Max Planck Research Group
Epistemes of Modern Acoustics

Sound & Science: Digital Histories

Preyer, William T. Akustische Untersuchungen. Jena: Gustav Fischer, 1879.

https://acoustics.mpiwg-berlin.mpg.de/node/497

Scan licensed under: CC BY-SA 3.0 DE | Max Planck Institute for the History of Science

MAX PLANCK INSTITUTE
FOR THE HISTORY OF SCIENCE

SAMMLUNG
PHYSIOLOGISCHER
ABHANDLUNGEN

HERAUSGEGEBEN VON

W. PREYER

ZWEITE REIHE

VIERTES HEFT

AKUSTISCHE
UNTERSUCHUNGEN

VON

W. PREYER

JENA

VERLAG VON GUSTAV FISCHER
VORMALS FRIEDRICH MAUKE

1879

AKUSTISCHE

UNTERSUCHUNGEN

VON

W. PREYER

MIT 2 TAFELN

JENA

VERLAG VON GUSTAV FISCHER

VORMALS FRIEDRICH MAUKE

1879

INHALT

I. Tiefste Töne ohne Obertöne S. 1

II. Combinationstöne und Obertöne der Stimmgabeln S. 11

III. Zur Theorie der Consonanz S. 44

IV. Notiz über die Wahrnehmung kleinster Tonhöhenunterschiede S. 65

I.

TIEFSTE TÖNE OHNE OBERTÖNE.

In einer Abhandlung über die tiefsten Töne [1]) bemerkte ich vor zwei Jahren, dass Stimmgabeln, welche weniger als 24 ganze Schwingungen in der Secunde ausführen, nicht vorhanden seien, obwohl kein theoretischer Grund vorliege, weshalb sie nicht in derartigen Dimensionen sollten angefertigt werden können. Das Interesse, welches so tiefe Gabeln bieten, besteht darin, dass durch sie sich entscheiden lässt, ob das Ausbleiben der Tonempfindung bei den 24 Schwingungen der (mit Laufgewichten schwer) belasteten Gabel mangelnder Stärke der Oscillationen oder organischen durch die Structur des Ohres gegebenen Bedingungen zuzuschreiben ist. Lässt sich eine Stimmgabel von geringer Schwingungsfrequenz und sehr grosser Amplitude herstellen, welche unbelastet keinen Ton mehr gibt und eine andere etwas kleinere, welche ebenfalls unbelastet mit etwas grösserer Schwingungsfrequenz, aber kleinerer Amplitude noch einen Ton gibt, so wird man mit der höchsten Wahrscheinlichkeit folgern dürfen, dass die Grenze der Hörbarkeit ausschliesslich durch das Ohr bedingt sei.

Es ist mir geglückt nach mehreren vergeblichen Versuchen, durch die Vermittlung des Herrn Georg Appunn in Hanau, die verlangten Gabeln zu erhalten. Sie sind unzweifelhaft die beiden grössten Stimmgabeln, welche jemals angefertigt wurden. Die eine wiegt 11,1 Kilo, die andere 6,9 Kilo ohne Fuss. Beide sind geschmiedet. Die Zinken der ersteren sind 15 Millim. dick, 39,5

1) Preyer: Grenzen der Tonwahrnehmung S. 7. Jena 1876 (Sammlung physiologischer Abhandlungen I. 1. Heft).

breit und von der Biegung an 1 Meter (genauer 998 Millim.) lang. Die Zinken der anderen Gabel sind 1,3 Centim. dick, 3,9 breit, 72,2 lang (von der Biegung an). Die Schwingungszahlen sind für die grössere etwa 18,6, die kleinere etwa 13,7. Ich bestimmte dieselben durch graphische Registrirung mittelst einer der von Marey erfundenen myographischen Pincette ähnlichen Vorrichtung. Bei jeder Excursion berührte die Zinke der Gabel einen Mareyschen Tambour, so dass der mit diesem durch einen zweiten Tambour luftdicht verbundene Schreibhebel jede ganze Schwingung einfach markirte auf einem mit bekannter constanter Geschwindigkeit rotirenden berussten Cylinder. Die Zahlen sind Mittelwerthe aus vielen Einzelbestimmungen für Zimmerwärme. Auf eine genauere Bestimmung der Schwingungsfrequenz kommt es hier um so weniger an, als dieselbe bei solchen Eisenmassen stark von der Temperatur beeinflusst werden muss.

Versetzt man nun durch schnelles Anschlagen der Zinken mit beiden Händen die grössere Gabel in sehr starke Schwingungen, welche sichtbar über drei Minuten lang dauern können, und anfangs bis 4,5 Centimeter Amplitude haben, so fühlt man an der Ohrmuschel vollkommen deutlich die einzelnen Luftstösse und hört auch ein dumpfes discontinuirliches Hauchen, hat aber nicht im geringsten die Empfindung eines tiefen Tones und kein Dröhnen oder Knarren oder Klappern wie bei Zungen gleicher Schwingungsfrequenz. Berührt die Ohrmuschel oder der Finger während des Schwingens die Zinke, so fühlt man die einzelnen Schläge deutlich getrennt. Zu diesen Wahrnehmungen kommen noch hinzu Geräusche und Töne, welche bei ungeschicktem Anschlagen sogar sehr laut werden können, nämlich Obertöne und wahrscheinlich auch Longitudinaltöne, sowie beim Anschwingen Reibungsgeräusche, was alles aber in keinem Falle mit dem den unhörbaren Grundton repräsentirenden intermittirenden Hauchen verwechselt werden kann. Also liegt hier eine Stimmgabel vor, deren Pendelschwingungen trotz ihrer enormen Elongation keinen Ton geben, eine tonlose Gabel. Denn wenn auch die maximale Schwingungsweite von 45 Millim. nur kurze Zeit anhält, so dauert die von 30, von 20 und 10 Millim. minutenlang, so dass man mit der grössten Ruhe beobachten kann.

Die andere kleinere Stimmgabel, deren Schwingungen eine geringere Amplitude haben von etwa $3^1/_2$ Cm. im Maximum und bis zu einer vollen Minute bequem sichtbar sind, gibt zwar deutlich einen discontinuirlichen sogenannten Brummton; aber es ist

hier schon eine unzweifelhafte dumpfe Tonempfindung vorhanden, und zwar ohne Dröhnen und Knarren. Die einzelnen Luftstösse beginnen zu verschmelzen und sind für den tastenden Finger und die Ohrmuschel merklich frequenter, als die der ersten Gabel.

Ich habe sehr vielen Beobachtern, geübten und ungeübten, während des letzten Jahres beide Riesengabeln präsentirt, ohne ihnen vorher mitzutheilen, um was es sich handelte. Alle stimmen darin mit mir überein, dass der Grundton der grösseren Gabel unhörbar ist und dass man die einzelnen Schwingungen derselben sehen und getrennt fühlen, auch wohl an einem intermittirenden Reibungsgeräusch (der Luft an den Zinken?) durch das Ohr erkennen, nicht aber durch eine Tonempfindung percipiren kann. Vielmehr klingt bei der ersten Beobachtung die grössere Gabel höher als die kleinere, weil man ihre Obertöne leichter hört. Bezüglich der zweiten Gabel lautet das Urtheil Mehrerer zwar ebenso wie bezüglich der grösseren, dass eine eigentliche Tonempfindung fehlt; Viele aber kamen zu dem Ergebniss, dass hier schon eine entschiedene, wenn auch schwache Tonempfindung, mehr als dumpfes Gebrumm, die Empfindung eines nicht mehr musikalisch bestimmbaren ausserordentlich tiefen, nie zuvor gehörten Tones vorhanden sei. Das Discontinuirliche dieser Tonempfindung ist auch noch bei Stimmgabeln von 24 und 28 und mehr Schwingungen deutlich. Und ich will hier beiläufig erwähnen, dass ich mit der Fingerspitze stark schwingende Stimmgabeln von weit über 1000 ja sogar 1500 Schwingungen unzweifelhaft schwingen fühle. Es entsteht nach dem leisen Berühren der tönenden Zinke ein eigenthümliches Kitzelgefühl in der berührenden Hautfläche, welches ich auch noch bei 1700 bis 1800 Schwingungen in der Secunde spüre, bei 1900 nicht sicher, bei 2000 niemals; bei 2048 und höher hinauf fühlen sich die Stimmgabeln glatt an, mögen sie tönen oder nicht. Es treten jedoch bei diesen Versuchen individuelle Verschiedenheiten zu Tage. Manche fühlen schon bei 1500 keine Intermittenz mehr.

Aehnliche individuelle Verschiedenheiten wie sie hier der tastenden Fingerspitze zukommen, zeigt nun das Ohr bezüglich der Vereinigung der wenig frequenten Luftstösse zu einem Ton. Ich sprach es schon aus (a. a. O. S. 11), dass es keinen tiefsten Ton von einer einzigen Frequenz gibt, sondern jedes Ohr seine besondere untere Tongrenze hat. Diese Thatsache wird durch die Verschiedenheit der Urtheile über die Hörbarkeit der beiden grössten Gabeln nur bestätigt. Und auch das andere Resultat, zu dem ich

gelangte, dass zur Erzeugung eines Tones mindestens 15 Schwingungen in der Secunde für jedes Ohr erforderlich seien, wird hier insofern bestätigt, als Niemand die 13 bis 14 Schwingungen der einen Gabel zu einem Tone vereinigen konnte, obgleich sie enorm stark waren.

Gerade hierin aber könnte ein Mangel der mitgetheilten Beobachtungen gefunden werden, dass nämlich die Amplitude zwar sehr gross sei, aber nichts die Unhörbarkeit des Tones bei noch grösserer actueller Energie der Schwingungen verbürge.

Ich habe, um diesem Einwande zu begegnen, für beide Gabeln Resonanzkasten anfertigen lassen: einen vierseitigen an einem Ende verschliessbaren hölzernen Kasten von 18 Centim. Höhe und 29 Breite und einer Länge von 4 Metern. Diese Länge kann man aber (um denselben Kasten für beide Gabeln verwenden zu können) durch Ein-, bez. Ausschieben einer an beiden Enden offenen 2,16 Meter langen ähnlichen vierseitigen Röhre abändern und bis auf 6,2 Meter ausdehnen.

War die obige Folgerung, dass die Tonlosigkeit der grösseren Gabel auf dem Unvermögen des Ohres beruhe, die einzelnen ungemein starken Luftstösse wegen ihrer zu langen Dauer von $^1/_{14}$ bis $^1/_{13}$ Secunde zu einem Tone zu verschmelzen, richtig, so musste auch mit der Resonanz kein Ton zu Stande kommen, der Ton der kleineren Gabel mit einer Schwingungsdauer von $^1/_{19}$ bis $^1/_{18}$ Secunde dagegen durch die Resonanz verstärkt werden.

Dass Ergebniss der Vergleichung entspricht vollkommen dieser Erwartung. Die tiefere Gabel erfordert eine Länge des Resonanzkastens von mehr als 6 Metern, die höhere eine solche von nahe $4^1/_2$ Metern, um das Maximum der Intensität zu erreichen. Man hört auch beide auf einem an einem Ende offenen Resonanzrohr von dieser Länge viel besser und reiner, das Ohr an die Oeffnung haltend. Die grössere Gabel gibt auch jetzt keinen Ton (die beim Anschlagen unvermeidlichen Nebengeräusche und Obertöne fallen, wenn die Schwingungsweite abnimmt, fort), sondern Stösse und ein starkes schwer zu beschreibendes intermittirendes Hauchen oder Blasen. Die Stösse sind so beschaffen, wie sie, obwohl stärker, manchmal Locomotiven mit undichtem Ventil, hören lassen. Diese hier von einem Schlürfen oder Blasen begleiteten starken das Ohr angreifenden Stösse geben entschieden keine Tonempfindung; sie klingen wie starke Schwebungen. Die kleinere Gabel dagegen erzeugt in der Luft des Resonanzkastens einen deutlichen schönen ernsten milden ausserordent-

lich tiefen Ton (etwa Subcontra-D), der zwar wie alle tiefsten Töne noch nicht continuirlich ist, aber höher als das Stossen der ersten erscheint und schon den unzweifelhaften Charakter eines Tones hat, auch von dem Blasen oder Hauchen oder Schlürfen weniger erkennen lässt. Desgleichen ist der Resonanzton von den Nebengeräuschen und Obertönen, welche übrigens, weil sie alle höher, als er selbst sind, leicht auch vom Ungeübten von ihm getrennt werden, völlig gesäubert.

Das Gesammtresultat stimmt also in befriedigender Weise überein mit dem meiner früheren, mit Metallzungen nach Beseitigung der Obertöne angestellten Versuchen zur Ermittelung der unteren Tongrenze.

Nun ist aber bezüglich der Beweiskraft eben dieser Versuche von so gewichtiger Seite ein Bedenken geäussert worden, dass ich noch einmal auf dieselben zurückkommen muss.

Helmholtz bemerkt in der vierten Ausgabe seiner „Lehre von den Tonempfindungen“ [1]):

„Der Beweis, dass die gehörten Töne den Grundtönen der Pfeifen entsprachen, beruht aber nur darauf, dass sie beim stufenweisen Aufsteigen in der Höhe in die besser hörbaren, dagegen sehr kurz abklingenden Töne von 25 bis 32 Schwingungen übergingen. Bei ausgiebigen Schwingungen können aber sehr wohl die Zungen ihrem Befestigungspuncte longitudinale Stösse von doppelter Schwingungszahl gegeben haben, weil sie an beiden Enden ihrer Amplitude angelangt, wegen ihrer Biegung ihren Befestigungspunct zurückdrängen, in der Mitte der Schwingung dagegen durch die Centrifugalkraft ihres Gewichtes nach sich ziehen. Da die Unterscheidung der Tonhöhe bei diesen tiefsten Tönen äusserst unvollkommen ist, fühle ich durch die Aussage des Ohrs allein, wenn nicht durch Schwebungszählungen die Angaben controlirt sind, meine Zweifel nicht ganz beruhigt.“

Wäre dieser Einwand völlig zutreffend, so müssten die von den Zungen mit 16 bis 24 Schwingungen beim Ausschwingen (ohne Obertöne) gelieferten tiefsten Töne 32 bis 48 Schwingungen gehabt haben, also sehr arge Verwechselungen begangen worden sein.

Da ferner bei den Zungen von 8 bis 14 Schwingungen die Belastung und Länge erheblich grösser ist, somit bei ihnen die fraglichen Longitudinaltöne viel leichter zu Stande kommen müssten, wäre es unverständlich, weshalb man gerade bei diesen gar nichts hört. Denn die Octaven von 8 bis 14 Schwingungen, Töne von 16 bis 28 oder 18 bis 28 Schwingungen in der Secunde, sind schon durch grosse Gabeln herstellbar und würden — wenigstens

1) Braunschweig 1877. S. 295.

die von 26 bis 28 — bei der sehr bedeutenden Amplitude der Zungen von 13 und 14 Schwingungen deutlich gehört werden müssen, wenn sie zu Stande kämen. Nun hört aber thatsächlich Niemand beim Ausklingen der Zungen von 8 bis 14 Schwingungen Töne und beim Ausklingen der Zungen von 16 bis 32 hört fast jeder scharfhörende geübte Beobachter vollkommen deutlich tiefste Töne, wenn also die Zungen längst nicht mehr maximal schwingen. Es wird demnach als höchst unwahrscheinlich bezeichnet werden dürfen, dass jene Longitudinaltöne entstehen und dass, wenn es doch der Fall ist, sie stark genug werden, um beim Ausklingen gehört werden zu können.

Jedenfalls scheint mir der Zweifel an der Existenz von wahren Tönen mit weniger als 28 Schwingungen durch die akustische Uebereinstimmung jener Zungentöne einerseits mit den sehr tiefen Gabeltönen von 18 bis 28 Schwingungen, andererseits mit den tiefsten hörbaren Differenztönen beseitigt (a. a. O. S. 15). Freilich ist zu wünschen, dass man auch bei den tiefsten Zungentönen (nach Beseitigung der Obertöne) mittelst der Schwebungen die Tonhöhe exact bestimmte, aber die isolirten Grundtöne sind von zu kurzer Dauer für die Zählung oder auch nur deutliche Perception der Schwebungen.

Von Anfang an der Aussage des Ohres allein misstrauend habe ich aber schon früher durch Zählung der Schwebungen von Partialtönepaaren bei starkem Luftdruck die Genauigkeit der Stimmung meines Grundtöne - Apparates (a. a. O. S. 8) geprüft und so befriedigend gefunden, dass die angegebenen Schwingungszahlen der Grundtöne als durchaus zuverlässig anzusehen sind. Nichtsdestoweniger wünschte ich um den geäusserten Zweifeln noch bestimmter begegnen zu können, von einem competenten Beobachter meine Versuche an einem anderen Apparat wiederholt zu sehen und wendete mich deswegen an Herrn Alexander J. Ellis in London, welchem ein zweites Exemplar des Grundtöne-Apparates zur Verfügung steht. Er hatte die Freundlichkeit eine Reihe von Zählungen auszuführen und theilte mir darüber Anfangs October 1877 u. a. Folgendes mit:

R means Reed, and R 21 .. 25 means that the two reeds 21 and 25 were sounded together and gave beats.

R 21 .. 25, beat 4 in 1 sec., counted for 20 sec. Hence both of their lowest partials must have been effective.

R 20 .. 24, beat 4 in 1 sec., counted for 10 sec.

R 19 .. 23, beat 4 in 1 sec., counted for 20 sec.

R 17 .. 21, same beats.

R 16 .. 20, same beats quite distinctly.

R 15 .. 19, at first I lost the beats, but afterwards by getting R 15 well into action before R 19 was set on, and keeping on pumping, I got out the 4 in a second quite distinctly. Hence the lowest partial of R 15 was effective.

R 15 .. 17, here also I once heard 4 in a sec., and this must have been from the Octaves.

R 14 .. 16, I was quite unable to distinguish anything in the way of beats, but volleys



like a *feu de joie,* about a second in length, but impossible to count accurately; they may have been 2 in a sec. and I counted double. At the same time I seemed occasionally to hear a low beat, so low and gentle that I could not count it, and the great exertion of pumping the bellows full enough to keep these two low reeds in action, prevented accurate observation.

R 15 decidedly seemed flatter than R 13, so that I could have only heard the lowest partial of R 15 and the Octave of R 13.

On sounding R 14 and R 15 separately, I seemed to hear from each a very low tone more like a differential tone than anything else. This could also be heard even with R 13 and R 12, below the thumps, and even in R 11. It was necessary to pump constantly as the tone did not come out at first. In R 10 there was still something of the kind but it was a mere echo of sound.

At R 8 I heard only the sishing (a word invented to express the sound which was not exactly a hissing) of the escape of wind from the reed, 8 times in a second as I could count, and I also heard beats evidently arising from the higher partials, and also 8 in a second.

At R 9 there was the same kind of sishing and equally rapid beats. But in addition I seemed to hear a faint low tone, but what it was I will not venture to conjecture. I could hear nothing of the kind at R 8, and for R 9 it was only after the ear had listened for some time that I seemed to find it out, but once caught, I never lost it.

In R 10 there was no mistake as to the existence of such a musical tone.

For R 11 and R 12 it was still more distinct. But from R 10 to R 12 time was required to develop the sound. I filled the bellows quite full and let it run down.

At R 13 the tone was very distinct, and was quite a good musical tone at R 14, but the sish was still audible. Was this the lowest partial or its Octave?

At R 15 the tone continues to improve but the sishing has not disappeared and the beats always seem to keep time to the sish. I could keep the low tone well in my ear by pumping.

R 16 gave quite an organ tone, nothing like a hum or differential, but the sish and beats remain. I must have heard the lowest partial, and by continual pumping I was able to keep it in my ear.

R 17, the sish remains very rapid, but is clearly audible as fast as the beats, the low tone is very distinct, and just before the bellows had run down I seemed to hear a still lower tone.

R 18, the sish almost gone, or heard with difficulty and only at the first moment when the wind was strongest. Just at the last I heard the lowest tone.

R 19, the sish still slightly heard; the low tones good. I distinguished the lowest just at last.

R 18 .. 20, gave beats of 2 in a sec. very distinctly.

R 20, although the sish was still heard a little, the low tone became persistent, and I could keep the sensation quite clear by pumping.

Up to R 25 the sish could be heard at the commencement, but it rapidly disappeared. It feels as if the tone were getting gradually into practice. This effect continued up to R 22, after that the sish was scarcely brought out at all. In fact long before this the sish was made only at the first moment, and was rather a bubble than a sish.

In listening to the very low beats, the beats of the lowest partials as such could not be separated from the general mass of beats, but the 4 in a second were quite clear from R 15 .. 19. The lowest pair in which I was distinctly able to hear the bell-like beat of the lowest partials, distinct from the general crash was R 30 .. 34. But I fancied I heard it at R 28 .. 32.

I should say that between R 14 and R 15 was my limit, for at 15 I heard distinctly 4 beats in a second R 15 .. 19, but at R 14 .. 18 I could hear none. But I seemed to hear a faint low tone from R 14 as low as R 9. The sish was then distinctly broken into almost countable sishes. I almost suspect that what I heard before R 15 was the Octave.

R 18 .. 34 beat distinctly, but then it is the Octave of R 18, or 36 which beats with R 34.

R 14 .. 26 also beat, but this is again the Octave, and only shews that the Octave of R 14 is distinct.

R 10 .. R 22 also beat, but this is again the Octave of R 10, and this is what I heard most probably.

The preceding notes are almost a verbatim transcript of the short-hand notes I made at the moment after hearing each phenomenon, and were written within two hours afterwards. I thought it better to leave them totally unarranged and un-'cooked', as trustworthy records. A. J. E.

Aus diesen Angaben geht hervor, dass Hr. Ellis Folgendes hörte:

Schwingungen in 1 Sec.	
8	achtmaliges Hauchen, kein Ton
9 bis 14	erster Oberton 18 bis 28, kein Grundton
15, 16	erster Oberton, beim Ausklingen Grundton
17	ebenso: im lauten Klang überwiegt die Octave, am Ende der Grundton
18 bis 34	Grundton schon im Klang erkennbar

Diese Folgerungen bestätigte Herr Ellis später brieflich durchaus.

Die Schwebungszählungen stimmen gleichfalls ebenso wie die Hörbarkeitsgrenze bei 15 Schw. mit meinen Befunden genau überein. Die Wahrnehmbarkeit der einzelnen Obertöne im Klang ist darum werthvoll, weil man selbst in dieser Tiefe sehr wohl unterscheiden kann, dass beim Ausklingen der Zungen von 16 und 17 ein tieferer Ton erscheint, als der tiefste vorher hörbare Ton war. Dieser nur beim Abklingen isolirt wahrnehmbare leise dumpfe unvollkommene Ton kann nach allem Mitgetheilten nur der Grundton sein.

Meine früheren Angaben über die untere Tongrenze werden also bestätigt. Weniger als 15 Schwingungen in der Secunde geben keinen Ton. Bei 16 bis 24, also etwa 20 in der Secunde, beginnt schon die Reihe der Luftstösse zum Tone zu verschmelzen, vorausgesetzt, dass zwischen denselben keine Pausen stattfinden. Oberhalb 24 beginnt auch schon der musikalische Charakter solcher Basstöne. Hr. Appunn theilt mir z. B. mit, dass der Differenzton der zwei Gabeln von 111,3 und 83,45 Schw., welcher 27,85 Schw. hat „überraschend schön“ und „von wunderbarer Wirkung“ sei.

Auch wenn die erzeugenden Töne mehrere Octaven höher sind, höre ich diese tiefsten Differenztöne von 24 bis 32 mit frappanter Deutlichkeit.

Schliesslich ist noch als ein merkwürdiges Zusammentreffen zu erwähnen, dass Helmholtz selbst „etwa“ 20 Schw. in der Secunde als unterste Tongrenze 1865 und 1876 annahm[1]), ohne dass sich in seinen oder anderen Schriften, ausser meinen späteren, eine experimentelle Fixirung gerade dieser Zahl fände. Vielmehr gilt ihm 1877, da „bei B_2 (34 Schwingungen)“ kaum noch etwas zu hören war, und „schon das D_1 von 37 Schwingungen nur noch eine sehr schwache Tonempfindung“ gab, das Contra-E (mit 41 Schwingungen) als untere Grenze[2]) der musikalisch bestimmbaren Töne. Uebrigens kommt dem B_{II}, wenn D_I 37 Schwingungen

1) ‘Die physiologischen Ursachen der musikalischen Harmonie’ in „Populäre wissenschaftliche Vorträge“ 1. Heft. S. 64. Zweite Auflage 1876. Ebenso in der ersten Auflage, S. 64. 1865.

2) Lehre von den Tonempfindungen 4. Ausgabe 1877. Seite 294 und Seite 293.

hat, die Frequenz $29^3/_5$ zu (nicht 34 oder [1]) 31). Der tiefste Saitenton von 34 würde, wenn D_I 37 hat, dem Cis_I ($34^7/_{27}$) sehr nahe kommen und der von 31 dem H_{II} ($30^5/_6$) nahezu entsprechen. Alle diese Töne liegen also schon in der Nähe der Octaven der tiefsten überhaupt hörbaren Töne.

---

1) Lehre von den Tonempfindungen 1. Ausg. 1863. S. 267.

2) Um das Auffinden der jedem Tone zukommenden Schwingungszahlen zu erleichtern, dienen die Tabellen am Schlusse dieser Schrift. Die eine geht von a′ mit 440, die andere von a′ mit $426^2/_3$ aus, wodurch die c in ganzzahligen Potenzen von 2 ausgedrückt werden.

II.

COMBINATIONSTÖNE UND OBERTÖNE DER STIMMGABELN.

Den Ausdruck „Combinationston" hat G. U. A. Vieth[1]) (gest. 1836 in Dessau) eingeführt. Er bezeichnete damit den aus dem Zusammenklingen zweier Töne entstehenden dritten tieferen Ton, welcher „aus der Combination der Schwingungen" der beiden Töne entstehe. Resultirende Töne oder Combinationstöne heissen jetzt alle Töne, welche beim Zusammenklang wenigstens zweier Töne, und zwar nur bei diesem, entstehen.

Folgen sich die Stösse oder Schwebungen, welche ein Tonpaar gibt, so schnell, dass sie nicht mehr getrennt percipirt werden können, sondern eine Tonempfindung erzeugen, so heisst der aus ihrer Zusammenfassung resultirende Ton Stosston[2]). Diesen hört man am leichtesten. Seine Schwingungszahl ist nicht immer gleich der Differenz der Schwingungszahlen der primären Töne, z. B. geben die Stimmgabeln c^{III} und h^{IV} mit 1024 und 3840 g. Schw. nicht den Differenzton 2816, sondern deutlich c^{I} mit 256 Schw.[2]). Ein Combinationston, dessen Schwingungszahl gleich ist dem Unterschied der Schwingungszahlen der beiden erzeugenden gleichzeitigen Töne heisst nämlich Differenzton[3]). Er entsteht nur, wenn die primären Töne sehr laut sind, d. h. wenn die Schwingungsweiten derselben sehr gross werden. Ob Differenztöne Stosstöne sind, ist streitig.

1) Gilberts Annalen der Physik. 21. Bd. 1805. S. 265.

2) R. König in Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie 157. Bd. 1876. S. 180. 193. 194. 215.

3) Helmholtz in Poggendorffs Annalen 99. Bd. 1856. S. 518.

Ausserdem wird noch gehört ein Combinationston, dessen Schwingungszahl gleich ist der Summe der Schwingungszahlen der beiden primären Töne. Dieser heisst deshalb Summationston[1]). Er entsteht gleichfalls nur, wenn die primären Töne sehr stark sind.

In einer früheren Untersuchung[2]) war ich zu dem Ergebniss gelangt, dass zwar Differenztöne von Stimmgabeln verschiedenster Grösse sehr leicht hervorgebracht werden, nicht aber Summationstöne. Es gelang mir überhaupt nicht den Summationston zu hören, wenn die beiden primären Töne keine hörbaren Obertöne hatten. Dagegen hörte ich ihn sogleich bei Anwendung von Metallzungen mit grosser Deutlichkeit. Eine private Mittheilung von G. Appunn in Hanau gab eine Erklärung dieser Abweichung. Er bemerkte, dass sich der Summationston, dessen Schwingungszahl gleich ist der Summe der Schwingungszahlen der beiden erzeugenden Töne α und β (wo β höher als α) als Differenzton zweiter Ordnung auffassen lässt. Ein Differenzton erster Ordnung wird durch Subtraction des α von β erhalten. Bei den gleichfalls durch Subtraction allein resultirenden Differenztönen zweiter Ordnung ist der Minuend oder der Subtrahend oder jeder von beiden selbst schon ein Differenzton erster Ordnung und ersteren Falles einer der gegebenen zwei, drei, vier oder n Töne das andere Glied. Hat man nun ein Tonpaar α und β mit seinem ersten Obertönepaar 2α und 2β, so ist $\beta - \alpha$ ein Differenzton erster Ordnung, welcher immer leicht gehört wird, wenn α und β genügend stark sind. Ausser diesem hört man dann aber auch, wie ich mich mittelst der Metallzungenklänge oft überzeugt habe, deutlich die beiden Differenztöne zweiter Ordnung $2\alpha - (\beta - \alpha)$ und $2\beta - (\beta - \alpha)$. Ersterer ist $= (3\alpha - \beta)$, letzterer $= (\alpha + \beta)$, dem Summationston.

Hierdurch wäre nicht allein das Fehlen der Summationstöne bei Stimmgabeln ohne hörbare Obertöne befriedigend erklärt, da der Differenzton $2\alpha - (\beta - \alpha)$ nicht schwer bei den verschiedensten Tönen mit Obertönen zu hören und der vermeintliche Summationston $(\alpha + \beta)$ als $2\beta - (\beta - \alpha)$ dann ebenfalls deutlich ist, sondern es wird überhaupt die objective Existenz der Summationstöne zweifelhaft.

---

1) Helmholtz entdeckte die Summationstöne 1856. Pogg. Ann. 99. Bd. 1856. S. 518 und Monatsberichte d. K. Akad. d. Wiss. zu Berlin. 1856. S. 282.

2) Sitzungsberichte der Jenaischen med.-naturw. Gesellschaft vom 12. Juli 1878 in der Jenaischen Zeitschrift für Naturwissenschaft 1878.

Da aber die Theorie für den Fall nicht sehr kleiner Schwingungen nach Helmholtz das Auftreten von Summationstönen ebenso wie das der Differenztöne verlangt, so bemühte ich mich ihre Objectivität unabhängig von Differenztönen zweiter Ordnung darzuthun.

Ich wünschte mich zunächst zu vergewissern, ob die Differenztöne erster Ordnung, welche schon bald nach ihrer Entdeckung durch Sorge[1]), Romieu und Tartini für subjectiv erklärt wurden, auch unabhängig vom Ohre in der Luft entstehen können. Resonatoren dürfen deshalb zum Beweise der objectiven Existenz, d. h. der Entstehung ausserhalb des Ohres, in diesem Falle nicht verwendet werden, weil der Einwurf bleiben würde, dass die erst im Trommelfell oder anderen Ohrtheilen entstehenden Combinationstöne durch dieselben sich verstärkten. Kein Combinationston ist übrigens, wie ich mich überzeugte, im Stande einen Resonator zum Tönen zu bringen. Dasselbe fand R. König[2]).

Ich verwendete daher in der Erwartung die Combinationstöne hörbar zu machen mit äusserster Genauigkeit abgestimmte Stimmgabeln auf Resonanzkasten, welche von einer solchen Empfindlichkeit sind, dass sie nicht nur durch Sprechen, schnelles Hinsetzen oder Aufheben, sondern schon durch eine rasche Bewegung durch die Luft in tönende Schwingungen versetzt werden. Es ist deshalb eine überaus sorgfältige Vermeiduug aller dem Versuche fremder Schallquellen nothwendig. Man experimentirt am besten allein und Nachts, um sich gegen Täuschungen zu sichern, darf die Gabeln mit der Hand nicht berühren, dämpft sie mit einem Tuche und lässt sie vor jedem einzelnen Versuche ausruhen. Nur wenn man alle diese Vorsichtsmaassregeln streng beobachtet, hat es einen Sinn mit solch beispiellos empfindlichen Stimmgabeln zu arbeiten. Man erhält dann allein constante Resultate. Ich besitze nur sieben solcher (Hanauer) Gabeln mit den Schwingungszahlen

f^0	c'	f'	a'	c''	f''	g''
$170^2/_3$	256	$341^1/_3$	$426^2/_3$	512	$682^2/_3$	768

Bringt man nun den Resonanzkasten einer dem Differenzton eines

1) Vorgemach der musikalischen Composition oder Anweisung zum General-Bass. Lobenstein 1745. 1. Th. S. 13. Sorge hörte 1) $g'' - c'' = c'$; 2) $e'' - c'' = c^0$ und 3) $a'' - c'' = f'$, gibt aber irrthümlich für 2) c' und für 3) f^0 an. Auch andere verwechselten den Ton mit seiner Octave.

2) Poggend. Ann. 157. Bd. S. 221. 1876.

Gabelpaares entsprechenden Gabel in unmittelbaren Contact mit den beiden Resonanzkasten der erzeugenden oder primären Gabeln, und versetzt man letztere durch starkes gleichmässiges Streichen mit einem Contrabassbogen in anhaltende Schwingungen, so gelingt es — nach Ausschliessung der genannten Fehlerquellen — jedesmal einzelne Differenzgabeln zum Mittönen zu bringen, nämlich

c″ und f⁰ geben f′ oder 6 — 2 = 4
f″ „ f⁰ „ c″ „ 8 — 2 = 6
g″ „ c′ „ c″ „ 9 — 3 = 6

Dagegen gaben andere Paare niemals den objectiven Differenzton. Nicht das geringste Mittönen trat trotz der ausserordentlichen Empfindlichkeit der Differenzgabeln z. B. in folgenden Combinationen ein:

f″ — c″ = f⁰ oder 8 — 6 = 2
a′ — c′ = f⁰ „ 5 — 3 = 2
c″ — f′ = f⁰ „ 6 — 4 = 2
g″ — c″ = c′ „ 9 — 6 = 3
a′ — f⁰ = c′ „ 5 — 2 = 3
f″ — a′ = c′ „ 8 — 5 = 3
g″ — a′ = f′ „ 9 — 5 = 4
g″ — f′ = a′ „ 9 — 4 = 5
f″ — c′ = a′ „ 8 — 3 = 5

Da möglicherweise hier die Differenztöne aus irgend welchem Grunde schwächer wirkten, als in den ersten Fällen, so benutzte ich zu ihrer Erkennung die Methode von Helmholtz[1]), welche darin besteht, einen zu beobachtenden sehr schwachen Ton mit einem von wenig höherer oder tieferer Frequenz schweben zu lassen. Man kann sich leicht überzeugen, dass in der That selbst dann, wenn der eine Ton unhörbar geworden ist, er durch die Schwebungen noch erkannt wird. Aber auch dieses ungemein empfindliche Reagens gab — bei Vermeidung der Fehlerquellen — ein negatives Resultat. So lange die beiden erzeugenden Gabeln tönten, hörte man deutlich die Schwebungen im Ohr; unmittelbar nach ihrer Dämpfung verschwanden sie spurlos und auch die Beobachtung der Differenzgabel mit dem Resonator im Ohr liess nicht das leiseste Tönen wahrnehmen.

Um nun den auffallenden Unterschied des Ergebnisses von dem zuerst erhaltenen aufzuhellen, lag es nahe jeden der beiden

1) Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie 1856. 99. Bd. S. 514.

primären Töne in den drei positiven Versuchen allein auf die Differenzgabel wirken zu lassen. Es zeigte sich sogleich, dass die Gabel f^0 die f'-Gabel und auch die c''-Gabel für sich sofort in Schwingungen versetzte und dass die c'-Gabel die c''-Gabel gleichfalls schnell zum lauten Tönen brachte, so dass weder Resonatoren noch Hilfsgabeln, noch Annäherung des Ohres an den Resonanzkasten zur Perception erforderlich war.

Hierdurch ist dargethan, dass die Stimmgabeln harmonische Obertöne von beträchtlicher Intensität hören lassen, wenn sie stark schwingen (jedoch in allen Fällen nur die mit dem Bogen gestrichenen). Für die objective Existenz der Differenztöne dagegen ist kein Anhalt gewonnen worden, es sprechen sogar alle meine Versuche mit Entschiedenheit dafür, dass sie erst im Ohre selbst, sei es im Paukenfell, sei es in den Gehörknöchelchen, sei es im inneren Ohr zu Stande kommen, wie man früher annahm.

Doch zunächst die Obertöne der Stimmgabeln.

Allgemein wird behauptet, die Stimmgabeln hätten keine Obertöne oder ihre tiefsten Obertöne machten etwa 6mal so viel Schwingungen als der Grundton oder man höre ausser letzterem allenfalls noch die Octave. Gerade diese aber hörte Henrici[1]) nicht. Dagegen nahm er ausser einigen secundären Tönen (Nebentönen zweiter Art) nach Anschlagen mit einem eisernen Hammer den 1., den 3., und den 8. Theilton wahr, den dritten an 4 Gabeln (a^0, cis', cis', as'), den sechsten an keiner, den achten an 5 Gabeln (a^0, b^0, h^0, cis', as'). Ausserdem hörte er je einmal die Töne $2^7/_{10}$, $6^2/_5$ (wahrscheinlich Chladnis tiefsten Oberton $6^1/_4$), $7^1/_9$, $7^1/_5$, dreimal $2^{26}/_{27}$. Die Beobachtungen sind jedoch mangelhaft und die Methode des Anschlagens ungenau, die der Tonhöhenbestimmung garnicht angegeben.

Die ursprüngliche Angabe von Chladni[2]), dass der tiefste Oberton einer Stimmgabel sich zum Grundton verhalte wie $5^2 : 2^2 = 6^1/_4$, fand Helmholtz insofern bestätigt, als bei seinen Versuchen[3]) der Ton zwischen $5^5/_8$ (oder $5^4/_5$) und $6^2/_3$ lag. Seine Methode — Ermittelung der stärksten Mitschwingungen einer Saite von bestimmter Länge — gestattet eine solche Genauigkeit nicht, dass man nicht vermuthen dürfte, die richtige Zahl sei 6,25. Das arithmetische Mittel für die 5 Gabeln ist 6,1, für f' der Ton 6,25.

1) Poggendorff's Annalen 58. Bd. 1843. S. 265.
2) Die Akustik 1802. S. 112.
3) Poggendorff's Annalen 99. Bd. 1856. S. 505. 510.

Ferner hörte Helmholtz bei seinen Stimmgabeln (b^0, d', f', b', a'), wenn auch leise, die Octave des Grundtons mitschwingen, die auch Roeber wahrgenommen hatte. Von anderen harmonischen Obertönen spricht er nicht, erwähnt jedoch später, bei einer Gabel von 64 Schwingungen habe er mit Resonatoren die Obertöne bis zum fünften gehört [1]).

Um nach meinem Verfahren die niederen Obertöne von Stimmgabeln durch mittönende Gabeln hörbar zu machen, ist die genaueste Abstimmung beider erforderlich. Dann aber braucht man nur die den Oberton anzeigende Indicator-Gabel auf den Resonanzkasten der zu untersuchenden Gabel zu setzen, so genügt für die tieferen Töne ein einziger starker Strich über dieselbe mit dem Bassbogen, um nach Dämpfung der Gabel, die Indicatorgabel mit ihrem Grundton, d. h. dem gesuchten Oberton, tönen zu hören. So hörte ich vollkommen deutlich folgende Partialtöne der Hanauer Gabeln bei

Gabel f^0

1) f^0; 2) f' stark; 3) c'' stark; 4) f'' schwach

Gabel c'

1) c'; 2) c'' stark; 3) g'' stark

Gabel f'

1) f'; 2) f'' stark

und folgende der Pariser Gabeln (von R. König):

Gabel c^0

1) c^0; 2) c' schwach; 3) g' stark; 4) c'' deutlich

Gabel c'

1) c'; 2) c'' stark.

Der Controlversuch statt der Indicatorgabel eine verstimmte anzuwenden bestätigte in jedem einzelnen Falle die Richtigkeit des Ergebnisses, indem solche Gabeln tonlos bleiben.

Da wegen der Empfindlichkeit der Gabeln auch negative Befunde werthvoll sind, so mag hier besonders angeführt sein, dass von den 7 Hanauer Gabeln f^0 nicht im Geringsten einwirkte auf die Gabeln c', a', und auf g'' so schwach und unregelmässig, dass ich zweifle, ob dieser (unharmonische) Theilton von ihr hervorgebracht wird. Ferner lässt die c'-Gabel tonlos die Gabeln f', a', f''. Desgleichen bleiben, wenn f' stark und anhaltend tönt a', c'' und g'' vollkommen still; die Gabeln a', c'', f'', g'' versetzen keine andere von der Reihe in Schwingungen; überhaupt kann man eine

1) Lehre v. d. Tonempfindungen. 4. Ausgabe 1877. S. 263.

tiefere Gabel durch eine höhere nicht zum Mittönen bringen. Von den Pariser Gabeln wirken c' und e' nicht auf g', und g' nicht auf c'', sowie e' nicht auf c'', keine der genannten auf c^0.

Also die unharmonischen Indicatorgabeln konnten in der angegebenen Weise nicht zum Mittönen gebracht werden.

Bei der grossen Präcision derselben kann man es als sicher ansehen, dass unter den Theiltönen der Stimmgabeln, welche mit dem Bogen stark aber gleichmässig und schnell gestrichen werden, sich solche nicht befinden, welche

$1\frac{1}{8}$ $1\frac{1}{5}$ $1\frac{1}{4}$ $1\frac{1}{3}$ $1\frac{1}{2}$ $1\frac{3}{5}$ $1\frac{2}{3}$ $1\frac{4}{5}$ $2\frac{1}{4}$ $2\frac{1}{2}$ $2\frac{2}{3}$

mal so viel Schwingungen machen als der Grundton. Nur der äusserst schwache Ton $4\frac{1}{2}$ kann noch in Betracht kommen. Henrici hatte dagegen die Töne (Nebentöne zweiter Art)

$2\frac{1}{4}$ und $2\frac{1}{2}$ neben 1, 3, 8 und anderen

gehört, aber nicht beim Streichen, sondern Schlagen der Gabeln, welches ich sorgfältigst vermied.. In den Klängen der durch Streichen in Schwingungen versetzten Gabeln kommen constant vor die Theiltöne

1 2 3 4

was jeden Augenblick bewiesen werden kann. Es ist sogar gewiss, dass nicht einmal besonders starkes Erklingen der Gabeln erforderlich ist, die Duodecime des Grundtons zu geben. Dieselbe kann manchmal deutlicher als die Octave hervortreten. Die Doppeloctave ist meistens leise [1]).

Dieses Resultat, dass die für einfach gehaltenen Stimmgabeltöne allgemein 2, 3, 4 Theiltöne enthalten, wird bestätigt und erweitert durch die Analyse mittelst der Resonatoren.

Ehe ich aber die Ergebnisse derselben mittheile, muss ich hervorheben, dass alle Resonatoren, die kugeligen, die cylindrischen, und zumeist die konischen zunächst wie Hörröhren wirken und jeden Ton etwas verstärken können, und dass allein durch Übung bei leisen Tönen erlernt wird, ob ausser der Verstärkung durch verbesserte Zuleitung auch eine Resonanz stattfindet.

Da nun in vielen Fällen, wenn man den Resonator auch noch so sorgfältig handhabt, ihn vor Erwärmung in der Hand schützend und in möglichst langen Pausen verwendend, ein Zweifel bleiben kann, ob sein Ton in der untersuchten Tonmasse existirt oder

1) Bei diesen und den vorhin beschriebenen Beobachtungen erfreute ich mich des Beistandes der Herren Prof. Dr. L. Lichtheim und Dr. E. Valaoritis, für den ich beiden Herren meinen Dank gern auch öffentlich ausspreche.

nicht, so habe ich nur solche Beobachtungen als vertrauenswürdig angemerkt, bei welchen

1) die Stimmgabel so gleichmässig (und doch stark) gestrichen wurde, dass man nicht schon mit unbewaffnetem Ohr unharmonische Theiltöne hörte, was beim Anschlagen (auch wenn es nicht stark ist), jedesmal der Fall zu sein scheint;

2) der Resonator an die schwingende Zinke gehalten seinen Eigenton hören liess;

3) der Resonator am Ohr denselben Ton hören liess;

4) ein vom Ohr an die Gabel geführter Kautschukschlauch ohne Resonator abermals denselben Ton erkennen liess.

Dieses letztere Verfahren hat mir vortreffliche Dienste geleistet. Hat man einmal durch den Resonator einen bestimmten Ton erfasst, so hört man ihn auch ohne Resonator in der Tonmasse nachher leicht wieder heraus, wenn die Zuführung des Schalles in das Ohr begünstigt wird.

So wurden die bereits durch mittönende Stimmgabeln ermittelten Obertöne der Hanauer und der Pariser Gabeln wiedergefunden und ihnen neue hinzugefügt. Im Ganzen konnte ich mit 19 Kugelresonatoren, welche den Tönen 64 mal 2, 3, 4 ..... 20 Doppelschw. entsprechen, folgende Theiltöne der gestrichenen fünf Pariser Gabeln sicher erkennen:

(s. Tabelle S. 19)

Also waren von harmonischen Theiltönen hörbar

die Theiltöne	der Gabeln				
1	c^0	c'	e'	g'	c''
2	c'	c''	e''	g''	c'''
3	g'	g''	h''	d'''	.
4	c''	c'''	e'''	.	.
5	e''	e'''	.	.	.
6	g''	.	.	.	.
7	i''	.	.	.	.
8	c'''	.	.	.	.
9	d'''	.	.	.	.
10	e'''	.	.	.	.

Aber nur für die mit der grössten erzielbaren Gleichmässigkeit gestrichenen und stark schwingenden Stimmgabeln gilt diese Tabelle. Wenn man ungleichmässig oder zu schwach streicht, kann es leicht geschehen, dass man den einen oder anderen oder die Gesammtheit der harmonischen Obertöne nicht zu hören bekommt und sehr leicht tritt dann eine Reihe von unharmonischen

Resonatoren		Stimmgabel				
Schw.	Ton	c^0	c'	e'	g'	c''
2.64	c^0	1 sehr stark	—	—	—	—
3.64	g^0	$1^1/_2$ nicht	—	—	—	—
4.64	c'	2 stark	1 sehr stark	—	—	—
5.64	e'	$2^1/_2$ nicht	—	1 sehr stark	—	—
6.64	g'	3 stark	—	—	1 sehr stark	—
7.64	i'	$3^1/_2$ nicht	—	—	—	—
8.64	c''	4 deutlich	2 stark	—	—	1 sehr stark
9.64	d''	$4^1/_2$ zweifelhaft	—	—	—	—
10.64	e''	5 deutlich	—	2 stark	—	—
11.64	k''	$5^1/_2$ oft deutlich	—	—	—	—
12.64	g''	6 sehr deutlich	3 deutlich	—	2 stark	—
13.64	l''	$6^1/_2$ oft deutlich	—	—	—	—
14.64	i''	7 stark	—	—	—	—
15.64	h''	$7^1/_2$ nicht	—	3 sehr deutlich	—	—
16.64	c'''	8 deutlich	4 schwach	—	—	2 schwach
17.64	m'''	$8^1/_2$ nicht	—	—	—	—
18.64	d'''	9 sehr schwach	—	—	3 deutlich	—
19.64	n'''	$9^1/_2$ nicht	—	—	—	—
20.64	e'''	10 sehr schwach	5 schwach	4 schwach	—	—

Obertönen auf, welche auch niemals fehlt, wenn die Stimmgabel mit einem Hammer von Kork, Holz oder Eisen oder auch nur mit der Hand durch Schlagen in tönende Schwingungen versetzt wird. Ich hatte keine Veranlassung diese Töne näher zu untersuchen, welche bei der grossen c^0-Gabel sehr störten [1]). Ihre Bestimmung ist jedoch für die Theorie der Stimmgabel nothwendig. Ich bin durch die sehr häufige Beobachtung derselben zu der Überzeugung gelangt, dass jede Stimmgabel, wenn man sie auch noch so sorgfältig durch Streichen in gleichmässige Schwingungen zu versetzen sucht, in mehr als einer Schwingungsart schwingt. Ich stelle mir vor, dass der gebogene Stahlstab aus vielen Stahlstäben besteht, von denen einige mit zwei, andere mit mehr Schwingungsknoten zu gleicher Zeit schwingen. Vielleicht ist nur bei Anwendung passender Elektromagneten eine grössere Stimmgabel mit ihrer ganzen Masse streng in ein und demselben Schwingungsmodus zum Tönen zu bringen, so dass sie nur die harmonischen Obertöne gibt. Keinenfalls hat man beim Streichen und noch viel weniger beim Schlagen eine Garantie dafür, dass nur der eine allgemein angenommene Schwingungsmodus mit zwei Schwingungsknoten beiderseits nahe am Stiel allein verwirklicht sei, wenn auch das ungeübte unbewaffnete Ohr nur einen Ton hört.

Chladni [2]), welcher die verschiedenen Schwingungsarten der Stimmgabel entdeckte und auf dessen Autorität hin man den ersten Oberton derselben zum $6^1/_4$ fachen des Grundtons annahm, übersah die Existenz der harmonischen Obertöne 2, 3 und 4, obwohl er viel höhere unharmonische Obertöne erkannte und scheint an die Gleichzeitigkeit der verschiedenen Schwingungsarten nicht gedacht zu haben. Ich sehe aber keine andere Erklärung der Thatsache, dass z. B. die Gabel c^0 zugleich sehr deutlich ihren Grundton und h'', sowie höhere Töne, nach dem Anschlagen hören lässt.

Für die vorliegende Untersuchung ist festzuhalten, dass in keinem Falle die Stimmgabeln als frei von Obertönen angesehen werden dürfen, wenn sie stark schwingen und nicht einen sehr hohen Grundton haben. Wie hoch der Eigenton der Gabel sein muss um nicht im geringsten den ersten Oberton in die Perception treten zu lassen, wird sich erst dann ermitteln lassen, wenn eine Methode zur genauen Abstufung und Messung der Intensität

1) Besonders die lauten Töne $5^1/_2$, $6^1/_2$, $7^1/_2$, $8^1/_2$, $9^1/_2$ mal 128.
2) Die Akustik 1802. S. 113. 96. Taf. III.

der Tonschwingungen gefunden sein wird. Denn ob die Obertöne hörbar sind oder nicht, hängt in erster Linie von der Tonstärke ab. Ich finde, dass von vielen guten Beobachtern keiner im Stande ist die Zungentöne von 2048 bis 4096 Schw. von denselben bei Stimmgabeln zu unterscheiden, wenn beide nicht sehr stark sind. Wird das c^{IV} aber stark angegeben, dann ist der Unterschied eben merklich, weil nun ohne Zweifel der zweite Theilton bei der Zunge deutlicher als bei der Gabel wird.

Sicher wird man noch bei Stimmgabeln der dreigestrichenen Octave auf die harmonischen Obertöne zu achten haben. Nur wenn sie in leise Schwingungen versetzt werden, ist neben dem Grundton keine Spur von anderen Theiltönen wahrnehmbar.

Für die Frage nach der Objectivität der Combinationstöne ist diese Thatsache von grossem Belang. Die vermeintlichen Differenztöne (S. 14) f′ und c″ erweisen sich nunmehr als Obertöne. Im ersten Fall ist f′ der erste Oberton von f^0, im zweiten c″ der zweite von f^0, im dritten c″ der erste von c′. Den Beweis dafür liefert die Thatsache, dass die Gabeln f^0 und c′ für sich allein schon beziehlich die Gabeln f′ und c″ zum Mittönen bringen.

Hierdurch scheint mir, in Erwägung der ausserordentlichen Empfindlichkeit meiner Stimmgabeln der Beweis erbracht zu sein dafür, dass die Differenztöne bei Stimmgabeln erst innerhalb des Ohres entstehen. Sie werden auch durch Resonatoren objectiv nicht im mindesten verstärkt und die Angabe von Helmholtz, dass sie Membranen in Mitschwingungen versetzen können, ist nicht auf Stimmgabeln zu beziehen, sondern auf Sirenen. Diese eignen sich aber nicht zum Beweise der ektotischen Existenz der Differenztöne [1]).

Um die **Summationstöne** mittelst der Stimmgabeln wahrzunehmen, suchte ich durch starkes Streichen zweier eine dritte, deren Schwingungszahl gleich der Summe der Schwingungszahlen jener beiden war, zum Mittönen zu bringen. Ich war überrascht zu sehen, wie leicht der erste Versuch gelang. Die drei folgenden Combinationen liessen an Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig:

$f^0 + f' = c''$ oder $2 + 4 = 6$
$f^0 + c'' = f''$ „ $2 + 6 = 8$
$c' + c'' = g''$ „ $3 + 6 = 9$

Aber andere Combinationen fielen negativ aus, z. B.

1) König in Pogg. Ann. 157. Bd. 1876. S. 219.

$f^0 + c' = a'$ oder $2 + 3 = 5$
$c' + a' = f''$ „ $3 + 5 = 8$
$f' + a' = g''$ „ $4 + 5 = 9$

Man erkennt leicht, dass in den ersten 3 Fällen die vermeintlichen Summationstöne nichts als Obertöne sind; sie erscheinen wenn auch nur die eine der zwei Gabeln schwingt. Ja ich brauchte nur die Gabel f^0 tönen zu lassen, so tönten die Gabeln f' und c'' und f'' zugleich mit, und wenn die Gabel c' erklang, wurden die Gabeln c'' und g'' hörbar. Dagegen in den drei letztgenannten Fällen kein Mittönen, kein Summationston. Vielleicht würde man ihn durch passende Bewaffnung der Stimmgabeln mit Resonanzröhren während des Tönens hörbar machen können.

Die Beobachtung wäre jedoch nicht leicht. Denn auch die von Helmholtz[1]) als Summationstöne bezeichneten, bei Stimmgabeln, die mit Resonanzröhren versehen waren, wahrgenommenen Töne waren „nur sehr schwierig" zu hören.

Er hörte

Primäre Töne	Summationston	Verhältniss	Summationston
b^0 f'	d''	2 : 3	5
f' b'	as''	3 : 4	7
b^0 d'	c''	4 : 5	9

Da aber von ihm selbst die Hörbarkeit der Octave des Grundtons der Gabeln ausdrücklich constatirt[2]) wurde, so ergibt sich

$f'' - (f' - b^0) = d''$; $2.3 - (3 - 2) = 5$
$b'' - (b' - f') = as''$; $2.4 - (4 - 3) = 7$
$d'' - (d' - b^0) = c''$; $2.5 - (5 - 4) = 9$

Auch sonst ist kein Fall bekannt von dem Vorhandensein der Summationstöne ohne gleichzeitiges Vorhandensein der Octaven der beiden primären Töne.

Die von Helmholtz an der Sirene gehörten Summationstöne zweiter Ordnung[3]) können, da hier die Obertöne bekanntlich sehr stark sind, durch die zweiten und dritten Obertöne der beiden primären Töne entstanden sein.

Man hat nach seinen Beobachtungen neben zwei Sirenentönen vom Schwingungsverhältniss

1) Poggendorffs Annalen 99 Bd. S. 519. 1856.
2) Ebenda S. 506. 510.
3) Ebenda S. 521.

2 zu 3 den Ton $3.3-2 = 7 = 4.3-(3.3-4)$
2 „ 3 „ „ $3.3-(3-2) = 8 = 4.2$
3 „ 4 „ „ $3.4-(8-6) = 10 = 4.4-2.3$
5 „ 6 „ „ $3.6-(12-10) = 16 = 4.6-(3.6-2.5)$
4 „ 5 „ „ $3.5-(5-4) = 14 = 4.4-(2.5-2.4)$

Also nur hörbare Differenztöne hörbarer Töne ohne irgend eine Summation. Auch ist die Meinung, dass der Summationston, selbst wenn er mit einem Oberton zusammenfällt, erkannt werden könnte, nicht wohl zu begründen, denn C und c^0 geben (bei der Sirene) nicht darum g^0, weil $C+c^0=g^0$, sondern weil $c'-(c^0-C)=g^0$; die Verstärkung des g^0 beim Hinzutreten des c^0 zum allein angegebenen C (dessen zweiter Oberton $= g^0$) braucht also nicht auf dem Entstehen eines Summationstons g^0 zu beruhen.

Die übrigen Beobachtungen von Helmholtz sind nebst ihrer nunmehrigen Erklärung diese:

$C+G=e^0$ nämlich $g^0-(G-C)=g^0-C_I$
$G+e^0=c'$ „ $e'-(e^0-G)=e'-C$
$G+c^0=i^0$ „ $c'-(c^0-G)=c'-C_I$
$C+E=d^0$ „ $e^0-(E-C)=e^0-C_{II}$
$E+G=k^0$ „ $g^0-(G-E)=g^0-C_{II}$
$E+c^0=l^0$ „ $c'-(c^0-E)=c'-G_I$

oder in Zahlen

$4+6=10=12-(6-4)=18-(12-4)$
$6+10=16=20-(10-6)=30-(20-6)$
$6+8=14=16-(8-6)=24-(16-6)$
$4+5=9=10-(5-4)=15-(10-4)$
$5+6=11=12-(6-5)=18-(12-5)$
$5+8=13=16-(8-5)=24-(16-5)$

Ebenso erklären sich die Summationstöne des Harmonium und des Obertöneapparates und Tonometers von Appunn, welche zum Beweise der Gleichung $\alpha+\beta=n\beta-[(n-1)\beta-\alpha]$ besonders geeignet sind wegen der Stärke der Obertöne [1]).

Deshalb ist aber die von R. König [2]) ausgesprochene Meinung, wo viele Obertöne seien, könnten diese ausreichen allemal die Summationstöne dadurch zu erklären, dass sich immer zwei Ober-

1) Um sicher zu gehen, lasse ich beim Obertöne-Apparat mit dem ‚Summationston' einen anderen von einer um 1, 2 oder 3 Schwingungen geringeren Frequenz schweben und stelle diese Hülfstöne her 1) durch unvollständiges Ausziehen der Schieber, wodurch der jedem Schieber entsprechende Grundton ein wenig vertieft wird, 2) durch Stimmgabeln.

2) Poggendorffs Annalen der Physik u. Chemie. 157. Bd. 1876. S. 217.

töne fänden, deren Differenz $= \alpha + \beta$ sei, doch nicht ausreichend. Denn wenn auch für die durch die kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückten Intervalle diese Erklärung in einzelnen Fällen zutreffen kann, so wird doch Niemand behaupten wollen, dass z. B. beim Intervall 31 : 33 der Summationston 64 so erzeugt werde. Es müsste nämlich in diesem Falle der 32. Theilton in Anspruch genommen werden, um die Differenz 64 zu geben. Und dass man diese Obertöne nicht hört, wo der Summationston auftritt, steht fest. Ich hörte z. B. den Ton 1024 als ich die Zungenklänge 496 und 528 angab. Die 32. Theiltöne wären 16896 und 15872, deren Differenz $= 1024$, aber sie sind unhörbar, während alle Glieder der Tongleichungen

$$2 \cdot 528 - (528 - 496) = 1056 - 32 = 1024$$
$$3 \cdot 528 - (2 \cdot 528 - 496) = 1584 - 560 = 1024$$

leicht nachgewiesen werden. Die sämmtlichen den Summationston betreffenden Beobachtungen von R. König, namentlich auch diejenigen, aus denen er glaubt die Existenz desselben unabhängig von Obertönen und Differenztönen dargethan zu haben, erklären sich einfach in der obigen Weise; ebenso die auffallende Angabe von der Wahrnehmung wahrer Summationstöne dritter Ordnung bei Stimmgabeln. Z. B. hört König (S. 220) bei c′ : g′ (2 : 3) deutlich 5 (e″) und 7 (e″ + c′) und 8 (e″ + g′) und 9 (d‴), sowie 10 (e‴) und 11; letztere mit Hülfsgabeln, die Schwebungen mit den gesuchten Tönen geben. Man hat aber, wie ich vorhin nachgewiesen habe, hier die Theiltöne

2 4 6 8 oder c′ c″ g″ c‴

und 3 6 9 12 oder g′ g″ d‴ g‴

also von den „Summationstönen“ unmittelbar gegeben 8 und 9, und 5 ist 8 − 3); $7 = 9 - 2$; $10 = 12 - 2$; $11 = 12 - (3-2)$. So erklärt sich auch, dass man, wie König angiebt, bei c′ : e′ (4 : 5) die Töne 9, 13, 14, 17, 18, 19 hören kann, welche er als wahre Summationstöne höherer Ordnung auffasst, welche aber sämmtlich als Differenztöne zweiter Ordnung sich darstellen, wenn die beiden Grundtöne nur jeder den dritten Oberton (vierten Theilton) noch geben, wie es der Fall ist nach meinen Versuchen an Königs Gabeln [1]). Aus der Bemerkung (S. 219), dass die Stimm-

1) Man hat nämlich $9 = 2.5 - (5-4)$; $13 = 3.5 - (10-8)$; $14 = 3.5 - (5-4)$ und $= 4.4 - (10-8)$; $17 = 4.5 - (15-12)$; $18 = 4.5 - (10-8)$; $19 = 4.5 - (5-4)$ und zugleich wenn der 7. Oberton mithinzugenommen wird: $9 = 5.5 - 4.4$; $13 = 5.5 - 3.4$; $14 = 6.5 - 4.4$; $17 = 8.4 - 3.5$; $18 = 7.4 - 2.5$; $19 = 6.4 - 1.5$.

gabeltöne einfach seien, folgt, dass König selbst damals diese Thatsache nicht kannte. Seine sämmtlichen Beobachtungen müssen ihr aber Rechnung tragen, zumal er seine mächtigen Stimmgabeln sehr stark schwingen liess, wodurch das Zustandekommen der Obertöne und der Differenztöne derselben ungemein begünstigt wird.

Also auch durch die umfangreichen Untersuchungen von König ist die Existenz der Summationstöne als solcher nicht wahrscheinlich gemacht.

Es bleibt überhaupt nur noch ein Zeugniss zu ihren Gunsten bestehen, die von Helmholtz berechnete Formel[1]), denn der einzige von ihm mitgetheilte Versuch[2]) durch eine mit Sand bestreute Membran die Existenz des Summationstons objectiv zu beweisen, entzieht sich der Kritik, weil die beiden ihn erzeugenden Töne nicht angegeben sind. Auch scheint die Ansammlung des Sandes an der Peripherie der Membran nicht zum Beweise, dass dieselbe einzig den Eigenton e′ gab, auszureichen[3]).

Was aber die mathematische Ableitung betrifft, welche zur Aufsuchung von Summationstönen führte, so gibt dieselbe nicht allein vollständige Auskunft über die Entstehung derselben, sondern sie erklärt auch das Zustandekommen der Differenztöne niederer und höherer Ordnung und das Auftreten von Obertönen, welche 2, 3 ... n-mal soviel Schwingungen machen, als der Grundton in denjenigen Fällen, wo die Amplitude des letzteren sehr gross ist. Überhaupt geht Helmholtz von der Voraussetzung aus, dass Combinationstöne jedesmal entstehen, wenn die Amplituden nicht mehr, wie es bei ungestörter Superposition

1) Poggendorff's Annalen 99. Bd. 1856. S. 534.

2) Ebenda S. 539.

3) Einen experimentellen Beweis für die ektotische Existenz der Summationstöne können auch die zu anderen Zwecken von R. König (S. 229) angestellten sinnreichen Versuche nicht liefern. Denn im Sinne der Helmholtzschen Deduction sind die „Variationstöne" wesentlich verschieden von den eigentlichen Differenz- und Summationstönen. Wenn 512 Schwingungen 128-mal in der Secunde unterbrochen werden und man hört dann 640 (= 512 + 128) so ist 640 kein Helmholtzischer Summationston, weil seine Componenten unähnliche Töne wären. Auch könnte der ausdrücklich hierbei als hörbar erwähnte Ton 384 (= 512 — 128) mit dem ersten Oberton von 512 ihn nicht erzeugen (1024 — 384 = 640), weil die Variationstöne auch in den Fällen ganz laut auftreten, in denen der Unterbrechungston kaum oder garnicht gehört wird. Die Variationstöne erklären sich einfach nach Helmholtz (Lehre v. d. Tonempf. 4. Ausg. S. 661 unten, nur dass auch m als Ton gehört wird).

der Wellen zutrifft, gegen die Dimensionen des schwingenden Körpers unendlich klein sind. Er zeigt, dass wenn die durch die Verschiebungen hervorgebrachten Bewegungskräfte diesen Verschiebungen nicht mehr proportional sind, und man die Quadrate der Verschiebungen als von Einfluss auf die Grösse der Bewegungskräfte mit in Rechnung bringt, Systeme von Schwingungen entstehen, welche den Combinationstönen entsprechen. Dabei stellt sich heraus, dass Summationstöne nur zugleich mit Differenztönen und Obertönen entstehen und dass die Differenztöne am stärksten, die Obertöne am schwächsten sein müssen.

Da aber, wie ich gezeigt habe, Töne von der Höhe der Summationstöne nur da entstehen, wo die Obertöne stärker sind als die Summationstöne, da ferner die letzteren überall als Differenztöne zweiter Ordnung und z. Th. als Differenztöne von Obertönen sich völlig ungezwungen auffassen lassen, da endlich die objective Existenz beider Arten von Combinationstönen nicht erbracht ist, sofern sie ausserhalb des Ohres weder die Luft der Resonatoren, noch die allerempfindlichsten ungemein leicht ansprechenden Stimmgabeln zum Mittönen zu bringen vermögen, so erscheint es berechtigt die mathematische Deduction einstweilen nur als eine Darlegung der theoretischen Möglichkeit von Combinationstönen im Helmholtz'schen Sinne anzusehen, für deren empirische Verification, wenn sie auch unter ganz besonderen noch nicht hergestellten Bedingungen vielleicht in der Zukunft gegeben werden sollte, bis jetzt kein Anhalt vorliegt.

Um so mehr ist man befugt diese Möglichkeit bei der Erklärung des Zustandekommens der Combinationstöne bis auf Weiteres nicht als die einzige gelten zu lassen, als auf anderem Wege sich eine, wie mir scheint, befriedigende Erklärung anbahnen lässt, eine Erklärung, welche zunächst auf der bekannten schon von Thomas Young in ihren wesentlichen Grundzügen skizzirten und von Scheibler 1834 acceptirten fusst und besagt: alle Combinationstöne sind Stosstöne.

Bekanntlich geben zwei Töne, deren Schwingungszahlen wenig von einander abweichen, Stösse oder Schwebungen, die *Pulsus* der früheren Autoren. Die Zahl dieser Stösse ist nicht in allen Fällen genau gleich der Differenz der Schwingungszahlen der zwei Töne. Aber solange diese Differenz klein ist, trifft die Regel zu, so lange zählt auch das Ohr die Schwebungen bequem; nimmt sie zu, dann empfindet man, ohne die Stösse zählen zu können, eine Rauhigkeit, ein Dröhnen, ein Gerassel, einen discontinuirlichen oder in-

termittirenden Schall, ein Knarren, bei hohen Tönen ein Schwirren, in jedem Fall bis zu einer gewissen Grenze, welche nach Helmholtz und König und Anderen keinenfalls höher als 150 in der Secunde liegt, etwas von einem Differenztone verschiedenes. Um so deutlicher wird diese Verschiedenheit wahrgenommen, als neben den Intermittenzen sehr leicht von 32, manchmal sogar von 24 an, der sogenannte erste Differenzton gehört wird. Ich verdanke diese mir früher zweifelhafte jetzt unzweifelhafte Wahrnehmung Herrn Dr. König in Paris, mit dessen vorzüglichen Instrumenten man sich leicht überzeugt, dass z. B. zwei Stimmgabeln von 2048 und 2012 36 Stösse und zugleich den Stosston D_I von 36 Schwingungen geben, und dessen Gabeln 4096 und 3968 sowohl das nachweisbar von den 128 Stössen herrührende Schwirren wie den Ton c^0 vollkommen deutlich hören lassen (S. 225). Wenn aber in irgend einer Lage die Zahl der Schwebungen erheblich über 128 wächst, dann verliert sich die Rauhigkeit und der Stossston allein tritt deutlich hervor bis wieder ein Abstand der beiden primären Töne erreicht wird, bei dem derselbe nur schwach ist und seltenere (auch schwächere) Stösse auftreten. Die Anzahl der letzteren ist, wie Helmholtz sehr richtig bemerkt[1]), durch die Obertöne bestimmt.

Sie fügt sich auch der Ohm'schen Formel, welche unten erörtert wird.

Helmholtz erklärt nun die Differenztöne für etwas von den vereinigten Stössen wesentlich verschiedenes. Von den drei Gründen[2]) zum Beweise dieser Verschiedenheit ist jedoch gegenwärtig keiner mehr stichhaltig. Er bemerkt nämlich gegen die Existenz der Stosstöne, d. h. gegen die Ansicht, dass wenn die Stösse schnell genug aufeinanderfolgen, die einzelnen Schwellungen der Tonstärke geradeso wie es ebensoviele gewöhnliche einfache Luftstösse thun würden, die Empfindung eines neuen Tones hervorbringen, dessen Schwingungszahl der Zahl der Schwebungen gleich wäre:

1) Es soll diese Ansicht die Entstehung der Summationstöne nicht erklären, sondern nur die der Differenztöne.

Da aber die Summationstöne sehr wohl Differenztöne zweiter Ordnung und z. Th. Differenztöne von Obertönen sein können und ein empirischer Beweis für ihre Existenz unabhängig von diesen nicht geliefert wurde, so fällt dieser Grund fort.

1) Lehre von den Tonempfindungen 4. Ausg. 1877. S. 263.
2) Ebenda S. 259. 278.

2) Die Combinationstöne (Differenz- und Summationstöne) existiren objectiv unabhängig vom Ohr, welches die Schwebungen zu einem neuen Ton addiren soll.

Der Beweis für die objective Existenz unabhängig vom Ohr ist, wie ich zeigte, nicht geliefert, denn die empfindlichsten Reagentien auf objective Töne versagen hier; aber auch wenn der Beweis erbracht wäre, würde dadurch nur dargethan sein, dass es ausser dem Ohr noch andere Instrumente gibt, welche die Fusion der Schwebungen zu bewirken im Stande wären. Also fällt auch der zweite Gegengrund.

3) Diese Ansicht lässt sich nicht mit dem durch alle übrigen Erfahrungen bestätigten Gesetze vereinigen, demzufolge das Ohr nur diejenigen Töne empfindet, welche einfachen pendelartigen Schwingungen der Luft entsprechen.

Hiergegen, d. h. gegen das Gesetz, sprechen entscheidend direct Versuche von König[1]). Wenn man nämlich eine horizontale Scheibe, an deren Peripherie gleich grosse und gleich weit von einander abstehende Löcher gebohrt sind, mit constanter Geschwindigkeit über einer Stimmgabel rotiren lässt, so hört man sehr deutlich ausser dem Gabelton noch einen von dessen Höhe unabhängigen Unterbrechungston, dessen Höhe bestimmt ist durch die Zahl der in gegebener Zeit über der Gabel vorübergehenden Oeffnungen. Also entsteht hier ein wahrer, wie ich mich selbst überzeugt habe, sehr deutlicher Ton dadurch, dass nacheinander mehrere Tonstösse mit Pausen auf das Ohr wirken. Ob durch jedes Loch viele oder wenige Schwingungen gehen, ändert innerhalb weiter Grenzen an der Höhe des Unterbrechungstones nichts, wenn nur eine oder mehr als eine Welle durchgeht. Also ist bewiesen, dass die periodische Unterbrechung eines Tones oder Klanges einen neuen Ton von derselben Frequenz wie die Intermittenzen erzeugt. Demnach empfindet das Ohr auch Töne, welche

1) Pogg. Ann. 157. Bd. 1876. S. 228. Betrug die Löcherzahl 128 in der Sec. der Gabelton 512, so wurde der Ton 128 = c^0 schwach gehört. Bei den Gabeln e'', g'', i'', c''', c^{IV}, c^V, wurde der Unterbrechungston c^0 immer deutlicher. In der ersten Versuchsreihe „ist die Unterbrechungszahl immer 128 (ut_3) und die angewendeten Gabeln waren ut_3 mi_3 sol_3 ut_4 mi_4 sol_4 ut_5 ut_6 ut_7; in der zweiten Reihe von Versuchen blieb einmal die Gabel ut_3 und einmal die Gabel ut_3 immer unverändert, während die Zahl der Unterbrechungen auf $ré_3$ mi_3 fa_3 sol_3 la_3 si_3 und ut_3 getrieben wurde" (Briefliche Mittheilung). Der Unterbrechungston blieb constant so lange die Unterbrechungszahl in der Zeit sich gleich blieb; er kam aber nicht zu Stande, wenn dieselbe grösser als die Schwingungszahl der Gabel war.

nicht pendelartigen Schwingungen der Luft entsprechen, sondern durch rhythmische Unterbrechung solcher erst gebildet werden. Der dritte Gegengrund ist somit nicht stichhaltig.

Aus dieser Beseitigung der Gegengründe ergibt sich die Berechtigung die Differenztöne als Stosstöne zu bezeichnen, d. h. Töne, welche durch Fusion der genügend schnell aufeinanderfolgenden Schwebungen zweier simultanen Töne entstehen, die also auch Schwebungstöne oder Interferenztöne heissen könnten. Es spricht wenigstens durchaus nichts dafür, dass Differenztöne nicht Stosstöne sind. Und ich werde, so lange keine Thatsache bekannt wird, welche es verbietet, von nun an beide identificiren.

Physiologisch lässt sich das getrennte Wahrnehmen von 24 bis gegen 130 Stössen in der Secunde neben dem Ton von ebensoviel Schwingungen meines Erachtens leicht verstehen, wenn man annimmt, dass die zum Ton verschmolzenen Schwebungen wie jeder Ton nur durch die Endigungen des Hörnerven in der Schnecke, die nicht zu frequenten dröhnenden, knarrenden, schwirrenden, rasselnden, rollenden, rauhen unverschmolzenen Schwebungen dagegen durch andere Theile des inneren Ohres percipirt werden. So würde es begreiflich, dass weniger als 16 Stösse keinen Ton geben, sondern einzeln gehört werden, dass 24—130 sowohl discontinuirliche Schwebungsempfindungen als auch Töne geben, da die Schnecke nun mit in Action träte und endlich, dass mehr als etwa 130 Stösse in der Secunde nur durch den Schneckennerven, somit als Ton zur Perception gelangen, indem die betreffenden noch näher zu bestimmenden Vorhofsnervenfasern mit zu trägen Endapparaten versehen wären.

Zu Gunsten dieser Hypothese können schon viele Beobachtungen von König[1]) angeführt werden, namentlich die Thatsache, dass in jeder Höhe nur 1 bis 16 Stösse ganz getrennt gehört werden (aber 10 bis 16 sind oft nicht mehr einzeln deutlich vernehmbar), also wo die Tonempfindung der Pendelschwingungen beginnt (von 16 an) die Fusion der Schwebungen gleichfalls eintritt. Von 10 bis 16 an wird die Empfindung des „Rollens“ („einfaches Rollen“ 10 bis 28, „deutliches Rollen“ 20 bis 36) oder „Rasselns“ deutlich („lautes Rasseln“ 13 bis 38, „Rasseln“ 10 bis 48). „Schwächeres Rasseln“ geben 26 bis 38 Stösse, „verworrenes

1) Ich beziehe mich hier auf die Angaben in den Columnen E und F der Tabellen über den akustischen Eindruck der Stösse für alle Lagen zwischen 40 und 4000 Schw. (Pogg. Ann. 1876. 157. Bd. S. 203 bis 215).

Rasseln“ 20 bis 48, „verworrenes und schwaches Rasseln“ 18 bis 40, „schwaches Rasseln“ 52 bis 68 (nur ein einzigesmal auch 16). „Rauhigkeit, Rauhheit“ wurde immer empfunden bis 85, von 88 an aber der Stosston schon oft ohne Rauhigkeit gehört. Da nun einerseits bei 64 das C schon deutlich als Ton neben dem schwachen Rasseln oder der Rauhigkeit auftritt und auch bei 32 neben dem stärkeren Rasseln oder Rollen der Ton percipirt werden kann, andererseits mit der Zunahme der Stosszahl der Stosston immer glatter wird (jenseit 128 ganz glatt), so ist es wahrscheinlich, dass die in der Luft objectiv, z. B. optisch oder graphisch, nachweisbaren Coincidenzen, welche Schwebungsempfindungen geben, im inneren Ohre zweierlei verschiedene Angriffspuncte finden, wie ja auch die Pendelschwingungen der Stimmgabel, welche nicht zu klein ist, zugleich eine Tonempfindung, eine Tastempfindung und eine Gesichtsempfindung veranlassen können, wenn man sie anhört, anblickt und mit der Fingerspitze leise berührt. Da die Schnecke des Ohres, welche sich später als die übrigen Nervenendapparate desselben aus dem allgemeinen Tastorgan entwickelt haben muss, allein die Tonempfindung vermittelt, so würden Wirbelthiere ohne Schnecke, wie die meisten Fische, nur einen Angriffspunct bietend, zwar Schwebungen, aber nicht Töne als solche hören können.

Bei den mit einer Schnecke versehenen Thieren würde jeder einmalige oder in Pausen von mehr als $^1/_{16}$ Secunde sich wiederholende Schall-Stoss noch besonders durch andere Theile des inneren Ohres als diese percipirt werden, welche eben lediglich der Tonempfindung dient. Man kann zwar einen grossen Theil der Geräusche aus Tönen zusammensetzen, bedarf also zu deren Wahrnehmung keiner besonderen Endorgane, einen Theil aber kann man nicht aus Tönen zusammensetzen, z. B. das Knistern des elektrischen Funkens, das Knacken des Magnetstabes im Bell'schen Telephon beim geräuschlosen Schliessen und Oeffnen eines durch den Telephondraht gehenden elektrischen Stromes, ferner gewisse Arten des Donners, das Knallen und Zischen. Kurz man würde nach Ausschluss allein des *Nervus cochleae* noch viel hören können, aber keine Töne mehr.

Wenn dagegen allein dieser Nerv fungirte, würde man alle Töne, alle aus Tönen erzeugbaren Geräusche und Klänge, nicht aber die einzelnen Luftstösse hören. Also wenn zwei einfache Töne schweben, würde man zwar die Töne, falls sie stark genug sind, wahrnehmen, auch das Anschwellen und Abnehmen der Tonstärke, nicht aber bei den Coincidenzen der Wellenberge und Wellen-

thäler die neue Schallempfindung des Rasselns oder Rollens haben, und erst nachdem die objectiven Coincidenzen (Schwebungen) die Zahl von mehr als 16 bis 24 in der Secunde erreicht haben, würde man sie als Stosston, aber ohne Rauhigkeit hören.

Nach dieser Auffassung muss jede regelmässige genügend schnelle Unterbrechung eines Tones eine neue Tonempfindung geben, weil dieselbe das Trommelfell in neue regelmässige schnelle Schwingungen versetzt und beim objectiven Hören in der Luft nur Trommelfellschwingungen den Tetanus der Schneckennervenenden bedingen. Wird hingegen ein reiner Ton in längeren Pausen unterbrochen, so tritt je nach der Dauer der Unterbrechung und der Höhe und Stärke des Tones deutlich oder undeutlich eine Abnahme und Zunahme der durch die Schneckennerven vermittelten Tonempfindungsstärke allein ein, ohne das charakteristische Wogen der Schwebungsempfindung.

Zwei mögliche Einwände gegen diese ganze Auffassung seien noch berührt. Man könnte geltend machen, dass die nicht in der Schnecke endigenden Hörnervenfasern durch zahlreiche Experimente als Theile des Organes eines Gleichgewichtsinnes erkannt seien, da die Verletzung oder Durchschneidung der Bogengänge Störungen der Coordination zur Folge habe, dass also nur die Schnecke Gehörorgan sei. Indessen hat Anna Tomaszewicz in einer vorzüglichen Arbeit[1]) gezeigt, dass nicht der geringste Grund vorliegt die nach Verletzung der Bogengänge eintretenden Bewegungen für etwas anderes als Folgen starker abnormer subjectiver Schallempfindungen nach der Operation aufzufassen, dass überhaupt die isolirte Verletzung einzelner bestimmter Theile des Ohrlabyrinths ohne Reizung dicht anliegender Gehirntheile unausführbar ist, dass saubere intracranielle totale Durchschneidung des *Nervus acusticus* nur Taubheit und gewisse Lähmungserscheinungen, aber keine Coordinationsstörungen zur Folge hat, dass bei angeborener Taubheit weitgehende Defecte der Bogengänge ohne Bewegungsstörungen vorkommen (während bei intacten Bogengängen Bewegungsstörungen sehr häufig sind), dass alle nach Verletzung der Bogengänge beobachteten Bewegungsstörungen auch nach Kleinhirnverletzung beobachtet wurden, dass endlich die Bogengänge sehr wohl geeignet scheinen die Richtung, aus der ein Schall kommt

1) Beiträge zur Physiologie des Ohrlabyrinths. Medic. Inauguraldissertation. Zürich 1877. Vgl. den von Charcot (*Leçons sur les maladies du système nerveux.* 2. Bd. Paris 1877. S. 313) beschriebenen instructiven Fall der Ménièreschen Krankheit.

percipiren zu lassen, d. h. die Ursache zu jedem gehörten Schall (wie beim Licht) in einer bestimmten Richtung suchen oder in eine bestimmte Gegend im Raume verlegen zu lassen.

Aber selbst wenn die Wiederherstellung der akustischen Function der Ampullarnerven, welche übrigens von Seiten der Entwicklungsgeschichte und vergleichenden Anatomie keinen Augenblick fallen gelassen wurde, nicht eine unbedingte sein sollte, würden immer noch die Saccularnerven disponibel sein zur Erklärung des Rasselns und der Rauhigkeit oder des Schwirrens bei 10 bis 130 Schwebungen, deren Stosston gleichzeitig die Schnecke percipirt.

Der andere Einwand sagt: wenn auch nicht alle Geräusche zur Zeit sich aus einfachen pendelartigen Schwingungen ungleicher Frequenz und Stärke künstlich zusammensetzen lassen, so ist doch einerseits die Zahl der vollendeten akustischen Synthesen dieser Art und die Zahl der durch die Resonatoren bewirkten akustischen Analysen von Klängen und Geräuschen gross genug, um die Annahme zu rechtfertigen, dass alles Hörbare nur aus Pendelschwingungen bestehe oder wenigstens alles Hörbare allein durch die Erregung der Schneckennerven zu Stande kommen könne. Namentlich hat Siegmund Exner[1]) scharfsinnig gezeigt, dass auch solche Geräusche, an denen, wie am einmaligen elektrischen Knistern, eine bestimmte Tonhöhe nicht wahrgenommen wird, allein durch die Cochlea zur Perception kommen können. Aber damit ist durchaus nicht bewiesen, dass diese Möglichkeit für alle Geräusche auch wirklich sei. Thiere ohne Schnecke müssten dann taub sein. Nun sind zwar die meisten Fische stumm und nicht mit scharfem Gehör begabt, wie die Angler wohl wissen, jedoch taub sind sie nicht. Aber abgesehen von dieser wichtigen Thatsache, dass Wirbelthiere ohne Schnecke hören, muss nach der ungemein wahrscheinlichen und allgemein angenommenen, von Helmholtz begründeten Theorie mitschwingender Theile im inneren Ohre jede Erregung eines einzelnen Nervenendes in der Schnecke eine Tonempfindung geben. Wenn also einzelne durch Pausen getrennte starke Impulse Gehörsempfindungen geben wie es der Fall ist, so müssten diese nur aus Tonempfindungen bestehen, was nicht der Fall ist, wenn die Impulse einfach sind. Vielmehr geben schon weniger als 16 starke

1) Im Archiv f. die gesammte Physiologie des Menschen und der Thiere. Bonn. 13. Bd. 1876. S. 228.

einfache Impulse [1]) Schallstossempfindungen, ähnlich wie die Schwebungen (S. 4 unten). Und wenn auch von einem Tone 1 bis 2 Schwingungen (von weniger als $^1/_{16}$ Sec. Dauer) genügen die entsprechende Faser der Schnecke zu erregen [2]), so kann doch nicht eine Reihe von einzelnen starken Stössen, deren jeder mehr als $^1/_{16}$ Secunde Dauer hat, dasselbe leisten; denn man hört sie einzeln und nicht als Töne. Es werden also der Theorie zufolge diese Schallstösse nicht Schneckenfasern erregen. Sie wirken nicht erregend auf dieselben, weil sie nicht frequent genug sind und nicht schnell genug ablaufen. Die Endigungen des Vorhofsnerven scheinen dagegen wohl geeignet durch starke und seltene und langsam ablaufende Trommelfellschwingungen erregt zu werden. Nur durch eine solche Heranziehung anderer Hörnervenfasern, als der des Cochlearastes scheint es mir verständlich, dass man, wie experimentell feststeht, neben den nicht zu seltenen, zu langsamen, aber noch discontinuirlich wahrnehmbaren Schwingungen des Tympanum (Schwebungen zweier Töne oder Schwingungen eines Tones) den ihrer Anzahl entsprechenden Ton hört. Dabei ist die minimale Zahl der zu einem Ton verschmolzenen Schwebungen zweier Töne genau dieselbe, wie die der zu einem tiefsten Tone erforderlichen Pendelschwingungen, also der tiefste Combinationston so tief wie der tiefste Ton.

Fragt man nun wieviele Combinationstöne möglich und wieviele hörbar sind, wenn ein Tonpaar für sich oder mit seinem ersten Obertönepaar gegeben ist, so wird man am sichersten sein keinen der möglichen Töne zu übergehen, wenn man alle zwischen den gegebenen Schwingungszahlen möglichen Differenzen als Differenztöne erster, zweiter, n-ter Ordnung ausrechnet. So gross

1) In meiner Schrift „Über die Grenzen der Tonwahrnehmung“ (1876. S. 13) hatte ich gesagt, dass weniger als 14 pendelartige Schwingungen nicht gesondert zum Bewusstsein gelangen, sondern garnicht percipirt werden, es sei denn durch den Tastsinn. Ich hatte damals die grosse Stimmgabel noch nicht anfertigen lassen, deren Pendelschwingungen die stärksten jemals hergestellten sein werden und einzeln als Schallstösse hörbar sind. Wenn ich das Ohr dicht an die Zinke halte, habe ich sogar das eigenthümliche Gefühl, als wenn das Trommelfell nach innen und aussen abwechselnd im Rhythmus der dumpfen Stösse bewegt würde. Übrigens habe ich beim Hören starker Schwebungen und tiefster Combinationstöne dasselbe Gefühl von den Bewegungen des Trommelfells neben dem akustischen Eindruck.

2) Pfaundler: Über die geringste absolute Anzahl von Schallimpulsen, welche zur Hervorbringung eines Tones nöthig ist. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Wien. 75. Bd. 1877. Nov.-Heft. — König in Poggendorffs Ann. 157. Bd. 1876. S. 229.

die Meinungsverschiedenheit der Autoren in Betreff der Combinationstöne war und ist, darin scheinen doch Alle einig zu sein, dass man durch jene Subtractionen die sämmtlichen möglichen Combinationstöne und Schwebungszahlen erhält.

Zuvor ist jedoch zu untersuchen, welche Schwingungsverhältnisse die beiden primären Töne haben müssen.

In einer wenig beachteten kurzen Mittheilung nennt Ohm[1]) den gewöhnlichen oder ersten Combinationston den bedingten Ton und sagt (wenn $m' : n'$ das Tonverhältniss zweier Töne und m' die grössere der beiden Zahlen m' und n' bezeichnet):

„Als Folge des sehr ungewöhnlichen Baues des bedingten Combinationstones findet man, dass zu dessen Möglichkeit

$$\frac{m' + n'}{2(m' - n')} > 1$$

sein müsse, während dessen Stärke die Zahl $\frac{m'}{n'} - \frac{n'}{m'}$ nie ganz erreichen kann[2]); er wird um so schwächer, je mehr $m' = n'$ wird, und um so undeutlicher je mehr $m' + n' = 2(m' - n')$, d. h. je mehr $m' = 3n'$ wird. Hieraus folgt, dass das Tonverhältniss der beiden Töne, welche den bedingten Combinationston liefern sollen, stets zwischen 1 : 1 und 1 : 3 liegen müsse."

Wie der berühmte Physiker zu diesem eigenthümlichen Resultate gelangte, ist nicht bekannt; aber bewiesen ist es nicht. Denn wenn auch, wie er bereits bemerkte, Hällströms Versuche[3]) damit übereinstimmen, und viele spätere Beobachtungen, so kann ich doch zeigen, dass Tonpaare, deren Verhältnisse nicht zwischen 1:1 und 1:3 liegen, den ersten Combinationston (unteren Stosston) geben. Zunächst überzeugte ich mich mittelst starkschwingender Metallzungen, dass, wenn man zwei Töne β und α, zuerst mit 1024 und 768 Schwingungen, welche den ersten Combinationston von 256 Schwingungen hören lassen, stufenweise um gleiche Strecken vertieft, so dass dieser absolute Unterschied $= c'$ sich gleich bleibt, während das Verhältniss $\beta : \alpha$ wächst, der Ton c' immer hörbar bleibt und keineswegs wenn $\beta : \alpha = 3 : 1$ geworden ist, plötzlich verschwindet. Man hört ihn bei den Tonverhältnissen

16 mal			16 mal		
47 : 63	oder	$1 : 1^{16}/_{47}$	7 : 23	oder	$1 : 3^{2}/_{7}$
31 : 47	„	$1 : 1^{16}/_{31}$	6 : 22	„	$1 : 3^{2}/_{3}$
15 : 31	„	$1 : 2^{1}/_{15}$	5 : 21	„	$1 : 4^{1}/_{5}$
9 : 25	„	$1 : 2^{7}/_{9}$	3 : 19	„	$1 : 6^{1}/_{3}$

1) Bemerkungen über Combinationstöne und Stösse von G. S. Ohm in Poggendorffs Annalen 47. Bd. 1839. S. 463 bis 466.

2) Die Stärke der erzeugenden Töne als Einheit gesetzt.

3) Poggendorffs Annalen 24. Bd. 1832. S. 438.

deutlich, wenn man vorher sich das c' für sich mit einem Resonator fest eingeprägt hat. Da aber diese Art zu beobachten einige Übung erfordert und zeitraubend ist, so habe ich ein anderes Verfahren angewendet, welches auch dem Ungeübten den Combinationston in jeder Tonlage bei jedem Verhältniss hörbar macht. Ich lasse nämlich durch eine Stimmgabel, deren Stiel oder Resonanzkasten dicht am Kopf anliegt, im Kopf einen Ton entstehen, welcher um $\pm$ 1, 2, 3 Schwingungen von dem gesuchten Ton abweicht. Achtet man nun auf diesen Ton, so hört man ihn neben jedem der einzeln erklingenden Primärtöne glatt, sowie aber beide Primärtöne zusammen erklingen, hört man ohne Anstrengung vollkommen deutlich die 1, 2, 3 Schwebungen des Gabeltons in der Secunde. Da hierbei die Gabelschwingungen leise sind, kommen deren Obertöne gar nicht in Betracht. Der Gabelgrundton kann sogar nur durch Kopfleitung gehört werden, und doch sind die Schwebungen verhältnissmässig stark.

Dabei machte ich die Beobachtung, dass die Schwebungen, welche die Gabel mit dem Combinationston gibt, selbst dann noch mehrere Secunden lang wahrgenommen werden können, wenn die den Combinationston erzeugenden zwei Töne schon nicht mehr vorhanden sind, so dass also irgend welche Ohrtheile starker Nachschwingungen fähig sein müssen. Als ich zum Beispiel mit der verstimmten Gabel g' mit 384 ± 2 Schwingungen das Ohr verschloss, und die zwei Zungen von 144 und 528 g. Schw. zusammen mit der Gabel tönen liess, hörte ich sehr deutlich die 2 Schwebungen nachdem die primären Töne verschwunden waren, so dass ich einmal 68 Schwebungen zählen konnte, welche immer schwächer wurden, ehe der Gabelton rein zum Vorschein kam. Diese Thatsache beweist, dass der Combinationston — hier bei einem Verhältniss $1 : 3^2/_3$ — im Ohre entstand, denn er war noch da nach dem Aufhören der Luftschwingungen. Hält man eine auf den Combinations- und Gabelton abgestimmte Resonatorkugel vorher schon an das Ohr, während die Gabel frei tönt, so hört man gleichfalls noch nach dem Erlöschen der primären Töne die Schwebungen, offenbar weil der Combinationston im Ohr seine Schwingungen auf die Luft im Resonator zugleich mit dem Luftton der Gabel überträgt. Ueberhaupt kommt die vermeintliche Verstärkung der Combinationstöne durch Resonatoren wahrscheinlich nur in dieser Weise zu Stande.

Dass bei allen derartigen Versuchen nur solche Klangpaare als primäre verwendet werden dürfen, welche nicht schon für sich

langsame Schwebungen geben, versteht sich von selbst. Auch muss in jedem einzelnen Falle vor dem Versuch die ganze Reihe der möglicherweise hörbaren Obertöne derselben durchgesehen werden, um sich von der Unmöglichkeit des Entstehens des Tones $\beta - \alpha$ aus anderen Partialtönen als den beiden Grundtönen zu überzeugen. Dass kein einzelner Oberton von β oder α die zählbaren Schwebungen mit dem Gabelton γ gibt, wird durch das Ausbleiben derselben beim isolirten Tönen von α mit γ und von β mit γ bewiesen. Dass endlich beim gleichzeitigen Erklingen aller drei Töne $(\beta - \alpha)$ mit γ die Stösse gibt und nicht $(\beta - \gamma)$ mit α, geht aus der zuletzt mitgetheilten Beobachtung hervor, wo kein β und kein α mehr vorhanden ist und die Gabel dennoch eine Zeitlang Schwebungen hören lässt. Auch unterscheidet man direct mit dem Resonator, ob d^0 oder g' die langsam intermittirenden Anschwellungen der Tonstärke erfährt; ausserdem ist γ zu leise um mit α oder β einen neuen Combinationston zu bilden, und schliesslich lässt sich durch 1 oder 2 Minuten langes Erklingen der Primärtöne ohne die Gabel der Combinationston vollständig isoliren, so dass er mit der erst nach dem Erlöschen der Primärtöne gestrichenen Gabel die Schwebungen gibt, was die beiden Töne α und β einzeln nicht thun.

Man könnte nun meinen, es bedürfe zur Widerlegung der Ohmschen Angabe so mühsamer und angreifender Versuche, die ich in grosser Zahl ausführte, nicht, weil kein Grund vorliege den ersten Combinationston der beiden Grundtöne eines Tonpaares für anders „gebaut" anzusehen, als die Combinationstöne seiner Obertöne; und dass diese entstehen, wenn der Quotient $\alpha : \beta < 1 : 3$ wird, sei durch die Wahrnehmbarkeit der Differenztöne höherer Ordnung bewiesen. Z. B. gibt C (1), der Differenzton 1. Ordnung von c' (4) und e' (5), mit diesen die Differenztöne 2. Ordnung g^0 (3) und c' (4), das heisst 1 gibt mit 4 und mit 5 die hörbaren Töne 3 und 4[1]), folglich ist das Verhältniss der erzeugenden Töne 1:4 und 1:5 entgegen Ohm. Solche vermeintliche Differenztöne höherer Ordnung sind bei einiger Übung in der That leicht zu unterscheiden. Man muss aber bedenken, dass sie schon als Differenztöne 1. Ordnung durch Obertöne zu Stande kommen können, da 4:5 immer mit 8:10 verbunden vorkommt wo sie hörbar sind. Der Ton 3 entsteht dann nicht aus 4:1,

1) Helmholtz, Lehre v. d. T. 4. Ausg. S. 257. 1877. Hällström a. a. O. S. 464. 456. 444.

sondern aus 8:5, sowie 6 aus 10:4. So lassen sich in allen Fällen die Differenztöne höherer Ordnung auch bei einem Quotienten, der nicht zwischen 1:1 und 1:3 liegt, mittelst der Obertöne auf Tonpaare innerhalb dieser Grenze zurückführen.

Meine Versuche zum Beweise der Existenz des 1. Combinationstones im Ohr, wenn $\alpha:\beta < 1:3$, sind demnach keineswegs überflüssig. Ferner schreibt Ohm:

„Auf ungleich grössere Schwierigkeiten stiess ich bei der Aufsuchung der Stösse, welche aus dem gleichzeitigen Erklingen zweier Töne hervorgehen, weswegen ich auch den hierbei eingehaltenen Rechnungsgang lieber noch zurückhalte, da seine Mühseligkeit vielleicht doch nicht in der Natur des Gegenstandes begründet ist. Als Resultat meiner Untersuchungen fand ich, dass wahrnehmbare und regelmässige, d. h. in gleichem Abstande von einander auftretende Stösse im Allgemeinen nur dann entstehen können, wenn die Schwingungsmengen m und n der beiden angegebenen Töne sich einem, in seinen kleinsten ganzen Zahlen gegebenen Tonverhältnisse $m' : n'$ sehr nähern, und zugleich die Zahlen m' und n' sehr klein sind in Vergleich zu jenen, auf die man stösst, wenn man das Verhältniss $m : n$ in seinen kleinsten ganzen Zahlen ausdrückt. Es entstehen dann jedesmal $mn' - m'n$ Stösse in der Zeiteinheit, und diese Stösse werden gebildet durch einen Ton, dessen Schwingungsmenge $\frac{m+n}{m'+n'}$ ist, welcher aber $mn' - m'n$ Mal in der Zeiteinheit seine Schwingungsform stark verändert und wieder herstellt. Die Stärke dieser Stösse wird durch die Zahl $\frac{m'+n'}{m'n'}$ angezeigt."

Merkwürdig ist es, dass dieses Ergebniss, soweit ich es an den vorhandenen Beobachtungen prüfen konnte, überall sich bewahrheitet. Sämmtliche Versuche von König[1]) fügen sich dem Ausdruck $mn' - m'n$. Auch in diesem Falle ist die mathematische Begründung nicht bekannt geworden. Aber alle Stosstöne (bis 1536 Stösse in 1 Sec.) wo das Verhältniss der Componenten ein ganz anderes als 1:3 sein kann, fallen unter die Formel. Ohm meint noch, dass die Stösse unabhängig von den Combinationstönen sowohl als von den Begleittönen seien, was sich jetzt nicht mehr aufrechterhalten lässt. Er sagt endlich: „Um so merkwürdiger ist es daher, dass der Ausdruck $mn' - m'n$ doch immer genau dieselbe Zahl gibt, welche nach der von Scheibler befolgten Rechnungsweise erhalten wird."

1) Man unterwerfe nur eine beliebige Reihe der umfangreichen Tabellen (Poggendorffs Annalen 157. Bd. 1876. S. 203 bis 215) der Rechnung. Sie stimmen alle mit Ohms Lehrsatz. Dabei muss man bedenken, dass was in jener Abhandlung noch als Differenzton bezeichnet wird (wie die Töne 5 bei 4:9 und 3:8 und der Ton 7 bei 8:15) unterer Stosston ist. Ueberall ist Ohms $n' = 1$ und $m' = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Nun ist aber eben die Scheiblersche Rechnungsweise[1]) die obige Subtractionsmethode. Man ist also berechtigt diese zur Beantwortung der Frage, wieviele Combinationstöne ein Tonpaar oder Tondoppelpaar möglicherweise liefern kann, anzuwenden, trotzdem Ohm (S. 465) meint der erste Combinationston könne mit den beiden primären Tönen neue Combinationstöne nicht geben; denn er selbst, ein Stosston, kann mit ihnen Stösse geben und diese können zu Stosstönen werden, welche für etwas anderes als Combinationstöne anzusehen kein zwingender Grund vorliegt.

Führt man nun die Rechnung aus für ein beliebiges Tonpaar, dessen Verhältniss $\beta : \alpha$ und wo $\beta > \alpha$, so erhält man die in der Tabelle (S. 38 bis 40) zusammengestellten möglichen Töne, so lange nur das Grundtonpaar und sein erstes Obertonpaar 2α und 2β gegeben sind und lediglich die Differenzen erster und zweiter Ordnung in Betracht kommen.

Hierbei ist bemerkenswerth, dass man dieselben Töne erhält, wenn man das Grundtonpaar $\alpha < \beta$ mit seinen sämmtlichen entotischen Obertönen allein in Betracht zieht und keine Differenz von mehr als zwei Gliedern bildet. Dann gibt, wenn n' eine ganze Zahl und m' ebenfalls eine ganze Zahl bedeutet und α und β die Schwingungszahlen darstellen, die Formel $\pm(n'\alpha - m'\beta)$ alle möglichen Schwebungen, Stosstöne, Differenztöne und Summationstöne, falls n' und m' alle ihre Werthe durchlaufen und die Ergebnisse mit positivem Zeichen allein gelten. Die Aehnlichkeit mit der von Ohm gefundenen Formel für die Schwebungszahl, der nur ein $\pm$ vorgesetzt werden muss, so dass sie $\pm(mn' - m'n)$ lautet, ist um so auffallender, als er sie auf ganz anderem Wege gefunden hat, wie seine Trennung des „bedingten" Combinationstones von den Stosstönen, die von ihm behauptete Unabhängigkeit dieser von den Begleittönen und die „Mühseligkeit" der Rechnung beweisen.

I.
$$\begin{cases} \alpha \\ 2\alpha - \alpha \\ 2\alpha - (2\alpha - \alpha) \\ \beta - (\beta - \alpha) \\ 2\beta - (2\beta - \alpha) \\ (2\beta - \beta) - (\beta - \alpha) \\ (2\beta - \alpha) - (2\beta - 2\alpha) \end{cases}$$

1) Pogg. Ann. 1834. 32. Bd. S. 333. 492. 499 u. f.

II. $\begin{cases} \beta \\ 2\beta - \beta \\ 2\beta - (2\beta - \beta) \\ (2\beta - \alpha) - (\beta - \alpha) \end{cases}$

III. $\begin{cases} 2\alpha \\ 2\beta - (2\beta - 2\alpha) \\ \beta - (\beta - 2\alpha) \text{ oder} \\ \beta - (2\alpha - \beta) \\ (2\beta - \beta) - (\beta - 2\alpha) \text{ oder} \\ (2\beta - \beta) - (2\alpha - \beta) \end{cases}$

IV. 2β

V. $\begin{cases} \beta - \alpha \\ \beta - (2\alpha - \alpha) \\ (2\beta - \alpha) - \beta \\ (2\beta - \beta) - \alpha \\ (2\beta - 2\alpha) - (\beta - \alpha) \\ (2\beta - \alpha) - (2\beta - \beta) \\ (2\beta - \beta) - (2\alpha - \alpha) \end{cases}$

VI. $\begin{cases} 2\beta - \alpha \\ 2\beta - (2\alpha - \alpha) \end{cases}$

VII. $\begin{cases} \pm (2\alpha - \beta) \\ \pm [2\alpha - (2\beta - \beta)] \\ \pm [\beta - (2\beta - 2\alpha)] \\ \pm [\alpha - (\beta - \alpha)] \\ \pm [(\beta - \alpha) - (2\alpha - \alpha)] \\ \pm [(2\beta - 2\alpha) - (2\beta - \beta)] \end{cases}$

VIII. $\begin{cases} 2\beta - 2\alpha \\ (2\beta - \alpha) - \alpha \\ (2\beta - \alpha) - (2\alpha - \alpha) \end{cases}$

IX. $2\beta - (\beta - \alpha) = \alpha + \beta$

X. $\begin{cases} \pm [2\alpha - (\beta - \alpha)] \\ \pm [\alpha - (\beta - 2\alpha)] \text{ oder} \\ [\alpha - (2\alpha - \beta)] \\ (2\alpha - \alpha) - (2\alpha - \beta) \text{ oder} \\ \pm [(\beta - 2\alpha) - (2\alpha - \alpha)] \end{cases}$

XI. $\begin{cases} \pm[2\alpha - (2\beta - \alpha)] \\ \pm[\alpha - (2\beta - 2\alpha)] \\ \pm[(2\alpha - \beta) - (\beta - \alpha)] \text{ oder} \\ (\beta - \alpha) - (\beta - 2\alpha) \\ \pm[(2\beta - 2\alpha) - (2\alpha - \alpha)] \end{cases}$

XII. $\begin{cases} 2\beta - (2\alpha - \beta) \text{ oder} \\ 2\beta - (\beta - 2\alpha) \end{cases}$

XIII. $\begin{cases} \pm[2\alpha - (\beta - 2\alpha)] \text{ oder} \\ 2\alpha - (2\alpha - \beta) \end{cases}$

XIV. $\pm[2\alpha - (2\beta - 2\alpha)]$

XV. $\begin{cases} \pm[(2\beta - 2\alpha) - (2\alpha - \beta)] \text{ oder} \\ (2\beta - 2\alpha) - (\beta - 2\alpha) \end{cases}$

XVI. $\begin{cases} (2\beta - \alpha) - (2\alpha - \beta) \text{ oder} \\ (2\beta - \alpha) - (\beta - 2\alpha) = \alpha + \beta \end{cases}$

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass beim Ertönen eines Tonpaares mit seinem ersten Obertönepaar im Ganzen zwar 47 Einzeltöne möglich sind, aber höchstens 16 verschieden hohe Einzeltöne gebildet werden können. Man hat nämlich:

I. α wenigstens 7 mal, höchstens 8 mal
II. β wenigstens 4 mal, höchstens 6 mal
III. 2α wenigstens 2 mal, höchstens 4 mal
IV. 2β stets 1 mal
V. $\beta - \alpha$ wenigstens 7 mal, höchstens 9 mal
VI. $2\beta - \alpha$ stets 2 mal
VII. $\pm(2\alpha - \beta)$ stets 6 mal
VIII. $2\beta - 2\alpha$ wenigstens 3 mal, höchstens 5 mal
IX. $2\beta - (\beta - \alpha)$ wenigstens 1 mal, höchstens 2 mal
X. $\pm(3\alpha - \beta)$ wenigstens 1 mal, höchstens 3 mal
XI. $\pm(3\alpha - 2\beta)$ wenigstens 3 mal, höchstens 4 mal
XII. entweder $(3\beta - 2\alpha)$ 1 mal, oder $(2\alpha + \beta)$ 1 mal
XIII. $\pm(4\alpha - \beta)$ entweder 0 mal, oder 1 mal
XIV. $\pm(4\alpha - 2\beta)$ stets 1 mal
XV. $\pm(4\alpha - 3\beta)$ entweder 0 mal oder 1 mal
XVI. $(3\beta - 3\alpha)$ entweder 0 mal oder 1 mal

Durch die Combinationstöne wird also von den Grundtönen der tiefere allemal am meisten verstärkt; von den Combinationstönen erster Ordnung wird der erste $(\beta - \alpha)$ durch andere Combinationstöne am meisten verstärkt. Ihm steht hierin aber wenig

nach $\pm(2\alpha-\beta)$. Die Beobachtung lehrt, dass man die Töne, welche der Tabelle zufolge am meisten verstärkt werden, im Allgemeinen auch am leichtesten hört. Die besondere Deutlichkeit des Summationstons $\alpha+\beta$ (IX) bei Klängen mit vielen Obertönen erklärt sich dadurch, dass, wenn p die Ordnungszahl des Theiltons, stets $\alpha+\beta=p\beta-[(p-1)\beta-\alpha]$ und $=(n'+1)\beta-(m'-1)\alpha$ ist, wobei m' und n' die das Verhältniss $\beta:\alpha$ ausdrückenden kleinsten ganzen Zahlen und $m'>n'$, sowie $\beta>\alpha$.

Es kommen im Ganzen überhaupt in Betracht 56 Einzeltöne oder $\pm$ doppelt gezählt 72 Töne. Davon sind aber nur 47 in allen Fällen theoretisch gleichzeitig möglich, das heisst in jedem beliebigen Tondoppelpaar α, β, 2α, 2β gleichzeitig möglich, und davon können ungleiche Höhe haben nicht mehr als 16. Es sind demnach keinenfalls mehr als 16 Einzeltöne in dem Doppelklang wahrnehmbar.

Werden aber aus demselben die beiden Obertöne eliminirt gedacht, dann sind von Combinationstönen 1. und 2. Ordnung nur möglich drei: I. $\beta-(\beta-\alpha)=\alpha$ V. $\beta-\alpha$ VII. $\pm(\alpha-(\beta-\alpha))=\pm(2\alpha-\beta)$; dazu II. β, also im Ganzen 4 Töne. Man könnte meinen, König habe nicht nur diese bei Stimmgabeln, sondern auch einen Differenzton 3. Ordnung (VII — V) ganz deutlich gehört. Z. B. (S. 198 und 215) gab c^{IV} mit 2048 (I) und der Ton k^{IV} mit 2816 (II) g. Schw., welche sich wie 8:11 verhalten, $11-8=g''$ mit 768 (V), ferner $8-(11-8)=e'''$ mit 1280 (VII) und sogar noch $(8-(11-8))-(11-8)=c''$ mit 512 (VII — V). Auch bei den Gabeltönen 2048 und 3328 wurde dieser Ton c'' (VII — V) ganz deutlich vernommen. Die Töne $1280=4096-2816$ und $512=1280-768$ erklären sich aber auch durch das Mitwirken der Obertöne, denn VII ist $2\alpha-\beta$ und VII — V ist $\pm(3\alpha-2\beta)$ oder 6144 — 5632 und 6656 — 6144. Die Stimmgabeln waren ungemein stark, so dass es fraglich ist, ob ohne Obertöne die Differenztöne VII und VII — V als solche wirklich gehört wurden. Jedenfalls wird es nach diesem nicht mehr auffallend erscheinen, dass ich selbst die meisten der berechneten Töne wirklich am Obertöneapparat mit seinen vielen und starken Obertönen deutlich wahrgenommen habe.

Wieviele von den 16 möglicherweise ungleich hohen Einzeltönen in Wirklichkeit verschieden hoch sind, hängt, abgesehen von der Tonstärke, von dem Verhältniss des α zu β ab. Ist z. B. β die Octave von α, so reducirt sich die Zahl der wirklichen verschiedenen Töne durch Coincidenzen auf 4, ist aber $\alpha:\beta=9:10$,

so sind von den 16 möglichen Tönen 15 wirklich verschieden, indem nur einer (durch Coincidenz mit β) in Wegfall kommt.

Wenn man am Obertöneapparate (nach vorherigem Angeben des Einzeltones) alle diese Töne nacheinander hören will, so ist wesentlich einige Anspannung der Aufmerksamkeit und Stille im Beobachtungsraum. Dann hört man fast alle die vorher ausgerechneten einzelnen Töne deutlich oder kann sie mit Hilfstönen nachweisen. Aber man muss dabei die ausser den Obertönen 2α und 2β hörbaren höheren Obertöne berücksichtigen. Sie können z. Th. mit jenen Einzeltönen unter Umständen zusammentreffen und die Combinationstöne verstärken. So sind z. B. zwar für 9:10 die Obertöne vom dritten an

27, 30, 36, 40, 45, 50, 54 ...

die Töne I bis XVI:

1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 10, 10, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 20

also keine Coincidenzen vorhanden zwischen höheren Obertönen und niederen Combinationstönen, dagegen für 1:3 die Obertöne vom dritten an

3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18 ...

die Töne I bis XVI:

1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 0.

Also mehrere Coincidenzen zwischen höheren Obertönen und Combinationstönen vorhanden.

Wollte man aber die möglichen Combinationstöne der Obertöne vom 3. aufwärts auch noch berücksichtigen, so würde man in jedem Falle noch viele Coincidenzen erhalten.

Ich habe hier noch an eine andere für das Folgende wichtigere Thatsache zu erinnern.

Wenn man für ein beliebiges Tonpaar mit oder ohne Obertöne so lange die sämmtlichen Combinationstöne 1., 2., 3. .... n-ter Ordnung berechnet, als noch neue Töne resultiren, so ergibt sich ausnahmslos eine vollständige arithmetische Reihe von Tönen[1]) und falls die das Verhältniss $\alpha:\beta$ ausdrückenden kleinsten ganzen Zahlen n:m statt der Schwingungszahlen der Rechnung zu Grunde gelegt werden, erhält man ausnahmslos für jedes Tonpaar ohne Obertöne eine arithmetische Reihe mit dem Anfangsglied 1, der Differenz 1, dem letzten Gliede m, der Anzahl der Glieder m, also die Zahlenreihe

1) Für die Combinationstöne der Obertöne zeigte dies schon Helmholtz in seiner Lehre v. d. Tonempfindungen. 1. Ausgabe 1863. S. 232 u. 4. Ausgabe 1877. S. 256.

1, 2, 3, 4, 5, 6 ... m.

Eine ebensolche arithmetische Reihe gibt aber jedes Tonpaar $\alpha : \beta$ mit seinem ersten Obertönepaar, wo dann 2β letztes Glied ist und jedes Tonpaar mit n Theiltönen, wo $n\beta$ letztes Glied ist.

Die Wichtigkeit dieser einfachen Regel für die Unterscheidung der consonanten und dissonanten Intervalle wird sich im folgenden Abschnitt herausstellen.

Zur Erläuterung derselben stelle ich hier noch einige der von zwei vorzüglichen Beobachtern, Hällström (1839 an der Violine) und König (1876 an Stimmgabeln) gehörten Combinationstöne zusammen und setze die von beiden nicht erkannte richtige Erklärung aus den Theiltönen daneben:

Intervalle	Gehört H.	Gehört K.	Erklärung.
2 : 3	1	1	$\beta - \alpha$
3 : 4	1 u. 2	1 u. 2.	$\beta - \alpha$; $2\alpha - \beta$
4 : 5	1 u. 2 u. 3	1 u. 3.	$\beta - \alpha$; $2\beta - 2\alpha$; $2\alpha - \beta$
5 : 6	2 u. 3	—	$2\beta - 2\alpha$; $3\alpha - 2\beta$.
3 : 5	1 u. 2	1 u. 2 u. 4?	$2\alpha - \beta$; $\beta - \alpha$; $2\beta - 2\alpha$
5 : 8	2 u. 3	—	$2\alpha - \beta$; $\beta - \alpha$
3 : 8	1 u. 2	1 u. 2 u 5	$3\alpha - \beta$; $\beta - 2\alpha$; $\beta - \alpha$
5 : 12	2 u. 3	—	$\beta - 2\alpha$; $3\alpha - \beta$
8 : 15	6	1 u. 7.	$2\alpha - \beta$; $2\beta - 3\alpha$; $\beta - \alpha$
5 : 9	4	1. u. 4	$2\alpha - \beta$; $\beta - \alpha$
8 : 11	—	2 u. 3 u. 5	$3\alpha - 2\beta$; $\beta - \alpha$; $2\alpha - \beta$
8 : 13	—	2 u. 3. u. 5	$2\beta - 3\alpha$; $2\alpha - \beta$; $\beta - \alpha$

III.

ZUR THEORIE DER CONSONANZ.

Die von Pythagoras oder einem seiner Schüler entdeckte Thatsache, dass die den wohlklingenden Tonpaaren entsprechenden Saitenlängen sich wie 1 zu 2, wie 2 zu 3 und wie 3 zu 4 verhalten, blieb zwei Jahrtausende ohne Erklärung[1]).

Über die Ursache des Wohlgefallens an diesen und überhaupt den Tonpaaren, deren Schwingungsverhältnisse durch die kleinsten ganzen Zahlen ausdrückbar sind, sagt Descartes in seinem *Compendium musicae*[2]):

„1. Jeder Sinn kann die Quelle eines Vergnügens sein.

2. Dieses Vergnügen erfordert ein gewisses Verhältniss des Gegenstandes zu dem Sinn, so dass z. B. das Geräusch der Flintenschüsse oder des Donners zur Musik nicht geeignet erscheint, weil es das Ohr verletzt, wie das allzustarke Licht der direct betrachteten Sonne das Auge.

3. Der Gegenstand muss so beschaffen sein, dass er nicht zu schwierig und verwirrt den Sinneseindruck macht, so dass z. B. der Anblick irgend einer sehr complicirten Figur, auch wenn sie regelmässig ist, ... weniger zusagt, als der einer anderen, welche mehr aus gleichen Linien besteht, ... weil bei diesem der Sinn sich in vollerem Maasse befriedigt, als bei dem ersteren, wo er vieles nicht genügend deutlich wahrnimmt.

---

1) Der Beweis, dass diese Entdeckung altpythagoreisch ist bei E. Zeller: Die Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwicklung. 4. Aufl. 1876. 1. Bd. S. 371. Vgl. S. 329 und 398 ff.

2) Ich übersetzte nach der ersten Ausgabe *„Renati Des-Cartes Musicae Compendium. Trajecti ad Rhenum* 1650. Verfasst wurde diese Schrift schon 1618, als Descartes erst 22 Jahre alt war. Die Französische Übersetzung von Cousin ist ungenau *(Oeuvres de Descartes T. 5. Paris* 1824*)*.

4. Derjenige Gegenstand wird leichter sinnlich wahrgenommen, in welchem die Verschiedenheit der Theile die geringere ist.

5. Diejenigen Theile eines ganzen Gegenstandes nennen wir weniger verschieden, zwischen denen das deutlichere Verhältniss besteht *(inter quas est maior proportio)*.

6. Dieses Verhältniss muss arithmetisch, nicht geometrisch sein, weil bei jenem nicht soviel aufzufassen ist, indem überall die Unterschiede gleich sind. Deshalb wird der Sinn nicht so sehr angestrengt, um alles, was in ihm enthalten ist, deutlich wahrzunehmen. Zum Beispiel wird das Verhältniss der drei Linienlängen 2, 3, 4 mit den Augen leichter erkannt, als das der drei Linienlängen 2, $\sqrt{8}$, 4, weil in ersterem es nur nöthig ist die Einheit als den Unterschied jeder Linienlänge zu beachten, in letzterem aber incommensurable Theile. Diese können nun, meines Erachtens, in keiner Weise zugleich vom Sinne vollständig erkannt werden, sondern nur mit Bezugnahme auf die arithmetische Proportion, wobei offenbar der Sinn fortwährend getäuscht wird.

7. Unter den sinnlichen Gegenständen ist derjenige dem Gemüthe nicht der angenehmste, welcher am leichtesten, auch der nicht, welcher am schwersten sinnlich wahrgenommen wird, sondern derjenige, welcher nicht so leicht percipirt wird, dass er das natürliche Verlangen der Sinne nach den Gegenständen nicht ganz befriedigt und nicht so schwer, dass er den Sinn anstrengt.

8. Schliesslich muss beachtet werden, dass in allen Dingen Abwechslung sehr angenehm ist."

Ich war verwundert zu finden, dass schon Descartes die Obertöne, und zwar den zweiten und dritten, gehört hat (S. 12 und 14):

„Hieraus folgt, meines Erachtens, dass kein Ton gehört wird, ohne dass seine höhere Octave in dem Ohr gewissermaassen mitklingt."

Die Prime ist ihm keine Consonanz, weil kein Unterschied der Höhe beider Töne in ihr existirt. Sie verhält sich zu den Consonanzen, wie die Einheit zu den Zahlen.

Endlich muss noch bemerkt werden, dass Descartes behauptet, der Ton verhalte sich zum Ton, wie die Saite zur Saite, indem wie in jeder Saite alle kürzeren Saiten, nicht aber die längeren enthalten seien, so seien auch in jedem Tone alle höheren Töne enthalten, nicht aber im höheren Tone die tieferen Töne. Man müsse also den höheren Factor der Consonanz durch Theilung des tieferen finden und „diese Theilung muss eine arithmetische

sein. Sie wird durch Theilung in 2, 3, 4, 5 und 6 Theile erhalten. „Weiter aber geht die Theilung nicht, weil nämlich *„aurium imbecillitas sine labore maiores sonorum differentias non posset distinguere“*. (Die Sexten entstehen aus den Terzen.)

In der Schrift „Über den Menschen“ vergleicht Descartes das Angenehmere der gleichmässigen Schallschwingungen für das Ohr gegenüber den unregelmässigen mit dem angenehmeren Gefühl bei Berührung eines Spiegels gegenüber einem höckerigen Stein.

Ein Jahrhundert nach der Abfassung des *Compendium Musicae* schrieb Leibniz[1]):

„Es ist nicht unmöglich, dass es Wesen irgendwo gibt mit einer grösseren musikalischen Empfindlichkeit, als der unseren und dass sie an musikalischen Verhältnissen, die uns weniger afficiren, sich erfreuen. Aber ... die allzu empfindlich in musikalischen Dingen sind werden durch gewisse beim Orgelbau nicht wohl zu vermeidende Abweichungen der Praktiker unangenehm berührt, während die Zuhörerschaft durch sie nicht verletzt zu werden pflegt. Wir zählen in der Musik nicht über fünf, ähnlich den Völkern, welche auch in der Arithmetik nicht über die drei vorrückten und auf welche die Redensart ... „Er kann nicht über drei zählen“ Anwendung finden würde. Denn unsere gebräuchlichen Intervalle sind sämmtlich aus zwei von den Grundzahlen 1, 2, 3, 5 zusammengesetzt. Wenn uns etwas mehr Empfindlichkeit verliehen würde, könnten wir bis zu der Grundzahl 7 fortschreiten. Und ich glaube, dass es in der That solche gibt. So haben auch die Alten die Zahl 7 nicht gänzlich verbannt. Aber schwerlich wird es solche geben, die bis zu den folgenden Grundzahlen 11 und 13 fortschritten[2])“

„Die Ursache der Consonanz ist, meine ich, in dem Zusammentreffen der Stösse zu suchen. Die Musik ist ein verborgenes Rechnen des Geistes, welcher nicht weiss, dass er zählt. Denn er thut Vieles mit verwirrten oder unmerklichen Perceptionen, was

1) In einem Briefe an Christian Goldbach. Ich übersetze nach der Ausgabe von 1734: ***Leibnitii Epistolae ad diversos.*** Leipzig, Breitkopf. S. 240. Epistel 154. 17. April 1712.

2) Über das Vorkommen der Töne 7, 11 und 13, wenn c = 4, bez. 8, in Volksliedern ist zu vergleichen Chladni, Die Akustik, Leipzig 1802. S. 30. Ich finde, dass schon der vorzüglich genau beobachtende Organist Sorge (Vorgemach der musikalischen Composition 1747. 3. Theil. S. 397 und 403) „in allen 32-füssigen und 16-füssigen Klängen nebst 2, 3, 4, 5, 6 auch 7, 11 und 13“ hörte. Er sagt: „Man höre nur recht zu“, und erkannte sehr gut den Unterschied des b vom 7. Theilton des c, also vom i Kirnbergers.

er in deutlicher Apperception nicht wahrnehmen kann. Die irren, welche meinen, es geschehe nichts in der Seele, dessen sie selbst nicht bewusst sei. Obwohl also die Seele nicht fühlt, dass sie zählt, fühlt sie doch das Ergebniss dieser unmerklichen Zählung, d. h. das aus ihr fliessende Vergnügen bei den Consonanzen, Missvergnügen bei den Dissonanzen. Denn aus vielen unmerklichen Übereinstimmungen entsteht das Vergnügen."

Fünf Jahre nach der Veröffentlichung dieser berühmt gewordenen Aperçus schrieb Euler[1]):

„Je leichter wir die Ordnung in einem gegebenen Ding wahrnehmen, um so einfacher und vollkommener finden wir sie, und werden dadurch erfreut. Wird dagegen die Ordnung schwierig erkannt und erscheint sie weniger einfach und weniger deutlich, dann erfassen wir sie mit einer gewissen Betrübniss."

In der Musik entsteht alles Vergnügen aus der Wahrnehmung der Verhältnisse, welche mehrere Zahlen untereinander haben, da auch die Zeiten durch Zahlen ausgedrückt werden können.

Je leichter also die Verhältnisse der Tonschwingungen percipirt werden, um so wohlklingender erscheinen dieselben. Nun werden aber die durch die kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückten allein leicht percipirt, also sind die Consonanzen an diese Zahlen gebunden. Je kleiner die das Tonverhältniss ausdrückenden ganzen Zahlen sind, um so weniger anstrengend ist es die „Ordnung" zu entdecken, um so grösser also das Vergnügen. So Euler.

Man erkennt sofort, dass schon Descartes zwölf Decennien früher dasselbe und zwar fast mit denselben Worten gesagt hatte. Descartes ist der wahre Urheber, der noch jetzt bei den Musikern fast allgemein herrschenden Ansicht über den Unterschied von Consonanz und Dissonanz, wenn auch seine Ideen unter dem Namen der „Eulerschen Theorie" cursiren.

Nun hat aber Helmholtz eine ganz andere Ursache des Wohlklangs gewisser Klangpaare entdeckt. Er zeigte bekanntlich in seiner „Lehre von den Tonempfindungen", dass für den Grad des Wohlklangs zweier Klänge die Schwebungen der Partialtöne und der Combinationstöne bestimmend sind, so dass ein Klangpaar, dessen Grundtöne oder Obertöne oder Combinationstöne genügend starke und nicht zu schnelle Schwebungen geben, rauh klingt und dadurch unangenehm ist, wie das flackernde Licht dem Auge.

1) *Tentamen novae theoriae Musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae auctore Leonhardo Eulero. Petropoli* 1739. Zweites und Viertes Capitel.

Haben dagegen die sämmtlichen Theiltöne und Combinationstöne so erhebliche Schwingungsdifferenzen, dass eine Discontinuität oder Intermittenz der Empfindung durch die dann zu zahlreichen und zu schnellen Schwebungen nicht mehr zu Stande kommen kann, indem das Ohr die häufigeren Stösse nicht mehr wahrnimmt, und fallen die Combinationstöne untereinander und mit Partialtönen und Partialtöne mit Partialtönen genau zusammen, dann klingt das Klangpaar glatt und ist angenehm. Die Rauhigkeit ist also auch hiernach wesentlich für die Dissonanz, die Glätte für die Consonanz.

Der grosse Fortschritt in der Erkenntniss, welcher durch diese Theorie der Consonanz herbeigeführt wurde, besteht darin, dass hier zum ersten Male eine exacte Erklärung für eine Thatsache zu geben versucht wird, welche wesentlich psychischer Natur ist. Aber nicht allein die ausserordentliche theoretische Tragweite der neuen Lehre, auch ihre grosse praktische Bedeutung für die Musik, zumal die musikalische Technik, machen eine möglichst vielseitige experimentale Prüfung derselben wünschenswerth.

Zwei Consequenzen scheinen mir vor Allem geprüft werden zu müssen.

Erste Consequenz. Wenn zur Unterscheidung von consonirenden und dissonirenden Klängen Schwebungen der Obertöne oder der Combinationstöne nothwendig sind, so muss bei allen Tonpaaren, welchen alle Obertöne und Combinationstöne fehlen, wie bei den wenigen durch kleinste ganze Zahlen ausgedrückten Tonverhältnissen das Unlustgefühl fehlen, welches die Dissonanzen zu begleiten pflegt.

Dass wirklich Helmholtz selbst diese auf den ersten Blick befremdliche Folgerung erkannte und ihre thatsächliche Richtigkeit annimmt, geht schon aus der ersten Ausgabe seiner „Lehre von den Tonempfindungen“ hervor, indem er (S. 301, 303, 309) „so sehr es auch den musikalischen Dogmen widersprechen mag“ sagt, bei einfachen Tönen an gedackten Orgelpfeifen und Stimmgabeln könnten z. B. die reine grosse und kleine Terz nicht ohne Hülfe anderer Intervalle durch das Gehör unterschieden werden.

Da ich jedoch bei Gelegenheit meiner Untersuchungen über die Empfindlichkeit des Intervallensinnes die verschiedensten consonirenden und dissonirenden Tonverhältnisse bei Stimmgabeln sehr bestimmt als Consonanzen und Dissonanzen unterscheiden konnte und auch für Andere bei gelegentlichen Versuchen dasselbe sich herausstellte, so schien mir jene Angabe zweifelhaft. Ich

prüfte daher die Bedingungen meiner Versuche und zwar um so sorgfältiger als durch den Nachweis der thatsächlichen Unrichtigkeit der Consequenz die Helmholtzsche Theorie der Consonanz nothwendig fallen oder wenigstens in ihrem wesentlichsten Puncte umgestaltet werden müsste.

Vor Allem kommt es auf die Herstellung von ganz reinen einfachen Tönen an. Ich verwendete dazu kleine Stimmgabeln und zwar namentlich einen Satz von elf Gabeln, mit vorzüglich genauer Abstimmung. Sie haben die Schwingungsfrequenzen

1000; 1100; 1200; 1300; 1400; 1500; 1600; 1700; 1800; 1900; 2000.

Die Differenz von 100 Doppelschwingungen in der Secunde wählte ich, weil sie klein genug ist, um noch als Rauhigkeit percipirt werden zu können, sich also jeden Augenblick eine wirkliche Dissonanz durch gleichzeitiges Anstreichen zweier Gabeln hervorbringen liess. Die Höhe von 1000 bis 2000 wählte ich deshalb, weil die Gefahr, Obertöne der Stimmgabeln mitzuhören, in so hoher Lage beseitigt ist, vorausgesetzt, dass man leise anstreicht, indem schon die niedrigsten Obertöne einer leise erklingenden Stimmgabel von 1000 zu leise sind, um in die Perception zu treten. Dagegen ist die Frequenz von 1000 bis 2000 nicht so bedeutend, dass die Unterscheidung von Consonanzen und Dissonanzen unter gewöhnlichen Umständen im Geringsten schwierig würde. Erwies sich dieselbe als mangelhaft, so konnte also die Mangelhaftigkeit der Tonhöhe nicht zugeschrieben werden.

Es stellte sich nun heraus, dass beim gleichzeitigen Anstreichen zweier Gabeln Anfangs alle musikalischen Beurtheiler die consonirenden Intervalle von den dissonirenden auffallend richtig unterschieden, wie bei den früheren beiläufigen Versuchen, manche sogar fast jedesmal richtig urtheilten. Dieses der Theorie ungünstige Resultat kam jedoch, wie ich bald herausfand, nur dann zu Stande, wenn die Töne nicht leise genug waren. Als ich mich darauf eingeübt hatte mit zwei parallel gehaltenen Bassbogen (in jeder Hand einen) die zwei zusammengehörenden Stimmgabeln gleichzeitig gleichmässig leise zu streichen, so dass die Gabeltöne rein ohne Combinationstöne, ohne Obertöne und ohne Reibungsgeräusche gehört wurden, war das Ergebniss ein ganz anderes. Jetzt antworteten sämmtliche musikalische Beurtheiler auf die Frage, ob Consonanz oder Dissonanz, sowie das Gabelpaar um mehr als 100 getrennt war, viel häufiger „Consonanz, unvollkommene Consonanz, eher Consonanz als Dissonanz, nicht unangenehm“ u. s. w. als

„Dissonanz“ und bezeichneten viele unter gewöhnlichen Umständen sogleich als unrein erkannte Intervalle hier als gute Quinten, Quarten, Terzen, Sexten. Als dissonirend wurden ausnahmslos von Geübten wie Ungeübten nur die Verhältnisse 10:11; 11:12; 12:13; 13:14; 14:15; 15:16; 16:17; 17:18; 18:19; 19:20 bezeichnet, also unzweifelhafte Dissonanzen auch bei einfachen Tönen wegen der geringen absoluten Schwingungsdifferenz von 100. Fast alle anderen Intervalle der 11 Gabeln dagegen wurden oft, besonders von Musikern, als consonirend bezeichnet, wenn sie nur nicht zu stark erklangen, also namentlich

10:13; 10:17; 10:19; 11:13; 11:14; 11:15; 11:16; 11:17; 11:18; 11:19; 11:20; 12:17; 12:19; 13:15; 13:16; 13:17; 13:18; 13:19; 13:20; 14:17; 14:19; 15:17; 15:19; 16:19; 17:19; 17:20;

ferner galten auch die durch kleinere Zahlen ausdrückbaren Schwingungsverhältnisse (ausser 8:9 und 9:10) nämlich

5:7; 5:9; 6:7; 7:8; 7:9; 7:10

oft für consonirend, und wenn auch die Verhältnisse der kleinsten ganzen Zahlen

1:2; 2:3; 3:4; 3:5; 4:5; 5:6; 5:8

also die Octave, Quinte, Quarte, grosse Sexte, grosse Terz, kleine Terz, kleine Sexte im Allgemeinen bevorzugt wurden, so fanden doch manche Beobachter die Verhältnisse 6:7; 15:19; 11:13 u. a. wohlklingender, als z. B. die reinen Terzen und Sexten, zumal die kleine Sexte. Hierbei hatte selbstverständlich der Urtheilende keine Kenntniss von dem numerischen Verhältniss des Tonpaares, und es wurde immer nur einer allein geprüft, auch die Prüfung bei jedem mehrmals wiederholt. Übrigens zeigte sich das Urtheil öfters abhängig von der momentanen Stimmung, von der Erinnerung an diese oder jene Melodie, von der Aufmerksamkeit und anderen inneren Bedingungen. Dagegen kann man nicht einwenden, die gewählten ungewöhnlichen Intervalle seien zum grossen Theile wahren Consonanzen so nahe, dass sie mit diesen verwechselt worden seien; denn nur 12:19 oder 1,5833 kann für eine kleine Sexte 5:8 oder 1,6 und nur 16:19 oder 1,1875 für eine kleine Terz 5:6 oder 1,2 passiren. Alle anderen Intervalle der 11 Stimmgabeln, die in Betracht kommen, d. h. noch 42 dissonirende Tonpaare derselben können unter gewöhnlichen Umständen (mit Ober- und Combinationstönen) von Musi-

kern niemals für consonant erklärt werden [1]). Sie werden nur beim leisen Erklingen (so dass die Combinationstöne fortfallen) zum Theil zugelassen. Die Gesammtheit der Urtheile ist aber so ausgefallen, dass sich mit Sicherheit der Satz aufstellen lässt: Nach Beseitigung aller Obertöne und Combinationstöne aus einem dissonanten Klangpaar verliert dasselbe das Unangenehme der Dissonanz. Wenn man dennoch die Octave und die Quinte auch dann noch, wie ich finde, sicher erkennt, während die unvollkommeneren Consonanzen durchaus nicht für wohlklingender, als Intervalle von grösserem und von kleinerem Schwingungsverhältniss erklärt werden, so kann der Grund in einer Gewöhnung an jene Consonanzen durch ihre grössere Häufigkeit gesucht werden [2]).

Jedenfalls ist die auffallende Unsicherheit des Urtheils über die Sonanz eines Intervalls (wenn ich damit seine Eigenschaft entweder eine Consonanz oder eine Dissonanz zu sein bezeichne) sowie die Combinationstöne und die Obertöne fehlen, eine glänzende Bestätigung der Helmholtzischen Theorie. Die Unmöglichkeit zwei genügend weit in der Tonscala von einander abstehende Stimmgabeln der obigen Reihe deutlich dissoniren zu lassen, wenn die Combinationstöne und Obertöne durch leises Anstreichen und Zunahme der Hördistanz eliminirt werden, beweist die Nothwendigkeit der Combinationstöne und Obertöne zur Feststellung der Sonanz überhaupt und des Grades der Consonanz und Dissonanz insbesondere.

Je weniger sorgfältig man die Obertöne und Differenztöne aus einem dissonanten Klangpaar beseitigt, um so unangenehmer ist die Dissonanz und um so leichter wird es, das Intervall durch das Gehör allein unmittelbar zu bestimmen.

Aber es ist damit noch keineswegs zugleich die von Helmholtz gegebene Erklärung als richtig oder ausreichend dargethan. Das zeigt die zweite Consequenz. Wenn die Dissonanzen allgemein allein an den Schwebungen der Obertöne oder der Combinationstöne erkannt werden sollen, dann dürfen zwei Klänge, deren Grundtöne, Obertöne und Combinationstöne niederer und höherer Ordnung, wie man dieselben auch paarweise zusammenfassen möge, eine sehr grosse absolute Schwingungsdifferenz haben,

1) Wie meine Prüfung der Empfindlichkeit des Intervallensinnes schon für eine sehr viel tiefere Lage beweist.

2) Preyer, Grenzen der Tonwahrnehmung. S. 60. Jena 1876.

so dass überhaupt keine hörbaren Schwebungen zu Stande kommen, nicht dissoniren, selbst dann nicht, wenn jene Partialtöne und Combinationstöne einzeln deutlich percipirt werden. Die Richtigkeit dieser Consequenz der Theorie ist evident: ohne Rauhigkeit, d. h. ohne merkbare Schwebungen keine Dissonanz!

Ihre experimentelle Prüfung habe ich, schon um ihre Darlegung nicht zu verwickelt werden zu lassen, auf Tonpaare mit wenigen und zwar den ersten Obertönen beschränkt und dann mit Tonpaaren ohne Obertöne, deren Combinationstöne aber deutlich waren, verfolgt.

Um die Beweiskraft der Versuche darzuthun ist es erforderlich zu erinnern an das, was man, wenn 2 Töne, und zwar zunächst jeder mit seinem ersten Oberton zusammenklingen, hören kann.

Man hat in allen Fällen zu berücksichtigen (nach S. 38 f.).

2 Primärtöne I und II
2 Obertöne III und IV
4 Differenztöne erster Ordnung V bis VIII
8 Differenztöne zweiter Ordnung IX bis XVI

Somit 16 möglicherweise hörbare möglicherweise verschieden hohe Töne. Zu diesen kommen noch Differenztöne höherer, zunächst dritter Ordnung, bei denen entweder der Subtrahend oder der Minuend oder jeder von beiden ein Differenzton zweiter Ordnung ist, allgemein solche n-ter Ordnung, wobei der Subtrahend oder Minuend oder jeder von beiden ein Differenzton $(n-1)$-ter Ordnung ist, während ersteren Falles das andere Glied immer durch einen Partialton oder einen Differenzton niederer Ordnung als $(n-1)$-ter gegeben ist.

Ein Beispiel statt vieler. Das Tonpaar 1400 und 1600 (ganze Schw. in 1 Sec.) dissonirt, obwohl alle Theiltöne um 200 oder mehr differiren. Betrachtet man die Combinationstöne wie dabei etwa genügend langsame Schwebungen zu Stande kommen können, so hat man (vgl. oben S. 40):

V.	200
VIII.	400
XVI.	600
XV.	800
XI.	1000
VII.	1200
I.	1400
II. XIII.	1600

VI.	1800
XII.	2000
XIV.	2400
X.	2600
III.	2800
IX.	3000
IV.	3200

Also resultirt keinmal unter den Combinationstönen 1. und 2. Ordnung ein Ton von weniger als 200 Schwingungen.

Aber auch keiner dritter oder höherer Ordnung kann einen tieferen Ton hervorbringen, da alle Glieder der Reihe in diesem Falle bis auf das von 2200 Schw. schon vertreten sind. Ausser diesem entsteht kein neuer Ton.

Also bestätigt sich die Helmholtzische Theorie in diesem Falle nicht, man müsste denn annehmen 200 Stösse in der Secunde seien noch nicht glatt. Indessen es wollte mir überhaupt nicht plausibel erscheinen, dass in der Tonsumme, welche ein hohes Doppeltonpaar erzeugt auch dann, wenn die erzeugenden Töne in einiger Entfernung gehört werden, wo sie weniger unangenehm sind, aber dissonant bleiben, ein Combinationston dritter oder vierter Ordnung allein die Dissonanz bedingen sollte, zumal man durchaus keine Rauhigkeit hört und doch eine entschieden sehr unangenehme Klangempfindung hat. Ich vereinfachte daher die Bedingungen des Versuches durch Ausschaltung des Einflusses der Obertöne.

Allgemein wurde für eine schneidende Dissonanz erklärt das Verhältniss 8 : 9 die grosse Secunde, auch für die Stimmgabeltöne $c^{IV} : d^{IV}$, $c^{V} : d^{V}$, $c^{VI} : d^{VI}$, $c^{VII} : d^{VII}$, $c^{VIII} : d^{VIII}$. Ich will hier nur die bekanntesten Töne $c^{IV} : d^{IV}$ betrachten. Sie machen 2048 und 2304 Schwingungen in der Secunde, haben keine hörbaren Obertöne und selbst wenn deren vorhanden wären, würden sie keine Rauhigkeit geben. Die Obertöne wären nämlich

4096, 4608, 6144, 6912, 8192, 9216.

Es können also nur die Combinationstöne höherer Ordnung als Erreger des Unlustgefühls der Theorie zufolge in Betracht kommen [1]).

Werden die Coincidenzen nicht besonders erwähnt, so ergibt sich folgende Reihe der Differenztöne als möglich:

1. Ordnung 256, 2. Ordnung 1792, 3. Ordnung 1536 und 512,

1) Lehre von den Tonempfindungen 1. Aufl. S. 596.

4. Ordnung 1280, 1024 und 768. Die Combinationen 5. Ordnung geben keine neuen Töne mehr.

Man hat also mit den 2 Primärtönen 9 mögliche Töne, von denen keine zwei um weniger als 256 Schwingungen in der Secunde von einander abstehen. Diese geben noch nicht die geringste Rauhigkeit und die Dissonanz hat in der That nichts discontinuirliches an sich. Hier lässt also die Helmholtzische Theorie gleichfalls im Stich. Wenn die Dissonanzen von den Consonanzen sich durch Schwebungen der Combinationstöne höherer Ordnung bei einfachen Tönen unterscheiden sollen, dann könnte hier keine Dissonanz entstehen. Es ist aber Thatsache (oben S. 49), dass nicht nur dieses, sondern jedes Stimmgabelpaar, dessen Schwingungsverhältniss nicht durch die kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt werden kann, dissonirt, wenn man es laut genug klingen lässt, auch dann wenn selbst die Combinationstöne höchster Ordnung keine Schwebungen geben. Zum Beispiel ist $c^{IV} : h^{V}$ auch bei Stimmgabeln eine schneidende Dissonanz. Man hat hier die Primärtöne 2048 und 3840, das Verhältniss 8 : 15, die möglichen Combinationstöne 1. Ordnung 1792, 2. Ordnung 256, 3. Ordnung 1536 und 3584, 4. Ordnung 512; 1280; 3328; 2304, 5. Ordnung 768; 1024; 2560; 2816; 3072, 6. Ordnung: keine neuen Töne mehr.

Der geringste Frequenzunterschied, welcher hierbei überhaupt vorkommt, beträgt wieder 256, kann also keine Rauhigkeit bebedingen. Die Erklärung solcher Dissonanzen, und die Thatsache (S. 49), dass auch tiefere Gabelpaare (z. B. 1400 und 2000 oder 1800 und 2000) ohne Obertöne aber mit dem Differenzton niederer Ordnung dissoniren, wenn ihre Verhältnisse nicht durch die Zahlen 1 bis 5 und deren Dupla ausgedrückt werden können, erfordert eine Umgestaltung der Helmholtzischen Theorie.

Um diese zu begründen sind drei Thatsachen festzuhalten. Erstens: ausnahmslos bildet jedes Tonpaar, wenn sämmtliche überhaupt theoretisch möglichen Combinationstöne erster, zweiter, dritter, n-ter Ordnung erzeugt gedacht werden, eine vollständige arithmetische Reihe von Tönen (S. 42). Die Bildung der Reihe geschieht durch Bildung zuerst der Differenzen erster Ordnung, dann der zweiter, dritter, n-ter, bis keine neuen Töne mehr resultiren. Je grösser die den höheren Ton ausdrückende Zahl, wenn das Verhältniss $\alpha : \beta$ durch die kleinsten ganzen Zahlen bezeichnet ist, um so gliederreicher die Reihe. Als Beispiele können die Reihe (S. 53) der Secunde $8 : 9 = c^{IV} : d^{IV} = 2048 : 2304$ mit 9

Gliedern dienen, auch die Reihe der grossen Septime $8:15 = c^v : h^v = 4096 : 7680$ mit 15 Gliedern (S. 54 f.).

Wird diese Regel auf ein Tonpaar mit einer beschränkten Zahl von Obertönen angewendet, so dass der n-te Theilton (Aliquotton oder Partialton), das heisst der $(n-1)$-te Oberton (Beiton, Begleitton oder Nebenton) der höchste ist, dann wird entsprechend die Zahl der zu bildenden Differenzen höherer Ordnung vermindert, die resultirende arithmetische Reihe ist aber dieselbe.

Berücksichtigt man hierbei nur die in weitaus den meisten Fällen am leichtesten hörbaren ersten Obertöne 2α und 2β, wo $n = 2$, und wendet man die Regel auf die consonanten Verhältnisse an, so ergibt sich, wenn die Zahl der Puncte über einer Zahl die Ordnung des Combinationstons, der sie angehört, bezeichnet und die Klammern geringere Stärke der Töne bedeuten, folgendes:

Octave	1:2 2:4	1	2	$\dot{3}$	4						
Quinte	2:3 4:6	$\dot{1}$	2	3	4	$\ddot{5}$	6				
Quarte	3:4 6:8	$\dot{1}$	$\dot{2}$	3	4	$\dot{5}$	6	($\ddot{7}$)	8		
Gr. Terz	4: 5) 8:10)	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	4	5	$\dot{6}$	($\ddot{7}$)	8	($\ddot{9}$)	10
Gr. Sexte	3: 5) 6:10)	$\dot{1}$	$\dot{2}$	3	$\dot{4}$	5	6	$\dot{7}$	($\ddot{8}$	$\ddot{9}$)	10
Kl. Terz	5: 6) 10:12)	$\dot{1}$	$\dot{2}$	($\ddot{3}$)	$\dot{4}$	5	6	$\dot{7}$	($\ddot{8}$	$\ddot{9}$)	10
				($\ddot{1}\ddot{1}$)	12						
Kl. Sexte	5: 8) 10:16)	($\ddot{1}$)	$\dot{2}$	$\dot{3}$	($\ddot{4}$)	5	$\dot{6}$	($\ddot{7}$)	8	($\ddot{9}$)	10
		$\ddot{1}\ddot{1}$	($\ddot{1}\ddot{2}$	$\ddot{1}\ddot{3}$	$\ddot{1}\ddot{4}$	$\ddot{1}\ddot{5}$)	16				

wobei zu bemerken, dass nicht je kleiner das Intervall, sondern je grösser die kleinsten es ausdrückenden Zahlen, um so grösser die Zahl der Glieder der Reihe, um so zahlreicher also auch die möglichen Combinationstöne höherer Ordnung, welche zur Vervollständigung der arithmetischen Reihe aller erzeugbaren Töne erforderlich sind. Man kann also sagen, da die Combinationstöne höherer Ordnung bei mittlerer Intensität unhörbar sind, dass die Lücken der arithmetischen Reihe um so zahlreicher werden, je grösser die das Inter-

vall ausdrückenden kleinsten ganzen Zahlen und man ersieht aus der Tabelle, dass je kleiner diese Zahlen, um so deutlicher die ersten Glieder der Reihe sein müssen.

Dasselbe gilt für Stimmgabeln ohne alle Obertöne, wo sich folgende Combinationstöne, ergeben:

	1. Ord.	2. Ord.	3. Ord.	4. Ord.	5. Ord.	6. Ord.
1 : 2	0	0	0	0	0	0
2 : 3	1	0	0	0	0	0
1 : 3	2	0	0	0	0	0
3 : 4	1	2	0	0	0	0
4 : 5	1	3	2	0	0	0
3 : 5	2	1	4	0	0	0
2 : 5	3	1	4	0	0	0
5 : 6	1	4	2; 3	0	0	0
3 : 7	4	1	2; 6	5	0	0
4 : 7	3	1	2; 6	5	0	0
5 : 7	2	3	4; 1	6	0	0
6 : 7	1	5	2; 4	3	0	0
3 : 8	5	2	1; 6	4; 7	0	0
5 : 8	3	2	6; 1	4; 7	0	0
7 : 8	1	6	2; 5	3; 4	0	0
8 : 9	1	7	2; 6	3; 4; 5	0	0
9 : 10	1	8	2; 7	3; 6; 5	4	0
10 : 11	1	9	2; 8	7; 6; 3	4; 5	0
12 : 17	5	7	2; 10	15; 3; 8;	4; 9; 1; 6; 13; 14	11; 16
13 : 15	2	11	4; 9	7; 6; 5	8; 10; 3; 1	12; 14

Man erkennt hieraus deutlich, dass die wohlklingendsten Intervalle die wenigsten Combinationstöne zu erzeugen im Stande sind, und dass die unangenehmsten Dissonanzen die meisten erzeugen, gleichviel ob Obertöne da sind oder nicht. Mit anderen Worten: die Coincidenzen der secundären Töne (Combinations- und Obertöne) sind nothwendig bei den durch die kleinsten Zahlen ausgedrückten Intervallen am zahlreichsten schon bei den Combinationstönen niederer Ordnung und bei den ersten Obertönen.

Die zweite Thatsache gehört der allgemeinen Physiologie der Sinnesorgane an, ist aber noch wenig beachtet worden. Sie heisst: Je mehr einfache Sinneseindrücke gleichzeitig ein Organ afficiren, um so weniger deutlich wird jeder einzelne wahrgenommen. Mehrere Geruchs- oder mehrere Geschmacksreize zugleich geben

Empfindungsgemische, in welchen die einzelnen Gerüche und Geschmäcke nicht leicht scharf und vollständig erkannt werden. Mehrere gleichzeitige Berührungen mit warmen und kalten Stäbchen und Borsten oder Nadeln an einer Stelle sind schwer von einander zu sondern. Mehrere reine Farben zugleich auf die Netzhaut einwirkend geben eine Mischfarbe oder ein Grau, in dem die einzelnen Bestandtheile nicht vollständig wiedererkannt werden können und mehrere gleichzeitige Farben nebeneinander werden nicht unabhängig von ihrer gegenseitigen Beeinflussung durch Contrast wahrgenommen, also nicht so wie die einzelne reine Farbe für sich auf schwarzem Grunde. Mehrere einfache Töne zugleich geben eine weniger deutliche Empfindung jedes einzelnen Tones und zwar wird das akustische Empfindungsgemisch um so weniger die unmittelbare präcise Wahrnehmung jedes einzelnen reinen Tones gestatten, je mehr Töne zugleich das Ohr afficiren.

Aber — und dies führt zur dritten Thatsache — durch eine Vielheit gleichzeitiger einzeln nicht deutlicher Töne wird ein Unlustgefühl nicht jedesmal erzeugt. Allerdings werden sogar die wohlklingendsten Intervalle, die Octave, Duodecime, Quinte unangenehm, wenn ihre Grundtöne mit sehr vielen Obertönen zusammen ertönen. Lasse ich z. B. die zwei Zungen 512 und 1024 schwingen und zugleich mit ihnen die die ersten Obertöne gebenden Zungen oder Stimmgabeln

1024, 1536, 2048, 2560, 3072, 3584, 4096

so wird jeder diese Tonreihe

$c'' \; c''' \; g''' \; c^{IV} \; e^{IV} \; g^{IV} \; j^{IV} \; c^{V}$

abscheulich finden, obwohl darin keine Rauhigkeit oder Schwebung gehört wird. Ja der einzelne Ton von 32 Schwingungen gibt mit 30 bis 40 Obertönen, wie ich in meinen Vorlesungen zu demonstriren pflege, einen sehr hässlichen Schall, dagegen der Differenzton von 32 einen schönen ernsten Ton. Überhaupt ist, schon ohne Intervalle zu berücksichtigen, allein der einzelne Ton mit vielen Obertönen rauh, der mit wenigen glatt, was sich in doppelter Weise darthun lässt. Einerseits können, wegen der Grenze der Leistungsfähigkeit des Ohres nach oben hohe Töne nicht so viele Obertöne haben wie tiefe, also klingen alle hohen Töne glatter, als alle tiefen Töne bei musikalischen Instrumenten und alle höchsten Töne in derselben Klangfarbe glatt; andererseits überwiegen bei tiefen Intervallen die Obertöne, in der Höhe die Combinationstöne als Störer des ruhigen Flusses. Denn auch tiefere Töne klingen, wenn man ihnen die Obertöne nimmt, glatt

und milde, z. B. die Gabeltöne, es sei denn dass man bis nahe an die untere Tongrenze hinabsteigt, wo dann die unmittelbare Discontinuität durch die Schwingungen des Grundtons merkbarer wird.

Wenn man nun, wie ich es that, lauter glatt klingende Stimmgabeln unter sich oder mit glatten hohen Zungen zusammenklingen lässt und zwar so, dass keine Schwebungen von geringerer Frequenz als 256 in der Secunde entstehen können, und man findet doch das Gemisch dissonant, wie z. B. die Gabeln 1200 und 1700, so kann man diese glatten Dissonanzen darauf zurückführen, dass auf unser Ohr viele Töne zusammen einen unangenehmen Eindruck machen können. Aber damit ist durchaus nicht gesagt, dass sie einen unangenehmen Eindruck in allen Fällen machen müssen. Wir wissen, dass vielstimmiger Gesang sehr schön sein kann und zwar dann, wenn die Mannigfaltigkeit der Töne eine bestimmte Ordnung zeigt. Diese Ordnung ist charakterisirt durch eine grosse Anzahl von Coincidenzen der Combinationstöne und Obertöne miteinander und untereinander, so dass die Gesammtzahl der vorhandenen wirklichen Töne viel kleiner als die der möglichen Töne wird und dadurch jeder einzelne Ton leichter erkennbar — nicht erkannt — wird. Aus vielen unmerklichen undeutlichen unbewussten Übereinstimmungen entspringt, wie Leibniz ungemein treffend sagte, das Vergnügen. Ebenso entspringt aber aus vielen Verschiedenheiten, unmerklichen, unerkannten Abweichungen das Missvergnügen. Daher wird eine Vielheit von wirklichen Tönen, wenn sie auch z. Th. nicht merklich sind, mit wenigen Coincidenzen verwirrend sein, in ihnen jene Ordnung vermisst werden. Sie sind dissonant; ob weil die Psyche die aus sehr ungleich starken Tönen bestehende Reihe als arithmetische nicht erkennen kann oder weil das periphere Ohr dieselben nicht gesondert ihr zur Verfügung stellt, ist eine offene Frage, die sich vielleicht physiologisch erledigt. Je vollständiger und kleiner die Gliederzahl der arithmetischen Reihe eines Tonpaars, um so grösser die Lust, weil da die Ordnung leicht erkannt wird, um mit Descartes, Leibniz und Euler zu reden.

Also feststeht, dass

1) je grösser die beiden ein Tonverhältniss ausdrückenden kleinsten ganzen Zahlen sind, um so mehr Combinationstöne, welche immer eine arithmetische Reihe bilden, entstehen

müssen, gleichviel ob Obertöne zugegen sind oder nicht;

2) je mehr einfache Töne zugleich auf das Ohr wirken, um so weniger deutlich jeder einzelne Ton;

3) je mehr Coincidenzen unter den möglichen und wirklichen Tönen, die ein Intervall erzeugt, um so grösser die Befriedigung im Gefühle, je weniger Coincidenzen, um so verwirrender und darum unangenehmer der Eindruck.

Da, wie ich gezeigt habe und sich leicht durch die von mir angegebenen einfachen Versuche darthun lässt, diese Sätze auch für solche Töne volle Geltung haben, welche wegen ihres eigenen Abstandes und des Abstandes ihrer Obertöne und ihrer Combinationstöne voneinander keine merklichen Schwebungen geben können, so wird die Helmholtzsche Theorie der Consonanz eine förmliche und sachliche Erweiterung erfahren müssen.

Ein Tonpaar ist um so wohlklingender je weniger verschiedene Combinationstöne, also je mehr Coincidenzen es zu erzeugen im Stande ist, indem eine Vielheit von gleichzeitigen Tönen, die eine längere vollständige oder lückenhafte arithmetische Reihe bilden, verwirrt und dadurch Unlust bewirkt, wie ein Rechenexempel, das man im Kopfe lösen will und nicht lösen kann, weil es zu hohe Ziffern enthält.

Die Schwebungen der Obertöne und Combinationstöne sind sowie sie merklich werden, ein weiteres Moment, indem durch sie die Glätte der Empfindung gestört wird, aber sie genügen nicht sämmtliche Dissonanzen zu erklären.

Die Rechnung und die Beobachtung lehren, dass die anerkannten Consonanzen die wenigsten Combinationstöne geben müssen, die unangenehmsten Dissonanzen die meisten, jene die meisten Coincidenzen, diese die wenigsten. Bei jenen braucht man wirklich nur bis 5 zu zählen.

Das Experiment lehrt, dass die Dissonanzen nach Beseitigung der Obertöne und der Combinationstöne nicht mehr unangenehm sind, dass aber nicht allein die Schwebungen derselben das Dissonante bedingen, sondern bei hohen Stimmgabeltönen auch glatte Dissonanzen ohne Schwebungen vorkommen. Durch das Zusam-

mensein zuvieler möglicher secundärer Töne werden diese letzteren erklärlich. Die arithmetische Reihe hat ausserdem Lücken.

Zu alledem kommt als ein wesentlicher Factor hinzu, dass im Laufe vieler Generationen, zum Theil sogar noch in historischer Zeit, durch Vererbung und Übung der Sinn für die Reinheit der gegenwärtig geltenden Consonanzen viel feiner entwickelt worden zu sein scheint, besonders mittelst des Gesanges, als der für die Reinheit der meisten gebräuchlichen Dissonanzen (die Secunde 9:8 vielleicht ausgenommen). Daher mag es kommen, dass sehr Geübte, auch wo alle die genannten Hilfsmittel fehlen, selbst bei leisen und ganz reinen Intervallen, doch immer wenigstens die Octave und die Quinte erkennen und bevorzugen.

Die einzelnen Töne dürfen nur nicht an sich unangenehm sein, sonst ist keine Consonanz möglich, wie bei den höchsten Tönen.

Es scheint mir auch nur auf diesem Wege die sichere Erkenntniss der Intervalle beim Nacheinanderklingen der zwei Töne erklärlich. Denn da fehlen die Combinationstöne zum grössten Theil, die Schwebungen derselben und der Obertöne ganz.

Und es liegt sogar hierin allein schon ein schweres Bedenken gegen die Helmholtzische Theorie der Consonanz. Denn, dass die Erkennung der dissonirenden und consonirenden Intervalle beim Nacheinandererklingen der zwei Töne ohne alle Schwebungen eine erstaunliche Sicherheit erreichen kann steht fest. Um diese Thatsache mit jener Theorie zu vereinigen, müsste eine sehr complicirte Hilfshypothese über die Betheiligung des Gedächtnisses an der Bildung des Tonwahrnehmungsurtheils aufgestellt werden. Ich sehe von einer Darlegung derselben um so lieber ab, als durch meine hier vorliegende Arbeit die Schwierigkeit gehoben scheint. Denn die Ergebnisse derselben führen nothwendig darauf, dass schliesslich beim Intervallschätzen es auf die Abstände der erregten Nervenfaserenden in der Schnecke, d. h. auf die Zahl der unerregten Faserenden zwischen zwei erregten ankommt, wie beim Distanzenschätzen mittelst der Netzhaut und mittelst der Tastnerven. Combinationstöne niederer Ordnung erleichtern die Perception des Abstandes zweier erregter Faserenden, weil sie immer eine arithmetische Reihe bilden, in der die beiden Töne, deren Abstand geschätzt werden soll, zwei Glieder sind. Ich stelle mir den Vorgang folgendermaassen vor:

Es sei diejenige Nervenfaser in der Schnecke, welche auf C_I (32) am stärksten mitschwingt die n-te Faser vom Anfangs-

punct oder Nullpunct der Faserscala, so wird man, um bis zu der der Octave jenes Tones entsprechenden Faser C zu gelangen, dieselbe Anzahl n von Fasern überschreiten müssen. Wird der so zurückgelegte Weg von Null bis 2n von C an noch einmal durchmessen, also bis c^0 fortgeschritten, so ist die Anzahl der übersprungenen Fasern wieder 2n und c^0 entspricht der Faser, die, wenn vom Nullpunct an numerirt wird, 4n heisst. Will man nun bis zur Octave von 4n gelangen, so muss man wieder gerade soweit fortschreiten, als man vom Anfangspunct an gehen musste, um bis zur Faser 4n zu gelangen, also bis zur Faser 8n und sofort. Die sehr charakteristische Octavenempfindung tritt also immer dann ein, wenn der Angriffspunct des zweiten (höheren) Tones um ebensoviel Faserenden, d. h. um denselben Abstand, von dem des ersten (tieferen) entfernt ist, wie dieser vom Nullpunct und jede Octave (ausser der tiefsten C_{II} bis C_I und den sehr hohen jenseits der 10. Octave etwa) enthält halb soviel Fasern, als die ihr folgende. Erstreckt sich dagegen die Progression von einem gegebenen Ton an nur bis zu der Hälfte des Weges, den man vom Nullpunct an zurücklegen musste, um bis zu ihm, d. h. bis zu der ihm entsprechenden Faser, etwa 2n, zu gelangen, so hat man die Quintenempfindung, welche durch Erregung der Faser in der Mitte zwischen 2n und 4n, also 3n gegeben wird. Legt man den dritten Theil des Weges 3n zurück, nachdem 3n erreicht ist, so erhält man die Quartenempfindung durch Erregung der Faser, welche um $^1/_3$ von $3n = n$ weiter höher liegt, also 4n. Beträgt das Stück, um welches man über eine beliebige erregte Faser hinaus fortschreitet ein Viertel des Weges, den man vom Nullpunct an durchschreiten musste, um zu ihr zu gelangen, so kommt man auf die grosse Terz, also von 4n auf 5n. Ist die Strecke ein Fünftel jenes Weges, so erhält man die kleine Terz, für die Faser n also die Faser $n + {}^1/_5\,n$, für die Faser 5n die Faser 6n u. s. w. Beträgt das Zusatzstück $^2/_3$ des durchschrittenen Weges — immer vom Anfangspunct an — so resultirt die Faser, deren Erregung die grosse Sexte gibt, für n also $n + {}^2/_3\,n$ für 6n also 10n. Ist diese Strecke $^3/_4$ des zurückgelegten Weges, dann erhält man die natürliche Septime, die Faser $n + {}^3/_4 n$, ist sie $^3/_5$, dann hat man die kleine Sexte $n + {}^3/_5 n$, ist sie $^1/_8$, dann hat man den ganzen Ton 9 : 8 oder $n + {}^1/_8 n$, und so weit die Anzahl der vorhandenen Nervenendigungen reicht, wird die Untertheilung, d. h. die Schätzung des Abstandes an der Zahl der unerregt zwischen den 2 Tönen befindlichen Enden fortgesetzt

werden können, vorausgesetzt, dass zwischen ihnen schliesslich noch mindestens eine Faser unerregt bleibt. Man hat also für die folgenden Intervalle die leichteste und sicherste Schätzung, nämlich

für die	Octave	$^1/_1$	des Abstandes
„ „	Quinte	$^1/_2$	„ „
„ „	Quarte	$^1/_3$	„ „
„ „	Gr. Terz	$^1/_4$	„ „
„ „	Kl. Terz	$^1/_5$	„ „
„ „	Gr. Sexte	$^2/_3$	„ „
„ „	Kl. Sexte	$^3/_5$	„ „
„ „	natürl. Septime	$^3/_4$	„ „
„ den	ganzen Ton	$^1/_8$	„ „

vom Anfangspunct bis zu dem ersten Ton zu schätzen, schätzt also genauer wo viele Nervenenden sind, d. h. in den höheren Octaven (die höchsten ausgenommen) und wo einige Combinationstöne sind (viele verwirren). Denn diese markiren die Theilpuncte der durchlaufenen Strecke. Z. B. werden bei der Quarte 3n : 4n die Fasern 1n und 2n mit erregt, also wird die Schätzung des Drittels erleichtert. So bei den anderen Intervallen.

Beispielsweise hat man für die am leichtesten zu erlernende diatonische C-Durtonleiter die Abstände:

1	$1^1/_8$	$1^1/_4$	$1^1/_3$	$1^1/_2$	$1^2/_3$	$1^7/_8$	2
C	D	E	F	G	A	H	c^0

für den Duraccord C:E:G oder 4:5:6 die Abstände $1 : 1^1/_4 : 1^1/_2$, also die am leichtesten zu schätzenden Distanzen. Die Entstehung der Tonleitern (gleichsam Leitern, deren Stufen man beim Auf- und Absteigen unbewusst zählt) gewinnt durch diese physiologische Auffassung überhaupt ein neues Ansehen. Die bis jetzt vorliegenden Schätzungen der Anzahl der Nervenendigungen in der Schnecke stehen im Einklang mit der Hypothese, denn wenn auf die 16 bis 31 Schwingungen der tiefsten Töne unterhalb C_I n, auf die Octave C_I—C gleichfalls n, auf die folgende Octave C—c^0 2.n, auf die darauffolgende 2^2.n, die fünfte 2^3.n u. s. f. Nervenenden kommen, so verlangen 10 Octaven (bis zum c^{VII}) 512 n Nervenenden, also wenn n = 32 wäre, 16384 Nervenenden, welche nebeneinander ausgebreitet sind[1]). Selbst die spiralige Gestalt der Cochlea lässt sich hiermit in eine interessante Beziehung setzen und die eigenthüm-

1) Nach Hensen sind 16400 Nervenenden in der Schnecke anzunehmen. Vgl. meine Schrift, Über die Grenzen d. Tonwahrnehmung. Jena 1876. S. 41.

lich befriedigenden Empfindungen des Fortschreitens um gleiche Strecken, welche jeder beim Hören meiner 11 Stimmgabeln hat, werden verständlich.

Denn bei ihnen entsprechen sich:

Schwingungen:	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600
Abstände:	1	$1^{1}/_{10}$	$1^{2}/_{10}$	$1^{3}/_{10}$	$1^{4}/_{10}$	$1^{5}/_{10}$	$1^{6}/_{10}$
Intervalle:	Prime	$^{11}/_{10}$	kl. Trz.	$^{13}/_{10}$	$^{7}/_{5}$	Quinte	kl. Sxt.

Schwingungen:	1700	1800	1900	2000
Abstände:	$1^{7}/_{10}$	$1^{8}/_{10}$	$1^{9}/_{10}$	2
Intervalle:	$^{17}/_{10}$	Kl. Spt.	$^{19}/_{10}$	Oct.

Auch werden alle Beobachtungen über die Wahrnehmung kleinster Tonhöhenunterschiede auf Grund der vorgetragenen Annahme verständlich, dass z. B. in den tiefsten Lagen, wo wenige Fasern auf die Octave kommen, diese Unterschiede nicht sicher erkannt werden, in der sechsten Octave am sichersten. Nach oben hin ist es die fehlende Übung wahrscheinlich mehr als der Mangel an Fasern, welche die Unterscheidung ungenau machen, denn durch Übung wächst die Sicherheit im Schätzen (ausser für die Quiektöne der achtgestrichenen Octave) erstaunlich schnell. Auch ist zu bedenken, dass kleine Nervenendigungsdistanzen in der Netzhaut und Tasthaut nicht so schwer genau zu schätzen sind wie grosse. Ferner lehrt die Erfahrung, dass diejenigen Intervalle überall am sichersten erkannt werden (ohne Combinationstöne, ohne Obertöne, ohne Schwebungen), bei denen der Abstand der beiden erregten Nervenfasern meiner Annahme zufolge am leichtesten zu taxiren ist (an der Zahl der unerregten Fasern) nämlich die Octave mit dem doppelten und die Quinte mit dem anderthalbfachen Abstand vom Abstand des tieferen Tones vom Anfangspunct oder von der am tiefsten abgestimmten Nervenfaser an.

Man könnte sogar die Abneigung Intervalle, welche durch die Zahlen

7 9 11 13

(im Divisor) ausgedrückt werden in der Musik zu verwenden darauf zurückführen, dass es in der That leichter ist

$^{1}/_{2}$ $^{1}/_{3}$ $^{1}/_{5}$

einer Distanz und deren Dupla und Hälften, Viertel, Achtel

$^{1}/_{1}$ $^{2}/_{3}$ $^{2}/_{5}$ $^{1}/_{4}$ $^{1}/_{6}$ $^{1}/_{8}$ $^{1}/_{10}$ $^{1}/_{12}$ $^{1}/_{20}$ $^{1}/_{24}$ u. s. w.

zu taxiren, als

$^{1}/_{7}$ $^{1}/_{9}$ $^{1}/_{11}$ $^{1}/_{13}$ ...

und deren Hälften, Viertel, u. s. w. An sich ist factisch die natürliche Septime 7:4 (entspr. $1^3/_4$) öfters wohlklingender, als die kleine Sexte 8:5.

Endlich ist noch dem Einwande zu begegnen, dass man von einer Zählung der Nervenfasern beim Hören von Tönen nichts wisse, das „unbewusste" Taxiren sei eine willkürliche Annahme. Der Einwand erledigt sich dadurch, dass man auch beim Schätzen einer Distanz mit der Netzhaut oder Tasthaut nichts anderes thut als die Zahl der Nervenfasern zwischen den zwei erregten Puncten „unbewusst zählen", selbst wenn man von ihrer Existenz nichts weiss. Darin hat Leibniz jedenfalls Recht, dass wenn wir auch nicht fühlen, wie das Ohr zählt, wir doch das Ergebniss der Zählung merken, freilich in anderem Sinne als er meinte.

IV.

NOTIZ ÜBER DIE WAHRNEHMUNG KLEINSTER TONHÖHENUNTERSCHIEDE.

Bekanntlich hat Fechner[1]) die Thatsache, dass ein Tonpaar bei gleichbleibendem Verhältniss seiner Schwingungszahlen, wenn auch die absolute Schwingungsfrequenz innerhalb sehr weiter Grenzen variirt, ähnliche Intervallempfindungen liefert, zu Gunsten des Weberschen Gesetzes verwerthet, demzufolge die relative Unterschiedsempfindlichkeit constant bleibt, auch wenn die absolute Unterschiedsempfindlichkeit erheblich variirt.

E. H. Weber selbst hatte angegeben[2]), dass bei der Vergleichung der Höhe zweier Töne auf die absolute Schwingungszahl nichts ankomme, sondern alles auf das Verhältniss der beiden Zahlen.

Ich zeigte nun durch zahlreiche Versuche[3]), dass das Verhältniss der Schwingungszahlen eines Tonpaares unverändert bleiben kann und doch mit Änderung der absoluten Schwingungszahlen die Unterschiedsempfindung durchaus nicht unverändert bleibt. Die Abweichungen vom Weberschen Gesetz sind so palpabel, dass dieses auf Tonhöhen überhaupt nicht mehr anwendbar ist, wie

1) Elemente der Psychophysik. 1860. I. Bd. S. 137. 182.
2) In Wagners Handwörterbuch der Physiologie 3. Bd. II. S. 560. 1846.
3) Grenzen der Tonwahrnehmung. Jena 1876. S. 26 bis 37.

ich vor zwei Jahren hervorhob mit der Bemerkung, dass weder Weber noch Fechner Experimente zum Beweise ihrer Ansicht beigebracht hätten.

Fechner, welcher sonst gegen alles was die von ihm aus dem Weberschen Gesetze abgeleitete psychophysische Formel zweifelhaft machen könnte womöglich Schritt für Schritt seinen Standpunct scharfsinnig und sachgemäss vertheidigt, gibt in diesem Fall die Anwendbarkeit der Formel preis. Er bedauert, dass durch meine Versuche „die wichtige Stütze, welche das Webersche Gesetz durch den Ausspruch des musikalischen Gefühls im Gebiete der Tonhöhe bisher fand" wegfällt [1]).

Hiermit ist jedoch die Angelegenheit noch nicht ganz erledigt, denn neuerdings behauptet Dr. Georg Elias Müller, Privatdocent der Philosophie in Göttingen, in seiner kritischen Schrift: „Zur Grundlegung der Psychophysik" [2]) meine Versuche seien zum Beweise der Ungültigkeit des Weberschen Gesetzes für Tonhöhen unzulänglich. Er meint 1) es komme darauf an, dass die verschiedenen Beobachter oder Versuchspersonen gleiche Empfindlichkeit für Tonhöhenunterschiede besitzen müssten, um meine Resultate beweiskräftig zu machen, 2) sei die Klangfarbe zu berücksichtigen, 3) ich hätte nur für zwei verschiedene Tonhöhen den eben merklichen Unterschied bestimmt, 4) mein Verfahren entspreche weder der Methode der richtigen und falschen Fälle noch einer wirklichen Methode der eben merklichen Unterschiede, sondern weit eher der nach ihm unzulänglichen Methode der eben immer erkennbaren Unterschiede. Aus diesen Gründen sei eine Entscheidung der Frage, ob das Webersche Gesetz für Tonhöhen gilt oder nicht, durch meine Versuche nicht gegeben.

Durch die vier Einwände wird jedoch in Wahrheit meine Behauptung nicht im geringsten erschüttert. Denn ausdrücklich habe ich betont, dass es mir auf die kleinsten überhaupt von den Geübtesten jedesmal sicher erkannten Unterschiede ankommt und dass von keinem Beobachter in keiner Klangfarbe 0,2 Schwingung in der ganzen Tonreihe von den tiefsten Tönen an bis zu den höchsten erkannt wird, dass dagegen 0,5 Schwingung sicher zwischen 100 und 1000 jedesmal von den Geübtesten erkannt wird. Innerhalb dieser Grenzen ist also die absolute Unterschiedsempfindlichkeit eingeschlossen. Innerhalb derselben variirt sie, das ändert

1) Fechner, In Sachen der Psychophysik. Leipzig 1877. S. 169.
2) Berlin 1878. § 104. S. 290.

aber an meiner Schlussfolgerung bezüglich der Ungültigkeit des Weberschen Gesetzes nichts. Denn wenn meine Versuchspersonen auf 500 und 1000 Schwingungen von Metallzungen 0,25 nicht erkennen, aber 0,5 sicher erkennen, und Delezenne für Saiten bei 120 und Seebeck für Stimmgabeln bei 440 dasselbe fanden, so sind die relativen Unterschiedsempfindlichkeiten ε nicht, wie jenes Gesetz verlangt, constant, sondern da $\varepsilon < \frac{n}{0{,}25}$ und $> \frac{n}{0{,}5}$ bei

Schwingungen in 1 Sec.	ε
120	< 480 und > 240
440	< 1760 „ > 880
500	< 2000 „ > 1000
1000	< 4000 „ > 2000

Hieraus geht evident hervor die Inconstanz der relativen Unterschiedsempfindlichkeit und damit die Ungültigkeit des Weberschen Gesetzes. Beobachtungen an Ungeübten, die ich in grosser Zahl anstellte, können das Resultat nicht erschüttern. Denn von ihnen wird noch weniger als von Geübten 0,2 Schwingung erkannt und der Minimalwerth für die absolute Unterschiedsempfindlichkeit grösser als 0,5 gefunden, also der Minimalwerth für die relative verkleinert.

Wenn ich darauf hinweise, dass um obiges zu entkräften der Einfluss der Klangfarbe die absolute Unterschiedsempfindlichkeit für tiefe Töne einer Saite bis 0,06 einer Schwingung erhöhen, für hohe der Metallzungen bis 2 Schw. vermindern müsste, und dass ich absichtlich den „eben immer merklichen“ und den eben immer unmerklichen Schwingungsunterschied suchte, so wird die Hinfälligkeit der Einwände gegen die Beweiskraft meiner Versuche dem Kundigen noch deutlicher.

Druck von A. Neuenhahn in Jena.

Intervalle.	1	25/24	27/25	9/8	75/64	6/5	5/4	32/25	125/96	4/3	25/18	36/25	3/2	25/16	8/5	5/3	125/72	9/5	15/8	48/25	125/64
Töne.	C	Cis	Des	D	Dis	Es	E	Fes	Eis	F	Fis	Ges	G	Gis	As	A	Ais	B	H	Ces	His
Subcontra-oder Grosse Contra-Oct.	16½	17 1/26	17 41/50	18 9/16	19 53/128	19 4/5	20⅝	21 3/25	21 31/96	22	22 11/12	23 19/25	24¾	25 25/32	26 2/5	27½	28 31/48	29 7/10	30 15/16	31 17/25	32 29/128
Contra-Octave	33	34 3/26	35 17/25	37⅛	38 43/64	39 3/5	41¼	42 6/25	42 31/32	44	45 5/6	47 13/25	49½	51 3/16	52 4/5	55	57 7/24	59 2/5	61⅞	63 9/25	64 23/64
Grosse Octave	66	68 3/4	71 7/25	74¼	77 11/32	79⅕	82½	84 12/25	85 15/16	88	91⅔	95 1/25	99	103⅛	105 3/5	110	114 7/12	118 4/5	123¾	126 13/25	128 29/32
Kleine oder Ungestrich. Oct.	132	137 1/2	142 17/25	148½	154 11/16	158 2/5	165	168 24/25	171⅞	176	183⅓	190 2/25	198	206¼	211 1/5	220	229 1/6	237 3/5	247½	253 11/25	257 13/16
Eingestrichene Octave	264	275	285 3/25	297	309 3/8	316 4/5	330	337 23/25	343¾	352	366 2/3	380 9/25	396	412½	422 2/5	440	458⅓	475 1/5	495	506 22/25	515 5/8
Zweigestrichene Octave	528	550	570 5/25	594	618 3/4	633 3/5	660	675 21/25	687½	704	733⅓	760 8/25	792	825	844 4/5	880	916 2/3	950 3/5	990	1013 19/25	1031¼
Dreigestrichene Octave	1056	1100	1140 12/25	1188	1237 1/2	1267 1/5	1320	1351 17/25	1375	1408	1466 2/3	1520 16/25	1584	1650	1689 3/5	1760	1833 1/3	1900 4/5	1980	2027 13/25	2062½
Viergestrichene Octave	2112	2200	2280 24/25	2376	2475	2534 2/5	2640	2703 1/25	2750	2816	2933 1/3	3041 7/25	3168	3300	3379 1/5	3520	3666 2/3	3801 3/5	3960	4055 1/25	4125
Fünfgestrichene Octave	4224	4400	4561 23/25	4752	4950	5068 4/5	5280	5406 18/25	5500	5632	5866 2/3	6082 13/25	6336	6600	6758 2/5	7040	7333 1/3	7603 1/5	7920	8110 2/25	8250
Sechsgestrichene Octave	8448	8800	9123 1/25	9504	9900	0137 3/5	10560	10813 11/25	11000	11264	11733 1/3	12165 3/25	12672	13200	13516 4/5	14080	14666 2/3	15206 2/5	15840	16220 4/25	16500
Siebengestrichene Octave	16896	17600	18247 17/25	19008	19800	20275 1/5	21120	21626 22/25	22000	22528	23460 2/3	24330 6/25	25344	26400	27033 3/5	28160	29333 1/3	30412 4/5	31680	32440 8/25	33000
Achtgestrichene Octave	33792	35200	36495 9/25	38016	39600	40550 2/5	(42240)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Töne	Reine Prime	Überm. Prime	Vermind. Secunde	Grosse Secunde	Überm. Secunde	Kleine Terz	Grosse Terz	Vermind. Quarte	Überm. Terz	Reine Quarte	Überm. Quarte	Vermind. Quinte	Reine Quinte	Überm. Quinte	Kleine Sexte	Grosse Sexte	Überm. Sexte	Kleine Septime	Grosse Septime	Vermind. Octave	Überm. Septime
Intervalle	1	1,04166	1,08	1,125	1,171875	1,2	1,25	1,28	1,3020833	1,33..	1,388..	1,44	1,5	1,5625	1,6	1,66..	1,73611.	1,8	1,875	1,92	1,953125

W. Preyer comm.

Lith. Anst. v. C. Mahler, Jena.

Intervalle.	1	25/24	27/25	9/8	75/64	6/5	5/4	32/25	125/96	4/3	25/18	36/25	3/2	25/16	8/5	5/3	125/72	9/5	15/8	48/25	125/64
Töne.	C	Cis	Des	D	Dis	Es	E	Fes	Eis	F	Fis	Ges	G	Gis	As	A	Ais	B	H	Ces	His
Subcontra-oder Grosse Contra-Oct.	16	16 2/3	17 7/25	18	18 3/4	19 1/3	20	20 12/25	20 5/8	21 1/3	22 2/9	23 1/25	24	25	25 3/5	26 2/3	27 7/9	28 4/5	30	30 18/25	31 1/4
Contra-Octave	32	33 1/3	34 18/25	36	37 1/2	38 2/5	40	40 24/25	41 7/8	42 2/3	44 4/9	46 2/25	48	50	51 1/5	53 1/3	55 5/9	57 3/5	60	61 11/25	62 1/2
Grosse Octave	64	66 2/3	69 3/25	72	75	76 4/5	80	81 23/25	83 1/3	85 1/3	88 8/9	92 4/25	96	100	102 2/5	106 2/3	111 1/9	115 1/5	120	122 23/25	125
Kleine oder Ungestrich. Oct.	128	133 1/3	138 6/25	144	150	153 3/5	160	163 21/25	166 2/3	170 2/3	177 7/9	184 8/25	192	200	204 4/5	213 1/3	222 2/9	230 2/5	240	245 18/25	250
Eingestrichene Octave	256	266 2/3	276 12/25	288	300	307 1/5	320	327 17/25	333 1/3	341 1/3	355 5/9	368 16/25	384	400	409 3/5	426 2/3	444 4/9	460 4/5	480	491 13/25	500
Zweigestrichene Octave	512	533 1/3	552 24/25	576	600	614 2/5	640	655 9/25	666 2/3	682 2/3	711 1/9	737 2/25	768	800	819 1/5	853 1/3	888 8/9	921 3/5	960	983 1/25	1000
Dreigestrichene Octave	1024	1066 2/3	1105 23/25	1152	1200	1228 4/5	1280	1310 18/25	1333 1/3	1365 1/3	1422 2/9	1474 14/25	1536	1600	1638 2/5	1706 2/3	1777 7/9	1843 1/5	1920	1966 2/25	2000
Viergestrichene Octave	2048	2133 1/3	2211 21/25	2304	2400	2457 3/5	2560	2621 11/25	2666 2/3	2730 2/3	2844 4/9	2949 3/25	3072	3200	3276 4/5	3413 1/3	3555 5/9	3686 2/5	3840	3932 4/25	4000
Fünfgestrichene Octave	4096	4266 2/3	4423 17/25	4608	4800	4915 1/5	5120	5242 23/25	5333 1/3	5461 1/3	5688 8/9	5898 6/25	6144	6400	6553 3/5	6826 2/3	7111 1/9	7372 4/5	7680	7864 8/25	8000
Sechsgestrichene Octave	8192	8533 1/3	8847 9/25	9216	9600	9830 2/5	10240	10485 19/25	10666 2/3	10922 2/3	11377 7/9	11796 12/25	12288	12800	13107 1/5	13653 1/3	14222 2/9	14745 3/5	15360	15728 16/25	16000
Siebengestrichene Octave	16384	17066 2/3	17694 18/25	18432	19200	19660 4/5	20480	20971 13/25	21333 1/3	21845 1/3	22755 5/9	23592 24/25	24576	25600	26214 2/5	27306 2/3	28444 4/9	29491 1/5	30720	31457 7/25	32000
Achtgestrichene Octave	32768	34133 1/3	35389 11/25	36864	38400	39321 3/5	40960	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Töne	Reine Prime	Übermässige Prime	Vermindert Secunde	Grosse Secunde	Übermässige Secunde	Kleine Terz	Grosse Terz	Vermindert Quarte	Übermässige Terz	Reine Quarte	Übermässige Quarte	Vermindert Quinte	Reine Quinte	Übermässige Quinte	Kleine Sexte	Grosse Sexte	Übermässige Sexte	Kleine Septime	Grosse Septime	Vermindert Octave	Übermässige Septime
Intervalle	1	1,04166	1,08	1,125	1,171875	1,2	1,25	1,28	1,3020833	1,33..	1,388..	1,44	1,5	1,5625	1,6	1,66..	1,73611..	1,8	1,875	1,92	1,953125

W. Preyer comm.

Lith. Anst. v. G. H. Müller, Jena.