸ Η. Ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΖ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ ΓΔ μεγέθη μετρήσει· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστί.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τῶν ΑΒ ΓΔ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὕρηται τὸ ΑΖ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Πρότασις δ'.

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. 4.

Ἔστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ Α Β Γ· δεῖ δὴ τῶν Α Β Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. Fig. 4.

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρείτω πρότερον. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α Β· τὸ Δ ἄρα τὰ Α Β Γ μετρεῖ· τὸ Δ ἄρα τῶν Α Β Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. Καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, μεῖζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ Α Β οὐ μετρεῖ.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ Δ τὸ Γ. Λέγω πρῶτον ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ Δ. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α Β Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ Α Β μετρήσει· ὥρτε καὶ τὸ τῶν Α Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥρτε τὸ εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Γ Δ. Εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον

κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α Β μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α Β μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. Τὸ Ε ἄρα τὰ Α Β Γ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α Β Γ κοινόν ἐστι μέτρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ Ε μεῖζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρείτω τὰ Α Β Γ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α Β Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α Β μετρήσει· καὶ τὸ τῶν Α Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ Δ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Γ Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. Τὸ δὲ τῶν Γ Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μεῖζόν τι τοῦ Ε μεγέθους μέγεθος τὰ Α Β Γ μεγέθη μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α Β Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν.

Τριῶν ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τῶν Α Β Γ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, τὸ Ε, εὕρηται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν μέγεθος τρία μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

(Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ πλειόνων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσει.)

Πρότασις ε.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. 5.

Ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Fig. 5.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α Β, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Γ. Καὶ ὁσά-

κις τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ ἀριθμῷ, ὁσάκις δὲ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Δ μετρεῖ ἀριθμὸν, καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Ε μετρεῖ, καὶ τὸ Γ τὸ Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε.

Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ Α Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη. 6.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Α Β μεγέθη. Fig. 6.

Ὅσαι γὰρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ· ὅσαι δέ εἰσιν ἐν τῷ Ε μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συγκείσθω τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Δ μονάδες τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ Α μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ Δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ

τοῦ Α· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ. Μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α. Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα. Πάλιν, ἐπεὶ, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ Ζ μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ἀλλ᾽ ὡς ὁ Δ πρὸς τόν Ε, οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ· τὸ Α ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Β Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τῷ Ζ. Μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ, μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα τὰ Α Β μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

(*Πόρισμα.*

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ, ὡς οἱ Δ Ε, καὶ εὐθεῖα, ὡς ἡ Α, δύνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς τὸν Δ ἀριθμὸν πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν, οὕτως τὴν εὐθεῖαν πρὸς εὐθεῖαν. Ἐὰν δὲ καὶ τῶν Α Ζ μέση ἀνάλογον ληφθῇ, ὡς ἡ Η, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Η, τοῦτ᾽ ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν· γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Η εὐθείας.)

Πρότασις ζ.

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. 7.

Ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α Β· λέγω ὅτι τὸ Fig. 7.
Α πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρον ἔσται τὸ Α τῷ Β. Οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα . . .
καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἀσύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη. 8.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α Β πρὸς ἄλληλα λόγον Fig. 8.
μὴ ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστὶ τὰ Α Β μεγέθη.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἕξει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Οὐκ ἔχει δέ. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Α Β μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ . . .
καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ.

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει 9.

μήκει συμμέτρους· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

Ἔστωσαν γὰρ αἱ Α Β μήκει σύμμετροι· λέγω Fig. 9
ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον· τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦ δὲ τοῦ Γ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον, δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον ἀριθμὸν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον· λέγω ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ· ἀλλὰ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγου· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Ἀλλὰ δὴ ἀσύμμετρος ἔστω ἡ Α τῇ Β μήκει· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, σύμμετρος ἔσται ἡ Α τῇ Β μήκει. Οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Πάλιν δὴ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Εἰ γὰρ ἐστι σύμμετρος ἡ Α τῇ Β μήκει, ἕξει τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ἐκ τῶν δεδειγμένων ἐστι, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι οὐ πάντως καὶ μήκει, καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι, οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἄσυμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει.

(Λῆμμα.

Λέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. Καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ, τοῦτ' ἔστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευρὰς, πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ ἔξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.)

Πρότασις ι' (ια').

Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει. 10. (11.)

Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ Α· δεῖ δὴ τῇ Α προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει. Fig. 10.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ οἱ Β Γ, πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τοῦτ' ἔστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως τὸ ἀπὸ

τῆς Α πετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ τετράγωνον· (ἐμάθομεν γάρ·) σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Β πρὸς τὸν Γ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει. Εἰλήφθω τῶν Α Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. Ἀσύμμετρος δέ ἐστιν ἡ Α τῇ Δ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς Ε τετραγώνῳ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Ε δυνάμει.

Τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Α προσεύρηνται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ Ε· μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ια (ι).

11. (10.) Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ πρῶτον τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α Β Γ Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ Α δὲ τῷ Β σύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ σύμμετρον ἔσται. *Fig.* 11.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ ἀσύμμετρον ἔσται. Ἐπεὶ γὰρ

ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιβ.

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα. 12.

Ἑκάτερον γὰρ τῶν Α Β τῷ Γ ἔστω σύμμετρον. Fig. 12.
λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶ σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω, ὃν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω, ὃν ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν, τοῦ τε, ὃν ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις, οἱ Θ Κ Λ· ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ, ὡς δὲ τὸν Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως τὸν Κ πρὸς τὸν Λ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. Ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α τρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Θ

πρὸς ἀριθμὸν τὸν Α· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ'.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ᾖ τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἕτερον ἀσύμμετρον· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη. 13.

Ἔστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ Α Β, ἄλλο δὲ τὸ Γ, καὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ Β τῷ Γ ἀσύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρόν ἐστιν. Fig. 13.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ τῷ Α· καὶ τὸ Γ ἄρα τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

Πρότασις ιδ'.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ· καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται. 14.

Ἔστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α Β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ Α ἄλλῳ τινὶ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῷ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Fig. 14.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Β τῷ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α τῷ Β σύμμετρόν ἐστι· καὶ τὸ Α ἄρα τῷ Γ σύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.

Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

(*Λῆμμα.*

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, εὑρεῖν, τίνι μεῖζον δύναται ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ εὑρεῖν, τίνι μείζον δύναται ἡ ΑΒ τῆς Γ.

Γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον, τὸ ΑΔΒ, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ Γ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. Φανερὸν δὴ ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία, καὶ ὅτι ἡ ΑΒ τῆς ΑΔ, τοῦτ' ἔστι τῆς Γ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ.

Ὁμοίως δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἡ δυναμένη τὰ ἀπ' αὐτῶν εὑρίσκεται οὕτως.

Ἔστωσαν αἱ δύο εὐθεῖαι δοθεῖσαι αἱ ΑΔ ΔΒ· καὶ δέον ἔστω εὑρεῖν τὴν δυναμένην τὰ ἀπ' αὐτῶν. Κείσθωσαν γὰρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν, τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ.)

Πρότασις ιε.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, 15.
δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Ἔστωσαν δὴ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α Fig. 15
Β Γ Δ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ἡ μὲν Α τῆς Β μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ε, ἡ δὲ Γ τῆς Δ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ζ· λέγω ὅτι εἴτε σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι

ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ· εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Ε Β, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Ζ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Ε Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν Ζ Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. Ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· διἴσου ἄρα ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ζ· εἴτε οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ· εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ις'.

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν σύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται. 16.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὰ ΑΒ ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΓΑ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐστὶ σύμμετρον. Fig. 16.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ ΒΓ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ ΑΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὰ ΑΒ ΒΓ· τὸ Δ ἄρα τὰ

ΑΒ ΒΓ καὶ τὸ ΑΓ μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ ΒΓ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ ΒΓ ἔστω σύμμετρον· ἔστω δὴ τῷ ΑΒ· λέγω δὴ ὅτι καὶ τὰ ΑΒ ΒΓ σύμμετρά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΓ ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ ΒΓ μετρήσει· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιζ.

Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, 17
καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα, τὰ ΑΒ Fig.
ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, εἰ δυνατὸν, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ ΒΓ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ ΒΓ· ὑπέκειτο δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΓΑ ΑΒ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ ΑΒ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὰ ΑΓ ΓΒ ἀσύμμετρά ἐστι· τὸ ΑΓ ἄρα ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ ΒΓ ἀσύμμετρον ἔστω, καὶ πρότερον τῷ ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ τὰ ΑΒ ΒΓ

ἀσύμμετρά ἐστιν. Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΓΑ ΑΒ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ ΑΒ. Ὑπέκειτο δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ ΒΓ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ ΒΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι εἰ τὸ ΑΓ τῷ λοιπῷ τῷ ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστι, καὶ τὰ ΑΒ ΒΓ ἀσύμμετρα ἔσται.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ . . .

καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ἐὰν παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· τὸ παραβληθὲν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

Παρὰ γάρ τινα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔ, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ΔΒ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ.

Καὶ ἔστιν αὐτόθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΒ, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ, καὶ ἔστι τὸ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ, τοῦτ' ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ . . .

καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιή.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τε- 18.
τάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ

εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α, τοῦτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Α, ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ, σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Fig. 1

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΖ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ· καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τῷ μὲν τετραπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον, τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον, διπλασίων γάρ ἐστι ἡ ΖΔ τῆς ΔΕ· τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον, διπλασίων γάρ ἐστι πάλιν ἡ ΒΓ τῆς ΕΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Α ΔΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς

ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς Α μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Δεικτέον ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΓΔ ταῖς ΓΔ ΒΖ ἐστὶ σύμμετρος μήκει, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρός ἐστι ταῖς ΒΖ ΓΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ. Δεικτέον ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Δύναται δὲ ἡ ΒΓ μεῖζον τῆς Α τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. Ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ ΔΓ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΓ μήκει· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΒΖ τῇ ΔΓ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ διελόντι ἄρα ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἐστὶ σύμμετρος μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τε- 19.
τάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖ-

ζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ, ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Fig. 1

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρότερον, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Δεικτέον οὖν ὅτι καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΔΓ μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΔΓ σύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ ΔΓ· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει, καὶ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Δυνάσθω δὴ πάλιν ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ. Δεικτέον ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Ἀλλ' ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ

μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. Ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ.

20. Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ῥητόν ἐστιν.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ ΑΓ. Fig. 20.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δέ ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ· σύμμετρος δέ ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΓ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κά.

21. Ἐὰν ῥητὸν χωρίον παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ· πλάτος ποιεῖ ῥητήν, καὶ σύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Ῥητὸν γὰρ χωρίον τὸ ΑΓ παρὰ ῥητὴν τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω, πλάτος ποιοῦν τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει. Fig. 21.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Ῥητὸν δὲ καὶ τὸ ΑΓ·

σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ· Ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ. Ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.

Ἐὰν ἄρα ῥητὸν χωρίον παρὰ ῥητὴν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ μέση. 22.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Fig 2

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ ΑΓ, τοῦτ' ἔστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον ἀναγράφουσα, ἄλογός ἐστι.

(Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι·) καλείσθω δὲ μέση.

Πρότασις κγ'.

Τὸ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον χωρίον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν, καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. 23.

Ἔστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ Fig. 23.
ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΔ· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΓΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει.

Ἐπεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ Α, δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων. Δυνάσθω τὸ ΗΖ. Δύναται δὲ καὶ τὸ ΔΒ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΒ τῷ ΗΖ. Ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ῥητὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ ΕΗ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ ΕΗ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΖ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΖΕ ΕΗ σύμμετρόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ ΓΒ, ἴσα γάρ ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς Α· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ ΓΒ περιεχομένῳ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ ΓΒ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἀσύμμετρος

ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κδ'.

Ἡ τῇ μέσῃ σύμμετρος μέση ἐστίν. 24

Ἔστω μέση ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ Β· λέγω ὅτι καὶ ἡ Β μέση ἐστίν. Fig.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΔΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΔ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΓ τῷ ΓΖ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ μήκει. Ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· αἱ ΓΔ ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογος· καλεῖται δὲ μέση· ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΖ δυναμένη μέση ἐστί, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΖ ἡ Β· μέση ἄρα ἐστὶν ἡ Β.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τὸ τῷ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστίν. Δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι αἵ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν. (Ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἐξακολουθεῖ, τὴν τῇ μέσῃ σύμμετρον λέγεσθαι μέσην.)

Πρότασις κε.

Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μέσον ἐστίν. 25.

Ὑπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχέσθω ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ μέσον ἐστίν. Fig. 25.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ΑΔ τῷ ΑΓ σύμμετρόν ἐστι. Μέσον δὲ τὸ ΑΔ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κς'.

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν. 26.

Ὑπὸ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχέσθω ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν. Fig. 26.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνα τὰ ΑΔ ΒΕ· μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ ΒΕ. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΑΔ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΘΜ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΜΚ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ, καὶ ἔτι τῷ ΒΕ ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν ΚΝ παραβεβλήσθω τὸ ΝΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ΖΘ ΘΚ ΚΛ. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ ΒΕ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΕ τῷ ΝΛ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκάτερον τῶν ΗΘ ΝΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΖΘ ΚΛ, καὶ

ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΔ τῷ ΒΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΗΘ τῷ ΝΛ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΚΛ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΚΛ μήκει· αἱ ΖΘ ΚΛ ἄρα ῥηταί εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ ΚΛ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΛ, ἡ δὲ ΞΒ τῇ ΒΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΞ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ· ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΞ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ. Ἴσον δέ ἐστι τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΜΚ, τὸ δὲ ΓΞ τῷ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΜΚ, οὕτως τὸ ΜΚ πρὸς τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΘ ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΚ. Ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ ΚΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστι τῇ ΘΜ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΖΗ, μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΘΝ· εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, αἱ ΚΘ ΘΜ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΝ· τὸ ΘΝ ἄρα ἤτοι ῥητόν ἢ μέσον ἐστίν. Ἴσον δὲ τὸ ΘΝ τῷ ΑΓ· τὸ ΑΓ ἄρα ἤτοι ῥητόν ἢ μέσον ἐστί.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κζ.

Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ. 27

Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ ΑΒ μέσου τοῦ ΑΓ ὑπερεχέτω ῥητῷ τῷ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΖΗ· λοιπὸν Fig.

ἄρα τὸ ΒΔ λοιπῷ τῷ ΚΘ ἐστὶν ἴσον. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ ΑΓ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΖΘ ἴσον, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΖΗ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΖΘ ΖΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΕΘ ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΚΘ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ, καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ τετράγωνα, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ, διπλάσιον γάρ ἐστιν αὐτοῦ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ· καὶ συναμφότερα ἄρα τά τε ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ. Ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ· ἀλλὰ καὶ ῥητή, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα μέσον μέσου ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κή.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας. 28.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, καὶ εἰλήφθω τῶν ΑΒ μέση ἐπίπεδοι. ἡ Γ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως [illegible] τὴν Δ. Fig. 28.

Καὶ ἐπεὶ αἱ Α Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α Β, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ, μέσον ἐστί· μέση ἄρα ἡ Γ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, αἱ δὲ Α Β δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσι· καὶ αἱ Γ Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ· αἱ Γ Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ. Ἀλλὰ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Γ Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ Δ.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι, αἱ Γ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κθ'.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α Β Γ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α Β μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. Fig

Ἐπεὶ αἱ Α Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α Β, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς Δ, μέσον ἐστί· μέση ἄρα ἡ Δ. Καὶ ἐπεὶ αἱ Β Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· αἱ Δ Ε ἄρα σύμμετροι δυνάμει μόνον εἰσί. Μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ [illegible] ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι [illegible]γραμμον [illegible] ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. Ἐπεὶ γάρ ἐ[illegible] τῷ δὲ [illegible] πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν

Ε, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ *Β* πρὸς τὴν *Δ*, οὕτως ἡ *Γ* πρὸς τὴν *Ε*. Ὡς δὲ ἡ *Β* πρὸς τὴν *Δ*, οὕτως ἡ *Δ* πρὸς τὴν *Α*, καὶ ὡς ἄρα ἡ *Δ* πρὸς τὴν *Α*, οὕτως ἡ *Γ* πρὸς τὴν *Ε*· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν *Α Γ* ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν *Δ Ε*. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν *Α Γ*· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *Δ Ε*.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι, αἱ *Δ Ε*· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λῆμμα α.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμοὺς, ὥστε καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ *ΑΒ ΒΓ*, ἔστωσαν δὲ ἤτοι ἄρτιοι ἢ περιττοί. Καὶ ἐπεὶ ἐάν τε ἀπὸ ἀρτίου ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ἐάν τε ἀπὸ περιττοῦ περιττὸς, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν· ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ *ΑΓ* ἄρτιός ἐστι. Τετμήσθω ὁ *ΑΓ* δίχα κατὰ τὸ *Δ*. Ἔστωσαν δὲ καὶ οἱ *ΑΒ ΒΓ* ἤτοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, οἳ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ἐκ τῶν *ΑΒ ΒΓ* μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ *ΓΔ* τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ *ΑΒ* τετραγώνῳ. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ ἐκ τῶν *ΑΒ ΒΓ*, ἐπειδήπερ ἐδείχθη ὅτι ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνός ἐστιν· εὕρηνται ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ, ὅ τε ἐκ τῶν *ΑΒ ΒΓ*, καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ *ΓΔ*, οἳ συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἀπὸ τοῦ *ΒΔ* τετράγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ὅτι εὑρηνται πάλιν δύο τετράγωνοι, ὅ τε ἀπὸ τοῦ *ΒΔ* καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ *ΓΔ*, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν, τὸν ὑπὸ τῶν *ΑΒ ΒΓ*, εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ *ΑΒ ΒΓ* ὅμοιοι ὦσιν ἐπίπεδοι. Ὅταν δὲ μὴ ὦσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὑρηνται δύο τετράγω-

νοι, ὅ τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ, ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, οὐκ ἔστι τετράγωνος.

Λῆμμα β.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμοὺς, ὥστε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Ἔστω γὰρ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ, ὡς ἔφαμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ τετμήσθω ὁ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Δ· φανερὸν δὴ ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνῳ. Ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ ΔΕ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνου. Λέγω οὖν ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ οὐκ ἔσται τετράγωνος.

Εἰ γὰρ ἔσται τετράγωνος, ἤτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ ἢ ἐλάσσων, οὐκέτι δὲ καὶ μείζων, ἵνα μήτε τμηθῇ ἡ μονὰς, μήτε ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὅς ἐστιν ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΒ, ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ, (μήτε ἐλάσσων αὐτῶν). Ἔστω, εἰ δυνατόν, πρότερον ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, καὶ ἔστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίων ὁ ΗΑ. Ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστὶ διπλασίων, ὧν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΕ ἐστὶ διπλασίων· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιποῦ τοῦ ΕΓ ἐστὶ διπλασίων· δίχα ἄρα τέτμηται ὁ ΗΓ τῷ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος ὑπόκειται τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ τετραγώνῳ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ. Καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ, συνάγεται ὁ ΑΒ ἴσος τῷ ΗΒ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ

ἴσος

ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ ΒΕ. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΖ ἴσος, καὶ τοῦ ΔΖ διπλασίων κείσθω ὁ ΘΔ. Καὶ συναχθήσεται πάλιν διπλασίων ὁ ΘΓ τοῦ ΓΖ, ὥστε καὶ τὸν ΓΘ δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Ζ· καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐκ τῶν ΘΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΖΓ ἴσον γενέσθαι τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΖ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ΖΒ· ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΖ ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐλάττονι τοῦ ἀπὸ ΒΕ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ τετράγωνός ἐστι. [Δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ πλείονας τρόπους τὸ εἰρημένον ἐπιδεικνύναι, ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος, ἵνα μὴ μακροτέρας οὔσης τῆς πραγματείας ἐπιπλέον αὐτὴν μηκύνωμεν.])

Πρότασις κ.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. 30.

Ἐκκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ ΔΕ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν, τὸν ΓΕ, μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ. Fig. 30.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ

ἀρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ ΑΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ΓΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΓ πρὸς τὸν ΓΕ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΖ μήκει· αἱ ΒΑ ΑΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΑΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. Ὁ δὲ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΕ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. Καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ ΖΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Εὕρηνται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ ΑΖ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΑΖ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λά.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. 3

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΕ ΕΔ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΓΔ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ Fig

ἡμικύκλιον τὸ *ΑΖΒ*, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ *ΓΔ* πρὸς τὸν *ΓΕ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΖ*, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ *ΒΖ*.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου· ὅτι αἱ *ΒΑ ΑΖ* ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ *ΑΓ* πρὸς τὸν *ΓΕ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΑ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΖ*· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ *ΓΑ* πρὸς τὸν *ΑΕ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΖ*. Ὁ δὲ *ΓΑ* πρὸς τὸν *ΑΕ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΖ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΑΒ* τῇ *ΒΖ* μήκει. Καὶ δύναται ἡ *ΑΒ* τῆς *ΑΖ* μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς *ΒΖ* ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Αἱ *ΑΒ ΑΖ* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ *ΑΒ* τῆς *ΑΖ* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς *ΖΒ* ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λβ.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. 32.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ *Α Β*, ὥστε τὴν *Α*, μείζονα οὖσαν, τῆς ἐλάσσονος τῆς *Β* μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ τῷ ὑπὸ τῶν *Α Β* ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς *Γ*. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν *Α Β*· μέσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *Γ*· μέση ἄρα καὶ ἡ *Γ*. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *Β* ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν *Γ Δ*, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *Β*· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *Γ Δ*. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ *Α* πρὸς τὴν *Β*, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν *Α Β* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Β*, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν *Α* *Fig.* 32

Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Γ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ Δ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ Δ, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. Σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Β δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Γ τῇ Δ δυνάμει μόνον. Καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ Α τῆς Β μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ Γ Δ, ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν τῆς Β μεῖζον δύνηται ἡ Α τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Πρότατις λγ.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιεχούσας· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. 33

Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α Β Γ, ὥστε τὴν Α τῆς Γ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α Β· μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· καὶ ἡ Δ ἄρα μέση ἐστί. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β Γ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Δ Ε. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α Β πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β Γ, οὕτως ἡ Α Fig.

πρὸς τὴν Γ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β Γ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ Ε. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ Ε, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. Σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Γ δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῇ Ε δυνάμει μόνον. Μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ Α τῆς Γ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς Ε μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ Ε. Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Β Γ τῷ ὑπὸ τῶν Δ Ε, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Β Γ· αἱ γὰρ Β Γ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ Ε.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ Ε, μέσον περιέχουσαι· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ὁμοίως δὴ πάλιν δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Γ μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Λῆμμα.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, καὶ ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ.

Καὶ πρῶτον ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ ΑΔΓ ἄρα τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν της βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Λέγω ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ. Ἐπεὶ γὰρ, ὡς ἔραμεν, ὁμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΓΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ. (Ἢ καὶ ὅτι, ἐὰν ἀναγράψωμεν τὸ ΕΓ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, καὶ συμπληρώσωμεν τὸ ΑΖ, ἴσον ἔσται τὸ ΕΓ τῷ ΑΖ, ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΑΔ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ.)

Πρότασις λδ'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτων τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. 34

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ ΒΓ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ τῷ ἀφ' ὁποτέρας τῶν ΒΔ ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ ΖΒ. Fig. 34.

Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ ΒΓ, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, τοῦτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· αἱ ΑΖ ΖΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ῥητή ἐστι, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΖ ΖΒ ῥητόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ ἴσον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ τῇ ΒΔ· διπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΕΖ· ὥστε καὶ σύμμετρον. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΕΖ. Ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΕΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΖ ΖΒ, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λε.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. 35.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ ΒΓ, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔΒ ἡμικύκλιον, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσον παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει· καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΔΒ. Fig. 3

Ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΖ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· αἱ ΑΔ ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΓ τῆς ΔΖ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΖΔ· ὥστε καὶ σύμμετρον. Ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΖΔ. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ῥητόν ἐστιν.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ ΑΔ ΔΒ, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λϛ'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ ὑπ' αὐτῶν. 36.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ ΒΓ, μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ τὰ λοιπὰ γεγονέτω τοῖς ἐπάνω εἰρημένοις ὁμοίως. Fig. 36.

Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ δυνάμει. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΒΕ ΔΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΔΖ· διπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΖΔ· Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΖΔ· καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΖΔ, τοῦτ' ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ· ἀσύμμετρον

ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΔ ΔΒ, δυνάμει ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ ὑπ' αὐτῶν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λζ.

Ἐὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι 37
συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι· καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμ- Fig. 3
μετροι αἱ ΑΒ ΒΓ· λέγω ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· αἱ γὰρ ΑΒ ΒΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ συνθέντι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι· καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Πρότασις λή.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμ- 38
μετροι συντεθῶσι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ

ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ ΒΓ, ῥητὸν περιέχουσαι· λέγω ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν. Fig. 38.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· καὶ συνθέντι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ὑπόκεινται γὰρ αἱ ΑΒ ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Πρότασις λθ'.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι, μέσον περιέχουσαι· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι· καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα. 39.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ ΒΓ, μέσον περιέχουσαι· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ. Fig. 39.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, παραβεβλήσθω δὴ παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Καὶ ἐπεὶ μέση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΒ ΒΓ· μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Μέσον δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον τὸ ΖΘ·

μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΘ ΘΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΘ ΘΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΘ τῷ ΘΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΗ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. Ἐδείχθησαν δὲ ῥηταί· αἱ ΔΘ ΘΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὥστε ἡ ΔΗ ἄλογός ἐστι. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖ χωρίον· καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Λύναται δὲ τὸ ΔΖ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Πρότασις μ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι· καλείσθω δὲ μείζων. 40

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ ΑΒ ΒΓ, ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ. Fig.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον ἐστὶ, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον ἐστί. Τὸ δὲ

συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μείζων.

Πρότασις μά.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι. καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. 41.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ ΒΓ, ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ. Fig. 41.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ὥστε καὶ συνθέντι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Πρότασις μβ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ ὑπ' αὐτῶν· 42.

ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι· καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ- Fig.
μετροι αἱ ΑΒ ΒΓ, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ ὑπ' αὐτῶν· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον τὸ ΔΖ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον τὸ ΗΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ ἴσον τῷ ΔΖ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΚ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΗΖ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΔΕ, μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖ τῷ ΗΘ· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΗΚ ἀσύμμετρός ἐστι. Καὶ εἰσὶ ῥηταί· αἱ ΔΗ ΗΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΚ ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΘ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δύναται δὲ τὸ ΔΘ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

(Λῆμμα.

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ' ἑκατέρα τῶν Γ Δ, ὑποκείσθω δὲ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΑΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ λοιπῆς τῆς ΓΒ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῆς

ΕΓ· τὰ Γ Δ ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ· ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἐλαττόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἀφῃρήσθω ἑκάτερα ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνου λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.)

Πρότασις μγ'.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα. 43.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους. Fig. 43.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ ΔΒ ῥητὰς εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους. Φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ οὐκ ἐστιν ἡ αὐτή. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· ἔσται δὴ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ ἡ αὐτή· καὶ ἔσται ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, καὶ ἔσται ἡ ΑΒ κατὰ τὰ αὐτὰ τμήματα τῇ κατὰ τὸ Γ διαιρέσει διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ Δ, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἡ αὐτή· διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὰ Γ Δ σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας· ᾧ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, τούτῳ

διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ διαφέρει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ διαφέρει ῥητῷ, μέσα ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· μέσον γὰρ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα· καθ' ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μδ'.

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται. 44.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται. Fig. 4

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. Ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, ῥητῷ δὲ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· ῥητῷ ἄρα διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, μέσα ὄντα, ὅπερ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις με.

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται. 45

Ἔστω

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας· φανερὸν δὴ ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται. Fig. 45.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ, (δῆλον δὴ ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν,) καὶ τὰς ΑΔ ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον παραβεβλήσθω τὸ ΕΚ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, (ἅπερ ἐλάσσονα ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ) ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΜΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, δυνάμει γάρ εἰσι σύμμετροι αἱ ΑΓ ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν

ΑΓ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΕΘ ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐὰν δὲ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. Κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ ΕΜ ΜΝ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἔσται ἡ ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο διῃρημένη, τό τε Θ καὶ τὸ Μ, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτὴ, ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ· πολλῷ ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΕΗ, μεῖζόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, τοῦτ' ἔστι τοῦ ΜΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν· ἡ ἄρα ΕΘ τῇ ΜΝ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. Ἡ ἄρα ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων οὐσα διῃρῆται κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον· ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μϛ'.

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαιρεῖται. 46

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται. Fig.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. Καὶ ἐπεὶ ᾧ διαφέρει

τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, μέσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ ἄρα μόνον διαιρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Προτασις μζ.

Ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται. 47.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται. Fig. 47.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ, μέσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον διαιρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μη.

Ἡ δύο μέσα δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται. 48.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ ὑπ' αὐτῶν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται, ποιοῦσα τὰ προκείμενα. Fig. 48.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε πάλιν δηλονότι τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ, καὶ κείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Πάλιν δὴ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἴσον τὸ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ λοιπῷ τῷ ΜΚ ἴσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα τῷ ΘΚ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι. Καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ κατὰ τὸ Μ διῄρηται, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή· ἡ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διῄρηται, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον σημεῖον διαιρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅροι δεύτεροι.

α. Ὑποκειμένης ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάττονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ὅλη ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη. 1.

β. Ἐὰν δὲ τὸ ἐλάσσον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. 2.

γ. Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη. 3.

δ. Πάλιν δὴ ἐὰν τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη. 4.

ε. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλαττον, πέμπτη. 5.

ϛ. Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη. 6.

Πρότασις μθ.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. 49.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. Καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ Fig. 49.

τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.

Λέγω ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ Θ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΕΖ ΖΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΕΖ τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ν'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. 50.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ ΓΒ, ὥστε τὸν *Fig. 5*
συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετρά-

γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω ἡ ΖΗ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. Γεγονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ μήκει· αἱ ΕΖ ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.

Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἀλλ' ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΕΖ τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσι ῥηταὶ αἱ ΕΖ ΖΗ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΖΗ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ, μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις νά.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. 51.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ ΓΒ, ὥστε τὸν Fig. 51.
συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἐκκείσθω δέ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ ΑΓ λόγον μὴ ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. Γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως

τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καί εἰσιν αἱ ΖΗ ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει.

Ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις νβ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. 52.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν, μήτε μὴν πρὸς τὸν ΑΓ, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. Καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγω- Fig. 52.

νον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΕΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μεῖζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΕΖ ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΕΖ τῇ Δ σύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιγ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην, 53
Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ ΓΒ, ὥστε τὸν Fig 5
ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητή τις εὐθεῖα ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΗΖ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΗΖ. Καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς

ΗΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· αἱ ΕΖ ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως, τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΕΖ τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΕΖ ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΖΗ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις νδ.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. 54

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ ΓΒ, ὥστε τὸν Fig. 54.
ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὤν, μήτε πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ ΑΓ λόγον ἔχων, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ.

Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. Γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΖΘ.

Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. Ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ΖΗ ἀσύμμετρος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΖΗ ΗΘ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ,

οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥρτε οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καί εἰσιν αἱ ΖΗ ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ Ε.

Ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

(Λῆμμα.

Ἔστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ ΒΓ, καὶ κείσθωσαν ὥρτε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΒΕ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΒΗ. Καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· λέγω ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ὅτι τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ, καὶ ἔτι τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΒΗ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλῃ τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΘ ΚΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ ΘΓ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΘ ΚΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ ΘΓ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· ἔστι δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν ΑΒ ΒΓ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ, οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΔΓ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν ΑΓ ΓΒ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ· ὅπερ προύκειτο δεῖξαι.)

Πρότασις νέ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. 55.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. Fig.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω τὸ μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ. Φανερὸν δὴ ὅτι αἱ ΑΕ ΕΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΒ μήκει. Τετμήσθω δὴ ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τοῦτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΑΕ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. Παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει. Καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η Ε Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΘ ΕΚ ΖΛ· καὶ τῷ μὲν

ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΝΡ τῇ ΝΟ. Καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ παραλληλόγραμμον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΛ, οὕτως τὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΚΠ· τῶν ΑΘ ΗΚ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ, τὸ δὲ ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΠ· τῶν ΣΝ ΝΠ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. Ἔστι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΜΡ τῷ ΕΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΡ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΖΓ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΓ τοῖς ΜΡ ΟΞ ἴσον ἐστίν· ἔστι δὲ καὶ τὰ ΑΘ ΗΚ τοῖς ΣΝ ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τοῦτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ ἄρα δύναται ἡ ΜΞ.

Λέγω ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ ΗΕ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος μήκει· καὶ αἱ ΑΗ ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσι. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ ΗΕ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ ΗΚ, ὥστε καὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ ΝΠ ἄρα, τοῦτ' ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ, ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστὶ σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστὶν

ἴσον, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλ' ὡς τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΜΡ, οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΜ, ἡ δὲ ΝΡ τῇ ΝΞ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ. Καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ σύμμετρον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον· αἱ ΜΝ ΝΞ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ν΄.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη. 51

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒΓΔ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν. Fig. 51

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἔλαττον ὄνομα, ἡ ΕΔ, σύμμετρόν ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. Τετμήσθω ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. Καὶ διὰ τῶν Η Ε Ζ παράλληλοι ἤχθωσαν ταῖς ΑΒ ΔΓ αἱ ΗΘ ΕΚ ΖΛ, καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τετράγωνον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. Καὶ συμπεπλη-

πληρώσθω τὸ ΣΠ τετράγωνον· φανερὸν δὴ ἐκ τοῦ προδεδειγμένου, ὅτι τὸ ΜΡ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΣΝ ΝΠ, καὶ ἴσον τῷ ΕΛ, καὶ ὅτι τὸ ΑΓ χωρίον δύναται ἡ ΜΞ. Δεικτέον δὴ ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. Ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ ΗΕ. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΕ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ ΗΕ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ ΗΕ· αἱ ΑΗ ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΒΑ ΑΗ ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ ΗΚ· ὥστε ἑκάτερον τῶν ΣΝ ΝΠ μέσον ἐστί· καὶ αἱ ΜΝ ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσί. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ ΜΝ ΝΞ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΑΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστι, τοῦτ' ἔστι τὸ ΣΝ τῷ ΜΡ· ὥστε ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. Ἐδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ ΝΞ καὶ μέσαι οὖσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ ΜΝ ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΕ ὑπόκειται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ ΕΖ σύμμετρος· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΚ. Καὶ ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΜΡ, τὸ δὲ ΜΡ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ. Ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει μόνον

σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Ἡ ἄρα ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα. 57.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα. Fig. 57.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη ἡ ΑΔ· αἱ ΑΕ ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΕ ΕΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις δείξομεν ὅτι ἡ ΜΞ ἐστὶν ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη, καὶ αἱ ΜΝ ΝΞ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστί.

Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.

Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει, τοῦτ' ἔστι τῇ ΕΚ, σύμμετρος δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. Καὶ εἰσὶ ῥηταί· αἱ ΖΕ ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δύναμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ. Μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ.

Ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιη.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ 58.
τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς Fig. 53.
ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ ΑΕ ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρός ἐστι μήκει. Τετμήσθω δὴ ἡ ΔΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. Ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ ΑΒ αἱ ΗΘ ΕΚ ΖΛ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γεγονέτω· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. Δεικτέον δὴ ὅτι ἡ ΜΞ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ· αἱ ΜΝ ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τοῦτ' ἔστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ σύμμετρος ἐστι τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει· αἱ ΚΕ ΕΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΛΕ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ, καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ,

καὶ εἴσιν ἀσύμμετροι αἱ ΜΝ ΝΞ δυνάμει. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι. Καλεῖται δὲ μείζων.

Ἡ ΜΞ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ν϶.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. 59.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. Fig. 59

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. Δεικτέον δὴ ὅτι ἡ ΜΞ ἐστὶν ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΘΕ, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· αἱ ΜΝ ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καὶ ἔστιν ἔλασσον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΕΔ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει. Ἀλλ' ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει, καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει· αἱ ΒΑ ΑΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ· τοῦτ' ἔστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τοῦτ' ἔστι τῇ ΕΚ, ἀλλ' ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ

σύμμετρός ἐστι· καὶ ἡ *EZ* ἄρα τῇ *EK* σύμμετρός ἐστι. Καὶ ῥητὴ ἡ *EK*· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ *EΛ*, τοῦτ' ἔστι τὸ *MP*, τοῦτ' ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν *MN NΞ*· αἱ *MN NΞ* ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἡ *MΞ* ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ *AΓ* χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἔκτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη. 60

Χωρίον γὰρ τὸ *ABΓΔ* περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς *AB*, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἔκτης τῆς *AΔ*, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ *E*, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ *AE*· λέγω ὅτι ἡ τὸ *AΓ* δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστί. Fig. 60

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. Φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ *AΓ* δυναμένη ἐστὶν ἡ *MΞ*, καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ *MN* τῇ *NΞ* δυνάμει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ *EA* τῇ *AB* μήκει· αἱ *EA AB* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ *AK*, τοῦτ' ἔστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *MN NΞ*. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ *EΔ* τῇ *AB* μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *EZ* τῇ *EK*· καὶ αἱ *ZE EK* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ *EΔ*, τοῦτ' ἔστι τὸ *MP*, τοῦτ' ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν *MN NΞ*. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ *AE* τῇ *EZ*, καὶ τὸ *AK* τῷ *EΔ* ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ τὸ μὲν *AK* ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *MN NΞ*, τὸ δὲ *EΔ* ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν *MN NΞ*· ἀσύμμετρον ἄρα

ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ τῷ ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ. Καὶ ἔστι μέσον ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ ΜΝ ΝΞ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι.

Ἡ ΜΞ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστί, καὶ δύναται τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἔλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξά.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. 61.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕΖΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. Fig. 61

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον τὸ ΚΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΖ. Τετμήσθω ἡ ΜΗ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ ἑκατέρα τῶν ΜΛ ΗΖ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΜΞ ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ΑΓ ΓΒ. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ ΓΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΜΖ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΜΗ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΔΕ, μήκει. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΜΛ ῥητὴ, καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΔΜ ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· καὶ τῶν ΔΘ ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΜΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ, οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΛ, τοῦτ' ἔστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστι μήκει. Καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι

τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστί. Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ ΚΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τοῦτ' ἔστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει. Ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάττονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰσὶ ῥηταὶ αἱ ΔΜ ΜΗ, καὶ ἡ ΔΜ μεῖζον ὄνομα οὖσα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξβ.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. 62.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὧν μείζων ἡ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. Fig. 62

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσα ἐστί· μέσον ἄρα τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παραβέβληται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ῥητόν ἐστι καὶ τὸ ΜΖ, καὶ

παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ, καὶ μήκει σύμμετρος τῇ ΜΛ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΔΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. Καὶ εἰσὶ ῥηταί· αἱ ΔΜ ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστι. Καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἔστιν ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξγ.

63. Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Fig. 63. Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον τμῆμα εἶναι τὸ ΑΓ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον ἐστί· καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΛ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ·

καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΜΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΔ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΔΕ, μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΜ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, τοῦτ' ἔστι τὸ ΔΑ τῷ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρός ἐστι. Καὶ εἴσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τρίτη.

Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξδ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. 64.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. Fig. 64

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ

τὸ Γ, αἱ ΑΓ ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. Ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΔΛ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει· αἱ ΔΜ ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τετάρτη.

Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῆ ΜΗ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. Ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΔΜ ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΜ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξε.

Τὸ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. 65.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. Fig. 6

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. Ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΛ· ὥστε ῥητή ἐστιν ἡ ΔΜ, καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΜΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὁμοίως γὰρ δειχθήσεται ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ἀσύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΔΜ ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάττων ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. 66

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ῥητὴ δὲ ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ Fig.

ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν· ὥστε κατὰ τὰ προδεδειγμένα μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΔΛ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΜ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Λέγω ὅτι καὶ ἕκτη.

Ὁμοίως γὰρ πάλιν τοῖς πρὸ τούτου δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΛΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ὅτι ἡ ΛΚ τῇ ΚΜ μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξ'.

Ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή. 67.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Fig. 67.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. Καὶ εἴσι ῥηταὶ αἱ ΑΕ ΕΒ· ῥηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· αἱ δὲ ΑΕ ΕΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ εἴσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Λέγω δὴ ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἡ γὰρ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται ἤτοι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται· καὶ διὰ τοῦτο ἑκάτερα τῶν ΑΒ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, τοῦτ' ἔστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. Εἰ δὲ ἡ ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ΑΒ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἐστι ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ ΖΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τρίτη. Εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμε-

τρος εσται αὐτῇ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τετάρτη. Εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΖΔ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα πέμπτη. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ ΕΒ, καὶ τῶν ΓΖ ΖΔ οὐδετέρα σύμμετρος ἔσται τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα ἕκτη.

Ὥρστε ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος ... καὶ τὰ ἑξῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξή.

Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή. 68.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Fig. 68.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ ΖΔ· μέσαι δὲ αἱ ΑΕ ΕΒ· μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, αἱ δὲ ΑΕ ΕΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν· καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστί.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή ἐστι τῇ ΑΒ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Εἴτε οὖν

ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ ῥητὸν ἔσται· καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ἑκατέρα ἐκ δύο μέσων πρώτη. Εἴτε μέσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· καὶ ἔστιν ἑκατέρα δευτέρα.

Καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ἡ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις νθ'.

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων ἐστίν. 69.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ μείζων ἐστί. Fig. 69.

Διῃρήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· καὶ γεγονέτω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἥ τε ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ

τῶν

τῶν ΑΕ ΕΒ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ ἅμα ῥητόν· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ ἄρα ἅμα ῥητόν ἐστιν. Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ σύμμετρόν ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Καὶ ἔστι μέσον τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅλη ἄρα ἡ ΓΔ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Ἡ ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ὁ.

Ἡ τῇ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν. 70.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· δεικτέον ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστί. Fig. 70.

Διῃρήσθω ἡ ΑΒ εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς πρότερον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ τετραγώνων ἐστὶ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ ῥητόν.

Ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις οά.

Ἡ τῇ δύο μέσα δυναμένῃ σύμμετρος δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. 71.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· δεικτέον ὅτι καὶ ἡ ΓΔ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. Fig. 71.

Ἐπεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ· καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ τετραγώνων μέσον ἐστὶ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ.

Ἡ ΓΔ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις οβ.

Ῥητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες ἄλογοι γίνονται, ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ καὶ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. 72.

Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ, μέσον δὲ τὸ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. Fig. 72.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν, ἢ ἔλασ-

σον. Ἔστω πρότερον μεῖζον· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ΑΒ ἴσον τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· τῷ δὲ ΓΔ ἴσον παρὰ τὴν ΘΗ, τοῦτ' ἔστι τὴν ΕΖ, παραβεβλήσθω τὸ ΘΙ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΕΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· ἡ ΕΘ ἄρα ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΘΙ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΘΙ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΘΗ, τοῦτ' ἔστι τὴν ΘΗ, παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ, ῥητὸν δὲ τὸ ΑΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· ὥστε καὶ τὸ ΕΗ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ΘΙ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει· καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΘ ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ τοῦ ΘΙ· καὶ ἡ ΕΘ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΘΚ. Ἤτοι οὖν ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ μείζων ἡ ΘΕ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ἀλλὰ δὴ δυνάσθω ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ μείζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκει-

μένη ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη μείζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΘΚ· ἤτοι δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΕΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα· ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. Ἀλλὰ δὴ ἡ ΚΘ τῆς ΕΘ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστί.

Ῥητοῦ ἄρα καὶ μέσου συντιθεμένου . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ογ'.

Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται· ἤτοι ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα, ἢ ἡ δύο μέσα δυναμένη. 73

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ ΑΒ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἤτοι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα, ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν, ἢ ἔλασσον. Ἔστω πρότερον μεῖζον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΓΔ ἴσον τὸ ΘΙ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ ΓΔ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΕΗ ΘΙ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὰς ΕΘ ΘΚ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΘ ΘΚ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΙ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει· αἱ ΕΘ ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ. Ἤτοι δὲ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΕΘ ΘΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ΕΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΑΔ, δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. Ἀλλὰ δὴ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΘ ΘΚ τῇ ΕΖ μήκει, ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη δύο

μέσα δυναμένη ἐστίν· ὥστε ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν, ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Δύο ἄρα μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις οδ'.

Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ ἀποτομή. 74.

Ἀπὸ γὰρ ῥητῆς τῆς ΑΒ ῥητὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν. Fig. 74

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, (ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ). Ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. Καλείσθω δὲ ἀποτομή.

Πρότασις οε'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη. 75.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ΑΒ ῥητὸν περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν. Fig. 75.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒ ΒΓ μέσαι εἰσὶ, μέσα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἐπεὶ κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται. Ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. Καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Προτασις ος'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα. 76.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ μέσον περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ, ἡ ΑΓ, ἄλογός ἐστιν. Fig. 76.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ μέσα καὶ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ

τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον ἐστί. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ἴσον δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ ΔΕ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ ΔΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. Ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΔ τῇ ΔΖ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΗΔ ΔΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΗ ἄρα ἀποτομή ἐστι. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΙ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογος ἐστι. Ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕ, καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

Πρότασις οζ.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ μὲν ἀπ' αὐτῶν ἅμα ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ ἐλάσσων. 77.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν. Fig. 77

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραγώνων ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· καὶ ἀναστρέψαντι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ. Καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

Πρότασις οὴ.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. 78.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν. Fig. 78.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. Καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Πρότασις οθ.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς 79.

ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τό τε δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ, ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραγώνων μέσον, τό τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν. Fig. 79

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΔΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε ἡ ΑΓ δύναται τὸ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΕ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΕ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΘ· τὸ ἄρα ΔΘ μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν [τὴν ΔΙ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. Ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΗΔ ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ

ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι· τὸ ΖΕ ἄρα ἄλογόν ἐστι καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Πρότασις π'.

Τῇ ἀποτομῇ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ. 80.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ. Fig. 80.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ ΒΔ· αἱ ΑΔ ΔΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀμφότερα ὑπερέχει· ἐναλλὰξ ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΒΓ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γὰρ ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· τῇ ἄρα ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Μία ἄρα μόνον τῇ ἀποτομῇ προσαρμόζει ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις πά.

Τῇ μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον 81.

σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Ἔστω γὰρ μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμοζέτω ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ ΔΒ· αἱ ἄρα ΑΔ ΔΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἐπεί, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ πάλιν ὑπερέχουσι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ἐναλλὰξ ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γὰρ ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον . . .
καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις πβ.

Τῇ μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα. 82.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμό- Fig. 8

ζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ ΒΔ· αἱ ἄρα ΑΔ ΔΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥστε ἡ ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. Πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΛ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΙ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν δυνάμει σύμμετροι αἱ ΑΓ ΓΒ, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Καὶ ἔστιν ἴσα τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον ἐστί. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΘΗ· καὶ τὸ ΘΗ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ ΓΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ

τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον τὸ ΘΗ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΜ πρὸς τὴν ΘΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΘΜ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΜ ΘΜ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΘΝ αὐτῇ προσαρμόζει· τῇ ἄρα ἀποτομῇ, τῇ ΕΘ, ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει εὐθεῖα, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις πγ'.

Τῇ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον. 83.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἔστω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόζει, τὰ αὐτὰ ποιοῦσα. Fig. 83.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τετράγωνα ἅμα ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μέσον· καὶ ἐπεὶ, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τετραγώνων ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἄρα

τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα.

Τῇ ἄρα ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις πδ'.

Τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. 84.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα. Fig. 84.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ ΔΒ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόζει εὐθεῖα.

Τῇ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ηέ.

Τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ 85
μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ ὑπ' αὐτῶν.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ Fig. 8
ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόζει δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προκείμενα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τά τε ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τετράγωνα ἅμα μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΛ· ἡ ἄρα ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. Πάλιν, τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΙ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ

παρά-

παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΘΗ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ΘΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ μήκει. Καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΕΜ ΜΘ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΕΘ πάλιν ἀποτομή ἐστι, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΝ· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα.

Τῇ ἄρα ΑΒ μία μόνον προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τά τε ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἅμα μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ ὑπ' αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅροι τρίτοι.

α. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· καλείσθω ἀποτομὴ πρώτη. 1.

β. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καλείσθω ἀποτομὴ δευτέρα. 2.

γ. Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον 3.

δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καλείσθω ἀποτομὴ τρίτη.

δ'. Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη. 4.

ε'. Ἐὰν δὲ ᾖ προσαρμόζουσα, πέμπτη. 5.

ς'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη. 6.

Πρότασις πε'. 86.

Εὑρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΖΔ μὴ ἔστω τετράγωνος· οὐδ' ἄρα ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι. Fig. 86

Λέγω δὴ ὅτι καὶ πρώτη.

Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ

τῆς Θ. Ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἑκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστι· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ Α, μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις πζ.

Εὑρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν. 87.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος μήκει ἡ ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ· Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρός ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΗΒ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΗ ΗΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.

Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμόν· ἀναστρέψαντι ἄρα

Fig. 87.

Königl. Universitäts-Bibliothek Berlin

ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ, οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ. Καὶ ἔστιν ἑκάτερος τῶν ΔΕ ΕΖ τετράγωνος· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ Α, μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Εὕρηται ἄρα ἡ δευτέρα ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιή.

Εὑρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε ΒΓ ΓΔ, λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετραγώνῳ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετρά- 88. Fig. 88

γωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστίν ἡ ΖΘ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ· ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ Α, μήκει. Ὠι οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις πθ'.

Εὑρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν. 89.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ ΖΕ· ὥστε τὸν ΔΕ ὅλον πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ ΖΕ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ. Fig. 89.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη.

Ὡι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει,

ὂν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει· καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ Α, μήκει· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Εὕρηται ἄρα τετάρτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ϟ'.

Εὑρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν. 90.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος Fig. 90.
ἔστω ἡ ΓΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΕ πρὸς τὸν ΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν

ΕΖ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομὴ, ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κά.

Εὑρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν. 91.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε ΒΓ ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔτι δὲ καὶ ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Fig. 91.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. Πάλιν, ἐπεί

ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διὶσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ Α, μήκει. Ὧι οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ

μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ Α, μήκει· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομὴ, ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ϟβ.

92. Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστι.

Fig. 9. Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστι πρώτη ἡ ΑΔ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ὅλη ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, καὶ ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραλληλόγραμμον παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ. Καὶ διὰ τῶν Ε Ζ Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ ΖΙ ΗΚ.

Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει· καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΓ· ῥητὴ ἄρα καὶ

ἑκατέρα τῶν ΑΖ ΖΗ· ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν ΑΙ ΖΚ ῥητόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΗ, καὶ ἀσυμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ ΕΚ μέσον ἐστί.

Κείσθω δὴ τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ, τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ ΝΞ τετράγωνα. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ κατεγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΚΖ· τῶν ἄρα ΑΙ ΚΖ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ ΝΞ μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, (ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη,) καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ τῷ ΔΘ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΜΝ τῷ ΛΞ· τὸ ἄρα ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΛΜ ΝΞ τετραγώνοις· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ· τὸ δὲ ΣΤ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἐστὶ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΝ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ ΑΝ ἀποτομή ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΙ ΖΚ, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ΛΜ ΝΞ· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΛΜ ΝΞ ῥητόν ἐστι, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ΑΟ ΟΝ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΟ ΟΝ ῥητή ἐστι.

Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΑΘ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΑΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΞ. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΞ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΝΞ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΑΞ πρὸς τὸ ΝΞ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΟΝ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΟ τῇ ΟΝ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΑΟ ΟΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΝ, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιεχήται ὑπὸ ῥητῆς . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϟγ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ 93.
ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς Fig. 93.
ΑΓ καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη, ἡ ΑΗ, τῆς προσαρμοζούσης, τῆς ΗΔ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε· καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ διὰ τῶν Ε Ζ Η σημείων τῇ ΑΓ

παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ ΕΘ ΖΙ ΗΚ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει· καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ ΖΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ ΖΚ μέσον ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ ΕΗ σύμμετρός ἐστιν. Ἀλλ' ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ ΕΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ ΕΚ ῥητόν ἐστι.

Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ ΝΞ τετράγωνα. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὰ ΑΙ ΖΚ μέσα ἐστί, καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ ἄρα μέσα ἐστί· καὶ αἱ ΛΟ ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει συμμέτροι. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΚ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον τὸ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι, καὶ τῷ ΝΞ. Ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛΜ ΝΞ, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι, καὶ τῷ ΝΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ,

τοῦτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΝ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ χωρίῳ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ ΑΝ μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΕΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΜΝ, τοῦτ' ἔστι τῷ ΑΞ· ῥητὸν ἄρα ἔστι τὸ ΑΞ, τοῦτ' ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ. Μέσον δὲ ἐδείχθη τὸ ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΑΞ πρὸς τὸ ΝΞ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΟΝ· αἱ ΑΟ ΟΝ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει· αἱ ἄρα ΑΟ ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ ΑΝ ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϟδ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα. 94

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα. Fig. 94.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΗ ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε Ζ Η σημείων τῇ ΑΓ πα-

ῥάλληλοι αἱ ΕΘ ΖΙ ΗΚ· σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΖ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΖ ΖΗ σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ ΖΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ ΖΚ μέσον ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ ΕΚ μέσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΔΗ. Ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΑΖ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἡ δὲ ΔΗ τῇ ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΕΗ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ.

Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ, τὴν ΛΟΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ ΝΞ. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ, καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ, τὸ δὲ ΕΚ τῷ ΔΘ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ

ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΛΜ ΝΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τοῦτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛΝ τετραγώνῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω ὅτι ἡ ΛΝ μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσα ἐδείχθη τὰ ΑΙ ΖΚ, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· μέση ἄρα ἑκατέρα τῶν ΛΟ ΟΝ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΜΝ, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ὑπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· ὥστε καὶ ἡ ΛΟ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ΟΝ· αἱ ΛΟ ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΕΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· ὥστε καὶ αἱ ΛΟ ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι· ἡ ΛΝ ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϟέ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστί. 95

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. Fig. 9

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ

ΑΗ

ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Ἤχθωσαν οὖν διὰ τῶν Ε Ζ Η παράλληλοι ταῖς ΑΓ ΒΔ, αἳ ΕΘ ΖΙ ΗΚ. Ἐπεὶ οὖν ῥητή ἐστιν ἡ ΑΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΗ τῇ ΑΓ μήκει, καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ ΝΞ τετράγωνα. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ· τὸ δὲ ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΛΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. Ἐπεὶ οὖν ὅλον

τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΑΜ ΝΞ τετραγώνοις, ὧν τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τοῦτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΝ τετραγώνῳ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ ΑΝ ἄλογος ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ τετραγώνοις· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ ῥητόν ἐστι. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΚ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ΔΚ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ μέσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΑΟ ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ ΑΝ ἄρα ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϟϛ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι. 96

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Fig. 96

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ

ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε Ζ Η τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ ΖΙ ΗΚ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΑΓ μήκει, καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ ΔΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει, ῥητόν ἐστι καὶ τὸ ΔΚ. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν ὂν τῷ ΛΜ γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ, τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ ΝΞ τετράγωνα. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΛΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω ὅτι ἡ ΛΝ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ μέσον ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ ῥητόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΛΟ ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ τὸ ΑΒ ἄρα χωρίον δυναμένη, ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϟζ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ 97.
ἀποτομῆς ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς Fig. 97.
ΑΓ καὶ ἀποτομῆς ἕκτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΑΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΖΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ ΑΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἐστὶ τὸ ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ ΔΗ ῥηταί εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΔΗ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΔ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΚΔ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΚΔ. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν ὂν τῷ ΛΜ γωνίαν τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ ΝΞ τετράγωνα.

Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν ὅτι ἡ ΑΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω ὅτι ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ μέσον ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ ΔΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ μέσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΚ τῷ ΔΚ, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ τετράγωνα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΑΟ ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν· ἡ ἄρα ΑΝ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϟή.

98. Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

Fig. 98. Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον

ἄρα τὸ ΓΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ· ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ ΔΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ῥητά ἐστι, καὶ ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον τὸ ΔΜ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΜ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον τὸ ΔΖ· μέσον ἄρα τὸ ΔΖ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ῥητά ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΔ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τὸ ΖΔ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΔ τῷ ΖΔ. Ὡς δὲ τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον ἀνάλογον ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τὸ ΝΛ· καὶ τῶν ΓΘ ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ· ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ,

οὕτως ἐστὶν ἡ *ΝΜ* πρὸς τὴν *ΚΜ*· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν *ΓΚ ΚΜ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΜΝ*, τοῦτ' ἔστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς *ΖΜ*. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΗ* τῷ ἀπὸ τῆς *ΗΒ*, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ *ΓΘ* τῷ *ΚΛ*. Ὡς δὲ τὸ *ΓΘ* πρὸς τὸ *ΚΛ*, οὕτως ἡ *ΓΚ* πρὸς τὴν *ΚΜ*· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΓΚ* τῇ *ΚΜ*. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν, αἱ *ΓΜ ΜΖ*, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς *ΖΜ* ἴσον παρὰ τὴν *ΓΜ* παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν *ΓΚ ΚΜ*, καὶ ἔστι σύμμετρος ἡ *ΓΚ* τῇ *ΚΜ*· ἡ ἄρα *ΓΜ* τῆς *ΜΖ* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ *ΓΜ* σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ *ΓΔ*, μήκει· ἡ ἄρα *ΓΖ* ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϟϑ'.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. 99.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ *ΑΒ*, ῥητὴ δὲ ἡ *ΓΔ*, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* ἴσον παρὰ τὴν *ΓΔ* παραβεβλήσθω τὸ *ΓΕ*, πλάτος ποιοῦν τὴν *ΓΖ*· λέγω ὅτι ἡ *ΓΖ* ἀποτομή ἐστι δευτέρα. Fig. 99.

Ἔστω γὰρ τῇ *ΑΒ* προσαρμόζουσα ἡ *ΒΗ*· αἱ ἄρα *ΑΗ ΗΒ* μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *ΑΗ* ἴσον παρὰ τὴν *ΓΔ* παραβεβλήσθω τὸ *ΓΘ*, πλάτος ποιοῦν τὴν *ΓΚ*, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *ΗΒ* ἴσον τὸ *ΚΛ*, πλάτος ποιοῦν τὴν *ΚΜ*· ὅλον ἄρα τὸ *ΓΛ* ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν *ΑΗ ΗΒ* μέσοις οὖσι· μέσον ἄρα καὶ τὸ *ΓΛ*. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν *ΓΔ* παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν *ΓΜ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΓΜ*, καὶ ἀσύμμετρος τῇ *ΓΔ* μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ *ΓΛ* ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν

ΑΗ ΗΒ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΔ. Ῥητὸν δέ ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΔ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΓΔ, μέσον ἐστί· τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΖΔ, ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΔ τῷ ΖΔ. Ὡς δὲ τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ ΝΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τῷ ΝΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΔ· καὶ τῶν ΓΘ ΚΔ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΔ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΔ, οὕτως τὸ ΝΔ πρὸς τὸ ΚΔ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΔ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΔ πρὸς τὸ ΚΔ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τοῦτ' ἔστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΔ, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖ-

πον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ ΚΜ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρ'.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην. 100.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη. Fig. 100.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλήσθω τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ ἔστι μέσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ καὶ σύμμετρα· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ

ἄρα καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ ΗΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ ΖΜ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ· καὶ τῶν ΓΘ ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τοῦτ' ἔστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαι-

ρεῖ· ἡ ΓΜ ἄρα τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΜ ΜΖ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρά.

101. *Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.*

Fig. 101. Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλήσθω τὸ ΚΛ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ ἔστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ῥητόν· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ

ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΖΛ· καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΛ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Ἴσον δέ ἐστι τὸ ΓΛ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότερει ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΗ ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τὸ ΝΛ· τῶν ἄρα ΓΘ ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ. Ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τοῦτ' ἔστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ

ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ ΚΜ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρβ.

102. *Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.*

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ Fig. 102.
ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΒ εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΔ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον ἐστί· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΔ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητή ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ ΝΛ ἴσον

ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ῥητόν ἐστι, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΖΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΛ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΛ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΛ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΖΛ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὁμοίως γὰρ δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τοῦτ' ἔστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ργ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. 103.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη. Fig. 103.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον, ἔτι τε ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΓΔ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΔ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΔ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον· καὶ τὸ ΖΔ ἄρα μέσον ἐστί. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον τὸ ΓΔ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον τὸ ΖΔ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΔ τῷ ΖΔ. Ὡς δὲ τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΜ ΜΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, τετμήσθω δίχα ἡ ΖΜ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα

τῶν ΖΞ ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν τὸ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ· καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ· καὶ τῶν ἄρα ΓΘ ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον ἡ ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρδ'.

Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή. 104.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Fig. 104

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ λόγῳ ὁ αὐτὸς γεγονέτω ὁ τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἓν ἄρα ἐστὶ πρὸς ἕν, πάντα ἐστὶ πρὸς πάντα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ ΑΕ πρὸς ὅλην τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ,

ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ· αἱ δὲ ΑΕ ΕΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. Ἤτοι δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. Εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΔΖ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ ΕΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΖ ΖΔ. Εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. Εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΖΔ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ ΕΒ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ ΖΔ.

Ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρέ.

105. Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Fig. 105.

Ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος

ἄρα καὶ ἡ μὲν ΒΕ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΑΕ τῇ ΓΖ· αἱ δὲ ΑΕ ΕΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ· ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· εἴτε μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, μέσον ἔσται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ.

Μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϙ΄. 106

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν. Fig. 10

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστί.

Γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ ΕΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ· συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ.

Σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ τετραγώνων. Ῥητὸν δέ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ τετραγώνων. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ· σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ τετραγώνῳ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϙζ.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ 107.
σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, Fig. 107.
καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. Ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ ΓΖ ΖΔ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς ΑΕ ΕΒ, καὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ ὑπὸ

τῶν ΓΖ ΖΔ· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρή.

108. Ἡ τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. *Fig. 108.*

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ, καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ ὑπ' αὐτῶν. Καὶ εἴσιν, ὡς ἐδείχθη, αἱ ΑΕ ΕΒ σύμμετροι ταῖς ΓΖ ΖΔ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ ὑπ' αὐτῶν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρθ'.

109. Ἀπὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου, ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι ἀποτομὴ, ἢ ἐλάττων.

Ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ μέσον ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη, τὸ ΕΓ, μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι ἀποτομὴ, ἢ ἐλάττων. Fig. 109.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, τῷ δὲ ΒΔ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΘ. Ἐπεὶ οὖν ῥητὸν μέν ἐστι τὸ ΒΓ, μέσον δὲ τὸ ΒΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΒΓ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ τῷ ΗΚ· ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ, μέσον δὲ τὸ ΗΚ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ ἄρα μέν ἡ ΖΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΖΚ μήκει· αἱ ΖΘ ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΚΖ. Ἤτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου. Καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΘΖ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. Ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΓΕ, δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΖΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. Ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρί.

Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου, ἄλλαι 110.
δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφῃρήσθω τὸ Fig. 110.
ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ παραβεβλήσθω ὁμοίως τὰ χωρία· ἔστι δὴ ἀκολούθως ῥητὴ μὲν ἡ ΖΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΘΖ ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΖΚ. Ἤτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ δευτέρα ἡ ΚΘ. Ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἐστίν.

Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πέμπτη ἐστὶν ἡ ΚΘ· ὥστε ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρια.

Ἀπὸ μέσου μέσου ἀφαιρουμένου ἀσυμμέ- 111.
τρου τῷ ὅλῳ, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀφῃρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων κατα- Fig. 111.
γραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ, ἀσύμμετρον τῷ ὅλῳ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλόγων, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ ΒΔ, ἔσται ἀκολούθως ῥητὴ ἑκατέρα τῶν ΖΘ ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΘΖ τῇ ΖΚ· αἱ ΘΖ ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ, προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΚΖ. Ἤτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΘΖ ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ ΖΗ, μήκει· ἀποτομὴ ἄρα τρίτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Ῥητὴ δὲ ἡ ΚΛ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἀλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΕΓ δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα τῶν ΘΖ ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ ΖΗ, μήκει· ἀποτομὴ ἄρα ἕκτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη ἐστὶν ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· ἡ τὸ ΛΘ ἄρα, τοῦτ' ἔστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ριβ'.

Ἡ ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο 112.
ὀνομάτων.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων. Fig. 1

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ἐκκείθω ῥητὴ ἡ ΑΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν ΑΓ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΕ. Ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἀποτομὴ πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. Ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΖ· αἱ ΔΖ ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΖ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΔΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. Διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΗΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ μείζων ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει. Ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΖ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ, ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ μήκει. Καὶ εἰσὶ ῥηταί· αἱ ΗΖ ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΕ. Ἀλλὰ καὶ ῥητή, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Ἡ ἄρα ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί.

Τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀπατομὴν πρώτην,

τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν, τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην, τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάττονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. Ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων· τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν· ἀλλήλων δὲ, ἐπεὶ τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί· δῆλον ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. Καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὖσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων, ποιοῦσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμεναι αἱ μὲν μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς, ἀκολούθως ἑκάστη τῇ τάξει τῇ καθ' αὑτήν, αἱ δὲ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων, καὶ αὗται τῇ τάξει ἀκολούθως· ἕτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν, καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους ιγ',

α'. *Μέσην.*
β'. *Ἐκ δύο ὀνομάτων.*
γ'. *Ἐκ δύο μέσων πρώτην.*
δ'. *Ἐκ δύο μέσων δευτέραν.*
ε'. *Μείζονα.*
ς'. *Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην.*
ζ'. *Δύο μέσα δυναμένην.*
η'. *Ἀποτομήν.*
θ'. *Μέσης ἀποτομὴν πρώτην.*
ι'. *Μέσης ἀποτομὴν δευτέραν.*
ια'. *Ἐλάττονα.*
ιβ'. *Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.*
ιγ'. *Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.*

Πρότασις ριγ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων. 113.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἐκ δύο ὀνομάτων δὲ ἡ ΒΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτομή ἐστιν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς ΓΔ ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΕΖ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΓ. Fig. 113

Ἔστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ Η. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν ΕΖ. Μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ Η τῆς ΕΖ. Ἔστω τῇ Η ἴση ἡ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ. Γεγονέτω ὡς ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ὅλην τὴν ΖΚ ἐστὶν, ὡς ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ὡς γὰρ ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. Ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΖ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ ΚΖ ΚΕ ἀνάλογόν εἰσι· σύμμετρος ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ μήκει· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ

τῶν ΘΕ ΒΔ, ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΕ ΒΔ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΖΚ ΚΕ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει· αἱ ΖΚ ΚΕ ἄρα ῥηταὶ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ.

Ἤτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ· εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ ΚΕ.

Εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ· εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ ΚΕ· ὥστε ἀποτομή ἐστιν ἡ ΖΕ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΖΚ ΚΕ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, τοῖς ΓΔ ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ριδ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, 114.

ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔτι δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν τῇ ἀποτομῇ.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ Fig. 114
τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΚΘ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς Α ῥητῆς παρὰ τὴν ΒΔ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΚΘ· λέγω ὅτι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ΒΔ ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΔ.

Ἔστω γὰρ τῇ ΒΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΓ· αἱ ΒΓ ΓΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ Η. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ Η. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΓ παραβέβληται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ Η ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΚΘ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν Η. Μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΚΘ τῆς Η. Κείσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ. Γεγονέτω ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ ἐστὶν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, τοῦτ' ἔστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ. Αἱ δὲ ΒΓ ΓΔ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ ΖΘ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· ὥστε

καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. Σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ, αἱ γὰρ ΚΖ ΖΘ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΚΖ τῇ ΖΕ μήκει· ὥστε ἡ ΖΚ καὶ τῇ ΚΕ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΚΖ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΚΖ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΖΘ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΚΖ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΖΘ μήκει· Αἱ δὲ ΒΓ ΓΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ ΖΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ὀνομάτων ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ ΓΔ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΚΖ ΖΘ.

Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ ΓΔ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΚΖ ΖΘ.

Ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ ΖΘ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ ΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ριέ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τέ ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστι. 115.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΓΔ, ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς ΓΔ, ἧς μεῖζον ὄνομά ἐστι τὸ ΓΕ· καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ ΕΔ σύμμετρά τε τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΑΖ ΖΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΓΔ δυναμένη ἡ Η· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ Η. Fig. 11

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Θ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΔ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΔ, ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ ΚΜ ΜΔ, σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΕ ΕΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. Ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ ΕΔ σύμμετροί τέ εἰσι ταῖς ΑΖ ΖΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως ἡ ΚΜ πρὸς τὴν ΜΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΛΜ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΚΛ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΚΛ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΚΛ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΚΛ. Ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΚΛ τῷ ἀπὸ τῆς Θ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς Θ. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Η· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η τῷ ἀπὸ τῆς Θ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΑΒ.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς . . .
καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτων φανερὸν, ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεσθαι.

Πρότασις ριϛ'.

Ἀπὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον αἱ αὐταί. 116.

Ἔστω μέση ἡ Α· λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς Α ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν προτερόν αἱ αὐταί. Fig. 116.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ· τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς ἄλογόν ἐστι. Καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπὸ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. Πάλιν δὴ, τῷ ὑπὸ τῶν Β Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν Γ. Ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαινούσης, φανερὸν ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον αἱ αὐταί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ δεκάτου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Ὅροι.

ά. Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον. 1.

β. Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια. 2.

γ. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας. 3.

δ. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν. 4.

ε. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρας τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης. 5.

ς. Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων. 6.

ζ. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον· ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι. 7.

ἡ. Πα-

η. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα. 8.

θ. Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος. 9.

ι. Ἴσα τε καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει. 10.

ια. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γωνιῶν ἐπιπέδων περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων. 11.

ιβ. Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς. 12.

ιγ. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα. 13.

ιδ. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. 14.

ιε. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται. 15.

ιϛ. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτὸ ὅ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου. 16.

ιζ. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. 17.

ιη. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. Κἂν μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος· ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος· ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος. 18.

ιθ'. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται. 19.

κ'. Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος. 20.

κά. Κύλινδρός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. 21.

κβ'. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται. 22.

κγ'. Βάσεις δὲ οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι. 23.

κδ'. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν αἵ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσι. 24.

κε. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον. 25.

κς'. Τετράεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ τεττάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. 26.

κζ'. Ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. 27.

κη. Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον. 28.

κθ'. Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. 29.

Πρότασις ά.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ. 1.

Εἰ γὰρ δυνατόν, εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒΓ μέρος μέν τι τὸ ΑΒ ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ. Fig. 1.

Ἔσται δή τις τῇ ΑΒ συνεχὴς εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. Ἔστω ἡ ΒΔ· δύο δὴ δοθεισῶν τῶν ΑΒΓ ΑΒΔ κοινὸν τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ, ὅπερ ἀδύνατον· εὐθεῖα γὰρ εὐθείᾳ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν· (εἰ δὲ μή, ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι).

Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. 2.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι αἱ ΑΒ ΓΔ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Fig. 2.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν ΕΓ ΕΒ τυχόντα σημεῖα, τὰ Ζ Η, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ ΖΗ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΖΘ ΗΚ· λέγω πρῶτον ὅτι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Εἰ γάρ ἐστι τοῦ ΕΓΒ τριγώνου μέρος ἤτοι τὸ ΖΓΘ, ἢ τὸ ΗΒΚ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ μιᾶς τῶν ΕΓ ΕΒ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. Εἰ δὲ τοῦ ΕΓΒ τριγώνου τὸ ΖΓΒΗ μέρος ἐστὶν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν ΕΓ ΕΒ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· τὸ ἄρα ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Ἐν ᾧ δέ ἐστι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον, ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΓ ΕΒ· ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν ΕΓ ΕΒ, ἐν τούτῳ καὶ αἱ ΑΒ ΓΔ· αἱ ΑΒ ΓΔ ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ τὸ ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις γ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστι. 3.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ ΒΓ τεμνέτω ἄλληλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΒ γραμμή· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ γραμμὴ εὐθεῖά ἐστιν. Fig. 3.

Εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β, ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΕΒ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΖΒ· ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν ΔΕΒ ΔΖΒ τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσι δηλαδὴ χωρίον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα αἱ ΔΕΒ ΔΖΒ εὐθεῖαί εἰσιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη, εὐθεῖα ἔσται, πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ ΒΓ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνῃ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 4.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΕΖ δύο εὐθείαις ταῖς ΑΒ ΓΔ τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον ἀπὸ τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. Fig. 4.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΑΕ ΕΒ ΓΕ ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΗΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΓΒ, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ Ζ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ ΖΗ ΖΔ ΖΓ ΖΘ ΖΒ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΕ ΕΔ δυσὶ ταῖς ΓΕ

ΕΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΓΒ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΕΔ τρίγωνον τῷ ΓΕΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΓ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΕΘ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΗΕ ΒΕΘ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΑΕ τῇ ΕΒ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΗΕ τῇ ΕΘ, ἡ δὲ ΑΗ τῇ ΒΘ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΕ, βάσις ἄρα ἡ ΖΑ βάσει τῇ ΖΒ ἴση ἐστίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΑ ΑΔ δυσὶ ταῖς ΖΒ ΒΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΖΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐδείχθη ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΑ ΑΗ δυσὶ ταῖς ΖΒ ΒΘ ἴσαι εἰσί. Καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΑΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΖΒΘ· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐδείχθη ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ· δύο δὴ αἱ ΗΕ ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ ΕΖ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΗΕΖ ΘΕΖ γωνιῶν· ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς τὴν ΗΘ τυχόντως διὰ τοῦ Ε ἀχθεῖσαν ὀρθή ἐστιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΖΕ καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ

γωνίας· ἡ ΖΕ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Τὸ δὲ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΑΒ ΓΔ εὐθειῶν· ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ διὰ τῶν ΑΒ ΓΔ ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα δύο εὐθείας . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. 5.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΓ ΒΔ ΒΕ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Β ἁφῆς ἐφεστάτω· λέγω ὅτι αἱ ΒΓ ΒΔ ΒΕ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. Fig. 5.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν ΒΔ ΒΕ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐπίπεδον· κοινὴν δὴ τομὴν ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. Ποιείτω τὴν ΒΖ. Ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ διὰ τῶν ΑΒ ΒΓ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ ΒΖ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ ΒΕ· καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ ΒΕ ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ. Τὸ δὲ διὰ τῶν ΒΔ ΒΕ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ ΑΒ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΑΒ. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστιν. Ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. Καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ εὐθεῖα ἐν μετεωρο-

τέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΓ ΒΔ ΒΕ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις . . . καὶ τὸ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. **6.**

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Fig. 6.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ εὐθεῖα, καὶ ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ ΑΕ ΑΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ τῆς ΑΒ ἑκατέρα τῶν ΒΔ ΒΕ, οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ ΑΒΕ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΒ ΓΔΕ ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ ΔΒ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ ΔΑ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστὶν ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΑ ὀρθή ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ ΔΓ ὀρθή· ἡ ΕΔ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΔ ΔΑ ΔΓ πρὸς ὀρθὰς

ἐπὶ τῆς ἀφῆς ἐφέστηκεν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ ΔΑ ΔΓ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. Ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔΒ ΔΑ, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΑΒ, πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα ΑΒ ΒΔ ΔΓ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. Καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ ΓΔΒ γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, λη- 7.
φθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα· ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ ΓΔ, Fig. 7.
καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε Ζ· λέγω ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ Ε Ζ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω ἐν μετεωροτέρῳ ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ διήχθω διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει ἐν ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. Ποιείτω ὡς τὴν ΕΖ· δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΗΖ, ΕΖ χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΒ ΓΔ ἄρα παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι παράλληλοι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ πρότασει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ἡ.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ 8.
ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ· καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ ΓΔ, Fig. 8.
ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΓΔ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ ΑΒ ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ ΓΔ ΒΔ ἄρα ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. Ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ ΑΕ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ ΑΒΕ γωνιῶν. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ ΓΔΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΒ· ἡ ΓΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΔ ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ· δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ ΔΒ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΒ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΑΔ· δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ ΔΑ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστὶν ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΑΔ ὀρθή ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ὀρθή· ἡ ΕΔ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ ΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας

αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὖσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΔ ΔΒ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΕΔ. Ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΒΔ ΔΑ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ ΔΓ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΔ ΔΑ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ ΑΒ ΒΔ. Ἐν ᾧ δὲ αἱ ΑΒ ΒΔ ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ· ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΔΓ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΒΔ· ἡ ΓΔ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς ΔΕ ΔΒ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Δ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ὥστε καὶ ἡ ΓΔ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔΕ ΔΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· τὸ δὲ διὰ τῶν ΔΕ ΔΒ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ ΓΔ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἐὰν ἄρα ὦσιν ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. 9.

Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν ΑΒ ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος, μὴ οὖσα αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Fig. 9.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ΕΖ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν ΕΖ ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΘ, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΖΕ ΓΔ τῇ ΕΖ πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ ΗΚ ὀρθή ἐστιν, ἡ ΕΖ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Καί ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ παράλληλος· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΘΗ ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῷ διὰ τῶν ΘΗ ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ τῷ διὰ τῶν ΘΗ ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ

πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας γωνίας περιέξουσι. 10.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΕ ΕΖ ἁπτομένας ἀλλήλων ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. Fig. 10.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΒΑ ΒΓ ΕΔ ΕΖ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΓΖ ΒΕ ΑΓ ΔΖ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑ τῇ ΕΔ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. Αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΖ καὶ ἴση. Καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΑΓ ΔΖ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ια.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 11.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Fig. 11

Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ὡς ἔτυχεν ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΔ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΒΓ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΑ ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ ΒΓ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΕΔ ΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτῇ παράλληλος ἡ ΗΘ. Ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ ΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ ΔΑ ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ ΗΘ. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΑΖ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ ΔΑ ἐπιπέδῳ· ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΖΑ· ὥστε καὶ ἡ ΖΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΗΘ. Ἔστι δὲ ἡ ΑΖ καὶ πρὸς τὴν ΔΕ ὀρθή· ἡ ΑΖ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ ΔΕ ὀρθή ἐστιν. Ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ἡ ΖΑ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ ΗΘ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Τὸ δὲ διὰ τῶν ΕΔ ΗΘ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον· ἡ ΑΖ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου μετεώρου τοῦ

Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιβ.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι. 12.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ Α· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι. Fig. 12.

Νενοήσθω μετέωρόν τι σημεῖον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΑΔ ΓΒ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι.

Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀνέσταται ἡ ΑΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιγ.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. 13.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Α τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν ΒΑ ΑΓ ἐπίπεδον, τομὴν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ Α ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. Ποιείτω τὴν ΔΑΕ· αἱ ἄρα ΑΒ ΑΓ ΔΑΕ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῷ Fig. 13.

ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ γωνία ὀρθή ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ'.

Πρὸς ᾧ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. 14.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ ΕΖ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. Fig. 14.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. Συμπιπτέτωσαν· ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν. Ποιείτωσαν τὴν ΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΘ τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ ΒΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν ΒΚ ἄρα εὐθεῖαν οὖσαν ἐν τῷ ΕΖ ἐκβληθέντι ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΚ γωνία ὀρθή ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΚ ὀρθή ἐστι. Τριγώνου δὴ τοῦ ΑΒΚ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΚ ΒΑΚ δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΓΔ ΕΖ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΔ ΕΖ ἐπίπεδα.

Πρὸς ᾧ ἐπίπεδα ἄρα ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιέ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὥσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα. 15.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΑΒ ΒΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ ΕΖ ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· λέγω ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΖ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις. Fig. 15.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΒΗ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ μὲν ΕΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, τῇ δὲ ΕΖ ἡ ΗΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΗ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ΗΘ ΗΚ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΗΘ ΒΗΚ γωνιῶν. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΑ τῇ ΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΗΒΑ ΒΗΘ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΒΑ· ἡ ΗΒ ἄρα τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῇ ΒΓ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΗ δυσὶν εὐθείαις ταῖς ΒΑ ΒΓ τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ἡ ΒΗ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΑ ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Τὸ δὲ διὰ τῶν ΗΘ ΗΚ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ· ἡ ΒΗ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. Ἐδείχθη δὲ ἡ ΗΒ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· ἔστι δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ ἐπι-

πέδῳ ὀρθή· ἡ ΒΗ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν διὰ τῶν ΑΒ ΒΓ ΔΖ ΕΖ ἐπιπέδων ὀρθή ἐστι. Πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ις'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι. 16.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒ ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ τεμνέσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ΕΖ ΗΘ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ. Fig. 16.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΕΖ ΗΘ, ἤτοι ἐπὶ τὰ Ζ Θ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ Ε Η συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν πρότερον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ Θ μέρη, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖΚ ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ΕΖΚ σημεῖα ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Ἐν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ΕΖΚ εὐθείας σημεῖόν ἐστι τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ Κ καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· τὰ ΑΒ ΓΔ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. Οὐ συμπίπτουσι δέ, διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ ΗΘ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Ζ Θ μέρη συμπεσοῦνται. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι αἱ ΕΖ ΗΘ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Ε Η μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι (καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι) παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις ιζ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. 17.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΓΔ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΗΘ ΚΛ ΜΝ τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Α Ε Β Γ Ζ Δ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. Fig. 17.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ ΒΔ ΑΔ, καὶ συμβαλλέτω ἡ ΑΔ τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ ΞΖ. Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΚΛ ΜΝ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΒΔΞ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΕΞ ΒΔ παράλληλοί εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΗΘ ΚΛ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΞΖΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΑΓ ΞΖ παράλληλοί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΔ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΕΞ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΔ. Πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΞΖ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΔ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . *ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Πρότασις ιη.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 18.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς Fig. 18.

ΑΒ ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον τὸ ΔΕ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ΔΕ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἡ ΓΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔΕ ἐπιπέδῳ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΓΕ ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ ὀρθή· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ. Ἡ δὲ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ ἡ ΗΖ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι. Καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ ΓΕ ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΖΗ ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· τὸ ἄρα ΔΕ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθάς . . .

καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 19.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ Fig. 19
ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ ΒΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ὑπὸ τοῦ Δ σημείου ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῇ ΑΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΔΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ Δ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄλλη τις εὐθεῖα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἀναστα θήσεται πρὸς ὀρθὰς, πλὴν τῆς ΑΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ ΒΓ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνοντα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ'.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. 20.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΒΑΓ ΓΑΔ ΔΑΒ περιεχέσθω· λέγω ὅτι τῶν ὑπὸ ΒΑΓ ΓΑΔ ΔΑΒ γωνιῶν δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Fig. 20.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΓΑΔ ΔΑΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερὸν ὅτι δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Εἰ δὲ οὔ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΑ ΑΓ ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου διαχθεῖσα ἡ ΒΕΓ τεμνέτω τὰς

ΑΒ ΑΓ εὐθείας κατὰ τὰ Β Γ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ ΔΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ· δύο δὴ αἱ ΔΑ ΑΒ δυσὶν ταῖς ΑΕ ΑΒ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΒ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ ΑΓ τῇ ΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓ λοιπῆς τῆς ΕΓ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσεως τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΑΓ μείζων ἐστίν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζονές εἰσιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κά.

Ἅπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται. 21.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὑπὸ ΒΑΓ ΓΑΔ ΔΑΒ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΓΑΔ ΔΑΒ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Fig. 21

Εἰλήφθω γὰρ ἐφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ ΑΓ ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β Γ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ ΓΔ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ ΓΒΑ ΑΒΔ ΓΒΔ, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΓΒΔ μείζονές εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΓΔ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ὑπὸ ΓΔΑ ΑΔΒ τῆς ὑπὸ

ΓΔΒ μείζονές εἰσιν· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ ΑΒΔ ΒΓΑ ΑΓΔ ΓΔΑ ΑΔΒ τριῶν τῶν ὑπὸ ΓΒΔ ΒΓΔ ΓΔΒ μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΓΒΔ ΒΓΔ ΓΔΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἓξ ἄρα αἱ ὑπὸ ΓΒΑ ΑΒΔ ΒΓΑ ΑΓΔ ΓΔΑ ΑΔΒ δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ἑκάστου τῶν ΑΒΓ ΑΓΔ ΑΔΒ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ ΑΓΒ ΒΑΓ ΑΓΔ ΔΑΓ ΓΔΑ ΑΔΒ ΔΒΑ ΒΔΔ ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὧν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΒΓΑ ΑΓΔ ΓΔΑ ΑΔΒ ΔΒΑ ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσι μείζονες· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΓΔΑ ΔΑΒ τρεῖς γωνίαι περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Ἅπασα ἄρα στερεὰ γωνία . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ'.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι· δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι. 22.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὴν ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΗΘΚ, αἱ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΖ ΗΘ ΘΚ εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ ΔΖ ΗΚ· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ ΔΖ ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τοῦτ' ἔστιν ὅτι τῶν ΑΓ ΔΖ ΗΚ δύο Fig. 22.

ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερὸν ὅτι καὶ, τῶν ΑΓ ΔΖ ΗΚ ἴσων γενομένων, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ ΔΖ ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. Εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘΚ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΘΛ· καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΖ ΗΘ ΘΚ ἴση ἡ ΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ ΗΛ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΚΘ ΘΛ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΗΘΛ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΗΘ ΘΛ δυσὶ ταῖς ΔΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΘΛ γωνίας τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΗΛ βάσεως τῆς ΔΖ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ αἱ ΗΚ ΚΛ τῆς ΗΛ μείζονές εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ ΗΚ ΚΛ τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. Ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΑΓ· αἱ ΑΓ ΗΚ ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΓ ΔΖ τῆς ΗΚ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ΔΖ ΗΚ τῆς ΑΓ. Δυνατὸν ἄρα ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ ΔΖ ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐὰν ἄρα ὦσι τρεῖς γωνίαι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κγ'.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ 23.

δὲ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. Fig. 23.

Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΖ ΗΘ ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ ΔΖ ΗΚ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ ΔΖ ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. Συνεστάτω τὸ ΛΜΝ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΓ τῇ ΛΜ, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ΜΝ, καὶ ἔτι τὴν ΗΚ τῇ ΛΝ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον κύκλος ὁ ΛΜΝ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον· ἔσται δὴ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΛΜΝ τριγώνου, ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός.

Ἔστω πρότερον ἐντὸς, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ ΜΞ ΝΞ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. Εἰ γὰρ μή· ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἢ ἐλάττων. Ἔστω πρότερον ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΛΞ τῇ ΞΜ δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΛΞ ΞΜ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΛΜ ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΛΞΜ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΜΞΝ ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΝΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΛΞΜ ΜΞΝ ΝΞΛ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΛΞΜ ΜΞΝ ΝΞΛ τέτρασιν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἴση ἐστί· Λέγω δὴ

ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΞ. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΑΟ λοιπῇ τῇ ΠΜ ἐστὶν ἴση. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΟΞ, οὕτως ἡ ΜΠ πρὸς τὴν ΠΞ· παράλληλος ἄρα ἡ ΑΜ τῇ ΟΠ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΜΞ τῷ ΟΠΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΑ πρὸς τὴν ΑΜ, οὕτως ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΟΠ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΟ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΟΠ. Μείζων δὲ ἡ ΑΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΜ τῆς ΟΠ. Ἀλλ' ἡ ΑΜ κεῖται τῇ ΑΓ ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΟΠ μείζων ἐστίν. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ ΞΠ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΜΞΝ μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΝΞΑ· αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ τριῶν τῶν ὑπὸ ΑΞΜ ΜΞΝ ΝΞΑ μείζονές εἰσιν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΞΜ ΜΞΝ ΝΞΑ τεσσάρων ὀρθῶν εἰσιν ἐλάσσονες. Ἀλλὰ καὶ ἴσαι, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΑΞ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΑΞ. Ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῷ τοῦ ΑΜΝ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ· καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΞ, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΑ ΡΜ ΡΝ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΡ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΑΜΝ κύκλου ἐπίπεδον· καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν ΑΞ ΜΞ ΝΞ ὀρθή ἐστιν ἡ ΡΞ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΞ τῇ ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ· βάσις ἄρα ἡ ΡΑ βάσει τῇ ΡΜ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ

ἡ ΡΝ ἑκατέρᾳ τῶν ΡΑ ΡΜ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΑ ΡΜ ΡΝ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΞ, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΞ ΞΡ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΞ ΞΡ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΡ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΡΑ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΡΑ. Ἀλλὰ τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΒΓ ΔΕ ΕΖ ΗΘ ΘΚ, τῇ δὲ ΡΑ ἴση ἑκατέρα τῶν ΡΜ ΡΝ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΖ ΗΘ ΘΚ ἑκαστῇ τῶν ΡΑ ΡΜ ΡΝ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΡ ΡΜ δυσὶ ταῖς ΑΒ ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΜ βάσει τῇ ΑΓ ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΡΜ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΜΡΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΡΝ τῇ ὑπὸ ΗΘΚ.

Ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΑΡΜ ΜΡΝ ΑΡΝ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ στερεὰ γωνία συνέσταται ἡ πρὸς τῷ Ρ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΡΜ ΜΡΝ ΑΡΝ γωνιῶν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, τῆς ΜΝ, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΞΑ· λέγω πάλιν ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΑΞ. Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΞ, ἢ ἐλάττων. Ἔστω πρότερον ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΓ, τοῦτ' ἔστιν αἱ ΔΕ ΕΖ, δυσὶ ταῖς ΜΞ ΞΑ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΜΝ, ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ κεῖται ἴση· καὶ αἱ ΔΕ ΕΖ ἄρα τῇ ΔΖ ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἴση ἐστὶ τῇ ΑΞ. Ὁμοίως δὲ οὐδὲ ἐλάττων, πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον μεῖζον· ἡ ἄρα ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΞ. Καὶ ἐὰν ὁμοίως ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΞ, ἐκείνῳ ἴσον δυναμένην εὐθεῖαν πρὸς

ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν, ὡς τὴν ΞΡ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ ΑΜΝ τριγώνου, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΞ ΜΞ ΝΞ· λέγω δὴ καὶ οὕτως ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΑΞ. Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάττων. Ἔστω πρότερον ἴση· δύο οὖν αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΜΞ ΞΑ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΜΑ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΞΑ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΑΞΝ ἐστὶν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ ΗΘΚ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΛΕΖ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ὑπὸ ΜΞΝ ἄρα τῆς ὑπὸ ΛΕΖ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΕ ΕΖ δυσὶ ταῖς ΜΞ ΞΝ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΛΖ βάσει τῇ ΜΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΕΖ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΞ. Ἐξῆς δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων· μείζων ἄρα. Καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀναστήσωμεν τὴν ΞΡ, καὶ ἴσον δυναμένην αὐτὴν ὑποθώμεθα, ᾧ μεῖζον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΞ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΑΞ. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΟΑ λοιπῇ τῇ ΠΜ ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΠΟ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΜΞ τρίγωνον τῷ ΠΞΟ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΑ πρὸς τὴν ΑΜ, οὕτως ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΟΠ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΟ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΟΠ. Μείζων δὲ ἡ ΑΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΜ τῆς ΟΠ. Ἀλλὰ ἡ ΑΜ τῇ ΑΓ ἐστὶν

ἴση· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῆς ΟΠ ἐστὶ μείζων. Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ ΞΠ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ κἂν τὴν ΞΡ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ΞΟ ΞΠ ἀπολάβωμεν, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΟΡ, δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ γωνία τῆς ὑπὸ ΟΞΡ μείζων ἐστί. Συνεστάτω δὴ πρὸς τῇ ΑΞ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ξ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΞΣ, τῇ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΞΤ, καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν ΞΣ ΞΤ τῇ ΟΞ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΟΣ ΟΤ ΣΤ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ ΞΣ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΟΞΣ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΑΜ, βάσει τῇ ΟΣ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΝ τῇ ΟΤ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΑ ΑΝ δυσὶ ταῖς ΣΟ ΟΤ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΑΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΟΤ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΣΤ μείζων ἐστίν. Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΕ ΕΖ δυσὶ ταῖς ΣΞ ΞΤ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΞΤ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΣΞΤ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ ΗΘΚ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΕΖ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ ΗΘΚ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον.

Πρότασις κδ'.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ ἓξ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμα ἐστί. 24.

Στερεὸν γὰρ τὸ ΓΗΘΗ ὑπὸ ἓξ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω τῶν ΑΓ ΗΖ ΑΘ ΔΖ ΒΖ ΑΕ· Fig. 24.

λέγω ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΗ ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ ΑΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΑΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔΖ ΖΗ ΗΒ ΒΖ ΑΕ παραλληλόγραμμόν ἐστιν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ ΔΖ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΓΖ· δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΘ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΓ ΓΖ ἁπτόμενας ἀλλήλων εἰσὶν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας ἄρα γωνίας περιέξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΓ ΓΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. Καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΒΘ διπλάσιον τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΔΓΖ διπλάσιον τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΕ παραλληλογράμμῳ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ μὲν ΑΓ τῷ ΗΖ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΑΕ τῷ ΒΖ.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν ὑπὸ ἐξ παραλλήλων ἐπιπέδων . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κέ.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν. 25

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΖΗ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΡΑ ΛΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕΖΦ βάσις πρὸς τὴν ΕΘΙΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΖΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΗΓΔ στερεόν. Fig. 25.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΘ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΑΕ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΑΚ ΚΛ, τῇ δὲ ΕΘ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΘΜ ΜΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΛΟ ΚΦ ΘΧ ΜΣ παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ΛΠ ΚΡ ΛΜ ΜΤ στερεά. Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΑΚ ΚΛ ΑΕ εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν ΑΟ ΚΦ ΑΖ παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΚΞ ΚΒ ΑΗ ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΛΨ ΚΠ ΛΡ ἀλλήλοις, ἀπεναντίον γάρ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ μὲν ΕΓ ΘΧ ΜΣ παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΘΗ ΘΙ ΙΝ ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΛΘ ΜΩ ΝΤ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν ΛΠ ΚΡ ΑΥ στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν ἴσα. Ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα· τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὸ ΛΠ ΚΡ ΑΥ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ ΛΜ ΜΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ βάσις τῆς ΑΖ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΥ στερεὸν τοῦ ΑΥ στερεοῦ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΖ βάσις τῆς ΖΘ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΝΥ στερεὸν τοῦ ΘΥ στερεοῦ. Καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ βάσις τῇ ΝΖ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΥ στερεὸν τῷ ΝΥ στερεῷ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΑΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΑΖ ΖΘ, δύο δὲ στερεῶν τῶν ΑΥ ΥΘ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΑΖ βάσεως καὶ τοῦ ΑΥ στερεοῦ, ἥτε ΑΖ βάσις καὶ τὸ ΑΥ στερεὸν, τῆς δὲ ΘΖ

βάσεως καὶ τοῦ ΘΥ στερεοῦ, ἥτε ΝΖ βάσις καὶ τὸ ΝΥ στερεόν· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ στερεοῦ· καὶ εἰ ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ βάσις πρὸς τὴν ΖΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΥΘ στερεόν.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν παραλληλεπίπεδον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κϛ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. 26.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τὸ Δ, περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΕΔΓ ΕΔΖ ΖΔΓ γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὴ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. Fig. 26.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΔΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΕΔ ΔΓ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΖΗ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ μὲν ὑπὸ ΕΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΛ, τῇ δὲ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΚ, καὶ κείσθω τῇ ΔΗ ἴση ἡ ΑΚ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ διὰ τῶν ΒΑ ΑΛ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΘ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΗΖ ἡ ΚΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ· λέγω ὅτι ἡ πρὸς τῷ Α στερεὰ γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΛ ΒΑΘ ΘΑΛ γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΕΔΓ ΕΔΖ ΖΔΓ γωνιῶν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ ΑΒ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ ΚΒ ΖΕ ΗΕ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ

ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΖΗΔ ΖΗΕ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΘΚΑ ΘΚΒ γωνιῶν ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ ΑΒ δυσὶ ταῖς ΗΔ ΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΚΒ βάσει τῇ ΕΗ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΒ τῇ ΖΕ. Πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ΑΚ ΚΘ δυσὶ ταῖς ΔΗ ΗΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΘΑ ΑΒ δυσὶ ταῖς ΔΖ ΔΕ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΘΒ βάσει τῇ ΖΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΔ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση· (ἐπειδήπερ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς ΑΔ ΔΓ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΚΔ ΘΔ ΗΓ ΖΓ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ὑπόκειται ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΑΔ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΔΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ ΑΔ δυσὶ ταῖς ΗΔ ΔΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΚΔ βάσει τῇ ΗΓ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΚ ΚΘ δυσὶ ταῖς ΓΗ ΗΖ εἰσὶν ἴσαι, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΘΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΔ ΑΔ δυσὶ ταῖς ΖΔ ΔΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΘΔ βάσει τῇ ΖΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση). Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῷ Δ, τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ, τῇ πρὸς τῷ Δ, ἴση στερεὰ γωνία συνέσταται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κζ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι 27.
στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν Fig. 27.
στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΔΓ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσῃ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΘ ΘΑΚ ΚΑΒ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΘ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΓΗ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΚΑΘ τῇ ὑπὸ ΗΓΖ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὡς δὲ ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΖΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΘ. Καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΑΔ στερεόν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΓΗ ΒΑΚ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΒ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΘ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι, καὶ ἔτι τὸ ΖΕ τῷ ΘΒ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΓΔ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΑΔ στερεοῦ ὅμοιά ἐστιν. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΑΔ στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ

δοθέντι

δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἀναγέγραπται τὸ ΑΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κή.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. 28.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τὰς ΓΖ ΔΕ· λέγω ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ ΑΒ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου. Fig. 28.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΓΖΒ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΔΕ τῷ ΔΕΘ, ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΒ ἴσον, ἀπεναντίον γὰρ, τὸ δὲ ΗΕ τῷ ΓΘ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων, τῶν ΓΗΖ ΑΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ΗΕ ΑΓ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων, τῶν ΓΖΒ ΔΕΘ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ΓΘ ΒΕ ΓΕ, ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ τε πλήθει καὶ τῷ μεγέθει· ὥστε ὅλον τὸ ΑΒ στερεὸν δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου.

[Ἐὰν ἄρα στερεὸν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . .] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κθ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 29.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος Fig. 29.

ὄντα, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ ΑΗ ΑΜ ΑΝ ΓΔ ΓΕ ΒΘ ΒΚ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν τῶν ΖΝ ΔΚ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΓΘ ΓΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΘ ΕΚ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΕΚ ἐστὶν ἴση. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ λοιπῇ τῇ ΘΚ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ τὸ μὲν ΔΕΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΒ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΔΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΝ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΖΔΗ τρίγωνον τῷ ΜΔΝ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΜ παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓΗ τῷ ΒΝ, ἀπεναντίον γάρ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων, τῶν ΑΖΗ ΓΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ΑΔ ΔΗ ΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων, τῶν ΜΔΝ ΘΒΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ΒΜ ΘΝ ΝΒ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΘΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΓΝ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστί.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 30.

Ἔστω γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ ΓΝ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ ΑΗ ΑΜ ΑΝ ΓΔ Fig. 30.

ΓΕ ΒΘ ΒΚ μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΝΚ ΛΘ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ρ σημεῖον, καὶ ἔτι ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΜ ΗΕ ἐπὶ τὰ Ο Π σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΞ ΛΟ ΓΠ ΒΡ. Ἴσον δή ἐστι τὸ ΓΜ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΖΛΘΜ, τῷ ΓΟ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΛ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ ΑΞ ΑΜ ΑΟ ΓΛ ΓΠ ΒΘ ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, τῶν ΖΟ ΛΡ. Ἀλλὰ τὸ ΓΟ στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΚΝ, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΛ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΗ ΑΞ ΓΕ ΓΠ ΛΝ ΛΟ ΒΚ ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, τῶν ΗΠ ΝΡ· ὥστε καὶ τὸ ΓΜ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λά.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 31.

Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ ΓΖ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Fig. 31.
λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ.

Ἔστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΘΚ ΒΕ ΑΗ ΛΜ ΟΠ ΔΖ ΓΞ ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς

ΑΒ ΓΔ βάσεσιν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΡ εὐθείᾳ ἡ ΡΤ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΡΤ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ρ τῇ ὑπὸ ΑΛΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΤΡΥ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΛ ἴση ἡ ΡΤ, τῇ δὲ ΑΒ ἴση ἡ ΡΥ, καὶ συμπεπληρώσθω ἥτε ΡΧ βάσις καὶ τὸ ΨΥ στερεόν. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΤΡ ΡΥ δυσὶ ταῖς ΑΛ ΑΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ΡΧ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΑ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΛ τῇ ΡΤ, ἡ δὲ ΑΜ τῇ ΡΣ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΜ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΕ τῷ ΣΥ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΑΕ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΨΥ στερεοῦ ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΨΥ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστί. Διήχθωσαν αἱ ΔΡ ΧΥ καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ω, καὶ διὰ τοῦ Τ τῇ ΔΩ παράλληλος ἤχθω ἡ Ττ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἡ Ττ καὶ ἡ ΟΔ καὶ συνεζεύχθωσαν κατὰ τὸ α, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΩΨ ΡΙ στερεά. Ἴσον δή ἐστι τὸ ΨΩ στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ Ωπ τῷ ΨΥ στερεῷ, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΥΦ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΨ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι, αἱ ΡΩ ΡΥ Τt ΤΧ Σσ ΣΝ Ψπ ΨΦ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΩΧ σΦ· ἀλλὰ τὸ ΨΥ στερεὸν τῷ ΑΕ ἴσον ἐστίν· καὶ τὸ ΨΩ ἄρα στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἴσον ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΡΥΧΤ παραλληλόγραμμον τῷ ΩΤ παραλληλόγραμ-

μῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΤ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΡΤ ΩΧ· ἀλλὰ τὸ ΡΥΧΤ τῷ ΓΔ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ ΑΒ· καὶ τὸ ΩΤ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔ ἐστὶν ἴσον. Ἄλλο δὲ τὸ ΔΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ πρὸς τὴν ΔΤ. Καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΖ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ βάσιν, οὕτως τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΩΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΨ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΩΤ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ βάσιν, οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν. Ἀλλ' ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεὸν, οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΓΖ ΩΨ στερεῶν πρὸς τὸ ΡΙ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΖ στερεὸν τῷ ΩΨ στερεῷ. Ἀλλὰ τὸ ΩΨ τῷ ΑΕ ἐδείχθη ἴσον· καὶ τὸ ΑΕ ἄρα τῷ ΓΖ ἐστὶν ἴσον.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ ΘΚ ΒΕ ΛΜ ΓΞ ΟΠ ΔΖ ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ ΓΔ βάσεσι· λέγω πάλιν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ. Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Κ Ε Η Μ Π Ζ Ξ Σ σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετοι αἱ ΚΝ ΕΤ ΗΥ ΜΦ ΠΧ ΖΨ ΞΩ ΣΙ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Ν Τ Υ Φ Χ Ψ Ω Ι σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΤ ΥΦ ΝΥ ΤΦ ΧΨ ΧΩ ΩΙ ΨΙ. Ἴσον δή ἐστι τὸ ΚΦ στερεὸν τῷ ΠΙ στερεῷ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΚΜ ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΦ στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΠΙ

τῷ ΓΖ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, (ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν·) καὶ τὸ ΑΕ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ ἐστιν ἴσον.

Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λβ.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. 32.

Ἔστω ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ ΓΔ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, τοῦτ' ἔστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν. Fig. 32.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΖΗ τῷ ΑΕ παραλληλογράμμῳ ἴσον τὸ ΖΘ, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΖΘ, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΓΔ στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τῷ ΗΚ· ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΗΚ στερεῷ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΑΕ ΖΘ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ ἐπιπέδῳ τῷ ΔΗ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΘΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΘΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΔΓ στερεόν. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΘ βάσις τῇ ΑΕ βάσει, τὸ δὲ ΗΚ στερεὸν τῷ ΑΒ στερεῷ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

Τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λγ'.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 33.

Ἔστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AB ΓΔ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ AE τῇ ΓΖ· λέγω ὅτι τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ AE πρὸς τὴν ΓΖ. Fig. 33.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς AE HE ΘΞ αἱ EK EΛ EM, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓΖ ἴση ἡ EK, τῇ δὲ ZN ἴση ἡ EΛ, καὶ ἔτι τῇ ZP ἴση ἡ EM, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ KΛ παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ KO στερεόν.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ KE EΛ δυσὶ ταῖς ΓΖ ZN ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ KEΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓZN ἐστὶν ἴση (ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ AEH τῇ ὑπὸ ΓZN ἐστὶν ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν AB ΓΔ στερεῶν)· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ ὅμοιον τὸ KΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΓN παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν KM παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ ΓP παραλληλογράμμῳ, καὶ ἔτι τὸ EO τῷ ΔZ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ KO στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΓΔ στερεοῦ ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ KO στερεὸν ὅλῳ τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. Συμπεπληρώσθω τὸ HK παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν HK KΛ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ AB, στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ EΞ AΠ. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν AB ΓΔ στερεῶν ἐστιν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν ΓZ, οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ZN, καὶ ἡ EΘ πρὸς τὴν ZP, ἴση δὲ ἡ

μὲν ΖΓ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΖΝ τῇ ΕΛ, ἡ δὲ ΖΡ τῇ ΕΜ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ, καὶ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ, οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ, οὕτως τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ΚΗ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως τὸ ΞΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΠΛ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ, οὕτως τὸ ΠΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΕΞ πρὸς τὸ ΠΛ, καὶ τὸ ΠΛ πρὸς τὸ ΚΟ. Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ, καὶ ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΚ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν ΚΟ στερεὸν τῷ ΓΛ στερεῷ, ἡ δὲ ΕΚ εὐθεῖα τῇ ΓΖ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΓΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν

τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· (ἐπειδήπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὴν δευτέραν.)

Πρότασις λδ'.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. 34.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ ΓΔ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. Fig. 34.

Ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ ΕΖ ΑΒ ΘΚ ΓΜ ΝΞ ΟΔ ΠΡ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον· ἔσται καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΑΗ ἴση. Εἰ γὰρ, τῶν ΕΘ ΝΠ βάσεων ἴσων οὐσῶν, μὴ εἴη τὰ ΑΗ ΓΜ ὕψη ἴσα· οὐδ' ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ΓΔ. Ὑπόκειται δὲ ἴσον· οὐκ ἄρα ἄνισόν ἐστι τὸ ΓΜ ὕψος τῷ ΑΗ ὕψει· ἴσον ἄρα· καὶ ἔσται ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ φανερὸν ὅτι τῶν ΑΒ ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΜ

τῆς ΑΗ. Εἰ γὰρ μή· οὐδ' ἄρα πάλιν τὰ ΑΒ ΓΔ στερεὰ ἴσα ἔσται· ὑπόκειται δὲ ἴσα. Κείσθω οὖν τῇ ΑΗ ἴση ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΝΠ, ὕψους δὲ τοῦ ΓΤ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΦΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἄλλο δέ τι τὸ ΓΦ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν, οὕτως ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, ἰσοϋψῆ γὰρ τὰ ΑΒ ΓΦ στερεά· ὡς δὲ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν, οὕτως ἡ ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν, καὶ ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. Ἴση δὲ ἡ ΓΤ τῇ ΑΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ. Τῶν ΑΗ ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Ἔστωσαν γὰρ πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσι. Καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψει. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ ἴση, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ

στερεοῦ ὕψος τοῦ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψους, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. Κείσθω τῇ ΑΗ ἴση πάλιν ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ ΓΦ στερεόν. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΓΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, ἰσοϋψῆ γάρ ἐστι τὰ ΑΒ ΓΦ στερεά· ὡς δὲ ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ, οὕτως ἥτε ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν, καὶ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Μὴ ἐστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΖΕ ΒΔ ΗΑ ΚΘ ΞΝ ΛΟ ΜΓ ΡΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ Η Β Κ Ξ Μ Δ Ρ σημείων ἐπὶ τὰ τῶν ΕΘ ΝΠ βάσεων ἐπίπεδα κάθετοι, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ α Ω σημεῖα, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΖΦ ΞΩ στερεά· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν ΑΒ ΓΔ στερεῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἀλλὰ τῷ μὲν ΑΒ τὸ ΒΤ ἐστὶν ἴσον, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, (ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν,) τὸ δὲ ΓΔ στερεὸν τῷ ΛΨ ἐστὶν ἴσον, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΞ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, (ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν

αὐτῶν εὐθειῶν·) καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ ἴσον ἐστί. Τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΚ βάσις τῇ ΕΘ βάσει, ἡ δὲ ΞΡ βάσις τῇ ΝΠ βάσει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. Τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΔΨ ΒΤ στερεῶν καὶ τῶν ΔΓ ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΓ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΑΒ ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΘ βάσις τῇ ΖΚ βάσει, ἡ δὲ ΝΠ τῇ ΞΡ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. Τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΑΒ ΓΔ στερεῶν καὶ τῶν ΒΤ ΔΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΒΤ ΔΨ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν,

ἀντιπεπόνθασι δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ BT στερεὸν τῷ $\Delta\Psi$ στερεῷ. Ἀλλὰ τὸ μὲν BT τῷ AB ἴσον ἐστὶν, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ZK, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, (ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν,) τὸ δὲ $\Delta\Psi$ στερεὸν τῷ $\Delta\Gamma$ στερεῷ ἴσον ἐστὶν, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΞP καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, (ὧν αἱ ἐφεστηκυῖαι οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις·) καὶ τὸ AB ἄρα στερεὸν τῷ $\Gamma\Lambda$ στερεῷ ἐστιν ἴσον.

Τῶν ἄρα ἴσων στερεῶν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λέ.

Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων, ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων. 35.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι, αἱ ὑπὸ $BA\Gamma$ $E\Delta Z$, ἀπὸ δὲ τῶν A Δ σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ AH ΔM ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ $M\Delta E$ τῇ ὑπὸ HAB, τὴν δὲ ὑπὸ $M\Delta Z$ τῇ ὑπὸ $HA\Gamma$, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῶν AH ΔM τυχόντα σημεῖα, τὰ H M, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν H M σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν $BA\Gamma$ $E\Delta Z$ ἐπίπεδα κάθετοι αἱ HA MN, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις Fig. 35.

κατὰ τὰ Λ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΑ ΝΔ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΔΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΔΝ γωνίᾳ.

Κείσθω τῇ ΔΜ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ ΗΔ παράλληλος ἡ ΘΚ. Ἡ δὲ ΗΔ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑ ΑΓ ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑ ΑΓ ἐπίπεδον. Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Κ Ν σημείων ἐπὶ τὰς ΑΒ ΑΓ ΔΖ ΔΕ εὐθείας κάθετοι αἱ ΚΒ ΚΓ ΝΖ ΝΕ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΓ ΓΒ ΜΖ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ ΚΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΚΓ ΓΑ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ ΚΓ ΓΑ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΘΚ ΚΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΓ ΓΑ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΑ γωνία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΜ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΜ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΜΔΖ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΜΔΖ ΘΑΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΑΘ τῇ ΔΜ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση ἐστίν, οὕτως.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ ΜΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΚ ΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΚ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΚ ΚΘ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ. Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΚ ΚΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΘ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΘΚΒ γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν ΘΚ κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΘ· ὀρθὴ ἄρα

ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΜ γωνία ὀρθὴ ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΜ ἴση· ὑπόκεινται γὰρ, καὶ ἔστιν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ.)

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ· δύο δὴ αἱ ΓΑ ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ ΔΕ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί· καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. Ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΚ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΝ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΚ τῇ ὑπὸ ΖΕΝ ἴση ἐστίν. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΓΒΚ ΖΕΝ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΖΝ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΓ ΓΚ δυσὶ ταῖς ΔΖ ΖΝ ἴσαι εἰσὶ καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΚ ΚΘ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΜ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔΝ ΝΜ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΚ ΚΘ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΝ ΝΜ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΝ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ· ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΜΝ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ ΑΚ δυσὶ ταῖς ΜΔ ΔΝ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΘΚ βάσει τῇ ΝΜ ἐδείχθη ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΔΝ ἐστιν ἴση.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο γωνίαι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἀπ᾽ αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· αἱ ἀπ᾽ αὐτῶν κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Πρότασις λϛ'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. 36.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α Β Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ἐκ τῶν Α Β Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. Fig. 36.

Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Ε περιεχομένη ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΔΕΗ ΗΕΖ ΖΕΔ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἑκάστη τῶν ΔΕ ΗΕ ΕΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΕΚ στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ Α κείσθω ἴση ἡ ΛΜ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΛΜ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Ε στερεᾷ γωνίᾳ ἴση στερεὰ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΝΑΞ ΞΑΜ ΜΑΝ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἡ ΑΞ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΑΝ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν Α τῇ ΛΜ, ἡ δὲ Β ἑκάστη τῶν ΑΞ ΕΖ ΕΗ ΕΔ, ἡ δὲ Γ τῇ ΑΝ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΑΝ.

ΛΝ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ ΜΛΝ ΔΕΖ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΜΝ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΖ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΔΕΖ ΝΛΜ, καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστήκασιν αἱ ΛΞ ΕΗ ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν Η Ξ σημείων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΝΛΜ ΔΕΖ ἐπίπεδα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε τὰ ΛΘ ΕΚ στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστί. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛ στερεὸν τῷ ΕΚ στερεῷ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΘΛ τὸ ἐκ τῶν Α Β Γ στερεὸν, τὸ δὲ ΕΚ τὸ ἀπὸ τῆς Β στερεόν· τὸ ἄρα ἐκ τῶν Α Β Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προιάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κζ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. 37.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ ΓΔ ΕΖ ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΓΔ ΕΖ ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΚΔ ΛΓ ΜΕ ΝΗ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ ΚΔ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ. Fig. 37.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΛ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΛΓ· τὸ ΚΛ ἄρα πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ· ὡς ἄρα τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΑΓ στερεὸν, οὕτως τὸ ΜΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΝΗ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ΚΛ πρὸς τὸ ΑΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον, ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΚΛ πρὸς τὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λη'.

Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ· ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος. 38.

Ἐπίπεδον γὰρ τὸ ΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΓΔ ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῆς ΑΔ πεσεῖται. Fig. 38

Μὴ γάρ· ἀλλ', εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΕΖ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΔ ἐν τῷ ΑΒ ἐπι-

πέδῳ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΗ, ἥτις καὶ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΗ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΕΗ, οὖσα ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΗΕ γωνία. Ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΖΗ ὀρθή ἐστι. Τριγώνου δὴ τοῦ ΕΖΗ αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ΑΔ· ἐπὶ τὴν ΑΔ ἄρα πεσεῖται.

Ἐὰν ἄρα ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λθ'.

Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ· ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. 39.

Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου τοῦ ΑΖ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓΖ ΑΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Κ Λ Μ Ν Ξ Π Ο Ρ σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ ΚΝ ΞΡ, κοινὴ δὲ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ ΥΣ, τοῦ δὲ ΑΖ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διαγώνιος ἡ ΔΗ· λέγω ὅτι αἱ ΥΣ ΔΗ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, (τοῦτ' ἔστιν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΥΤ τῇ ΤΣ, ἡ δὲ ΔΤ τῇ ΤΗ.) Fig. 39.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΥ ΥΕ ΒΣ ΣΗ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΞ τῇ ΟΕ, αἱ ἐναλλὰξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΞΥ ΥΟΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΞ τῇ ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ τῇ ΥΟ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΥ

τῇ ΥΕ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΔΞΥ τρίγωνον τῷ ΟΥΕ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΥΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΥΕ γωνίᾳ· διὰ δὴ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΔΥΕ· καὶ ἴση ἡ ΔΥ τῇ ΥΕ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθεῖά ἐστι καὶ ἴση ἡ ΒΣ τῇ ΣΗ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ἡ ΓΔ καὶ τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος. Καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ ΗΒ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ. Καὶ εἴληπται ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Δ Υ Η Σ, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰ αἱ ΔΗ ΥΣ· ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ ΔΗ ΥΣ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΤ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΤ, ἐναλλὰξ γάρ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΤΥ τῇ ὑπὸ ΗΤΣ ἴση. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΔΤΥ ΗΤΣ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΔΥ τῇ ΗΣ, ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν ΔΕ ΒΗ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΗ, ἡ δὲ ΥΤ τῇ ΤΣ.

Ἐὰν ἄρα στερεοῦ παραλληλεπιπέδου . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μ'.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα. 40.

Ἔστω πρίσματα ἰσοϋψῆ τὰ ΑΒΓΔΕΖ ΗΘΚΛΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, Fig. 40

τὸ δὲ τὸ ΗΘΚ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΑΞ ΗΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. Καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΞ στερεὸν τῷ ΗΟ στερεῷ. Καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΞ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ ΗΟ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΗΘΚΛΜΝ πρίσμα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.

Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο πρίσματα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΩΔΕΚΑΤΟΝ.

Πρότασις α'.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. 1.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔΕ ΖΗΘΚΛ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ ΑΒΓΔΕ ΖΗΘΚΛ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΜ ΗΝ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον. Fig. 1.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ ΑΜ ΗΛ ΖΝ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΛ· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΒΑΕ ΗΖΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΗ. Ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΜΒ ἴση ἐστίν, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν· ἡ δὲ ὑπὸ ΖΛΗ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΑΜ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΗΖΝ ἴση· καὶ ἡ

λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΗΖ. Ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, τοῦ δὲ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΗΖ διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Preuß. Kulturbesitz Bibliothek Berlin

Πρότασις β.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. 2.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ ΒΔ ΖΘ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον. Fig. 2.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον· ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μεῖζον. Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Σ. Καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε Ζ Η Θ σημείων ἐφαπτομένας εὐθείας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΖΗΘ

τετράγωνον. Τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάσσων ἐστὶν ὁ κύκλος· ὥστε τὸ ΕΖΗΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΕ περιφέρειαι κατὰ τὰ Κ Λ Μ Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ ΚΖ ΖΛ ΛΗ ΗΜ ΜΘ ΘΝ ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ ΖΛΗ ΗΜΘ ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου· ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Κ Λ Μ Ν σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΕ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα, ἕκαστον τῶν ΕΚΖ ΖΛΗ ΗΜΘ ΘΝΕ τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου. Ἀλλὰ τὸ καθ' ἑαυτὸ τμῆμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἕκαστον τῶν ΕΚΖ ΖΛΗ ΗΜΘ ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα τμήματα ποτε τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. (Ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.) Λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΚ ΚΖ ΖΛ ΛΗ ΗΜ ΜΘ ΘΝ ΝΕ τμήματα τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ Σ χωρίου. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ· ἔστιν ἄρα ὡς

τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. Ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. Μείζων δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον.

Εἰ γὰρ δυνατόν· ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Σ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον· ἀλλ' ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ

τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

(Λῆμμα.

Λέγω δή, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἔστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

Γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον· λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Τ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. Μεῖζον δὲ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Τ χωρίου· ὥστε ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.)

Πρότασις γ.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας, τριγώνους βάσεις ἐχούσας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. 3.

Ἔστω πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ Fig. 3.

ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΑ ΑΔ ΔΒ ΔΓ δίχα κατὰ τὰ Ε Ζ Η Θ Κ Λ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ ΕΗ ΗΘ ΘΚ ΚΛ ΛΘ ΚΖ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΑΘ τῇ ΘΔ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΑΒ παράλληλός ἐστι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΕΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΕΒ. Ἀλλὰ ἡ ΕΒ τῇ ΕΑ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΕΑ ἄρα τῇ ΘΚ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΔ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ ΑΘ δυσὶ ταῖς ΚΘ ΘΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΘ βάσει τῇ ΚΔ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΕΘ τρίγωνον τῷ ΘΚΔ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΘΗ τρίγωνον τῷ ΘΔΛ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΘ ΘΗ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΔ ΔΛ εἰσὶν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· ἴσας γωνίας περιέχουσιν. Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΛ γωνίᾳ. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΘ ΘΗ δυσὶ ταῖς ΚΔ ΔΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΔΛ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΘΗ τρίγωνον τῷ ΚΔΛ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΒ, ἦκται ἡ ΘΚ· ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευ-

ρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΚΛ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΑΔΓ τῷ ΔΛΘ. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΒΑ ΑΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΘ ΘΛ εἰσὶν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· ἴσας γωνίας περιέχουσιν. Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΘΛ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΛΘ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Ἀλλὰ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕΗΘ ΘΚΛΔ πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΖΓ τριγώνου. Καὶ ἐπεὶ ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ ΕΘΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΕΒΖΗ ΕΒΚΘ ΘΚΖΗ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ ΘΚΛ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΓΛ ΛΓΗΘ ΘΚΖΗ. Καὶ φανερὸν ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ

εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις τὸ ΗΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ ΘΚΛ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ Δ σημεῖα· ἐπειδήπερ καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΕΖ ΕΚ εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΒΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΒΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται· ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον. Ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ ΗΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον· ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ ΘΚΛ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ Δ σημεῖα.

Ἡ ἄρα ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, διῄρηται εἰς δύο πυραμίδας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ 4.
ὕψος, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίνηται· ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τρι- Fig. 4
γώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η Θ σημεῖα, καὶ διηρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον νενοήσθω διῃρημένη, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΞΛ τῇ ΑΒ, καὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΞΓ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΞ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΦ. Καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ ΓΞ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κειμένα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ ΛΞΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ ΖΦ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΔΕΖ ΡΦΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον

πρὸς τὸ ΑΞΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΑΞΓ πρὸς τὸ ΡΦΖ. Ἀλλ' ὡς τὸ ΑΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΑΞΒ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΜΟ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΠΡΦ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ· συνθέντι ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΑΜΟ ΑΞΓΜΝΟ πρίσματα πρὸς τὸ ΑΞΓΜΝΟ πρίσμα, οὕτως τὰ ΠΕΦ ΡΣΤ ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΑΟΜ ΑΞΓΟΜΝ πρὸς τὰ ΠΕΦΡΣΤ ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα, οὕτως τὸ ΑΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. Ὡς δὲ τὸ ΑΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα, οὕτως ἐδείχθη ἡ ΑΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν, καὶ ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. Ὁμοίως δὲ κἂν τὰς γενομένας πυραμίδας διέλωμεν τὸν αὐτὸν τρόπον οἷον

ὡς τὰς ΟΜΝΗ ΣΤΥΘ· ἔσται ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. Ἀλλ' ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν ΟΜΝ ΣΤΥ τριγώνων ἑκατέρῳ τῶν ΑΞΓ ΡΦΖ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τέσσαρα πρὸς τέσσαρα. Τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ΑΚΛΟ καὶ ΛΠΡΣ πυραμίδων καὶ πάντων ἁπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δέ ἐστιν ὡς τὸ ΑΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΦ, οὕτως δεικτέον.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθωσαν ἀπὸ τῶν Η Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδὴ τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοϋψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι, ἥτε ΗΓ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Π κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ ΟΜΝ τέμνονται· εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. Καὶ τέτμηται ἡ ΗΓ δίχα ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου κατὰ τὸ Ν· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒΓ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ΔΕΖ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΣΤΥ ἐπιπέδου. Καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ

ἀπὸ

ἀπὸ τῶν Η Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ΟΜΝ ΣΤΥ τριγώνων ἐπὶ τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ κάθετοι· ἰσοϋψῆ ἄρα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΑΞΓ ΡΦΖ τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ ΟΜΝ ΣΤΥ· ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων ἀναγραφόμενα, ἰσοϋψῆ τυγχάνοντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὰ ἡμίση. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. 5.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ψηος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η Θ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα. Fig. 5.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεὸν, ἢ πρὸς μεῖζον. Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ Χ, καὶ διῃρήσθω ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. Καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γενόμεναι πυραμίδες ὁμοίως διῃρήσθωσαν, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος, αἳ εἰσιν ἐλάττονες τῆς ὑπεροχῆς, ἧς ὑπερέχει ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς τοῦ Χ στερεοῦ. Λε-

λείφθωσαν καὶ ἐστωσαν λόγου ἕνεκα αἱ ΔΠΡΣ ΣΤΥΘ· λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Χ στερεοῦ. Διηρήσθω καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα, οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. Μείζων δὲ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Χ στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρισμάτων. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος στερεόν.

Λέγω δὴ ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδὲ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα. Ὡς δὲ τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυρα-

μίδος, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Αἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. 6.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν αἱ βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓΔΕ ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Μ Ν σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα. Fig. 6.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ ΑΔ ΖΘ ΖΚ. Ἐπεὶ οὖν δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΒΓΜ ΑΓΔΜ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, καὶ ὕψος ἴσον, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. Καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ὡς ἡ ΖΗΘΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν, οὕτως καὶ ἡ ΖΗΘΚΛΝ πυ-

ραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. Καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΔΕΜ ΖΚΛΝ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, καὶ ὕψος ἴσον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα· ὡς δὲ ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα· δἰἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΖΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἦν καὶ ἡ ΖΚΛΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα· καὶ δἰἴσου πάλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.

Αἱ πυραμίδες ἄρα, αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι καὶ ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. 7.

Ἔστω πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, Fig. 7.
ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ ΕΓ ΓΔ. Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΕΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΔΒ τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΔΒ τρίγωνον, κορυφὴ

δὲ τὸ Γ σημεῖον. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΔΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΔΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΖΓΒΕ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΕΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΓΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΔΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΕΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΔΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· διήρηται ἄρα τὸ ΔΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους ἐχούσας βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Καὶ ἐπὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΑΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται, ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν, τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ·

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ καὶ τὸ ὕψος ἴσον· (ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχῃ τὴν βάσιν τὸ πρίσμα καὶ τὸ ἀπεναντίον, τὸ αὐτὸ διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπεναντίον, καὶ ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον . . . κ. τ. λ. . . .)

Πρότασις η'.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τρίγωνους ἔχουσαι βάσεις, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 8.

Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η Θ σημεῖα· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Fig. 8.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστιν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΘ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΠ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΒΝ τῷ ΕΡ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΒΚ τῷ ΕΞ· τὰ τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ΜΒ ΒΚ ΒΝ τρισὶ τοῖς ΕΠ ΕΞ ΕΡ ὅμοιά ἐστιν. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ ΜΒ ΒΚ ΒΝ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι, τὰ δὲ τρία τὰ ΕΠ ΕΞ ΕΡ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα

τε καὶ ὅμοιά ἐστι· τὰ ΒΗΜΔ ΕΘΠΟ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περιέχεται. Ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΔ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. Τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τὸ ΒΗΜΔ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ τὸ ΒΗΜΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ, διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα, ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου, τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος.

Καὶ ἡ ΑΒΓΗ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι, καὶ ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, ἔσται ὡς ἐν τῇ ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν, οὕτως καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τοῦτ' ἔστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα. Ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων

πλευρῶν· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίαν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Πρότασις θ'.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι. 9.

Ἔστωσαν γὰρ ἴσαι πυραμίδες, τριγώνους βάσεις ἔχουσαι, τὰς ΑΒΓ ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η Θ σημεῖα· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓΗ ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. Fig. 9.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΒΓΗ πυραμιδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν, τῆς δὲ ΔΕΖΘ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΕΘΠΟ στερεόν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. Τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. Ἀλλ' ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. Ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψει,

τὸ δὲ τοῦ ΒΗΜΔ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· τῶν ἄρα ΑΒΓΗ ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΒΓΗ ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. Ἀλλὰ τὸ μὲν τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΒΗΜΔ παραλληλεπιπέδου ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΔ παραλληλεπιπέδου ὕψος. Ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΔ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ. Καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΗΜΔ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς, τοῦ δὲ ΕΘΠΟ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἡ ΔΕΖΘ πυραμίς· ἴση ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους . . .
καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι'.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. 10.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν, τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, καὶ ὕψος ἴσον· λέγω ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦτ' ἔστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστίν. Fig. 1

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἤτοι μείζων ἢ τριπλασίων, ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. Ἔστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ δὴ ΑΒΓΔ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ, τὸ δὴ ἀνεσταμένον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ κἂν περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου, καί ἐστι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνεστάμενα πρίσματα ἰσοϋψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· τὰ ἄρα πρίσματα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ ἄρα τετραγώνου ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου, καὶ ἔστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀναστα-θὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἰσοϋψὲς τῷ κυλίν-

δρῳ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου. Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε Ζ Η Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ ΕΒ ΒΖ ΖΓ ΓΗ ΗΔ ΔΘ ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ ΒΖΓ ΓΗΔ ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν. Ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ ΒΖΓ ΓΗΔ ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρισμάτων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε Ζ Η Θ σημείων παραλλήλους ταῖς ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασταθέντων ἡμίσεά ἐστι τὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ ΒΖΓ ΓΗΔ ΔΘΑ τριγώνων· καὶ ἔστι τὰ τοῦ κυλίνδρου τμήματα ἐλάττονα τῶν ἀναστα θέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ ΒΖΓ ΓΗΔ ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἀφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινά ποτε τμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ΑΕ ΕΒ ΒΖ ΖΓ ΓΗ ΗΔ ΔΘ ΘΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν

ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλασίων.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ τριπλασίων ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ ΑΒΓΔ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, ἔσται τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου τετραγώνου· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἥμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. Καί ἐστι μείζων ἡ πυραμὶς ἡ ἀνασταθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, κορυφὴ

δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε Ζ Η Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ ΕΒ ΒΖ ΖΓ ΓΗ ΗΔ ΔΘ ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ ΒΖΓ ΓΗΔ ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΕΓΔ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτωσαν ἀφ' ἑκάστου τῶν ΑΗΔ ΒΖΓ ΓΗΔ ΔΘΑ τριγώνων πυραμίδες, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀναστα θεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου· Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἀφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινά ποτε τμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ ΕΒ ΒΖ ΖΓ ΓΗ ΗΔ ΔΘ ΘΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κῶνος κυλίνδρου τρίτον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ια'.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. 11.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΑΓ ΕΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΚΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον. Fig. 11.

Εἰ γὰρ μή· ἔσται ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΚΛ κῶνος ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ Ξ, καὶ ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ Ξ στερεὸν τοῦ ΕΝ κώνου, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ Ψ στερεόν· ὁ ΕΝ κῶνος ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς Ξ Ψ στερεοῖς. Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. Ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀναστα θεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου· ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης· πρὸς ἀλλήλας γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. Ἐλάττων δὲ ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο Π Ρ Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΟ ΟΕ ΕΠ ΠΖ ΖΡ ΡΗ ΗΣ ΣΘ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΘΟΕ ΕΠΖ ΖΡΗ ΗΣΘ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ'

ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. Ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΘΟΕ ΕΠΖ ΖΡΗ ΗΣΘ τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἀφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινά ποτε τμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Ψ στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΘΟ ΟΕ ΕΠ ΠΖ ΖΡ ΡΗ ΗΣ ΣΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ, καὶ ἀνεστάτω ἀπ' αὐτῷ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ ΑΔ κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον. Ὡς δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΔ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, ὡς δὲ τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΔ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ

πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδα. Μείζων δὲ ὁ ΑΛ κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδος. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον. Ἀλλ' ὡς τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον.

Ἀλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς τοῖς κώνοις κύλινδροι.

Οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις ιβ.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλ- 12.
λήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις Fig. 12.
μὲν οἱ ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΒΔ ΖΘ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων καὶ κυλίνδρων οἱ ΚΛ ΜΝ· λέγω ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον, ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· ἕξει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος ἢ πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον, ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἢ πρὸς μεῖζον. Ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ Ξ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα ΕΖΗΘ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀναστᾶσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν δὴ αἱ ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο Π Ρ Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΟ ΟΖ ΖΗ ΗΠ ΠΡ ΡΘ ΘΣ ΣΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΟΖ ΖΗΠ ΗΡΘ ΘΣΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΕΟΖ ΖΗΠ ΗΡΘ ΘΣΕ τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀναστᾶσῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς

ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσας τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινά ποτε τμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΠΘΝ κῶνος τοῦ Ξ στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΟ ΟΖ ΖΠ ΠΗ ΗΡ ΡΘ ΘΣ ΣΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΑΤΒΥΙΓΦΛΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΑΤΒΥΙΓΦΛΧ πολυγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΤΒΥΙΓΦΛΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΛΒΤ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΟΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΤ ΜΟ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κῶνος τῷ ΕΖΠΘΝ κώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ὁ ΚΔ ἄξων πρὸς τὸν ΜΝ ἄξονα. Ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ, οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΜΝ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΔ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΚΔ ΖΜΝ ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΔ ΖΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΔ τρίγωνον τῷ ΖΜΝ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΟ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΤ ΖΜΟ, ἐπειδήπερ ὅ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΚΤ γωνία τῶν πρὸς τῷ Κ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ

ἡ ὑπὸ ΖΜΟ γωνία τῶν πρὸς τῷ Μ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν. Ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΤ τρίγωνον τῷ ΖΜΟ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΚ τῇ ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΟΜ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΤΚΛ ΟΜΝ, ὀρθαὶ γάρ, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΚΤ τρίγωνον τῷ ΝΜΟ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΚΒ ΝΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΤ ΖΜΟ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΟ· δι᾽ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΟ. Πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΤΚ ΝΟΜ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΚ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιήτητα τῶν ΚΒΤ ΟΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΜΟ πρὸς τὴν ΟΖ· δι᾽ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΖ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΤΒ πρὸς τὴν ΒΛ, οὕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΝ· δι᾽ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΤΛ πρὸς τὴν ΛΒ, οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΖ· τῶν ΛΤΒ ΝΟΖ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΛΤΒ ΝΟΖ τρίγωνα· ὥστε καὶ ὅμοια· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΒΚΤ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΖΜΟ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται ἴσων τὸ πλῆθος. Αἱ δὲ ὁμοίαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει,

ἥπερ ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ. Ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῶν Α Χ Δ Φ Γ Υ εὐθείας ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε Σ Θ Ρ Η Π ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐχούσας τοῖς κώνοις, δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔξει, ἥπερ ἡ ΒΚ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΜ ὁμόλογον πλευράν, τοῦτ' ἔστιν, ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ἀλλ' ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΒΚΤΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα, οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, τριπλασίονα λόγον ἔχων, ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ

N. Μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ *ΕΟΖΠΗΡΘΣ* πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ *Ν*. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ *ΑΒΓΔ* κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ *Λ* σημεῖον, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ *ΕΖΗΘ* κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ *Ν* σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ *ΒΔ* πρὸς τὴν *ΖΘ*. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ *ΕΖΗΘΝ* κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ *ΑΒΓΔΛ* κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ *ΖΘ* πρὸς τὴν *ΒΔ*.

Λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ *ΑΒΓΔΛ* κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ *ΕΖΗΘΝ* κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ *ΒΔ* πρὸς τὴν *ΖΘ*.

Εἰ γὰρ δυνατόν· ἐχέτω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν *ΑΒΓΔΛ* κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ *ΖΘ* πρὸς τὴν *ΒΔ*. Ὡς δὲ τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν *ΑΒΓΔΛ* κῶνον, οὕτως ὁ *ΕΖΗΘΝ* κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ *ΑΒΓΔΛ* κώνου στερεόν· καὶ ὁ *ΕΖΗΘΝ* ἄρα κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ *ΑΒΓΔΛ* κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ *ΒΔ* πρὸς τὴν *ΖΘ*, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ *ΑΒΓΔΛ* κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ *ΕΖΗΘΝ* κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ *ΒΔ* πρὸς τὴν *ΖΘ*. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον· ὁ *ΑΒΓΔΛ* ἄρα κῶνος πρὸς τὸν *ΕΖΗΘΝ* κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ *ΒΔ* πρὸς τὴν *ΖΘ*.

Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου, ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ καὶ ἰσοϋψὴς αὐτῷ· καὶ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ *ΒΔ* πρὸς τὴν *ΖΘ*.

Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα. 13.

Κύλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΑΒ ΓΔ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ΕΖ ἄξονι τὸ ΗΘ ἐπίπεδον κατὰ τὸ Κ σημεῖον· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα. Fig. 13.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΕΖ ἄξων ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ Μ σημεῖα, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ μὲν ΕΚ ἄξονι ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΕΝ ΝΛ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΖΞ ΞΜ, καὶ νοείσθω ὁ ἐπὶ τοῦ ΛΜ ἄξονος κύλινδρος ὁ ΟΧ, οὗ βάσεις οἱ ΟΠ ΦΧ κύκλοι· καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν Ν Ζ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ ΓΔ, καὶ ταῖς βάσεσι τοῦ ΟΧ κυλίνδρου· καὶ ποιείτωσαν τοὺς ΡΣ ΤΥ κύκλους περὶ τὰ Ν Ξ κέντρα. Καὶ ἐπεὶ οἱ ΛΝ ΝΕ ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις· οἱ ἄρα ΠΡ ΡΒ ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. Ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις· ἴσοι ἄρα καὶ οἱ ΠΡ ΡΒ ΒΗ κύλινδροι ἀλλήλοις. Ἐπεὶ οὖν οἱ ΛΝ ΝΕ ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ ΡΒ ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΛΝ ΝΕ ΕΚ τῷ πλήθει τῶν ΠΡ ΡΒ ΒΗ· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ ΛΚ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΒ κυλίνδρου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ

καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. Καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΔ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ· εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. Τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ ΚΖ, κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ ΗΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ τοῦ ΒΗ κυλίνδρου, ὅ τε ΛΚ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου, ὅ τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ ΗΧ κύλινδρος, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ ΚΔ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάττων, ἐλάττων· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα, οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ'.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. 14.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων, τῶν ΑΒ ΓΔ κύκλων, κύλινδροι οἱ ΕΒ ΖΔ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΔ ἄξονα. Fig. 14.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΚΔ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξονι ἴσος ὁ ΔΝ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΔΝ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΓΜ. Ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσί, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. Ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις ἀλλήλαις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ ΕΒ ΓΜ κύλινδροι ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΓΔ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΔΝ ἄξων πρὸς τὸν ΚΔ ἄξονα.

Ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΛΝ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξονι· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΛ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. Ὡς δὲ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΛ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΑΚ κῶνον· τριπλάσιοι γὰρ οἱ κύλινδροι τῶν κώνων· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΑΚ κῶνον καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΛ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιε.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπε- 15.
πόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις Fig. 15.
μὲν οἱ ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ ΕΗ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ ΜΝ, οἵ τινες καὶ ὕψη εἰσὶν τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπεπληρώσθωσαν οἱ ΑΞ ΕΟ κύλινδροι· λέγω ὅτι τῶν ΑΞ ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τοῦτ' ἔστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος.

Τὸ γὰρ ΚΛ ὕψος τῷ ΜΝ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον ἴσον. Ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ ἴσος. Οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓΔ βάσις τῇ ΕΖΗΘ βάσει· ὥστε καὶ ἀντιπέπονθεν, ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ ΚΛ ὕψος τῷ ΜΝ ἴσον, ἀλλ' ἔστω μεῖζον τὸ ΜΝ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΜΝ ὕψους τῷ ΚΛ ἴσον τὸ ΠΜ, καὶ διὰ

τοῦ Π σημείου τεμνέσθω ὁ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ ΤΥΣ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τῶν ΕΖΗΘ ΡΟ κύκλων, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ ΠΜ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΕΣ. Καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ, ἄλλος δέ τις ὁ ΕΣ κύλινδρος· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον. Ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ ΑΞ ΕΣ κύλινδροι· ὡς δὲ ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος, ὁ γὰρ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΤΥΣ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος. Ἴσον δὲ τὸ ΜΠ ὕψος τῷ ΚΛ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· τῶν ἄρα ΑΞ ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΞ ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος, ἴσον δὲ τὸ ΚΛ ὕψος τῷ ΜΠ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν· ὡς δὲ τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος, οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς

τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἴσος ἄρα ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ. Ὡραύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων.

Τῶν ἴσων ἄρα κώνων . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ις'.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου. 16.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Fig. 16.

Ἤχθω διὰ τοῦ Κ κέντρου εὐθεῖα ἡ ΒΚΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου τῇ ΒΔ εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΔ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· τέμνοντες δὴ τὴν ΒΔ περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν ποτε περιφέρειαν ἐλάττονα τῆς ΑΔ. Ἀελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΛΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΛΜ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΔ ΔΝ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΔ τῇ ΔΝ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΛΝ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΑΓ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· ἡ ΛΝ ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· πολλῷ ἄρα αἱ ΛΔ ΔΝ οὐκ ἐφάπτονται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Ἐὰν δὴ τῇ ΛΔ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ

ἀρτιόπλευρον, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου τοῦ ΕΖΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιζ.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οἱ- 17.
σῶν, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέν- Fig. 17.
τρον τὸ Α· δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγίγνετο ἡ σφαῖρα· ὥστε καὶ καθ' οἵας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. Καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων εὐθειῶν. Ἔστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΒΓΔΕ, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΖΗΘ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΔ ΓΕ, καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν ΒΓΔΕ ΖΗΘ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΖΗΘ, οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ, αἱ ΒΚ ΚΛ ΛΜ ΜΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα, ἡ ΚΛ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΞ, καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπι-

φανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ ΚΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω· ποιήσουσι δὴ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. Ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστω ἐπὶ τῶν ΒΔ ΚΝ διαμέτρων τὰ ΒΞΔ ΚΞΝ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞΑ ἐπίπεδά ἐστιν ὀρθὰ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ ΒΞΔ ΚΞΝ ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΒΕΔ ΒΞΔ ΚΞΝ ἡμικύκλια, ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν ΒΔ ΚΝ, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΒΕ ΒΞ ΚΞ τεταρτημόρια ἀλλήλοις· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΞ ΚΞ τεταρτημορίοις ἴσαι ταῖς ΒΚ ΚΛ ΛΜ ΜΕ εὐθείαις. Ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ ΟΠ ΠΡ ΡΞ ΚΣ ΣΤ ΤΥ ΥΞ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΟ ΤΠ ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο Σ ἐπὶ τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς ΒΔ ΚΝ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ τῶν ΒΞΔ ΚΞΝ κύκλων ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. Πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ ΟΦ ΣΧ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΦΧ. Καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις τοῖς ΒΞΔ ΚΞΝ ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΒΟ ΚΣ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΟΦ ΣΧ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΟΦ τῇ ΣΧ, ἡ δὲ ΒΦ τῇ ΚΧ. Ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΔ ὅλῃ τῇ ΚΔ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΦΔ λοιπῇ τῇ ΧΔ ἐστὶν ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΦ πρὸς τὴν ΦΔ, οὕτως ἡ ΚΧ πρὸς τὴν ΧΔ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ. Καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΟΦ ΣΧ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ τῇ ΣΧ. Ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· καὶ αἱ ΧΦ ΣΟ ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ

παράλληλοι. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, ἀλλὰ ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ ἐστὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΣΟ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶ παράλληλος. Καὶ ἐπιζευγνυοῦσιν αὐτὰς αἱ ΒΟ ΚΣ· τὸ ΚΒΟΣ ἄρα τετράπλευρον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐπειδήπερ ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρον τῶν ΣΟΠΤ ΤΠΡΥ τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. Ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν Ο Σ Π Τ Ρ Υ σημείων ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν πολύεδρον μεταξὺ τῶν ΒΞ ΚΞ περιφερειῶν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΚΒΟΣ ΣΟΠΤ ΤΠΡΥ τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον. Ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν ΚΛ ΛΜ ΜΕ πλευρῶν, καθάπερ ἐπὶ τῆς ΚΒ τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, καὶ ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἡμισφαιρίου· συσταθήσεταί τι σχῆμα πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον.

Λέγω δὴ ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάψεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς ἐστιν ὁ ΖΗΘ κύκλος.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΑΨ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΨ ΨΟ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΨ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν, ἡ ΑΨ

ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΨ ΨΟ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΟ, ἴσον ἔστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΟ. Καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ ΨΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ψ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΟ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ ΨΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΨ ΨΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΨ ΨΟ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΨΟ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΒΨ τῇ ΨΟ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ Κ Σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ΒΨ ΨΟ· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ψ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΨΒ ΨΟ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Κ Σ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον.

Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΚΒ τῆς ΧΦ, ἴση δὲ ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ· μείζων ἄρα ἡ ΚΒ τῆς ΣΟ. Ἴση δὲ ἡ ΚΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΚΣ ΒΟ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΣ ΒΟ τῆς ΣΟ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ, καὶ ἴσαι αἱ ΚΒ ΒΟ ΚΣ, καὶ ἐλάσσων ἡ ΟΣ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ ΒΨ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΟ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. Καὶ ἦκται ἀπὸ τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἡ ΟΦ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΔ τῆς ΔΦ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΦ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ ΒΦ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΦ ΦΒ· ἀναγραφομένου δὴ ἀπὸ τῆς ΒΦ τετραγώνου, καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ΦΔ παραλληλογράμμου, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ ΒΦ ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΔΦ ΦΒ ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. Καὶ ἔστι τῆς ΑΟ ἐπιζευγνυμένης, τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΔΒ ΒΦ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΟ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΦ ΦΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΦ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΟΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΟΦ ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΟ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν

ἐστιν ἢ διπλάσιον· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΟΦ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΟ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΟ. Καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ ΨΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΟΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΟΦ ΦΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΨ ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΟΦ ΦΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΟΦ μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΦΑ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΨΑ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΦ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΨ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΗ. Καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ ἰσαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ ΑΗ ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν· ὥστε τὸ πολύεδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγέγραπται, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ τῆς ΒΓΔΕ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. Διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοπληθεῖς καὶ ὁμοταγεῖς πυραμίδας, ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. Αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμά-

λογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τοῦτ' ἔστιν, ἥπερ ἡ ΑΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ τὸ κέντρον τὸ Α πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. Ὁμοίως δὴ καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. Καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τοῦτ' ἔστιν, ἥπερ ἡ ΒΔ διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον.

Πρότασις ιή.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων. 18.

Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ ΑΒΓ ΔΕΖ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΓ ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Fig. 1

Εἰ γὰρ μὴ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, ἕξει ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας ἢ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ΗΘΚ, καὶ νενοήσθω ἡ ΔΕΖ σφαῖρα τῇ ΗΘΚ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν ΑΒΓ σφαῖ-

σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον· τὸ ἄρα ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἔχει δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον, ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. Μείζων δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ πολυέδρου. Ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων, ἐμπεριέχεται γὰρ ἀπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΓ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν ΑΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΑΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΖ διάμετρος πρὸς τὴν ΒΓ διάμετρον. Ὡς δὲ ἡ ΑΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν, οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάττονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, ἐπειδήπερ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΜΝ τῆς ΔΕΖ· καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα

ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα· ἡ ἄρα ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Αἱ ἄρα σφαῖραι πρὸς . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ δωδεκάτου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΣΚΑΙΔΕΚΑΤΟΝ.

Πρότασις α'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης. 1.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΓ εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ τῆς ΑΒ ἡμισείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Fig. 1.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΔΓ τετράγωνα τὰ ΑΕ ΔΖ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΔΖ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ΖΓ ἐπὶ τὸ Η. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΖΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΖΘ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΑ τῇ ΚΑ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΑΘ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΑ τῆς ΑΘ. Ὡς δὲ ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ, οὕτως τὸ ΚΓ πρὸς τὸ ΓΘ· διπλάσιον ἄρα τὸ ΚΓ τοῦ ΓΘ· Εἰσὶ

δὲ καὶ τὰ ΑΘ ΘΓ τοῦ ΓΘ διπλάσια· ἴσον ἄρα τὸ ΚΓ τοῖς ΑΘ ΘΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΘ ἴσον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΑΕ τοῦ ΔΘ. Ἴσον δὲ τὸ ΑΕ τῷ ΜΝΞ γνώμονι, καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΔΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΘ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τὸ δὲ ΘΔ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται· τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπόν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. 2.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τμήματος ἑαυτῆς, τῆς ΑΓ, πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΑΓ διπλῆ ἐστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι τῆς ΓΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ. Fig. 2

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΑΒ ΓΔ τετράγωνα τὰ ΑΖ ΓΗ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΑΖ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ΖΒ ἐπὶ τὸ Ε. Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ τοῦ ΑΘ· τετραπλάσιος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνώμων τοῦ ΑΘ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΓΗ

τοῦ ΑΘ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ΜΝΞ γνώμων τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ· ἴσος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνώμων τῷ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΓΘ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΓ τῆς ΓΘ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΚΒ τοῦ ΒΘ. Εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΑΘ ΘΒ τοῦ ΘΒ διπλάσια· ἴσον ἄρα τὸ ΚΒ τοῖς ΑΘ ΘΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ ΜΝΞ γνώμων ὅλῳ τῷ ΓΗ ἴσος· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ λοιπῷ τῷ ΒΗ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΒ, ἴση γὰρ ἡ ΓΔ τῇ ΔΗ, τὸ δὲ ΘΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Μείζων δὲ ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ. Τῆς ΓΔ ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς ΑΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ, οὕτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μή· ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ διπλῆ τῆς ΓΔ· τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ· πενταπλάσιον ἄρα ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΒΓ ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ ΓΔ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ διπλασίων ἐστὶ τῆς ΓΔ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἐλάττων τῆς ΒΓ διπλασίων ἐστὶ τῆς ΓΔ· πολλῷ γὰρ μεῖζόν τι ἄτοπον.

Ἡ ἄρα τῆς ΑΓ διπλῆ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ· τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμισείαν τοῦ μείζονος τμήματος πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου. 3.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Fig. 3

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ· τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΡΣ· τὸ ἄρα ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΡΣ. Τετραπλάσιον δὲ τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΓΕ τοῦ ΖΗ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΖ· ὥστε καὶ τὸ ΗΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΛ τετραγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ΗΚ τῇ ΚΛ, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΕ· ὥστε καὶ τὸ ΜΖ τῷ ΖΕ ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΜΖ τῷ ΓΗ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τῷ ΖΕ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΝ· ὁ ἄρα ΞΟΠ γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ΓΕ. Ἀλλὰ τὸ ΓΕ τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ΗΖ· καὶ ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΖΗ τετραγώνου· ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνον πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΖΗ. Ἀλλ' ὁ ΞΟΠ γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΝ· τὸ ἄρα ΔΝ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΗΖ τετραγώνου. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΝ

τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τὸ δὲ ΗΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου. 4.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ. Fig. 4

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ ΑΚ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΘΗ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΚ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἐστὶν ἴσον· τὰ ἄρα ΑΚ ΓΕ τοῦ ΑΚ ἐστὶ διπλάσια. Ἀλλὰ τὰ ΑΚ ΓΕ ὁ ΛΜΝ γνώμων ἐστὶ καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ. Ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ ἐδείχθη ἴσον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων, καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ· ὥστε καὶ ὁ ΛΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ ΘΗ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ τετραγώνου. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ΛΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ ΘΗ τετράγωνα ὅλον τὸ ΑΕ καὶ τὸ ΓΚ, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνα, τὸ δὲ ΗΘ τὸ

ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα. 5.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ. Fig. 5.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΓΘ, ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΓΘ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῷ δὲ ΘΓ ἴσον τὸ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΕ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ὅλῳ τῷ ΑΕ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΑ, ἴση γὰρ ἡ ΑΔ τῇ ΔΔ, τὸ δὲ ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Μείζων δὲ ἡ ΔΒ τῆς ΒΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ.

Ἡ ἄρα ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς'.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. 6.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ ΓΒ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. Fig. 6.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ τῆς ΒΑ ἡμισείᾳ ἴση ἡ ΑΔ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τῷ μείζονι τμήματι τῷ ΑΓ πρόσκειται ἡ ΑΔ, ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ πενταπλάσιόν ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ, ῥητὴ γάρ ἐστιν ἡ ΔΑ ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ ῥητῆς οὔσης· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΔ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· αἱ ΓΔ ΔΑ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀποτομῆς παρὰ τὴν ΑΒ ῥητὴν παραβληθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν ΒΓ. Τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἡ ΒΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΓ ἀποτομή.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . *ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Πρότασις ζ.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι, ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς, ἴσαι ὦσιν· ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον. 7.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ ΑΒΓΔΕ αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς αἱ πρὸς τοῖς Α Β Γ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Fig. 7.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ ΒΕ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΓΒ ΒΑ δυσὶ ταῖς ΒΑ ΑΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΕ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΒΕΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΖ πλευρᾷ τῇ ΒΖ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΓ ὅλῃ τῇ ΒΕ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΓ λοιπῇ τῇ ΖΕ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΓ ΓΔ δυσὶ ταῖς ΖΕ ΕΔ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς Α Β γωνίαις· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς Α Β γωνίαις ἴση ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α Β γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς Α Γ Δ σημ-

μείοις· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΑ ΑΕ δυσὶ ταῖς ΒΓ ΓΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση, ἐπεὶ πλευρὰ ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ ἔστιν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ ταῖς πρὸς τοῖς Α Γ γωνίαις ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς Α Γ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α Γ Δ γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η'.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. 8.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ ΑΒΓΔΕ δύο γωνίας, τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς τὰς πρὸς τοῖς Α Β, ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΓ ΒΕ, τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Θ σημεῖον· λέγω ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. Fig. 8.

Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΔ ΑΒ δυσὶ ταῖς ΑΒ ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας

ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΑΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΕ· διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΘΕ τῆς ὑπὸ ΒΑΘ γωνίας, ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ ΑΒΘ τριγώνου. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ περιφέρεια ἡ ΕΔΓ περιφερείας τῆς ΓΒ ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΘΕ· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ εὐθεῖα τῇ ΑΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΑ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΕ καὶ τοῦ ΑΒΘ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΘ. Ἴση δὲ ἡ ΒΑ τῇ ΕΘ· ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΘ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΒ. Μείζων δὲ ἡ ΒΕ τῆς ΕΘ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΘΒ· ἡ ΒΕ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ ΘΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ ΓΘ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι

Πρότασις ϑ'.

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον 9.

καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τῶν εἰς τὸν ΑΒΓ Fig. 9.
κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ ΒΓ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἔστωσαν ἐπ' εὐθείας· λέγω ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ ΒΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΔ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ ΕΓ ΕΔ, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ ἐπὶ τὸ Α. Καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά ἐστιν ἡ ΒΓ, πενταπλασίων ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας· τετραπλασίων ἄρα ἡ ΑΓ περιφέρεια τῆς ΓΒ. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΓΕΒ· τετραπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΕΓ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ εὐθεῖα τῇ ΓΔ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγραφομένου· ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ γωνίᾳ· διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΓ τετραπλασία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ τῇ ὑπὸ ΒΕΓ. Κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΒΕΔ καὶ τοῦ ΒΕΓ, ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΔ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΓΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ. Ἴση δὲ ἡ ΕΒ τῇ ΔΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Μείζων

δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΔΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΒΔ ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι'.

Ἐὰν εἰς κύκλον πενταγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ· ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. 10.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πενταγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ ΑΒΓΔΕ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου πλευρὰν, τῶν εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον ἐγγραφομένων. Fig. 10.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Η σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ ΚΒ, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΝ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΕΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. Πενταγώνου δὲ ἡ ΓΔ· δεκαγώνου ἄρα ἡ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κάθετος ἡ ΖΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΒ· ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας· δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΑΚ εὐθεῖα. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΚ τῆς ΚΜ ἐστὶ διπλῆ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας, ἴση δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῇ ΑΒ

περιφερείᾳ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΛ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας. Ἔστι δὲ ἡ ΓΙ περιφέρεια καὶ τῆς ΓΗ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια τῇ ΒΚ περιφερείᾳ. Ἀλλὰ ἡ ΒΚ τῆς ΚΜ ἐστὶ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΚΑ· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῆς ΚΜ ἐστὶ διπλῆ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας ἐστὶ διπλῆ, ἴση γὰρ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῇ ΒΑ περιφερείᾳ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΗΒ περιφέρεια τῆς ΒΜ ἐστὶ διπλῆ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΖΒ γωνίας τῆς ὑπὸ ΒΖΜ ἐστὶ διπλῆ. Ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ καὶ τῆς ὑπὸ ΖΑΒ διπλῆ, ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΖ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΑΒ ἐστὶν ἴση. Κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΒΖ καὶ τοῦ ΒΖΝ, ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΝΖ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΖ τρίγωνον τῷ ΒΖΝ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΑΚ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΝ· βάσις ἄρα ἡ ΚΝ βάσει τῇ ΛΝ ἐστὶν ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΝ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΛΝ ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΛΝ τῇ ὑπὸ ΚΒΝ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΒΝ ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΚΒ καὶ τοῦ ΑΚΝ, ἡ ὑπὸ ΝΑΚ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΚΝΑ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΒΑ τρίγωνον τῷ ΚΝΑ τριγώνῳ. Ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΑΚ, οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΝ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΝ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ. Καὶ ἔστιν ἡ

μὲν ΑΒ πενταγώνου πλευρὰ, ἡ δὲ ΒΖ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΑΚ δεκαγώνου.

Ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ια'.

Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πενταγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. 11.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔΕ ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πενταγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἡ ΑΒ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Fig. 11

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ ΖΒ καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῆς ΑΖ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ. Ῥητὴ δὲ ἡ ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΚ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΖ ῥητή· ὅλη ἄρα ἡ ΒΚ ῥητή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ λοιπῇ τῇ ΗΔ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΑΔ, συνάγονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Λ γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ ΑΓ τῆς ΓΛ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ Μ ὀρθαί εἰσι, καὶ διπλῆ ἡ ΑΓ τῆς ΓΜ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΜΖ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΔΓ καὶ τοῦ ΑΜΖ, ἡ ὑπὸ ΑΔΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΜΖΑ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΑΜΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΑΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΔ. Ὡς

δὲ

δὲ ἡ τῆς MZ διπλῆ πρὸς τὴν ZA, οὕτως ἡ MZ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ZA· καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς ΔΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ MZ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ZA, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίσεια· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΔΓ διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓΑ, οὕτως ἡ MZ πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ZA. Καὶ ἔστι τῆς μὲν ΔΓ διπλῆ ἡ ΔΓ, τῆς δὲ ΔΓ ἡμίσεια ἡ ΓΜ, τῆς δὲ ZA τέταρτον μέρος ἡ ZK· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ MZ πρὸς τὴν ZK. Συνθέντι καὶ ὡς συναμφότερος ἡ ΔΓΜ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ MK πρὸς τὴν KZ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΓΜ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς MK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς KZ. Καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τῆς ΔΓ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΔΓ· τὸ δὲ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, καὶ ἔστιν ὅλης τῆς ΔΓ ἡμίσεια ἡ ΓΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΜ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς MK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς KZ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς MK τοῦ ἀπὸ τῆς KZ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς KZ, ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς MK· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ MK, λόγον γὰρ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὸ ἀπὸ τῆς MK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς KZ. Καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ BZ τῆς ZK, πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ BK τῆς KZ· εἴκοσι πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπὸ τῆς KZ. Πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς MK τοῦ ἀπὸ τῆς KZ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπὸ τῆς KM· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς KM λόγον

οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *BK* τῇ *KM* μήκει. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· αἱ *BK KM* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *MB*, πραγαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ *MK*. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *BK* τοῦ ἀπὸ τῆς *KM*, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς *N*· ἡ *BK* ἄρα τῆς *KM* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς *N*. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ *KZ* τῇ *ZB*, καὶ συνθέντι σύμμετρός ἐστιν ἡ *KB* τῇ *BZ*. Ἀλλὰ ἡ *BZ* τῇ *BΘ* σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ *KB* ἄρα τῇ *BΘ* σύμμετρός ἐστι. Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *BK* τοῦ ἀπὸ τῆς *KM*, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς *BK* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *KM* λόγον ἔχει, ὃν $\bar{\varepsilon}$ (πέντε) πρὸς $\bar{\alpha}$ (μονάδα)· ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *BK* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *N* λόγον ἔχει, ὃν $\bar{\varepsilon}$ (πέντε) πρὸς $\bar{\delta}$ (τέσσαρας), οὐχ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον· ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἐστὶν ἡ *BK* τῇ *N*· ἡ *BK* ἄρα τῆς *KM* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ *BK* τῆς προσαρμοζούσης τῆς *KM* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ὅλη ἡ *BK* σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ *BΘ*· ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ *MB*. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐλάττων. Δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν *ΘB BM* ἡ *AB*, διὰ τὸ ἐπιζευγνυμένης τῆς *AΘ* ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ *ABΘ* τρίγωνον τῷ *ABM* τριγώνῳ, καὶ εἶναι ὡς τὴν *ΘB* πρὸς τὴν *BA*, οὕτως τὴν *AB* πρὸς τὴν *BM*.

Ἡ ἄρα *AB* τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιβ.

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγ- 12.
γραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τρι-
πλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον Fig. 12.
ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ
ΑΒΓ τριγώνου πλευρὰ ἡ ΑΒ δυνάμει τριπλασίων
ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ
ἐπεζεύχθεῖσα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω
ἡ ΒΕ. Καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον,
ἡ ΒΕΓ ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ
ΑΒΓ κύκλου περιφερείας· ἡ ἄρα ΒΕ περιφέρεια
ἕκτον ἐστὶ μέρος τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἐξα-
γώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΒΕ εὐθεῖα· ἴση ἄρα
ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΕ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν
ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ, τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς
ΑΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ, τοῦτ' ἔστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ.
Ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ· τὰ
ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς
ΒΕ· διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι
τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. Ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΔΕ· τὸ ἄρα
ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ.

Ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων
ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ.

Πυραμίδα συστήσασθαι ἐκ τεσσάρων 13.
τριγώνων ἰσοπλεύρων, καὶ σφαίρᾳ περιλα-
βεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαί-
ρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς
πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ Fig. 13

ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ· καὶ καταγεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΑ· καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗ, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΑΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΗΖ κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΕΖΗ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ ΘΖ ΘΗ· καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΘΚ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΘΚ τῇ ΑΓ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΕ ΚΖ ΚΗ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΚ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπίπεδον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν ΘΕ ΘΖ ΘΗ· ἡ ΘΚ ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΕ ΘΖ ΘΗ ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΚΕ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ ΚΗ τῇ ΔΑ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΚΕ ΚΖ ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ἐπειδήπερ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ τριπλάσιον, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΕΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΑ τῇ ΕΖ. Ἀλλὰ ἡ ΔΑ ἑκάστῃ τῶν ΚΕ ΚΖ ΚΗ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΕΖ ΖΗ ΗΕ ἑκάστῃ τῶν ΚΕ ΚΖ ΚΗ ἐστὶν

ἴση· ἰσόπλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ ΕΖΗ ΚΕΖ ΚΖΗ ΚΗΕ· πυραμὶς ἄρα συνέσταται ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΖΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον.

Λεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῆς ΚΘ εὐθεῖα ἡ ΘΛ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΘΛ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΒ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΚΘ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΘΛ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΚΘ ΘΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ. Καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΚΘΕ ΕΘΛ γωνιῶν· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΛ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε. Ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΛ, ὀρθὴ γίγνεται ἡ ὑπὸ ΛΕΚ γωνία, διὰ τὸ ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν ΕΛΘ ΕΘΚ τριγώνων. Ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΛ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ Η σημείων, ἐπιζευγνυμένων τῶν ΖΛ ΛΗ, καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γιγνομένων τῶν πρὸς τοῖς Ζ Η γωνιῶν· καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ, ἡ γὰρ ΚΛ τῆς σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ ΑΒ, ἐπειδήπερ τῇ μὲν ΑΓ ἴση κεῖται ἡ ΚΘ, τῇ δὲ ΓΒ ἡ ΘΛ.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἡμιολία ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ. Ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἐπειδήπερ

ἐπιζευγνυμένης τῆς ΒΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΔΑΒ ΔΑΓ τριγώνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΒΑ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΑΔ ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ'.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὴν πυραμίδα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου. 14.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΖ ΕΗ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΚΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ ΚΜ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΚΛ ΚΜ μιᾷ τῶν ΚΕ ΚΖ ΚΗ ΚΘ ἴση ἑκατέρα τῶν ΚΛ ΚΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΕ ΛΖ ΛΗ ΛΘ ΜΕ ΜΖ ΜΗ ΜΘ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΚΘ, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΕΚΘ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῇ ΚΕ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΛΚΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλά- Fig. 14

σιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΘ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΕ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΘ τρίγωνον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πλευραί, κορυφαὶ δὲ τὰ Α Μ σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὀκτάεδρον ἄρα συνέσταται ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ ΑΚ ΚΜ ΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΑΜ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε. Καὶ διὰ τὰ αὐτά, ἐὰν μενούσης τῆς ΑΜ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ Η Θ σημείων, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΚΜ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΑΕ βάσει τῇ ΕΜ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΜ γωνία, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΜ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ· διπλασία ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΜ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ. Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΕ· ἴση γὰρ κεῖται ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. Ἴσον ἐστὶν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΜ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΑΜ. Καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΑΜ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Περιείληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ· καὶ συναποδέδεικται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιε'.

Κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ἢ καὶ τὰ πρότερα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. 15.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον τὴν πλευρὰν τῇ ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε Ζ Η Θ τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΕΚ ΖΛ ΗΜ ΘΝ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκάστης τῶν ΕΚ ΖΛ ΗΜ ΘΝ μιᾷ τῶν ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΕ ἴση ἑκάστη τῶν ΕΚ ΖΛ ΗΜ ΘΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ ΛΜ ΜΝ ΝΚ· κύβος ἄρα συνέσταται ὁ ΖΝ ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος. Δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. Fig. 15.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΚΗ ΕΗ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΚΕΗ γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν ΚΕ ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ ΕΗ ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν ΕΗ εὐθεῖαν· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΗ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΖΗ ὀρθή ἐστιν πρὸς ἑκατέραν τῶν ΛΖ ΖΕ, καὶ πρὸς τὸ ΖΚ ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν ἡ ΖΗ· ὥστε καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΖΚ, ἡ ΗΖ ὀρθὴ ἔσται καὶ

πρὸς τὴν ΖΚ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ΗΚ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ζ. Ὁμοίως δὴ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. Ἐὰν δὴ, μενούσης τῆς ΚΗ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι· ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένος ὁ κύβος. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τὸ Ζ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. Ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΗΕ ΕΚ, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ τριπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΕ τριπλάσιον· καὶ κεῖται ἴση ἡ ΚΕ τῇ ΒΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΗ τῇ ΑΒ. Καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος· καὶ συναποδέδεικται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ις'.

16. Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ *Fig.* 16.

ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗΘΚ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΔΒ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλου πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΕΖΗΘΚ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΚ ΚΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Λ Μ Ν Ξ Ο σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΛ ΛΖ ΖΜ ΜΗ ΗΝ ΝΘ ΘΞ ΞΚ ΚΟ ΟΕ, καὶ ὁμοίως αἱ ΛΜ ΜΝ ΝΞ ΞΟ ΟΛ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΜΝΞΟ πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ ΕΟ εὐθεῖα. Καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ε Ζ Η Θ Κ σημείων τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ ΕΠ ΖΡ ΗΣ ΘΤ ΚΥ ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΡ ΡΣ ΣΤ ΤΥ ΥΠ ΠΛ ΛΡ ΡΜ ΜΣ ΣΝ ΝΤ ΤΞ ΞΥ ΥΟ ΟΠ. Καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΕΠ ΚΥ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΠ τῇ ΚΥ. Ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ἡ ΠΥ ἄρα τῇ ΕΚ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι. Πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΕΚ· πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου, καὶ ἡ ΠΥ, τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ ΡΣ ΣΤ ΤΥ πενταγώνου ἐστὶ ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΡΣΤΥ πεντάγωνον. Καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΕ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΕΟ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΠΕΟ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΟ· ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΟΥ πενταγώνου ἐστὶ πλευρά, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ

πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΟΥ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΠΑΡ ΡΜΣ ΣΝΤ ΤΞΥ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν ΠΑ ΠΟ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΟ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΑΟ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΑΡΜ ΜΣΝ ΝΤΞ ΞΥΟ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου τὸ Φ σημεῖον· καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΦΩ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἀφῃρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν ΦΨ ΧΩ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΩ ΠΧ ΥΩ ΕΦ ΑΦ ΑΨ ΨΜ. Καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΦΧ ΠΕ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΠΕ. Εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ ΕΦ ΠΧ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. Ἑξαγώνου δὲ ἡ ΕΦ· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΠΧ. Καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΠΧΩ γωνία· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΩ πενταγώνου ἐστίν, ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΦΚ ΧΥ, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καὶ ἔστιν ἡ ΦΚ ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα ἑξαγώνου· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΧΥ. Δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΥΧΩ· πενταγώνου ἄρα ἡ ΥΩ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΥΩ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΠΡ ΡΣ ΣΤ ΤΥ εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ Ω σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστι. Πάλιν, ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΛ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΦΨ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΦΨ γωνία· πενταγώναυ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΨ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΦΜ οὖσαν ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ ΜΨ πενταγώνου. Ἔστι

δὲ καὶ ἡ ΛΜ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΜΨ τρίγωνον. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΜΝ ΝΞ ΞΟ ΟΛ, κορυφὴ δὲ τὸ Ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστι· συνέσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ· ἡ ΦΩ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΦΧ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΦΧ τῇ ΦΛ, ἡ δὲ ΧΩ τῇ ΦΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΛ, οὕτως ἡ ΛΦ πρὸς τὴν ΦΨ. Καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΩΦΛ ΛΦΨ γωνίαι· ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν ΛΩ εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ ΨΛΩ γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΨΛΦ ΦΛΩ τριγώνων· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Λ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΩΦ τῇ ΨΧ, ἡ δὲ ΦΧ τῇ ΧΠ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΨΧ πρὸς τὴν ΧΠ, οὕτως ἡ ΠΧ πρὸς τὴν ΧΩ. Καὶ διὰ τοῦτο πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΠΨ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π. Καὶ ἐὰν μενούσης τῆς ΨΩ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι· ἥξει καὶ διὰ τοῦ Λ καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. Τετμήσθω γὰρ ἡ ΦΧ δίχα κατὰ τὸ α. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΩΦ ἄκρον καὶ μέσον λόγον

τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ ἔλαττον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΩΧ· ἡ ἄρα ΩΧ προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν Χα πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ωα τοῦ ἀπὸ τῆς αΧ. Καὶ ἔστι τῆς μὲν αΩ διπλῆ ἡ ΩΨ, τῆς δὲ αΧ διπλῆ ἡ ΧΦ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ. Καὶ ἐπεὶ τετραπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, πενταπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΦΧ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΨΩ. Καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΨΩ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ· τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. Ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ἡ δὲ τοῦ ΕΖΗΘΚ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν· ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τῶν δύο τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Πρότασις ιζ.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ἥ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. 17.

Κείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ ΑΒΓΔ ΓΒΕΖ, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ ΕΖ ΕΒ ΖΓ πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ Η Θ Κ Λ Μ Ν Ξ σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ ΘΛ ΜΘ ΝΞ, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΝΟ ΟΞ ΘΠ εὐθειῶν ἄκρον καὶ μέσον κατὰ τὰ Ρ Σ Τ σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ΡΟ ΟΣ ΤΠ, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ρ Σ Τ σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ΡΥ ΣΦ ΤΧ, καὶ κείσθωσαν ἴσαι ταῖς ΡΟ ΟΣ ΤΠ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΒ ΒΧ ΧΓ ΓΦ ΦΥ· λέγω ὅτι τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, καὶ ἔτι ἰσογώνιόν ἐστιν. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΡΒ ΣΒ ΦΒ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΡ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΟΝ ΝΡ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΟ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ Fig. 17.

τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΡ τῇ ΡΥ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΝ ΝΡ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΝ ΝΡ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΡ ἐστὶν ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΡ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΒΡ ΡΥ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΡ ΡΥ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΥ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΥ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΥΡ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΥ τῆς ΥΡ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΦΥ τῆς ΥΡ διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ΡΣ τῆς ΡΟ, τοῦτ' ἔστι τῆς ΡΥ ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΒΥ τῇ ΥΦ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΒΧ ΧΓ ΓΦ ἑκατέρᾳ τῶν ΒΥ ΥΦ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ο ἑκατέρᾳ τῶν ΡΥ ΣΦ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς τοῦ κύβου μέρη ἡ ΟΨ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΨΘ ΘΧ· λέγω ὅτι ἡ ΨΘΧ εὐθεῖά ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Τ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΠΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΠ πρὸς τὴν ΠΤ, οὕτως ἡ ΠΤ πρὸς τὴν ΤΘ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΠΘ τῇ ΘΟ, ἡ δὲ ΠΤ ἑκατέρᾳ τῶν ΤΧ ΟΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΟ πρὸς τὴν ΟΨ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς τὴν ΤΘ. Καὶ ἔστι παράλληλος ἡ μὲν ΘΟ τῇ ΤΧ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ δὲ ΤΘ τῇ ΟΨ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΖ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ΨΟΘ ΘΥΧ, τὰς δύο πλευρὰς τοῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἔσονται· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΨΘ τῇ ΘΧ. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ἐν ἑνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΡ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΝΟ ΟΡ πρὸς τὴν ΟΝ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ. Ἴση δὲ ἡ ΡΟ τῇ ΟΣ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΣΝ πρὸς τὴν ΝΟ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΣ· ἡ ΝΣ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΟΝ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΣ τῇ ΣΦ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ ΣΦ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΦΣ ΣΝ ΝΒ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΣΝ ΝΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΣ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΣ ΣΦ, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΦ, (ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΦΣΒ γωνία,) τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΒ τῆς ΒΝ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΒΝ διπλῆ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΒ τῇ ΒΓ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΥ ΥΦ δυσὶ ταῖς ΒΧ ΧΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΦΒ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΥΦ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΥΦΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΧΓ ΒΥΦ ΥΦΓ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ ἄρα ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ἰσογώνιον, καὶ ἔστιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρᾶς τῆς ΒΓ. Ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεται τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον, ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον.

Λεῖ

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω ἡ ΟΩ· συμβάλλει ἄρα ἡ ΟΩ τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. Τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΟΩ ἡμίσεια τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΥΩ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΣ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΣ τῇ ΨΩ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΟΩ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΨΟ τῇ ΟΣ· ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΟΣ τῇ ΨΥ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΡΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΩΨ ΨΥ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΩΨ ΨΥ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΥΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΥΩ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, (προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου). Εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς ἡμισείας· καὶ ἔστιν ἡ ΝΟ ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ἡ ἄρα ΥΩ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. Καὶ ἔστι τὸ Ω κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ Υ ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΟ· τῆς δὲ ΟΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΣ, ὅλης ἄρα τῆς ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΣ. (Οἷον ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ, οὕτως ἡ ΟΡ πρὸς τὴν ΡΝ, καὶ τὰ διπλάσια· τὰ γὰρ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΡΣ, οὕτως ἡ ΡΣ πρὸς συναμφότερον τὴν ΝΡ ΣΞ. Μείζων δὲ ἡ ΝΞ τῆς ΡΣ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΡΣ συναμφοτέρου τῆς ΝΡ ΣΞ· ἡ ΝΞ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΣ). Ἴση δὲ ἡ ΡΣ τῇ ΥΦ· τῆς ἄρα ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΥΦ. Καὶ ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΞ πλευρὰ οὖσα τοῦ κύβου. Ἐὰν δὲ ῥητὴ γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἡ ΥΦ ἄρα πλευρὰ οὖσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά.

Πρότασις ιή.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκ- 18.
θέσθαι καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ *AB*, καὶ τετμήσθω κατὰ μὲν τὸ *Γ* ὥστε ἴσην εἶναι τὴν *AΓ* τῇ *ΓB*, κατὰ δὲ τὸ *Δ*, ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν *AΔ* τῆς *ΔB*, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς *AB* ἡμικύκλιον τὸ *AEB*, καὶ ἀπὸ τῶν *Γ Δ* τῇ *AB* πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ *ΓE ΔZ*, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ *AZ ZB AE EB*. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ *AΔ* τῆς *ΔB*, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ *AB* τῆς *BΔ*· ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ *BA* τῆς *AΔ*. Ὡς δὲ ἡ *BA* πρὸς τὴν *AΔ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *BA* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *AZ*· ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ *AZB* τρίγωνον τῷ *AZΔ* τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *BA* τοῦ ἀπὸ τῆς *AZ*. Ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος, καὶ ἔστιν ἡ *AB* ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ *AZ* ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος. Fig. 18.

Πάλιν, ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ *AΔ* τῆς *ΔB*, τριπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ *AB* τῆς *BΔ*. Ὡς δὲ ἡ *AB* πρὸς τὴν *BΔ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *AB* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *BZ*· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *AB* τοῦ ἀπὸ τῆς *BZ*. Ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. Καὶ ἔστιν ἡ *AB* ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ *BZ* ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ *AΓ* τῇ *ΓB*, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ *AB* τῆς *BΓ*. Ὡς δὲ ἡ *AB* πρὸς τὴν *BΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *AB* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *BE*· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *AB* τοῦ ἀπὸ τῆς *BE*. Ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς, καὶ ἔστιν ἡ *AB* ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ *BE* ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά.

Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΗ, καὶ κείσθω ἡ ΑΗ ἴση τῇ ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΗΑ τῆς ΑΓ, (ἴση γὰρ ἡ ΗΑ τῇ ΑΒ,) ὡς δὲ ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΓ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΚΓ· τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΘΚ ΚΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ. Ἴση δὲ ἡ ΘΓ τῇ ΓΒ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὧν ἡ ΑΔ τῆς ΑΒ ἐστὶ διπλῆ· λοιπῇ ἄρα ἡ ΒΔ λοιπῆς τῆς ΔΓ ἐστὶ διπλῆ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ· ἐννεαπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῆς ΓΔ. Κείσθω τῇ ΓΚ ἴση ἡ ΓΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΒ. Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ΒΓ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΚ διπλῆ ἡ ΚΔ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΔ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. Καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΚΔ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται· ἡ ΚΔ ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου. Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας

διάμετρος, ἡ δὲ ΚΛ ἑξαγώνου πλευρὰ, καὶ ἴση ἡ ΑΚ τῇ ΑΒ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΚ ΑΒ δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. Καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ ΑΒ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΜΛ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΘΚ, ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν ΘΚ ΚΛ διπλασίων τῆς ΚΓ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ. Ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΒ κύβου ἐστὶ πλευρὰ, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΝΒ· ἡ ΝΒ ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν ΑΖ πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς ΒΕ δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς ΖΒ δυνάμει τριπλασίων· οἵων ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἓξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο· ἡ ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ· ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία. Αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραὶ, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς· αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὲ ἥτε τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς, ἄλογοι γάρ εἰσιν, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή.

Ὅτι δὲ μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ ΜΒ τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς ΝΒ, δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΖΔΒ τρίγωνον τῷ ΖΑΒ τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΖ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΑ. Καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Τριπλῆ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραπλάσιον· διπλῆ γὰρ ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΔ τῆς ΖΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΖΒ μείζων ἐστί. Καὶ τῆς μὲν ΑΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΚΔ, ἐπειδήπερ ἡ μὲν ΑΚ ἑξαγώνου ἐστὶν, ἡ δὲ ΚΔ δεκαγώνου· τῆς δὲ ΖΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΒ· μείζων ἄρα ἡ ΚΔ τῆς ΝΒ. Ἴση δὲ ἡ ΚΔ τῇ ΛΜ· μείζων ἄρα ἡ ΛΜ τῆς ΝΒ. Τῆς δὲ ΛΜ μείζων ἐστὶν ἡ ΜΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΜΒ πλευρὰ οὖσα τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς ΝΒ πλευρᾶς οὔσης τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σχόλιον.

Λέγω δὴ ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Ὑπὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων, ἀλλ' οὐδὲ ἄλλων δύο ἐπιπέδων, στερεὰ γωνία οὐ συσταθήσεται. Ὑπὸ

δὲ τριῶν τριγώνων ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία, οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς, ἔσονται αἱ ἓξ τεσσάρσιν ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον, ἅπασα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ ἓξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. Ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἡ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, ἔσονται γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. Ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, οὔσης γὰρ τῆς τοῦ πενταγώνου ἰσοπλεύρου γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐδὲ μὴν ὑπὸ πολυγώνων ἑτέρων σχημάτων περισχεθήσεται στερεὰ γωνία, διὰ τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα ἕτερον σχῆμα στερεὸν συσταθήσεται ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α.

Ὅτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτον, οὕτως δεικτέον.

Ἔστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ *ΑΒΓΔΕ*, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ *ΑΒΓΔΕ*, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ *Ζ*, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ *ΖΑ ΖΒ ΖΓ ΖΔ ΖΕ*· δίχα ἄρα τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς *Α Β Γ Δ Ε* τοῦ

πενταγώνου γωνίας. Καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ πέντε γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ εἰσὶν ἴσαι· μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ ΑΖΒ, μιᾶς ὀρθῆς ἐστὶ παρὰ πέμπτον· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΖΑΒ ΑΒΖ μιᾶς εἰσὶν ὀρθῆς καὶ πέμπτου. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ἐστιν ὀρθῆς καὶ πέμπτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ τρισκαιδεκάτου βιβλίου καὶ τῶν Εὐκλείδου στοιχείων.

Appendix V.

Demonstrationes alterae in editionibus Elementorum Euclidis hic illic adscriptae.

(Sectio altera.)

12.

Ad Lib. X. prop. 1

Ἄλλως.

Ἐκκείσθω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ Γ, ἔστω δὲ τὸ Γ ἔλασσον, καὶ ἐπεὶ ἔλασσόν ἐστι τὸ Γ, πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεγέθους μεῖζον. Γεγονέτω ὡς τὸ ΖΜ, καὶ διηρήσθω εἰς τὰ ἴσα τῷ Γ, καὶ ἔστω τὰ ΜΘ ΘΗ ΗΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφῃρήσθω μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΑΕ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΕΔ. Καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἴσαι γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΖΜ διαιρέσεσι. Γεγονέτωσαν ὡς αἱ ΒΕ ΕΔ ΔΑ, καὶ τῷ ΔΑ ἕκαστον τῶν ΚΛ ΛΝ ΝΞ ἔστω ἴσον, καὶ τοῦτο γιγνέσθω ἕως ἂν αἱ διαιρέσεις τοῦ ΚΞ ἴσαι γένωνται ταῖς τοῦ ΖΜ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ΒΕ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΑΒ, τὸ ΒΕ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΕΔ· πολλῷ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. Ἀλλὰ τὸ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΝ· τὸ ΒΕ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΝΞ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΕΔ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΕΑ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. Ἀλλὰ τὸ ΑΔ ἴσον ἐστὶν ἴσον τῷ ΝΛ· τὸ ΕΔ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΝΛ. ὅλον ἄρα τὸ ΒΔ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΛ. Ἴσον δὲ τὸ ΔΑ τῷ ΛΚ. ὅλον ἄρα τὸ ΒΑ μεῖζόν ἐστιν ὅλου τοῦ ΞΚ. Ἀλλὰ τοῦ ΒΑ μεῖζόν ἐστι τὸ ΜΖ· πολλῷ ἄρα τὸ ΜΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΚ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ΞΝ ΝΛ ΛΚ ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΜΘ ΘΗ ΗΖ ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ἐν τῷ ΜΖ τῷ πλήθει τῶν ἐν τῷ ΞΚ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΛ πρὸς τὸ ΖΗ, οὕτως τὸ ΞΚ

πρὸς τὸ ΖΜ. Μεῖζον δὲ τὸ ΖΜ τοῦ ΞΚ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΖΗ τοῦ ΔΚ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΗ ἴσον τῷ Γ, τὸ δὲ ΚΔ τῷ ΑΔ· τὸ Γ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΑΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Ad Lib. X. prop. 6.

Ἄλλως.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη.

Ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Γ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ ἀριθμὸν, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Α. Ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Β· δίτσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Β. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Ε τὸ Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἐπεὶ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ· τὸ Ε ἄρα ἑκάτερον τῶν Α Β μετρεῖ· τὰ Α Β ἄρα σύμμετρά ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτῶν κοινὸν μέτρον τὸ Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Ad Lib. X. prop. 9.

Ἄλλως.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τοῦτ' ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ὁ δὲ Δ τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τοῦτ' ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α Β, οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· δίτσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η. Ἔστι δὲ ἑκάτερος τῶν Ε Η τετράγωνος, ὁ μὲν γὰρ Ε ἀπὸ τοῦ Γ

ἐστὶν, ὁ δὲ Η ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἀλλὰ δὴ ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Ἔστω γὰρ τοῦ μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η ὁ Δ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· οἱ Ε Ζ Η ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α Β μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν Α Β, τῶν δὲ Ε Η ὁ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α Β, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β· αἱ Α Β ἄρα σύμμετροί εἰσι, λόγον γὰρ ἔχουσιν ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, τοῦτ' ἔστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποιηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ad Lib. X. prop. 9. (porism.)

Demonstratio corollarii.

Ὅπερ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν σύμμετρά ἐστιν· ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον εἰσὶ μήκει σύμμετροι ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

Πάλιν, ἐπεὶ ὅσα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μήκει ἐδείχθη σύμμετρα, καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα, τῷ τὰ τετράγωνα λόγον ἔχειν ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀλλ' ἁπλῶς ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα πάντως καὶ δυνάμει, τὰ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχοιεν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει. Ἐπεὶ δὴ γὰρ αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὖσαι σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ὥστε οὐχ αἱ μήκει ἀσύμμετροι

πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ μήκει δύνανται οὖσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

Αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι, πάντως καὶ μήκει ἀσύμμετροι· εἰ γὰρ μήκει σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. Ὑπόκεινται δὲ καὶ ἀσύμμετροι, ὅπερ ἄτοπον· αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει.

16.

Ad Lib. X. prop. 19.

Σχόλιον (Λῆμμα) α.

Ἐπεὶ δέδεικται ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δὴ δύνανται μήκει σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι· φανερὸν ὅτι ἐὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπεὶ αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις οὖσα δυνάμει, μήκει αὐτῇ ᾖ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος.

(Πρόκλου) σχόλιον. β'.

Ῥητὰς γὰρ καλεῖ τὰς τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ ἤτοι μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους, ἢ δυνάμει μόνον. Εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροι εἰσι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν λέγονται ῥηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας καθ' ὃ ῥηταί, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὐταὶ ῥηταὶ μήκει σύμμετροι, ἐπακουομένου ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὐταὶ οὕτως ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὅτι δὲ αἱ ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν, ἐντεῦθεν δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ῥηταί εἰσιν αἱ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν.

17.

Ad Lib. X. prop. 21.

Λῆμμα.

Ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον, ἄλογός ἐστι.

Δυνάσθω γὰρ ἡ Α ἄλογον χωρίον, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον ἴσον ἔστω ἀλόγῳ χωρίῳ, λέγω ὅτι ἡ Α ἄλογός ἐστιν.

Εἰ γὰρ ἔσται ῥητὴ ἡ Α, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, οὔτως γάρ ἐστιν ἐν τοῖς ὅροις. Οὐκ ἔστι δέ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα (Scholium ed. Bas. et Ox.)

Μέση ἐστὶν ἄλογος ἡ δυναμένη χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων.

Ὑπὸ ῥητῶν γὰρ δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν Α Β περιεχέσθω χωρίον. Δεικτέον ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ τοιοῦτον χωρίον.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α Β μέση ἀνάλογον ἡ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α Β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Γ. ὥστε ἡ Γ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν Α Β. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ· ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. Τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πορίσματι τοῦ ιθ τοῦ ς στοιχείου. Ἀσύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Γ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ἄλογον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α Β· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ. Μέση δὲ ἐκλήθη, ὅτι ἄλογος οὖσα μέση (Ed. Bas. et Ox. *μέσον*) *δύο ῥητῶν τῶν Α Β ἀνάλογόν ἐστιν.*

18.

Ad Lib. X. prop. 22.

Λῆμμα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΕ ΕΗ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ ΕΗ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΗΔ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΔ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὸ

δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ ΕΗ, τοῦτ' ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ ΕΗ. Ὁμοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΕ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τοῦτ' ἔστιν ὡς τὸ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Ad Lib. X. prop. 24.

Demonstratio corollarii.

... λέγεσθαι μέσην καὶ σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ τῇ μέσῃ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Scholium.

Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μέσῃ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μέσαι, διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μέσῃ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὸ μέσαι ἄλλαι σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἦτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει, ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι, ἑπομένου τοῦ ὅτι καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ὅτι δὲ αἱ μέσαι σύμμετροί εἰσιν, οὕτως δεικτέον. Ἐπεὶ αἱ μέσαι μέσῃ τινὶ σύμμετροί εἰσι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα μέσαι σύμμετροί εἰσιν.

20.

Ad Lib. X. prop. 28.

(In editione Bas. exstat hoc theorema (κή) 28. ad quod in margine adscripta haec leguntur: Hanc (propositionem) exemplar alterum non habebat, nec videtur esse autoris.)

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐν λόγῳ ὁποιῳοῦν, καὶ ἄλλου τινὸς, δεῖν ποιῆσαι ὡς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἀριθμὸν οὕτως τοῦτον πρὸς ἄλλον τινα.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ *ΑΒ ΓΔ* λόγον ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὁποιονοῦν· ἄλλος δέ τις ὁ *ΓΕ*. Δεῖ ποιῆσαι τὸ προκείμενον.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ὑπὸ τῶν *ΔΓ ΓΕ* παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ *ΔΕ*· καὶ τῷ *ΔΕ* ἴσον παρὰ τὴν *ΑΒ* παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ *ΒΖ*.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΔΕ* παραλληλόγραμμον τῷ *ΒΖ* παραλληλογράμμῳ· ἔστι δὲ καὶ ἰσογώνιον αὐτῷ. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ *ΑΒ* πρὸς τὸν *ΓΔ*, οὕτως ὁ *ΓΕ* πρὸς τὸν *ΑΖ*· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Ad Lib. X. prop. 29.

Λῆμμα (ed. Bas.)

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων καὶ εὐθείας δέον ποιῆσαι ὡς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἀριθμὸν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εὐθείας τετράγωνον πρὸς (τὸ) ἀπ' ἄλλης τινός.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ *Α Β*· εὐθεῖα δὲ ἡ *Γ* καὶ δέον ἔστω ποιῆσαι τὸ προκείμενον. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ὁ *Α* πρὸς τὸν *Β*, (οὕτως) ἡ *Γ* εὐθεῖα πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν *Δ* καὶ εἰλήφθω τῶν *Γ Δ* μέση ἀνάλογον ἡ *Ε*. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ *Α* πρὸς τὸν *Β*, (οὕτως) ἡ *Γ* εὐθεῖα πρὸς τὴν *Δ*, ἀλλ' ὡς ἡ *Γ* πρὸς τὴν *Δ*, (οὕτως) τὸ ἀπὸ τῆς *Γ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Ε*. Ὡς ἄρα ὁ *Α* πρὸς τὸν *Β*, (οὕτως) τὸ ἀπὸ τῆς *Γ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Ε* τετράγωνον.

22.

Ad Lib. X. prop. 31.

Λῆμμα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δὴ δύο εὐθεῖαι αἱ *ΑΒ ΒΓ* ἐν λόγῳ τινὶ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ *ΑΒ* πρὸς τὴν *ΒΓ* οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ ΒΓ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΓ*. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς *ΒΓ* τετράγωνον τὸ *ΒΔΕΓ*, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ *ΑΔ* παραλληλόγραμμον. Φανερὸν δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ *ΑΒ* πρὸς τὴν *ΒΓ* οὕτως τὸ *ΑΔ* παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ *ΒΕ* παραλληλόγραμμον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν *ΑΔ* τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ ΒΓ*, ἴση γὰρ ἡ *ΒΓ* τῇ *ΒΔ*, τὸ δὲ *ΒΕ* τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΓ*· ὡς ἄρα

ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ad Lib. X. prop. 32.

Λῆμμα.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΓΔ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου τῇ ΑΔ εὐθεῖα παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΗ, διὰ δὲ τῶν Β Γ Δ σημείων τῇ ΑΕ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΒ ΘΓ ΗΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΒΘ πρὸς τὸ ΓΗ· διῆσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΗ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ, τὸ δὲ ΓΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΓΘ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

24.

Ad Lib. X. prop. 33.

Λῆμμα β.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐλάττονος.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λέγω ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ ΔΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. Φανερὸν οὖν ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΕ, ἴση γὰρ ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, τὸ δὲ ΖΒ τὸ ὑπὸ

τῶν

τῶν ΑΒ ΒΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΒ τῇ ΑΒ. ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα γ'. (in ed. Bas. propositioni 34. adjectum.)

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν εἰς ἴσα· τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν διπλάσιον ἔσται τοῦ τῆς μείζονος καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ ΒΓ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΔ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΔ ἴση ἡ ΒΕ καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΑΗ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὸ ΒΗ πρὸς τὸ ΑΗ· καὶ ἔστιν ἡ ΒΓ τῆς ΑΓ διπλασίων· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΗ τοῦ ΑΗ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ, τὸ δὲ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΔ, ἴση γὰρ τῇ μὲν ΒΔ ἡ ΔΓ, τῇ δὲ ΑΒ ἡ ΔΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ad Lib. X. prop. 38.

Σχόλιον. (cod. Vat.)

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο ὀνομάτων διὰ τὸ ἐκ δύο ῥητῶν αὐτὴν σύγκεισθαι, κύριον ὄνομα καλῶν τὸ ῥητὸν καθ' ὃ ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Ad Lib. X. prop. 39.

Σχόλιον.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν, διὰ τὸ τὸ μέσον περιέχειν τὸ ὑπ' αὐτῶν, καὶ μὴ ῥητὸν, δευτερεύειν δὲ τὸ μέσον τοῦ ῥητοῦ. Ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστι, δῆλον. Εἰ γάρ ἐστι ῥητὸν καὶ παραβέβληται παρὰ ῥητὴν, εἴη ἂν καὶ

ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ῥητή. Ἀλλὰ καὶ ἄλογος, ὅπερ ἄτοπον· τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου ἄλογόν ἐστιν.

27.

Ad Lib. X. prop. 40.

Σχόλιον.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα, διὰ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν *AB BΓ* ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *AB BΓ* μέσου, καὶ δέον εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ῥητῶν οἰκειότητος τὴν ὀνομασίαν τάττεσθαι. Ὅτι δὲ καὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν *AB BΓ* τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *AB BΓ*· οὕτως δεικτέον.

Φανερὸν μὲν οὖν ὅτι ἄνισοί εἰσιν αἱ *AB BΓ*. Εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσα ἂν ἦν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν *AB BΓ* τῷ δὶς ὑπὸ τῶν *AB BΓ* καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *AB BΓ* ῥητόν, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ἄνισοι ἄρα εἰσὶν αἱ *AB BΓ*. Ὑποκείσθω μείζων ἡ *AB*, καὶ κείσθω τῇ *BΓ* ἴση ἡ *BΔ*· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν *AB BΔ* ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν *AB BΔ* καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *AΔ*. Ἴση δὲ ἡ *ΔB* τῇ *BΓ*· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν *AB BΓ* ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν *AB BΓ* καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *AΔ*· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν *AB BΓ* μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *AB BΔ* τῷ ἀπὸ τῆς *AΔ*· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Ad Lib. X. prop. 41.

Σχόλιον.

Ῥητὸν δὲ καὶ μέσον δυναμένην αὐτὴν ἐκάλεσε διὰ τὸ δύνασθαι δύο χωρία, τὸ μὲν ῥητόν, τὸ δὲ μέσον· καὶ διὰ τὴν τοῦ ῥητοῦ προύπαρξιν, πρῶτον τὸ ῥητὸν ἐκάλεσεν.

29.

Ad Lib. X. prop. 42.

Σχόλιον. (Σχόλιον ά ed. Ox.)

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην, διὰ τὸ δύνασθαι αὐτὴν δύο μέσα χωρία, τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *AB BΓ*, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *AB BΓ*.

(Σχόλιον β'. ed. Ox.)

Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται εἰς τὰς εὐθείας ἐξ ὧν σύγκεινται, ποιουσῶν τὰ προκείμενα εἴδη, δείξομεν ὧδε προεκθέμενοι λημμάτιον τοιοῦτον.

Λῆμμα.

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ' ἑκάτερα τῶν Γ Δ· ὑποκείσθω δὲ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε· καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΔΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ λοιπῆς τῆς ΓΒ μείζων ἐστίν· ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΔΕ τῆς ΕΓ· τὰ Γ Δ ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας· καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσον ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ.

30.

Ad Lib. X. prop. 48.

post definitiones alteras.

Σχόλιον.

Ἐξ οὗν οὕσῶν τῶν οὕτως καταλαμβανομένων εὐθειῶν, τάττει πρώτας τῇ τάξει τρεῖς, ἐφ' ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ' ὧν δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, διὰ τὸ προτερεῖν τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμέτρου· καὶ ἔτι πρώτην μὲν, ἐφ' ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ· δευτέραν δὲ, ἐφ' ἧς τὸ ἔλαττον· διὰ τὸ πάλιν προτερεῖν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος τῷ ἐμπεριέχειν τὸ ἔλασσον· τρίτην δὲ, ἐφ' ὧν μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ· καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς τριῶν ὁμοίως, τὴν πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως τετάρτην καλῶν, καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην, καὶ τὴν τρίτην ἕκτην

31.

Ad Lib. X. prop. 71.

Σχόλιον. (ed. Bas.)

Ἑπτά εἰσιν ἐξάδες ἄχρι τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων, ὧν ἐν μὲν τῇ πρώτῃ ἐδείκνυε τὴν γένεσιν αὐτῶν, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ τὴν διαίρεσιν, ὅτι καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιροῦνται, ἐν δὲ τῇ τρίτῃ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων εὕρεσιν, πρώτης, δευτέρας, τρίτης, τετάρτης, πέμπτης, ἕκτης, ἀφ' ἧς ἐν τῇ τετάρτῃ ἐξάδι τὴν διαφορὰν ἐπεδείκνυε τῶν ἀλόγων, τῇ διαφέρουσι· προσχρώμενος γὰρ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων ἀποδείκνυσι τὴν διαφορὰν τῶν ἐξ ἀλόγων. Πέμπτην καὶ ἕκτην ἐξέθετο, δεικνύων ἐν μὲν τῇ πέμπτῃ τὰς παραβολὰς τὰς ἀπὸ τῶν ἀλόγων ποίας ἀλόγους ποιοῦσι τὰ πλάτη τῶν παραβαλλομένων χωρίων· ἐν δὲ τῇ ἕκτῃ, πῶς αἱ σύμμετροι ταῖς ἀλόγοις ὁμοειδεῖς αὐταῖς εἰσί. Πάλιν ἐν τῇ ἑβδόμῃ σαφῶς διαφορὰν αὐτῶν ἡμῖν δείκνυσιν.

Ἀναφαίνεται δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἀλόγων τούτων ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία· καὶ ἡ μέση λαμβανομένη ἀνάλογον τῶν τμημάτων οἱασδήποτε ἀλόγου κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν, καὶ αὐτὴ ὁμοειδής ἐστιν, ὧν ἐστι μέση ἀνάλογον· καὶ πρῶτον ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ μεσότης ἐν τούτοις ἐστί.

Κείσθω γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων, εἰ τύχοι, ἡ ΑΒ καὶ διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, φανερὸν ὅτι ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ ἐστὶ μείζων. Ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Ε, φανερὸν ὅτι ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση. Κείσθω ὁποτέρᾳ αὐτῶν ἴση ἡ ΖΗ· φανερὸν δὴ ὅτι ᾧ διαφέρει ἡ ΑΓ τῆς ΖΗ, τούτῳ διαφέρει καὶ ἡ ΕΒ τῆς ΓΒ. Ἡ μὲν γὰρ ΑΓ τῆς ΖΗ τῇ ΓΕ, τῷ αὐτῷ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῆς ΓΒ· ὅπερ ἐστὶν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Δῆλον δὲ ὅτι ἡ ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ· τῇ γὰρ ἡμισείᾳ αὐτῆς ἐστιν ἴση· ὥστε ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

32.

Ad Lib. X. prop. 73.

Πόρισμα.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί· τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν

παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. Τὰ δὲ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δὲ ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, ὥστε καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

In ceteris editionibus hic insertum est illud scholium, quod supra ex editione Bas. ad prop. 71. attulimus

33.

Ad Lib. X. prop. 91.

Σχόλιον.

Ἔστι δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὕρεσιν τῶν εἰρημένων ἐξ ἀποτομῶν. Καὶ δὴ ἔστω εὑρεῖν τὴν πρώτην. Ἐκκείσθω ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη ἡ $A\Gamma$, ἧς μεῖζον ὄνομα ἡ AB, καὶ τῇ $B\Gamma$ ἴση κείσθω ἡ $B\Delta$· αἱ AB $B\Gamma$ ἄρα, τουτ' ἔστιν αἱ AB $B\Delta$, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἡ AB τῆς $B\Gamma$, τουτ' ἔστι τῆς $B\Delta$, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἡ AB σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ $A\Delta$. Ὁμοίως δὴ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὑρήσομεν, ἐκθέμενοι τὰς ἰσαρίθμους ἐκ δύο ὀνομάτων.

34.

Ad Lib. X. prop. 106.

Ἄλλως.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ A, καὶ τῇ A σύμμετρος ἔστω ἡ B· λέγω ὅτι ἡ B ἐλλάσσων ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ $\Gamma\Delta$ ῥητὴ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν ΓZ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ τετάρτη ἡ ΓZ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον παρὰ τὴν ZE παραβεβλήσθω τὸ ZH πλάτος ποιοῦν τὴν $Z\Theta$. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς B. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσον ἐστὶ τὸ ΓE, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον ἐστὶ τὸ ZH· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓE τῷ ZH. Ὡς δὲ τὸ ΓE πρὸς τὸ ZH, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓZ πρὸς τὴν $Z\Theta$· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓZ τῇ $Z\Theta$ μήκει. Ἀποτομὴ δέ ἐστι τετάρτη ἡ ΓZ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $Z\Theta$ τετάρτη· τὸ ZH ἄρα περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστί. Δύναται δὲ τὸ ZH ἡ B· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ B. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35.

Ad Lib. X. prop. 107.

Ἄλλως.

Ἔστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ A, σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ B· λέγω ὅτι ἡ B μετὰ ῥητοῦ μέσον τό ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν ΓZ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη ἡ ΓZ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον παρὰ τὴν ZE παραβεβλήσθω τὸ ZH πλάτος ποιοῦν τὴν $Z\Theta$. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς B. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσον τὸ ΓE, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον τὸ ZH· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓE τῷ ZH· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓZ τῇ $Z\Theta$ μήκει. Ἀποτομὴ δὲ πέμπτη ἐστὶν ἡ ΓZ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη καὶ ἡ $Z\Theta$, ῥητὴ δὲ ἡ ZE. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι. Δύναται δὲ τὸ ZH ἡ B· ἡ B ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36.

Ad Lib. X. prop. 116.

Ἄλλως.

Ἔστω μέση ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή.

Ἤχθω τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΓΔ· ἄλογος ἄρα ἡ ΓΔ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. Πάλιν, συμπεπληρώσθω τὸ ΕΔ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΔΖ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΓΔ.

Ἀπὸ τῆς μέσης ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

37.

Ad finem libri decimi.

In editione Basileensi additur.

Πρότασις ριε'.

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ Α καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β ἐλάσσων ἐστίν. etc. conferatur. 34. pag. 294.

38.

Ad finem libri decimi.

In editione Basileensi hoc theorema additur:

Πρότασις ριζ'.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ Α, etc. conf. 35. pag. 294.

39.

Ad finem libri decimi.

In omnibus editionibus haec ultima legitur totius libri propositio:

Πρότασις ριή. (Bas.) *ριθ'.* (Ox.)

Προκείσθω ἡμιν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· λέγω ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν· φανερὸν μὲν οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω ὧν ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ ΕΖ. Εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ λόγον πρὸς τὸν Η ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ μονὰς τοῦ Η ἀριθμοῦ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. Διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· διπλασίων ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιός ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ ἄρτιός ἐστιν. Εἰ γὰρ ἦν περισσός, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἂν ἦν, ἐπειδήπερ ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, ὅλος περισσός ἐστιν· ὁ ΕΖ ἄρα ἄρτιός ἐστι. Τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ. Καὶ ἐπεὶ οἱ ΕΖ, Η ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἔστιν ὁ ΕΖ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Η. Εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς ΕΖ, Η δυὰς ἂν ἐμέτρει, (πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ,) πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ Η· περισσὸς ἄρα. Καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστὶν ὁ ΕΖ τοῦ ΕΘ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ Η. Ἀλλὰ καὶ περισσός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως.

Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ.

Ἔστω ἀντὶ μὲν τῆς διαμέτρου ἡ Α, ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ Β· λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· καὶ γεγονέτω πάλιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ ΕΖ, Η· οἱ ΕΖ, Η ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Λέγω πρῶτον ὅτι ὁ Η οὐκ ἔστι μονάς. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μονάς. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. Διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τοῦ ἀπὸ τῆς Β· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η. Καὶ ἔστι μονὰς ὁ Η. δυὰς ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τετράγωνος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Η· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ. Μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ἀπὸ τῆς Α· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ Η τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ὁ Η τὸν ΕΖ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τοὺς ΕΖ, Η μετρεῖ, πρώτους ὄντας ἀλλήλοις, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

40.

Ad finem libri decimi.

Hoc ultimum scholium in omnibus editionibus adjunctum est.

Σχόλιον.

Εὑρημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς τῶν Α, Β, εὑρίσκεται καὶ ἄλλα πλεῖστα μεγέθη ἐκ δύο διαστάσεων, λέγω δὴ ἐπίπεδα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Ἐὰν γὰρ τῶν Α, Β εὐθείων μέσην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Γ, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφό-

μενον, εἴτε τετράγωνα εἴη τὰ ἀναγεγραμμένα, εἴτε ἕτερα εὐθύγραμμα ὅμοια, εἴτε καὶ κύκλοι περὶ διαμέτρους τὰς Α, Γ, ἐπείπερ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· εὕρηνται ἄρα καὶ ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δεδειγμένων δὲ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφόρων ἀσυμμέτρων χωρίων, δείξομεν τοῖς ἀπὸ τῆς τῶν στερεῶν θεωριᾶς, ὡς ἔστι καὶ στερεὰ σύμμετρά τε καὶ ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β τετραγώνων, ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων, ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ στερεὰ, παραλληλεπίπεδα, ἢ πυραμίδας, ἢ πρίσματα, ἔσται τὰ ἀνασταθέντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. Καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔσται καὶ τὰ στερεά· εἰ δὲ ἀσυμμέτροι, ἀσύμμετρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ μὴν καὶ δύο κύκλων ὄντων τῶν Α, Β, ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς κώνους, ἢ κυλίνδρους ἀναγράψωμεν, ἔσονται πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις, τοῦτ' ἔστιν ὡς οἱ Α, Β κύκλοι. Καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται καὶ οὗτε κῶνοι πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱ κυλινδροι· εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι. Καὶ φανερὸν ἡμῖν γέγονεν ὅτι οὐ μόνον ἐπί τε γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐστὶ σύμμετρία καὶ ἀσύμμετρία, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

41.

Ad libr. XI. prop. 23.

Ἄλλως.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιεχέτωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΖ ΗΘ ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ ΔΖ ΗΚ· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ ΔΖ ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τοῦτ' ἔστι πάλιν ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς Β Ε Θ σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ ΑΓ ΔΖ ΗΚ, καὶ ἔσονται αἱ δύο

τῆς λοιπῆς μείζονες. Εἰ δὲ οὐ, ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς *B E Θ* σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἡ πρὸς τῷ *B* ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς *E Θ*· μείζων ἄρα ἔσται καὶ ἡ *ΑΓ* εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν *ΔΖ ΗΚ*. Καὶ φανερὸν ὅτι ἡ *ΑΓ* μεθ' ἑκατέρας τῶν *ΔΖ ΗΚ* τῆς λοιπῆς μείζων ἐστί. Λέγω ὅτι καὶ αἱ *ΔΖ ΗΚ* τῆς *ΑΓ* μείζονές εἰσι. Συνεστάτω πρὸς τῇ *ΑΒ* εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ *Β* τῇ ὑπὸ *ΗΘΚ* γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ *ΑΒΔ*, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν *ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΖ ΗΘ ΘΚ* ἴση ἡ *ΒΔ*, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ *ΑΔ*, *ΔΓ*. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ *ΑΒ*, *ΒΔ* δυσὶ ταῖς *ΗΘ ΘΚ* ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ *ΑΔ* βάσει τῇ *ΗΚ* ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς *Ε Θ* σημείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ *ΑΒΓ* μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ *ΗΘΚ* τῇ ὑπὸ *ΑΒΔ* ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ *Ε* γωνία τῆς ὑπὸ *ΑΒΓ* μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ *ΑΒ ΒΓ* δυσὶ ταῖς *ΔΕ ΕΖ* ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ *ΔΕΖ* γωνίας τῆς ὑπὸ *ΑΒΓ* μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ *ΔΖ* βάσεως τῆς *ΑΓ* μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ *ΗΚ* τῇ *ΑΔ*· αἱ ἄρα *ΔΖ ΗΚ* τῶν *ΑΔ ΔΓ* μείζονές εἰσιν· Ἀλλὰ αἱ *ΑΔ ΔΓ* τῆς *ΑΓ* μείζονές εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ *ΔΖ ΗΚ* τῆς *ΑΓ* μείζονές εἰσι. Τῶν *ΑΓ ΔΖ ΗΚ* ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς *ΑΓ ΔΖ ΗΚ* τρίγωνον συστήσασθαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

42.

Ad. Libr. XI. prop. 23.

Λῆμμα.

Ὅν δὲ τρόπον ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* τοῦ ἀπὸ τῆς *ΑΞ* ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *ΞΡ*, δείξομεν οὕτως.

Ἐκκείσθωσαν αἱ *ΑΒ ΑΞ* εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ *ΑΒ*, καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ *ΑΒΓ*, καὶ εἰς τὸ *ΑΒΓ* ἡμικύκλιον ἐνηρμόσθω τῇ *ΑΞ* μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς *ΑΒ* διαμέτρου ἴση εὐθεῖα ἡ *ΑΓ*, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ *ΒΓ*.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΒΓ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. Ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΞ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΞ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. Ἐὰν οὖν τῇ ΒΓ ἴσην τὴν ΞΡ ἀπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΞΑ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΡ. Ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

43.

Ad. Libr. XII. 4.

(Pro iis quae sequuntur inde a vocabulo Καὶ [pag. 207. lin. 12] haecce leguntur in cod. Vat. et aliis quibusdam).

Ὡς δὲ τὰ εἰρήμενα πρίσματα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΑ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΠΕΦΡ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα, καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα οὗ τε βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΑ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ πρὸς τὰ πρίσματα οὔτε βασις μὲν τὸ ΠΕΦΡ, ἀπεναντιον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα. Καὶ ὁμοίως ἐὰν διαιρεθῶσιν αἱ ΟΜΝΗ ΣΤΤΘ πυραμίδες εἴς τε δύο πρίσματα καὶ δύο πυραμίδας, ἔσται καὶ ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΤ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΤΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. Ἀλλ' ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΤ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν ΟΜΝ ΣΤΤ τριγώνων ἑκατέρῳ τῶν ΑΞΓ ΡΦΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα. Ὁμοίως δὲ κἂν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν εἴς τε δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα

πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

44.

Ad Lib. XII. prop. 6.

Pro ea, quam recepimus, demonstratione Ἐπεζεύχθωσαν etc. (p. 211. lin. 19) usque ad πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πύραμίδα (l. 28.) hanc offerunt editiones Oxonia et Basileensis.

Διηρήσθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒΓΔΕ βάσις εἰς τὰ ΑΒΓ ΑΓΔ ΑΔΕ τρίγωνα· ἡ δὲ ΖΗΘΚΛ εἰς τὰ ΖΗΘ ΖΘΚ ΖΚΛ τρίγωνα, καὶ νενοήσθωσαν ἐφ' ἑκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσοϋψεῖς ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα, καὶ συνθέντι ὡς τὸ ΑΒΓΔ τραπέζιον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. Ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα.

45.

Ad Lib. XII. prop. 17.

Ἄλλως.

Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΑΗ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΩ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΩ. Τέμνοντες δὴ τὴν ΕΒ περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα περιφέρειαν, ἥ ἐστιν ἐλάσσων τῆς ὑποτεινομένης τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου περιφερείας, ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ ΗΩ. Ἀελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΚΒ περιφέρεια· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΚΒ εὐθεῖα τῆς ΗΩ. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΒΚΣΟ τετράπλευρον, καὶ εἴσιν ἴσαι αἱ ΟΒ ΒΚ

ΚΣ, καὶ ἐλάσσων ἡ ΟΣ· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΨΟ γωνία, μείζων ἄρα ἡ ΒΟ τῆς ΒΨ. Ἀλλὰ τῆς ΒΟ μείζων ἐστὶν ἡ ΗΩ· πολλῷ ἄρα ἡ ΗΩ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΨ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΩ τῇ ΑΒ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΩ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΩ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΩ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ ΨΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΩ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΩ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΨΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ.

46.

Ad Lib. XIII. prop. 5.

Ἄλλως.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὡς συναμφότερος ἡ ὅλη καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν ὅλην, οὕτως ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ· καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Κείσθω γὰρ τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστι τὸ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ· συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. Ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Ἡ ΔΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον

τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ad Lib. XIII. prop. 1 — 5.

Quod sequitur scholium de analysi et synthesi, conjunctum quinto theoremati additum est in Cod. Vat. At in edd. Ox. et Bas. ad singula theoremata singulae ejus partes adjectae sunt.

Ἀνάλυσις καὶ σύνθεσις.

Τί ἐστιν ἀναλυσις καὶ τί ἐστι σύνθεσις;

Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστὶ λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Σύνθεσις δὲ λῆφις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπὶ τὴν τοῦ ζητουμένου κατάληξιν ἢ κατάληψιν.

Τοῦ πρώτου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις ἀνεὺ καταγραφῆς.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΑΒ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ἀλλὰ τῷ μὲν δὶς ὑπό τῶν ΓΑ ΑΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ, διπλῆ γὰρ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετρα-

πλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Αλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ἔστι δὲ, διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Αλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστί· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ δευτέρου θεωρήματου ἡ ἀνάλυσις ἄνευ καταγραφῆς.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΓΔ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ ΔΑ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΔΑ διπλῆ κείσθω ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ ἴσον, διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Ἔστι δέ.

Συν-

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· διελόντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ἐστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Μεῖζον δὲ ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τρίτου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· διελόντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἔστι δὲ, διπλῆ γὰρ ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ

τῶν ΑΒ ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· συνθέντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ τετάρτου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· διελόντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Ἔστι δὲ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστι μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· συνθέντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐστὶ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

Τοῦ πεμπτοῦ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΒΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα

ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BA, οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν $A\Gamma$· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΔA, οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$· διελόντι ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως ἡ $A\Gamma$ πρὸς τὴν ΓB. Ἴση δὲ ἡ $A\Delta$ τῇ $A\Gamma$· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $A\Gamma$ οὕτως ἡ $A\Gamma$ πρὸς τὴν ΓB. Ἔστι δέ, ἡ γὰρ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.

Συνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $A\Gamma$, οὕτως ἡ $A\Gamma$ πρὸς τὴν ΓB. Ἴση δὲ ἡ $A\Gamma$ τῇ $A\Delta$· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως ἡ $A\Gamma$ πρὸς τὴν ΓB· συνθέντι ἄρα ὡς ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΔA, οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν $B\Gamma$· ἀναστρέψαντί τε ὡς ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν BA, οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν $A\Gamma$. Ἴση δὲ ἡ $A\Gamma$ τῇ $A\Delta$· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BA, οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$· ἡ ἄρα AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ AB. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

48.

Ad. Libr. XIII. prop. 13.

Λῆμμα.

Δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $A\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφή, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔB, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετράγωνον τὸ $E\Gamma$, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ZB παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΔAB τρίγωνον τῷ $\Delta A\Gamma$ τριγώνῳ, ἔστιν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως ἡ ΔA πρὸς τὴν $A\Gamma$· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA $A\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $A\Delta$. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ BZ, καὶ ἔστι τὸ μὲν EB τὸ ὑπὸ τῶν BA $A\Gamma$, ἴση γάρ ἐστιν ἡ EA τῇ $A\Gamma$, τὸ δὲ BZ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Gamma$ ΓB.

ὡς ἄρα ἡ *ΑΒ* πρὸς τὴν *ΒΓ*, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν *ΒΑ ΑΓ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΓ ΓΒ*. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν *ΒΑ ΑΓ* ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς *ΑΔ*, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν *ΑΓ ΓΒ* ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς *ΔΓ*, ἡ γὰρ *ΔΓ* κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν *ΑΓ ΓΒ* μέση ἀνάλογόν ἐστι, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ *ΑΔΒ*· ὡς ἄρα ἡ *ΑΒ* πρὸς τὴν *ΒΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΔ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΔΓ*. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Appendix VI.

Lectionum Varietas.

A, Tomi primi.

V. sive Vat. significat Codicem Vaticanum a Peyrardo collatum.
B. sive Bas. editionem Basilcensem, O. sive Ox. Oxoniensem, P. sive Par. Parisiensem Peyrardi.
praeterea ab. = abest, abs. = absunt.

Paginarum numerus in margine, linearum in contextu indicatur.

Ὅροι Definitiones.

ά. 1. *οὐθέν* haec vocis forma (Plutarch. Lyc. 6.) in omnibus exstat exemplaribus Elementorum. — *ή* 8. lin. 2. *ἐπ' εὐθείας* sic rescripsi pro vulgato *ἐπ' εὐθείαις* et Proclo auctore, et secundum postulatum respiciens. Sunt, qui in sequentibus aut *τῶν γραμμῶν* abjici aut articulum *ἡ* post *κειμένων* scribi jubeant. — *θ'.* 9. Verborum ordinem ex Proclo recepi. Editiones Basilcensis, Oxoniensis et Cod. Vindebonensis habent: *αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ.* Parisiensis cum Cod. Vaticano *αἱ περὶ τὴν εἰρημένην γωνίαν γραμμαὶ.* — *ι.* 10. lin. 2. Sic scripsi cum ed. P. et Cod. V. et Proclo. Invertunt verborum ordinem ceterae edd. *ὅρθη ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν.* — Lin. 3. In cod. Vindeb. ab. *ἐστι* et pro *εὐθεῖα* legitur *γραμμή.* — *ιδ'.* 14. Male se habet in ceteris edd. commatis signum *ἐστι, τὸ.* Proclus articulum *τὸ* omisit. — *ιέ.* 15. lin. 4. Peyrardus ex cod. V. septemque aliis scripsit *αἱ προσπίπτουσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν,* quod recte reprehenderunt Delambre et Prony in epistola editioni P. praefixa. Ejecit haec Verba Camererus probante viro eruditissimo, Neydianae operae non indocto aestimatore. Verba *πρὸς τὴν* etc. desunt in omnibus prioribus edd. et apud Procl., qui

p. 1.

p. 2.

etiam non habet ea verba, quae supra leguntur ἢ καλεῖται περιφέρεια (definitio in definitione?) quare de his quoque dubitari potest, num ab Euclide sint adjecta, praesertim cum περιφέρεια in sequentibus (ex. gr. VII. 11, 12.) significet promiscue et totam circumferentiam et partem ejus, nonnunquam etiam κύκλος pro περιφέρεια legatur. (cf. demonstrationem I, 1.) — ιθ'. 19. Hanc definitionem ex Proclo recipiendam esse putavi pro illa, quam omnes libri tueri videntur: Τμῆμα κύκλου etc. quae iisdem verbis circumscripta initio libri sexti iterum legitur, cui tamen, ut ne nihil intersit, Codex V. septemque alii, quos Peyrardus est secutus, haec addiderunt: ἢ μεῖζονος ἢ ἐλάσσονος ἡμικυκλίου. — At Proclus nostram certe in suis manuscriptis reperit definitionem. Exhibitis enim verbis ipsis, explicandi causa haec addidit: Καὶ μὲν δὴ ὅτι τὸ αὐτὸ τοῦ ἡμικυκλίου κέντρον ἐστὶν ὅπερ καὶ τοῦ κύκλου, φανερόν, ἡ γὰρ διάμετρος ἐφ' ἑαυτῆς ἔχουσα τὸ κέντρον συμπληροῖ τὸ ἡμικύκλιον καὶ ἀπὸ τούτου πᾶσαι αἱ πρὸς τὴν περιφέρειαν ἴσαι προσπίπτουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. Ἔν ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ἡμικυκλίου καὶ τοῦ κύκλου. Καὶ ἐπισημαντέον ὅτι μόνον τοῦτο τῶν σχημάτων ἐπὶ τὴν περίμετρον τὸ κέντρον ἔχει, λέγω δὲ τῶν ἐπιπέδων σχημάτων ὥστε συνάγοις ἂν ὅτι τὸ κέντρον τρεῖς ἔχει τόπους (male. B. τρόπους), ἢ γὰρ ἐντὸς τοῦ σχήματος ὥσπερ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἢ ἐπὶ τῆς περιμέτρου ὡς ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου ἢ ἐκτὸς ὡς ἐπὶ τῶν κωνικῶν γραμμῶν (et in minori segmento, adnotante Savilio). Praemisit Euclides initio definitiones non omnes sed eas tantum, quibus ad ea, quae in prioribus duobus libris demonstrantur, uti voluit. Nulla plane mentio facta est in his libris de segmento circuli, sed semicirculus centrumque ejus nota ut sint, problematis ultimi in secundo libro et solutio et argumentatio postulare mihi videntur. Quare Theonis haec esse videtur Euclidearum definitionum permutatio, cujus Elementorum recensio Proclo non satis cognita fuisse videtur. Conf. Append. IV. pag. 304. 305. — κ'. 20. Εὐθύγρ. σχημ. invertunt. Cod. V., ed. B. Vocem γραμμῶν omittit ed. B. — κθ'. 24. lin. 2. B. et O. omittunt articulum τὰς, male, cum tria tantum sint latera trianguli. Rectius omittitur in definitione 25, id quod facere non dubitavi vel contra librorum auctoritatem. — κς'. 26. ἀνίσας. B. O. — κζ'. 27. Ἔτι τὲ (sic) B., in quo vitium typographi patet, quod male emendasse videtur Gregory

scribendo Ἔτι δὲ, repugnantibus codicibus et Proclo. — Lin. 2. μίαν ex Proclo recepi. — κθ'. 29. Articulus τὰς omittitur in edd. O. et B. (cf. def. 24.) — λε'. 35. Παράλλ. εὐθ. εἰσ. sic scripsi secundum Proclum rectius. Ceterae editiones invertunt: Παρ. εἰσ. εὐθ. — Lin. 2. ἐπ' ἄπειρον. B. O. p. 3.

Postulata. Αἰτήματα (πέντε addit. Cod. Vindeb.)

ά. 1. Αἰτήσθω. Cod. Vind. pro Ἠτήσθω. — β'. 2. lin. 2. Vulgo ἐκβάλλειν. Nos Proclum secuti sumus. Aoristi infinitivorum vim in postulatis et problematis ignorant, qui lectionem vulgatam praeferunt. — γ'. 3. Vulgo γράφεσθαι. Nos eadem de causa Proclum secuti sumus. — δ'. 4. Hoc postulatum in edd. B. et O. locum decimum inter communes notiones retinet, hisque verbis expressum est. Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Eaedem editiones subsequens postulatum, inter locos communes receperunt (undecimo loco) Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Nihilo minus Gregorius in margine adscripsit: „In quibusdam codicibus Axiomata X et XI. inter postulata numerantur.“ Cum vero hoc in omnibus, quos Peyrardus inspexit, codicibus factum esse videamus, cumque ipse Proclus, quamquam invitus, codicem suum secutus, ut paulo post videbimus, eundem ei tribuerit locum, non dubium est, quin Parisiensem editionem secuti, quod etiam Camererum fecisse videmus, debitum illi axiomati vindicaverimus locum. — έ. 5. εὐθεῖά τις. ed. P. ex Cod. V., qui tamen initio propositionis 28. hunc articulum non habet. — Lin. 4. ἀλλήλαις post συμπίπτειν cum Proclo omisi, praepositione συμ — rem satis lucide indicante. Hoc enunciatum, quin postulatis adjungendum sit nemo dubitabit, qui duplicem postulandi vim cognoverit, scilicet, ut aliquid sine institutione efficiatur, et ut aliquid per se intelligatur. Hanc apud antiquos fuisse αἰτημάτων naturam ex ipso Archimede docemur, qui scribit: Αἰτούμεθα τὰ ἴσα βάρη ἀπὸ τῶν ἴσων μηκῶν ἰσορροπεῖν. — Euclidem vero ab Archimede in hac re non dissensisse omnes fere indicant codices nostrum ordinem exhibentes; sin et ita dubitas, ipsius Procli dubitatio, quid Euclides scripserit, optime prodet. Ille enim: Τοῦτο καὶ παντελῶς διαγράφειν χρῆ τῶν αἰτημάτων, θεώρημα γὰρ ἔστι etc. — Hoc rectius de quarto postulato dici

potuit. Facile enim demonstrari potuit angulum, angulo ipsi deinceps aequalem, cuilibet alii angulo ipsi deinceps aequali, esse aequalem. Euclides autem, cum videret, parallelarum theoriam absolvi non posse, nisi praemitteretur hypothesis, demonstratione quidem non probanda sed facile tamen ab omnibus concessa, quintumque quod habemus postulatum ad hoc maxime idoneum esse, intelligeret, facere non potuit, quin illud quartum injungeret. Quo omisso verba *δύο ὀρθων ἐλάσσονες* intelligi non poterant. Quintum igitur qui postulare vult, quartum antea postulet necesse est. — Praeterea Proclum hoc enunciatum postulatis adjungit alio loco (ad I, 27.) — *ϛ'*. 6. *Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.* Sic scribunt, qui *ταῖς κοιναῖς ἐννοίαις* haec verba addunt: Inter quos est Grynaeus, Gregory, Proclus et multi Librorum manuscriptorum auctores. (Cod. Vindeb.)

Notiones communes (*Κοιναὶ ἔννοιαι*).

γ'. 3. Proclus et Scholiast. (ad XII. *γ*.) *τὰ λοιπὰ ἴσα ἐστιν.* *δ'*. 9. V. *εἶναι* pro *ἐστιν.* p. 4.

Propositiones (*Προτάσεις*).

Lin. 10. *εὐθεῖα* ab. B. O. — Lin. 12. *πεπερασμένης* ab. B. O. — Lin. 20. *Ἐπειδὴ* sic Proclus. *Καὶ ἐπεὶ* Peyr. ex Cod. V.: *Ἐπεὶ* B. *Επεὶ οὖν* O. — Lin. 29. *συνέσταται.* Sic rescripsi omnibus locis pro vulgato *συνίσταται.* Perfecti forma semper utitur Euclides in fine problematum et hujus verbi formam reperimus in Cod. V. prop. 22. et prop. 42. hujus libri et prop. 26. libri noni. Proclus in circumscriptione hujus conclusionis habet *συνέστη.* — Lin. 31. Alterum *συμπέρασμα* (*τὸ καθόλου*) ex Proclo depromsi. — Lin. 6. *δοθείσῃ* ab. B. O. — Lin. 13. *ὁ* ab. O. — *Δ μὲν, διαστήματι δὲ.* B. O. Cod. Vind. — Lin. 16. *Καὶ πάλιν* Cod. V. Vind. ed. B. — Lin. 32. *Κείσθω γὰρ.* P. ex Cod. V. — Lin. 10. p. 6. *ταῖς* ab. Cod. V. — Lin. 32. *σημεῖον.* ab. B. O. — Lin. 9. *ἐστὶν* p. 7. ab. B. O. — Lin. 7. *ΑΓ πλευρᾷ τῇ ΑΒ* O. — Lin. 8. *ΑΓ τῇ* p. 9. *ΑΒ* O. — Lin. 16. *Καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγ. τῷ ΔΓΒ τῷ ἐλάσσονι τὸ μεῖζον.* B. O. — Lin. 30. *αἱ* ab. Cod. V. — Lin. 33. Verba *ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθ.* quae desunt in Cod. V., post *ΑΒ* scripta in ceteris editionibus hunc locum ut obtineant similium locorum ratio postulat. — Lin. 3. Peyrardus, ut omnes hujus theorematis casus ab- p. 10.

solveret addidit καὶ αἱ *B Γ BΔ* ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ *E Z* et figuris in hunc finem conscriptis congruenter litterarum signa in sequentibus permutavit. At Euclides non anxie omnes respexit casus, ut ex prop. 35. intelligimus. Praeterea ex Procli commentario perspicuum est, Euclidem varios theorematis casus neglexisse; quos ipse Proclus se addere indicat. — lin. 23. τὰς abest Cod. V. — Lin. 3. ἐφαρμόσουσι futurum restitui. Vulgo p. 11. ἐφαρμόζουσι (sed conf. lin. 8.). — lin. 9. αἱ ab. Cod. V. — lin. 20. δίχα. Procl. (p. 23.) δίχα εἰς ἴσα. — lin. 19. γων. εὐθ. invertunt ceteri editores. Nos cum Proclo. — lin. 23. Εἰλήφθω γὰρ. P. ex Cod. V. — Lin. 6. δίχα εἰς ἴσα. Procl. 23. — lin. 8. p. 12. εὐθεῖαν πεπερ. ab. B. O. — lin. 25. ἐπ αὐτῆ B. Legendum fortasse πρὸς αὐτῇ. — Lin. 8. ὀρθὴ ἐστὶν ἑκ. τ. ἴσ. γ. B. O. — lin. 12. p. 13. γραμμὴ ἥκτ. εὐθ. B. O. — lin. 25. 26. εὐθεῖα et εὐθεῖαι Peyr. recepit ex Cod. V. — Lin. 2. ὀρθὴ ἐστιν ἑκατ. etc. B. O. — lin. p. 14. 10. Retinenda videtur lectio editionum B. et O., quam Proclus (pag. 78.) tuetur, Ὡς ἂν (V. et inde edit. Paris. Ἐὰν.) Nam εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα semper angulos efficit, ideoque dici non potest: si talis linea angulos efficit etc., sed dicendum est potius, *Qualescunque* angulos efficit, duobus illi rectis semper aequales sunt. — lin. 15. ἢ δύο B. O. — lin. 19. εὐθεῖα ab. B. O. — lin. 25. γωνίαι αἱ abs. haec verba in Cod. V. et P. — Lin. 6. p. 15. et 11. ἐξῆς. Hanc vocem ex Proclo recepi, qui eam ab Euclide additam esse demonstrat, ἐπειδὴ καὶ πρὸς τῷ αὐτῷ τῆς εὐθείας σημείῳ τὰς ἀγομένας εἶναι δυνατὸν ἦν, καὶ μὴ εἶναι ἐφεξῆς· μυρίας γὰρ εὐθείας πρὸς ἑνὶ σημείῳ λαβεῖν ἐνδέχεται. Mihi quidem Euclides definitione quid sint γωνίαι ἐφεξῆς nulla praemissa tale quid hoc loco addere debuisse videtur. Conjungas ἐξῆς κείμεναι, u. e. lineam lineae adnexam esse intelligatur. — lin. 25. οὐ δὲ B. — Lin. 19. Nullum extabat Porisma in altero codice Grynaei, at in p. 16. altero addita fuisse haec ipse testatur. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν ὅτι καὶ ἐὰν ὁσαισηποτοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι. Hoc receptum videmus in ed. O., praetermissum in ed. P., quod Peyrardus haec verba in Cod. V. inter lineas exarata invenerat. Nos duo exhibuimus Corollaria, quorum alterum Euclidis fuisse Proclus testatur, alterum ex illo proficisci demonstrat. — Lin. 30. ἐκβληθείσης

B. et O. in thesi sed non ita in conclusione. — Lin. 5. ἐπ' εὐθείας omissum est in O. B. — Lin. 33. καὶ ἐπ' ἐναντίον. B. — Lin. 4. Ὁμοίως δὴ Cod. V. ed. P. — Lin. 13. γὰρ ab. B. O. — lin. 19. ἐπ' ἐναντίον. B. — lin. 27. μενοῦν P. — Lin. 2. et 4. ἂν ἢ B. ἂν ᾖ O. — lin. 21. ἀλλ' ἢ ὑπὸ . . . . μείζων ἐστί haec omisit ed. P. cum Cod. V. — lin. 27. ἴση δὲ ἡ ΔΒ ταῖς ΒΛ ΛΓ. Pro his ed. P. ex Cod. V. scripsit: ἴση δὲ ΔΛ τῇ ΛΓ. B. habet utrumque. Nos Oxoniensem secuti sumus. — Lin. 20. ἐλάττονες B. — lin. 28. Διὰ ταῦτα τοίνυν P. ex Cod. V. — Διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα B. O. — lin. 34. δύο αἱ εὐθεῖαι B. O. — Lin. 3. ἐλάττονες B. — lin. 7. εὐθείαις ab. Cod. V. — lin. 8. δὲ scripsi pro δὴ Procli auctoritatem secutus; verbum δὴ in argumentando *porro* significat. Hoc loco autem conditio aliqua (διορισμὸς) additur, ad quam particula δὲ optime pertinet, — lin. 8. B. Cod. V. P. addunt: διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι παντῇ μεταλαμβανομένας. Proclus haec verba non habet; sed in fine theorematis explicationum adscripta ab ipso haecce legimus: ἐπεὶ καὶ τῶν τριῶν εὐθειῶν ὑπέθετο τὰς δύο μείζους τῆς λοιπῆς παντῇ μεταλαμβανομένας καὶ οὔτε ἴσας οὔτε ἐλάττους τὰς δύο τῆς λοιπῆς. — lin. 17. κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, καὶ διαστήματι τῷ ΖΔ Cod. V. — lin. 18. κέντρῳ τῷ Η, καὶ διαστήματι τῷ ΗΘ idem. — lin. 19. καὶ τεμνέτωσαν . . τὸ κ. haec verba ex Proclo addenda existimavi; qui diligentissimus Elementorum commentator singula fere verba Euclidis secutus ita scripsit: Καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Η διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ Λ· καὶ τεμνέτωσαν ἀλλήλους οἱ κύκλοι. Τοῦτο γὰρ ἔλαχεν (ἔλαβεν?) ὁ στοιχειωτής. Πόθεν οὖν τοῦτο; φησί τις· μή πότε γὰρ ἢ ἐφάπτονται μόνον ἀλλήλων ἢ οὐδέ ἐφάπτονται. Τῶν γὰρ τριῶν ἔν τι πάσχειν αὐτοὺς ἀναγκαῖον, ἢ τέμνειν ἀλλήλους, ἢ ἐφάπτεσθαι, ἢ διεστάναι ἀπ' ἀλλήλων. Λέγω δὴ οὖν ὅτι καὶ τέμνουσιν ἐξ ἀνάγκης ἀλλήλους. Ἐφαπτέσθωσαν γὰρ πρότερον. Ἐπεὶ τοίνυν τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ Κ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΖΝ καὶ ἐπεὶ τὸ Η κέντρον ἐστὶ τοῦ Λ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΘΗ τῇ ΗΝ. Δύο δὴ αἱ ΔΖ ΗΘ ἴσαι μιᾷ τῇ ΖΗ. Ἔκειντο δὲ μείζους αὐτῆς ὥσπερ καὶ ἡ Α μεσὴ τῆς Γ τῆς Β μείζων, ἴσαι γὰρ ἐκείναις. Ἡλίκη, εἰ δύνατον, διεστάτωσαν ἀλλήλων οἱ κύκλοι ὡς οἱ Κ Λ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ τοῦ Κ κέντρον, ἴση ἡ ΔΖ τῇ ΖΝ· καὶ ἐπεὶ τὸ Η τοῦ Λ κέντρον, ἡ ΘΗ ἴση

p. 17 p. 18 p. 19 p. 20 p. 21

τῇ *ΗΜ*. *Μείζων ἄρα ὅλη ἡ ΖΗ τῶν ΔΖ ΘΗ, ὑπερέχει γὰρ ἡ ΖΗ τῇ ΝΜ τῶν ΔΖ ΗΘ. Ἔκειτο δὲ τὰς ΔΖ ΘΗ μείζους εἶναι τῆς ΖΗ, ὥςπερ καὶ τὰς Α Γ τῆς Β, ἴση γὰρ ἡ μὲν ΔΖ τῇ Α, ἡ δὲ ΜΗ τῇ Β, ἡ δὲ ΘΗ τῇ Γ. Ἀνάγκη ἄρα τοὺς Κ Λ κύκλους τέμνειν ἀλλήλους· ὥστε ὁ στοιχειωτὴς ὀρθῶς τέμνοντας ἔλαβεν ἀλλήλους τοὺς κύκλους.* — lin. 22. *συνέσταται* sic recte P. ex Cod. V. recepit. B. et. O. *συνέστηκε*. Conf. ad Pag. 4. lin. 29. — lin. 24. *οὖν* recepit P. ex Cod. V. B. et O. habent. *γὰρ*. — Lin. 4. Scribendum est: *συνέσταται*. — lin. 7. *εὐθυγρ. γων.* scripsi pro *γων. εὐθυγρ.* Proclum secutus. — lin. 22. *αἱ δύο αἱ* B. O. — lin. 28. Scribendum est: *συνέσταται*. — Lin. 8. *τῆς* omittunt. B. O. Totum locum sic expressit Cod. V. *ἡ δὲ πρὸς τῷ Α γωνία τῆς π. τ. Δ γωνίας μείζων ἔστω*. — lin. 10. *ἐστιν* ab. Cod. V. — *ἡ ὑπὸ τῆς ΒΑΓ* B. — lin. 20. *γωνία τῇ* P. Cod. V. — lin. 25. *καὶ* ab. O. — Lin. 3. *ταῖς* ab. Cod. V. — lin. 5. *βάσιν δὲ* B. O. — *ἔχῃ* ab. Cod. V. — lin. 15. *γωνία* ab. P. V. — lin. 16. *ἂν ᾖ* B. O. — lin. 17. *γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ*. P. V. — lin. 17. *ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ*. — lin. 22. *γωνία* ab. P. V. — lin. 29. *ταῖς* ab. V. — lin. 31. *ἔχῃ δὲ* ex Proclo receptum. — Lin. 3. *ἴσην* ex Proclo receptum est, qui etiam *ἕξει* addidit. — lin. 4. *Ἔστωσαν* B. O. Saepius, si verbum antecedit Nominativum gen. neutr., Pluralis adhibetur in Elementis, cujus rei, nisi scribarum negligentiam accusas, causam vix reperies. — lin. 15. *ἔσται* pro *ἔστιν*. B. O. — lin. 22. P. V. *ἐστὶν*. — lin. 23. *ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ* B. O. — lin. 33. *τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ* P. V. — Lin. 4. pro *τῇ λ. γωνίᾳ* B. et O. tantummodo *λοιπῇ* habent. — lin. 5. *ἔσται* rescripsi pro vulgato *ἐστὶν*. — lin. 6. *ἡ* ab. O. — lin. 7. *Ἔστω, εἰ δυνατὸν, μείζων ἡ ΒΓ*. B. O. — *ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ*. P. V. — lin. 13. *ἔσται* rescripsi pro *ἐστὶν*. — lin. 14. *ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ*. — lin. 17. *ὑπὸ ΒΓΑ γωνίᾳ* B. O. — lin. 18. *ἐστὶν ἴση*. B O. — deest in P. cum ceteris inde a verbo *καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΑ*; scilicet quae in Cod. V. in margine tantummodo erant descripta. — lin. 25. *ἴσον, καὶ λοιπὴ*. P. V. — lin. 26. *ἴση ἐστὶν*. B. O. — Lin. 9. *ΓΔ εὐθείᾳ* B. O. — lin. 15. *ἴση ἐστὶ τῇ . . . . τῇ ὑπὸ ΕΖΗ*. Sic P. recepit ex Cod. V., idem in margine ed. B. ex codice altero; sed B. et O. habent *μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΖΗ, ἀλλὰ καὶ ἴση*. — lin. 29. *ποιῇ* post *ἴσας* abjeci cum Proclo et Cod. V. —

p. 22.

p. 23.

p. 24.

p. 25.

p. 26.

p. 27

lin. 32. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη haec recepi ex B. quae repetuntur etiam in propos. 29. — Lin. 17. καὶ ἐπὶ τ. α, μ, desunt in Cod. V. — lin. 28. τε ab. Cod. V. — lin. 21. καὶ ἐπὶ τ. α. μ. ab. Cod. V. — Lin. 2. καὶ ἐπεὶ . . . ἡ ὑπὸ ΑΗΘ haec verba exciderunt in Cod. V.; quamobrem omissa sunt in P. — lin. 5. καὶ ab. V. P. — lin. 6. καὶ αἱ ἄρα B. O. — lin. 32. τὰς παραλλήλους B. O. P. — δύο εὐθείας Cod. V. — Lin. 5. Αἱ ἄρα . . . . ἴδει δεῖξαι desunt in Cod. V. — lin. 7. σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς. Cod. V. Haec Proclum certe non legisse ex ipsius verbis intelligimus, sic argumentantis: Οὐ γὰρ ἐπειδὴ εἴρηται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, καὶ ἐπ' αὐτῆς αὐτὸ τῆς εὐθείας δώσομεν etc. — lin. 20. ἐμπίπτουσα. V. P. — Lin. 2. ταῖς δυσὶ. B. O. P. — lin. 15. ἐκτὸς ab. V. — lin. 28. αὗται Procl. et Schol. — lin. 32. τε ab. B. O. — Lin. 2. γὰρ ab. V. — lin. 8. ἐστὶν ab. V. — lin. 11. ἴσαι ἔσονται V. O. P. — lin. 14. ἐμπεσοῦσα sic scripsi ex conjectura pro vulgato ἐμπίπτουσα. Cf. prop. 31. — lin. 15. τὰς ὑπὸ ΑΓΒ ΓΒΔ ab. V. — lin. 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι in fine addendum est. — lin. 26. χωρίον ab. B. O. — Lin. 3. δὴ ab. B. — lin. 6. τῇ μιᾷ πλ. B. O. — lin. 11. καὶ ἔτι ἴση ἐστὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. V. P. — γωνία ab. B. O. P., pro γωνίᾳ P. habet γωνία. — lin. 14. ἐστὶν ἴση. V. P. — lin. 18. δὲ, quod ab. in Cod. V., mutandum videtur in δὴ. — lin. 22. ἴση, καὶ βάσις ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ ἴση, καὶ τὸ etc. V. — lin. 23. ἄρα post ΑΒΓ ejecimus. — lin. 29. ὄντα ab. V. — lin. 34. παραλληλόγραμμον ab. in O. B. P. V. — τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ V. — Lin. 3. τῇ ΒΓ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ. — lin. 4. 8. 13. ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 11. ἴσον ἔσται. — lin. 20. Articulum τῶν ante ἴσων abjeci cum Procl. et V. — lin. 28. καὶ ab. V. P. — lin. 31. τε ab. V. — Lin. 6. ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 12. ὄντα ab. V. — lin. 19. Ε Ζ σημεῖα B. O. — lin. 20. καί εἰσιν ἴσαι· ἐπί τε γὰρ etc. V. O. — lin. 24. ἐστι τῆς etc. B. O. — Lin. 3. ἐπὶ τῶν ἴσων edd. omn. Nos Proclum secuti articulum abjecimus. — lin. 11. κατὰ τὰ Η. Θ. Cod. V. — lin. 19. δίχα αὐτὸ τέμνει. B. O. — lin. 24. ἐπὶ τῆς αὐτῆς falso. B. O. — lin. 29. ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη in altero codice abfuisse adnotat B. — de quibus tamen Proclus haec scripsit: εἰκότως ὁ στοιχειωτὴς προσέθηκεν τὸ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. etc. — καὶ ἐν ταῖς V. P. — lin. 31. τριγ. ἴσ. B. O. — lin. 32. μέρη τῆς ΒΓ. V. — lin. 33. λέγω καὶ ὅτι V. — Lin. 6.

p. 28. p. 29. p. 30. p. 31. p. 32. p. 33. p. 34. p. 35. p. 36. p. 37

Ἴσον δή. V. quod recipiendum puto. — lin. 8. *ταῖς ΒΓ ΑΕ* ab. V. — lin. 9. *τρίγωνον* ab. B. O. — lin. 11. *ἐστίν* ab. B. O. — lin. 16. *ὄντα καὶ ἐν ταῖς* etc. B. — lin. 19. Articulum *τῶν* ante *ἴσων* cum V. et Procl. rejeci. — lin. 20. *καὶ ἐν ταῖς.* B. V. P. Nostra tuentur O. et Procl. — *καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη* in altero Codice abfuisse, notatur B. — lin. 20. *τρίγ. ἴσ.* B. O. — lin. 21. *καὶ ἐπὶ τ. α. μ.* desunt. B. V. — lin. 22. *καὶ* ab. O. — lin. 27. *ἴσον δή ἐστι* V. cf. 39. — lin. 30. *τριγώνῳ* et — lin. 31. *τρίγωνον* abs. Cod. V. — lin. 32. *ἐστίν* ab. B. O. — Lin. 4. *παράλλ. ἐστ.* B. O. p. 38. — lin. 5. *τῶν* ante *ἴσων* abjeci. — lin. 6. *καὶ ἐν ταῖς αὐτ. παρ.* (abjectis verbis *ἐπὶ τ. α. μ.*) B. — lin. 9. *βάσιν τὴν αὐτήν ἔχῃ.* Schol. — lin. 11. *ἔσται* Schol. B. O. — lin. 15. *ἔστω παραλλήλοις* B. O. — lin. 19. *τρίγωνον* ab. B. O. — lin. 32. *ἐν γωνίᾳ.... εὐθυγρ. γωνίᾳ*, sic scripsi, suadente Gregorio in margine ed. O. pro vulgato *ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ* (*εὐθ. γων.* B. O.). Conf. theor. 44. — Lin. 3. *γωνία εὐθύγραμμος* V. — *ἡ* ab. O. p. 39. incuria typothetae. — lin. 5. *ἐν γωνίᾳ, ἤ. ε. ι.* a nobis inseruntur; pro hisce nihil habet Cod. V., unicum verbum *ἴσῃ* B. O. (Vide supra.) — lin. 16. *τρίγωνον* ab. B. O. — lin. 23. B. O. *συνεστάθη.* Cf. ad 1. — lin. 24. *ἥτις ἐστὶν* V. P. — Lin. 4. *ἐπεὶ τὸ ΕΚΘΛ* p. 40. *παρ. ἐστ.* B. O. — lin. 5. *αὐτοῦ ἐστιν ἡ* V. P. — lin. 6. *ἴσον ἄρα ἐστὶ* V. O. — lin. 7. *τριγώνῳ* ab. B. O. — lin. 12. *λοιπῷ ἄρα τῷ ΚΛ παραπληρώματι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΚ παραπλήρωμα.* B. O. Nos V. et P. secuti emendavimus *ΗΚ* in *ΔΚ* et invertimus *ἐστ. ἴσ.* — lin. 20. *γωνίᾳ ἡ ἐστιν ἴση* haec ex Proclo recipienda existimavi. — lin. 30. *ὥςπερ ἐπ'* B. O. — lin. 34. *ἐμπέπτωκεν ἡ ΘΖ.* B. O. — *αἱ ὑπὸ ΑΘΖ ἄρα.* V. P. — Lin. 2. *εἰσ. ἴσ.* V. P. — lin. 11. *τὴν* p. 41. ab. B. O. — lin. 13. *τὰ* ab. B. O. — lin. 14. *Ἀλλὰ καὶ τὸ* B. O. — lin. 15. *καὶ ἐπεὶ ἴση* etc. sic omn. edd. Nos conjunctionem *ἐπεὶ* abjiciendam duximus. — lin. 17. *ἄρα* ab. B. O. legitur post *ΑΒΜ* in V. et P. — lin. 22. *ἔδει δεῖξαι* B. — lin. 26. *εὐθυγρ. γων.* B. O. — lin. 27. *μὲν* ab. B. O. — lin. 30. *ἐν ἴσῃ γωνίᾳ.* B. O. — lin. 33. *ἴσ. ἐστ.* V. P. — Lin. 5. *ἡ ἄρα ὑπὸ ΘΚΖ* O. De- p. 42. siderantur haec verba in B. — lin. 6. *ἐστ. ἴσ.* — lin. 15. *εὐθείας* V. — lin. 20. *ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ.* V. — lin. 24. *αἱ ΚΜ ΖΛ ἄρα* ita scribendum. — lin. 29. *ἐστ. ἴσ.* V. P. — lin. 31. *συνέσταται* cf. ad 1. — lin. 32. *ἴσῃ δοθείσῃ* B. — Lin. 13. *Ἀλλὰ ἡ ΑΒ.* V. P. p. 43

— lin. 16. *Λέγω δὴ* restituendum est cum B. O. — Lin. 3. *γω-* p. 44
νίαν ab. B. O. — lin. 11. *εὐθείᾳ* ab. B. O. — lin. 19. *καὶ ἐπεὶ ἴση . . . αἱ ΔΒ ΒΛ*, pro his, quae ex V. in ed. P. recepta sunt, B. et O.: *καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΒ ΒΛ.* — lin. 22. et 23. *ἐστίν* ab. V. P. — lin. 24. *καὶ τοῦ μὲν.* V. — lin. 30. *εἰοὶ παραλλήλοις* V. P. — Lin. 5. *τετράγωνον ΒΕ.* O. — lin. 9. *γωνίαν* ab. B. — lin. 21. p. 45
τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΑΔ. — Lin. 3. *ΒΓ ἐστιν ἴση.* — p. 46
lin. 4. *ἐστὶν ἴση* B. O., *ἴση* sine copula V. P. — Lin. 8. *ἓν παρ-* p. 47
αλληλογράμμων. B. O. — lin. 15. *τοῖς τε ὑπὸ τῆς* V. P. — lin. 21. *τῷ ὑπὸ τε* B. O. — lin. 24. *μὲν* ab. B. O. — Lin. 5. *τῶν* ab. p. 48
B. O. — lin. 7. 8. 9. Cod. V. habet *τῷ ὑπὸ* ante *τὸ ὑπὸ*, cui semel tantum (lin. 8.) consentit ed. B. — lin. 16. *τῶν* ab. B. O. — lin. 19. *τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης . . . περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον.* V. — lin. 25. *τῶν* ab. V. — lin. 27. *γὰρ* ab. B. — lin. 31. *Ἴσον δὴ τὸ* B. O. — Lin. 8. *ὡς ἔτυχε τμηθῇ.* B. O. — lin. 15. *σημεῖον* ab. p. 49
V. P. — lin. 18. *τῆς* ab. O. — lin. 20. *καὶ ἦχθω ἡ ΕΔ* B. O. — lin. 26. *ΑΔ ὑπὸ τῶν* O. — Lin. 13. *ἡ ΓΗΖ* addi vult Gregor. p. 50
in O.: *τέμνουσα τὴν ΒΛ κατὰ τὸ Η σημεῖον.* — lin. 22. *ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ.* V. P. — lin. 26. *παὶ εἰς αὐτὰς ἐνέπεσεν ἡ ΓΒ.* in Cod. V. ad marginem tantummodo correctoris manu adscripta sunt. — lin. 28. *ἴσ. εἰσ.* B. O. — lin. 33. *τοῦτ' ἔστιν τῆς ΑΓ.* V. — Lin. p. 51
2. *ἐστί.* Omn. edd. habent *εἰσί.* — lin. 4. *τῶν* ab. V. — lin. 10. *τέσσαρα* ab. B. O. — lin. 11. *ἐστιν ἀπὸ τῆς.* V. — lin. 18. *φανερόν ἐστιν.* edd. omn. — Lin. 4. *ἡ* ab. V. P. — *πάλιν* hoc loco p. 52
deest, sed post *ἦχθω* legitur B. O. — lin. 9. *ἴσ. ἐστ.* B. O. — lin. 11. *τὸ ΑΘ τῷ ΔΖ καὶ ΑΛ ἴσον* B. O. — lin. 12. *Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ.* B. O. P. Nos V. secuti sumus. — *ΑΘ τῷ ὑπὸ . . . ἴσον ἐστίν.* B. — lin. 13. *ἴση ἡ γὰρ.* V. — Post *ΑΒ.* B. et O. addunt: *τὸ δὲ ΖΔ ΑΛ ἐστὶν ὁ ΝΞΟ γνώμων.* — lin. 32. Post *προσκειμένης* omisi verba *ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι*, quae in omnib. edd. reperiuntur, in Cod. V. recentiori manu inter lineas adscripta sunt. Non adsunt ea etiam in repetitione hujus theorematis in edd. B. et O. — Lin. 11. *ἐστιν* ab. B. O. — lin. 12. *Ἀλλὰ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΘΖ.* p. 53
B. O. *Ἀλλὰ τὸ ΓΘ ἄρα τῷ ΘΖ.* V. P. — lin. 13. *ἐστ. ἴσ.* V. P. — lin. 17. *ἄρα* ab. B. — lin. 18. *ὀρθογ.* ab. V. — Lin. 9. *καὶ* p. 54
ἐπεὶ ἴσον. B. O. — lin. 11. *ἐστ. ἴσ.* B. O. — lin. 24. *τῷ τε δὶς* B. O. — lin. 32. *ἀπὸ τοῦ* desiderantur O. — Lin. 7. *καὶ* a me p. 55.

adjectum est. — lin. 10. ἴση τῇ *ΓΒ* ἡ *ΒΔ*. V. P. — lin. 15. ἄρα ab. B. O. — lin. 16. μὲν ab. V. — lin. 17. ἐστὶ καὶ τὸ *ΓΚ*. V. ἐστὶ καὶ τὸ μὲν *ΓΚ*. P. — lin. 19. ἴσον ἐστ. Sic V.; invertunt edd. omn. ἐστ. ἴσ. — lin. 20. Ad haec verba in margine editionis B. scripta haecce reperio „Variat hic exemplar alterum, sed frustra." ἐστ. ἴσ. B. O. — lin. 24. ἐστὶν ab. V. — lin. 27. μὲν ab. V. — lin. 32. ἐστ. τετρ. B. O. — lin. 35. τοῦ *ΑΚ* ἔστι. B. O. — Lin. 2. p. 56. 3. 6. 8. pro *ΒΓ* edd. omn. *ΒΔ*. — lin. 2. καὶ ab. V. P. — lin. 6. 10. γνώμωνι B. — lin. 9. τῆς ab. V. — lin. 12. Post *ΑΔ* in Cod. V. leguntur haecce: τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν *ΑΒ ΒΔ* μετὰ τοῦ ἀπὸ (τῆς) *ΑΓ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ (τῆς) *ΑΔ* τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ *ΒΔ* τῇ *ΒΓ*· τὸ ἄρα etc. Quae in ed. P. recepta sunt adjectis articulis, quos uncis inclusi. — lin. 14. ἀπὸ *ΑΓ*. V. — lin. 33. παραλλ. ἤχθ. abs. V. — Lin. 5. καὶ εἰσ. ἴσ. desunt B. O. — lin. 12. p. 57. ἐστὶν ab. V. — lin. 13. πλευρᾷ ab. V. — lin. 15. πάλιν ἔστι B. O. — lin. 20. ἀπὸ *ΑΓ* τῷ ἀπὸ *ΓΕ*. V. — lin. 22. 25. ἀπὸ *ΑΓ*. V. — lin. 26. ἐστ. ἴσ. V. — lin. 29. *ΕΖ* τετράγωνον V. P. — lin. 30. τῆς *ΕΖ* διπλάσιόν. V. P. — lin. 31. Pro verbis Ἴση δὲ ἡ *ΗΖ* τῇ *ΓΔ*. V. et P. habent Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΖ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπό τῆς *ΓΔ*. — Lin. 3. ἐστιν ab. B. O. — lin. 20. προσκειμένης ὡς ἀπὸ p. 58. μιᾶς ἀναγραφέντος (V. ἀναγραφέντι) B. O. P. — lin. 30. *ΓΕ* παλὶν παράλλ. V. P. — Lin. 6. ἐστιν ab. V. — lin. 8. ὀρθῆς ἐστιν p. 59. B. O. — lin. 12. ἡμίσειά ἐστι . . . . . ὑπὸ *ΔΗΒ* desunt V. P. — lin. 20. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ *ΕΓ* τετράγωνον. V. — lin. 27. *ΗΖ* τετράγωνον B. O. — lin. 28. *ΖΕ* τετραγώνῳ B. O. — lin. 30. τετράγ. ab. V. — lin. 31. ἡ ab. P. — Lin. 6. *ΑΔ ΔΗ* τετράγωνα p. 60. B. O. — lin. 7. *ΑΓ ΓΔ* τετραγώνων. B. O. — lin. 28. ἴσον ποιεῖν V. P. ἴσον ἐστὶ B. — Lin. 2. τετραγώνῳ ab. V. — lin. 7. ὀρθογ. p. 61. ab. V. — lin. 12. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν *ΖΘ* τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΘ*, τὸ δὲ *ΘΔ* τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ ΒΘ*· τὸ ἄρα ὑπὸ etc. V. P. — lin. 15. τῆς ab. V. — lin. 19. ἴσον ποιεῖν. V. — lin. 25. γωνίαν ab. B. — lin. 28. ἐκβληθεῖσαν ab. V. — lin. 29. προσλαμβ. hanc verbi formam huic loco aptissimam in nonnullis codicibus exstitisse hoc loco legitur in margine ed. B. Edd. omnes: ἀπολαμβανομένης. — lin. 32. γωνίαν ab. V. — Lin. 10. περιεχ. ὀρθ. abs. V. — lin. 12. τὸ *Δ* p. 62. male B. O. — lin. 13. ἐστι ab. V. P. — lin. 14. τετραγ. ab. B. O. — lin. 34. τῆς ab. V. — Lin. 12. 13. ἐστι ab. V. — lin. 15. p. 63.

τῶν ab. V. B. — lin. 16. τὸ ab. O. — lin. 26. γὰρ ab. B. O. — lin. 29. συνίστανται edd. omn. — lin. 33. μὲν ab. V. — Lin. 12. p. 64.
τῆς ab. V. — *ΗΕ* ἴσα B. O. — lin. 16. *ΕΖ* τὸ ὑπὸ τῶν *ΒΕ ΕΔ* V. — ἡ ab. P. — lin. 19. καὶ τὸ *Δ* V. P. — lin. 22. συνίστανται, edd. omn. — Lin. 4. εἰσ. ἴσ. B. O. — lin. 8. τὸν κύκλον ἐπὶ μη- p. 65.
δέτερα μέρη. V. P. — lin. 11. ἀπὸ ab. B. O. — lin. 22. ᾗ ἐστι. V. — Lin. 3. κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ κύκλου σταθῇ ἡ γωνία. B. O. — p. 66.
lin. 12. Διήχθω τις B. O. — lin. 16. κύκλον ab. V. — lin. 19. δύο δὲ O. — lin. 20. ἐστ. ἴσ. B. O. — ἐκ κέντρου γὰρ τοῦ *Η*. B. O. P. Nos Cod. V. secuti ultima abjecimus. — lin. 21. ἐστ. ἴσ. B. O. — lin. 25. ἴσων ab. Cod. V. — lin. 27. ἡ μείζων τῇ ἐλάττονι B. O. — lin. 32. Verba ὅπερ ἔδ. ποιῆσ. in V. et B. post sub- sequens corollar. scripta sunt. — Lin. 4. τις εὐθεῖα εὐθεῖαν B. p. 67.
O. — lin. 8. τὰ αὐτὰ σημεῖα, B. O. P. Nos cum Cod. V. — lin. 12. τυχόντ. δύο B. O. — lin. 18. ἡ *ΔΖ* ἐπὶ τὸ *Η*. B. O. — lin. 30. ἐντὸς ἄρα πεσεῖται V. P. — lin. 32. τὰ αὐτὰ σημ. O. — Lin. 5. 7. τεμεῖ O. — lin. 15. δύο δυοὶν ἴσαι, καὶ. V. — lin. 16. p. 68.
ἴση, καὶ γωνία ἡ B. O. — lin. 19. 20. ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τ. ἴσ. γ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ *ΑΖΕ ΒΖΕ* ὀρθ. ἐστ. B. O. — lin. 21. οὖσα ab. O. — lin. 22. αὐτὴν ab. V. — lin. 23. καὶ ab. V. — lin. 27. ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ *ΕΔ*. B. O. — lin. 29. ἄρα ab. Cod. V. — Lin. 10. σημεῖον ab. V. B. O. — lin. 17. κέντρου ἠγμένην p. 69.
τὴν B. O. — lin. 18. 21. τεμεῖ O. — lin. 18. ἔστιν ἄρα B. O. — lin. 23. ἡ ab. O. — lin. 24. ἐστιν ab. B. O. — Lin. 2. Εἰ γὰρ p. 70
μή, ἔστω B. — lin. 7. καὶ ἡ *ΕΓ* B. O. — lin. 8. ἴσ. εστ. B. O. — lin. 9. ἐστιν ab. V. B. O. — lin. 14. ἐφάπτονται. O. — ἀλλήλων ἐντὸς B. O. P. Nos cum V. — lin. 16. ἁπτέσθωσαν. O. — lin. 17. οὐκ ἐστὶν B. O. — lin. 24. καὶ ab. V. — lin. 25. ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 26. ἐστιν ab. O. — lin. 33. ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαι τινὲς πρὸς τὸν κύκλον. — Lin. 2. ἴσται B. O. — lin. 6. p. 71.
εὐθεῖαι deest V. P. — lin. 7. ἐφ' ἑκατέρᾳ male P. — lin. 19. αἱ ἄρα *ΕΒ ΕΖ*. B. O. — lin. 22. δὲ ab. V. — ἡ ab. P. — lin. 26. ἐστιν ab. B. O. — lin. 33. ἴσαι ab. B. — lin. 34. εὐθεῖαι ab. V. P. — lin. 35. ἐφ' ἑκατέρᾳ P. — Lin. 10. ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὲν καὶ p. 72.
ἡ *ΖΘ* τῇ *ΖΗ*. V. P. — lin. 11. τῇ *ΖΗ* ἴση ἐστιν B. O. — ἴσ. ἐστ. B. O. — lin. 12. τῆς ἀπώτερον V. — ἴση post ἀπώτερον, quod omnes habebant editiones, abjiciendum putavi. — lin. 13. Οὐκ ἄρα

etc. usque ad finem ex alterius demonstrationis fine huc recepi, quam in Apend. I., 2. reperies. — lin. 21. Ordinem rerum in hoc theoremate enunciatarum paululum mutavimus ut *πρότασις* congrueret *ἀποδείξει*; et ipsum theorema antecedenti similior redderetur. Primum enim demonstratur, quae sit maxima linearum, postea, quae minima; denique ceterarum inter se comparatio sequitur. Ut vero lectores quae sunt de conjectura mea a codicum editionumque lectionibus melius sejungant, singula hoc loco exhibebo. Cod. V. habet: *Ἐὰν κύκλου . . . . ὧς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτούσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν . . . . διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἐγγιον τῆς . . . . προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστι ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημειοῦ καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἐγγιον . . . . Ἔστω κύκλος . . . . . διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΔΛ. . . . . λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΛΕΖΤ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν . . . καὶ τῆς διαμέτρου ἡ ΛΗ. μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ . . . τῆς ΛΘ.* Cum hoc congruit ed. B. nisi quod in thesi ipsa post verba *μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου* omittat ea quae sequuntur: *ἐλαχίστη δέ ἡ μεταξύ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου προσπίπτουσα*, quae bis leguntur diversis locis in illo codice. — Nihilominus in expositione plane eundem servat rerum ordinem ac codex V. — Ed. O. secuta est editionem B. sed ita ut etiam in exposi tione delerentur ea, quae sequuntur post *ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἥ ΔΛ* verba: *ἐλαχίστη δὲ ἡ ΔΗ ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς ΔΗ.* Cum Oxoniensi congruit P. exceptis iis, quae singulatim exponemus — lin. 19. *διαθῶσιν* B. — lin. 26. *τοῦ* ab. P. — lin. 30. *ἴσ. εὐθ.* V. — lin. 35. *πρὸς τὸν κύκλον* ab. V. P. — Lin. 14. *ΜΔ.* p. 73. *ΜΗ. ΜΘ.* B. — lin. 17. *Αἱ δέ* V. P. — lin. 19. *κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ.* O. — lin. 29. post *ἐστὶν* omisimus *ἐλαχίστη ἄρα ἐστί*, quae leguntur in ceteris edd. — lin. 30. *συνεστάθησαν, αἱ ΜΚ ΚΔ ἄρα τῶν ΜΔ ΔΛ.* V. P. — lin. 32. *εἰσιν. ἴση δὲ* V. P. — Lin. 4. p. 74 *εὐθεῖαι* ab. V. P. — lin. 5. *συμπεσοῦνται* B. O. — lin. 12. *ἴση ἐστὶ* B. O. — lin. 13. *δὴ* ab. V. — *τῇ ΔΒ.* B. — lin. 17. *ΔΝ ἐστ. ἴσ.* O. — lin. 18. *ἀπώτερον ἐστ ἴσ.* — lin. 19. *ἀδύνατον ἐδείχθη* edd. omn. — *εὐθεῖαι* ab. V. P. — *ἴσαι.* ab. B. O. — Post *ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη* in ceteris edd. altera argumentatio est adjecta, cujus hoc loco omissae et in Appendicem rejectae, finem tantum re-

cipiendum existimavimus. *Οὐκ ἄρα* etc. — lin. 27. 31. *εὐθ. ἴσ.* O. — Lin. 2. *ἐστ. ἴσ.* V. P. — lin. 4. *βάσις δὲ* B. — *ἐστι* ab. V. P. — p. 75.
lin. 7. *τὴν AB δίχα τέμνουσα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει* B. O. — lin. 10. *ἐστι* ab. B. — lin. 11. *ABΓ* ab. V. — *Διὰ τὰ αὐτὰ . . . . τοῦ ABΓ. κύκλου* ab. O. — lin. 14. Adjecta est alia demonstratio, quam in Appendice recepimus. — lin. 19. *οὐ τέμνει κύκλον.* B. O. — lin. 23. *τεμνέσθωσαν* B. P. — lin. 25. *ἐπὶ τὰ AE δίηχθωσαν* B. O. — lin. 28. *δίχα τέμνουσα καὶ πρὸς* B. O. — lin. 34. *ἀλλήλαις* ab. V. — Lin. 4. *Δύο ἄρα . . . . ἀδύνατον* ab. V. p. 76.
— lin. 6. sequitur *Ἄλλως* quod vide in appendice — lin. 12. *εὐθεῖα καὶ ἐκβ.* V. B. P. — lin. 15. *ἁπτέσθωσαν* O. — lin. 17. *τὸ κέντρον.* V. P. — lin. 18. *τοῦ H ἐπὶ τὸ Z.* O. — lin. 19. *σημ.* ab. V. P. — lin. 23. *ZΘ, (ἴση γὰρ ἡ ZA τῇ ZΘ· ἀπὸ κέντρου γὰρ ἅμφω)* B. et idem uncis sublatis O. — lin. 26. *ἐστιν* ab. B. O. — lin. 29. *κατὰ τ. A. α. ἐπὶ τῆς συναφῆς* V. P. — *ἐπ' αὐτὴν ἄρα* B. O. — Sequitur *Ἄλλως* quod vide in append. — Lin. 3. *ἅπτωνται* B. O. p. 77.
(Attamen in recapitulatione B. habet *ἐφάπτ.*) — lin. 4. *ἐπιζευγμένη* P. — lin. 5. *εὐθ.* ab. B. O. — lin. 8. *κύκλου* ab. V. — lin. 11. *αἱ ZΓΔH.* male edd. omn. cum in antecedenti theor. habeant *ἡ.* — lin. 20. *οὐκ* ab. B. — lin. 21. *ἐπ' αὐτῆς* B. — lin. 25. *καιὰ* ab. B. — lin. 26. *ἡ καθ' ἓν* O. — lin. 27. *ἐφάπτ.* ab. V. P. — lin. 29. *ἁπτέσθω* B. O. — lin. 31. *τὸ κέντρον.* — Lin. 2. *εὐθ.* ab. V. — p. 78.
lin. 9. *ἐστὶν* ab. V. P. — lin. 17. *ἄρα* ab. B. O. — *αὐτὰ* ab. V. — lin. 29. *αἱ ABΓΔ* ab. B. O. — Lin. 6. *ἴση AB.* O. — lin. 14 p. 79
λοιπῷ ab. V. — lin. 15. *ἄρα καὶ ἡ.* V. — lin. 26. *καὶ* ab. V. P. — lin. 30. *ἴσ. ἐστ.* B. O. — lin. 31. *AZ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓH ἴση.* V. — Lin. 4. *ἐστιν* ab. V. — lin. 8. *μὲν τῆς ΔA διαμέτρου* p. 80.
V. cum tribus aliis edd. B. O. (omissa litt. *E.*) — lin. 12. *E* ab. O. — *ἄρα* ab. V. et in 6. codd. aliis. — lin. 26. *ἐστιν* ab. V. — lin. 28. *ἄρα* ab. B. O. — *μὲν* ab. O. — Lin. 8. *γων. ὀξ.* V. P. — lin. p. 81
16. *ἴσ. ἐστ.* habent V. P. post *ΔΓΔ.* — lin. 18. *ΔΓΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔAΓ.* B. O. — lin. 20. *ἄρα* ab. P. — lin. 23. *ἐκτὸς ἄρα πιπτέτω ὡς* etc. sic male jungunt edd. cetèrae — 24. *λέγω δὴ* V. P. — lin. 28. deesse videtur *τέμνουσα τὸν κύκλον κατὰ τὸ Θ.* — *σημείου κάθ. ἐπὶ τὴν ZA ἦ. ΔH.* B. — Lin. 4. *γων. ὀξ.* V. P. — lin. 13. p. 82.
παρεμπ. εὐθ. B. O. — lin 20. *οὐδέ μέν.* P. — lin. 22. Verba *ὅπερ ἐδ. δεῖξ.* post corollarii finem. V. B. — lin. 24. *ἐκ δὴ τούτου*

V. P. — Lin. 2. τὸ μὴν. P. — lin. 5. γὰρ κέντρον B. O. — lin. p. 83.
6. post *AE* deesse videtur τέμνουσα τὸν κύκλον κατὰ τὸ *A*. — lin. 14. τὴν ab. V. — lin. 17. τῇ ὑπὸ *EΔZ* ἡ ὑπό B. O. — lin. 22. *BΓA* male P. — lin. 23. ἄρα δοθέντος P. — lin. 25. ἰδει δεῖξαι B. — lin. 28. ἀφὴν P. — lin. 31. ἁπτέσθω B. O. — Lin. 9. καὶ ab. B. O. ἡ ab. P. — lin. 18. τῆς ab. B. — ἀφῆς p. 84.
B. P. — γωνίας ab. V. P. — lin. 21. ἁπτέσθω. B. — lin. 22. πρὸς ὀρθ. τῇ *ΔE*. B. O. — lin. 27. οὖν ab. Cod. V. — Lin. 14. p. 85.
EB,, ἴση καὶ γωνία ἡ . . . . ὑπὸ *EBA*. V. P. — lin. 21. γων. ἐτ. B. O. — lin. 24. τῆς ὑπὸ *ΠΔΓ*. O. P. — lin. 25. τῆς ὑπὸ *ΗΔB*. O. P. — lin. 32. αὐτῷ ab. O. — Lin. 19. Ἐπεὶ οὖν p. 86.
παντὸς etc. V. P. — lin. 20. ἄρ. τριγ. ab. O. — lin. 26. post *ABΓ* inserunt *B*.: ταῖς δυσὶ ὁμοῦ τῇ πρὸς τὸ *A* καὶ *Γ*, καὶ χωρὶς τῇ μίᾳ τῇ πρὸς τὸ *A*. — lin. 29. ἄρα ab. B. O. — Lin. 4. p. 87
συσταθήσονται B. O. — lin. 18. ἀλλήλοις εἶσιν B. — lin. 26. Ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς *AB* εὐθείας ἐπὶ τὴν *ΓΔ*. B. O. — lin. 30. Quae uncis inclusa sunt aut ipsa aut iis similia excidisse videntur. V. et P. hunc locum ita expresserunt: μὴ ἐφαρμόσει, ἤτοι ἐντὸς αὐτοῦ π. ἢ. ἐκτ. ἢ παραλλ. ὡς τὸ *ΓΘΗΔ* καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σ. ἢ δύο τὰ *ΓΗΛ*. — B. O. habent pro his: ἐφαρμόσει, ἀλλὰ παραλλάξει ὡς τὸ *ΓΘΗΔ*· κύκλος δέ etc. . . . Sunt qui locum ita explere tentaverint: ἐφαρμόσει ἀλλὰ παραλλάξει ὡς τὰ τμήματα *ΓΖΔ ΓΘΔ*. ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἄρα εὐθείας τῆς *ΓΔ* δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Οὐ συνίσταται δὲ. Οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης etc. cf. Jen. Litt. Z. XXII. 1826. p. 278. — Lin. 2. τὸν *ΓΖΔ* κύκλον B. O. — p. 88
lin. 13. τοῦ *ABΓ* τμήματος hoc recepi ex Cod. V. et B. — lin. 14. abjeci cum B. τὸ *ABΓ*. post ἐστι. — lin. 17. ἄρ. γων. B. O. — lin. 21. διήχθω ἐπὶ τὸ *E* ἢ *AB*. B. O. — lin. 24. εὐθεῖα εὐθείᾳ V. P. — lin. 27. ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 28. Καὶ βάσις ἄρα. O. — lin. 34. προσαναγεγραμμένος κύκλος. V. P. — Lin. 4. p. 89.
αὐτοῦ ἐκτὸς O. αὐτοῦ, ἐκτὸς B. — lin. 5. δέ ab. P. — κἂν ἡ ὑπὸ *ABΔ*. γ. ἴση τῇ B. O. — lin. 11. συστησόμεθα — τῷ *A* σημείῳ B. O. — lin. 12. γωνίαν ἴσην B. — lin. 14. ὡς τὸ *E*. deest B. O. — lin. 24. γάρ ab. B. O. — lin. 25. αὐτοῖς πρὸς μὲν τοῖς κεντρ. ἴσαι γων. ἔστωσαν. πρὸς δὲ. V. P. — lin. 32. εἰσι ab. V. — lin. 33. ἐστι ab. V. — lin. 34. ἐσι ἴσ. V. P. — Lin. 5. ἐστὶ ab. p. 90.

V. — *εἰσὶν* B. O. — lin. 6. *τμήματι* ab. V. — lin. 7. *ἴσος· λοιπὸν ἄρα ΒΚΓ τμῆμα λοιπῷ ΕΔΖ ἴσον: ἡ ἄρα ΒΚΓ περιφέρεια ἴσ.* etc. P. *ἴσος. λοιπὸν ἄρα . . . . περιφέρεια τῇ ΕΔΖ περιφερείᾳ ἐστ. ἴσ.* O. Nos. ed. B. secuti sumus. Fotus hic locus desideratur in V. — lin. 16. *καὶ ἐπὶ ἴσων.* B. O. — lin. 20. *γωνία* ab. O. B. — lin. 21. *ΕΔΖ ἐστὶν ἴση* V. P. — lin. 22. *Εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ· φανερόν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν. Εἰ δὲ οὔ· μία αὐτῶν μείζων ἐστὶν* B. O. nonnullique codices. — lin. 33. *τῆς δὴ* P. — Lin. 10. *αἱ ΑΒ ΔΕ τὰς μὲν* p. 91. *ΑΒΓ ΔΖΕ.* P. — lin. 11. *τὰς δὲ ΑΗΒ* (Haec literarum varietas per totum theorema offenditur.) — lin. 14. *ἔλαττον,* ab. V. — *περιφέρεια ἴση* B. O. — lin. 22. *περιφέρεια ΒΗΓ τῇ* etc. — lin. 23. *περιφερείᾳ* ab. V. — lin. 24. *καὶ* ab. B. O. — lin. 29. *ὑπο* ab. V. — Lin. 3. *εὐθεῖα* aliena manu adscriptum V. — lin. 4. p. 92. *κύκλων, καὶ ἔστω* V. P. — lin. 10. *ἴσ. γων.* B. O. — lin. 15. 17. *τέμνειν* B. O. — lin. 24. *καὶ βάσις ἡ* B. O. — lin. 31. *κατὰ τ. Δ. σημ.* absunt B. O. — Lin. 5. *τμήματι* ab. B. O. — lin. 9. p 93. *ἐστίν* ab. V. P. — lin. 13. *ἡ ὑπὸ ΒΑΓ* absunt O. B. — lin. 16. *ἡ ὑπὸ ΑΔΓ* ab. O. B. — lin, 20. *ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ.* P. — lin. 21. *ΓΕ τῇ ΕΔ.* P. — *καὶ* ab. V. — lin. 23. Fortasse legendum *ἡ ἐκτὸς* — lin. 31. *γωνία* ab. V. P. — Lin. 3. *ΑΔΓ μείζων ἐστὶν* p. 94. *ὀρθῆς καὶ ἐστὶν ἐν τῷ ἐλάττονι.* B. O. — lin. 6. *δὴ* ab. V. P. — lin. 7. *τε* ab. B. O. — lin. 12. *γωνία* ab. V. — lin. 16. *τῆς ΑΓΔ* P. — lin. 17. *περιεχομένη* ab. B. O. — lin. 19. sequitur *Ἀλλῶς* quod vide in append. — lin. 21. *μία γωνία τριγώνου* V. — lin. 22. *ταῖς* recepi ex Cod. V. — *ἡ γωνία* recepi ex V., qui hoc coroll. in margine quidem sed eadem manu scriptum continet. — lin. 23. *ἐκείνης ἐκτὸς τῆς* V. P. Legendum fortasse *τὴν ἐκτὸς καὶ ἐκείνης ἐφεξῆς.* — lin. 27. *ἁφῆς* B. P. — *ἐπὶ τὸν.* B. O. — lin. 33. *ἐπὶ τὸν* B. O. — Lin. 5. 6. *γωνία* ab. B. O. — lin. 6. *συνεσταμένη* p. 95. B. O. — lin. 7. *συνίστ. γων.* abs. B. O. — lin. 12. *ἡ* ab. P. — *σημεῖον* ab. P. — *ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς* V. P. — 14. *ἄρα* ab. B. O. — 15. *Ἡ ΒΑ ἄρα . . . κύκλου* abs. B. O. — *εἰσὶν* P. — *Εἰσὶ . . . ἴσαι* abs. B. O. — Lin. 9. *Γ γωνία* B. O. — lin. 10. *Ἡ δὲ πρὸς* p. 96. V. P. — *γωνία* ex V. recepi — lin. 11. *καὶ ὡς.* V. — *τῆς* ab. P. — lin. 12. 14. *καὶ* ab V. — lin. 21. *γωνία* ab. B. O. — 28. *ἐπεὶ οὖν* V. P. — *τοῦ ΑΒΕ κύκλου* — lin. 29. *ἐπὶ τὸ* B. O. —

lin. 31. τῷ ab. V. — τοῦ κυκλου ab. B. O. — lin. 34. τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΒ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ πρὸς τὸ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ. ΑΕΒ. — Lin. 6. ἔστ. πάλ. V. P. — lin. 7. ὀρθῇ ab. O. γων ab. p. 97.
B. — lin. 8. γωνία edd. omn. — lin. 15. O. habet ἴση post τμήματι, item B. — lin. 16. αὐτὴ edd. omn. — 17. καὶ ab. B. O. — ἐστ. ἴσ. B. O — lin. 27. Καὶ ἡ ... τῷ Γ ab. B. O. — lin. 29. ἡ B. O. — lin. 32. Ἐρχέσθω V. P. — ὁ ab. B. O. — lin. 34. Ἔστιν ἡ ΑΔ V. — lin. 35. ὑπαφῆς B. — Lin. 7. ἄρα δοθείσης V. P. — lin. 17. τῇ p. 98.
δοθ. γων. εὐθ. des. B. O. — Δ γωνία B. O. — lin. 18. κύκλου ab. V. — lin. 22. γωνία ab. P. — γωνίᾳ ab B. O. — Lin. 6. τῶν p. 99.
ab. V. — lin. 14. Μὴ ἑστωσαν δὴ V. P. — lin. 15. κύκλου ab. B. O. — lin. 21. τεμεῖ B. O. — lin. 26. Προσκείσθω κοινὸν V. P. — Lin. 2. Ὡσιε καὶ τὶ V. — lin. 18. περιεχ. ὀρθ ab. V. — lin. 26. p. 100.
ἄρα ab. B. O. — lin. 31. τῶν ΑΔΓ. V. — lin. 34. Ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ τοῖς. B. O. — lin. 35. ὀρθ. γὰρ . . . ΖΒΔ abs. V. — Lin 12. τεμεῖ B. P. — lin. 14. σημεῖον ab. B. O. — lin. 18. ἴσα p. 101.
ἐστὶ B. O. — lin. 14. τοῖς δέ B. O. — ἐστί ab. in edd. omn. — lin. 20. γωνία ab. B. O. — Lin. 3. τῆς ab. B. O. — lin. 12. τῶν p. 102.
ΑΔΓ V. — lin. 14. κύκλου ab. P. — lin. 15. τὸ Ζ κέντρον B. O. — καὶ ἔστω τὸ Ζ abs. B. O. — lin. 20. Ἦν δὲ καὶ τὸ V. B. — lin. 21. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 29. καὶ τοῦ κύκλου. V. P. — τοῦ κύκλου ἡ ΔΒ . . . κύκλου abs. B. O. — lin. 30. Uncos adjeci glossema suspicans. δὴ τὰ αὐτὰ B. O. — τὰ αὐτὰ ab. P. — Lin. 12 p. 103.
Σχῆμα δὲ B. O. P. sed δὲ ab. in V. — lin. 16. πλευρὰ τῆς τοῦ κυκλ. περιφ. τοῦ περιγραφ. ἁφαπτ. B. O. — lin. 19. εἰς σχῆμα ὁμοίως. V. P. — Lin. 7. Fortasse legendum μὴ μείζων οὖσα — p. 104.
lin. 13. Εἰ δὲ μείζων ἐστὶν . . . τῆς Δ, κείσθω τῇ V. P. — lin. 14. μὲν ab. V. — lin. 18. τῇ Δ ἡ ΓΕ V. P. — ἡ Δ τῇ ΓΕ B. — lin. 19. ἡ Δ ἄρα τῇ ΓΔ. O. B. — lin. 21. μὴ μειζ. οὖσ. τῆς τ. κ. διαμ. abs. V. P. — lin. 30. πρὸς μὲν τῇ — lin. 32. ἡ ὑπό . . . γωνίᾳ ἴση abs. B. — ΘΑΓ· πρὸς δὲ O. — 33. γωνία ab. V. P. — Lin. 3. p. 105.
καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἁπαφῆς διῆκται εὐθεῖα. V. P. — εἰς τὸν κύκλον ab. B. O. — lin. 4. εὐθεῖα ab. B. O. — lin. 8. Διὰ τὰ αὐτὰ . . . ἐστὶν ἴση. ab. B. — liu. 10. ἰσογώνιον ἄρα . . . ΑΒΓ κύκλον abs. V. — lin. 21. ἐφ' ἑκατ. τ. μ. ἡ ΕΖ ἐπὶ τὰ B. O. — κατὰ τὰ Η Θ. V. P. — lin. 30. σημεῖα ab. B. O. — lin. 30.

ἀπὸ δὲ τοῦ . . . . σημεῖα abs. V. P. — καὶ ἐπιζευγνύμεναι V. P. — ἐπεζευγμέναι pro vulgato ἐπιζευγνύμεναι ex conjectura scripsi. — Lin. 2. Quae uncis inclusa sunt, scholiastae adnotationi simillima sunt. — lin. 2. τετράπλ. ab. V. — pro ὧν αἱ etc. V. habet καὶ εἰσιν ὀρθαι αἱ ὑπὸ *MAK KBM* γωνίαι. — lin. 11. λοιπῇ ab. V. — lin. 23. αἱ *BΓ ΓΔ* ab. O. — lin. 26. δίχα γὰρ . . . *ABΓ* abs. P. V. — *ABΓ*, τῇ *ABΓ* καὶ *ΓBΔ* — lin. 28. ταῖς ab. B. O. — lin. 30. τὴν ab. O. — lin 34. Αἱ τρεῖς. ἄ . . . ἀλλήλαις εἰσὶν. B. O. — Lin. 2. κέντρῳ μέν τῷ *A*, διαστήματι ἑνὶ τῶν *E Z H*. B. — lin. 9. ἐδείχθη B. O. — ὁ ab. V. — τῷ ex conj. adjeci. — lin. 10. τῶν *E. Z. H.* B. — lin. 12. ἐπὶ τὸ B. O. Ἐγγεγρ. ὡς *ZEH* abs. B. O. NB. — Euclides in hoc theoremate maximam trianguli lineam basin habuisse videtur angulumque eum tantum respexisse qui huic lineae oppositus sit. — lin. 21. εὐθ ab. B. O. — lin. 25. Quae uncis inclusa adjecimus, ea necessaria videntur ad explendam loci sententiam. In O. adnotatiunculam reperimus: „Legimus τοῦ *ABΓ* τριγώνου." — lin. 26. Συμπ. πρόν. ἐντ. κατά B. O. — lin. 29. ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 31. ἐστιν ab. B. O. — Lin. 2. Καὶ περιγρ. B. O. — 10. quae uncis inclusa addidimus, ad subtilitatem demonstrationis pertinere videntur. — lin. 16. ἐστιν ab. O. — πάλιν ab. V. — lin. 19. καὶ γεγρ. . . . . *ABΓ* abs. V. — lin. 21. Verba ὅπ. ἔδ. δ. post finem Corollarii. V. — lin. 29. τοῦ adjeci, in ceteris Cod. V. secutus. O. habet ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς *BΓ* ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθὴ ἔσται· ὅταν δὲ ἐκτὸς * τῆς *BΓ* εὐθείας τὸ κέντρον πίπτῃ ἡ ὑπο *BAΓ* etc. idem B. Ad signum * notatur in O.: „Legimus τοῦ *ABΓ* τριγώνου." Praeterea adnotatio exstat: Hic locus in omnibus, quos vidimus, codicibus graecis, tam Mss. quam impresso (sc. ed. B.) male se habet. Nos in versione pauculis immutatis restituimus; quod et antea fecerunt Campanus et Clavius — Vertitur autem: „Quare si datum triangulum sit oxygonium, *ΔZEZ* intra triangulum convenient: sin in eo sit angulus rectus *BAΓ*, in ipsa *BΓ*, et si sit major recto, extra *ABΓ*." — lin. 30. τοῦ ab. B. O. — lin. 31. ἡ διδομένη γωνία B. O. — lin. 32. πεσοῦνται V. — Lin. 5 τὸν ab. O. — lin. 7. δύο ab. B. O. — lin. 17. γωνία ab. O. — lin. 21. omisimus δοθέντα ante *ABΓΔ* cum V. — lin. 22. ἄρα δοθ. V. P. — lin. 27. ὁ (prius) ab. B. P. — ὁ (alterum) ab. B. O. — δεῖ δὲ. O. — δεῖ . . .

p. 106.

p. 107.

p. 108.

p. 109.

κύκλον abs. B. — Lin. 4. καὶ ab. O. — lin. 8. ἐστ. παράλλ. V. P. — p 110.
Ὥστε . . . παράλληλος ab. B. O. — lin. 11. ἄρα ab. P. — lin. 14.
καὶ ab. B. O. — ἐστ. ἴσ. post ΘΚ abjeci — καὶ ἑκατέρα . . . ἐστιν
ἴσῃ ab. V. — lin. 18. δὴ ab. B. O. — lin. 22. τετράπλ ab. V. —
Lin. 5. εἰσὶ ab. V. — lin. 8. ἴσ. εἰς d. V. — lin. 12. εἰσ. d. V. — p. 111.
lin. 13. τῶν B. E. Z. Θ. Bas. (K excidit propter sequens Κύκλον)
— lin. 19. ἐδείχθη ab. B. O. — lin. 20. μὲν ab. O. — lin. 24.
Εἰς ἄρα τὸ ϕοθὲν V. P. — lin. 31. Ἐπεζευθεῖσαι P. O. malc. —
Lin. 2. ΒΓ ἐστὶ ἴσ. O. — lin. 3. γωνία ἄρα ἴσ. ἐστ. ἡ ὑπὸ ΔΑΓ p. 112.
γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ. V. P. ἡ ἄρα γων. ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ etc. B.
O. — lin. 15. ΕΓ ΕΔ abs. B. — lin. 28. καὶ κέντρῳ τῷ Α καὶ
διαστήματι τῷ ΑΒ. — Lin. 8. τῶν ab. V. — lin. 10. κύκλον ab.
P. — Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται μὲν V. P. — Lin. 8. τῶν ab. V. — p. 113.
lin. 10. κύκλου. ab. P. — Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ V. P. —
lin. 17. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα ἴσῃ B. O. — lin. 23.[1] Ἀλλὰ ἡ ΒΔ. —
lin. 25. γωνίᾳ ab. B. O. — lin. 27. εἰς διπλ. V. P. — καὶ ab. V.
— lin. 28. ἄρα διπλῆ ἐστι τῆς B. O. — lin. 32. συνίσταται P. —
Lin. 5. Ἔστω . . . ἐγγράψαι ab. V. — lin. 9. τῶν ab. V. — lin. 13. p. 114.
Scribendum videtur ἑκατέρᾳ . . . ἑκατέραν. — lin. 16. δίχα ὑπὸ
ἑκατέρας τῶν V. P. — lin. 30. 32. 35. ἐστ ἴσ. V. P. — lin. 35. γω-
νία ἄρα B. O. — Lin. 7. τε καὶ ἰσογ. abs. B. — lin. 25. ἐστιν ab. p. 115.
B. O. — lin. 30. ἐστιν ab. B. O. et ἴσον post ΖΚ scriptum est
B. O. — lin. 31. τὰ ἄρα. B. O. — lin. 34. λοιπῷ ab. V. — ἐστ.
ἴσ. P. — ἡ ΒΚ τῇ ΓΚ. B. O. — Lin. 4. ἐστιν ab. V. — lin. 5. p. 116.
γωνίᾳ ab. V. — lin. 6. Abjeci ἐστ. ἴσ. post ΖΚΓ cum V. — ἐστιν
post ἄρα adjiciendum existimavi. — lin. 8. ὑπὸ ab. P. — lin. 12.
διπλῆ ab. V. — lin. 14. ἔστι δὲ . . . ἴσῃ ab. B. O. — lin. 15. ἐστὶ
ab. V. — lin. 16. ἑκατ. ab. V. — lin. 24. Καὶ ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ
ἴσῃ. V. P. — lin. 26. ἡ ab. in edd. omn. — Lin. 6. Περὶ τὸν . . . p. 117.
περιγέγραπται abs. B. P. — lin. 12. ὅ ἐστιν ab. V. P. — lin. 16.
ὑφ' ἑκατέρας. B. O. — lin. 21. ἐστὶ post ἴσῃ abjeci cum V. —
lin. 22. τῇ βάσει P. — lin. 23. ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 24. ἴσαι εἰσὶν.
B. O. — lin. 26. διπλῆ post ΓΔΖ lineae subsequentis habent B.
O. — lin. 28. ὑπὸ ab. edd. omn. — Lin. 4. ὀρθῇ ab. V. — lin. 6. p. 118.
ταῖς ab. V. — lin. 8. τὴν ab. P. — 15. 23. Η. Θ. Κ. Λ. Μ.
B. — lin. 24. κύκλος ab. B. O. — lin. 34. ὅπερ ἐστίν B. O. —
Lin. 6. αἱ ab. B. O. — lin. 8. τὸ πρὸς τούτου P. τῷ πρὸς τ B. — p. 119.

lin. 19. *διαστήματι δὲ* O. — lin. 21. *περιγραφόμενος* P. sed non V. nec B. nec O. — Sequuntur hoc verbum in B et O. haecce verba: *περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον ὅ ἐστιν ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον* — lin. 23. *τὸ δοθὲν ἄρα.* — Lin. 5. *ἐστι* post *ἰσογώνιον.* B. — p. 120. lin. 7. *ΗΔ τῇ ΠΕ.* P. — lin. 10. *ἐστ. ὅσ.* B. O. — lin. 23. *ὅσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ ΔΗΓ ΓΗΒ* Q. P. Nos secuti sumus ed. P. Si illa ceterarum edd. retinenda essent, particulam *ὥστε* abjiciendam putarem. — lin. 26. Verba *αἱ ἐξ ἄρα . . . . ἀλλήλαις εἰσὶν* exciderunt. B. — lin. 28. *αἱ ὅσαι εὐθ.* V. P. — lin. 29. Notas *αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ* adjiciendas putavi — *ἐξ* ab. B. — lin. 34. *περιφέρεια* item *περιφερείᾳ* abs. V. P. — Lin. 3. *περιφερείας* ab. B. O. p. 121. — lin. 4. *δὲ* B. O. — lin. 7. *ἐστι* ab. B. O. — lin. 13. *δὴ* ab. P. — lin. 15. totam hanc lineam ed. O. sola sic habet: *Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ κύκλον (κύκλου?) διαιρεσέων.* — lin. 16. *ἀγάγομεν* B. — lin. 21. *τε καὶ περιγρ.* abs. B. O., qui pro his habent *ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.* — lin. 29. *Ἐνηρμόσθω* scripsi ex conject. — V. P. habent *ἐγγεγράφθω* et B. O. habent *γεγράφθω.* — Lin. 3. *κύκλου ἐστὶ.* B. — lin. 6. *ἐστι* B. O. — lin. 7. *εὐθείας* p. 122. ab. V. — lin. 11. *ὅπερ. ἐδ. π.* haec verba in fine coroll. habet. V. — lin. 16. Legas *ἔτι τε.* — lin. 18. *πεντεκαιδεκάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον.* O. P. Nos secuti sumus V. Totum Corollarium ab. ed. B. — Memoratu digna quamvis huic loco minus accommodata Procli adnotatio est (p. 72 ed. B.) *Τὸ τελευταῖον ἐν τῷ τετάρτῳ καθ' ὃ τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου πλευρὰν ἐγγράφει τῷ κύκλῳ· τίνος ἕνεκά φησί τις αὐτὸν προβάλλειν ἢ τῆς πρὸς ἀστρονομίαν τούτου τοῦ προβλήματος ἀναφορᾶς; Ἐγγράψαντες γὰρ εἰς τὸν διὰ τῶν πόλων κύκλον τὸ πεντεκαιδεκάγωνον ἔχουσι τὴν ἀπόστασιν τῶν πόλων τοῦ τε ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ ζωδιάκου· πεντεκαιδεκαγωνικὴν γὰρ ἀλλήλων πλευρὰν ἀφεστήκασιν.* — Attamen constat ab Eratosthene et Hipparcho angulum aequatoris et Zodiaci inventum esse: 23° 51′ 19,5″, qui nostris temporibus est 23° 28′ 19″. Illam igitur, quam Proclus hoc loco exhibet hujus anguli mensuram multis saeculis ante Euclidem veram fuisse patet. — Initio libri V. Scholium p. 123. exstat in ed. B. quod e cod. Monac. emendatum huc recipiendum existimavi. — *Σχολίον εἰς τὸ ε ἀδήλου — Σκοπὸς τῆς ε̄ βίβλου περὶ ἀναλογιῶν διαλαβεῖν. Κοινὸν γὰρ τοῦτο τὸ βιβλίον γεωμετρίας τε καὶ ἀριθμητικῆς καὶ μουσικῆς καὶ πάσης ἁπλῶς μαθηματικῆς*

ἐπιστήμης. Τὰ γὰρ ἐν αὐτῷ ἀποδεικνύμενα οὐ μόνον γεωμετρικοῖς ἁρμόζει θεωρήμασιν, ἀλλὰ καὶ πᾶσι τοῖς ὑπὸ μαθηματικὴν τεταγμένοις ὡς προείρηται ἐπιστημαῖς. ὁ μὲν οὖν σκοπὸς οὗτος, τὸ δὲ βιβλίον Εὐδόξου τινὸς εὕρεσιν εἶναι λέγουσι τοῦ Πλάτωνος διδασκάλου. Ἐπεὶ οὖν σκοπὸς περὶ ἀναλογιῶν, ἡ δὲ ἀναλογία λόγων τινῶν σχέσις· ἀναγκαῖον γνῶναι πρότερον, τίνες οἱ τοσοῦτοι λόγοι. δεῖ γὰρ τὰ ἁπλὰ πρότερον γνῶναι τῶν συνθέτων. Ἐὰν τοίνυν τινὰ συγκρίνηται πρὸς ἄλληλα, φερέ εἰπεῖν δύο μεγέθη, αὐτὰ μὲν ὅροι καλοῦνται, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἐπὶ τὸ ἕτερον μετάστασις διάστημα, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου πρὸς τὸ ἕτερον σύγκρισις σχέσις, ἣν ἐκάλεσαν οἱ παλαιοὶ λόγον, τὴν δὲ τούτου τοῦ λόγου πρὸς ἄλλον λόγον κάθ' ὁμοιότητα σύγκρισιν ἤτοι σχέσιν ἀναλογίαν προηγόρευσαν, ἵνα μὴ ὡς τίδε τὸ μέγεθος συγκρίνηται ἀλλ' ὡς ὅδε ὁ λόγος πρὸς τόνδε τὸν λόγον. Αὕτη δὲ ἡ σύγκρισις λόγου λέγεται λόγος, οἷον ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ὧν ἡ ἑτέρα πρὸς τὴν λοιπὴν διπλασίονα λόγον ἔχει, τὸ ἀπὸ τῆς τὸν διπλασίονα λόγον ἐχούσης τετράγωνον τετραπλασίονα λόγον ἕξει πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τετράγωνον ἥπερ ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν. Τὰ γὰρ μήκει διπλάσια δυνάμει τετραπλάσια. Ὁ τοίνυν λόγος τῶν τετραγώνων τετραπλάσιος ὢν διπλασίου ὄντος τοῦ λόγου τῶν εὐθειῶν διπλάσιός ἐστι. Καλεῖται δὲ οὗτος ὁ λόγου λόγος. Ἀλλ' εἴη ἂν οὗτος ὑπὸ τὸ ποσόν. Διττὸς γὰρ ὁ λόγος ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ ὁ δὲ ἐν ποσῷ. Καὶ τοῦ μὲν ἐν ἀξίᾳ οὐδέν ἐστιν εἶδος πρὸς τὴν παροῦσαν χρεῖαν· τοῦ δὲ κατὰ τὸ ποσὸν εἴδη ἐστι πέντε· ὁ μὲν γάρ ἐστι πολλαπλάσιος ὡς τοῦ τρία ὁ ἕξ, ὁ δὲ ἐπιμόριος ὡς τοῦ τρία ὁ τέσσαρα, ὁ δὲ ἐπιμερὴς ὡς ὁ πέντε τοῦ τρία. Καὶ οὗτοι μὲν ἁπλοῖ, τούτων δὲ ἔτι ἁπλούστερος ὁ πολλαπλάσιος. Ἕτεροι δὲ ἐκ τούτων συνθέσεως γίνονται δύο ὅ τε πολλαπλασιεπιμόριος, ὡς τοῦ τρία ὁ ἕπτα καὶ ὁ πολλαπλασιεπιμερὴς ὡς τοῦ τρία ὁ ὄκτω. Ὑπόλογοι δέ εἰσιν οἱ ἐλάσσονες τῶν μειζόνων, ὑποπολλαπλάσιοι, ὑπεπιμόριοι, καὶ ἑξῆς ὁμοίως. Ἰστέον δὲ ὡς τὸ βιβλίον διχῇ διῄρηται καὶ περιέχει τὰ μὲν πρῶτα τὴν τῶν ἁπλουστέρων διδασκαλίαν τοῦτ' ἔστι τὴν τῶν πολλαπλασίων· τὰ δὲ δεύτερα καθολικώτερα περὶ πάντων λόγων. Δεῖ γὰρ ἐπὶ παντός, ὡς εἴρηται, πράγματος τὴν τῶν ἁπλῶν ἡγεῖσθαι διδασκαλίαν. Τὸν δὲ τῆς τοῦ βιβλίου διαιρέσεως τρόπον καὶ ἡ τῶν ὅρων γεγένηται διαίρεσις, οἱ μὲν γὰρ πρότεροι περὶ ἐπιμερῶν, καὶ πολλαπλάσιων, οἱ δὲ ἑξῆς καθολικώτεροι περὶ πάντων τῶν λόγων.

Ordo definitionum paullo immutatus est in edd. Nostris si uteris numeris in B. O. hunc reperies ordinem: 1. 2. 3. 4. 5. 7. 6. 8. 9. 10, in V. P. huncce 1. 2. 3. 8. 4. 5. 7. 6. 9. 10. — Lin. 9. πρὸς ἀλλ' ab. V. — lin. 16. ἑκατ. ab. O. — lin. 17. Verba ὑπερέχῃ — ἐλλείπῃ loca inter se immutarunt B. O. — lin. 22. τό τε P. (typogr. menda) — lin. 25. μεγ. λόγ. B. O. — lin. 27. δέ ἐστι B. O. — λόγων ὁμοιότης. B. O. — Lin. 2. p 124 ὅροις ἐλαχίστοις V. P. — lin. 6. ἤ ab. B. — lin. 7. τὸ ab. V. — lin. 8. ἑξῆς ὁμοίως ὡς ἄν V. P. — lin. 10. εἶναι ab. V. P. — In his deff. ἀνάλογ. id significat, quod in libro ipso ἑξῆς ἀνάλογον. — lin. 20. δέ ab. V. — lin. 27. ἴσα. αὐτ. O. — lin. 31. Ea quae uncis inclusi sic incipiunt in edd. cet. Ἤ ἄλλως· λῆψις etc. — lin. 32 — 35. ab. haec definitio. V. — Lin. 3. ἴσα. αὐτ. O. — lin. 4. γίνεται male edd. omn. — lin. 6. μεγέθεσιν ab. V. — lin. 8. ἡγούμενον πρὸς ἄλλο τι. — lin. 10. μεγέθων ab. O. — lin. 11. 16. ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον edd. cet. — lin. 20. ὅσα ἄρα μεγέθη ἐστὶν ἐν τῷ *AB* ἴσα . . . B. O. — lin. 27. ἐστ. ἴσ. B. O. — 26. ἴσον ἄρα τὸ *AΠ* τῷ *E* καὶ τὰ *AΠ ΓΘ* etc. V. — lin. 27. καὶ τὰ *ΠB ΘΔ* τοῖς *E Z*. O. Praeferenda videtur lectio Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσα ἐστι καὶ τὰ *ΠB ΘΔ* τοῖς *E Z*. — Lin. 19. μεγέθη ab. p. 126 V. — lin. 25. Καὶ ante συντεθὲν abjeci. — Lin. 9. ὅτι δυσπλάσιον p. 127 τὸ *EZ*. V. — lin. 13. τοσαῦτα δὴ καὶ B. O. — lin. 14. μὲν ab. B. O. — lin. 15. ἔσται δὲ B. O. — Lin. 10. ἐστιν post τὸ *H*. p. 128 B. O. — lin. 13. ἄλλα ἃ ἐν. ab. B. O. — lin. 24. τοῦ *M* τὸ *K*. B. — lin. 25. Post ἔλαττον haecce addit V. Καὶ ἐπεὶ (εἰ) ὑπερέχει τὸ *K* τοῦ *M*, καὶ τὸ *Λ* τοῦ *N*, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. — lin. 31. Adest πόρισμα in edd. hocce. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὅτι εἰ ὑπερέχει τὸ *K* τοῦ *M*, ὑπερέχει καὶ τὸ *Λ* τοῦ *N*· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ *M* τοῦ *K*, ὑπερέχει καὶ τὸ *N* τοῦ *Λ*· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· καὶ διὰ τοῦτο ἔστιν καὶ ὡς τὸ *H* πρὸς τὸ *E*, οὕτως τὸ *Θ* πρὸς τὸ *Z*. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται. Ad ultima verba ἐκ δὴ τούτου etc. corollarium incipere docemur in margine O. — Notandum est, verba ὅπερ ἔδ. δεῖξαι non addita esse in fine corollarii sed in fine argumenti. Praeterea in B. λῆμμα inscribitur. — ὅτι post ἐδείχθη ab. V. — Lin. 12. καὶ τὸ *EB* . . . . . τοῦ *ΓZ* abs. p. 129 B. O. — lin 24. ἰσάκις ἔσται V. P. — Lin. 4. τῶν αὐτῶν τῶν p. 130

scribendum cum edd. cet. — lin. 8. ἴσον τῷ Ζ. V. — lin. 9. καὶ ab. V. — lin. 19. τῷ Ζ τὸ ΚΓ. V. P. — lin. 20. ἐστ. ἴσ. O. — εἰ ab. B. ὅτι O. — lin. 29. δέ τι ὃ V. P. — lin. 33. μὲν ab. B. O. — Lin. 4. τοῦ Γ' πολλαπλ. ab. V. — lin. 9. πολλαπλάσιόν p. 131. ἐστιν· ἔστιν V. P. — lin. 11. Λέγω δὴ καὶ B. — Λέγω δὴ ὅτι καὶ O. P. Nostrum habet V. — lin. 13. ὁμοίως δὴ P. V. — lin. 15. ὑπερέχει τὸ Ζ V. — lin. 22. Hoc coroll. recepi hoc loco ex V. — Altera enim demonstrationis pars satis probare mihi videtur, Euclidem ipsum post theor. 4. hoc coroll. non addidisse. — lin. 31. τοῦ Γ ab. V. P. — Lin. 6. ἕως οὗ . . . γένηται τοῦ Δ abs. V. P. — p. 132. μεῖζον ἔσται. O. — lin. 7. καὶ ἔσται O. — μεῖζον ὄν P. — Linea καὶ ἔστω . . . μεῖζον τοῦ Δ excidit. B. — lin. 11. ἕως ἂν τὸ B. O. — lin. 19. τὸ ΗΘ τοῦ ΑΒ B. τὸ Κ τῷ ΗΘ. P. — lin. 27. Μεῖζον δὲ ΖΗ. — lin. 29. ἐπειδήπερ . . . τῶν ΑΜ μεῖζόν ἐστιν abs. O. — lin. 30. τῶν ΜΔ. B. — Lin. 8. τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ. V. P. — p. 133. lin. 13. μεῖζ. ἔστ. τ. ΕΒ. B. O. — lin. 22. τοῦ Μ μὴ ἔλασσον εἶναι. — lin. 26. ὡσαύτως O. — Lin. 2. κἀκεῖνα B. O. — lin. 6. p. 134. ἂν ἕτερον B. — lin. 7. τὸ Α πρὸς τὸ B. — lin. 15. τὸ τὸν μεῖζ. B. O. P. sed deest articulus τὸν in repetitione. B. O. deest hic quoque in V. — lin. 16. ἔχον ἐκεῖνο μεῖζον B. O. P. Abjeci ἐκεῖνο cum in repetitione B. O. non legatur. — lin. 23. ἂν ab. B. — lin. 26. τὸ Γ' τὸν ἐλάσσονα B. O. P. sed ab. artic. V. — λόγον εἶχεν B. — lin. 28. ὅτι ab. V. — Lin. 10. λόγοι edd. cet. except. p. 135. V. in repetitione B. O. habent λόγῳ. — lin. 16. μὲν ab. V. — lin. 20. μὲν ab. O. — lin. 21. ἰσάκις πολλαπλάσια ἃ ἔτυχε. B. O. — lin. 23. ἴσον ἐστὶ, ἴσον V. — lin. 24. ἐλλείπει, ἐλλείπει V. — lin. 26. μὲν ab. O. — Lin. 26. ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. V. — p. 136. lin. 28. ἂν ᾖ V. P. — lin. 30. πολλαπλάσιον. V. — Lin. 7. 9. 14. p. 137. ᾗ pro ἥπερ V. — μὲν ab. B. O. — lin. 16. πέμπτον ab. V. — ἕκτον ab. V. — lin. 17. τὸ Γ' πρὸς . . . πρὸς τὸ Ζ. abs. V. — lin. 20. ὑπερέχει τοῦ τοῦ Δ. π. B. O. — Lin. 20. Α τοῦ Γ μεῖζόν p. 138. ἐστι. B. O. — lin. 21. μέγεθος ab. V. — lin. 29. καὶ ab. B. O. — Lin. 8. μεγέθη ab. V. — lin. 28. ἀνάλογον ab. V. — ἐστιν P. V. — p. 139. Lin. 2. ληφθ. κατ. abs. V. — lin. 14. 15. κἂν pro καὶ εἰ B. O. — p. 140. lin. 34. ἐστι ab. B. O. — Lin. 2. τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ p. 141. ΑΒ. — lin. 17. ἄλλα ἃ ἔτυχεν V. — lin. 23. ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ O. P. — ὑπερεχέτω ἄρα καὶ τὸ B quod meam adjuvat conjectu-

ram. — lin. 29. *ἐστι δὲ τὰ μὲν* B. O. — Lin. 20. *τὸ* ab O. — p. 142.
Lin. 2. *ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΘ.* O. — lin. 3. *ἄρα ἐστὶν* p. 143.
ab. P. — lin. 6. *ἄρα* ab. P. — *ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν.* O. — lin. 14. Hoc corollarium maxime vexari videmus in edd. — B. habet haecce: *Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ. * εἰ γὰρ ὡς ἡγούμενον τὸ ΑΒ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτοῦ, ἣν ὑπερέχει τοῦ ἑπομένου τοῦ ΕΒ, * καὶ ἔστιν ἀναστρέψαντι. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν* etc. — Eadem habent V. O. omissis tamen, iis quae intra asteriscorum signa leguntur. — In P. litterarum signa mutata sunt. Legimus enim. *Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ . . . . οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς . . . πρὸς τὸ ΑΕ, οὕτως . . . πρὸς τὸ ΓΖ. συγκείμενα ἄρα . . . ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΒ . . . πρὸς τὸ ΖΔ. καὶ ἔστιν ἀναστρέψαντι.* Hanc vero mutationem nihil ad locum emendandum facere viri docti jam docuerunt. — Addit B. Scholium quoddam sine titulo, quod etiam in cod. Mon. reperitur, hocce. *Γεγόνασι δὲ οἱ λόγοι καὶ ἐπὶ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων καὶ ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν. Ἐπειδήπερ ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ἔσται καὶ ὡς τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, οὕτως τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον, οὐκ ἔτι δὲ καὶ ἀντιστρέφει. Ἐὰν γὰρ ᾖ ὡς τὸ πρῶτον πρὸς δεύτερον, οὕτως τρίτον πρὸς τέταρτον· οὐ πάντως ἔσται καὶ τὸ μὲν πρῶτον τοῦ δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ δὲ τρίτον τοῦ τετάρτου, καθάπερ ἐπὶ τῶν ἡμιολιῶν ἢ ἐπιτρίτων λόγων (— ον, — ον* B.) *ἢ τῶν τοιούτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.* — lin. 19. *σὺν δύο λαμβανόμεναι καὶ ἐν τῷ* etc. B. P. — *καὶ* ab. O. et in repetitione B. — lin. 22. *καὶ ἐὰν* pro *κἂν* V. B. — lin. 26. *καὶ ἐν τῷ* B. P. — lin. 31. *ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε* B. O. — Lin. 2. *οὕτως* ab. V. — *ὡς δὲ* p. 144
Γ πρὸς B. V. — lin. 6. *τὸ τὸν μειζ.* etc. P. — *ἔχον ἐκεῖνο μ. ε.* B. O. Nos secuti V. — lin. 14. *σὺν δυο λαμβ. καὶ ἐν.* B. O. P. — lin. 19. *μεγέθη ἀνάλογον* V. — lin. 21. *καὶ ἐν τῷ* B. O. P. — lin. 34. *μεῖζόν ἐστιν ἄρα* V. P. — Lin. 2. *ὅτι κἂν ἴσον, ἴσον· δη-* p. 145
λονότι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ etc. B. O. — lin. 8. *σύνδυο λαμβ. καὶ* P. — *καὶ* ab. O. — lin. 16. *ὡς τὸ Α . . . τὸ Ζ* ab. V. — lin. 28. *σύνδ. λαμβ. κ.* edd. omn. — *τὰ ΟΛΝ* ab. B. — lin. 33. Post *τὸ Ζ* add. V. *Καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ.* — Lin. 11. *πρὸς* p. 146

τὸ *E* . . . οὕτως τὸ Δ. haec linea excidit B. — lin. 21. οὕτως ab. B. — lin. 24. ἄρα additum est a me. Praeterea totus hic locus καὶ ἐναλλὰξ . . usque ad πρὸς το *M*. (lin. 35.) deest O. in qua pro istis legimus haecce. *Καὶ εἴληπται τῶν μὲν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ Κ τῶν δὲ Γ Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ Μ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ, οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ.* Haec adsunt etiam in B. sed post finem eorum adduntur omnia ea, quae sequuntur inde a linea 24. καὶ ἐναλλὰξ usque ad finem τὸ *M*. — lin. 30. 35. οὕτως ab. B. — lin. 34. ἀνάπαλιν pro ἐναλλὰξ. B. — Lin. 2. δὴ P. — lin. 3. ἐστὶν ἀνάλογον B. — lin. 16. ἔχει V. — p. 147. lin. 22. Πρῶτον μὲν γὰρ V. P. — lin. 26. τὸ πρῶτον O. — Lin. 2. p. 148. ὡς ἄρα τὸ O. — lin. 11. δύο τῶν O. — τὰ δύο τῶν V. — lin. 15. μὲν ab. B. O. — lin. 19. οὖν ab. V. — lin. 20. τῷ μὲν *E* τὸ *AH*, τῷ δὲ *Z* τὸ *ΓΘ* B. O. — lin. 29. ἐστ ἄνισ. B. O. — lin. 31. μὲν ab. B. — Lin. 9. λόγων ab. O. — ὅροι ab. P. V. — λόγοι B. — p. 149. lin. 11. ἡ ab. V. — lin. 15. Definitio quinta, cujus in toto libro nusquam fit usus, in V. ad marginem adscripta est, quare omissa est in P. et a nobis uncis inclusa. Attamen, qui scholium, quod legimus initio libri in B. recte perpenderit, antiquissimis temporibus hanc definitionem elementis jam (nescio an a Theone) adjectam fuisse intelliget.

Σχόλιον εἰς τὸ $\overline{\varsigma}$ ἀδήλου.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν πηλικότητες τινῶν λόγων, πολλαπλασιαζόμεναι ποιῶσι λόγον. Ἐκεῖνος ὁ λόγος συγκεῖσθαι ἐκ τῶν λόγων ἐκείνων λέγεται, ὧν αἱ πηλικότητες ποιῶσιν αὐτὸν. πηλικότητας δὲ λέγει, ἀφ' ὧν ὀνομάζονται, ὡς ἀπὸ τῶν δύο, ὁ διπλάσιος. ἔστω λόγος τοῦ ὀκτὼ πρὸς τὸν $\overline{\delta}$ διπλασίων, καὶ αὖ τοῦ $\overline{\delta}$ πρὸς τὸν $\overline{\beta}$ διπλασίων καὶ αὐτὸς· ὁ τετραπλάσιος οὖν λόγος τοῦ $\overline{\eta}$ πρὸς τὸν $\overline{\beta}$ συγκεῖσθαι λέγεται ἐκ τῶν δύο λόγων, τοῦ τε $\overline{\eta}$ πρὸς τὸν $\overline{\delta}$ καὶ τοῦ $\overline{\delta}$ πρὸς τὸν $\overline{\beta}$, ὅτι αἱ πηλικότητες αὐτῶν ποιοῦσιν αὐτὸν οὕτως. Ἐπεὶ ὡς εἴρηται πηλικότητες οἱ ἀριθμοὶ λέγονται, ἀφ' ὧν αἱ σχέσεις ὀνομάζονται, οἷον ἀπὸ τῶν δύο καὶ τρία καὶ τέσσαρα, ὁ διπλάσιος, καὶ τριπλάσιος καὶ τετραπλάσιος λόγος. ὀνομάζεται δὲ καὶ τὸ ἥμισυ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς, ἔστι δὲ ὁ δύο τοῦ τέσσαρα ἥμισυς. λαμβάνω τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, ἀφ' ἧς ὁ δύο τῶν τεσσάρων ἡμίσυς λέγεται ὧν λεπτῶν πρώτων $\overline{\lambda}$, λαμβάνω καὶ ἕτερον ἥμισυ μονάδος, ἀφ' ἧς πάλιν ὁ $\overline{\delta}$ ἥμισυς λέγεται τοῦ $\overline{\eta}$, καὶ πολλαπλασιάζω

τὰ $\overline{\lambda}$ πρῶτα λεπτὰ ἐπὶ τὰ $\overline{\lambda}$ πρῶτα καὶ αὐτὰ λεπτὰ καὶ γίνονται δευτέρα λεπτὰ, ἐννακόσια. ταῦτα ἀναβιβάζω ἤτοι μοιράζω, γίνονται δέκα καὶ πέντε πρῶτα λεπτὰ, ἅτινα δεκαπέντε πρῶτα λεπτὰ, τέταρτον εἰσὶ μονάδος, τετριάκις γὰρ $\overline{\iota\varepsilon}$ $\overline{\xi}$. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ μέσος τοῦ $\overline{\beta}$ καὶ $\overline{\eta}$, ὁ $\overline{\mu}$, καὶ ἐπεὶ τὰ δύο τοῦ $\overline{\mu}$, εἰκοστόν ἐστιν, λαμβάνω τὸ εἰκοστὸν τῆς μονάδος ὂν λεπτῶν τριῶν. ἐπεὶ πάλιν ὁ $\overline{\mu}$ πενταπλάσιος ἐστὶ τοῦ $\overline{\eta}$, πεμπτὸν μέρος τοῦ $\overline{\mu}$ ὁ $\overline{\eta}$ λέγεται, πολλαπλασιάζω τὸν τρία, τὸ εἰκοστὸν τοῦ $\overline{\xi}$, παρὰ τὸν $\overline{\varepsilon}$, ἀφ' οὗ πέμπτον μέρος ὁ $\overline{\eta}$ τοῦ $\overline{\mu}$ λέγεται, καὶ γίνονται $\overline{\iota\varepsilon}$ λεπτὰ ἅπερ ἐστὶ τέταρτον μονάδος. καὶ οὕτως πάλιν ὁ $\overline{\beta}$ τοῦ $\overline{\eta}$, τέταρτός ἐστι. Ἔστω πάλιν μεταξὺ τῶν $\overline{\delta}$ καὶ $\overline{\iota\beta}$, ὁ $\overline{\eta}$. ἐπεὶ ὁ $\overline{\delta}$ ἥμισυς ἐστὶ τοῦ $\overline{\eta}$, ὁ δὲ $\overline{\eta}$ ὑφημιόλιος τοῦ $\overline{\iota\beta}$ λαμβάνω τὰ λεπτὰ $\overline{\lambda}$ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ $\overline{\mu}$ λεπτὰ τὸν ὑφημιόλιον τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ $\overline{\lambda}$ παρὰ τὰ $\overline{\mu}$, καὶ γίνονται χιλιαδιακόσια δευτέρα λεπτὰ· ἀναβιβάζω ταῦτα, γίνονται πρῶτα λεπτὰ $\overline{\kappa}$. τὰ $\overline{\kappa}$ τρίτον εἰσὶ μονάδος, καὶ ὁ $\overline{\delta}$ οὖν τρίτον ἐστι τοῦ $\overline{\iota\beta}$. ἔστω μεταξὺ τοῦ $\overline{\beta}$ καὶ τοῦ $\overline{\iota\beta}$ ὁ $\overline{\delta}$. καὶ ἐπεὶ ὁ δύο τοῦ $\overline{\delta}$ ἥμισυ ἐστὶν, ὁ δὲ $\overline{\delta}$ τοῦ $\overline{\iota\beta}$ ὑποτριπλάσιος, λαμβάνω τὰ λ λεπτὰ τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ καὶ τὰ $\overline{\kappa}$ τὸ τρίτον αὐτῆς, ἀπὸ γὰρ τοῦ τρία ὁ τριπλάσιος παρωνόμασται. Καὶ ποιῶ τὰ $\overline{\lambda}$ ἐπὶ τὰ $\overline{\kappa}$, γίνονται ἑξακόσια δευτέρα λεπτὰ· ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνονται δέκα πρῶτα· τὰ δέκα, ἕκτον μονάδος. καὶ ὁ $\overline{\beta}$ ἕκτον τοῦ $\overline{\iota\beta}$. πάλιν ἔστω μεταξὺ τοῦ $\overline{\delta}$ καὶ $\overline{\varepsilon}$, ὁ $\overline{\kappa}$. καὶ ἐπεὶ ὁ $\overline{\delta}$ ὑποπενταπλάσιός ἐστι τοῦ $\overline{\kappa}$, ὁ δὲ $\overline{\kappa}$ τετραπλάσιος τοῦ $\overline{\varepsilon}$, λαμβάνω τὸ τῆς μονάδος πέμπτον τὰ $\overline{\iota\beta}$ καὶ τὸν $\overline{\delta}$ ἀφ' οὗ ὁ $\overline{\varepsilon}$ τετραπλάσιον λέγεται τοῦ $\overline{\kappa}$, καὶ ποιῶ τὸ τέταρτον περὶ τὸ δωδέκατον, γίνονται $\overline{\mu\eta}$ ὑποεπιτέταρτος τῆς μονάδος. Καὶ ὁ $\overline{\delta}$ τοῦ $\overline{\varepsilon}$ ὑποεπιτέταρτός ἐστιν. ἔστω πάλιν μεταξὺ τοῦ $\overline{\beta}$ καὶ $\overline{\delta}$ ὁ $\overline{\gamma}$. καὶ ἐπεὶ ὁ $\overline{\delta}$ τοῦ $\overline{\gamma}$ ἐπιτριτός ἐστιν, ἐπεὶ ἔχει αὐτὸν καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ, ὅ ἐστι μονὰς, λαμβάνω τὴν μονάδα, ἥτις ἐστὶ λεπτὰ $\overline{\xi}$. ἀφ' ἧς, μονάδος τρίτον οὔσης τοῦ τρία, ὁ $\overline{\delta}$ ἐπίτριτος αὐτοῦ λέγεται. λαμβάνω καὶ τὸν $\overline{\lambda}$, τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ, διὰ τὸν τρία ἡμιόλιον εἶναι τοῦ $\overline{\beta}$. ὀνομάζεται δὲ τὸ ἡμιόλιον ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως. Καὶ ποιῶ τὸν $\overline{\lambda}$ παρὰ τὴν μονάδα, ἤτοι $\overline{\xi}$ λεπτὰ, καὶ γίνονται χίλια ὀκτακόσια δευτέρα λεπτὰ. ταῦτα ἀναβιβάζω καὶ γίνεται $\overline{\lambda}$ πρῶτα λεπτὰ· ταῦτα ἥμισυ μονάδος. καὶ ὁ $\overline{\beta}$ τοῦ $\overline{\delta}$, ἥμισύς ἐστιν.

Λόγος ἐκ δύο λόγων ἢ καὶ πλειόνων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, πολυπλασιασθεῖσαι, ποιῶσί τινα πηλικότητα λόγου. Ἐχέτω γὰρ τὸ $\overline{αβ}$ πρὸς τὸ $\overline{γδ}$ λόγον δεδόμενον, οἷον, διπλάσιον ἢ τριπλάσιον ἢ τινα ἄλλον, καὶ τὸ $\overline{γδ}$ πρὸς τὸ $\overline{εζ}$ καὶ αὐτὸ δεδόμενον. λέγω ὅτι ὁ τοῦ $\overline{αβ}$ πρὸς τὸ $\overline{εζ}$ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ $\overline{αβ}$ πρὸς τὸ $\overline{γδ}$, καὶ τοῦ $\overline{γδ}$ πρὸς τὸ $\overline{εζ}$, ἤτοι ὅτι ἐὰν ἡ τοῦ $\overline{αβ}$ πρὸς τὸ $\overline{γδ}$ λόγου πηλικότης πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν τοῦ $\overline{γδ}$ πρὸς τὸ $\overline{εζ}$ λόγου πηλικότητα, ποιεῖ τὴν τοῦ $\overline{αβ}$ πρὸς $\overline{εζ}$. ἔχω γὰρ πρότερον τὸ μὲν $\overline{αβ}$ τοῦ $\overline{γδ}$ μεῖζον, καὶ τὸ $\overline{γδ}$ τοῦ $\overline{εζ}$. καὶ ἔστω τὸ μὲν $\overline{αβ}$ τοῦ $\overline{γδ}$ διπλάσιον, τὸ δὲ $\overline{γδ}$ τοῦ $\overline{εζ}$ τριπλάσιον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν $\overline{γδ}$ τοῦ $\overline{εζ}$ τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ $\overline{γδ}$ διπλάσιον τὸ $\overline{αβ}$, τὸ ἄρα $\overline{αβ}$ τοῦ $\overline{εζ}$ ἐστὶ ἑξαπλάσιον, ἐπειδὴ ἐὰν τὸ τριπλάσιόν τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον. τοῦτο γὰρ ἐστι κυρίως σύνθεσις. Ἢ οὕτως· ἐπεὶ τὸ $\overline{αβ}$ τοῦ $\overline{γδ}$ ἐστὶ διπλάσιον, διῃρήσθω τὸ $\overline{αβ}$ εἰς τὰ τῷ $\overline{γδ}$ ἴσα, καὶ ἔστω ταῦτα τὰ $\overline{αη}$ $\overline{ηβ}$· καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{γδ}$ τοῦ $\overline{εζ}$ ἐστὶ τριπλάσιον, ἴσον δὲ τὸ $\overline{αη}$ τῷ $\overline{γδ}$, καὶ τὸ $\overline{αη}$ ἄρα τοῦ $\overline{εζ}$ ἐστὶ τριπλάσιον, ὅλον ἄρα τὸ $\overline{αβ}$ τοῦ $\overline{εζ}$ ἐστὶ ἑξαπλάσιον. ὁ ἄρα τοῦ $\overline{αβ}$ πρὸς τὸ $\overline{εζ}$ λόγος συνῆπται διὰ τοῦ $\overline{γδ}$ μέσου ὅρου συγκείμενος ἔκ τε τοῦ $\overline{αβ}$ πρὸς $\overline{γδ}$ καὶ τοῦ $\overline{γδ}$ πρὸς $\overline{εζ}$ λόγου. ὁμοίως δὲ κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ $\overline{γδ}$ ἑκατέρων τῶν $\overline{αβ}$ $\overline{εζ}$, συναχθήσεται. ἔστω γὰρ πάλιν τὸ μὲν $\overline{αβ}$ τοῦ $\overline{γδ}$ τριπλάσιον, τὸ δὲ $\overline{γδ}$ ἥμισυ τοῦ $\overline{εζ}$. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{γδ}$ ἡμισύ ἐστι τοῦ $\overline{εζ}$, τοῦ δὲ $\overline{γδ}$ τριπλάσιον τὸ $\overline{αβ}$· τὸ $\overline{αβ}$ ἄρα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ $\overline{εζ}$. ἐὰν γὰρ τὸ ἡμισύ τινος τριπλασιάσωμεν, ἥξει αὐτὸ ἅπαξ καὶ ἡμισυάκις. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν $\overline{αβ}$ τοῦ $\overline{γδ}$ ἐστὶ τριπλάσιον, τὸ δὲ $\overline{γδ}$ τοῦ $\overline{εζ}$ ἐστὶ ἥμισυ, ὅσων ἐστὶ τὸ $\overline{αβ}$ ἴσων τῷ $\overline{γδ}$ τριῶν, τοιούτων ἐστὶ τὸ $\overline{εζ}$ δύο, ὥστε ἡμιόλιον ἐστὶ τὸ $\overline{αβ}$ τοῦ $\overline{εζ}$. ὁ ἄρα τοῦ $\overline{αβ}$ πρὸς τὸ $\overline{εζ}$ λόγος συνῆπται διὰ τοῦ $\overline{γδ}$ μέσου ὅρου συγκείμενος ἔκ τε τοῦ $\overline{αβ}$ πρὸς $\overline{γδ}$, καὶ τοῦ $\overline{γδ}$ πρὸς $\overline{εζ}$ λόγου. Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω τὸ $\overline{γδ}$ ἑκατέρου τῶν $\overline{αβ}$ $\overline{εζ}$ μεῖζον. καὶ ἔστω τὸ μὲν $\overline{αβ}$ τοῦ $\overline{γδ}$ ἥμισυ μέρος, τὸ δὲ $\overline{γδ}$ τοῦ $\overline{εζ}$ ἐπίτριτον. ἐπεὶ οὖν ὅσων ἐστὶ τὸ $\overline{αβ}$ δύο, τοιούτων ἐστὶ τὸ $\overline{γδ}$ τεσσάρων, ὅσων δὲ τὸ $\overline{γδ}$ τεσσάρων, τοιούτων τὸ $\overline{εζ}$ τριῶν, καὶ ὅσων ἄρα τὸ $\overline{αβ}$ δύο, τοιούτων $\overline{εζ}$ τριῶν· συνῆπται ἄρα πάλιν ὁ τοῦ $\overline{αβ}$ πρὸς $\overline{εζ}$ λόγος διὰ τοῦ $\overline{γδ}$ μέσου

ὅρου, ὁ τῶν δύο πρὸς τὰ τρία. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν πτώσεων. καὶ δῆλον ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου λόγου εἷς ὁποιοσοῦν τῶν συντεθέντων ἀφαιρεθῇ, ἑνὸς τῶν ἁπλῶν ἀφανισθέντος, οἱ λοιποὶ τῶν συντεθέντων καταλειφθήσονται. — lin. 17. Legimus in O. in margine τινα cum Theone (cf. Theon ad Almagest. ed. B. p. 62.); in libb. vulgatis τινάς. — lin. 33. τὸ *ΑΓ* sic V. sed cet. Edd. habent τὴν ἀπὸ τοῦ *Α* ἐπὶ τὴν *ΒΔ* κάθετον ἀγομένην. — Lin. 6. ὁσαιδηποτοῦν ab. V. — Lin. 5. ὡς ἡ p.150.151. μέν. — lin. 6. *ΑΓΔ* τρίγωνον V. P. — lin. 7. τριγ. ab. B. O. — lin. 10. πρὸς τὸ *Ζ Γ*. B. O. — lin. 16. εὐθ. παράλληλος B. O. — lin. 16. λοιπὰς et lin. 18. δύο adjiciendum puto. — lin. 20. πλευρὰν παράλληλος O. — lin. 25. Ἴσον ἄρα B. O. — lin. 26. τε a me adjectum est. — lin. 29. τρίγων. ab. V. — lin. 34. δὴ καὶ ὡς V. — Ὡς δὲ τὸ *ΓΔΕ* πρὸς τὸ *ΑΔΕ* τρίγωνον, διὰ τὰ αὐτὰ οὕτως ἡ *ΓΕ* πρὸς τὴν *ΕΑ* B. — Lin. 6. κατὰ τὰ *ΔΕ* σημεῖα abs. B. — Lin. 13. p. 152. 14. 15. 16. 17. τρίγωνον post *ΑΔΕ* add. V. P. — lin. 13. ἡ ab. P. — lin. 20. καὶ ἐπὶ V. B. P. — lin. 27. τέμνει B. — lin. 28. τμήματα ab. B. — τῆς ab. O. — ἡ ab. B. O. — lin. 33. τέμνει edd. omn. — Lin. 8. ἐμπέπτωκεν B. — lin. 9. ἡ ab. B. — lin. 14. p. 153. ὄρα γωνία abs. B. O. — lin. 20. ὡς ἄρα ἡ V. P. — ἔστιν ἄρα ὡς ἡ B. — lin. 28. ἐστίν ab. B. O. — lin. 30. ἥκται παράλληλος B. O. — lin. 34. *ΒΑΔ* ἴσῃ, ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ *ΑΓΕ* τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ *ΓΑΔ* ἐστὶν ἴσῃ. V. P. — Lin. 3. γωνία ab. B. O. — lin. 5. τέμ- p. 154. νει B. O. — lin. 11. 17. πλευραὶ post ὑποτείνουσαι abjeci cum V. — lin. 12. Ἔστωσαν B. O. — lin. 13. μὲν ab. B. O. — lin. 21. 24. περὶ *ΑΒΓ* O. — lin. 25. ἄρα ab. V. — lin. 30. τῶν πλευρῶν ab. V. — Lin. 5. ἐναλλὰξ ἄρα B. O. P. nos secuti V. — lin. 6. p. 155. Ἐπεὶ οὖν B. O. — lin. 7. ὡς ἡ μὲν *ΑΒ* V. — lin. 9. καὶ ab. B. O. — ἐστι B. O. P. — lin. 31. ἡ πρὸς τὸ Δ λοιπὴ πρὸς τῷ *Η* ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 34. τριγώνῳ ab. V. P. — Lin. 3. γωνίας πλευραὶ p. 156. ὑποτ. B. — lin. 4. οὕτως ab. V. — lin. 6. καὶ ὡς V. P. — lin. 13. *ΖΗ* ἐστὶν ἴσῃ edd. omn. except. V. — lin. 20. ἐστ. ἴσ. abs. V. — lin. 21. καὶ ἡ μὲν ὑπὸ V. P. — lin. 23. Δ ἐστὶν ἴσῃ. B. O. — Lin. 9. γωνίᾳ B. — γωνία O. — ab. V. P. — lin. 11. B γωνία V. p. 157. — lin. 19. ἐστὶν ἴσῃ. B. O. — lin. 22. ἑκατέρα ἑκ. abs. V. P. — lin. 24. ἡ δὲ πρὸς τῷ *Η* τῇ πρὸς τῷ *Ε*. B. O. — Lin. 4. τὰς ἄλ- p. 158. λας B. O. P. nos secuti V. — lin. 12. τὰς πλευρὰς ἀναλ. τὰς ὑπὸ *ΑΒΓ*

ΔΕΖ B. O. — lin. 16. *ἐστι* P. B. O. — lin. 26. *ΑΒΗ γωνία* B. O. P. Nos cum V. — lin. 30. *ὑπόκειται οὕτως* V. P. — lin. 31 *καὶ ὡς . . . πρὸς τὴν ΒΗ* abs. V. — lin. 33. *ἐστιν* ab. B. O. — lin. 34. *ἡ ὑπὸ τῶν ΒΗΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΓΗ* B. O. — Lin. 2. p. 159. *τὸ Γ* B. O. — *καὶ* ab. V. P. — lin. 14. *ἐστὶν ἴσογ.* B. O. — lin. 20. *Τριγώνου δὲ* B. O. — Lin. 5. *καὶ ἀλλήλ.* B. O. P. — p. 160. lin. 7. *γωνία* ab. V. — lin. 16. *τῇ πρὸς τῷ Γ* abs. V. — lin. 19. *αὐτῶν* ab. V. O. P. — lin. 19. *ἄρα* post *ΑΒΔ* B. — lin. 22. *ἐστι* ab. V. — lin. 23. *τὸ ΑΔΓ τρίγ. ὅμ. ἐστ. τῷ ΑΒΓ τριγ.* B. O. — lin. 25. *ὅμοιόν ἐστι* post *τριγώνῳ* O. — lin. 35. *γωνίαν* V. B. — Lin. 4. *ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΑΓ, ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθὰς· ὅμοιον ἄρα* p. 161. etc. V. et B. in margine. (Quae ob brevitatem placerent si ita mutari possent: *ὑποτείνουσι γὰρ τὰς* etc.) — lin. 14. *ἐστὶν* ab. V. pro his: *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*, quae in *B* post finem corollarii. — lin. 22. *καὶ* ab. V. — lin. 26. *παράλληλος ἤχθω τῇ ΒΓ ἡ ΔΖ.* B. O. — lin. 24. *δεῖξαι* pro *ποιῆσαι* B. non solum hoc loco, sed etiam in fine propositionum 10. 11. 12. — Lin. 4. *εὐθείᾳ* ab. V. P. — lin. 6. p. 162. *δεῖ δὴ* etc. . . *τεμεῖν* abs. V. — O. habet *τετμημένη ἡ ΑΓ· δεῖ δὴ τὴν . . . . τεμεῖν. Ἔστω τετμημένη ἡ ΑΓ κατὰ τὰ ΔΕ.* idem *B* omisso verbo *τετμημένη*. — lin. 8. *Καὶ κείσθωσαν* edd. omn. — lin. 32. *δύο εὐθ.* ab. V. P. — lin. 33. *ἀνάλογον εὑρεῖν.* V. — Totum hunc locum, in quo verborum ordinem mutandum existimavi, sic habent edd. cet. *Ἔστωσαν αἱ δοθ. αἱ ΑΒ ΑΓ καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν· δεῖ δὴ τῶν . . . προσευρεῖν. Ἐκβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ ΑΓ ἐπὶ τὰ* etc. — Lin. 12. *ἀνάλογον αὐταῖς* p. 163. B. O. P. — *προσεύρεται* P. in hoc et sequentibb. 12. 13. — lin. 17. *εὐθειῶν* ab. V. P. — lin. 20. *τυχοῦσαν* ab. V. — lin. 24. *τῶν πλ.* ab. V. — lin. 25. *ἡ* B. O. P. — Lin. 19. *Τῶν ἴσων τε καὶ μιᾶν* p. 164. *μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων.* B. O. — lin. 21. *καὶ ὧν παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπ.* B. O. — lin. 25. *τε καὶ ἴσογ.* ab. O. — lin. 26. In hisce similiter ut supra mutavi ordinem. Edd. enim *πρὸς τῷ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΑΒ ΒΕ, ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ ΒΗ λέγω ὅτι* etc. . . . *πρὸς τὴν ΒΖ. Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ* etc. — Lin. 4. *ὡς τε Β.* — lin. 6. *Τῶν ἄρα ΑΒ ΒΓ.* — lin. 9. *ἀντιπε-* p. 165. *πόνθασιν αἱ . . . γωνίας καὶ* des. Vat. — lin. 17. *παραλληλόγρ.* post *ΖΕ* ab. B. O. — lin. 27. *τριγώνων* ab. O. — lin. 33. *αἱ πλευ-*

ρα ἐπὶ τὰς V. — Lin. 6. τι a me insertum. — lin. 8. τρίγωνον p. 166.
ab. B. O. — lin. 10. τὸ ΕΔΔ τρίγωνον B. O. — lin. 12. τριγώ-
νων ἄρα. B. O. — lin. 33. κἂν V. P. — καὶ εἰ B. O. — Lin. 5. p. 167.
αἱ τέσσαρες . . . αἱ V. P. — τέσσαρες . . . αἱ ΑΒ ΓΔ ΕΖ ἀνάλο-
γον B. O. — lin. 10. γὰρ ab. V. — lin. 17. παραλληλογρ. ἄρα B.
O. — lin. 18. αἱ ab. V. — lin. 24. ἡ Ε τῇ ΓΘ V. — O. addit πε-
ριεχόμενον ὀρθογώνιον post ΓΔ Ε. — lin. 27. τῶν ab. P. — lin. 28.
τῶν ab. B. O. — lin. 33. γάρ ἐστιν ἡ. V. P. — τῇ Ζ ἡ ΑΗ B.
O. — lin. 35. καὶ ἔστιν V. P. — Lin. 13. κἂν V. P. — καὶ εἰ B. p. 168.
O. Nos et in hoc et in antecedenti Scholiast. Mon. secuti sumus
hoc theorema singulis verbis repetentem. — lin. 20. τῆς μέσης τῆς
Β B. O. — lin. 29. τῷ ἀπὸ τῆς Β ἐστ. ἴσ. B. O. — Lin. 4. τῷ p. 169.
ὑπὸ τῶν ΒΔ B. O. — lin. 23. ἡ ὑπὸ ΗΑΒ ἴσῃ. B. O. — lin. 24.
ἴσῃ ab. B. O. — λοιπῇ ab. V. — Lin. 3. ἥτε ΖΓ V. — lin. 4. ἡ p. 170.
ab. P. — lin. 13. γωνίας αὐτῷ πλευρὰς B. O. P. — αὐτῶν V. Nos
abjecimus αὐτ. — lin. 17. τῷ ab. in edd. — τῷ ΓΕ ab. B. — lin. 24. τὸ
Β B. O. — Lin. 4. τριγώνων ἄρα B. O. — lin. 12. λόγον ἔχῃ V. p. 171.
— lin. 16. τριγών. ab. B. O. — lin. 19. τρίγ. post ΔΕΖ ab. B. O.
— lin. 24. ὅτι κἂν B. O. — lin. 26. τῆς πρώτης εἴδος — lin. 27.
Ἐπείπερ edd. omn. Omnia quae uncis inclusi, Euclidis esse non
videntur. — lin. 30. V. addit ad Coroll. ὅπερ ἔδ. δεῖξ. — lin. 32.
εἰς τὰ ὅμ. B. sed ceteris locis habet τε. — Lin. 2. τὸ ab. O. — p. 172.
lin. 11. γὰρ ab. B. — lin. 14. 15. 24. 25. 27. 28. τὴν ab. V. P. —
lin. 22. λοιπῇ ab. V. — lin. 30. εἰσὶ ab. B. O. — lin. 31. ἔτι
τὸ . . . τριγώνῳ abs. B. O. — Lin. 7. ἡ ab. B. O. — lin. 12. τὴν p. 173.
ab. P. — lin. 14. γωνία ab. B. O. — lin. 16. Ἔστι δὲ V. — lin. 18.
ἐστ. ἴσ. B. O. — lin. 22. et seqq. τὴν ab. ubique P. post praepos.
πρὸς. — lin. 25. ὡς μὲν ἡ V. P. — lin. 26. τὸ ab. P. — lin. 27.
τὸ ab. B. P. — lin. 28. ἄρα ab. B. O. — Lin. 2. τὸ ab. V. — lin. 7. τρίγ. p. 174.
ab. post ΗΑΘ B. O. — lin. 10. τρίγ ab. post ΕΓΑ B. O. — lin. 12. 18.
τριγ. ab. post ΖΗΑ O. B. — lin. 12. τὸ ab. B. — lin. 25. εἰς τὰ B. O. —
lin. 28. δὴ edd. cet. nos secuti V. — lin. 31. καὶ ab. B. O. — lin. 32. pro
εἰσὶ mallem ἐστὶ. — lin. 33. In fine addit V. ὅπερ. ἔδ. δεῖξ. — Lin. 6. p. 175.
καὶ ab. B. — δὴ V. — lin. 8. πλευρὰν ab. B. O. — lin. 14. Ad-
jecta est demonstratio altera, quam vide in Append. — lin. 19.
ἐστ. ὅμ. O. — lin. 25. ὥστε καὶ . . . ἀνάλογον ἔχει ab. V. P. —
lin. 29. Haec conclusio desideratur in codd. et edd. Adsunt tamen

notissima illa verba ὅπ. ἔδ. δ. — Lin. 5. αὗται O. P. (B. αὐται.) p. 176. — lin. 16. ἡ μὲν *AB* B. O. — lin. 17. ἡ ab. P. — lin. 20. οὕτως καὶ τὸ B. O. — lin. 21. καὶ ab. O. — καὶ ὡς . . . τὸ *NΘ* abs. B. — lin. 25. καὶ ab. B. O. — lin. 27. V. P. ita initio demonstrationis: *Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως EZ πρὸς τὴν HΘ· ἔστω ὡς ἡ AB* etc. — Lin. 4. καὶ ὡς . . . τὸ *NΘ* ads. B. O. — p. 177. lin. 5. *NΘ* καὶ *ΣP* B. O. — lin. 8. ἐστὶν ab. V. P. — lin. 15. καὶ ὅμοια ᾖ B. O. Dubitari potest, num Euclidis sit hoc corollar. — lin. 28. τῆς in τῇ mutandum est. — Lin. 6. τοῦ τε . . . p. 178. τὴν *ΓE* ab. V. — lin. 18. 19. τὴν ab. V. — lin. 32. παραλληλόγρ. post *ΓZ* ab. B. O. — Lin. 11. αὐτῷ O. — lin. 13. τῷ τε abs. P. p. 179. O. — lin. 18. τῶν πλευρ. ab. V. — lin. 19. ἄρα post ἀνάλογον ejeci cum V. — lin. 22. ἡ ab. O. — lin. 23. συνθέντι ἄρα B. O. — lin. 24. πρὸς *AH* ἐναλλάξ etc. V. — lin. 26. τῶν *ABΓΔ EH* ἄρα. — lin. 30. Verba ὑπὸ *ΑΔΓ* . . . τῇ abs. V. — lin. 34. abjeci ἄρα post ὅλον cum cod. V. — Lin. 3. ἴσογ. ἐστ. ante τῷ *EH* habent p. 180. B. O. — lin. 7. ὡς *ΓB* πρὸς O. — lin. 15. καὶ post δὴ abjeci cum V. — lin. 18. παραλληλογρ. ab. V. — lin. 29. ᾧ δὲ δεῖ ἴσον V. P. — lin. 31. γὰρ post *Παραβεβλ.* abjiciendum putavi. — Lin. 5. p. 181. τε ab. B. O. — lin. 8. ἐστιν ab. V. — lin. 12. τρίγ. ab. B. O. — lin. 25. τῷ *Δ* ab. B. O. — συνίσταται Vulgo. — lin. 32. παραλληλογρ. γὰρ V. P. — lin. 33. ἀφαίρησθω B. O. — Lin. 4. αὐτῶν ἡ p 182. διάμετρος ἡ *AΘΓ*, καὶ ἤχθω etc. B. O. et multi codd. — lin. 8. αὐτὴν ab. B. O. — lin. 9. ὅμοιον . . . τῷ *KH* ab. V. — lin. 12. καὶ ὡς ἡ V. P. — lin. 14. *AE* οὕτως . . . τὴν *AK* B. O. — ἄρα ab. V. — lin. 17. οὐκ ἄρα ἐστὶ B. O. — lin. 27. καὶ ab. B. — lin. 32. τὴν αὐτὴν *AB* V. P. — lin. 34. τῷ *ΔB*. — Lin. 2. τῆς p. 183. *AB* ἀναγραφέντι V. — lin. 5. παραλληλογρ. ab. V. — lin. 6. et seq. *B* habet *ΔB* pro *ΓE* et *ZE* pro *KΘ*. — lin. 15. κοινὸν δὲ τὸ V. — lin. 18. ἴσ. ἐστ. . . . ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 20. καὶ ab. V. P. — lin. 22. *B* addit conclusionem: *πάντων ἄρα* etc. Reliqua demonstratio inscribitur ἄλλως. O. adnotat: „Hic est hujus theorema„tis casus secundus et non altera propositionis demonstratio: et ideo „conclusionem universalem in codd. tam Mss. quam impressis casui „primo subnexam ad secundi finem apposuimus.“ — Lin. 2. Κοινὸν p. 184. ἔστω τὸ B. O. — lin. 10. ὅντι ab. V. P. — lin. 10. Vulgo δεῖ δή. — lin. 13. τῶν ἐλλειμάτων B. V. P. — τοῦ τε ἐλλείματος τοῦ ἀπὸ

O. — lin. 14. *καὶ ᾧ δεῖ* B. — lin. 15. *ἐλλείπειν παραλληλογράμμου* O. — lin. 18. *ἀπὸ τῆς AB ἀναγραφομένου ὁμοίου* V. — lin. 19. *τῆς AB* ab. O. P. B. — *ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμάτων* O. P. — lin 27. in O. P. B. sequuntur verba *τὸ δὴ AΠ ἤτοι ἴσον ἐστὶ τῷ Γ ἢ μεῖζον αὐτοῦ διὰ τὸν ὁρισμὸν*, quae cum Scholion esse videantur, ejeci cum V. — lin. 32. *τῷ ΠΒ* B. — lin. 34. *τῷ EZ . . . τὸ EZ* O. — Lin. 2. *τὸ EZ* O. — lin. 4. *ἐστὶν* ab. V. — lin. 5. p. 185. abjeci *οὖν* post *Ἔστω* cum V. — lin. 9. *τῇ KΛ μὲν* V. — *μὲν τῇ KΛ* B. — *τῷ KM τὸ ΠΠ* V. P. — O. habet *ΞO* pro *ΠΠ* et *EZ* pro *ΠΒ*. — lin. 20. *τὸ PΣ* O. — lin. 25. *ἐστ. ἴσ.* V. P. — Lin. 6. p. 186. *ὑπερβαλεῖν* O. P. — B. quasi utrisque satis factura *παραβαλλεῖν*. — lin. 12. 13. *EΛ* pro *BZ* O. — lin. 14. *ὅμ. ἄρα . . . τῷ EΛ* abs. V. — lin. 26. *οὖν* ab. V. — lin. 29. *ἴσ. ἔστ.* B. O. — Lin. 4. *τὸ* p. 187. *EΛ . . . τῷ OΠ* O. (*τὸ . . . τὸ* B.) — *Τετράγωνον δὲ* B. O. P. — *δεῖξαι* pro *ποιῆσαι* B. — Sequitur demonstratio altera, quam vide in append. — Lin. 3. 7. *τε* ab. B. O. — lin. 11. *ἄρα* ab. V. — lin. p. 188. 16. *ἡ* ab. B. O. — lin. 30. Seq. demonstratio altera, quam vide in append. — Lin. 12. *καὶ αἱ ἐναλλὰξ* P. — *καὶ ἐναλλὰξ* O. — p. 189 lin. 16. *τὰ* ab. O. — lin. 26. *Ἀλλ' αἱ ὑπὸ . . . ἴσαι εἰσί.* abs. V. — Lin. 7. 8. Quae uncis inclusa sunt, in V. inter lineas exarata sunt p. 190. manu aliena et secunda pars demonstrationis, quae ad sectores attinet nec non corollarium in margine manu aliena exarata sunt vocabulis contractis. cf. append. IV. pag. 306. — lin. 15. Quae unci continent abs. V. — lin. 16. *ὁσαιδηποτοῦν κατὰ τὸ ἑξῆς* B. O. — lin. 18. *ὁσαιδ. ἴσ.* B. O. — lin. 23. 24. *τῆς* scripsi pro vulg. *τῇ.* — lin. 26. *Εἰ ἄρα* V. B. P. — *καὶ εἰ* O. — lin. 31. *γωνίας* ab. V. — Lin. 6. *γωνίας* ab. B. O. — lin. 7. *ἡ* ab. B. O. — lin. 10. *δι-* p. 191. *πλασία* V. — lin. 13. *τὴν EΘZ* V. — lin. 25. *ἐστὶ* ab. B. O. — lin. 28. *ὅλον ABΓ κύκλ.* B. O. — lin. 29. *εἰς τὸν αὐτὸν κύκλ.* B. O. — lin. 30. *γωνίᾳ* ab. V. P. — Lin. 4. *ἑκατέρῳ τῷ ΠΚΓ* etc. p. 192. B. O. — lin. 6. *Διὰ τὰ . . . ἀλλήλοις εἰσὶν* ab. V. — lin. 12. *Εἰ ἄρα* V. B. P. — *καὶ εἰ* O. — lin. 13. *περιφερείᾳ* ab. O. — lin. 15. *ὑπερέχει . . . . ἐλλείπει, ἐλλείπει* abs. V. — Lin. 4. *καθ' ὃ ἕκαστον* p. 193. O. — *καθ' ἣν ὃ ἕκαστον* B. V. P. Nos aut *ὃ* in *ὁ* mutandum aut plane abjiciendum putamus. — lin. 15. *ἡ μονάδι* V. — lin. 19. *περισσός ἐστιν ὁ* B. O. V. P. — lin. 21. def. 10. ab. in edd. B. O. et in nonnullis aliis codd. adest in V. — lin. 23. *ἐστιν ἄρ.* B. O. —

Lin. 2. δὲ ab. B. O. — lin. 9. ὅσαι ἴσαι εἰσὶν B. O. — τοσάκις p. 194.
O. — lin. 16. στερεός ἐστι V. — lin. 20. ὁ ab. V. — lin. 22. ἴσων
ἀριθμῶν B. — O. abjecit ἴσων. — lin. 25. Edd. add. ὧσιν post
μέρη, quod abjiciendum mihi videbatur. — Lin. 4. δὲ ab. B. O. — p. 195.
lin. 5. ἐὰν initio propositionis positum est in B. O. — lin. 6. 11.
τὸν πρὸς ἑαυτοῦ edd. omn. — ληφθῇ fortasse in λειφθῇ mutan-
dum esse videtur et hoc loco et in sequentibus. — lin. 9. ἀνί-
σων ab. V. — lin. 13. μετρῇ B. O. — lin. 23. 25. μετρήσει δ
E B. O. — lin. 26. τὸν *ZΘ* μετρεῖ V. — Lin. 3. καὶ ἔστω . . . ὁ p. 196.
ΓΔ ab. V. — lin. 17. ἐλάσσονα ab. B. O. P. — lin. 18. Post
μετρείτω additur in *E* ὁ δὲ *AE* ἑαυτοῦ ἐλάσσονα οὐ μετρεῖ τὸν
ΓZ. — lin. 32. τὸν *ΔZ* μετρεῖ V. P. — Lin. 7. Verba ὅπερ. ἔδ. δ. p. 197.
in V. post corollarium scripta sunt. — lin. 20. κοινὸν μεγ. μέτρ.
B. O. — lin. 21. τις ab. B. O. P. — lin. 23. ἄρα μετρήσει V. P.
— lin. 24. τῶν *AB* ἄρα B. O. — lin. 28. τις et ὧν abs. V. P. —
Lin. 3. τὸ Δ quod omnes habent edd. in τὸν Δ mutandum est. — p. 198.
lin. 10. δὴ ab. V. — lin. 15. ἄρα ab. B. O. — lin. 19. μέτρον
μετρεῖ O. — μέτρον ab. B. — lin. 24. Adest conclusio: Τριῶν ἄρα
ἀριθμῶν δοθέντων εὕρηται τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον· ὅπερ ἔδει
ποιῆσαι. B. Idem O., quae tamen post δοθέντων addit: μὴ πρώ-
των πρὸς ἀλλήλους; cum hac congruunt P. V. sed habent δεῖξαι
pro ποιῆσαι. — lin. 25. Totum corollarium ab. V. — lin. 29. τό-
πον B. — Lin. 5. *BΓ* πρότερον B. O. — lin. 6. πρότερον ab. B. p. 199
O. — V. P. habent Ἔστ. πρότ. οἱ *A BΓ* πρῶτ. etc. — lin. 10.
δὴ πρῶτ. πρ. ἀλλ. οἱ *A BΓ* B. O. — lin. 12. οὖν ὁ *BΓ* τὸν *A*
μετρεῖ B. O. — lin. 16. ἴσος δὴ etc. V. P. — ἴσος δὲ ὁ Δ ἑκατέρᾳ
τῶν *BE EZ* B. O. — lin. 26. ἀριθμοῦ ab. V. — lin. 32. ὅσοι ἄρα
ἀριθμοί εἰσιν ἐν τῷ *BΓ* ἴσοι τῷ *A* B. O. — Lin. 2. ἀριθμοὶ ab. p. 200.
B. O. — lin. 7. τὸ *Δ*· ὁ *BH* ἄρα καὶ *EΘ* etc. B. O. — lin. 8.
εἰσί ab. P. — lin. 8. Καὶ διὰ ταῦτα ὁ *HΓ* τῷ *A* ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ
ΘZ τῷ *Δ*· καὶ οἱ *HΓ ΘZ* ἄρα τοῖς *AΔ* ἴσοι εἰσίν B. O. — Διὰ
τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ *HΓ* τῷ *A* ἴσος ἐστίν· ὁ δὲ *ΘZ* τῷ *Δ* καὶ οἱ *HΘ*
ΘZ ἄρα τοῖς *AΔ* ἴσοι εἰσὶν V. P. — lin. 12. τῷ *A* B. O. — lin.
18. ᾗ hic omissum et post μέρη scriptum in O. — in B. O. P.
utroque loco legitur ᾗ. — lin. 28. ἐστὶ ab. V. — Lin. 3. αὐτὸ τὸ p 201.
μέρος. B. O. — lin. 5. post τοῦ *Γ* habet V. καὶ ὁ *ΘE* τοῦ *Z*· ὅ
ἄρα μέρος ἐστὶ τὸ *HB* τοῦ *Γ* καὶ συναμφότερος etc. — lin. 17. ὁ

λοιπὸς B. O. P. — lin. 18. ὁ ὅλος B. O. P. — lin. 25. ἐστι καὶ ὁ *AB* B. O. P. — lin. 26. ὁ *AB* ἄρα . . . μέρος ἐστὶν abs. V. — lin. 29. ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 30. ἐστὶ ab. V. — lin. 31. τοῦ *ZΔ* B. O. — Lin. 2. ὃ ἄρα . . . τοῦ *ΓΔ* abs. V. — lin. 5. ὁ ὅλος B. O. P. p. 202. — lin. 30. *Κείσθω* ἴσος τῷ *EΔ* ὁ *KN* B. O. — lin. 32. ἐστὶ ab. B. O. — Lin. 5. Ἴσος δὴ edd. omn. — lin. 12. τὸ αὐτὸ μέρος ᾖ p. 203. V. P. — lin. 18. Post *BΓ* O. et P. inserunt: ἐλάσσων δὲ ἔστω ὁ *Δ* τοῦ *Δ*. — lin. 20. τὰ αὐτὰ ab. B. O. P. — lin. 22. καὶ ab. V. — Ἴσος δὴ V. P. — lin. 12. 16. τὸ αὐτὸ ab. B. O. — lin. 14. p. 204. Post μέρη addit O. Ἔστω δὲ ὁ *AB* τοῦ *ΔE* ἐλάσσων. — lin. 15. ὅτι ab. P. — lin. 24. τῷ *Γ* B. O. — lin. 27. μέρη τὰ αὐτὰ B. — lin. 28. τῷ *ΘE*. — lin. 31. ὁ *HB* τοῦ *ΘE* . . . . μέρος ἐστὶ καὶ abs. B. O. — Lin. 3. μέρος ἐστὶ B. O. — lin. 4. ἄρα ab. B. O. — p. 205. lin. 19. ἅπερ *AB* B. O. P. — lin. 20. ὡς *EB* P. — lin. 33. τὰ αὐτὰ abs. B. O. P. — Lin. 17. τὰ αὐτὰ ab. B. O. — lin. 22. καὶ p. 206. post λαμβανόμενοι in edd. omnib. — lin. 25. γὰρ post Ἔστωσαν ejeci cum V. — lin. 27. καὶ ab. V. et in edd. ceteris ut supra post λαμβ. positum. — Lin. 12. fortasse scribendum τὸν τέταρτον. — p. 207. lin. 16. ὁ ab. O. — lin. 22. Ἔσται δὲ P. — lin. 27. ἔσται ἄρα V. P. — lin. 33. ἀριθμὸς ab. V. B. O. — Lin. 4. ἄρα ὁ *Δ* τὸν *Δ* p. 208. μετρεῖ V. — lin. 16. ἀριθμὸν ab. B. O. — lin. 31. λόγον ἔχουσι πολλαπλασιαθέϊσιν B. O. — Ἔχουσι λόγον πολλαπλ. V. P. — Lin. 33. p. 209. γινόμενος B. O. — Lin. 3. 4. γινόμεν. B. O. — lin. 4. καὶ δευτέρου p. 210. B. O. — lin. 8. οὕτως ab. B. — lin. 17. Ὡς δὲ ὁ *Γ* B. O. — Lin. 10. ἴσος ἐστί B. — lin. 11. ἀπὸ τῶν O. — lin. 19. 20. ἐστὶ p. 211. ab. B. — lin. 25. ἀπὸ τῶν B. — lin. 32. ἔχοντας αὐτοῖς B. O. — Lin. 14. ἐπεὶ οἱ *ΓΗ ΓΔ* ἴσοι ἀλλ. εἰσ. B. O. — lin. 15. *ΘZ* ἀλ- p. 212. λήλοις ἴσοι B. O. — lin. 16. τὸ ab. B. — lin. 23. καὶ post λαμβ. in edd. omn. — Totam hanc propositionem 22. in cod. V. aliena manu, vicesimam eadem manu, utramque vocabulis contractis ad marginem adscriptam esse notavit Peyrardus. — 27. αὐτὸ τὸ μέρος O. — Lin. 5. καὶ ut supra post λαμβ. in edd. omnib. — lin. 6. οἱ *ΔEZ* p. 213. post πλῆθος scriptum V. P. — lin. 17. ἐστιν initio lineae ab. B. O. — lin. 26. εἰσιν οἱ . . . . αὐτοῖς desunt B. O. — lin. 28. ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ V. P. — ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐν τῷ B. O., unde utrumque scribendum esse conjicimus. — Lin. 11. ἐλασσον. ἀρ. ἐν edd. omn. — p. 214. Lin. 25. ἔστωσ. πρῶτ. B. O. — lin. 28. τις τοὺς *ΓΔ* ἀριθμούς. — p. 215.

Lin. 2. Ὁσάκις δὲ B. O. — lin. 15. τε ab. B. O. — lin. 29. Καὶ p. 216.
ab. V. — lin. 30. ὁ Α τῷ Δ καὶ ὁ Δ τῷ Β καὶ οἱ ΑΔ ἄρα B. —
Lin. 15. πρῶτός ἐστιν πρὸς τὸν Γ B. O. — lin. 27. ποιῇ τινας V. p. 217.
P. — lin. 28. κἂν οἱ edd. omn. — lin. 30. κἀκεῖνοι edd. omn.
— Lin. 2. ἀριθμ. δύο V. P. — lin. 5. ἑαυτὸν μὲν V. P. — lin. 10. p. 218.
Ἐπεὶ ἄρα οἱ B. O. — lin. 33. τις τοὺς ΓΑ ΑΒ ἀριθμός. — Lin. 7. p. 219.
Διὰ τὰ αὐτὰ . . . . ἀλλήλους εἰσὶν abs. B. O. — lin. 10. πρὸς ἀλλήλους πρῶτοι B. O. — lin. 13. Εἰ γὰρ μή εἰσι πρῶτοι πρ. ἀλλ. οἱ ΑΒ ΒΓ B. O. — Εἰ γ. μ. εἰσι πρῶτ. οἱ ΑΒ ΒΓ πρὸς ἀλλ. V. P. —
lin. 14. τὶς τοῦς ΑΒ ΒΓ ἀρ. V. P. — lin. 29. post ὁ Γ add. B.
O. ὁ Γ (ἄρα O.) οὐκ ἐστι μονάς, quae glossema esse videntur.
— Lin. 6. δὲ ab. B. — lin. 27. ὁ Δ ab. V. — Lin. 6. 10 et 25. p. 220. 221.
Pro δῆλον etc. V. P. habent γεγονὸς ὂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. — lin. 8.
B. male: καὶ ἐπεὶ ὁ Β τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Γ ἄρα etc. — lin. 12.
γινομένης edd. omn. — lin. 14. οὐ ληφθ. edd. omn. — lin. 17.
πρωτ. ἀρ. abs. B. O. — Adest conclusio Ἅπας ἄρα συνθ. etc. in
edd. omn. — Sequitur praeterea demonstratio altera, quam vide
in Append. I. — Lin. 5. οἱ ΑΒΓ γὰρ ἤτοι edd. omn. — lin. 11. p. 222.
ἐν ab. V. — lin. 14. ἄρα ab. B. — lin. 16. αὐτοῖς τοῖς ΑΒΓ B. O. —
lin. 21. τινες ab. V. — lin. 22. ἐλάχιστοι addendum censui ex causis supra exhibitis. — lin. 26. Post μονάδας legimus in B. Τὸ
Μ ἄρα τὰ ΑΒΓ μετρεῖ. — Lin. 5. ἐλάχιστοι vide supra. — lin. p. 223.
13. γὰρ addunt post ΑΒ edd. omn. — Lin. 2. μετροῦσι B. O. — p. 224.
lin. 3. Quae uncis inclusa sunt in Cod. V. aliena manu inter lineas
scripta leguntur. — lin. 22. Post Ε addunt V. P. ἀλλ' ὡς ὁ Α
πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. — Lin. 9. Εἰ γὰρ οὐ μετ. p. 225.
edd. omn. — lin. 12. τὸν ΔΖ μετροῦσι V. P. — lin. 21. μετρήσουσιν V. P. — lin. 25. οἱ ΑΒΓ ἄρα . . . μετρήσουσι ab. V. —
οἱ ἄρα ΑΒΓ B. O. — lin. 30. τὸν Ε ab. V. — lin. 33. μετροῦσι
B. O. — Lin. 3. 7. 9. μετρήσουσι V. P. — lin. 5. ὁ ante ὑπὸ ab. p. 226.
edd. omn. — lin. 8. τὸν Ε ab. V. P. — lin. 9. δὴ ab. B. O. —
lin. 11. Καὶ ab. B. — lin. 16. ὥστε ab. V. P. — lin. 17. ὁ ἐλάχιστος
ἄρα ὑπὸ V. P. — lin. 17. μετρήσ. τ. Ζ B. O. — lin. 21. μετροῦσι
B. O. — lin. 26. μετρεῖται edd. omn. — lin. 31. καὶ ab. B. —
Lin. 13. ἀριθμὸς ab. V. P. — lin. 17. ἄρα μέρος O. — lin. 27. p. 227.
τὰ δοθέντα μέρη ἕωσαν δὲ τὰ ΑΒΓ B. — τὰ μέρη τὰ ΑΒΓ O. —
τὰ δοθέντα μέρη τὰ ΑΒΓ P. Nos Cod. V. secuti sumus. —

lin. 29. ἀριθμοὶ ab. V. — lin. 30. ὁ ab. V. — lin. 32. Ἐπεὶ οὖν . . . . μετρεῖται abs. V. P. — ἄρα ab. B. O. — Lin. 3. ὁ *H* p. 228. ἐλάχιστος . . . . μέρη ab. V. P. — ἔστω τις V. P. — τις ab. B. O. — lin. 5. ἔστω ab. V. P. — lin. 6. καὶ ab. in edd. omn. — Lin. p. 229. 15. τῶν *ABΓΔ* ab. V. — lin. 16. τῶν *EZHΘ* ab. V. — lin. 17. οὕτως ab. V. B. — lin. 18. οἱ δὲ ἐλάχ. abs. B. O. — lin. 20. ὅ τε . . . . τοῦτ' ἔστιν abs. B. O. — Lin. 4. ὅσους ἐπιτάξῃ τις B. p. 230. O. — lin. 18. ἀριθμὸς δὴ . . . πεποίηκεν abs. V. — lin. 20. οὕτως ab. V. — lin. 23. ἑκάτερον τὸν V. — lin. 34. Ἀλλ' ὡς ὁ *Δ* B. O. — Lin. 3. οὕτως ab. V. — lin. 6. Ἐδείχθη δὴ καὶ ὡς B. O. — p. 231. lin. 8. τε ab. V. — lin. 12. οἱ δὲ ἐλάχ. . . . αὐτοῖς abs. V. — 16. 17. τὸν *TE* V. — lin. 26. ὅτι ἂν τρεῖς V. — Lin. 6. ἀριθμοὶ μὲν. p. 232. B. O. — lin. 8. αἰεὶ B. O. — ἂν ab. V. — B. O. habent ἕως οὗ. — lin. 11. B. O. addunt post *AMNΞ*. Οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ *AΞ* πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ *EZ* πρῶτοί εἰσιν· ἑκάτερος δὲ αὐτῶν ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν *HK* πεποίηκεν. — lin. 15. τὸν ἕτερον τῶν B. O. — lin. 16. B. O. post πεποίηκεν, omissis quae sequuntur οἱ *HK* . . . εἰσὶν, sic habent: Οἱ *HK* ἄρα πρῶτοι καὶ οἱ *AΞ*. — lin. 23. Καὶ εἰσὶν οἱ V. — lin. 24. εἰσιν, ὅσος δὲ . . . τῷ Δ abs. V. — lin. 29. 34. ἑξῆς ἀνάλογον V. P. — Lin. p. 233. 6. καὶ ab. B. O. — lin. 15. 19. ἑξῆς ἀνάλογον V. — lin. 20. καὶ ἐν τῷ τοῦ V. — lin. 20. ἔσονταί τινες . . . . λόγοις abs. V. — lin. 26. οἱ δὲ ἐλάχ. ab. V. — lin. 32. ἄρα τῶν ὑπὸ *BΓ* B. O. — Lin. 3. ἐν ab. V. — lin. 5. ἐλλήφθω ὑπὸ V. — lin. 10. Καὶ ab. p. 234. V. — lin. 18. 23. ἑξῆς ἀνάλογον V. — τε ab. B. O. — lin. 19. ἔτι ab. B. O. — lin. 20. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι ἐν τοῖς *A* . . . *Z* λόγοις· Εἰ γὰρ μή, ἔσονταί τινες etc. V. P. — lin. 27. τὲ ab. B. O. — Lin. 7. 9. ἑξῆς ἀνάλογον V. — lin. 15. μὲν ab. V. — lin. 21. p. 235. ὁ *H* V. — lin. 22. ὁ *Δ* V. — lin. 23. Καὶ ὁ *Δ* . . . ποιείτω abs. B. O. — lin. 25. Οἱ ἄρα etc. . . . ἐκ τῶν πλευρῶν abs. V. P. Ad haec verba in margine ed. B. haec legimus: „Οἱ ἄρα *Θ* etc. non „habet exemplar alterum et videtur nihil huc pertinere." — In ed. O. vero haecce: „Quae uncis inclusa dedimus (scil. Οἱ . . . τὸν *K*) „in quibusdam exemplaribus desiderantur et commode quidem „abesse possunt; deinde eadem exemplaria pro ὁ *Δ* γὰρ τὸν habent „καὶ ὁ *Δ* τὸν etc." — Sequentia autem Καὶ ἐπεὶ etc. sic leguntur in B et O.: Λέγω οὖν ὅτι ἔστιν ὡς ὁ *A* πρὸς τὸν *B*, οὕτως ὁ *H*

πρὸς τὸν Κ· ὁ Δ γὰρ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα etc. — Lin. 9. οὕτως ab. V. — lin. 15. μετρεῖ edd. omn. p. 236. — lin. 22. Post μετρήσει habent. B. O. Λέγω γὰρ ὅτι οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Γ. Ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ ΑΒΓ etc. — lin. 32. μετρεῖ ἀριθμὸν B. O. — lin. 34. οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ abs. V. — Lin. 7. p. 237. μετρεῖ edd. omn. — lin. 12. οὐ μετρεῖ V. — lin. 13. Ὅπερ . . . μέτρων abs. V. P. — lin. 14. μετρεῖν mutavi in μετρῶν. — In seqq. habent edd. omn.: Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Δ. — lin. 21. αὐτοῖς ab. V. — lin. 32. οἱ ab. V. — Lin. 11. τοῦτ' ἔστιν . . . ἑπόμενον p. 238. abs. B. O. — lin. 13. ὁ Η post μετρεῖ B. O. — ὁσάκις δὲ B. O. — 19. καὶ a me receptum ex V. — lin. 21. ἀνάλογ. εἰσ. ἑξ. B. O. — lin. 32. μονάδος ἑξῆς μεταξὺ B. O. — Lin. 3. μεταξὺ ab. O. — p. 239. lin. 7. τῆς Ε μονάδ. B. O. — lin. 30. πρὸς τὸν Θ B. O. — lin. 32. ἐν αὐτῷ μονάδ. edd. omn. — lin. 34. ὁ Ε τὸν V. — Lin. 5. Ὁ δὲ p. 240. Μ τῷ Α ἴσ. ἐστ. B. O. — lin. 13. ἐμπεπτώκασιν edd. omn. — lin. 16. ἀριθμῶν ἑκατέρου καὶ V. — lin. 18. ἑξῆς μεταξὺ B. O. — lin. 24. τε ab. B. O. — Lin. 3. ἀριθμὸς ex V. receptum. — lin. 5. p. 241. μονὰς ab. V. — lin. 15. πεποιήκεν ab. B. O. — Lin. 2. καὶ ὡς .... p. 242. πρὸς τὸν Α abs. B. O. — lin. 11. 16. 34. ἀναλογὸς B. — lin. 20. ἀριθμὸς ab. V. — lin. 26. Pro verbis: Πάλιν ἐπεὶ . . . . . ἔστιν ἄρα ὡς legitur in V. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς. — lin. 29. καὶ τὸν αὐτὸν τὸν Δ B. O. — lin. 31. Ἀλλ ὡς . . . πρὸς τὸν Ε abs. V. P. — lin. 34. ὁ Ε ab. V. — Lin. 8. πλευρὰν ab. V. — lin. 24. p. 243. ὁ Γ ἄρα B. O. — lin. 25. ὁ Γ ἄρα . . . πεποίηκε abs. B. O. — Lin. 5. ἐπεὶ ab. V. — lin. 12. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς etc. V. — p. 244. lin. 14. ὡς ἄρα . . . τὸν Κ abs. in edd. omn. — lin. 16. ἀριθμοὶ ab. B. — lin. 22. ἄρα ab. V. — lin. 27. τινὰς edd. omn. — lin. 30. αἰεὶ O. V. P. nobiscum B. — lin. 32. ὁποιοῦν O. V. P. nos secuti B. — ἑξῆς ab. B. O. — Lin. 12. ἀνάλ. εἰσ. B. O. — lin. 14. p. 245. ἀνάλογ. ab. B. O. — lin. 18. τῶν ab. V. — lin. 20. καὶ δισσοῦ ἄρα V. P. — lin. 24. 25. ἀριθμ. ab. in edd. omn. — lin. 30. ἔστωσαν οἱ ΓΔ V. — Lin. 3. μετρεῖ ἄρα . . . τὸν Δ ab. V. — lin. 4. Ἀλλὰ p. 246. δὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ B. O. P. Nos secuti V. — lin. 7. ἑξῆς ab. B. O. — lin. 9. μετρεῖ δὲ . . . τὸν Ε ab. V. — lin. 20. μετρήσει B. O. — lin. 22. Singulâ enunciata verbis ὁ δὲ etc. καὶ ἔτι etc. incipientia inter se commutantur B. O. — lin. 25. φανερὸν δὲ B. O. — lin. 35. Ἐπεὶ γὰρ B. O. — Lin. 8. 25. Κὰν ἡ πλ. edd. p. 247.

omn. — lin. 9. ὁ δὲ B. O. — lin. 11. ἀριθμοὶ ab. B. O. — lin. 12. ἔστωσαν ab. B. O. — lin. 13. λέγω δὲ V. — lin. 13. 32. μετρεῖ V. — lin. 17. δὲ πάλιν B. P. V. — Lin. 7. 16. ἀνάλογος B. — lin. p. 248. 11. ὅμοιοι ἐπίπ. ἀρ. V. — lin. 17. ἡ ὁμόλ. πλ. ab. V. P. — lin. 18. τὴν ὁμόλ. πλ. ab. V. P. — lin. 19. Τοῦτ' ἔστιν ἤπερ ἡ ὁμόλ. πλ. πρὸς τὴν ὁμόλ. πλ. addit V. — lin. 20. Καὶ ἐπεί ἐστιν edd. omn. — lin. 22. οὕτως ab. V. B. — lin. 27. μὲν ab. B. O. — lin. 30. οὕτως ab. V. — lin. 32. μὲν ab. V. — Lin. 10. ἀνάλογοι B. — lin. 13. p. 249. ὅ τε Γ V. — lin. 24. ὁ μὲν Γ B. O. — lin. 30. τὸν μὲν Δ B. O. — lin. 34. ἄρα V. — Lin. 3. post ἐδείχθη addunt B. O. ἐστὶν p. 250. ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, (οὕτως O.) ὁ Μ πρὸς τὸν Λ. — lin. 8. εἰσιν ab. V. — lin. 11. Πάλιν ἐπεὶ . . . ἐναλλὰξ ἄρα ἐστιν abs. V. et pro hisce legimus Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Λ etc. — lin. 14. εἰσ. ἀναλ. P. — lin. 15. λόγῳ post Θ habent B. O. — lin. 23. τὸν ἐκ τῶν ΖΗ ab. V. P. — lin. 29. καὶ ὡς ab. B. O. — lin. 35. τὸν Η, καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ V. — Lin. 3. p. 251. ὅτε ab. V. — lin. 24. ἄρα ab. B. — lin. 31. οἱ ab. B. — Lin. 2. p. 252. γὰρ ab. V. — lin. 3. ἔστιν ἄρα . . . πρὸς τὸν Γ ab. V. — lin. 4. οὕτως ab. B. — post τὸν Γ haecce sequuntur in B. O. P. ὡς δὴ (δὲ B.) ὁ Λ πρὸς τὸν Γ, (οὕτως O.) ὁ Γ πρὸς τὸν B., quae cum V. omisimus. — lin. 7. μὲν ab. edd. omn. — lin. 8. τὸν δὲ Ε πολλαπλ . . πεποίηκεν ab. V. — lin. 11. τοῦς ΑΓ τοῦτ' ἔστιν ab. edd. omn. — lin. 14. Ὁσάκις δὲ V. P. — lin. 15. καὶ ab. V. — lin. 19. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Ζ τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Λ μέτρει καὶ ὁ Ε τὸν Γ. Ἔστιν ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Γ, τοῦτ' ἔστιν ὁ Γ πρὸς τὸν Β. Πάλιν ἐπεὶ ὁ Ε ἑκάτερον τῶν ΖΗ πολλαπλασιάσας τοὺς Γ Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα etc. V. P. — lin. 24. Καὶ ἐναλλὰξ . . . πρὸς τὸν Η. ab. B. O. — lin. 26. αὐτῶν πλευραὶ B. O. — lin. 31. οἱ ab. V. — Lin. 2. γὰρ ab. V. — τρεῖς p. 253. ἐλάχιστοι O. — lin. 3. οἱ τρεῖς V. — lin. 7. εἰσιν ἀριθμοὶ B. O. P. — lin. 8. τοῦ πρὸ abs. B. O. — lin. 9. ἀνάλ. εἰσ. B. O. — lin. 12. καί ἐστιν ἴσον . . . . . τῶν ΑΓΔ B. O. — lin. 28. Ὁσάκις δὲ ὁ Η τὸν Β B. O. — lin. 30. καὶ ab. B. O. — lin. 33. 34. μὲν ab. edd. omn. — lin. 34. Verba τὸν δὲ . . . πεποίηκε uncis inclusit editor O. et adscripsit in margine: „Illa uncis inclusa desunt in ma- „nuscr. Bodl. et commode abesse possunt." — Lin. 2. δὴ in δὲ mu- p. 254.

tavi cum B. — αὐτῶν pro αὐτοῦ habet O. — lin. 4. δὴ ab. V. — lin. 6. οὕτως ab. B. — lin. 7. οὕτως ab. V. B. — Lin. 14. οὕτως p. 255. ab. V. B. — lin. 25. λέγω δὴ ὅτι B. O. — Lin. 27. ἀριθμοὶ ab. p. 256. B. O. — Lin. 7. ἐπίπεδοι ab. B. O. — lin. 11. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α V. p. 257. P. — lin. 12. μὲν ab. B. O. — lin. 17. μεταξὺ ἀρ. B. O. — lin. 26. οἱ ab. edd. omn. — ἀριθμοὶ ab. B. O. — Lin. 2. Δύο γὰρ ἀριθμ. p. 258. οἱ Α Β πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τετράγωνον τὸν Γ ποιείτωσαν, λέγω ὅτι etc. B. O. — lin. 9. οὕτως post Β omisi cum V. B. — lin. 15. ἐμπίπτει edd. omn. — lin. 16. ΑΒ ἄρα B. O. — lin. 30. οὕτως post Γ omisi cum V. B. — Lin. 2. οὕτως ante ὁ Δ omisi cum p. 259. V. B. — lin. 3. item ante ὁ Γ. — lin. 11. item ante ὁ Α. — lin. 12. ἀρ. ἐμπεπτ. V. P. — lin. 13. ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν B. O. — lin. 14. Post ἀριθμοὶ addunt editiones: Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν· ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ· καὶ ὁ τέταρτος (δεύτερος P. V.) κύβος ἔσται. — lin. 23. Ὁ Α γὰρ B. O. — lin. 28. οἱ ΑΒ ab. B. O. — Lin. 6. ἀριθμὸς ab. B. O. — lin. 13. p. 260. οὕτως ante ὁ Δ omisi cum V. B. — lin. 29. Post verbum πεποίηκε haecce leguntur in V. P. ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς εν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β etc. — lin. 31. οὕτως ante ὁ Β omisi cum B. V. — οἱ ab. B. O. — ΒΓ ab. V. — lin. 34. οὕτως ab. V. — Lin. 14. Ἐπεὶ οὖν . . . μονάδας abs. B. p. 261. O. — lin. 19. καὶ addidi. Cetera quae sequuntur ὁ Β . . . πεποίηκεν abs. V. P. — lin. 25. ἐστιν B. O. — lin. 26. 27. 29. πάντες ab. V. — lin. 35. ἅπαντες B. O. — Lin. 5. ἀριθμ. ab. B. O. — p. 262. lin. 12. πάντες ab. B. O. — lin. 18. αὐτῷ scripsi pro τῷ Α. — καὶ ὁ Β ἄρα . . . μονάδας ab. B. — lin. 21. μὲν ab. V. — lin. 24. ἐστί ab. B. O. — lin. 24. Quae litteris minoribus excusa sunt, ut adjicerem res ipsa monuit. Reperies in edd. Ἐδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Ζ κύβος τε etc. — lin. 30. πάντες ab. B. — ἅπαντες O. — τέ ab. V. P. — lin. 34. ἑξῆς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀριθμοὶ V. — lin. 35. μετὰ τῆς μονάδος B. —

Lin. 5. *ὁσοιδηποτοῦν* V. P. — lin. 13. *ἄρα* ab. V. — lin. 15. *ὁ Δ* p. 263.
τε V. — lin. 18. *Ἀλλὰ δὲ* O. — *καὶ* ab. O. — lin. 22. *λέγω δὴ*
B. O. — lin. 30. *καὶ ὁ B ἄρα κύβος ἐστί* V. — Lin. 12. *Ἔστωσαν* p. 264.
γὰρ V. P. — *ὁσοιδηποτοῦν* V. P. — lin. 15. *πλὴν τοῦ τρίτου* B.
O. — lin. 16. *καὶ τῶν ἕνα διαλειπ.* ab. V. — lin. 21. *οὕτως* ante
ὁ A omisi cum V. P. — lin. 25. *ὑπόκειτο* V. P. — lin. 27. *τετρά-*
γωνός ἐστι B. O. — lin. 29. *Λέγω δὴ* B. O. P. — lin. 34. *οὕτως*
omisi ante *ὁ B* cum V. B. — lin. 35. Post *κύβον* addunt B. O. *οἱ*
BΓ ἄρα ὅμοιοι στερεοὶ. — Lin. 3. *οὕτως* ante *ὁ A* omisi cum V. p. 265.
B. — lin. 6. *καὶ* ante *ὁ A* omisi cum V. P. — lin. 20. *ὁ ἐλάχι-*
στος ὁ B V. P. — *τὸν μείζονα* ab. in edd. Sed B. et O. addunt
μείζονα post *E*. — lin. 26. *ἐν τῷ Δ μονάδ.* B. O. — lin. 30. *ὅπ.*
ἔδ. δ. absunt hoc quidem loco in V. sed additur Porisma, quod
inter lineas codicis 2345. scriptum quidem, nullo autem alio in codice
reperitur. *Πόρισμα. Καὶ φανερὸν ὅτι ἣν ἔχει τάξιν ὁ μετρῶν ἀπὸ*
μονάδος, τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ὁ καθ' ὃν μετρεῖ ἀπὸ τοῦ μετρουμέ-
νου κατὰ τὸν πρὸ αὐτοῦ ὡς τὸν Δ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. — lin. 33.
ἑξῆς ab. B. O. — Lin. 2. *μετρῆται* edd. — lin. 4. *ὁσοιδηποτοῦν* p. 266.
B. O. — *ὁποσοιδηποτοῦν* V. P. — lin. 9. *καὶ* ab. V. — lin. 10.
μετρείτω ὁ E τὸν A ab. V. — lin. 11. *ἀριθμὸν* ab. V. — lin. 20.
29. *οὕτως* ab. V. — Lin. 2. post *πεποίηκεν*: *Ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ἐκ* p. 267.
τῶν ΘE ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ A edd. cet. Nos cod. V. secuti. —
lin. 4. *οὕτως* ante *ὁ A* omisi cum B. V. — lin. 7. *μείζων τὸν . . .*
τοῦτ' ἔστιν ὁ omiserunt V. P. — lin. 9. add. V. *ὡς ἡγούμενος ἡγού-*
μενον. Praeterea hic notatur in ed. O. ad verba *Ἀλλὰ* etc. „In qui-
„busdam codd. quae sequuntur rectius absunt, scribiturque *οὐκ ἄρα*
„*οὐ μετρεῖ ὁ E τὸν A, μετρεῖ ἄρα· ὅπερ ἔδ. δ.*“ — lin. 12. *πρώτου*
post *ὑπὸ* omisi cum V. — *οἱ AE . . . μετροῦνται* ab. V. — lin. 14.
ὑπὸ ἑτέρου B. O. P. — lin. 16. *καὶ* ab. V. — lin. 19. *μετρεῖται*
edd. omn. — lin. 24. *ἄλλου* ab. V. — lin. 25. 30. *παρὲξ* edd.
omn. — lin. 27. *ἀπὸ μονάδ. . . . ἑξῆς* ab. V. — B. O. habent
Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμ. ὑπὸ μονάδ. ἀναλ. (sine *ἑξῆς* quod nos-
met adjecimus). — Lin. 3. *Πᾶς* V. P. — lin. 4. *ὁ E ἄρα . . .* p. 268.
μετρεῖται B. O. — lin. 6. *πρώτου* ab. V. P. — lin. 15. *μετρεῖ τὸν*
Δ B. — lin. 20. *οὐκ ἐστι ὁ Z* B. O. — lin. 21. *Εἰ γάρ ἐστι πρ.*
B. O. — lin. 24. *Ἅπας . . . . ὁ Z ἄρα* abs. B. O. — lin. 25. *ὑπὸ*
πρώτου ἄρα B. O. — Lin. 11. *οὕτως* ab. V. B. — lin. 17. *ὑπὸ* p. 269.

τῶν Θ Η V. P. — lin. 19. οὕτως ante ὁ Α omisi cum B. O. — lin. 23. 27. 31. παρὲξ. edd. omn. — lin. 26. πρώτου ab. B. O. Tredecim priores propositiones hujus libri excidisse in cod. 2344. notavit Peyrardus. — Lin. 4. τῶν ab. B. O. — lin. 6. γενόμεν. δὲ p. 270. B. — lin. 11. ἐστὶν post ὅπερ abjeci cum V. — lin. 14. παρὲξ edd. omn. — lin. 22. τῶν ΑΒΓ ab. B. O. — lin. 27. φανερὸν δὲ B. O. — Lin. 2. πρῶτ. εἰσ. πρ. τ. ΕΖ B. O. — lin. 3. Ἐὰν δὲ . . . . . p. 271. πρῶτός ἐστιν omiserunt B. O. et habent καὶ ὁ ἐκ τῶν etc. — lin. 6. ὥςτε καὶ . . . Ἐὰν γὰρ aeque omissa sunt in B. O. atque loco eorum scriptum legimus Ἐὰν δὲ δύο etc. — lin. 10. Inserunt B. O. multique alii codd. post ἐστιν haecce: ὥςτε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ ΔΕ καὶ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ἀλλ' ὁ ἐκ etc. — lin. 19. ὥςτε καὶ ὁ ἀπὸ edd. omn. — lin. 20. 22. 23. τὸν ὑπὸ τῶν P. B. O. Nos secuti V. qui tamen lin. 25. 27. 28. habet ὑπὸ. — Lin. 5. οὕτως ab. B. V. — lin. 7. ἀριθμ. ab. B. O. — lin. 8. 28. p. 272. ἔχοντας αὐτοῖ; B. O. — lin. 10. post B, add. edd. omn. ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. — lin. 12. ἄτοπόν ἐστιν B. O. — ἐστιν pro ἔσται B. O. — lin. 13. ἐστιν οὕτως B. O. — lin. 26. 31. 33. οὕτως ante ὁ Β omisi cum B. V. — lin. 27. ἀριθμ. ab. B. O. — lin. 28. — Lin. 3. B. O addunt ὁ Α post καὶ, ed. P. ante καὶ. — lin. 13. p. 273. ἔστω emendavi pro vulgato ἔσται. — lin. 16. Καὶ εἰ πρῶτοι P. — lin. 25. ἀπὸ scripsi pro vulg. ἐκ. — lin 26. οὕτως ante ὁ Β abjeci cum B. V. — lin. 27. ἀνάλογον ab. B. O. — Lin. 9. 12. p. 274. πότε δυνατὸν P. — lin. 16. Post ἢ οὐ pergit B.: ἀνάλογον μὲν ἐξῆς εἰσι, οἱ ἄκροι δὲ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ ἢ ἀνάλογον μὲν ἐξῆς, οὐ πρῶτοι δὲ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, ἢ οὔτε ἀνάλογον ἐξῆς οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Ad quae verba haecce in margine notantur: „Quia Zambertus, graecum „sine dubio exemplar secutus, exacta divisione membrorum hic uti„tur et singula membra demonstrationibus exsequitur, voluimus eam „lectionem inserere; est enim pernecessaria, licet neutrum nostrum „exemplar tale quidquam haberet." — Pro hisce Cod. V. quem sequitur P. haec praebet Ἢ οὐκ εἰσὶν ἐξῆς ἀνάλογον καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἢ οὔτε ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν· ἢ καὶ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Nimi-

rum ex hoc orta est versio Zamberti, quam imitatus est graece Grynaeus in ed. B. — O. ed. habet hanc in margine notam. „Cor„ruptissima est haec propositio. Nos ex auctoritate codicum ma„nuscriptorum ita corrigendam censemus, ut, quae uncis sunt in„clusa (ea scilicet quae supra ex ed. B. exhibuimus et infra exhibe„bimus), pro deletis habeantur. In universum datis tribus numeris „quartus proportionalis inveniri potest, quando primus metitur eum, „qui fit, cum secundus multiplicat tertium. Alioquin ἀδύνατον; et „quartus est numerus, per quem primus metitur numerum ita crea„tum. Ideoque propositionis divisio in quatuor casus non est ne„cessaria; certe Euclidis concinnitati minime respondet, immo casus „secundus paralogismus merus est. Cum quod falsum probat, tum „quod ἀλογίστως. Patet enim, tribus numeris 4, 8, 9 posse quar„tum proportionalem inveniri, nempe 18; licet non sunt deinceps „proportionales et eorum extremi sunt inter se primi.“ — Lin. 21. Sic pergit ed. B. *εἰ δὲ οὐκ ἀνάλογον μὲν ἔξῆς εἰσι, ἄκροι δὲ οἱ πρῶτοι, λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἐστιν ἀδύνατον· Εἰ γὰρ μή, προσευρήσθω καὶ ἔστω Δ. Ὡς οὖν Α πρὸς τὸν Β, Γ πρὸς τὸν Δ, ὡς δὲ Β πρὸς τὸν Γ, Δ πρὸς Ε, ἐξ ἴσου γοῦν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· Ἀλλὰ μὴν οἱ ΑΓ πρῶτοι εἰσί, πρῶτοι δὲ ἐλάχιστοι, οἱ ἐλάχιστοι δὲ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Γ, ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν, ὁ Α ἄρα τοὺς ΑΓ μετρεῖ πρώτους πρὸς ἀλλήλους ὄντας ὅπερ ἀδύνατον. Τοῖς ΑΒΓ ἄρα τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀδύνατον. Πάλιν οἱ ΑΒΓ ανάλογον ἑξῆς ἔστωσαν μὲν οἱ δὲ ΑΓ ἄκροι οὔ πρωτοι λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν δυνατόν ἐστιν· ὁ Β γὰρ τὸν Γ πολλαπλασίασας* etc. quae retinuimus lin. 21. p. 274. usque ad finem theorematis p. 275. cui additur in ed. B. *Ἀλλὰ μὴν οὐτ' ἀνάλογον ἑξῆς οἱ ΑΒΓ· οὔτε πρῶτοι οἱ ΑΓ ἄκροι ἔστωσαν, καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιείτω. Ὁμοιως δείξομεν ἐὰν ὁ Α τὸν Δ μετρῇ ὅτι τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν δυνατόν ἐστιν, ἐὰν δὲ μὴ μετρῇ ὅτι ἀδύνατον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.* — Pro hisce omnibus sic habet V. *Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ ΑΒΓ ἑξῆς ἀνάλογον, τῶν ἄκρων πάλιν ὄντων πρώτων πρὸς ἀλλήλους·* (NB) *λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ Δ, ὥστε*

εἶναι ὡς τὸν *A* πρὸς τὸν *B*, οὕτως τὸν *Γ* πρὸς τὸν *Δ*, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ*, ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*. (Hic claudicat argumentatio. Ille enim quartus numerus proportionalis, quem nescio quis Elementorum corruptor hoc loco postulat, *E* scilicet, reperiri non potest quoties reperitur numerus *Δ*. Quare haec demonstratio id unicum probat, reperto numero *Δ*, numerum *E*, non posse reperiri.) Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ὁ *A* πρὸς τὸν *B*, ὁ *Γ* πρὸς τὸν *Δ*, ὡς δὲ ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ*, ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*· δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς ὁ *A* πρὸς τὸν *Γ*, ὁ *Γ* πρὸς τὸν *E*. οἱ δὲ *AΓ* πρῶτοι· οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ *A* τὸν *Γ*, ὡς ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ *A* ἄρα τοὺς *AΓ* μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοῖς *ABΓ* δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν οἱ *ABΓ* ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ *AΓ* μὴ ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. ὁ γὰρ *B* τὸν *Γ* πολλαπλασιάσας etc. quae retinuimus lin. 21. p. 274. usque ad finem p. 275. Annexa autem sunt haecce: Ἀλλὰ δὴ οἱ *ABΓ* μήτε ἑξῆς ἔστωσαν ἀνάλογον, μήτε οἱ ἄκροι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ὁ *B* τὸν *Γ* πολλαπλασιάσας τὸν *Δ* ποιείτω. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι εἰ μὲν μετρεῖ ὁ *A* τὸν *Δ*, δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς ἀνάλογον προσευρεῖν, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, ἀδύνατον· ὅπερ ἐδεῖ δεῖξαι. In singulis haecce notanda sunt. p. 274. lin. 22. ὁ *A* ἄρα V. — lin. 27. οὕτως ante ὁ *Γ* omisi cum V. B. — lin. 28. τῶν *ABΓ* B. O. — προσευρ. ἀνάλ. B. O. — Praeterea alia quaedam reperitur demonstratio, qua ista emendetur, quam falsam cognovimus, in Cod. V. illo loco inserta, quem signo (NB) supra distinximus. Λέγω ὅτι καὶ οὕτως δυνατόν. Εἰ γὰρ ὁ *A* τὸν ὑπὸ *BΓ* μετρεῖ, προβήσεται ἡ δείξις ὁμοίως τοῖς ἑξῆς. Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ *A* τὸν ὑπὸ *BΓ*, ἀδύνατον αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν· Οἷον ἔστω ὁ μὲν *A* τριῶν τίνων, ὁ δὲ *B* ἕξ· ὁ δὲ *Γ* ἕπτα· καὶ δηλονοτὶ δυνατόν. Εἰ δὲ ὁ *A* εἴη πέντε, οὐκ ἔτι δυνατὸν καὶ ἁπλῶς· ὅτε μὲν ὁ *B* πολλαπλάσιός ἐστι τοῦ *A*, δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν. Εἰ δὲ μή, ἀδύνατον. (scilicet cum primus et tertius numerus sunt inter se primi, de quo casu hic agitur). — Lin. 7. ἀριθμ. προσευρ. B. O. — lin. 17. καὶ ab. B. O. — lin. 24. Εἰ γὰρ δυνατόν· ἔστω, οἱ p. 275.

δὲ etc. B. O. — lin. 29. Ὁ αὐτὸς καὶ ὑπόκειται πρῶτος B. O. — Lin. 14. 28. ὁ ab. edd. omn. — lin. 21. ἄρα ante τῶν λ. abjeci cum V. — lin. 29. ἀριθμ. περισσ. ὁπ. B. O. — Lin. 6. καὶ ab. P. — lin. 7. ἄρτιος ἀφηρ. B. O. — lin. 10. ὥστε καὶ . . . ἥμισυ ab. B. — lin. 15. 17. 24. καὶ ὁ λοιπὸς B. O. — Lin. 5. ἀριθμοῦ ab. P. — lin. 8. γὰρ ab. V. — lin. 10. Ἔστι δε καὶ μονὰς ἡ ΔΑ abs. V. — Lin. 4. πλῆθος περισσόν, ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν, περισσός ἐστιν· ὥστε etc. B. O. — lin. 15. ὁ ἄρα *B* B. P. — lin. 18. ἐστιν ab. O. P. — lin. 20. In fine hujus theorematis ad marginem ed. B. scriptum reperimus: „Addit hic quaedam Zambertus, quae non videntur Euclidis.“ — lin. 23. διπλάσιον B. O. — lin. 26. διπλάσιος B. O. — 27. καὶ ab. P. — Lin. 6. 8. 12. διάδος B. O. V. (semel) — lin. 11. οὖν ab. V. — τῶν *BΓΔ* ἀρτιάκις ab. V. — lin. 13. δὴ ab. V. P. — lin. 14. ἡ *E* ab. V. — lin. 19. ὅτι ab. V. — B. O. habent ὅτι καὶ. — lin. 20. Abjeci *A* ante *BΓ*. — lin. 29. Post ἄρτιος addunt B. O. [ὁ ἥμισυς αὐτοῦ ἀρτιός ἐστι καὶ] μετρηθήσεται etc. Sed adscriptum est in O. „Illa uncis inclusa non agnoscunt Codd. Mss. et rectius „quidem abesse possunt.“ — Lin. 3. ἄρτιος ab. V. — lin. 3. 17. 18. διάδος B. O: — lin. 13. ἐστὶ περισσ. B. O. — lin. 14. τέμωμεν B. O. — lin. 15. ποιοῦμεν V. P. — ἀριθμὸν ab. B. — lin. 17. Post εἰ γὰρ οὐ B. O. et V. (in repetitione errore quodam theoremati 36. adnexa.) ita pergunt καταντήσομεν εἴς τινα περισσόν (ἀριθμον B.), ὃς μετρήσει τὸν *A* κατὰ ἄρτιον ἀριθμὸν, καταντήσομεν etc. — lin. 19. ὁ *A* καὶ B. O. — lin. 25. ἴσος B. O. — lin. 28. ἅπαντας B. O. — lin. 29. ὁποσοιδηποτοῦν V. P. — lin. 30. ἀπ' ἐλαχίστου B. — Lin. 3. ἴσος ἐστὶ V. P. — lin. 17. τὸν *Δ BΓ A* B. O. — lin. 27. ὁποσοιδηποτοῦν P. V. — lin. 35. Post Verba τον *M* errore scribentis Verba in Cod. V. irrepserunt quae ad demonstrationem theorem. 34. pertinent. Legimus enim; Περιττὸν ἐχέτω. Λέγω ὅτι ὁ *A* ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος καὶ etc. quae sequuntur p. 281. lin. 9. usque ad finem illius theorematis. — Lin. 12. πρὸ αὐτῷ B. — πρὸ ἑαυτῷ O. P. — lin. 19. καὶ ab. B. O. — lin. 27. οὕτως ante ὁ O omisi cum V. B. — lin. 28. item ante ὁ *E*. — lin. 35. ἀριθμὸν ab. V. — in sequentibus conjunctio μὴ cum Indicativo pendere videtur ab antecedente ἅπαντα. — Lin. 4. αὐτοῖς ab. V. — lin. 6. 13. 17. οὕτως ante ὁ *O*, ὁ *E*, ὁ *A* omisi cum B. V. — Lin. 7. Καὶ

p. 276. p. 277. p. 278. p. 279. p. 280. p. 281. p. 282. p. 283. p. 284. p. 285.

ἀλλ. est inscriptio in Cod. V. — ἑτ. δ. in B. O. — lin. 17. ἐντὸς καὶ abs. V. B. — lin. 18. πρὸς τὸ *Δ* O. — lin. 21. καὶ ab. B. O. — lin. 23. ἐστι ab. V. — ἴσον ἐστὶ B. O. — lin. 26. ἴση ἐστὶ γὰρ V. P. — lin. 27. ἄρα ab. V. — Lin. 11. ἡ ὑπὸ *ΠΕΖ γωνία* B. O. p. 286. — lin. 13. ἐστιν ab. B. O. — lin. 18. Legendum est Ἐπεζεύχθω ἡ *ΜΝ*. Καὶ ἐπεὶ etc. — καὶ ab. V. — lin. 21. ἐστ. ἴσ. B. O. — ἄρα ab. V. — lin. 22. ἐστὶν ab. V. B. — lin. 23. ἡ δύο εὐθεῖαι B. O. — lin. 34. ἡ δὲ *ΖΗ* B. O. — lin. 36. ὃ μή ἐστι non est mutandum in ὃ οὐκ ἐστι. cf. supra ad p. 283 l. 35. — τὸ Δ post κύκλου scriptum B. O. — Lin. 12. ἴσ. εὐθ. B. O. — ἐστ. κέντ. B. p. 287. O. — lin. 14. ἀλληλῶν V. — lin. 19. προσεκβεβλήσθω B. O. — lin. 25. μικροῦ καὶ κέντρον B. — lin. 29. Ἡ ab. B. O. — Lin. 14. p. 288. τριγωνον post *ΖΗΛ* ab. B. O. — lin. 24. post *ΛΘΚ* additur in B. O. καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐν τῇ προτέρᾳ δείξει. ὅπερ. ἐ. δ. — lin. 27. εὐθεῖαν ab. V. P. — lin. 32. ἡ *ΑΒ* ἄρα B. — lin. 37. λόγῳ εἰσὶ B. O. — lin. 38. εἶδος ἄρα B. O. — Lin. 5. εἶδος post *ΒΛ* ab. B. O. — lin. 6. Διὰ τὰ p. 289. αὐτὰ δὴ καὶ ὡς B. P. — lin. 12. τοῖς post εἴδεσι ab. V. — Haec altera demonstratio in infima pagina Cod. V. exarata est vocabulis contractis. P. — lin. 16. Haec demonstratio altera ab. V. reperitur in B. O.

Appendix VII.

Varietas lectionum Libri X. XI. XII. XIII.

sive Partis II. hujus editionis.

Lin. 9. *ὑπ' αὐτῶν* edd. omn. Nos Scholiasten Mon. secuti sumus. — lin. 15. *σύμμετροί τε καὶ* abs. V. P. — *αἱ μὲν μήκει καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει μόνον* O. B. — lin. 20. post *ἀσύμμετροι* n Scholiaste adjecta reperimus: *κατ' ἀμφότερα τοῦτ' ἔστι μήκει καὶ δυνάμει.* — lin. 25. *καλείσθωσαν* Schol. — Lin. 3. *αὗται* quod habent edd. omn. in *αὐταὶ* mutandum esse existimavi. — lin. 8. *ἀπὸ* ab. edd. omn. — lin. 9. *ἀεὶ* ab. B. in qua legimus *ἄν*, O. habet *ἀεὶ ἄν.* — lin. 10. *ληφθήσεται* O. — *ὅ ἐστιν* O. — lin. 15. *καὶ ἀπὸ . . . ἢ τὸ ἥμισυ* ab. P. — lin. 16. *ληφθήσεται* B. O. — lin. 17. *ὅ ἐστιν* B. O. — lin. 18. *γὰρ* ab. V. P. — lin. 19. *μεγέθους* ab. V. P. — lin. 29. *τοῦ ΔΕ ἔλασσον* abs. B. — lin. 30. *τοῦ ἡμίσεος* B. O. — lin. 31. B. O. habent *μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΒΘ*, V. P. habet *μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ.* Quae lectionum varietas cum paulo infra iterum deprehendatur, cogitanti mihi, Euclidem nunquam fere conjunctionem *ἤ* post comparativi formam scribere solitum videri, ea se obtulit emendatio totius theorematis, ut ubique ante *ἢ τὸ ἥμισυ* adderem vocem *ἡμίσους*, quam deleant licet lin. 7. 9. 15. 16. 22. 23. qui ceterarum editionum lectionem restituere sibi cupiunt. Res enim ipsa maxime favet huic emendationi, cum, sive majus aliquid dimidii sive dimidium ipsum abstuleris, idem semper efficies, scilicet ut quantitas oriatur data quantitate alia quam minima minor. — Lin. 2. *ἡμίσους* ab. P. — *ἢ τὸ ἥμισυ* ab. B. O., in quibus legimus *μεῖζον τοῦ ἡμίσους.* — lin. 8. In ceteris edd. additur *Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται κἂν ἡμίση* (*ἡμίσεια* B. O.) *ᾖ τὰ*

p. 1.

p. 2.

p. 3.

ἀφαιρούμενα. — Hoc in ed. B. post τὸ Ἄλλως scriptum est. Dubito, num Euclidis sint haec verba. — lin. 8. Adest demonstratio altera, quam vide in Appendice V. — lin. 15. ἐκκειμένων ab. B. μεγεθῶν ὄντων. V. P. — lin. 16. ὄντος ab. V. P. — lin. 21. ὁ *E* B. O. — lin. 32. ἐστίν ab. B. O. — Lin. 2. ἐκκειμένων ab. B. — p. 4.
lin. 9. σύμμ. μεγ. B. O. — lin. 12. μεγεθ. ab. B. O. — ἤτοι ab. V. — lin. 13. τὸ *AB* τὸ *ΓΔ* ab. V. P. — lin. 14. B. O. habent τὸ *AB* ἄρα κοινὸν μέτρον ἐστὶ τῶν *AB ΓΔ*· καὶ φανερὸν ὅτι μέτρον μέγιστον. — lin. 17. καὶ post *ΓΔ* add. V. P. — lin. 18. ἀεὶ pro ἄρα V. P. — ἀεὶ ab. V. — lin. 23. τὸ *AZ* δὲ V. P. — lin. 29. Verba τὸ *AZ* ἄρα . . . μετρεῖ, contracta aliena manu in margine Cod. V. — lin. 32. Μετρείτω καὶ ab. V. P. — ἔστω ab. O. — Lin. 2. καὶ ab. O. — lin. 4. ἄρα ab. V. — lin. 7. μεγέθη ab. V. p. 5.
— lin. 11. ἔδ. δεῖξαι B. — lin. 21. δύο ab. O. — lin. 23. μετρεῖ ab. V. P. — lin. 24. μετρεῖ δὲ καὶ . . . *B Γ* μετρεῖ. Haec infima pagina et contracta in Cod. V. — lin. 25. τὸ δὲ *ΑΔ* τῶν *ΑΒΓ* V. — lin. 27. B. O. habent: τὰ *ΑΒΓ* οὐ μετρήσει. Εἰ γὰρ δυνατόν· μετρείτω τὰ *ΑΒΓ* μεῖζον τοῦ *Δ* μεγέθους τὸ *Ε*. Καὶ ἐπεὶ τὰ *ΑΒΓ* μετρεῖ, καὶ τὰ *ΑΒ* μετρήσει, καὶ τὸ τῶν *ΑΒ* μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ *Δ*, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἀδύνατον. Idem codd. ceteri excepto V. — lin. 31. τὸ ab. P. — lin. 34. οὖν ab. B. O. — Lin. 4. *AB* μετρεῖ B. O. — lin. 4. Τὸ *E* . . . μετρεῖ p. 6.
ab. B. O. — lin. 5. μέτρ. ἐστ. B. O. — lin. 9. τὰ ἄρα *AB* V. P. — lin. 14. V. habet: Ἔστι δὲ τὸ *E*, τὸ *Z* ἄρα τὸ *Ε* μετρήσει. — lin. 15. μετρεῖ B. O. P. — lin. 17. μεγέθη ab. V. — lin. 18. Addunt edd. ceterae Ἐὰν (V. ἂν) μὴ μετρῇ τὸ *Δ* τὸ *Γ*, ἐὰν δὲ μετρῇ αὐτὸ τὸ *Δ*. — lin. 19. δοθ. συμμ. B. O. — lin. 25. μετρήσ. μέτρ. B. O. — lin. 27. V. addit ὅπερ ἔδ. δ. — Lin. 7. ἀριθμὸν ab. B. p. 7.
O. — lin. 16. οὕτως ab. V. — lin. 23. ἔσται V. P. — lin. 25. πρὸς ἀλλ. τὰ *AB* B. O. — lin. 33. τοσαῦτά εἰσι O. — lin. 34. ταὐτὸ μέρος B. O. — ὁ *Γ* V. — Lin. 3. Μετρεῖ δὲ . . . *Δ* ἀριθ- p. 8.
μὸν. Haec abesse dicit Gregor. in utroque codice manuscripto; sed non desunt in V. B. et in ceteris, quos inspexit Peyr. codicibus. — lin. 4. ὁ *Γ* V. — lin. 8. τοσαυτό εἰσι B. O. — μεγέθη ab. V. P. — lin. 10. ἀριθμὸν ab. V. P. — lin. 13. οὕτως ἐστὶ τὸ *Α* V. — lin. 14. τὸ *Δ* ab. V. — lin. 17. μὴν ab. V. — P. habet μετρεῖ. — lin. 20. Adest altera demonstratio, quam vide in app. — lin. 24.

ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς V. P. — lin. 25. ἡ εὐθεῖα πρὸς V. P. — lin. 26. 27. 33. *B*, quod habent omnes in *H* mutavi. — lin. 34. V. add. ὅπερ ἔδ. δ. — Lin. 17. ἔσται B. P. — lin. 20. ἔσται B. O. — lin. 21. O. habet: *Εἰ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, λόγον ἔχει, ὅπερ πρ. ἀρ.* — B. habet: *Εἰ γὰρ σύμμετρά ἐστι, τὸ Α τῷ Β, λόγον ἔχει, ὅπερ* etc. — V. P. habent: *Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρον τὸ Α πρὸς τὸ Β, λόγον ἕξει* etc. Ex quibus quomodo nostra orta sit lectio facile videbis. — Lin. 4. 7. 12. ὃν τετράγωνος V. P. — lin. 10. γὰρ ab. B. O. — lin. 17. 18. 22. ἀριθμ. ab. V. P. — lin. 22. τοῦ δὲ Γ πρ. τ. Δ λόγου V. P. — lin. 26. ἀριθμ. ab. B. O. — lin. 28. καὶ ab. B. O. — lin. 29. τοῦ Γ ἀριθμοῦ B. O. — lin. 30. τετράγωνος ἀριθμὸς B. O. — τοῦ Δ ἀριθμοῦ B. O. — lin. 31. Alia hic incipit demonstratio in B. O. et additur in O.: ὅπερ. ἔδ. δ. — lin. 32. 33. τετράγωνον ab. V. — Lin. 3. 5. *B* τετράγωνον B. O. — lin. 4. Δ τετράγωνον B. O. — lin. 5. ἐστι ab. B. O. — lin. 6. τοῦ Γ ἀριθμοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ B. O. — lin. 7. Δ ἀριθμοῦ τετράγωνον ἀριθμὸν B. O. — lin. 8. Γ ἀριθμοῦ B. O. — lin. 8. 10. Δ ἀριθμὸν B. O. — lin. 9. Γ ἀριθμὸς B. O. — lin. 12. Altera demonstratio hic inscribitur B. O. — lin. 13. Ἀλλὰ δὲ O. — lin. 15. 18. 24. *B* τετράγωνον B. O. — lin. 19. 28. μήκει ab. V. — lin. 21. *B* τετράγωνον O. P. — lin. 23. Πάλιν δὲ B. O. — lin. 27. ἔσται V. P. — lin. 33. Adest demonstratio altera, quam vide in app. — Lin. 3. φανερὸν ἔστω B. O. — ἔσται V. P. — lin. 5. σύμμετροι ab. V. — καὶ αἱ . . . . καὶ μήκει abs. V. — lin. 7. Adest demonstratio quaedam porismatis, quam vide in app. — lin. 22. Nostrum propositionum ordinem Codd. omn. Schol. Mon. et ed. B. habent, O. et P. alterum numero uncis incluso indicatum. — Lin. 3. τοῦ *Α* V. — lin. 4. τοῦ Δ V. — lin. 15. B. O. habent: *Τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ῥητῇ, ἀφ' ἧς ἤμεν τὰ μέρα λαμβάνεσθαι οἱονεὶ τῇ Α δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ Δ τοῦτ' ἔστι ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ Ε. Ἀλόγους γὰρ καθόλου καλεῖ τὰς καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσυμμέτρους.* Eadem reperiuntur in quibusdam aliis codd. Nostra tamen habent V. Codices Gregorii nonnullique alii. — lin. 27. 34. ἐστιν B. O. — Lin. 6. B. O. addunt post ἀριθμὸν haecce: *Εἰ γὰρ ἔχει λόγον, ὃν ἀρ. πρ. ἀρ. τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἕξει, ὃν ἀρ. πρ. ἀρ. καὶ ἔσται σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἀσύμμετρον·*

τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀρ. πρ. ἄρ. Sic etiam nonnulli codd. Nostra tuentur et V. et multi alii codd. — lin. 17. τὸ Γ τῷ B. V. — lin. 22. ὁ Δ Q. P. τὸ Λ B. — lin. 23. τὸ K O. P. — lin. 30. Ὁ Γ V. — lin. 31. ὃ Λ B. — Lin. 16. Gry- p. 15.
naeus notat in margine B.: In altero exemplari lemma est, itaque variat numerus deinceps.“ Re vera in ed. B. uno minores sunt numeri propositionum. — Peyrardus.“ Haec propositio, quae prorsus eadem est, quae subsequens, exarata est vocabulis contractis et aliena manu in summa pagina codicis V., in margine vero codicis unius et in textu ceterorum. — lin. 22. ἑτέρῳ τινὶ B. O. — lin. 25. τὸ Γ τῷ B. V. — lin. 26. ἐστι ab. B. O. — Lin. 10. ἐστ. ὀρθ. p. 16.
B. O. — lin. 11. τῇ Γ O. B. — lin. 12. δύναται τῇ ΔΒ in ceteris edd. — lin. 15. δοθ. εὐθ. B. O. — lin. 16. εὑρεῖν τὰς τὴν δυναμένην αὐτὰς edd. cet. — lin. 17. Ἐκκείσθ. — B. O. — lin. 19. ἢ τὰς ΑΔ etc. edd. cet. — lin. 23. 25. 26. 28. μήκει post ἑαυτῇ add. B. O. — lin. 31. ἡ Α μὲν B. — lin. 33. τῆς Ε V. — Lin. 5. καὶ ab. p. 17.
B. O. — lin. 8. 14. 19. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 30. σύμμ. ἐστ. B. O. — Lin. 2. καὶ τὸ abs. P. — lin. 5. σύμμετρον τῇ ΑΒ V. — p. 18.
lin. 20. Συγκείσθωσαν B. O. — lin. 24. αὐτὰ ab. V. — καὶ ἔστω εἰ δυν. τὸ Δ B. O. P. Nobiscum V. — lin. 28. ὑπόκειντο B. O. — lin. 29. ἀδύνατόν ἐστι B. O. — lin. 34. ἔστω δὴ πρῶτ. V. — πρῶτον edd. cet. omn. — Lin. 2. Εἰ γὰρ ἔσται V. P. — lin. 7. Ὑπέ- p. 19.
κειντο B. O. — lin. 9. Ὅτι εἰ etc. Greg. notat in O.: Ita restituimus ex codd. m.; antea in editis (B.) erat ὅτι τὸ ΑΓ καὶ λοιπῷ τῷ ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστι. — lin. 10. λοιπῷ ab. O. P. — τὰ ab. O. P. — Omnia haec verba ὁμοίως δὴ . . . ἔσται abs. in Cod. V. et in nonnullis aliis codd. — lin. 20. ΑΔ παραλλ. B. O. — lin. 25. τοῦτ' ἔστι . . . ΑΓ ΓΒ ab. B. O. — lin. 32. παραλληλόγρ. ab. V. — Lin. 2. 10. μήκη B. Q. — lin. 4. 6. 18. μήκει ab. V. — lin. 5. p. 20.
δυνήσεται O. — lin. 6. τετάρτῳ μέρει B. O. — lin. 7. 14. παραλληλογρ. ab. V. — lin. 23. τῶν ab. V. — lin. 25. καὶ τὰ τετραπλ. haec verba signis notata sunt in B. tanquam dubia sive suspecta. — lin. 26. 28. 30. 32. τετράκις pro τετραπλασ. τ. — lin. 31. ἡ ab. O. — Lin. 3. δύναται τῇ ΖΔ edd. cet. — lin. 8. ἄρα ταῖς ΒΖ ΓΔ p. 21.
ἐστ. σύμμ. μήκ. B. O. — lin. 11. 13. 34. μήκει ab. V. — lin. 19. τῆς Α μεῖζον B. O. — lin. 20. ἑαυτῆς O. — lin. 23. τῇ ΑΓ συμμ. ἐ. μ. B. O. — ἴση γάρ . . . τῇ ΔΓ ab. P. — lin. 24 ὥςτε ab. B.

O. cetera ita leguntur καὶ ἡ *BΓ* ἄρα συμμ. ἐ. μ. τῇ *ΔΓ* δηλονότι ἄρα etc. — lin. 34. μήκη. B. — Lin. 4. δυνήσεται. — lin. 8. μήκει p. 22.
ab. V. — μήκη B. — lin. 17. τῷ προτέρῳ B. O. — lin. 18. οὖν
ab. P. — καὶ ab. B. O. — lin. 20. μήκει ab. B. O. — lin. 26. 35.
ἑαυτῆς V. — lin. 34. Post *ZΔ* B. add. Δεικτέον οὖν. — Lin. 4. p. 23.
Καὶ ab. P. — lin. 8. Adduntur duo Scholia, quae vide in app. —
lin. 10. additur vulgo κατά τινα τῶν προειρημένων (εἰρημένων P.)
τρόπον (τρόπων O.) quae verba ut glossema rejicienda putavi. —
lin. 20. σύμμετρ. . . . τῇ *BΓ* abs. V. — lin. 21. καὶ ab. V. —
lin. 22. ἐστι ab. B. O. — lin. 26. 29. χωρίον a me ex Schol. Mon.
receptum est. — lin. 29. Post ῥητὴν in cet. edd. legimus κατά τινα
πάλιν τῶν εἰρημένων (προειρημένων P.) τρόπων. — Lin. 5. ἐστι ab. p. 24.
P. — lin. 9. Additum est Lemma et Scholium, quae vide in App.
— lin. 14. ἔσται P. — lin. 17. λέγω ὅτι ἀλ. . . τὸ *ΔΓ* ab. B. —
lin. 18. Addunt edd. omn. καλείσθω δὲ μέση, quod hoc loco ejeci
sed in recapitulatione retinendum existimavi. — lin. 27. τετράγωνον
δυναμένη B. — lin. 28. Quae sequuntur uncis inclusa a me adjecta
non leguntur in edd. Post ἐστι sequitur καλείσθω δε μέση additur-
que Scholiastae cujusdam explicatio in Cod. V. διὰ τὸ τὴν ἴσον
ἀναγράφουσαν τετράγωνον τῷ *ΔΓ* χωρίῳ, ἣν καλεῖ μέσην, μέσην
ἀνάλογον εἶναι τῶν *AB BΓ* — in B. O. multisque aliis codd.
διὰ τὸ (priorem hunc articulum omittit O.) τὸ ἀπ' αὐτῆς τετρά-
γωνον ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν *AB BΓ* καὶ μέσην ἀνάλογον γενέσθαι
τῶν *AB BΓ*· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. — Schol. Mon. ad theorema ipsum
addit: διὰ τὸ μέσην ἀνάλογον αὐτὴν γίνεσθαι τῶν περιεχουσῶν τὸ
ἄλογον χωρίον εὐθειῶν· καὶ γάρ ἐστι τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον τῷ
ὑπ' αὐτῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ἴσον. Sequitur Lemma quod
vide in app. — Lin. 2. παρεμβαλλόμενον O. — lin. 3. χωρίον ad- p. 25.
didi ex Schol. — lin. 8. ὀρθογώνιον ab. B. O. — lin. 27. ἐστὶ ab.
V. — lin. 28. ἐστι ab. B. O. — lin. 29. Post δυνάμει B. add. ὡς
ἄρα δέδεικται. — lin. 31. ἴσα γάρ εἰσι B. O. — lin. 32. περιεχο-
μένῳ ab. V. — Lin. 5. Ad σύμμετρος add. Scholiast. ἢ μήκει καὶ p. 26.
δύναμει ἢ δυνάμει μόνον οὖσα σύμμετρος. — lin. 16. ἐστὶ ab. V. B.
— lin. 22. Ἡ δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυν. μ. συμμ. δυναμένη μέση ἐστὶν
P. — lin. 25. Καλείσθω δὲ ἡ δυναμένη μέση B. — καλεῖται δὲ ἡ
δυναμένη μέση O. — Adest demonstratio quaedam corollarii et
Scholium, quae vide in app. — Lin. 2. εὐθειῶν κατά τινα τῶν εἰρη- p. 27.

μένων τρόπων P. — lin. 10. ἐστι καὶ ἡ *AB* B. O. — lin. 16. εὐθειῶν ab. B. O. — lin. 19. ὀρθ. περιεχ. B. O. — lin. 20. ἐστιν ἡ μέσον B. O. — lin. 32. ἐστι ab. P. — Lin. 2. Ἐπεὶ οὖν σύμμ. B. p. 28. O. — lin. 4. Ἔστιν ἄρα καὶ ὡς B. O. — lin. 12. ὡς τὸ *ΓΞ* B. O. — lin. 13. πρὸς τὸ *ΔΔ* B. O. — lin. 19. τὸ ab. B. — lin. 20. τῇ ab. B. — lin. 21. *Θ M*, τοῦτ' ἔστι τῇ abs. P. — lin. 24. ἐστιν ἡ μέσον B. O. — Lin. 2. ἴσ. ἐστ. B. O. — post haec add. edd. p. 29. Ῥητὸν δέ ἐστι τὸ *ΔB*, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ *KΘ*, quae hic omisi, cum paulo infra repetantur. — lin. 6. παράκειται B. O. — lin. 19. αὐτοῦ ab. B. O. — lin. 24. ἐστι ab. V. — lin. 27. Μέσον ἄρα μέσου οὐχ ὑπ. etc. V. P. — Lin. 5. 12. 13. 24. 30. 34. οὕτως ab. V. p. 30. — lin. 6. εἰσι ab. in edd. cet. — lin. 9. δὴ ab. V. — lin. 12. Ἀλλ' ἡ *Δ* B. — lin. 16. ἐστι ab. B. O. — lin. 18. ῥητὸν περιεχ. ab. P. — Quae minoribus litteris addita sunt, in edd. desiderantur. — lin. 22. τρεῖς ab. V. — lin. 30. καὶ αἱ *Δ E* V. — lin. 31. δυνάμ. εἰσ. συμμ. V. — lin. 33. καὶ ab. P. — Lin. 2. 3. 4. οὕτως ab. V. — p. 31. lin. 9. αἱ *Δ E* adjeci. — lin. 14. δὴ B. O. — lin. 19. ὑπὸ τῶν B. O. — lin. 27. ὅπ. ἴδ. ποιῆσ. ab. V. — lin. 31. τὴν ὑπὸ B. O. — lin. 32. ἐπίπεδ. ὡσιν B. O. — Lin. 2. 9. ὁ ab. V. — lin. 9. τῷ p. 32. Δ B. V. — lin. 10. τῆς *ΓΔ* V. — lin. 11. Ἀφῃρήσθω. ὁμοίως V. — lin. 12. τετρ. ab. V. — lin. 13. 15. 17. 22. τοῦ post ἀπὸ in τῆς mutatur in V. — lin. 15. ἐστι P. — lin. 17. ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ *BE* P. — lin. 18. μήτε ὁ . . ἐλάσσων αὐτῶν abs. P. — lin. 20. Quae uncis inclusa sunt, desiderantur in edd. omn. — lin. 22. καὶ διπλασίων ὁ *ΠΛ* τῆς *ΛE* μοναδος B. O. — lin. 23. διπλάσιος V. — lin. 24. ὁ δὲ *ΛΠ* V. P. — ἐσιὶ διπλ. τ. *ΛE* O. — lin. 27. 28. 29. 30. 34. τοῦ post ἀπὸ ab. V. — lin. 31. ὑπὸ τῶν *AB BΓ* O. — lin. 33. ἡ *AB* ἴση τῇ *ΠB* V. — Lin. 3. 4. 7. 8. 9. 10. 11. 13. 16. p. 33. τοῦ post ἀπὸ ab. V. — lin. 4. 5. διπλάσιος B. O. — lin. 4. κείσθω ab. B. V. — lin. 5. Καὶ ab. V. — lin. 10. ὥστε καὶ . . . ἀπὸ τοῦ *ΓE* abs. V. — B. habet pro hisce: συναχθήσεται ἄρα ἴσος ὁ ἐκ τῶν *AB BΓ* μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ *ΓE* τῷ ἐκ τῶν *ΘB BΓ* μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ *ΓZ*. — lin. 14. τῷ ab. V. — lin. 15. αὐτῷ ab. V. — lin. 15. οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ abs. V. — lin. 17. τρόπους τοὺς εἰρημένους ἀριθμοὺς ἐπιδεικνύειν ἀρκεῖσθωσαν ἡμῖν οἱ εἰρημένοι V. — Haec ultima verba, majoribus uncis inclusa, permovent me ut omnia minoribus uncis inclusa, non Euclidis Lemmata sed commentatoris cujusdam addi-

tamenta esse credam. Sic enim Proclus nonnunquam majori rerum explicationi finem imponere solet. — lin. 28. *τὴν ΓΕ* edd. omn. — lin. 31. *τετράγωνον* ab. B. O. — lin. 33. *οὖν* ab. V. — Lin. 12. p. 34. *ἐστιν* ab. V. — lin. 21. *τῶ ἀπὸ τῆς BZ* ab. V. — Sed B. O. habent *τῇ BZ συμμέτρῳ*. — lin. 25. *μείζονα* V. — lin. 26. *συμμέτρῳ* B. — *ὅπ. ἔδ. δεῖξαι* B. O. — lin. 27. Hoc theorema in ed. B. numero caret et inter 30. et 31. locum habet. — lin. 32. *ἀριθμοὶ* ab. B. O. — Lin. 5. *ὡς* ab. V. — lin. 8. *ἐστὶν* adjeci. — lin. 19. *ὅπ.* p. 35. *ἔδ. π.* ab. B. — Sequitur Lemma quod vide in app. — lin. 25. *γὰρ* post *Ἐκκείσθωσαν* abjeci cum V. — lin. 32. *ἐστι* ab. B. O. — Lin. 3. *ὡς ἄρα ... ὑπὸ τῶν ΓΔ* abs. B. — lin. 6. *καὶ ὡς... πρὸς* p. 36. *τὴν Δ* abs. B. — lin. 10. *οὕτως* ab. V. — lin. 11. 12. 16. *ἀπὸ ἀσυμμ.* V. — lin. 11. *δύναται* V. P. — lin. 16. *ἑαυτῷ* B. O. — *ὅπ. ἔδ. π.* ab. B. — lin. 19. *Ὁμοίως δὲ* B. O. — *τῷ ἀπὸ* V. P. — lin. 20. *ὅταν ἡ Α μεῖζον δύναται τοῦ* B. O. — lin. 22. Adest Lemma, quod vide in app. — lin. 27. *αἱ ΑΒΓ δυν. μόν σύμμ.* B. O. — lin. 30. *Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ.* Sic habet exemplar latinum B. — desiderantur in Cod. mss. O. — abs. V. P. — Lin. 3. *ἐστὶ* ab. V. — lin. 5. *Ἀλλ' ὡς τὸ* B. — lin. 8. *μόνον* ab. p. 37. V. — lin. 11. *οὕτως* ab. V. — lin. 15. *τῶ ὑπὸ τῶν ΒΓ τὸ* B. O. — lin. 16. *αἱ γὰρ . . . . μόνον σύμμετροι* ab. B. O. — lin. 20. *τὴν μείζονα* ab. O. — lin. 22. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. V. B. — lin. 24. *Ὁμοίως δὲ* B. O. — *καὶ τῷ* V. P. — *ἡ ἀπὸ τῆς Γ* B. *ἡ Α τοῦ ἀπὸ τῆς Γ* O. — lin. 26. *ὅπ. ἔδ. δ.* add. B. — lin. 33. *τὸ δὲ ὑπὸ* B. O. — *ἐστι* ab. O. — *ὑπὸ ΒΑ ΑΓ* V. — Lin. 2. *ὅτι* ab. P. — p. 38. *τῶν* ab. V. — *ἐστι* ab. B. O. — lin. 24. *Ἡ* recepi ex V. ab. in ceteris. — lin. 28. *τῶν* ab. V. — lin. 30. *ὅπ. ἔδ. δ.* add. O. P. — Adsunt Lemmata, quae vide in app. — Lin. 8. *καὶ* ab. B. — lin. p. 39. 12. *τῇ ΒΓ* B. O. — lin. 13. *μέρει* addidi. — *τῆς ἐλάσσονος, τῆς ΒΓ* B. O. — lin. 17. *Καὶ ἐπεί ἐστιν* O. P. — lin. 25. *ΑΖ ΖΒ ἄρα.* — lin. 29. *ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τῷ* P. — *ὥστε καὶ σύμμετρον* adjeci. — Lin. 5. *ὅπ. ἔδ. δεῖξαι* B. Adest Lemma, quod vide in p. 40. app. — lin. 19. *τῆς Ζ* ab. B. O. — lin. 21. *οὖν* ab. B. O. — lin. 26. *αἱ ΑΔ . . . εἰσὶν ἀσύμμετροι* abs. P. In O. adnotatur: Illud *αἱ . . .* — *μετροι* ab. codd. Mspt. — et in B. legimus: Non habet exemplar alterum. — lin. 29. *διπλασίων ἐστὶν* B. O. — lin. 30. *ἀπὸ τῶν* B. O. — *ὥστε καὶ σύμμετρον* abs. P. — lin. 31. *ΑΒ*

BΓ· ὑπόκειται γὰρ οὕτως B. O. — Lin. 4. *τὸ δ' ἀπ' αὐτων* B. — lin. 5. p. 41.
ὅπ. ἴδ. π. ab. B. — lin. 10. *ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων* edd. omnes. — lin. 14. *τῇ BΓ* O. — *ἀπὸ σύμμ.* B. — lin. 16. *ὁμοίως τοῖς ἐπ. εἰρ.* B. O. — lin. 20. *ἀπὸ τῶν* ab. O. — lin. 21. *ἐστιν ἴσον* B. O. — lin. 22. *ἴση ἄρα ἡ ΔZ τῇ BE* B. O. — lin. 26. *τὸ ὑπὸ* B. — *μέσον δὲ* B. — *ἄρα* ab. O. — Lin. 2. *τῶν ὑπὸ τῶν* O. — lin. 3. *τῷ ἀπὸ τῶν* B. O. — lin. 4. *αἱ* p. 42.
ΑΔ ΔB abs. B. O. — lin. 6. *τετράγωνον* ab. V. — lin. 7. *τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων* edd. omn. — lin. 8. *ὅπ. ἴδ. δ.* ab. B. — lin. 9. Adest in B. inscriptio *Ἀρχὴ τῶν κατὰ σύνθεσιν ἐξάδων.* — lin. 10. *ῥηταὶ εὐθεῖαι* Schol. Mon. — lin. 11. *καλεῖται* V. — lin. 14. *ὅλη* ab. B. O. — lin. 22. pro *αἱ γὰρ ... ἀπὸ τῶν AB BΓ* B. et O. habent: *τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν AB BΓ τοῖς ἀπὸ τῶν AB BΓ ἀσύμμετρόν ἐστι.* — lin. 28. *ἐστι* ab. B. O. — Lin. 8. *ἄρα* ab. O. — lin. 9. *καὶ* ab. B. O. — *συνθέντι ἄρα* B. O. — p. 43.
lin. 12. *Ῥητὸν δὲ . . τῶν AB BΓ* abs. B. O. — Adest Scholion, quod vide in App. — lin. 24. *γὰρ* ab. B. O. — lin. 28. *δὴ τοῖς ἀ. τ. AB BΓ παρὰ τ. ΔE* P. — lin. 31. *ἐστι* ab. B. O. — Lin. 3. p. 44.
παράκεινται B. O. — lin. 4. *Καὶ ἐπεὶ ἀσ.* B. O. — lin. 7. *τῷ ἀπὸ τῆς AB τὸ* B. O. — lin. 16. *ἐστὶ ἀσύμμ. μήκ.* V. — *Ἐδείχθησ. δὲ ῥηταὶ* ab. V. — lin. 21. *ὥστε καὶ* B. O. — *αὐτὸ* ab. V. — lin. 23. Adest Scholium, quod vide in app. — lin. 29. *καλείσθω καὶ μείζων διὰ τὸ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα μείζονα εἶναι τῷ ὑπ' αὐτῶν.* Schol. Mon. — *ἄρα* ab. V. — Lin. 7. *Ῥητὸν δὲ . . . τῶν* p. 45.
AB BΓ abs. — V. P. — lin. 10 B. habet: Addit exemplar alterum. *Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα διὰ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν AB BΓ ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν AB BΓ μέσου.* Haec leguntur etiam in O. — lin. 15. *εὐθεῖα* ab. Schol. — lin. 16. *καλεῖται δὲ* V. — lin. 23. *συνθέντι* ab. V. — lin. 32. *ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων* edd. omn. — Lin. 5. *ποιοῦσαι τὰ προ-* p. 46.
κείμενα. Ἐκκείσθω etc. V. — *ἀσύμμετρον τῷ* etc. ut supra B. O. — lin. 14. *καί ἐστιν ἴσον* P. — lin. 18. *Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ* B. O. — lin. 20. *ἄρα* ab. V. O. — lin. 26. Adsunt Scholia, quae vide in app. — lin. 29. *καθ' ἑκατέρα ... ὑποκείσθω δὲ* abs. V. — *Καὶ ὑποκείσθω* P. — lin. 30. *τὸ ἀπὸ τῶν* B. — lin. 34. *καὶ λοιπὴ* V. P. — *ἐστὶν* ab. B. O. — Lin. 4. *μὴν* ab. P. — lin. 5. *ἐστι* ab. p. 47.
P. — lin. 12. Quae litteris minoribus expressa sunt, ad rem ex-

plendam necessaria mihi videbantur. — lin. 13. ἐκ τῶν ab. B. — lin. 15. B. O. add. εἴπερ συναμφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *AB*, sed notatur in margine O.: Illa εἰπερ . . desunt in codd. man. — lin. 26. ἡ *AB* τῇ *AB*. — lin. 29. τὸ αὐτὸ τμῆμα κατὰ τὸ *Γ* διαιρ. B. O. — In manuscript. Ἔστωι ἡ *AB* κατὰ τὸ αὐτὸ τμῆμα τὸ *Γ* διαιρ. διαιρεθεῖσα κατὰ τὸ *Δ*, notatur in O. — lin. 33. τοῦ διχοτόμου V. — lin. 34. τοῦ ἀπὸ τῶν B. O. — Lin. 9. ὅπερ ἄτ. ab. B. p. 48. O. — μέσον δὲ μέσ. B. O. — lin. 12. εἰς τὰ ὀνόμ. ab. B. O. P. — lin. 13. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. 16. 35. διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα B. O. — lin. 17. Ἔστω δὴ B. O. — lin. 21. διῃρήσθω καὶ κατὰ edd. omn. — lin. 31. διαιρεῖται εἰς τὰ ὀν. edd. omn. — ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — Lin. 5. κατὰ τῆς διχοτομίας, ὅτι οὐκ. V. — lin. 8. p. 49. καὶ κατὰ V. — lin. 11. *AΓ ΓB* μεῖζονα τῶν ἀπὸ τῶν *AΔ ΔB* B. O. — lin. 13. Καὶ ab. V. — lin. 14. ἡ ab. in edd. sed *B* habet δ. — lin. 15. παραλλ. ὀρθ. ab. B. O. — lin. 21. ἴσον τῷ δὶς.. B. O. — lin. 22. καὶ ab. V. — Lin. 3. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 8. p. 50. ἄρα ab. V. — lin. 12. τὸ ab. B. — lin. 13. ὅτι τὰ ἀπὸ V. — lin. 16. τῶν ante *AΔ* addidi. — lin. 20. Omnia, quae minoribus litteris expressa sunt, addenda censeo. — lin. 22. Ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. 25. εἰς τὰ ὀνόματα add. B. O. — lin. 31. καὶ κατὰ τὸ P. — Lin. 5. ἀπὸ τῶν ab. B. — lin. 7. 28. ῥητοῦ ὑπερέχουσι B. p. 51. O. — lin. 7. ἄτοπον B. — lin. 9. ἄρα ab. P. — lin. 13. 34. εἰς τὰ ὀνόματα add. B. O. — lin. 17. 22. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ V. P. — lin. 20. καὶ κατὰ edd. omn. — lin. 31. καθ' ἓν ἄρα σημεῖον διαίρ. sic edd. omn. μόνον ex conj. mea. — ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — Lin. 6. p. 52. αὐτῶν τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν edd. omn. — lin. 30. ἡ ἄρα ἐκ τῶν δύο V. P. — lin. 34. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — Lin. 4. τῆς p. 53. ἐκκειμένης ῥητῆς B. — lin. 15. Vocabulum ἐλάσσονος contractum est et inter lineas exaratum in Cod. V. — lin. 21. Adest Scholium, quod vide in app. — lin. 24. μὲν ab. O. — lin. 29. καὶ ab. B. O. — Lin. 27. ὅπ. ἔδ. ποιῆσ. ab. B. — P. O. habent ὅπ. ἔδ. δεῖξαι. — p. 54. Lin. 10. ἄρα ab. V. — lin. 29. τῇ ἐκκ. ῥητῇ σύμμ. ἐστ. V. — lin. p. 55. 31. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — Lin. 6. ἀριθμ. τετρ. B. O. — lin. 15. p. 56. Ῥητὴ δέ ἐστι B. O. — lin. 20. Γεγονέτω δὲ P. — lin. 23. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς edd. omn. — Lin. 2. πρὸς τὸ ἀπὸ *HΘ* B. — lin. 4. οὐδὲ p. 57. τὸ . . . . τετράγωνον ἀριθμὸν abs. B. O. — lin. 6. ἐστιν ab. B. O. — lin. 11. ἐστὶν ab. V. — lin. 16. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 21. ὅπ.

ἔδ. ποιῆσ. ab. B. — P. O. habent ὅπ. ἔδ. δεῖξ. — lin. 26. πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν V. P. — μήτε μὴν πρὸς τὸν *AΓ* abs. B. O. — lin. 33. καὶ ab. B. O. — Lin. 2. οὐδὲ τὸ .... τετράγωνον ἀριθμὸν p. 58. abs. B. O. — lin. 10. καὶ ab. V. — lin. 16. οὐδ' ἄρα .... τετράγωνον ἀριθμὸν abs. B. O. — lin. 22. ὅπ. ἔδ. ποιῆσ. ab. B. — lin. 29. τις εὐθ. ῥητ. B. O. — lin. 32. τῆς *ZE*· ὁ δὲ *ΓA* πρὸς τὸν etc. V. — Lin. 2. ἄρα ab. B. O. — lin. 4. ἄρα ab. O. — p. 59. lin. 19. τῇ *ZH* B. O. — lin. 23. ὅπ. ἔδ. π. ab. B. — lin. 30. μήδε πρὸς B. O. — lin. 35. σύμμετρος ἄρα ἐστὶ ἡ *E* τῇ *ZH* δυνάμει B. O. — Lin. 26. οὐδὲ τὸ . . . τετράγωνον ἀριθμὸν ab. B. — lin. 32. p. 60. τῆς ante *ZH* et 33. ante *ZΘ* ab. V. — Lin. 2. τῆς ante *K* et lin. 5. p. 61. ante *ZH* ab. V. — lin. 13. ὅπ. ἔδ. π. ab. B. — lin. 22. τῇ *BH* μήκει B. O. — lin. 23. ἡ δὲ . . τῶν *AK ΘΓ* abs. B. O. — lin. 31. καὶ ὡς ἄρα . . . πρὸς τὸ *BΓ* ab. B. — lin. 35. ἐστι ab. V. — Lin. 3. ἴση γὰρ ἑκατέρα V. — lin. 7. πρὸς τὴν *ΓB* P. — lin. 11. p. 62. περιέχεται edd. omn. — lin. 16. τὸ *AΓ* V. — lin. 20. γάρ ἐστι ἐκ δ. ὁ. B. O. — lin. 26. Τετμήσθω δὲ B. O. — lin. 28. 29. τῶν ἀπὸ τῆς B. O. — lin. 29. τοῦ ἀπὸ τῆς V. P. — lin. 31. διελεῖ B. O. — lin. 33. τῶν ab. V. — lin. 34. διὰ τῶν *H* etc. B. O. — Lin. 8. 9. p. 63. τὴν ab. V. — lin. 10. οὕτως ab. V. — τὸ ab. V. — lin. 11. τῷ μὲν . . . τὸ *ΣN* O. — lin. 15. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ *EA* τῷ *MP* ὥστε καὶ τῷ *ΩΞ* ἴσον ἐστίν etc. V. — lin. 24. 34. μήκει ab. V. — lin. 26. 35. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 28. *ΠK*, καί ἐστι σύμμ. B. O. — Lin. 4. p. 64. οὕτως ab. V. B. — τὴν ab. V. — lin. 5. Ἴση δή O. P. — lin. 22. τὸ μὲν μεῖζ. B. O. — lin. 26. σύμμετρός ἐστι B. O. — lin. 35. ἐστὶ ab. V. — Lin. 3. ἀνάλ. ἐστι τῷ B. O. — lin. 6. Ἐπεὶ γὰρ p. 65. O. — lin. 8. μήκει ab. V. — ἐπεὶ ab. V. — lin. 11. τῶν *AΠ ΠE*. Ἀλλ' ἡ *AE* σύμμετρός ἐστι τῇ *AB* μήκει· καὶ αἱ *AΠ ΠE* ἄρα σύμμετροί εἰσι τῇ *AB*· αἱ *AΠ ΠE* ἄρα etc. V. — lin. 17. ἐστιν ab. V. — lin. 18. τῇ *ΠK* V. — lin. 20. ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ *MN NΞ* ab. V. — lin. 23. σύμμετρος ab. B. O. — lin. 25. pro ὥστε edd. omn. habent τοῦτ' ἐστιν. — lin. 31. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 32. καὶ ab. V. — lin. 34. μόνον adjecc. — Lin. 4. Ἡ p. 66. *MΞ* ἄρα B. O. — lin. 13. διῃρημένη B. — *E*, τὸ μεῖζον ἔστω V. — lin. 16. Κατασκευάσθω B. O. — lin. 19. δύναται τὸ ἀπὸ συμμ. B. — lin. 20. 33. ἐστι ab. V. — lin. 22. καὶ ὅτι αἱ B. O — lin. 23. μέσαι εἰσὶ . . . ἡ *MΞ* abs. B. O. — lin. 23. μέσων εἰσὶ B.

Q. — lin. 27. *ἀσύμμετρα* B. — *ἀσύμμετρον* O. — lin. 30. *ἐστι* ab. B. O. — lin. 33. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — Lin. 8. *διῃρημένη* B. — p. 67. lin. 18. 28. *ἐστιν* ab. B. O. — lin. 22. *Δεικτέον δὲ* O. — lin. 23. *γὰρ* ab. V. P. — lin. 25. *δυνάμει* ab. O. — B. habet *δυνάμει μόνον*. — lin. 29. *ἐστιν* ab. V. — lin. 31. *τῆς EZ* V. — lin. 32. *μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν MN NΞ* B. — lin. 35. *συγκείμ.* ab. V. — Lin. 2. p. 68. *καὶ ἔστιν ἀσύμμετρος ἡ MN τῇ NΞ.* — lin. 16. *διῃρημένη* B. — lin. 20. *Κατασκευάσθω* B. O. — lin. 22. *Δεικτέον δὲ* edd. omn. — lin. 24. *ἄρα* ab. B. O. — lin. 28. *σύμμετρός ἐστιν ἡ EΔ* B. — lin. 29. *μήκει* ab. V. — lin. 31. *ἄρα* ab. B. V. — Lin. 3. *Ῥητὴ δὲ* p. 69. *ἡ EK* B. O. — lin. 4. *ὑπὸ MNΞ* V. — lin. 17. *διῃρημένη* B. — lin. 20. *Κατασκ.* B. O. — *γὰρ* ab. V. — lin. 21. *ἡ* ab. V. — lin. 26 *ἀπὸ τῶν* ab. O. — lin. 28. *ἄρα* ab. O. B. — *καὶ* ab. V. — lin. 31. *ἐστιν* ab. V. — Lin. 3. *Καὶ ἐστὶ . . . αἱ MN NΞ*, quod p. 70. bis adest in O., ab. in V. — lin. 10. *περιεχομένων* B. — lin. 12. *ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Γ* B. — lin. 18. 21. *τῆς* ab. V. — lin. 20. *ἐστι* ab. B. O. — lin. 23. *τῶν* ab. V. — Lin. 6. *ἑκατέρα τῶν MA HZ* p. 71. ab. V. — lin. 11. *ῥητά εἰσι* B. O. — lin. 13. *ῥητὸν ἄρα . . . ἀπὸ τῶν AΓ ΓB* abs. V. P. — lin. 20. *καὶ* ab. edd. omn. — *ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ MH* B. O. — lin. 27. *γὰρ* ab. V. — lin. 31. *οὕτως* ab. V. B. — lin. 35. *μήκει* ab. V. — Lin. 3. *τῇ MH* B. — lin. 5. *μέρει* p. 72. ab. V. B. — lin. 6. *μήκει* ab. V. — lin. 11. *ἡ ΔM . . . . συμμέτρου ἑαυτῇ* abs. B. O. — lin. 22. *εἰς τὰ μέσα.* — lin. 23. *καὶ παραβεβλ. παρὰ τ. ΔE* B. O. — lin. 27. *Κατασκ.* B. O. — lin. 32. *καὶ παρὰ ῥητὴν παράκειται* B. O. — *τὴν* ab. V. — lin. 34. *ἐστι* ab. B. O. — Lin. 2. *ἐστὶ* ab. B. O. — lin. 12. *ἐστι καὶ τὸ* edd. p. 73. omn. — lin. 17. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — lin. 29. *Κατασκ.* B. O. — *γὰρ* ab. V. — lin. 30. *δευτέρα ἐστὶ* B. O. — Lin. 2. *παρὰ τὴν ΔE* p. 74. *ῥητὴν* V. P. — lin. 3. 13. *καὶ* ab. B. O. — lin. 15. *δὴ* ab. V. — lin. 16. *τοῖς προτέροις* V. P. — lin. 17. *ἐστὶν* ab. B. O. — lin. 23. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — lin. 29. *τις ἔστω* ab. V. — lin. 34. *γὰρ* ab. V. — Lin. 5. *ἄρα ἐστὶ τὸ* V. — lin. 6. *ἐστὶ* ab. V. — lin. 8. *παρὰ* p. 75. *ῥητὴν ἐστι τὴν MA* V. — lin. 11. *ἄρα* ab. V. — lin. 14. *Ὁμ. δὴ δείξομεν τοῖς προτ.* V. P. — lin. 18. *ἐστι* ab. B. O. — lin. 19. *ὥστε καὶ ἡ KA τῇ KM ἀσ. ἐ.* B. O. — lin. 21. *παραβλ. παρὰ τ. μ.* B. O. — lin. 23. *μήκει* ab. V. — lin. 30. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — Lin. 8. *γὰρ* ab. V. — lin. 17. *ἐστιν* ab. V. — lin. 18. *μήκει* ab. p. 76.

V. — lin. 24. τῇ *KM* ab. B. — *μήκει τῇ KM* O. — lin. 26. *ῥηταὶ* ab. V. — lin. 28. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — Lin. 10. *συγκείμενον* post p. 77. *τετραγ.* V. P. — lin. 11. *τῷ ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν* V. P. — lin. 17. *ἐστι* ab. V. — lin. 21. *Ὁμοίως δὴ* V. P. — *τοῖς πρ. τούτ.* ab. V. P. — lin. 29. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — Lin. 11. 12. *τὴν* ab. V. — lin. 11. p. 78. *οὕτως* ab. B. V. — lin. 18. *ἤτοι* ab. O. B. — lin. 20. *δυνήσεται* B. O. — lin. 24. *ἐστι* B. O. — lin. 27. *διὰ τὸ* B. — lin. 29. *ἔσται* V. P. — lin. 33. *δύναται* V. P. — Lin. 2. *σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ* p. 79. edd. omn. — lin. 3. *καὶ ἔσται* edd. omn. — lin. 5. *σύμμ. ἔσται* V. P. — *καὶ ἔσται* edd. omn. — lin. 7. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — lin. 10. *καὶ αὐτὴ* ab. B. O. — lin. 14. *ἡ AB διῃρημένη* B. O. — lin. 17. 19. 22. 28. 29. *τὴν* ab. V. — lin. 17. 23. 28. *οὕτως* ab. B. V. — lin. 20. *σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ μὲν AE τῇ ΓZ, ἡ δὲ EB τῇ ZΔ· καί εἰσι μέσαι αἱ AE EB· μέσαι ἄρα* etc. O. B. — lin. 24. 25. *εἰσ. σύμμ.* B. O. — lin. 31. *ἄρα* ab. V. — Lin. 2. *τὸ ὑπὸ ΓZ* B. p. 80. — lin. 3. *ῥητόν ἐστι* edd. omn. — Post *ἔσται* add. Cod. V. *εἴτε μέσον, μέσον· καὶ ἔστιν ἑκατέρα δευτέρα καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ἡ ΓΔ τῇ AB τῇ τάξει ἡ αὐτὴ· ὅπ. ἔδ. δ.* — lin. 3. *ἑκατέρα* ab. edd. omn. — lin. 6. *ἔσται* ab. edd. omn. — lin. 16. *γεγονέτω γὰρ* V. P. — lin. 17. *ἡ AB πρὸς EB, οὕτως ἡ ΓZ πρὸς ZΔ καὶ ὡς* V. — lin. 23. 24. 25. *τὴν* ab. V. — lin. 24. *ἐστιν* ab. B. O. — lin. 30. 31. *πρὸς τὸ ἀπὸ* B. — Lin. 8. *εἰσ. ἀσύμμ.* B. O. — lin. 9. *ἄμα* p. 81. *ῥητὸν* V. P. — *τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτ.* B. — lin. 12. 32. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — lin. 23. *κατασκ.* B. O. — lin. 28. *τῶν τῶν* ab. V. B. — *μὲν* ab. B. O. — Lin. 6. *δεικτέον δὴ* edd. omn. — lin. 11. *τετρα-* p. 82. *γώνων* ab. V. — lin. 13. *ἀπὸ τῶν* ab. B. — lin. 18. *ZΔ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ* V. — lin. 23. *Ἡ ἄρα ΓΔ* V. P. — lin. 24. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — lin. 27. *ἢ ἐκ δύο* B. et in margine notatur: „Habet alterum „exemplar *ἤτε καὶ ἢ* conjunctive; sed perinde est.“ — Lin. 5. *ἴσον* p. 83. *κατὰ τὴν EZ, παραβ.* etc. V. — edd. cet. habent *παρὰ τὴν EZ τοῦτ' ἔστι τὴν ΘH.* — lin. 7. *τὸ EH* B. O. — lin. 8. *ῥητὴν* ab. V. — lin. 9. *ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ EΘ* B. O. — *καὶ ἀσύμμ.* B. — lin. 10. *ἐστὶ* ab. B. O. — lin. 11. *τὸ ΘI* B. O. — lin. 12. *ῥητὴν τὴν EZ τοῦτ' ἔστιν τὴν ΘH* edd. omn. — *παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκ.* V. — lin. 27. 35. *καὶ ἔστω μείζων* B. O. — lin. 34. *ἀπὸ συμμ.* B. — lin. 35. *τῇ EK ἐκκειμένῃ* B. — Lin. 11. *μήκει* adjecti. p. 84. — lin. 13. *ἑαυτῇ μήκει* edd. omn. — *καὶ ἔστω* O. — lin. 19. *χω-*

ρίον ab. V. — lin. 21. ἔστω B. O. — lin. 30. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. 34. ἤτοι ἐκ δύο V. — In margine ed. B. legimus: „Vel ἤτε „καὶ ἡ ut supra.“ — Lin. 6. Ἔστω εἰ τίχοι V. — lin. 22. μήκει addidi. — lin. 23. μήκει post ἑαυτῇ abjeci. — lin. 34. δυναμένη ἡ δύο V. P. — Lin. 2. ὥστε καὶ ἡ etc. V. P. — lin. 3. ἡ δύο μέσα V. P. — lin. 4. Ὁμοίως δὴ . . . μέσα δυναμένη abs. V. — lin. 6. δύο ἢ μέσα O. — ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη B. — lin. 9. Adest Lemma, quod vide in app. — Quae sequuntur in ed. O. inscripta sunt Ἀρχὴ τῶν καθ' ἀφαίρεσιν ἑξάδων et in B. Δευτέρα τάξις ἑτέρων λόγων τῶν κατὰ ἀφαίρεσιν — Ἀρχη etc. — lin. 13. τῆς ab. B. — lin. 14. τῇ *AB* ab. edd. omn. — lin. 15. ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομὴ edd. omn. — lin. 17. τὴν ab. B. — lin. 22. τὰ ἄρα ἀπὸ . . . τῶν *AB B Γ* abs. V. pro hisce quae sequuntur καὶ ἐπειδήπερ τὰ . . . . ἀπὸ τῆς *A Γ* a nobis uncis inclusa ante verba καὶ λοιπῷ etc. scripta reperiuntur. — lin. 32. περιέχουσα scripsi ex Schol. Mon. pro vulgato περιέχῃ. — Lin. 3. ὁλῇ τῇ abs. edd. omn. — lin. 4. ῥητὸν ποιοῦσα edd. omn. — lin. 5. καλείσθω (καλεῖται V.) δὲ etc. addunt edd. ceterae. — lin. 10. τῶν ab. V. — lin. 12. Ῥητὸν δὲ . . . τῆς *A Γ* abs. B. — lin. 14. ἐστιν ab. B. O. — Καλείσθω δὴ V. — lin. 19. περιεχούσῃ B. O. P. Nobiscum V. — lin. 23. μετὰ δὲ ὅλης V. — lin. 24. καλείσθω δὲ etc. add. edd. omn. — lin. 25. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ B. — Lin. 7. καὶ τῇ *B Γ* V. P. — lin. 11. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν *AB B Γ* τῷ δὶς ὑπὸ τῶν *AB B Γ* B. O. — lin. 14. ἐστι ab. B. O. — lin. 17. μήκει ab. V. — lin. 20. ὀρθογώνιον ab. V. — lin. 21. ἄρα αὐτὸ B O. P. sed nobiscum V. — lin. 21. Ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ *ZE*. haec adjicienda mihi videbantur. — lin. 23. μέση ἀποτομὴ B. O. — lin. 27. τὸ μὲν ἀπ' αὐτ. edd. omn. — lin. 31. ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω ὅτι etc. V. — lin. 33. ἅμα ante ῥητὸν abjeci cum insit vis hujus verbi voci συγκείμενον. — lin. 34. καλείσθω δὲ etc. add. O. P. ἡ καλουμένη etc. V. B. Ob hanc hujus additamenti diversam in variis codd. formam abjiciendum illud putavi, cum ex repetitione verborum theorematis nimis anxia ortum esse videatur. — Lin. 6. λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς *A Γ* ἀσύμμ. ἐστ. τ. ἀπὸ τῶν *AB B Γ* τῷ ἀπὸ τῆς *A Γ* V. — edd. cet. ut nos, omisso tamen vocabulo λοιπῷ. — lin. 7. ἄλογόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *A Γ*. Καλείσθω V. — lin. 19. ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω V. — lin. 21. Καλείσθω (καλεῖται)

p. 85. p. 86. p. 87. p. 88. p. 89.

δὲ etc. edd. omn. — lin. 25. *ΑΒ ΒΓ τετράγωνα τῷ* δὶς etc. B. O. — *καὶ* ab. V. — lin. 29. *ἡ ΑΓ ἡ προειρημένη* cetera abs. V. — Lin. 2. *τὸ μὲν συγκ.* B. O. P. (sed nobis cum V.) — lin. 3. *τό τε* p. 90. *δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον* exciderunt B. — *τὸ δὲ* etc. O. P. (sed nobis cum V.) — lin. 4. *ἔτι δὲ* B. — *καὶ ἔτι* O. P. — *τετραγώνων* O. P. — lin. 9. *ποιοῦσα τὰ προκείμενα λέγω* V. P. — *τὸ δὲ* B. O. — lin. 11. *τὸ δὲ* B. O. — *ἔτι δὲ* O. — lin. 13. *καλείσθω δὲ* (*ἡ καλουμένη* V. P.) etc. add. edd. omn. — lin. 15. *ῥητὴν* post *παρὰ* omisi cum V. — lin. 17. *πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ* ab. V. — lin. 20. *τετραγώνων* ab. P. — lin. 21. *ἐστὶ* ab. V. — lin. 29. *ἐστὶ* ab. V. — lin. 30. *οὕτως ἐστὶ ἡ* V. P. — *οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ* B. O. — lin. 31. *τὴν* ab. V. — lin. 35. *ὀρθογώνιον* ab. V. — Lin. 2. *τὸ ΖΕ ἄρα* p. 91. *ἄλογόν ἐστι* a me inserta sunt ut ad rem necessaria. — lin. 7. *μόνον* ab. V. — lin. 12. *προσαρμόσει* B. O. P. — lin. 14. *προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ, καὶ αἱ* V. edd. cet. omittunt *καὶ*. — lin. 21. *καὶ* ab. V. — lin. 22. *Τὸ δὲ ἀπὸ* B. O. — lin. 23. *ῥητὴ γὰρ* edd. omn. — *ῥητὴ γὰρ ἑκατέρα* B. — lin. 29. *προσαρμόσει* B. O. — lin. 30. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — lin. 32. *Τῇ μέσῃ* edd. omn. — *μόνον μία* B. O. — Lin. 4. *μέσῃ* edd. omn. — lin. 5. *αἱ ἄρα ΑΓ ΓΒ* B. O. — p. 92. lin. 15. *πάλιν* ab. V. P. — lin. 24. *μέσῃ* edd. omn. — lin. 25. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — lin. 27. *Τῇ μέσῃ* edd. cet.; sed nobiscum congruenter V. — lin. 29. *οὖσα* ab. V. — lin. 31. *μέσῃ* edd. cet.; sed nobiscum V. — Lin. 2. *προσαρμόσει* B. O. — lin. 4. *προσαρμο-* p. 93. *ζέτω ἡ ΒΔ, καὶ αἱ* etc. V. P. sed B. O. omittunt *καὶ*. — lin. 5. *ΑΔ ΔΒ ἄρα* B. O. — lin. 7. *μὲν* ab. B. O. — lin. 26. *εἰσὶν σύμμ.* B. O. — lin. 28. *οὕτως ἄρα καὶ τὸ* B. — *οὕτως καὶ τὸ* O. — *οὕτως ἐστὶ τὸ* V. P. — lin. 30. *ἐστὶ καὶ τὸ* B. O. — Lin. 9. *τῇ* p. 94. *ΕΘ* inserenda putavi. — lin. 12. *μεσῇ* edd. omn. excepto cod. V. — lin. 13. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — lin. 24. *προσαρμόσει* edd. omn. — lin. 26. *καὶ* ab. B. O. — lin. 28. *ποιοῦσα τὰ προειρημένα· καὶ ἐπεὶ* V. P. — lin. 33. *τετραγώνων* ab. B. O. — lin. 34. *ἐστιν* ab. B. — Lin. 3. 29. *ἐστιν* ab. B. O. — lin. 5. 32. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — lin. p. 95. 14. *ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμοζέτω ἡ ΒΓ* V. — lin. 15. *ποιοῦσα τὰ προκείμενα· Ἐπεὶ οὖν, ᾧ ὑπερέχει* etc. (lin. 23.) V. — lin. 18. 30. *προσαρμόσει* B. O. P. — lin. 25. Post *ΑΓ ΓΒ* addunt edd. cet. *ἀκολούθως τῶν* (*τοῖς* V.) *πρὸ αὐτοῦ*. — lin. 30. V. pergit *δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ*

προκείμενα· μία ἄρα μόνον προσαρμόσει. — B. O. δυνάμει ἀσύμμετρος ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητὸν· τῇ ἄρα etc. ut nos; sed. in B. omissum est ὅπ. ἔδ. δ. — Lin. 4. μία μόνη V. — τῷ συγκειμένῳ p. 96. O. P. — τῷ ὑπ αὐτῶν abs. O. P. — τῷ δὶς ὑπ' αὐτ. habet B. — lin. 11. αὐτῇ ab. B. — lin. 12. ποιοῦσαι τὰ προειρημένα V. P. — lin. 15. τῷ δὶς ὑπὸ B. O. — lin. 16. εὐθεῖα ab. V. — προσαρμόσει edd. omn. — δυνάμει . . . τῆς ὅλης abs. V. P. — lin. 20. ποιοῦσα τὰ μὲν edd. cet. sed V. nobiscum. — lin. 27. ἴσον παρὰ τὴν EZ παραβεβλήσθω τὸ ΘΗ V. — lin. 29. μὲν post τοῖς abjeci cum V. — Lin. 4. ἔστιν ab. B. O. — lin. 5. τὸ ΘΗ B. O. — p. 97. lin. 9. ἄρα post ἀσύμμ. abjeci cum V. — lin. 17. ἀσύμμετρος B. O. — lin. 21. καὶ τὸ . . . μέσον abs. B. O. — lin. 22. καὶ ἔτι τὰ ἀπ' V. P. — lin. 23. τῷ δὶς ὑπ' edd. omn. — ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. 27. ᾗ ab. V. — Lin. 5. ἀπὸ συμμέτρου B. — μήκει V. — p. 98. lin. 15. ὁ ante ZΔ adjeci cum V. — lin. 19. ΗΓ τετράγωνον V. — lin. 30. δὴ adjectum est a me. — Lin. 10. μήκει τῇ Α V. — p 99. lin. 13. ὅπ. ἔδ. εὑρεῖν V. — ὅπ. ἔδ. δεῖξαι B. — lin. 17. καὶ ab. B. O. — lin. 21. ΗΒ τετράγωνον V. — lin. 22. idem V. P. — lin. 23. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 24. ἀπὸ ab. O. — lin. 27. ἄρα a me insertum. — lin. 28. ἄρα ab. V. — Lin. 7. μεῖζον τὸ P. — p. 100. lin. 10. τῇ ἐκκειμ. ῥ. σύμμ. τῇ Α· ᾗ etc. V. — lin. 12. ᾗ δευτέρα ab. B. — ὅπ. ἔδ. π. ab. B. — lin. 16. Ἐκκείσθ. ῥητὴ ἡ Α καὶ ab. B. — lin. 24. ΗΘ τετράγωνον edd. omn. — lin. 24. Ἐπεὶ οὖν . . . τῆς ZΗ τετράγωνον. Haec a me recepta ex cod. V. — Quae sequuntur lin. 26. σύμμ. . . . ZΗ τετραγώνῳ recepta ex eodem etiam in P. — lin. 31. 35. τετράγωνον ab. B. O. — lin. 35. πρὸς ΓΔ B. — Lin. 6. οὐκ ἄρα B. O. — lin. 15. πρὸς ΓΔ V. — p. 101. lin. 23. μήκει τῇ Α B. O. — lin. 28. τετράγ. ab. B. O. — lin. 34. Κ ἡ ἄρα . . . τῷ ἀπὸ abs. V. P. — Lin. 5. ὅπ. ἔδ. π. p. 102. abs. B. — lin. 12. ἑκάτερον τὸν edd. omn. — lin. 26. Λέγω δὴ . . τετάρτη ab. V. — edd. cet. habent δὲ. — lin. 27. Ὡι οὖν μεῖζον τὸ ἀπὸ B. O. — lin. 30. καὶ ἀναστρέψ. V. P. — lin. 31. τὸν ab. V. — Lin. 6. μήκει ab. V. — ἐστιν ὅλη. V. — lin. 7. μήκει τῇ Α p. 103. B. O. — ΒΓ' ἄρα B. O. — lin. 9. ΒΓ' ab. B. O. et in V. ante τετάρτη scriptum est. — ὅπ. ἔδ. π. ab. B. — lin. 13. μήκει ab. B. O. — lin. 14. ἐστιν ab. V. — lin. 18. τὸν ab. V. — lin. 20. σύμ-

μετρον ἄρα . . . τὸ ἀπὸ τῆς *ΓΗ* abs. V. — lin. 21. ἄρα καὶ . . . τῆς *ΗΒ* abs. V. — lin. 25. οὐδὲ τὸ ἀπὸ V. — Lin. 9. μεῖζον ab. p. 104. V. — lin. 10. ἀπὸ συμμέτρου B. — lin. 15. ὅπερ ἔδ. π. abs. B. — lin. 20. ἔτι δὲ . . . τετράγωνον ἀριθμὸν abs. B. O. — Lin. 3. ἐστὶ p. 105. a me additum. — lin. 12. ἡ ἄρα *Ζ Θ* B. O. — lin. 24. καὶ οὐδετέρα τῶν B. O. — lin. 25. τῇ *Α* ῥητῇ μήκει sic edd. omn. — Lin. p. 106. 5. μήκει τῇ *Α* edd. omn. — lin. 7. ὅπ. ἔδ. π. abs. B. — lin. 14. πρώτης ab. O. — lin. 22. παραλληλόγραμμον ab. V. — lin. 23. διαιρεῖ. — Lin. 15. περιεχόμ. ὀρθ. ab. O. — Verba *ΖΗ* περιεχό- p. 107. μενον . . . ὡς ἡ *ΑΖ* exciderunt in ed. B. — lin 16. τετραγώνῳ ab. O. — lin. 18. τὴν ab. V. — lin. 19. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 22. μὲν ab. B. O. — lin. 25. ὅσ. ἐστ. B. O. — lin. 27. καὶ λοιπὸν B. O. — lin. 31. καὶ ab. B. O. — lin. 33. ἴσον τοῖς O. P. — lin. 34. ἑκατέρων τῶν B. O. P. Nostra tuetur V. — Lin. 5. καὶ post ἐστὶ p. 108. abjeci cum V. — lin. 13. ὅπερ ἔδει δεῖξαι abs. B. — lin. 24. ἡ δὲ *ΑΗ* ὅλη B. O. — lin. 27. μήκει ab. V. — lin. 30. διαιρεῖ V. — lin. 31. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς B. O. — lin. 34. Καὶ διὰ τῶν . . . τῇ *ΖΗ* μήκει abs. V. — Lin. 10. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ . . . τῇ *ΑΓ* μήκει abs. V. p. 109. — lin. 15. ὑπὸ τῶν *ΑΟΜ* V. — lin. 18. καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις abs. V. — lin. 20. ἄρα ab. V. — lin. 21. μέσαι εἰσί· Λέγω ὅτι καὶ δυνάμει μόνον συμμέτροι B. V. — lin. 22. Ἐπεὶ γὰρ V. P. — lin. 26. 31. ἐστὶ ab. V. — Lin. 2. pro τοῦτ' ἔστι V. habet τὸ δὲ *ΤΣ* p. 110. ἐστὶ — τῆς *ΑΝ* ἄρα V. — lin. 3. τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* χωρίον V. — lin. 4. δὴ ab. V. — μέση V. — lin. 5. τῷ *ΜΝ* τοῦτ' ἔστι abs. V. — lin. 6. ἐστὶ ab. V. — lin. 9. Καὶ ὡς ἄρα τὸ *ΑΞ* B. O. — lin. 15. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — Lin. 6. τῇ *ΑΓ* μήκει· ὥστε καὶ αἱ *ΑΖ* p. 111. *ΖΗ*· ἑκάτερον ἄρα etc. V. — lin. 11. μήκει ab. B. O. — lin. 19. ἀσύμμετρον . . . τῷ *ΕΚ* abs. V. — lin. 29. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 35. ἴσον τῷ *ΔΘ* B. O. — ἐστι τῷ *ΔΘ* V. — Lin. 6. μέση B. p. 112. O. — lin. 20. καὶ ab. V. P. — lin. 23. χωρίον ab. B. O. — lin. 25. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — lin. 30. τῆς ab. O. — Lin. 4. δυναμένη V. — p. 113. lin. 10. ἴσον ab. B. — lin. 12. ἐστὶν μήκει V. — lin. 21. ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ἀπὸ τῶν *ΑΟΜ* τὴν *ΝΞ*. — lin. 26. τὴν ab. V. — lin. 29. ἐστι post οὕτως abjeci cum V. — lin. 33. Ἀλλὰ τῷ μὲν . . . τὸ B. O. — Lin. 12. ἴσον τοῖς *ΑΟ ΟΝ* τετραγώνοις p. 114. B. — lin. 16. *ΟΝ* τετραγώνῳ V. P. — lin. 22. ὅπ. ἔδ. δεῖξ. abs. B. — lin. 36. Ἐπεὶ οὖν . . . ἑαυτῇ μήκει a me addita sunt. — τ. τῶν

abs. B. — Lin. 9. *Καὶ ἤχθωσαν . . . ΕΘ ΖΙ ΠΚ* abs. V. — lin. 13. p. 115
καὶ a me additum. — lin. 15. *τὸ ΝΞ* ante *περὶ* rectius habet V. —
lin. 20. *χωρίον* ab. O. — lin. 27. *καὶ αὐτὸ ῥητόν ἐστι* V. — lin. 32.
ἡ ab. B. O. — lin. 34. *μέσον* ab. B. O. — lin. 36. *ὅπ. ἔδ. δ.* abs.
B. — Lin. 12. *οὐδετέρα* (O. *οὐδέτερον*) *τῶν ΑΠ ΠΛ* B. O. — lin. 17. p. 116.
παραβάλλωμεν. — lin. 20. *σημεῖον* ab. V. — lin. 17. *Πάλιν ἐπεὶ . . . καὶ*
τὸ ΛΚ abs. V. — lin. 20. *σημεῖον* ab. V. — lin. 34. *ὃν τῷ ΛΜ* abs. V. —
Lin. 5. *Λέγω ὅτι ἡ ΛΝ ἡ μετὰ* etc. sic legendum est cum edd. p. 117.
omn. *ἡ* ante *μετὰ* ab. V. — lin. 10. *ἄρα* ab. V. — lin. 16. *τὸ μὲν*
συγκ. B. — lin. 22. *ΑΒ* ab. V. — lin. 23. *ὅπ. ἔδ. δ.* abs. B. —
lin. 34. *πλατὸς ποιοῦν τὴν ΓΚ* a me addita sunt; item lin. 35.
πλ. π. τ. ΚΜ. — Lin. 4. *τῶν* ab. V. — lin. 7. *τῶν* ab. B. — lin. p. 118.
9. *καὶ* a me additum. — lin. 13. *ἔστι* ab. V. — lin. 15. 34.
ἐστὶν ab. B. O. — lin. 17. *τὰ δὲ δὶς . . μέσα* V. — lin. 18. *ἄρα*
ab. B. — lin. 19. *Καὶ ἐστὶ τοῖς . . . ἴσον τὸ* etc. B. O. — lin. 21.
22. *ΔΜ* pro *ΓΛ* habet B. — lin. 26. *δὴ* ab. B. O. — lin. 30. *τὸ*
ΛΝ scriptum est ante *τῷ δὲ ἀπὸ* etc. et post *ΑΠ ΠΒ* additum
ἴσον B. O. — lin. 35. Verba *ὡς ἄρα ἡ ΓΚ* etc. . . *πρὸς τὴν ΚΜ*
abs. in V. et in Mnscpto Gregorii. Uncis haec verba inclusit Gry-
naeus. — Lin. 6. *ἐστι* ab. V. — lin. 11. *τῷ ὑπὸ* B. O. — lin. 17. p. 118.
ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — lin. 22. *ἀποτομὴ μέση* B. — lin. 32. *μέσοις*
οὖσι abs. V. — Lin. 5. *ἐστὶ* a me additum. — *καὶ* ab. V. P. — p. 120.
lin. 6. *ῥητὴ ἄρα . . . ἡ ΖΜ* abs. B. — *ἐστι* ab. V. — lin. 7. *καὶ*
ἀσύμμετρος O. P. — lin. 12. *ἐστὶν* ab. V. — lin. 22. *τῷ δὲ . . τὸ*
V. — lin. 30. *Καὶ ἐπεὶ . . . τῇ ΚΜ* abs. V. — lin. 34. *τῷ δὲ τε-*
τάρτῳ B. O. — Lin. 2. *τῷ ὑπὸ* B. V. — lin. 3. *τῆς* ab. B. — p. 121.
lin. 5. *μήκει* ab. B. O. — lin. 8. *ὅπ. ἔδ. δ.* abs. B. — lin. 13. *μέσῃ*
ἀποτομὴ edd. omn. — Lin. 7. *σύμμετρόν ἐστι* abs. V. — lin. 8. p. 122.
τῷ δὶς B. — *ἀσύμμ. ἄρα . . . ὑπὸ τῶν ΑΠ ΠΒ* abs. V. — lin.
19. *ἐστὶ καὶ* abs. B. O. — *ἐστι* ab. V. P. — lin. 26. *πρὸς ΚΛ* B.
— lin. 29. *καὶ ὡς ἄρα* B. O. — lin. 30. *τὴν* ab. B. — Lin. 4. *μή-* p. 123.
κει συμμ. ἐστ. B. O. — lin. 7. *ὅπ. ἔδ. δ.* abs. B. — lin. 14. *παρὰ*
ῥητὴν τὴν V. P. — lin. 22. Linea *τῷ δὲ . . . τὴν ΚΜ* excidit in
B. — lin. 23. *παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλ.* abs. V. P. Legimus in
margine O. „Rectius in Cdd. msc. desiderantur.“ — lin. 32. *οὖν*
καὶ ἡ V. P. — lin. 35. *τῶν* ab. V. — Lin. 6. *μὲν* ab. V. — lin. 9. p. 124.
10. *ἐστι* ab. V. — lin. 12. *ἐστὶν* ab. B. O. — Lin. 9. *ὑπὸ ἐλάσσ.* O. — p. 125.

lin. 10. ὅπ. ἴδ. δ. ab. B. — lin. 33. ἀπὸ τοῦ *N* ὑποτέρᾳ B. O. —
Lin. 3. 9. 19. ἐστὶ ab. V. — lin. 24. διαιρεῖ αὐτὴν B. O. — lin. 29. p. 126.
Ἀπὸ τῆς ἄρα B. — ὅπ. ἴδ. δ. abs. B. — Lin. 9. μέσον καὶ ἀσύμμε- p. 127.
τρον τὸ ἀπὸ τῶν *AH HB* V. — lin. 14. 18. 27. ἐστὶ ab. V. —
lin. 25. ἀπὸ τῶν abs. V. — lin. 28. τὸ ab. V. — Lin. 5. τὸ ἀπὸ p. 128.
τῆς *IΘ* V. — lin. 7. 8. ἐστι ab. B. O. — lin. 10. ἀπὸ τῶν abs. V.
— lin. 13. ἴσον ἐστὶ τὸ *NA* V. P. — καὶ τῶν ἄρα . . . τὸ *NA* abs.
V. — lin. 14. ἔστιν ἄρα . . . πρὸς τὸ *KA* abs. B. O. — lin. 20.
Ἀπὸ τῆς ἄρα B. — lin. 21. ὅπ. ἴδ. δ. abs. B. — lin. 25. συμμ. ἐστ.
μ. B. O. — lin. 32. ἐστι ab. V. — Lin. 2. Καὶ αἱ *AE EB* V. P. p. 129.
— lin. 4. σύμμετροι. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς etc. (lin. 7.) V. — lin. 6.
τῇ *AB* ab. B. — lin. 8. ἐστιν ab. B. O. — lin. 9. δὲ ab. V. —
lin. 15. καὶ ἡ *IZ* abs. B. — lin. 17. τῷ ab. B. — lin. 24. ὅπ. ἴδ.
δ. abs. B. — lin. 26. μέσῃ . . μέσῃ B. — lin. 28. 31. μέσῃ B. —
lin. 34. σύμμετρος ἄρα . . . τῇ *IZ* abs. B. O. — Lin. 3. καὶ αἱ p. 130.
IZ . . . μόνον σύμμετροι abs. B. O. — lin. 4. μέσῃ B. — lin. 6.
Δεικτέον δὴ ὅτι B. O. — lin. 8. ἀλλ' ὡς μὲν . . . τὸ ὑπὸ τῶν *IZ*
ZΔ abs. V. P. — lin. 13. ἐναλλὰξ ἄρα . . . τῶν *IZ ZΔ* abs. V.
P. — lin. 16. 32. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 18. ῥητόν ἐστι B. O. —
lin. 20. ἔσται ab. V., cett. edd. ἐστὶ. — lin. 21. Μέσῃ B. —
lin. 22. ὅπ. ἴδ. δ. abs. B. — lin. 25. Ἔστω γάρ. — lin. 27. τοῖς
πρότερον ab. V. cett. edd. habent τῷ προτέρῳ. — lin. 33. καὶ ἐναλ-
λὰξ ab. V. P. — Lin. 6. τῶν ab. O. — ἀπὸ τῶν abs. B. — ῥητὸν p. 131.
ἄρα . . . τετραγώνων abs. B. — lin. 10. καὶ ἐναλλὰξ ab. V. P. —
lin. 11. τετραγώνῳ ab. B. O. — lin. 12. ἐστι ab. V. — lin. 18. ὅπ.
ἴδ. δ. abs. B. Sequitur demonstratio altera, quam vide in appen-
dice. — lin. 21. καὶ αὐτὴ post σύμμετρος abjeci cum cod. V. —
lin. 24. ἔστω a me adjectum. — λέγω ὅτι καὶ V. P. — lin. 32.
ἐστι ab. B. O. — μὲν ab. V. P. — Lin. 6. ὅπ. ἴδ. δ. abs. B. — p. 132.
lin. 12. ἔστω ab. B. O. — ὅτι καὶ V. — lin. 18. Ejeci τετραγώ-
νων post αὐτῶν. — lin. 24. τε ab. V. — lin. 26. Abjeci τετραγώ-
νων post αὐτῶν cum cod. V. — lin. 29. ὅπ. ἴδ. δ. abs. B. — Lin. 3. p. 133.
χωρίον ab. V. — lin. 10. μὲν ab. B. O. — lin. 12. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν
ἡ *ZΘ* B. O. — ῥητὴ μὲν ἄρα V. — lin. 18. ἀπὸ συμμέτρου ἢ οὔ.
— lin. 20. ἀπὸ ἀσυμμέτρου P. — lin. 23. περιεχόμενον ab. B. O.
— lin. 28. ἄρα ab. V. — lin. 30. Ἡ ἄρα . . . ἴδει δεῖξαι abs. V.
— lin. 32. ὅπ. ἴδ. δ. abs. B. — Lin. 4. 8. 33. ἐστι μέσῃ B. — p. 134.

lin. 15. ταὐτῇ V. — lin. 21. ἀποτομὴ δευτέρα ἐστὶ V. — lin. 22. μέση B. — lin. 23. ἐστ. πρώτ. V. P. — lin. 24. μεῖζον τῆς *ZK* (V. τῇ *ZK*) B. O. — lin. 25. ἑαυτῇ ab. V. — lin. 27. ἄρα ab. V. — lin. 28. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — Lin. 5. μέση B. — μετὰ τοῦ p. 135. V. — lin. 7. Cod. V. habet. Ἐπεὶ γ. μ. ε. ἐκ. τ. *BΓ BΔ* καὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ *BΓ* τῷ *BΔ* ἔσται ἀκ .... καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ὑπόκειται τὸ *BΓ* etc. — B. Ἐπεὶ γ. μέσ. ἐστ. ἐκ. τῶν *BΓ BΔ*, καὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ *BΓ* τῷ *BΔ* τοῦτ' ἔστι τὸ *HΘ*, ἀσύμμετρός ἐστι etc. idem. O. nisi quod post τὸ *HΘ* addat τῷ *HK*. — cum O. consentit P. — Addit tamen O. haecce in margine. „Ita in codd. „Mscpt.: Ἐπεὶ γὰρ μέσ. ἐστ. ἐκ. τῶν *BΓ BΔ* καὶ ἀσύμμετρυν τὸ *BΓ* „τῷ *BΔ*, ἔσται etc.“ ut supra in V. Nos eum, quam edidimus verborum ordinem re ipsa desiderari existimavimus. — lin. 13. προσαρμόζουσα δὲ . . . ἀσυμμέτρου abs. V. P. — lin. 16. Εἰ μὲν δὴ V. P. — lin. 19. ἄρα ab. V.; in ceteris ἐστιν ἄρα τρίτη legimus. — lin. 22. ἀποτομὴ μέση B. — μέσης O. — ὥστε ἡ τὸ . . . δευτέρα abs. B. O. — lin. 26. μήκει ab. V. in quo etiam οὐθέτερα. — lin. 27. ἐκκειμ. ῥητ. τῇ abs. V. P. — lin. 28. ἐστ. ἄρ. ἐκτ. B. O. P. ἄρα ab. V. — lin. 29. ἐστὶν μετὰ μέσου etc. V. — lin. 30. ὥστε ἡ τὸ *AΘ*, τοῦτ' etc. — lin. 32. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — Lin. 10. τῇ *ZE* p. 136. B. O. — τὸ ἀπὸ P. — lin. 12. ἐπεὶ ab. B. O. — lin. 13. ἔστ. πρώτ. B. O. — lin. 18. μήκει ab. V. qui habet καὶ, quod ab. B. O. — lin. 19. λοιπῇ ἄρα τῇ *ZH* . . . ἡ *ΔZ* B. O. P. Nos secuti V. — lin. 20. . . 23. Ἐπεὶ οὖν . . . τῇ *ZH* μήκει abs. V. — lin. 23. τῆς *ZE* B. — lin. 25. μήκει καί εἰσι ῥηταί abs. V. — lin. 9. εἰσι ab. V. — lin. 27. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 29. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — lin. 30. Verbum Πόρισμα ab. B. — Lin. 12. τότε pro τοῦ τε O. p. 137. — lin. 13. ὅτι pro ἐπεὶ τῇ B. O. — lin. 18. αἱ μὲν abs. V. αἱ ab. B. — lin. 19. ἑκάστη ab. B. — τάξει καθ' αὑτήν B. O. — lin. 20. αὐταὶ O. P. — lin. 22. κατὰ τὴν V. — lin. 32. 33. Μέσην B. O. — Lin. 6. καὶ ἔτι τῷ αὐτῷ B. — καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ O. P. — p. 138. lin. 8. ἔχει B. O. — lin. 9. δὲ ὀνομάτων B. O. — lin. 13. ἕξει V. P. — lin. 19. ἴση τῇ *H* B. O. — lin. 21. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 25. πρὸς *KE* ἓν ἡγούμενον πρὸς ἕν etc. V. — lin. 27. 28. τὴν ab. V. — lin. 30. ἐστι ab. B. O. — Lin. 2. 3. ἐστι ab. B. O. — lin. 7. p. 139. 8. τὴν ab. V. — lin. 10. 11. καὶ συμμ. . . . μήκει abs. V. — lin. 11. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 13. εἰσὶ post ῥηταὶ B. O. — lin. 17.

ἑαυτῇ ab. V. — δύναται B. — lin. 20. 21. 27. οὐθετέρα V. — lin. 23. καὶ ἡ *ZK* . . . . ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ abs. V. — lin. 28. τὰ ab. V. — lin. 30. ἔχει ταξ. B. O. — lin. 31. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — Lin. 2. ἐστι τοῖς abs. B. O. (adest in Schol. Mon. V. P.) — lin. 4. p. 140. τάξιν ἔχει edd. ceterae. Nos secuti Schol. Mon. — lin. 9. ὅτι καὶ ἐκ. V. P. — lin. 12. ὅτι ἡ B. O. — lin. 15. ἔστω καὶ τὸ V. — lin. 17. παράκειται B. O. — lin. 19. τῶν ab. B. — ἐστ. ἴσ. B. O. — lin. 21. Ad Verba τὴν *H* adnotatum est in P. Articulum τὴν ubique abesse in reliqua demonstratione in V. — lin. 29. ὡς ab. V. — lin. 31. εἰσὶ ab. V. — lin. 33. 34. οὕτως ab. V. B. — lin. 35. οὕτως ab. V. — Lin. 2. οὕτως ab. V. — lin. 4. *KZ* πρὸς τὴν p. 141. *ZΘ*, καὶ ἡ *ZΘ* πρὸς τὴν *ZE*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *KZ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *EZ ZΘ*. Σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ *KZ* τῷ ὑπὸ *EZ ZΘ*, αἱ γὰρ . . . . σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ *KZ* τῇ *ZE* μήκει· ὥστε ἡ *EΘ* καὶ τῇ *ZE* σύμμετρός ἐστι μήκει * B. quae asterisco indicat lectionum varietatem adesse. — lin. 7. ἐστι ab. B. O. — lin. 8. ἐστι ab. V. — lin. 10. B. habet asteriscum post μήκει. — lin. 12. ἄρα ab. V. — lin. 14. *ZΘ* τῇ *ΓΔ* V. B. — *Αἱ BΓ ΓΔ* δὲ. — lin. 16. δύο ἄρα ὀνομ. ἐστ. B. O. P. — δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἄρα V. — lin. 20. 26. δύναται B. O. — lin. 23. καὶ ab. V. — lin. 32. ἐστι ab. V. — lin. 34. Verba ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — Lin. 5. 20. τέ ab. B. O. — p. 142. lin. 12. τοῖς ἀπὸ τῆς ἀποτ. O. — lin. 13. ἔστω ἡ ὑπὸ τῶν V. P. — lin. 22. πρὸς *MΛ* V. — lin. 23. οὕτως *ZB* B. — lin. 25. 27. τὴν ab. V. — lin. 26. 34. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 29. τῶν ab. V. — lin. 31. τῷ . . . τὸ . . V. — lin. 33. καὶ ab. V. — Lin. 3. ὅπ. ἔδ. p. 143. δ. abs. B. in V. vero post coroll. scripta sunt haec verba. — lin. 9. Vulgo sic: καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτὴ. Sed ab. οὐδεμία in V. et Schol. Mon. habet αἱ αὐταί. ex utroque nostra profecta est lectio. — lin. 12. 25. καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή. Sic vulgo, sed οὐδεμία et ἐστιν abs. V. — lin. 16. τῶν ab. B. O. — lin. 21. ἐστιν ab. V. — lin. 27. Adest demonstratio altera, ad quam notatur in ed. O. — „Demonstratio „haec, quae pro alia habetur tam in codd. man. quam in editis, „parum differt a praecedente; illam tamen cum Commandino reti- „nuimus. Duas licet propositiones, quae sequuntur in graecis ex- „emplaribus plane ejiciendas censuimus utpote easdem cum prop. „106. 107.“ — Omnia nos, quae in hoc libro sequuntur, Euclidis non

esse censemus, quare in app. ea rejicienda curavimus, quam vide; et ea confer, quae in adnotationibus infra notabimus. — Lin. 10. *ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκ.* B. O. — lin. 18. *σημείου καὶ ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος* B. O. — lin. 19. *ἀποζευχθῇ* O. — *ὀξεῖα* ab. V. — Lin. 5. *Ἴσα δὲ* edd. omn. — lin. 6. *τὰ περὶ ὁμοίων* O. — lin. 9. *ἐπιπέδων γων.* B. O. — lin. 10. Definitio undecima in omnib. editionibus hisce expromitur verbis *Στερεὰ γ. ε. ἡ ὑπὸ πλ. ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν* (ἢ V.) *πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. Ἄλλως Στ. γ. ἔστι* etc. (ea scilicet quae in textum a nobis recepta sunt.) Euclidis certe haec prior definitio esse non potest, qui pro *ἐπιφανείᾳ* verbo *ἐπιπέδῳ* usus fuisset neque *γραμμῶν* cum *εὐθειῶν* confudisset. — lin. 29. *μιᾶς* ab. B. — lin. 32. *μὲν* ab. B. — lin. 34. *ὁ* ab. B. O. — Lin. 2. *εὐθεῖα* ab. B. O. — lin. 6. *Κύλινδρος δὲ ὅταν* B. O. — lin. 7. Verba *τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν* (*γωνίαν* V.) abjeci post *πλευρᾶς*. — lin. 19. *στερεὸν* ab. B. — *ὑπὸ* ab. O. — lin. 20. Peyr. adnotavit hanc vicesimam sextam definitionem deesse in omnibus mnspts. et in fine positam esse vicesimam octavam. — lin. 31. *ἐν τῷ μετεώρῳ* B. O. — lin. 34. idem sine *τῷ*. — In ora codicum mss. additur post *ἐπιπέδῳ*: *Πᾶσαν γὰρ δυνατὸν εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν*, quae quoque in margine edd. B. legimus. — Lin. 3. *δύο ἄρα* V. — lin. 4. *δοθεισῶν* ab. V. — lin. 5. *Εὐθεῖα γὰρ* etc. pro hisce legitur in V.: *Ἐπειδήπερ ἐὰν κέντρῳ τῷ B καὶ διαστήματι τῷ AB κύκλον γραψῶμεν· αἱ διάμετροι ἀνίσους ἀπολήψονται τοῦ κύκλου περιφερείας.* Idem invenit Peyr. in duobus aliis codd. — lin. 21. *ἐν* ab. B. — lin. 22. *ἐπιπέδῳ* ab. V. — lin. 25. B. et O. habent *εἴη* pro *ἐστὶν*, V. habet *ἦ*. — lin. 33. *τὸ ΕΓΒ* scripsi pro *πᾶν* quod legitur in edd. omn. — Lin. 2. *Ἐὰν* etc. Tota haec conclusio a me addita est. — lin. 7. *τεμνέτωσαν* B. O. — *Ὁμοίως δὲ* V. — Lin. 4. *τριγώνῳ* ab. B. O. — lin. 5. *ἐστὶν* ab. V. — lin. 7. *ταῖς* ab. V. — lin. 14. *ἐστ. ἴσ.* P. — lin. 20. *ἐπεὶ* ab. B. O. — lin. 24. *ἐδείχθ. ἴσ.* B. O. — lin. 35. *ποιῇ* emendavi pro *ποιεῖ*. — Lin. 3. *τὸ ὑπὸ τῶν AB ΓΔ.* — lin. 14. *ἀφῆς* B. — lin. 17. 33. *ἐν μετεώρῳ* B. O. — lin. 19. *τομὴν δὴ* B. O. — lin. 29. *ἡ BZ αὐτῆς*. — lin. 33. *ἐστὶν* ab. B. O. — Lin. 6. *ἐν τῷ αὐτῷ ἐπ.* B. — lin. 14. *ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμ.* P. — lin. 18. *πρὸς* ab. B. — *ἄρα* ab. V. — lin. 30. *ἴσ. ἐστ.* B. O. — Lin. 2. *ἀφῆς* B. — lin. 5. *εὐ-*

p. 144. p. 145. p. 146. p. 147. p. 148. p. 149. p. 150. p. 151. p. 152.

θεῖαι ab. B. O. — lin. 10. 31. *ὁπ. ἔδ. δ.* abs. B. — lin. 21. 26. *ἐν μετεώρῳ* B. O. — lin. 22. *τὸ διὰ τῆς EHZ* B. O. — lin. 28. *ἐπὶ τὸ Z* abs. B. O. — Lin. 12. *ἄρα* ante *AB* scriptum est. B. O. — lin. p. 153. 18. *ὀρθή ἐστιν ἡ AB* B. O. — lin. 20. *εὐθείας* B. O. — lin. 27. *ἐστὶν* ab. V. — Lin. 15. *Ἐὰν* etc. haec conclusio a me addita est. p. 154. Verba *ὅπ. ἔδ. δ.* adsunt B. O. — lin. 21. *παράλληλος τῇ EZ* B. O. — lin. 31. *ἄρα* ab. B. — Lin. 4. *Αἱ ἄρα* etc. a me sunt addita. p. 155. Verba tamen *ὅπ. ἔδ. δ.* adsunt in edd. O. P. — lin. 11. *εὐθεῖαι ἁπτόμ. ἀλλήλ. αἱ AB BE.* — lin. 18. *καὶ ἡ ΔΔ . . . καὶ παράλληλος* recepi ex cod. Mon. — lin. 22. *καὶ μὴ . . ἐπιπέδῳ* ab. B. O. — lin. 28. *τῇ γωνίᾳ τῇ* B. O. — Lin. 4. 9. *συγκείμενον* O. p. 156. quamvis vertatur *subjectum.* — lin. 22. *ἄρα* ab. B. O. — lin. 29. *εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τομῆς* B. O. — lin. 35. *ὅρα δοθέντ.* V. P. — Lin. 12. *Νεν. τί σημεῖον μετεώρου τὸ B* B. — *Νεν.* p. 157. *τὸ σημεῖον μετέωρον τὸ B* O. — lin. 21. *δοθέντος σημ.* B. O. — *ἡ ΔΔ* ab. O. B. — *ὅπ. ἔδ. δεῖξαι* O. — lin. 24. *Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου δύο* etc. B. O. sed additur in margine utriusque ea codicum lectio, quam in V. repertam cum P. recipiendam existimavimus. — lin. 27. *δυνατόν, τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ Δ δύο εὐθεῖαι αἱ AB ΔΓ πρὸς* etc. B. O. — Lin. 8. *ἐν τῷ ἑνὶ* B. O. P. Nos secuti V. — p. 158. lin. 10. *ἀπὸ τοῦ . . . ἐπιπέδῳ* abs. V. — B. O. ut supra, *τῷ δοθέντι* etc. — lin. 15. *παράλληλα ἔσται* V. P. — lin. 24. *ἐκβεβληθέντι* B. O. *ἐκβληνέντι* P. V. (typographorum ut videtur negligentia) — lin. 27. *δὲ* B. O. — lin. 28. *ὅσ. εἰσ.* B. O. — lin. 33. *ὅπ. ἔδ. δ.* abs. B. — Lin. 4. *ἀλλήλων παράλληλοι* O. — lin. 4. 8. *περὶ* p. 159. *δύο* B. — lin. 11. *συμπεσοῦνται.* — lin. 18. *τῷ διὰ* ab. V. — lin. 21. *ἐστὶν* ab. B. — lin. 35. *Διὰ τὰ αὐτὰ* etc. usque ad lin. 35. *πρὸς ὀρθὰς.* Haec uncis inclusa sunt in O. atque in margine adscriptum est. „Illa uncis inclusa omitti debent, integra quidem „non exstant in codd. manuscriptis.“ — Lin. 3. *ἐστι* ab. V. — p. 160. lin. 8. *ὅπ. ἔδ. δ.* abs. B. — lin. 17. *συμπεσοῦνται* ante *αἱ* locum habet in B. O. — lin. 18. *Ἐκβεβλήσθω* B. O. — lin. 19. *πρότερον* in V. P. post *καιὰ τὸ K* scriptum est. — lin. 22. *ἐπιπ. ἐστ.* B. O. — lin. 28. *συμπεσ. ἐπ. τ. ΖΘ μ.* B. O. — lin. 31. *τὰ* ab. B. O. — Quae uncis inclusa addidi ad rem pertinere geometriae quisquis peritus est non negabit, quamvis Euclidem ea scripsisse non con-

contenderim. — Lin. 16. τοῦ ab. V. — lin. 20. 23. ἐστιν ab. V. — p. 161.
lin. 20. 20. 23. 23. 24. 25. 25. 26. τὴν ab. V. — Lin. 3. ἔσται B. p. 162.
O. — lin. 14. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 20. τῇ ΓΕ . . . ἐπιπέδων abs.
B. O. — lin. 21. τῷ ΓΕ O. — lin. 23. ἐπίπεδον ab. V. — Lin. 4. p. 163.
δὲ ab. V. — lin. 13. Quae minusculis litteris expressa sunt desiderari hoc loco nemo non videt. — lin. 14. πρ. ὀρθ. ἀναστάθ. B.
O. — lin. 17. ὅπ. ἴδ. δ. abs. B. — lin. 30. πάντ. μεταλ. abs. V. P. p. 164.
— lin. 33. ἐν ab. B. — δὴ αἱ ab. B. — αἱ ab. O. P. — V. brevius habet ἡ ΑΒ· δύο δυσὶν ἴσαι, καὶ γωνία etc. — lin. 20. ἢ ab. V.
— lin. 34. καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ B. O. — Lin. 5. αἱ ἄρα ἴξ. V. P. — p. 165.
lin. 13. μείζ. εἰσ. B. O. — lin. 14. γωνίαι ab. V. — lin. 17. ὅπ.
ἴδ. δ. abs. B. — lin. 26. μείζονές εἰσι V. P. — Lin. 2. παντ. μεταλ. p. 166.
ab. V. P. — lin. 6. ταῖς ab. O. — lin. 14. ἐστιν abs. V. — lin. 18.
δύο ταῖς V. — lin. 19. τῆς πρὸς τὸ Ε. — lin. 21. τῆς ΚΛ edd.
omn. in graecis. — lin. 24. Ὁμοίως δὴ . . . μείζονές εἰσιν abs. B.
— Ὁμ. δὲ O. — lin. 29. Sequitur Ἄλλως, quod vide in append.
— Lin. 17 — 19. ἔσται δὴ . . . πρότερον ἐντὸς abs. V. — lin. 24. p. 167.
post ἴση B. O. P. addunt ἡ ΑΞ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση. —
δύο ταῖς V. — lin. 31. εἰς ἴσ. V. P. — lin. 32. ἴσ. εἰσ. B. O. —
lin. 32. αἱ ἄρα ὑπὸ. — lin. 35. ἐστ. ἴσ. B. O. — Lin. 2. δὴ ὅτι p. 168.
V. P. — lin. 6. λοιπῇ ab. V. — lin. 7. hanc lineam res postulare videtur. — lin. 10. 11. πρὸς ΟΠ V. — ἄρα ab. V. — lin. 14.
εὐθ. ab. V. — lin. 24. ἐλάσσ. εἰσ. B. O. — ἐστὶν ab. B. O. —
lin. 29. ἔστω ἴσ. B. O. — Lin. 2. ἴσ. ἐστ. B. O. — lin. 7. τὸ ab. p. 169.
B. — lin. 16. γωνίᾳ ab. V. — lin. 19. ταῖς ὑπὸ melius repetito articulo B. — lin. 20. συνίσταται Vulgo. — lin. 22. ὅπ. ἴδ. π. abs.
B. O. Sed P. ex V. habet ὅπ. ἴδ. δεῖξαι. — lin. 23. τὸ ab. V. —
lin. 30. ἐστὶν ἴση· καὶ V. P. — lin. 31. ἐστιν ab. B. O. — ἐστι
ab. B. O. — lin. 32. δὴ B. P. V. — lin. 35. Vocabula δυναμένην εὐθεῖαν adjicere non dubitavi, cum res quam maxime postulet. —
Lin. 6. ΝΞ ab. V. — lin. 8. 13. 16. δύο pro δύσι V. — lin. 10. p. 170.
ἐστὶν ante ἴση abjeci cum V. — lin. 13. ὑπὸ ab. V. — lin. 14.
Ἀλλὰ καὶ αἱ B. O. — lin. 19. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 22. τὸ ΞΡ
B. O. — lin. 22. ἴσον δυναμένην αὐτήν. Sic emendavi ex vulgato
ἴσην αὐτήν. — lin. 24. Post πρόβλημα V. habet ὅπ. ἴδ. δ. — lin. 32.
οὕτως ab. B. V. — Lin. 3. 14. 18. 23. δύο pro δύσι V. — lin. 8. p. 171
καὶ ab. B. O. — γωνίας pro γωνία B. — lin. 9. τὴν ΑΞ εὐθεῖαν

V. P. — lin. 17. ἐστ. ἴσ. B. O. — lin. 22. τῆς emendandum est pro τῇ. — lin. 25. ταῖς scripsi pro τῇ in B. et τοῖς in O. P. — Adest Lemma, quod vide in append. — lin. 29. 32. Quamvis Euclidem non ita scripsisse putarem, adjiciendum tamen existimavi voculam ξξ litteris minusculis expressam, ut quam figuram intelligi voluerit Euclides primo conspectu lectores videant. — Lin. 6. ἐστιν p. 172. ab. B. O. — lin. 11. ἐστὶ hoc loco in conclusione necessarium mihi videbatur, quamobrem adjeci. — lin. 16. περὶ δύο B. πρὸς δύο O. — lin. 17. O. habet παράλληλοί ante εἰσιν. — lin. 18. περιέχουσιν B. O. — lin. 21. ἐστὶν ante ἴση habent V. P. — lin. 22. ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 28. B. habet ἐπεὶ ante ἐστὶ additis tamen asteriscis dubitationem nimirum indicantibus. — lin. 35. οὕτω B. O. — Lin. 3. ΥΕ B. O. pro ΖΗ. — lin. 8. B. O. habent τῇ μὲν p. 173. ΕΘ ἴσαι δσαιδηποτοῦν αἱ ΘΜ ΜΝ, τῇ δὲ ΛΕ ἴσαι αἱ ΛΚ ΚΛ καὶ συμπεπληρώσθωσαν etc. — lin. 17. εἰσιν pro ἐστιν B. O. P. — lin. 19. 23. item V. — lin. 23. ἐστιν ante ἄρα ab. B. O. — lin. 29. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 35. ἥντε ΛΖ βάσις . . . ΘΥ στερεοῦ excide-rant in altero codice ed. B., quamobrem editoris errore non sunt impressa, qui addit: „ΛΖ ΛΕ habet alterum exemplar sed idem est.“ — Lin. 5. στερεοῦ ab. B. O. — ἴσον pro ἴση V. — lin. 7. p. 174. οὕτω B. O. — lin. 8. Abest repetitio theorematis in edd. omn. — lin. 14. εὐθεῖα ab. O. P. — lin. 15. αὐτῇ δοθὲν V. — lin. 16. τῶν ab. V. — lin. 20. γὰρ post εἰλήφθω abjiciendum existimavi. — lin. 22. τῷ ab. V. — lin. 30. περιεχομένη ab. B. O. — Lin. 5. ἐστιν p. 175. ab. B. O. — lin. 7. 15. 24. pro δίσι V. habet δύο. — lin. 18. ἴση ἐστὶν B. O. — lin. 29. εἰσ. ἴσ. V. B. — lin. 33. τῇ ΑΒ abs. B. O. — lin. 34. item τῷ Δ. — item τῇ πρὸς τῷ Δ. — lin. 35. B. habet ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσαθαι, O. aeque male ἴσην . . . συνέστα-ται. — ὅπ. ἔδ. π. abs. B. — Lin. 12. abjeci γὰρ ante πρὸς. — lin. p. 176. 16. τὴν δὲ pro καὶ ἔτι τὴν V. P. — lin. 19. καὶ δι' ἴσου ἄρα V. P. — lin. 26. ἐστι ab. B. O. — lin. 32. τὰ δὲ τρία . . . καὶ ὅμοια abs. B. O. — lin. 35. ἄρα δοθ. B. O. — Lin. 2. τὸ ΑΔ ab. O. p. 177. — lin. 11. διαγωνίας B. O. — lin. 23. τε ab. B. O. — lin. 24. τέτμηται O. P. Nos secuti B. — Lin. 2. ὄντα ab. V. — lin. 10. p. 178. μὲν ab. B. O. — lin. 32. Ἑστωσαν ἐπὶ B. — γὰρ ab. V. — καὶ ab. B. O. — lin. 30. Emendandum est ἐφεστῶσαι, quamvis ὑφεστ. in edd. omn. reperiatur. — lin. 34. ὧν ἐφεστῶσαι V. — ὧν αἱ

ὑφεστ. B. O. — Lin. 4. καὶ ἔτι αἱ *ΗΕ ΖΜ* καὶ συμπιπτέτωσαν p. 179.
ἀλλήλαις κατὰ τὰ *Ο Ρ Η Ξ* σημεῖα καὶ ἐπεζεύχθωσαν *ΑΞ ΛΟ* etc.
— lin. 8. τὸ ab. O. P. — lin. 12. Quae litteris minoribus addidi rerum nexus postulabat. — lin. 12. 20. pro ὧν O. B. habent καὶ αὐτῶν. — lin. 15. ἐστι ab. B. O. — lin. 17. μὲν ab. V. — lin. 18. πάλιν ab. B. O. — lin. 19. καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὑψ. minoribus excudenda erant litteris cf. ad lin. 12. — lin. 21. τῶν ante *ΗΗ* ab. V. — lin. 24. ἐπὶ ἴσων βάσεων B. O. — lin. 31. καὶ ab. V. — Lin. 2. p. 180.
post βάσεσιν in B. et O. habemus ἡ δὲ ὑπὸ *ΑΑΒ* τῇ ὑπὸ *ΓΡΔ* ἄνισος, ad quae in margine B. notatum videmus. „Ponit enim „exemplum in non prorsus similibus solidis, quod interpres latinus „hic omisit.“ (et quidem recte, cum Euclidis esse non videatur sed Scholiastae cujusdam.) — lin. 3. εὐθεῖα ἡ *ΡΤ* B. — lin. 6. Post *ΡΤ* habent B. O. καὶ πρὸς τῷ *Υ* σημείῳ τῇ *ΡΤ* παράλληλος ἀνεστάτω ἡ *ΧΥ*, quae superflua sunt, cum paulo infra addatur συμπεπληρώσθω ἡ τε *ΡΧ* βάσις. Recte igitur haec verba abjiciuntur in V. P. — lin. 17. τε ab. B. O. — lin. 18. τὰ δὲ τρία . . ἀπεναντίον abs. B. O. — lin. 23. καὶ ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ α. V. — lin. 28. μὲν ab. B. O. — lin. 30. Pro ὧν B. O. habent καὶ αὐτῶν. — lin. 33. 34. ἐστ. ἴσ. V. P. — Lin. 5. ἄρα ab. B. — lin. 6. δὴ P. — p. 181.
lin. 15. 18. στερεὸν post *ΡΙ* ab. V. — lin. 16. βάσις ab. B. O. — lin. 20. ἐστι ab. B. O. — lin. 22. Additur ὅπερ ἔδ. δ. V. P. — lin. 25. ἐστι ab. V. — lin. 26. γὰρ ab. B. O. — lin. 27. ἐπίπεδον ab. B. O. — lin. 35. ἐστ. ἴσ. V. P. — Lin. 12. Ἔστωσαν B. O. — p. 182.
lin. 15. ὅτι pro ὡς ex V. recepit P. — lin. 17. Quod litteris minoribus adjeci verbum necessarium hoc loco videbatur. — lin. 19. δὲ ab. B. O. — lin. 24. O. P. habent τέμνηται, B. τέτμηται ex quo nostra profecta est lectio. — Lin. 10. ἐπ' εὐθείαις O. — lin. 15. p. 183.
Καὶ ab. B. — lin. 22. παραλληλογράμμῳ ab. V. — lin. 25. 26. ὅσα εἰσὶν V. — lin. 26. τὰ δὲ . . καὶ ὅμοια abs. B. O. — Lin. 19. ἢ p. 184.
pro ἤπερ B. O. — καὶ ante τὸ *ΑΒ* abjeci cum cod. V. — lin. 21. 25. μὲν ab. V. — lin. 30. Repetitio abest B. O. — lin. 34. ἐξῆς abesse non potest, quamvis desideretur in edd. omn. — Lin. 4. p. 185.
ἐπίπεδον V. — lin. 24. V. addit post ἴση haecce: τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. haec recepta sunt in P. — lin. 27. 34. ἐστι ab. B. O. — Lin. 3. p. 186.
ὅσα ἔσονται V. — ὑπόκεινται edd. omn. — lin. 7. pro ἄλλο δέ τι

V. habet ἔξυθεν δὲ. — lin. 8. λόγον· ὡς ἄρα τὸ *AB* B. O. — lin. 21. καὶ ab. B. — lin. 25. γὰρ ab. V. — lin. 32. ἴσον ἄρα καὶ τὸ etc. B. O. — lin. 34. ἴση καὶ ἔστω B. O. — lin. 35. ἐστὶ ab. B. O. — τὸ recepi ex B. — Lin. 2. τοῦ τοῦ emendavi secundum V., p. 187. qui habet τούτου. — lin. 5. οὖν ab. V. — lin. 9. βάσις ab. V. — lin. 13. τὸ *ΓΦ* ἐστί V. — lin. 14. πρὸς τὸ *ΓΦ*, οὕτως B. O. — lin. 16. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 17. Edd. addunt ὅπερ ἔδ. δ. — lin. 21. βάσεων ab. V. — ἐπίπεδος B. ἐπίπεδοι O. — lin. 23. σημεῖα ab. V. — lin. 29. γὰρ ab. V. — lin. 33. ἐστὶν ab. B. O. — Lin. 11. p. 188. στερεοῦς ab. B. O. — lin. 15. στερεῶν ἄρα B. O. — lin. 35. αἱ ἐφεστηκυῖαι ex emendatione scripsi pro τὰ ὕψη, haec enim semper πρὸς ὀρθὰς esse oportet. — Lin. 3. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 9. ὧν p. 189. αἱ ἐφεστηκυῖαι emendavi pro vulgato καὶ. — lin. 11. recapitulatio ab. in edd. omn. — lin. 22. Verba ὑπὸ τῶν καθέτων post σημείων ejeci cum cod. V. — ἐπὶ τοῖς ἐπιπέδ. B. — lin. 27. περιέχουσαι γωνίας B. O. — lin. 30. εἰλήφθωσαν B. O. — Lin. 2. τὰ ab. B. p. 190. O. — lin. 10. Καὶ ab. V. — lin. 12. 16. 18. 25. 35. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 20. τὰς ab. V. — lin. 26. ἐστιν ἴση οὕτως V. οὕτως ab. in O. P. Attamen hoc verbum Scholiastae esse videtur ejusdem, qui totam, quam uncis inclusimus demonstrationem hoc loco non necessariam addidit. — lin. 29. τὸ ἀπὸ τῶν *AK* V. — τοῖς ἀπὸ τῆς *AK* O. — lin. 31. τῆς ab. V. — Lin. 2. 20. ἐστιν ab. B. O. p. 191. — lin. 4. ἴση ante τῇ positum B. O. — ὑπόκειται B. O. — lin. 7. δύο ταῖς V. — lin. 13. ἐστ. ἴσ. B. O. — lin. 14. *ΓBK* γωνία B. O. — lin. 15. ἐστ. ἴσ. V. — lin. 16. ταῖς ab. V. — lin. 20. ἕξουσιν emendavi. Vulg. ἕξει. — lin. 30. τῆς ab. V. — Lin. 2. Recapitulatio p. 192. abest O. B. V. — lin. 6. εὐθύγραμμοι ab. V. P. — lin. 10. Additur ὅπ. ἔδ. δ. V. — lin. 22. περιεχομένη ὑπὸ τῶν *ΔΕΗ* etc. V. — lin. 25. κείσθω ab. V. — lin. 28. στερεὰ γωνία ἡ abs. B. O. — lin. 32. ἑκατέρα τῶν *ΑΞ ΕΔ* V. P. — Lin. 3. 14. ἐστι ante τὸ ab. B. O. p. 193. — lin. 7. ἐφέστωσιν B. V. — lin. 17. post στερεὸν V. habet παραλληλεπίπεδον, sed B. habet στερεὸν καὶ τὰ ἑξῆς, ut finis demonstrationis et recapitulatio theorematis desint. — lin. 23. 32. στερεὰ ab. B. O. — Lin. 2. ὅμοιον post *ΑΓ* positum est. B. O. — lin. 7. p. 194. καὶ ὡς ἄρα V. P. — lin. 19. Recapitulatio ab. B. — Lin. 2. κάθε- p. 195. τος ἔστω V. — lin. 6. ἐστιν ab. B. O. — δὴ ab. V. — lin. 9. δυοὶν ab. V. — ὅπερ ἄτοπον B. O. — lin. 12. Abest reca-

pitulatio B. O. — lin. 15. 19. 20. 26. *κύβου* pro *στερ. παραλλ.* V. — lin. 24. *ἐκβεβλήσθωσαν* B. O. — lin. 25. *τῶν ἐπιπέδων τομὴ* B. O. — lin. 27. *ὅτι αἱ ΥΣ . . . τοῦτ' ἔστιν* abs. V. P. — lin. 28. *ἴση ἐστὶν* post *ΤΣ* ponunt B. O. — Lin. 2. *βάσει τῇ ΥΕ* B. O. — p. 196. *τὸ δὲ ΔΞΤ* B. O. — lin. 3. *ἐστὶν ἴσ.* V. P. — lin. 4. *ἴσαι* ab. B. O. — lin. 5. *γωνίᾳ* ab. B. O. — lin. 8. *τέ* adjiciendum putavi. — lin. 12. *ἐστὶν* ab. B. O. — *ἔλληπται* scripsi cum B. — edd. cet. habent *ελλήφθω*. In cod. V. abs. verba *καὶ ἔλληπται . . . . . παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ*. — lin. 13. Illa, quam secuti sumus lectionem ed. B. *ἔλληπτ.* coegit, ut emendaremus *ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰ* pro vulgato *ἐπεζεύχθωσαν*. — lin. 16. *ἡ μὲν ὑπὸ* V. P. — lin. 17. *Ἡ δὲ ὑπὸ ΔΤΓ* V. P. — *ἴση* ab. V. — lin. 22. *ἄρα* ab. V. — lin. 23. *πλευραῖς* ab. B. O. — lin. 25. *Ἐὰν ἄρα κύβου καὶ τὰ ἑξῆς* V. — Lin. 7. *Καὶ* ab. V. — Lin. 15. *ἐστι* ab. V. — lin. 19. *γωνίᾳ* ab. V. p. 197. 198. — lin. 24. 26. *ἐστὶν ἴσ.* V. P. — Lin. 2. *ἄρα ἐστὶ* V. P. — lin. 7. p. 199. *τῆς* ab. B. O. — lin. 11. *τετράγωνον* ab. B. O. — lin. 15. *ὅπ. ἔδ. δ.* abs. B. — lin. 20. *ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλ. πρ. τ. ΕΖ ΗΘ κύκλ. οὕτ. τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετρ. πρ. τ. ἀπὸ τῆς ΖΘ* V. — lin. 23. *μή ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλ.* etc. ut supra V. — lin. 26. *τετράγωνον* ab. V. — lin. 30. *τὸ δὲ ἐγγ.* B. — lin. 33. *εὐθείας* ab. B. O. — *διαγάγωμεν* B. O. — lin. 34. *ὑπὸ τὸν κύκλ.* O. — Lin. 4. 17. *ἡμίσεως* in *ἡμίσους* p. 200. mutandum esse videtur. — lin. 12. *τὰ ἀπὸ τῶν* O. P. — lin. 13. *εὐθειῶν παραλλήλων* B. O. — lin. 15. *καθ' αὐτὸ* (sic) B. — lin. 21. *τινα ἀποτμήματα τοῦ κύκλ.* habet V. — ceterae edd. *τινα τμήματα κύκλ.* ex priori mea orta est emendatio *τινά ποτε τμήματα*, quae errore typothetae in *τινα τμήματά ποτε* mutata est. — lin. 24. *τοῦ τ ὅτι* B. O. Euclidis haec esse non videntur, qui nusquam libri numernm exhibet. — lin. 26. *καὶ τοῦ καταλ . . ἢ τὸ ἥμισυ* abs. V. — Lin. 11. *ὁ* ab. in edd. omn. — lin. 10. *ἐστὶν* (bis) ab. p. 201. B. O. — lin. 17. 18. *τῆς* ab. V. — lin. 24. *ἐστὶν* ab. V. — lin. 27. *κύκλος* ab. V. B. — lin. 29. *τετράγωνον* ab. V. P. — lin. 31. *ἐδείχθ. ἀδύν.* B. O. — *ἐστιν* ab. B. O. — Lin. 2. *τετράγωνον* ab. V. — p. 202. lin. 9. *ὁ* ab. O. — lin. 16. *ἄρα* ab. V. — lin. 18. *τὸ Σ τοῦ* etc. B. O. — lin. 20. *ἐστὶν* ab. B. O. — lin. 22. *ὅπ. ἔδ. δ.* abs. B. O. — lin. 25. 32. Verborum ordinem hoc loco mutandum existimavi. Vulgo enim legimus: *δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἔχουσας καὶ ὁμοίας* (B. *ὁμοίως*) *τῇ ὅλῃ καὶ*

εἰς etc. — lin. 32. V. habet. εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλας καὶ τῇ ὅλῃ τριγώνους ἔχουσας βάσεις. Ex qua lectione mea prodiit emendatio. — Lin. 3. ἐστιν ab. B. — lin. 6. Καὶ ab. V. — p. 203. lin. 10. 22. 30. 32. ἐστι ab. B. O. — lin. 12. Ἔστι δὴ O. — lin. 18. τέ ab. V. — lin. 22. περιέξουσιν V. P. — lin. 26. ἐστιν ab. V. — lin. 29. ἴσον καὶ ὅμοιόν ἐστιν B. O. — Lin. 2. 9. 11. ἐστὶ ab. p. 204. B. O. — lin. 5. ΔΘΛ τριγώνῳ B. O. — lin. 8. οὖσαι ab. B. V. — περιέξουσιν V. P. — lin. 16. ἐδείχθ. ὅμ. B. O. — lin. 18. ὥστε πυραμὶς . . . κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον exciderunt V. — lin. 25. ἐὰν δύο πρίσμ. ἰσούψ. ὦσι B. O. — lin. 28. ἴσα εἰσὶν B. O. — lin. 28. ἐστὶ post ἄρα ab. B. O. — Lin. 2. οὖ βάσεις O. — lin. 4. ὧν p. 205. βάσις O. — lin. 5. καὶ ab. B. O. — lin. 7. 27. μὲν adjeci. — lin. 10. 12. 18. 21. 23. μὲν ab. V. — lin. 30. πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ εἰς δύο etc. — Lin. 7. καὶ τῶν γεν . . . ἀεὶ γίνηται abs. V. — lin. 9. p. 206. ἐστιν B. — lin. 18. καὶ τῶν γεν . . . ἀεὶ γιγνέσθω abs. V. — lin. 23. πάντα ab. V. — lin. 25. ἐστιν ab. edd. omn. — lin. 27. τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΡΦΖ τριγ. B. O. — lin. 29. τῇ pro τῆς (bis) B. O. — lin. 33. εὐθύγρ. ab. V. — Lin. 3. τρίγωνον post ΔΕΖ ab. p. 207. B. V. et additum est post ΡΦΖ; in O. P. semper additur. — lin. 7. ἐστι ab. V. — lin. 20. παραλληλογρ. additum est a me. — lin. 29. τὸ post δὲ item. — Lin. 7. ἴσον γὰρ . . . ΡΦΖ abs. B. O. — lin. 9. p. 208. τὰ ab. in edd. omn. — lin. 13. δὲ mutavi in δή. — lin. 16. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — Finis hujus theorematis inde a linea 13. p. 207. mutatus legitur in Cod. V. unoque ex aliis a Peyrardo collatis. Pro Καὶ ἐπεὶ etc. habemus: Ὡς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγρ. ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρ., οὗ β. μ. τὸ ΠΕΦΡ παραλληλόγρ., ἀπεναντ. δὲ ἡ ΣΤ εὐθ. καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα, οὗ τε βασ. μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγρ., ἀπ. δ. ἡ ΟΜ, καὶ οὗ β. μ. τ. ΑΞΓ τρίγ. ἀπ. δὲ τὸ ΟΜΝ πρὸς τὰ πρίσματα οὗτε β. μ. τὸ ΠΕΡΦ, ἀπ. δ. ἡ ΣΤ εὐθ., καὶ οὗ β. μ. τὸ ΡΦΖ τρ. ἀπ. δὲ τὸ ΣΤΓ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρ. Καὶ ὁμοίως, ἐὰν διαιρεθῶσιν αἱ ΟΜΝΗ, ΣΤΤΗ πυραμίδες εἴς τε δύο πρίσματα καὶ δύο πυραμίδας, ἔσται καὶ ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις etc. quae habemus p. 208. lin. 2. usque ad lin. 9. . . . ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα. Ὁμοίως δὲ κἂν τὰς ὑπολειπομένας πυραμί-

δας διέλωμεν εἴς τε δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. Ὅπ. ἔδ. δ. — lin. 17. Verbum λῆμμα ab. B. — lin. 19. μὲν addendum censui. — lin. 21. τρίγ. ab. V. — lin. 22. οὕτω B. — lin. 23. νενοήσθω B. — lin. 24. τρίγωνα ἐπίπεδα B. O. — lin. 25. τυγχάνουσι B. — Lin. 3. αἱ ab. V. — lin. 5. 9. ἐστι ab. V. — p. 209. lin. 8. ἰσοῦψη καὶ πρὸς V. — lin. 9. Vulgo καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἐστὶν (ἔσται B. O.) ὡς ἡ etc. Sed eum, quem constitui verborum ordinem rei aptiorem habeo. — lin. 19. βάσιν ab. B. O. — lin. 29. μείζονά τε B. — lin. 30. γινόμενοι edd. cet. — lin. 31. διηρήσθωσαν πυραμίδ. ὅμ. B. O. — lin. 33. ἐλάσσους B. O. — Lin. 2. p. 210. Λελήφθωσαν edd. cet. — ἕνεκεν V. — lin. 8. Ἀλλ' ὡς B. O. — lin. 19. 29. ἐστὶν ab. B. O. — Lin. 2. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 8. Αἱ p. 211. ἄρα etc. abs. B. — lin. 14. πυραμίδες πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓΔΕ ΖΗΘΚΛ, κορυφὰς δὲ τὰ etc. B. O. — lin. 14. B. O. et codices ceteri excepto V. et uno alio habent: Διηρήσθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒΓΔΕ βάσις εἰς τὰ ΑΒΓ ΑΓΔ ΑΔΕ τρίγωνα, ἡ δὲ ΖΗΘΚΛ εἰς τὰ ΖΗΘ ΖΘΚ ΖΚΛ τρίγωνα, καὶ νενοήσθωσαν ἐφ' ἑκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσοῦψεῖς ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως etc. — lin. 23. — 24. ὡς τὸ ΑΒΓΔ τραπέζιον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον B. O. — lin. 26. ὡς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον B. O. — lin. 33. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς etc. B. O. — Lin. 3. τριγώνους p. 212. scripsi cum V. pro vulgato τρίγωνα. — lin. 4. καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. — lin. 6. ἐστιν a me insertum est. — μὲν item. V. habet: Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕ βάσιν, οὕτως ἦν ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕΜ πυραμίδα καὶ διτσου ἄρα etc. — lin. 13. μὲν P. — lin. 16. πάλιν ab. V. — ἄρα ab. B. — lin. 19. Πυραμίδες ἄρα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ etc. habent O. P. Tota recapitulatio abest in B., in qua tamen legimus ὅπ. ἔδ. δ. — lin. 28. ἔχουσ. βάσ. V. P. — lin. 29. Καὶ ab. V. — lin. 31. ἐστιν ἡ ΒΔ V. P. — ἐστι ab. B. O. — Lin. 3. 4. ἐστι ab. B. O. — lin. 10. δέ ἐστιν p. 213. αὐτοῦ V. P. — lin. 23. βάσ. ἔχ. B. O. — ὅπ. ἔδ. δ. hoc loco a me additum et his verbis Καὶ ἐπεὶ Corollarium inchoatum est, quod quidem in ceteris edd. incipit a verbis Ἐκ δὴ τούτου etc. — lin. 27. 29. μέν ἐστι abs. V. — ἐστι ab. B. P. O. — lin. 29. περιέ-

χονται edd. cet. — lin. 31. 32. μὲν a me additum est. — lin. 35. Verba ὅπ. ἴδ. δ. abs. V. B. — Lin. 3. τὴν βάσιν τὴν αὐτὴν B. O. p. 214. — lin. 4. τὸ ab. B. V. — lin. 5. ἡ βάσις τοῦ πρίσματος καὶ τὸ αὐτὸ (τὸ αὐτὸ καὶ V.) ἀπεναντίον edd. cet. — lin. 7. καὶ τὰ ἀπεναντίον τὰς ἀπεναντίον B. — τὰς ἀπεναντίον O. P. — V. habet: καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπεναντίον καὶ ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον ὅπερ ἴδ. δ. — lin. 20. 24. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 21. γωνίᾳ ab. B. O. — *HBΓ* γωνία O. P. — lin. 30. παραλληλόγρ. ab. V. — lin. 32. 33. ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμ. B. O. — Lin. 3. περιέχονται B. O. — lin. 4. ἐστὶ ab. p. 215. B. O. — lin. 15. ἄρα ab. B. O. — lin. 17. ὅπ. ἴδ. δ. abs. B. — lin. 22. εἰς * εἰς τὰς αὐτὰς * τὰς ἐν αὐταῖς sic B. varietatem lectionum indicat. — lin. 24. καὶ εἰς ἴσα B. O. — lin. 27. βασ. ἔχ. B. O. — lin. 28. οὕτω B. O. — lin. 32. πυραμίδα ab. B. O. — Lin. 4 p. 216. ἥπερ πλευρὰ πρὸς πλευράν. — lin. 12. ἔχουσ. βάσ. B. O. — lin. 29. βάσιν ab. V. — Lin. 6. ἄρα post Θ V. — lin. 20. παραλληλόγρ. p. 217. post *EH* ab. B. O. — lin. 22. μὲν ab. V. — lin. 26. βάσις ab. O. — lin. 28. παραλλ. ὕψ. ab. B. O. — lin. 30. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 33. στερεοῦ ab. V. — lin. 34. ἡ ἄρα *ABΓH* . . . πυραμίδι ἴση ἐστὶ B. O. — Lin. 11. ἴσται B. O. — lin. 24. hic ἀνεστάμενα in p. 218. edd. cet. sed non suprà. — πρίσματα in edd. O. B. post παραλληλεπίπ. legitur. — in P. habemus ἀνεστάμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοϋψῆ. — lin. 25. τὰ δὲ ὑπὸ . . . ὡς αἱ βάσεις· abs. B. O. — lin. 28. ἐπὶ τοῦ edd. omn. — lin. 28. ἄρα κύκλου B. O. — lin. 29. κύκλου ἰσοϋψές B. — Lin. 9. 25. ἐφ' ἑκάστου p. 219. edd. omn. — lin. 16. ἐπ αὐτῶν item. — lin. 20. ἀποτμήματα item. — lin. 27. τινα ἀποτμήματα item. — Lin. 2. ἐστι ante τῆς ab. B. p. 220. O. — lin. 8. ἐστιν ab. B. O. — οὐκ ἄρα ἴσται B. O. — lin. 9. τριπλάσιος V. P. — lin. 10. τριπλάσιός ἐστι B. O. — ἐστιν ἡ τριπλάσιος V. P. — lin. 21. περὶ τὸν κύλινδρον περιγράψωμεν τετρ. B. O. — lin. 23. τετραγώνου ab. B. O. — lin. 35. μὲν addidi. — Lin. 2. τὸ ab. V. — lin. 12. καθ' ἑαυτὸ V. P. — lin. 15. ἐφ' p. 221. ἑκάστου edd. omn. — lin. 17. τινα τμήματα B. O. P. — τινα ὑποτμήματα V. — lin. 25. μέρος ἐστι B. O. — lin. 31. ἐστιν ab. B. O. — Lin. 8. εἰσιν post μὲν abjeci cum V. — lin. 11. κῶνον ab. p. 222. B. O. — lin. 12. ἔστω B. O. — lin. 13. ἡ πρὸς B. O. — lin. 28. μὲν addidi. — Praeterea verba ἡ ἄρα πυραμὶς . . . τοῦ κώνου abs.

V. — Lin. 5. *μέρος* ab. V. — lin. 6. *καθ' ἑαυτὸ* V. P. — lin. 9. *ἀεὶ τουτὸ.* — lin. 10. *ἀποτμήματα* edd. omn. — lin. 11. *ἐστιν ἐλασσ.* — lin. 13. *μὲν* addidi. — lin. 17. . . *Χ πολύγωνον* B. — Lin. 10. *ἐστιν* ab. B. O. — lin. 18. 27. *κύκλον* ab. B. — lin. 20. *κώνου* ab. B. — lin. 23. *ἐϑείχϑ. ἀδύν.* B. O. — lin. 29. *οὕτως* ab. V. — lin. 35. *ὅπ. ἔδ. δ.* abs. B. — Lin. 3. *πρὸς ἀλλήλ.* abs. B. — lin. 8. *κώνων ἢ κυλίνδρ.* B. O. — lin. 9. 11. *ἐστιν* ab. B. O. — lin. 14. *μὴ ἔχῃ* V. — lin. 17. *ἢ* (ab. O.) *τριπλασ. λόγ. ἢ πρ. μεῖζον* B. O. — lin. 18. *πρὸς ἔλατ. πρόσ.* B. O. — lin. 22. *πυραμὶς ἰσοῦψης τῷ κών.* B. O. — lin. 33. *μέρος* ab. B. O. — Lin. 5. *τινα ἀποτμημ.* edd. omn. — lin. 14. *ἀνεστάτω ἀπ' αὐτοῦ πυραμὶς* B. O. — lin. 28. *καὶ γων . . . ἴσαι* abs. B.; item V., in quo etiam sequentia *ὀρϑ. γ. ἑκάτ.* non leguntur. — lin. 30. *ἐστὶ* ab. B. O. — Lin. 4. 10. *ἐστὶ* ab. B. O. — lin. 11. *Καὶ ἐπειδὴ διὰ* B. O. — Lin. 3. *ἐπὶ τὸ Κ εὐϑείας* V. P. — lin. 4. *ἀνιστάντες ἐπὶ τῶν τριγ.* B. O. — lin. 5. *τὴν αὐτὴν κορυφ.* V. — lin. 10. *Καὶ ὡς ἓν* V. — lin. 12. *ἡ* ab. edd. omn. — lin. 14. *μὲν* item. — lin. 16. *τὸ* ab. B. O. — lin. 18. *πολύγ.* ab. V. — lin. 19. 26. 32. *σημεῖον* ab. V. — lin. 19. 23. *μὲν* item. — lin. 22. *καὶ* ab. B. O. — lin. 25. *ἐστιν* ab. B. O. — lin. 28. *πολύγ.* ab. V. — lin. 31. *ἐστιν* ab. V. — Lin. 6. *ἐστὶν* ab. B. O. — lin. 7. *μέν ἐστιν* abs. V. — lin. 8. *σημεῖον* ab. V. — lin. 9. *ἐστιν* ab. V. — lin. 22. *ὁ* ab. edd. omn. — *κῶνος ἄρα* B. O. — lin. 31. *οὕτως* ab. B. V. — lin. 34. Post *αὐτῷ* additur in B. O. P. *ἐδείχϑη γὰρ πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.* Hoc Scholiastae cujusdam certe additamentum, quod abest in V. abjiciendum existimavi. — Lin. 3. *ὅπ. ἔδ. δ.* abs. B. — lin. 7. *οὕτως* ab. B. — lin. 11. *τῷ ἄξονι* V. P. — *τὸ ΠΘ ἐπίπεδον* abs. B. O. — lin. 12. *ἐστιν* ab. B. O. — lin. 16. *μὲν* ab. V. — lin. 18. Post *ΖΞ ΞΜ* B. O. habent: *καὶ διήχϑωσαν διὰ τῶν ΛΝΞΜ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ ΓΔ καὶ γενοήσϑωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν ΛΝΞΜ ἐπιπέδοις περὶ κέντρα τὰ ΛΝΞΜ κύκλοι οἱ ΟΠ ΡΣ ΤΥ ΦΧ ἴσοι τοῖς ΑΒΓΔ καὶ γενοήσϑωσαν κύλινδροι οἱ ΠΡ ΡΒ ΔΤ ΤΧ. Καὶ ἐπεὶ* etc. — lin. 23. — 24. *καὶ οἱ ΠΡ* etc. V. — lin. 27. *ἀλλήλοις* ab. B. O. — *καὶ οἱ ΛΝ* V. P. — lin. 28. *ἴσοι καὶ ἀλλήλ.* B. O. — lin. 29. *ἴσον τὸ πλῆϑος τῷ πλήϑει· ὁσαπλ.* etc. V. — lin. 31. *ἐστιν* a me additum. — Lin. 3. *ἴσος ἐστὶ* B. O. — lin. 5. *ὁ ΚΛ ἄξ. τοῦ*

p. 223. p. 224. p. 225. p. 226. p. 227. p. 228. p. 229. p. 230. p. 231.

KM ἄξ. — *καὶ ὁ ΠΠ κυλ. τοῦ ΠΧ κυλ.* B. O. — lin. 7. *ὄντων μεγ.* B. O. — lin. 11. *κύλινδρος* ab. B. O. — lin. 21. *κύκλων* addidi. — lin. 22. *ἐστιν* ab. B. O. — lin. 27. *ἐννοήσθω* V. — lin. 31. *ἀλλήλοις* ab. V. — Lin. 7. *τριπλάσιοι* (*τριπλάσιον* B. O.) *γὰρ* . . p. 232. *τῶν κώνων* abs. V. P. — lin. 9. *τὸν* ab. O. P. — lin. 19. *τῶν* ab. B. O. — lin. 21. *τοῦτ' ἔστιν ὡς* B. O. — *καί ἐστιν ὡς* V. P. — lin. 25. *Ἔστιν ἄρα καὶ* B. — lin. 29. *ἀντιπεπόνθασιν* B. O. — *ἀντιπεπονθέν* V. P. — lin. 32. *τὸ MN μεῖζον* B. O. — *καὶ* ab. B. — lin. 33. post *ΠΜ* B. habet *καὶ κείσθω τὸ ΛΚ ὕψει ἴσον τὸ ΠΜ.* — Lin. 3. *παραλλήλῳ τοῖς τῶν ΕΖΗΘ ΡΟ κύκλων ἐπιπέδοις* V. P. p. 233. — lin. 7. *ἄλλος δὲ* — *κύλινδρος* ab. V. — lin. 10. *κύλινδρον* ab. B. O. — lin. 11. *βάσιν* ab. V. — lin. 13. *κύλινδρον* addidi. — lin. 16. *καὶ* ab. B. O. — lin. 32. *ὕψος* ab. B. O. — lin. 35. *ὕψος* ab. V. — Lin. 4. *κύλινδρον* ab. V. — lin. 6. *Τῶν ἴσων* etc. tota p. 234. recapitulatio ab. edd. omn. quae tamen ultima verba *ὅπ. ἔδ. δ.* reservarunt. — lin. 15. *τε* ab. B. *τε καὶ ἀρτιοπλ.* ab. O. — lin. 19. *εὐθεῖα* ab. B. O. — lin. 23. addidi *ποτε.* — lin. 27. *ἐστιν* ab. O. — lin. 31. *Ἐὰν δὲ* B. O. — lin. 33. *τε* ab. V. — Lin. 3. *ὅπ. ἔδ.* p. 235. *δεῖξαι* B. — lin. 6. *στερεὸν πολύεδρον.* — lin. 8. *κατὰ τὴν περιφέρειαν.* — lin. 16. *ἐγένετο* B. O. — *καὶ* ab. B. O. — lin. 23. *εὐθειῶν* ab. V. — lin. 29. *τε* ab. V. — lin. 32. *ἐπιζευχθεῖσα* recte B. O. sed male O. P. *ἐπεζευχθεῖσα.* — Lin. 6. *ἔστωσαν* B. O. — p. 236. lin. 9. *ὀρθ. ἐστ.* B. O. — lin. 12. *BEΔ* ab. O. P. — *BΞΔ* ab. B. — lin. 14. *KΞ* ab. B. — lin. 23. *κύκλων* adjeci. — lin. 35. *καὶ* ab. B. O. — Lin. 10. *ἑκατέρα* B. O. — lin 11. *καὶ* ab. B. O. — lin. p. 237. 21. *καὶ ἐπὶ . . ἡμισφαιρίου* abs. V. — lin. 22. *συγγεγρ.* V. — lin. 23. *μὲν* ab. B. O. — lin. 26. *δὴ* item — lin. 27. *ἐφάπτεται* B. O. — lin. 35. *ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΨ, ἡ ΑΨ ἄρα* B. O. P. sed nostra tuetur V. — Lin. 2. *ἑκατέρας* O. — lin. 3. *ἴσον ἄρα καὶ τὸ* B. O. — p. 238. lin. 4. *ἀπὸ τῆς* ab. O. — lin. 23. *Καὶ* ab. V. — *ἥχθω* mutavi in *ἦκται* cum linea *ΟΦ* jam adsit. — *ἀπὸ τοῦ ΚΟ* V. — lin. 27. *δὴ* ab. V. — lin. 29. *τῶν* item. — lin. 31. *Καὶ ἔτι ἐστὶ* B. — *Καὶ ἔτι* O. P. — Nostrum tuetur V. — lin. 32. *τῶν* ab. B. O. — Lin. 14. *Ψαύει* V. — lin. 16. Adest demonstratio altera, quam p. 239. vide in app. — lin. 26. *σφαίρας* ab. O. — lin. 30. *ἄρα πυραμ.* B. O. — Lin. 3. 6. *τὸ* ab. V. — *δὴ* ab. V. cet. edd. habent *δή.* p. 240. — lin. 9. *ἑτέρας* ab. V. — lin. 11. *καὶ* ab. B. O. — lin. 12. *σφαίρα*

item. — lin. 14. ἔχει B. O. — lin. 16. O. P. addunt ὅπ. ἔδ. δ. — lin. 20. Ἐννοήσθωσαν. — lin. 24. ἡ *ΑΒΓ* . . . πρὸς τὴν *ΕΖ* ab. B. O. — lin. 27. τριπλ. λόγ. ἡ. πρ. μείζ. B. V. — lin. 29. ἐννοήσθω ἡ *ΑΕΖ* τῇ etc. V. — Lin. 6. καὶ ab. B. O. — lin. 7. λόγον ἔχει p. 241. V. — lin. 11. ἄρα ab. V. — lin. 17. ὅπερ ἀδύνατον ab. B. V. — lin. 31. Verba ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη in V. P. post τῆς *ΑΕΖ* (lin. 33.) scripta sunt. — lin. 33. τινα ab. B. O. — Lin. 2. τινα p. 242. ab. B. O. — lin. 7. Αἱ ἄρα etc. haec recapitulatio abest in edd. omn. quae tamen habent ὅπ. ἔδ. δ. — Lin. 7. ἡμισείας τετραγώ- p. 243. νου V. — lin. 10. τὸ *ΑΓ* edd. ceterae. — τῆς *ΑΓ* V. — lin. 11. τῇ *ΑΒ* ἡμίσεια B. O. — τῆς *ΑΒ* ἡμίσεια V. P. ex quo conjectura mea τῇ τῆς *ΑΒ* ἡμισείᾳ ἴσῃ. — lin. 14. Ἀναγεγράφθωσαν B. O. — τετράγωνον B. — τετραγώνων O. — lin. 22. τῇ *ΑΘ* B. O. — lin. 24. τοῦ *ΓΘ* ab. O. — Lin. 2. διπλ. τοῦ *ΓΘ* B. O. — lin. 4. ὅλον p. 244. ab. V. — lin. 8. ἄρα ab. V. — lin. 13. γράμμη ab. B. O. — lin. 16. ἡμισείας τετραγώνου B. O. — lin. 24. τοῦ *ΑΓ* B. O. — lin. 27. ἀπὸ ἑκατ. B. O. — lin. 28. τὸ ἐν τῷ *ΑΖ* σχῆμα V. — lin. 29. διήχθω ἡ *ΒΕ* V. — lin. 30. τὸ ἀπὸ . . . πενταπλάσιόν ἐστι ab. B. — lin. 31. τῆς *ΑΓ* τοῦτ' ἔστι τὸ *ΑΖ* O. — lin. 33. ἄρα ἐστὶ V. — lin. 34. τῆς bis abest V. — Lin. 7. διπλ. τοῦ *ΒΘ* B. p. 245. O. — lin. 20. Titulus λῆμμα ab. B. — lin. 23. τῆς *ΓΔ* διπλῆ. B. O. — lin. 25. πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν etc. V. P. quam veram lectionem nescio quo errore in textu cum falsa illa, quam habent B. O. permutavi. — lin. 29. διπλασία τῆς *ΓΔ* B. O. — lin. 31. μεῖζον ab. V. — Lin. 10. τὸ *ΑΓ* V. — lin. 14. διπλοῦν p. 246. ab. B. O. — lin. 15. ἄρα ab. B. O. — ἐστὶ ab. V. P. — lin. 18. μὲν ab. V. — lin. 19. τὸ δὲ . . . τὸ *ΡΣ* ab. V. — lin. 26. Ἀλλὰ τὸ . . . ἐστὶν ἴσον ab. V. — lin. 29. ἄρα ab. V. — lin. 30. τετρα- γώνου· ὁ *ΞΟΠ* ἄρα . . . ἐστὶ τὸ *ΛΝ* abs. B. O. — lin. 33. τὸ ἄρα *ΛΝ* . . . *ΠΖ* τετραγώνου ab. V. P. — Lin. 12. τὸ *ΑΓ* edd. omn. p. 247. — lin. 28. καὶ τὰ *ΓΚ ΘΠ* τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ *ΘΚ* τετράγωνου καὶ ἐστιν ὁ *ΛΜΝ* γνώμων καὶ τὰ etc. V. — Lin. 7. p. 248. αὐτῇ ἴσῃ V. P. — lin. 8. ὅλη ἡ B. O. — lin. 12. σημεῖον ab. B. O. — lin. 13. κείσθω ab. V. — lin. 18. οὖν item. — lin. 20. τῆς item. — lin. 21. τῶν item. — lin. 22. τὸ μὲν . . τῷ . . , τὸ δὲ . . τῷ B. O. — lin. 25. ἴσον ἐστ. ὅλ. τῷ *ΑΕ* B. O. — Lin. 10. ἐπὶ τὸ *Δ* p. 249. abs. V. — lin. 11. τῇ *ΒΔ* ἡμίσεια ἡ *ΑΔ* edd. omn. cf. ad p. 243.

lin. 11. — lin. 18. ῥητὸν γάρ ἐστιν ἡ B. O. — ἐστιν ab. V. — lin. 23 ἐστιν addidi. — lin. 24. ἄρα ab. B. — lin. 27. τῷ ἀπὸ τῆς *ΑΓ* ἴσον ἐστὶν V. — Lin. 12. αἱ δύο αἱ V. — lin. 25. γωνία ab. V. — p. 250. lin. 26. καὶ ab. B. O. — lin. 28. γωνίαις item. — lin. 31. ἐστι ab. B. O. — Lin. 9. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπο *ΑΒΓ*. Ἔστι V. — lin. 11. p. 251. καὶ πλευρὰ V. — lin. 12. καὶ ὅλη V. — lin. 17. ἐστι ab. B. O. — lin. 18. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. 30. σημεῖον ab. B. O. — lin. 31. ἴσα εἰσὶ B. O. — Lin. 6. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 8. γωνίας ἐατὸς . . p. 252. *ΑΒΘ* τριγώνου ab. V. — lin. 9. ἐπειδὴ B. O. — lin. 16. ἄρα γωνία abs. V. — lin 19. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 33. τῶν ab. B. — τὸν ab. O. — κύκλον ab. O. — Lin. 8. κατὰ τὸ *Γ* ab. V. — lin. p. 253. 10. καὶ ἔσται item. — lin. 17. ἐστὶν a me additum. — lin. 22. ἐγγραφομένου ab. V. — lin. 23. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ *ΓΕΔ* γωνίᾳ τῇ etc. B. O. — lin. 24. γωνίαν ab. B. O. — lin. 31. λοιπῇ ab. V. — lin. 32. ἐστὶ ab. B. O. — Lin. 2. ἄρα ab. V. — lin. 3. εὐθεῖα ab. p. 254. B. O. — lin. 4. τμῆμα αὐτῆς B. O. — κατὰ τὸ *Γ* ab. V. — lin. 12. καὶ εἰς τὸν αὐτὸν περι. etc. B O. — lin. 13. πεντάγ. ἐγγεγρ. ἰσόπλ. B. O. — lin. 17. τὸ *Ζ* σημεῖον V. P. — lin. 26. Πενταγώνου γὰρ B. O. — Lin. 7. μὲν καὶ ab. O. — μὲν καὶ V. P. — B. p. 255. totum comma Ἄλλα . . διπλῆ omisit. — lin. 8. περιφερείᾳ ab. V. — lin. 11. ἐστι ab. V. — lin. 16. καὶ item. — lin. 20. τῆς ab. V. — lin. 21. ἄρα καὶ ἡ V. — lin. 26. τε ab. V. — ἡ πρὸς τὸ *Α* V. — lin. 30. *ΚΛ* εὐθεῖα B. O. — Lin. 9. ἀνάλογος B. P. — lin. p. 256. 13. ἡ *ΑΒ* ab. V. P. — lin. 15. τὸ *Ζ* σημεῖον edd. omn. — lin. 22. ἐστί ab. B. O. — lin. 23. ἀνάγονται B. — lin. 25 δὴ ab. O. — lin. 26. ἄρα ἡ *ΑΓ* V. P. — lin. 30. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 34. Ἀλλ. ὡς B. O. — Lin. 13. 14. τῆς ab. V. — lin. 16. τεμνομένης p. 257. V. — lin. 18. τῷ *ΑΓ* B. O. — lin. 27. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 28. Pro λόγον γὰρ . . . τῆς *ΚΖ* V. habet δυνάμει μόνον. — lin. 35. ἀπὸ *ΚΜ* V. — Lin. 3. ἐστὶν ab. B. O. P. — lin. 7. ἡ καλουμένη p. 258. ἀποτομὴ a me adjecta sunt. — lin. 8 ἐστὶν in edd. cet. abest. — lin. 9. Ὥι δὴ μεῖζον P. ex V. — lin. 11. ἴσον ἐστὶ B. — lin. 12. δύναται τῇ *Ν* O. P. Nos secuti sumus ed. B. — lin. 15. μήκει ab. B. V. — lin. 25. ἀσύμμ. B. — lin. 31. γίνεσθαι V. — lin. 32. τριγώνῳ ab. B. O. — lin. 34. ἐστιν ab. V. — Lin. 8. τριγώνου μία p. 259. πλευρὰ δυνάμει etc. edd. omn. — lin. 13. ἡ ab. B. O. — lin. 15. μέρ. ἐστ. B. O. — ἐξάγωνος B. — lin. 16. πλευρὰ ab. V. —

lin. 18. *ἐστὶ* recepi ex V. qui non habet *ἄρα*. — lin. 23. *τῆς* ab. V. — lin. 28. *ἐκ τεσσάρων τριγ. ἰσοπλ.* ab. B. O. — Lin. 3. *γε-* p. 260.
γράφθω B. O. — lin. 11. *τοῦ* ab. O. — lin. 12. *ἀφαιρέσθω* V. — lin. 26. post *ΔΓ* B. O. P. habent *ὡς ἔξης δειχθήσεται*. Argumentatio ipsa addita est in B. et V. *ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς* etc. quae mutavi in *ἐπειδήπερ ἐστὶν* etc. — Haec Verba usque ad lin. 30. *πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ* desunt in O. P. — lin. 28. 30. *τῆς* ab. V. — lin. 29. *ἄρα* a me adjectum. — lin. 29. *τὴν* ab. V. — Lin. 3. *συνίσταται* p. 261.
in edd. omn. cf. pag. — lin. 4. *τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλ.* B. O. — lin. 7. *ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει* V. — lin. 9. *τῇ ΚΘ* rectius B. — lin. 18. *γίνεται* B. — lin. 29. *γίνεσθαι* V. — lin. 24. *ὁμοίων* P. vit. typogr. — *γινομένων* edd. cet. omn. — lin. 25. *ἐστιν* V. — lin. 33. *ἡμιολία ἄρα* V. — lin. 10. *δυνάμει* ab. B. V. — lin. 11. *ἐστὶν* ab. V. — lin. 19. *γίνεσθαι* V. — lin. 24. *ὁμοίων γινομένων* P. *ὁμοίως γινομένων* B. — lin. 25. *ἐστιν* V. — lin. 33. *ἡμιολία ἄρα* V. — Lin. 4. Praeferendum videtur *τὸ εἶναι*, nisi putas, articulo p. 262.
τὴν ante *ὁμοιότητα* supervacaneum reddi illud *τὸ*. — lin. 10. *δυνάμει* ab. V. B. — lin. 14. *ἢ καὶ τὰ πρότερα* V. — lin. 34. *τῆς* ab. V. — Lin. 3. *ἐστιν* ab. O. B. — lin. 8. *κορυφὴ* V. — lin. 9. *συ-* p. 263.
νέσταται scripsi cum V. editt. cet. habent *συνίσταται*. — lin. 18. *πάλιν* a me additum est. — lin. 22. *γωνίας ἴσας* B. O. — lin. 25. 32. *ἐστι* ab. B. O. — Lin. 5. *ὅπ. ἔδ. π.* ab. B. — lin. 7. *συνεστή-* p. 264.
σασθαι V. — lin. 8. *ᾗ καὶ τὴν πυραμίδα* V. — lin. 11. *τριπλῆ* B. O. — lin. 16. *ἑκάστην πλευρὰν* B. O. — lin. 19. *ἁφῃρήσθωσαν ἀπὸ ἑκάστης* B. O. — lin. 22. *συνίσταται* edd. omn. — lin. 25. *τριπλα-*
σία B. O. — lin. 31. *διὰ τῶν ΕΙΙ σημείων*. — lin. 34. *κἂν* B. O. — Lin. 4. *δὴ* ab. V. P. — B. et O. habent *δὲ*. — lin. 6. *πάλιν* p. 265
ab. V. — lin. 16. *ἐστὶ* a me additum. — lin. 19. *ἡ ΒΔ τῇ ΚΕ* B. O. — lin. 23. *δοθείσῃ* ab. V. — lin. 26. *δεῖξαι* B. — Lin. 9. p. 266.
αἱ ΕΔ . . . καὶ ὁμοίως exciderunt V. — lin. 10. *καὶ* ab. B. — lin. 11. *αἱ* additum a me. — pro *ΔΜ . . . ΟΔ* B. habet *ΕΖ ΖΗ . . . . ΚΕ*. — lin. 12. *δεκάγωνος* B. — lin. 21. *ἐπιζευγνύουσαι ἐπὶ τ. ἀ. μ. εὐθ.* V. P. — lin. 23. *τέ ἐστι καὶ π.* B. O. — lin. 26. *περιγραφομένου* male in edd. omn. — lin. 27. *πενταγώνου δὲ ἰσοπλ.* B. — lin. 29. *ἄρα καὶ τὸ* B. O. — Lin. 2. *πεντάγωνος* B. O. — p. 267.
lin. 4. *τριγώνων* ab. V. — lin. 9. *τοῦ κύκλου τοῦ ΕΖΗΘΚ*. — lin. 28. *ἐστι* ab. B. O. — Lin. 2. *ἐστὶ* ab. B. O. — *τὸ* ab. V. P. — p. 268.

lin. 3. *δὴ* ab. B. O. — lin. 6. *συνίστανται* edd. omn. — lin. 11. *Ἐπειδὴ* B. O. — lin. 11. *ἐστιν* recepi ex V., qui non habet *μέν*. — lin. 20. *τὸ ἄρα . . . διὰ τοῦ Δ* ab. V. — lin. 31. *τοῦ Π* pro *τοῦ Δ* edd. omn. — Lin. 9. *τετραπλασίων* B. O. P. Nos secuti sumus p. 269. Cod. V. — lin. 10. *πενταπλασίων ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ ἐστὶν* B. O. — *πενταπλασίων ἄρα ἐστὶν* etc. P. Nos secuti sumus cod. V. — lin. 15. *ἡ ΑΒ ἴση* B. O. — lin. 16. *τοῦ κύκλου τοῦ ΕΖΗΘΚ* B. O. — lin. 32. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. V. — Lin. 6. *τοῦ* ante *ἑξαγ.* ab. p. 270. B. O. — lin. 8. *ὅπ. ἔδ. δ.* add. V. — lin. 17. *σημεῖα* ab. V. — lin. 19. *τετμήσθωσαν αἱ ΝΟ ΟΞ ΘΠ εὐθεῖαι* B. O. — lin. 20. *λόγον* addunt edd. omn. post *μέσον*. — lin. 24 *ἐκκείσθωσαν* V. P. — lin. 30. *αὐτῆς* ab. V. — Lin. 9. *ἐστὶν* ab. B. O. — lin. 13. *ἐστ.* p. 271. *ἴσ.* B. O. — lin. 17. *μέρη τοῦ κύβου* B. O. — lin. 29. *πλευρᾶς* ab. V. — lin. 31. *καὶ* ab. V. — Lin. 5. *τὴν ΟΞ* B. O. male. — p. 272. lin. 18. 19. *ἐστὶν* ab. B. O. — lin. 18. *τῇ ΒΝ* B. O. — lin. 27. *ἐστὶ* bis. B. O. — lin. 29. *τέ* ab. B. O. — lin. 34. *τε* ab. V. — lin. 34. *ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον* abs. B. O. — Lin. 7. Addunt edd. *Δέ-* p. 273. *δεικται ἐν τῷ παρατελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ἱα βιβλίου*, quod glossema est. — lin. 8. *ἡμίσεια πλευρὰ τοῦ κύβου* B. O. — lin. 18. *ἐστι* ab. B. O. — lin. 25. *τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς* B. O. — Lin. 5. p. 274. *τῆς δὲ . . . ἡ ΟΞ*. Haec desunt in B. O. — lin. 9. *ἐστιν* ab. B. O. — *οὕτως* ab B. — lin. 10. *τοῖς ὡσαύτως* B. O. — lin. 14. *τῶν ΝΡ ΣΞ* O. — lin. 21. Peyrardus notat, haec se legisse in infima pagina codicis Vat. et post verba *τοῦ κύβου* in textu aliorum duorum codicum: *ῥητὴ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμῆσθω κατὰ τὸ Γ. καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΓ· προσκείσθω δὲ ἡ ΑΔ ἡμίσεια τῆς ΑΒ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· αἱ ΓΔ ΔΑ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἡ ΑΓ. Ῥητὴ δὲ ἡ ΑΒ, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ· ἑκάτερος ἄρα τῶν ΑΓ ΓΒ ἀποτομή ἐστι, προσαρμόζουσι δὲ τῆς μὲν ΑΓ ἡ ΑΔ τῆς δὲ ΓΒ ἡ ΓΔ.* Haec a scholiaste quodam explicandi causa adscripta esse primo visu nemo non judicabit. — lin. 23. 25. *ἡ καλουμένη* ab. V. — lin. 25. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. V. B. — lin. 29. V. add. *ὅπ. ἔδ. δ.* — Lin. 3. *μὲν* ab. p. 275. V. — lin. 8. *ΑΕ ΕΒ* ab. P. — lin. 17. *τῆς* ab. O. B. — lin. 19. *τριπλῆ* B. O. — lin. 29. *ἐστὶ* ab. B. O. — *τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ* B. —

Lin. 3. τῇ *AB* ἴσῃ B. O. — lin. 19. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 28. p. 276.
ἡ *KΛ* ἄρα . . . ἀναγέγραπται ab. B. O. — lin. 32. τῆς σφαίρας ἡ
διάμ. B. O. — lin. 33. τοῦ ab. B. O. — Lin. 18. τριπλασίων B. p. 277.
O. — lin. 31. ἄλογοι γάρ εἰσιν ab. B. — Lin. 22. ἐστιν B. O. p. 278.
Adest demonstratio altera, quam vide in app. — ibidem vide
Lemma quoddam in edd. hic additum. — lin. 32. *συνίστανται* V. —
τεσσάρσιν scripsi cum V. pro vulg. *τέτρασιν*. — Lin. 27. οὕτω B. p. 279.
O. — Lin. 6. 8. *πέμπτης* B. O. — Lin. 8. Peyrardus notavit haecce: p. 280. 28
„Hoc ἄλλως in margine Cod. V. est exaratum; deest autem in co-
„dicibus 2466 et 2342, et in omnibus aliis est in textu.“ — lin. 9.
ἔστω δὲ τὸ *Γ* ἔλασσον abs. V. — lin. 12. καὶ ἔστω ab. V. B. —
lin. 14. *γινέσθω* V. — ἂν a me additum est. — lin. 17. *γινέσθω*
V. — ἂν ab. V. — lin. 20. τῷ *ΛΔ* . . τὸ *ΞN* B. O. — lin. 23.
τῷ *ΛΔ* . . τὸ *NΛ* B. O. — lin. 24. *ΞΛ*. Ἀλλὰ καὶ τῷ *ΛΔ* ἴσον
ἐστὶ τὸ *ΛK* O. quae lectio a Gregorio inventa esse videtur, cum
in ed. B., quam sécutus est, linea hoc loco typographi errore ex-
ciderit. — Lin. 12. 13. 14. οὕτως ab. V. B. — lin. 14. καὶ alterum p. 282.
abs. B. O. — lin. 15. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ *E* τὸ *Λ*· ἐπεὶ abs. V. —
lin. 18. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. O. — lin. 20. Peyrardus notat: „In edi-
„tionibus B. et O. variae partes hujus ἄλλως insertae sunt in varias
„partes propositionis 9; in codd. autem V. et 2466 hoc ἄλλως
„exaratum est in margine; in codicibus omnibus sic ordo se ha-
„bet, 1, prop. 9. corollarium; 2, lemma prop. 10; 3, ἄλλως prop.
„9; 4, prop. 11; 5, prop. 10.“ — lin. 21. *μήκει* ab. V. — lin. 23.
ποιείτω, τὸν δὲ *Δ* O. — lin. 27. οὕτως ab. V. — lin. 31. *πεποίη-*
κεν, τὸν δὲ *Γ* O. — Lin. 3. O. add. ὅπερ ἔδ. δεῖξαι. — lin. 6. p. 283.
μήκει ab. V. — lin. 10. *ἀνάλογον εἶσι* V. — lin. 11. 12. Quamvis
in ed. O. adnotatur Verba Ὡς . . . τὸν *H* desiderari in codd. mss.
ea in iis, quos Peyrardus inspexit non desiderantur, excepto 2466.
— lin. 16. ὡς γὰρ . . τὸν *Z*. Ad haec quoque Gregory eandem
adnotationem adscripsit; sed auctore Peyrardo unicus Cod. 2466
haec verba non habet. — οὕτως ab. V. — lin. 19. ὅπ. ἔδ. δ. ab.
V. — lin. 23. γὰρ ab. V. — lin. 26. εἰσὶ ab. V. — lin. 27. ἐπεὶ οὖν
V. P. — lin. 32. ἁπλῶς ὂν ἕτερός τις ἀριθμὸς πρὸς ἕτερόν τινα
ἀριθμὸν, σύμμετρά ἐστι τὰ τετράγωνα, τοῦτ' ἔστιν αἱ εὐθεῖαι ἀφ'
ὧν ἀνεγράφησαν δυνάμει O. — lin. 34. αἱ μὲν μήκει σύμμετροι
πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ O. — lin. 37. ὅτι αἱ O. — δυνάμει ab.

V. — lin. 38. *Ἐπειδήπερ* O. — lin. 39. *τετράγωνος ἀριθμ. πρ. τετρ. ἀρ.* V. — lin. 40. *τῷ μήκει* V. P. — Lin. 2. *καὶ δύνανται* p. 284.
μήκει O. — lin. 5. *γάρ εἰσι σύμμετρ.* O. — lin. 11. *Ἐπεὶ δὴ* O. — lin. 12. *εἰσ. συμμ.* ab. V.; qui habet *σύμμ.* post *δύναμει.* — lin. 12. *δηλαδὴ* pro *δὴ* O. — lin. 15. *αἱ γὰρ μήκει* O. — lin. 19. *αὐτῇ* ab. O. — lin. 21. Hoc alterum Scholium adest in omn. codd. Peyrardi. — lin. 22. *γὰρ* ab. O. — lin. 30. *οὕτως* ab. O. — lin. 33. O. add. *ὅπ. ἔδ. δ.* — Lin. 8. *ἐστὶ* O. — lin. 9. *ἐστιν* ab. O. — p. 285.
lin. 10. *ἡ Δ ἐστὶν* O. — lin. 11. Hoc Scholium reperitur auctore Peyrardo in cod. 2342, et nihil aliud est nisi propositio 22 aliter demonstrata. — lin. 29. *ἐστιν* V. P. — Lin. 6. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. O. p. 286.
— lin. 10. *καὶ* ab. V. — lin. 13. *μήκει καὶ δυνάμ. συμμ.* O. — lin. 15. Hoc Scholium reperitur in codd. Vat. 2466. 2345. 2342. 2531. — lin. 22. *μέσαι* ab. O. — lin. 24. *οὕτω* O. — Lin. 14. p. 287.
Quae uncis inclusa sunt in hoc lemmate, non reperiuntur in ed. B. — lin. 27. Hoc lemma reperitur in cod. 2345. O.: „Lemma „hoc non agnoscunt pleraque exemplaria.“ B.: „Non habet exem„plar alterum.“ — Lin. 6. Hoc lemma reperitur in codd. 1038. p. 288.
2345. 2531. „Lemma hoc non agnoscunt codd. Mss.“ O. — „non „habet alterum exemplar.“ B. — lin. 26. Hoc lemma reperitur in codd. 2345. 2342. 2531. „*λῆμμα εἰς τὸ λγ̄* non habet exemplar „alterum“ B.; pro hoc Lemmate in cod. V. hocce reperitur. *Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἔσται ὡς ἡ μία πρὸς τὴν ἑτέραν οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφότερας καὶ μίας αὐτῶν πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφότερας καὶ τῆς ἑτέρας.*

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ AB BΓ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AΓ, AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AΓ ΓB.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B πρὸς ὀρθὰς τῇ AΓ ἡ BΔ καὶ συμπεπληρώσθω τὸ AE παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ, οὕτως τὸ AΔ πρὸς τὸ ΔΓ· καὶ ἔστι τὸ μὲν AΔ τὸ ὑπὸ τῶν BΔ AB, τοῦτ' ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓA AB, ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ BΔ τῇ ΓΔ· τὸ δὲ ΔΓ τὸ ὑπὸ τῶν BΔ ΓB τοῦτ' ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν AΓ ΓB· καὶ ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν BΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓA AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AΓ ΓB, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. — Lin. 4. Hoc lemma reperitur in codd. p. 289.
2342. 2531. „Lemmata duo (*β. γ.*) sequentia desiderantur in nostris „codd. mss. nec ab Euclide esse arbitramur“ O. — lin. 21. Hoc Scho-

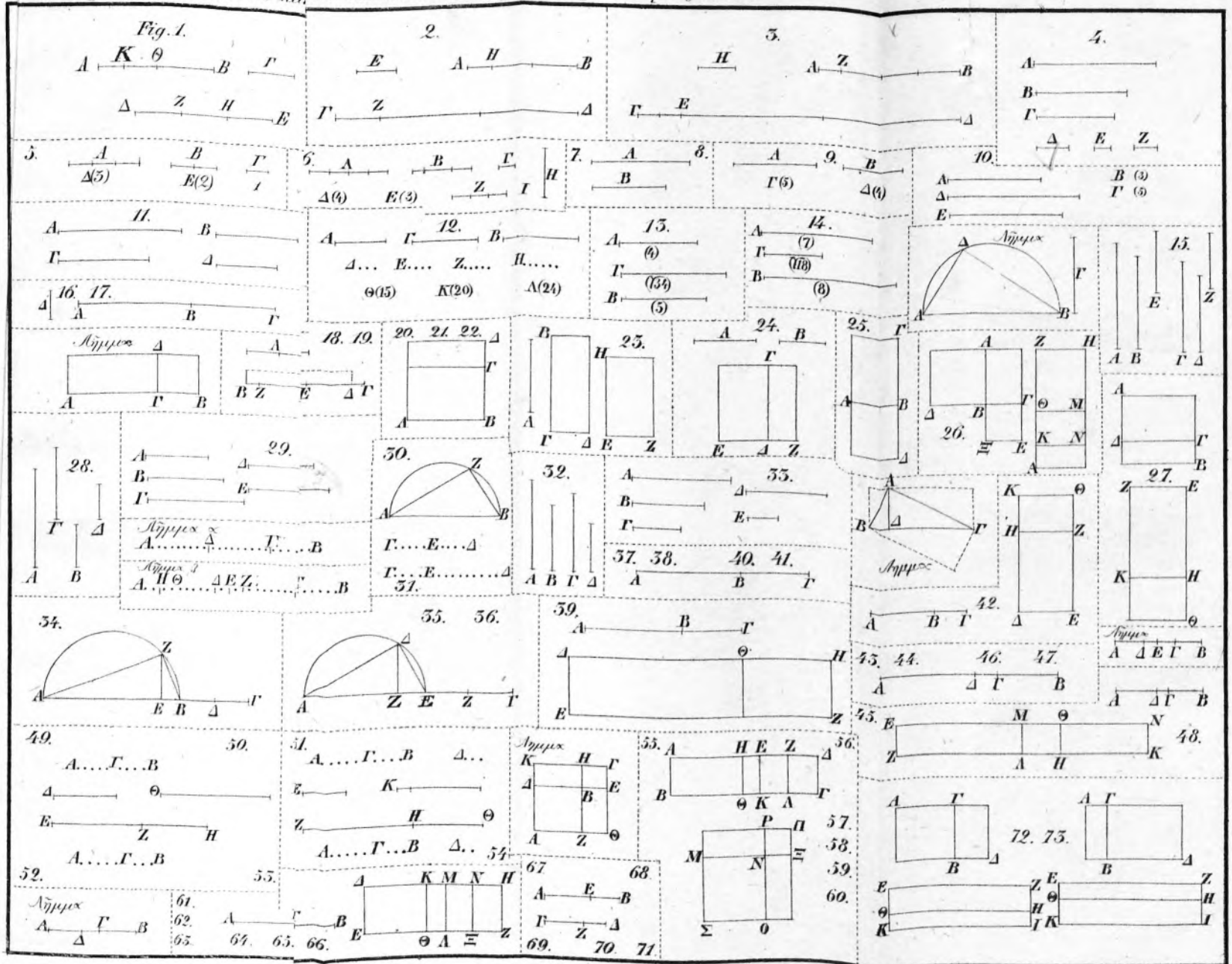
lium reperitur in codd. V., 2344. 2346. 2547. 2343. — lin. 27. Hoc scholium „addit exemplar alterum“ B.; deest in codd. 2466. 2345. 2531. — lin. 28. alterum τὸ ab. O. — lin. 31. ἔστωι V. — Lin. 3. p. 290. V. add. ὅπ. ἔδ. δ. — lin. 6. Hoc scholium deest in codd. 2466. 2345. 2531. — lin. 8. μέσων V. — lin. 9. καὶ ab. O. — lin. 17. 20. τῆς ab. O. — lin. 19. μεῖζ. εἶναι V. — lin. 23. Hoc scholium deest in codd. 2466. 2345. 2531. — lin. 24. καλεῖται αὐτὴ V. — lin. 26. τὸ ῥητὸν ab. V. — V. add. ὅπ. ἔδ. δ. — lin. 29. Hoc schol. deest in cod. 2466. — lin. 31. τά τε συγκείμενα V. — lin. 32. τοῦ δὶς V. — V. add. ὅπ. ἔδ. δ. — Lin. 2. Hoc schol. deest in cod. 2466; lemma autem p. 291. ipsum non desideratur. — lin. 8. ἑκάτερα . . ὑποκείσθω δὲ abs. V. — ed. P. habet καὶ ὑποκ. — lin. 11. καὶ λοιπὴ V. P. — lin. 12. ἄρα ἐστὶν V. P. — lin. 15. μὴν ab. V. P. — ἐστὶ ab. V. P. — lin. 22. V. P. add. ὅπ. ἔδ. δ. — O. add. εἴπερ συναμφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. — lin. 26. Deest hoc scholium in Cod. 2531. — lin. 30. δύνανται ab. V. — lin. 34. ἐστ. σύμμ. P. O. nos cum V. — Lin. 4. Hoc scholium abest in omnibus codicibus, quos p. 292. Peyrardus inspexit — lin. 33. Hoc corollarium adest in omnibus. — Lin. 13. Ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρ. O. — lin. 15. δῆλον ὡς pro ὥςτε O. p. 293. — lin. 23. ἡ ab. V. — lin. 29. ἐστὶν ἡ ΑΓ πρώτη. — Lin. 4. Peyr. p. 294. adnotavit: „Hoc ἄλλως reperitur in codd. Vat., 2344. 2531. 2547. „2345 post propositionem 116 et habet in capite: Ἡ τῇ ἑλασσόνι . . . „(cf. 37 hujus appendicis), in ceteris reperitur post propositionem „106.“ — lin. 5. ἔστω ab. V. — lin. 7. Κείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ V. — lin. 9. τετάρτη ab. O. — Τὸ δὲ V. — lin. 11. 12. (bis) 14 (bis) ἐστιν ab. O. — lin. 16. ῥητῆς τῆς ΖΕ, καὶ ἀπ. τετ. τῆς ΖΘ V. — lin. 17. Ἐὰν δὲ χωρίον . . . τετάρτης ab. O. — lin. 19. ἄρα ab. V. — lin. 22. Peyr. adnotavit: „Hoc ἄλλως reperitur in codd. V., 2344. „2531. 2547. 2345 post ἄλλως praecedens et habet in capite Ἡ τῇ „μετὰ . . . (cf. 28. huj. append.), in ceteris codd. reperitur post „prop. 107.“ — lin. 23. Ἔστω ἡ V. — lin. 36. ἡ μετὰ V. — Lin. 4. „Hoc ἄλλως adest in omnibus codd.“ P. — lin. 5. γίγνον- p. 295. ται V. — lin. 6. οὐδεμία τῶν πρωτέρων ἡ αὐτὴ V. — lin. 12. ἐστι ab. O. — lin. 13. ἐστὶν ab. O. — lin. 16. τῆς ab. V. — Lin. 2. p. 296. Hanc propositionem Euclidis non sapere acumen, quis non videat? Verba Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι plane abhorrent ab enunciandorum theorematum ratione. Res ipsa autem jam nono hujus libri theo-

remate probata est, nec longa hoc loco demonstratione eget. Cum enim diagonalis quadratum, ut facile intelligitur, duplum sit quadrati ipsius, haec quadrata rationem habent numerorum non quadratorum, quamobrem latera eorum (i. e. linea diagonalis et latus quadrati) inter se incommensurabilia sunt secundum nonam, uti diximus, propositionem. Theonis aut alius cujusquam additamentum in hoc theoremate facile cognoscas. Praeterea Peyrardus nos docet, hanc propositionem in codicibus numero non signari. — lin. 10. *ἐστι* ab. V. — lin. 12. *τὸν* ab. V. — lin. 15. *καὶ ἔχει λόγον* B. O. — lin. 16. *μόνας* ab. V. — lin. 17. *ἐστιν* ab. B. O. — lin. 22. *ἐστιν* (prius) ab. O. — lin. 23. 29. *ἄν* ab. V. — lin. 26. *ἀριθμ.* ab. V. — lin. 27. *αὐτοῖς* ab. V. — lin. 28. *ἔστιν* (prius) ab. V. — lin. 31. *διπλάσιος ὁ* V. — lin. 32. *τετραπλ. ἐστὶν ὁ* B. O. — *τοῦ* ante *EZ* ab. V. — lin. 33. *διπλάσιος δὲ . . τοῦ H* ab. B. O. — lin. 36. *ἀσυμμ. ἄρα* ab. V. — Lin. 3. *Δεικτέον . . . τῇ πλευρᾷ.* Haec abs. p. 297. V. P. — lin 5. *Ἔστω γὰρ* B. O. — lin. 7. *σύμμετρος· καὶ γεγονέτω* ab. V. — lin. 9. *οἷ EZ H* in fine exciderunt B. O. — lin. 12. *ὡς ἄρα ὁ . . πρὸς τὸν . . . οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς EZ* V. — lin. 14. *διπλάσιον* V. — lin. 15. 17. *τοῦ* ab. V. — lin. 28. „Hoc scholium, quod in „omnibus adest codicibus, Euclidis esse non potest, utpote ex „sequentibus perdet.“ P. — lin. 31. *εὐθείων* ab. O. — lin. 33. *ἐπίπεδον* pro *εἶδος* habet V. — Lin. 3. 5. 13. *καὶ* ab. O. — lin. 8. p. 298. *χωρ. ἀσυμμ.* B. O. — *τοῖς* ab. O. — lin. 17. *ὡς* ab. V. — lin. 18. *κῶνοι ἀλλήλοις.* — lin. 21. *γέγονε διὸ* V. — *ἐπὶ γραμμῶν ἐστι συμμ.* O. — lin. 24. Legas: prop. 22. — 33. *ἴσαι* post *HK* habet O. — Lin. 4. *ἐστὶ* O. — lin. 6 *μείζονές εἰσι* V. — lin. 12. *ἐστ. ἴσ.* p. 299. O. — lin. 17. *ἐστι* ab. V. — lin. 20. *μείζονές εἰσι τῆς ΛΓ* O. — lin. 21. *ἐστιν* ab. O. — lin. 31. *τῇ ΛΞ εὐθεῖα ἴση ἡ ΛΓ* O. — Lin. 3. *ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΛΓ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Γ* B. O. — p. 300. lin. 4. *τῆς ΛΓ ὑπερέχει* V. — lin. 6. *μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ* V. — lin. 5. *τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς* etc. O. — lin. 7. *μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΞΛ* V. — lin. 8. *προύκειται* O. — lin. 12. „Haec sunt in „codd. V., 2346. 2342. sed in cod. 2342, glossema marginale congruit „cum vulgato.“ P. — Lin. 8. Codd. V. et 2346 cum iis consen- p. 301. tire quae in textum recepit P. (p. 211.) docemur ab editore P. — lin. 21. *ἐστιν* ab. O. — Lin. 3. 4. *ἐστι* ab. O. — lin. 5. 10. (bis) p. 302. *τῆς* ab. V. — lin. 6. *ἄρα* ab. V. — lin. 14. „Hoc ALITER adest

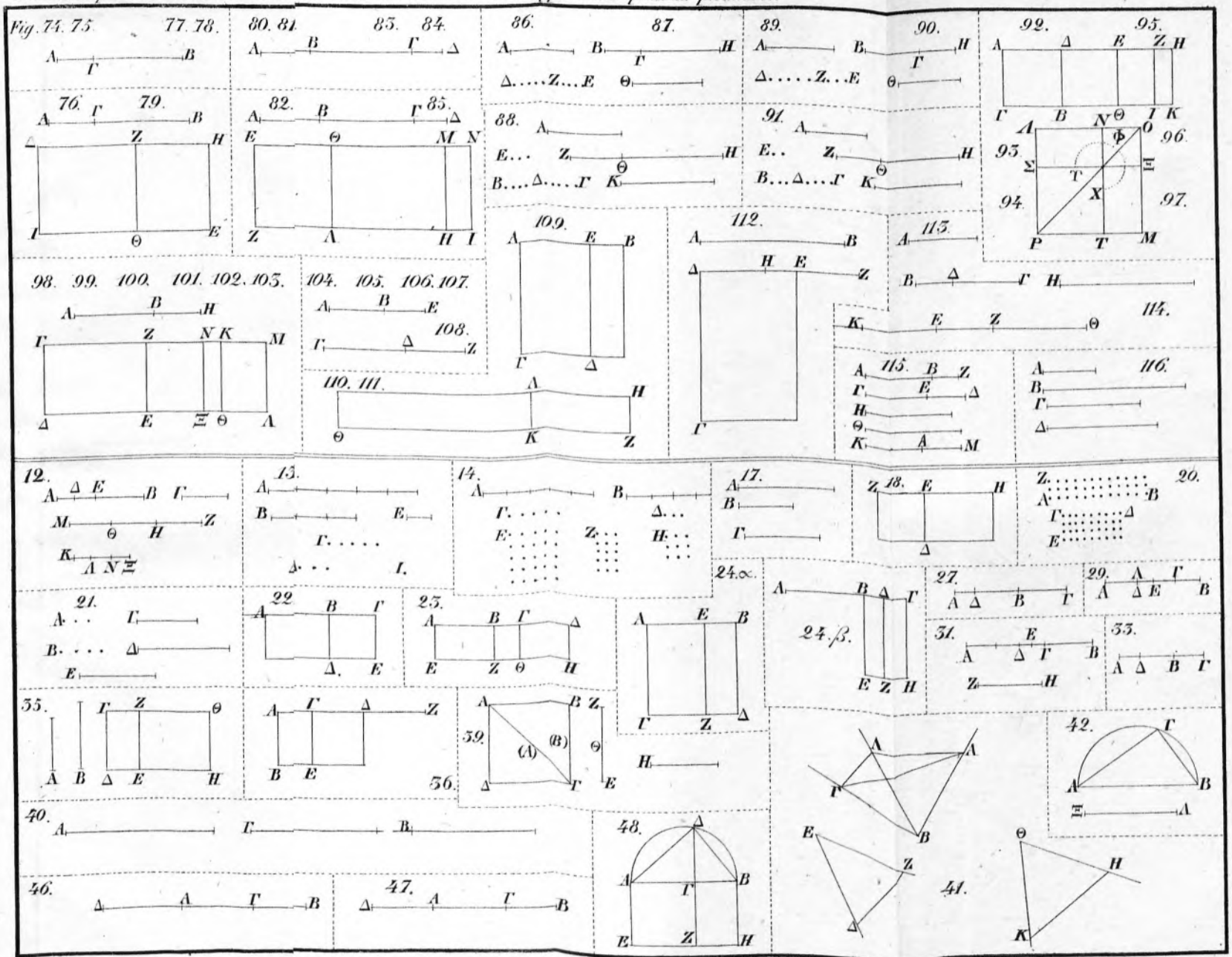
„in Codd. V., 1038. 2344. 2342. 2346. 2547. deest autem in ed. „O., in codd. 2466. 2345. 2531. 2343. In codd. 1038 et 2344. „deest quintum theorema, cujus ALITER locum tenet.“ P. — Lin. 8. „In codd. 2346. 2547. 2343. analyses et syntheses quinque p. 30
„priorum theorematum conjunctim subsequuntur quintum theorema, „et in codd. V., 2344 (per errorem) sextum theorema; in cete„ris vero codd. et in edd. B. O. analyses et syntheses separatim „subsequuntur theoremata, ad quae spectant.“ — lin. 10. *Τί οὖν . . σύνθεσις;* abs. O. — lin. 11. *μὲν οὖν* ab. O. — lin. 13. *Σύνθεσίς ἐστι λῆψις* O. — lin. 14. *ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον* V. — lin. 15. *τοῦ εἰρημένου* O. — *ἡ* ab. V. P. — *ἀναγραφῆς* O. — lin. 24. 26. *τῆς* ab. V. — Lin. 4. *ἐστι* ab. O. — *τῆς* ab. V. — lin. 6. *Σύν-* p. 30
θεσις τοῦ αὐτοῦ O. — lin. 8. *τῆς* ab. V. — lin. 9. *τῶν* ab. V. — lin. 18. *Τοῦ εἰρημένου* O. — *ἄνεν καταγρ.* ab. O. — lin. 24. *γὰρ* ab. V. — lin. 29. *δὶς* ab. O. — lin. 31. 32. 33. *τῆς* ab. V. — lin. 34. O. add. *διὰ τὴν ὑπόθεσιν.* — Lin. 7. *τῆς* ab. V. — lin. 11. p. 30
ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ O. — lin. 21. *τὸ ΑΓ* O. — lin. 27. *τὸ ἄρα* V. — Lin. 3. 13. 21. *τὸ ἄρα* V. — lin. 3. *ἀπὸ τῆς* ab. V. — p. 30
lin. 14. *ἄπαξ* ab. V. — lin. 22. *τριπλασίονά ἐστι* O. — lin. 23. *τετράγωνα* ab. V. — Lin. 9. *οὖν* ab. V. — lin. 12. *ἄρα* ab. V. — p. 30
lin. 13. *τε* ab. V. — lin. 30. *ἐστιν* ab. V.

Berolini, typis Haynianis.

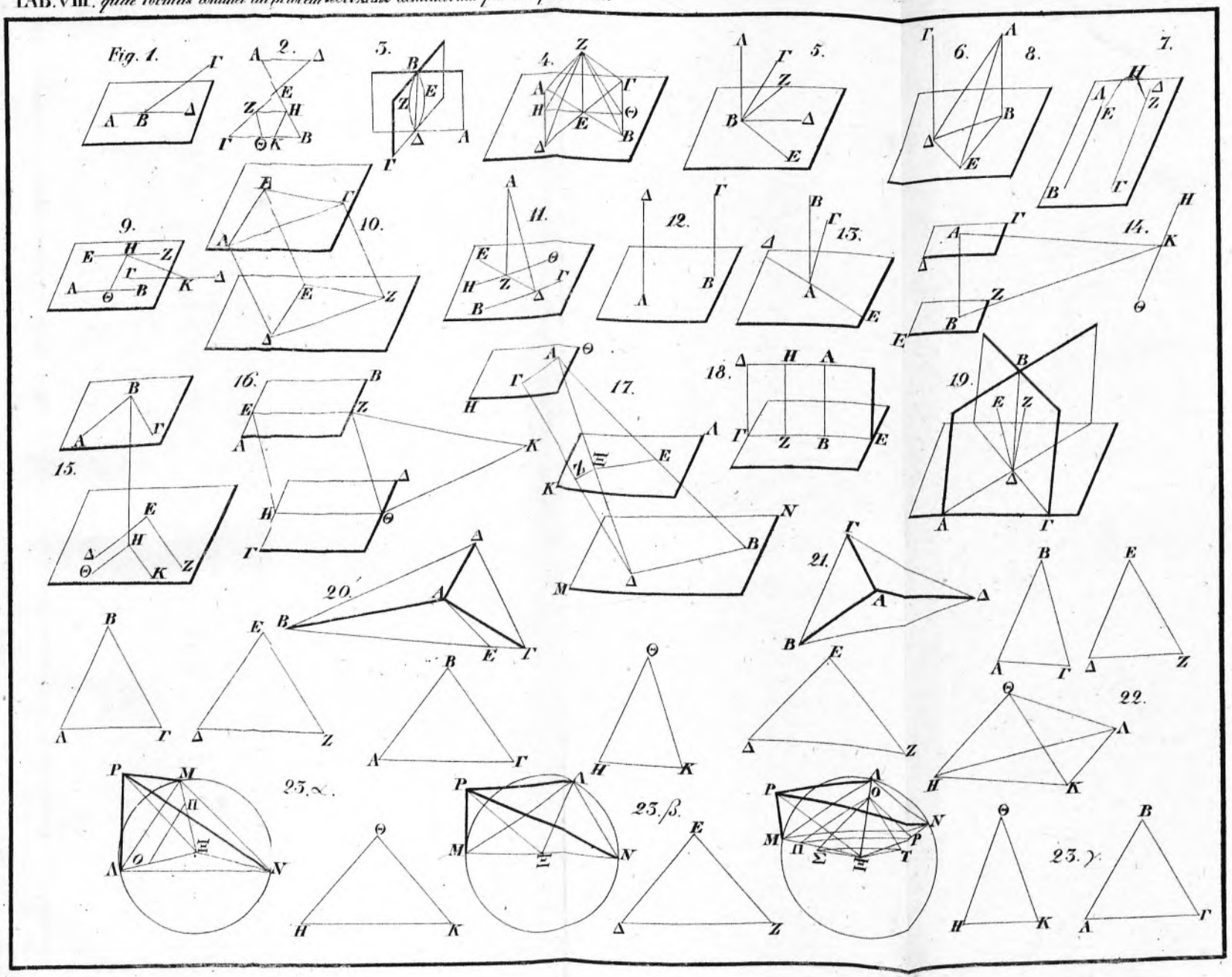
TAB. VI. *quae formas continet ad decimum elementorum librum pertinentes priores septuaginta tres.*



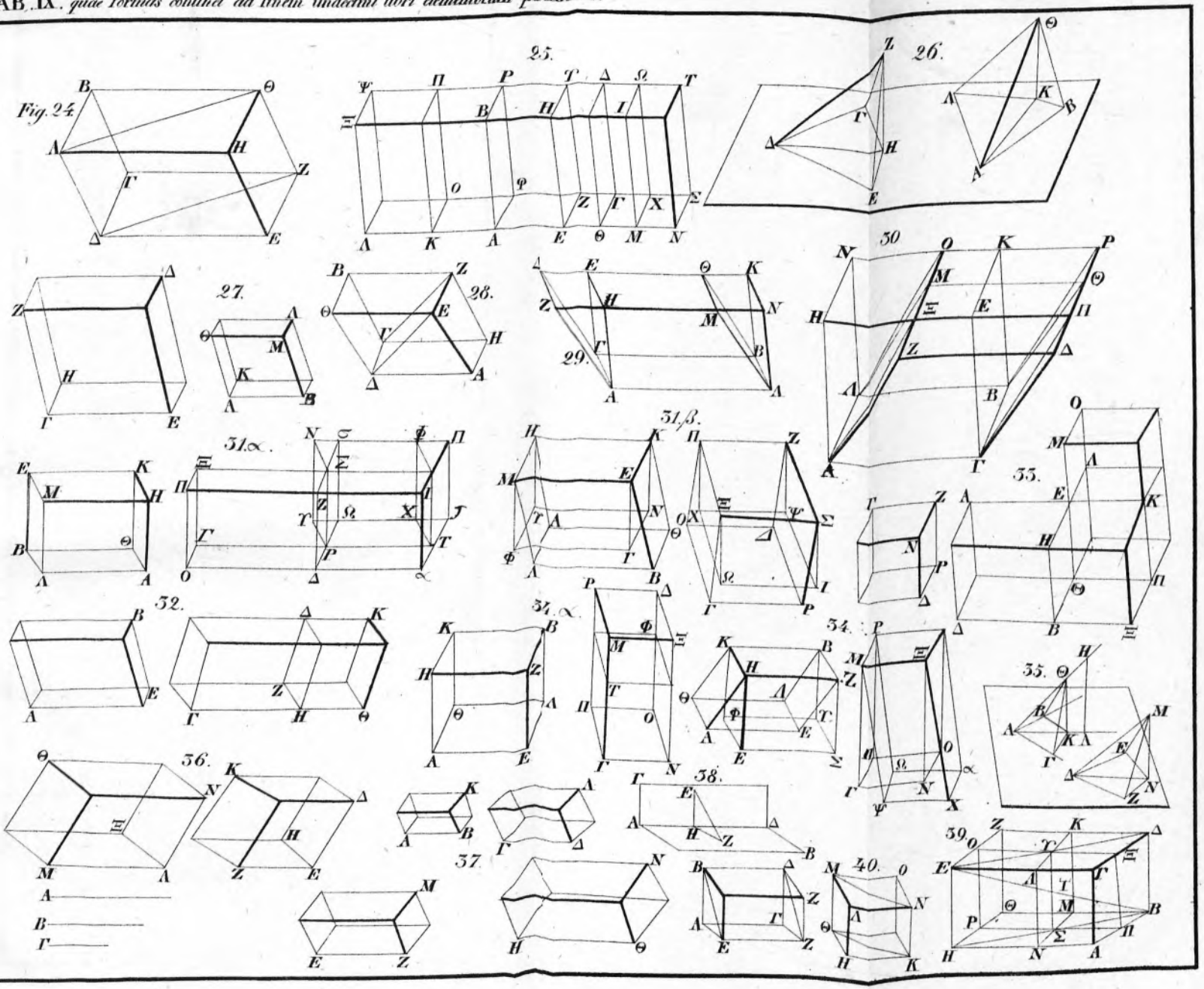
TAB. VII. *quae formas continet ad finem decimi elementorum libri et appendicem quintam pertinentes.*



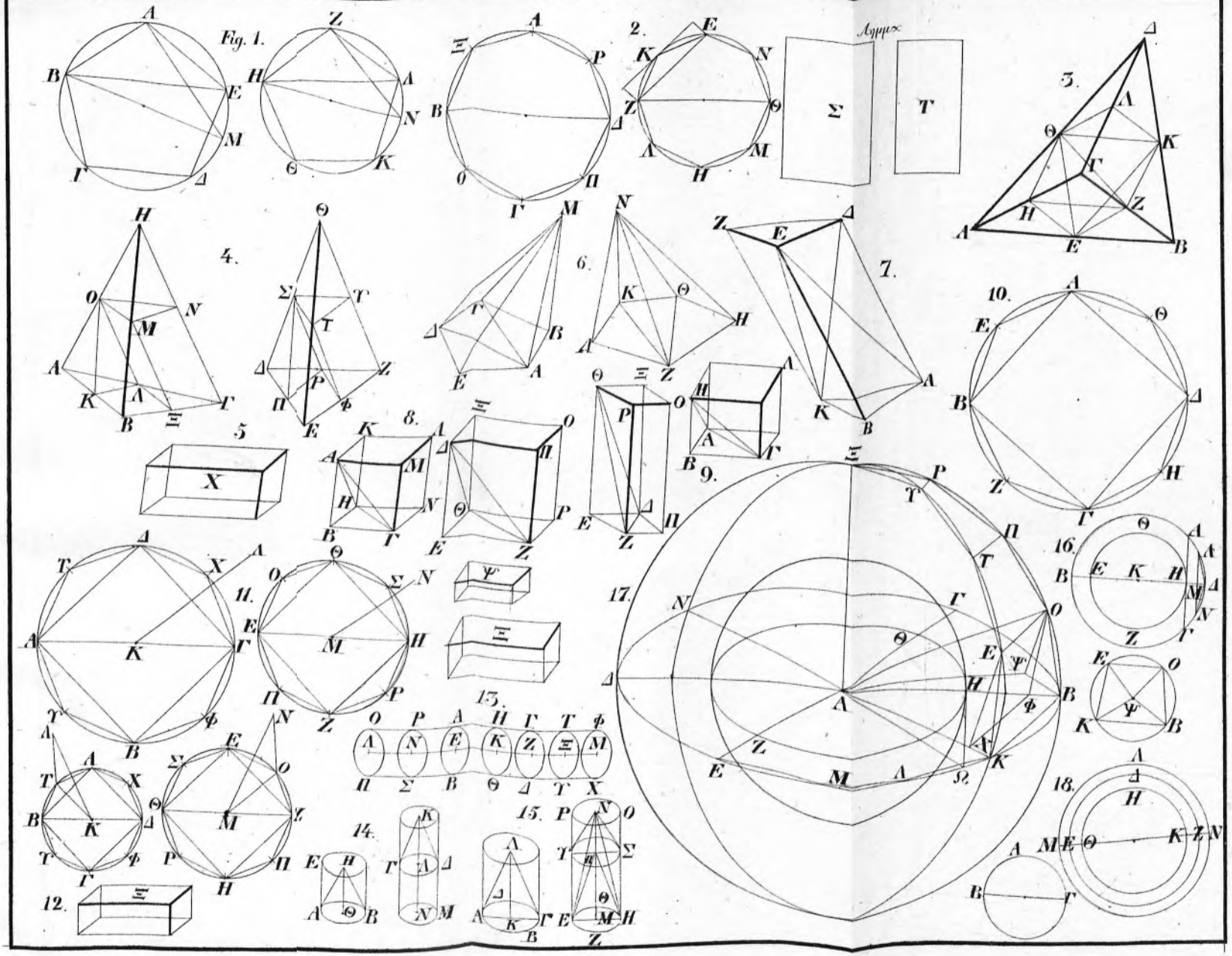
TAB. VIII. *quae formas continet ad priorem libri XI.mi demonstrandum partem pertinentes.*



TAB. IX. *quae formas continet ad finem undecimi libri elementorum pertinentes.*



TAB. X. *quae formas continet ad duodecimum elementorum librum pertinentes.*



TAB. XI. *quae formas continet ad tertium decimum undecimum librum pertinentes.*

