Max Planck Research Group
Epistemes of Modern Acoustics

Sound & Science: Digital Histories

König, Walter. "Hydrodynamisch-akustische Untersuchungen (2)."
Annalen der Physik, 3rd ser. 42, (1891): 449–563.

https://acoustics.mpiwg-berlin.mpg.de/node/506

Scan licensed under: CC BY-SA 3.0 DE | Max Planck Institute for the History of Science

MAX PLANCK INSTITUTE
FOR THE HISTORY OF SCIENCE

Signatur
Nr. 909
1/18

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

[F. 3]

BAND XLII.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT ACHTUNDSIEBZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

NEBST FÜNF FIGURENTAFELN.

KÖNIGL. ASKANISCHES GYMNASIUM
BERLIN SW.



LEIPZIG, 1891.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

Verein. Askan. u. Tempelh. Gymnasium
Lehrerbücherei

Inhalt.

Neue Folge. Band XLII.

Erstes Heft.

Seite

I. G. Hüfner und E. Albrecht. Ueber die Durchlässigkeit des Wassers für Licht von verschiedener Wellenlänge . . 1

II. S. Arrhenius. Ueber die Leitung von Electricität durch heisse Salzdämpfe 18

III. K. R. Koch. Ueber eine Veränderung, welche die Oberflächen der Electroden durch die Polarisation erfahren und über die Occlusion der Gase 77

IV. J. Bergmann. Die Inductionswage in Verbindung mit Disjunctor und Galvanometer 90

V. E. Lévay. Verhältniss der Stromarbeit zur chemischen Energie bei galvanischen Elementen 103

VI. R. Sissingh. Ueber das Kerr'sche magneto-optische Phänomen bei äquatorialer Magnetisirung an Eisen 115

VII. E. Lecher. Ueber die Messung der Dielectricitätsconstante mittelst Hertz'scher Schwingungen 142

VIII. H. Rubens. Ueber stehende electrische Wellen in Drähten und deren Messung 154

Seite

IX. A. Elsas. Ueber Widerstandsmessungen mit dem Differentialinductor 165

X. L. Natanson. Thermodynamische Bemerkungen 178

XI. P. Drude. Bestimmung der optischen Constanten des Kobalts 186

XII. K. Prytz. Intermittirende Quecksilberfallluftpumpe . . . 191

Geschlossen am 15. December 1890.

Zweites Heft.

I. A. Oberbeck. Ueber das Verhalten dünner Niederschlagsschichten gegen den electrischen Strom 193

II. A. Oberbeck und J. Edler. Ueber die electromotorischen Kräfte galvanischer Ketten 209

III. G. Wiedemann. Ueber die Bestimmung des Ohm . . . 227

IV. W. v. Siemens. Ueber das allgemeine Windsystem der Erde 257

V. J. Stefan. Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere 269

VI. H. Brückner. Ueber innere Reibung von Salzlösungen . . 287

VII. H. Kayser. Ueber den Ursprung des Banden- und Linienspectrums 310

VIII. S. Czapski. Ueber die Doppelbrechung schnell gekühlter Glasplatten 319

IX. S. Czapski. Zur Frage nach der Richtung der Brennlinien in unendlich dünnen optischen Büscheln 332

X. A. Appunn. Ueber Combinationstöne und Summationstöne 338

XI. Carlo Del Lungo. Ueber den Druck und das specifische Volumen der gesättigten Dämpfe 344

XII. M. Margules. Bemerkungen zu Hrn. Galitzine's Abhandlung: „Ueber das Dalton'sche Gesetz“ 348

XIII. Gg. H. Zahn. Ueber die Widerstandsmessung des Wismuths mit constantem und oscillirendem Strom 351

Geschlossen am 15. Januar 1891.

Drittes Heft.

Seite

I. W. König. Hydrodynamisch-akustische Untersuchungen . 353

II. J. J. Acworth. Beziehung zwischen Absorption und Empfindlichkeit sensibilisirter Platten 371

III. H. Hertz. Ueber die mechanischen Wirkungen electrischer Drahtwellen 407

IV. I. Klemenčič. Ueber die Untersuchung electrischer Schwingungen mit Thermoelementen 416

V. G. Wiedemann. Ueber die Bestimmung des Ohm . . . 425

VI. F. Braun. Beobachtungen über Electrolyse 450

VII. E. Riecke. Ueber electrische Ladung durch gleitende Reibung 465

VIII. E. Riecke. Das thermische Potential für verdünnte Lösungen 483

IX. A. Oberbeck. Ueber die Messung starker Ströme mit Hülfe des Spiegelgalvanometers 502

X. B. Walter. Eine charakteristische Absorptionserscheinung des Diamanten 505

XI. B. Walter. Ueber das α-Monobromnaphtalin 511

Geschlossen am 12. Februar 1891.

Viertes Heft.

I. C. Dieterici. Calorimetrische Untersuchungen 513

II. P. Drude und W. Voigt. Bestimmung der Elasticitätsconstanten einiger dichter Mineralien 537

III. W. König. Hydrodynamisch-akustische Untersuchungen . 549

IV. J. Elster und H. Geitel. Notiz über eine neue Form der Apparate zur Demonstration der lichtelectrischen Entladung durch Tageslicht 564

V. P. Drude und W. Nernst. Einfluss der Temperatur und des Aggregatzustandes auf das Verhalten des Wismuths im Magnetfelde 568

VI. L. Arons und H. Rubens. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit electrischer Wellen in isolirenden Flüssigkeiten 581

Seite

VII. M. Wien. Das Telephon als optischer Apparat zur Strommessung 593

VIII. G. Stern. Ueber mikrophonische Tonstärkemessung . . . 622

IX. J. Mooser. Ueber die durch Zerstäuben der Kathode erhaltenen Metallschichten 639

X. K. Olszewski. Ueber das Absorptionsspectrum und über die Farbe des flüssigen Sauerstoffs 663

XI. P. Drude. Ueber die Brechung des Lichtes durch Metallprismen 666

XII. G. J. Michaëlis. Ueber die Moleculartheorie der Elasticität fester Körper 674

Berichtigung 680

Geschlossen am 1. März 1891.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I. H. Rubens.
„ II. G. Wiedemann.
„ III. } J. J. Acworth.
„ IV. }
„ V. B. Walter.

III. *Hydrodynamisch-akustische Untersuchungen; von Walter König.*

II. Ueber die Kräfte zwischen zwei Kugeln in einer schwingenden Flüssigkeit und über die Entstehung der Kundt'schen Staubfiguren.

Wir gehen wieder von der Voraussetzung einer unbegrenzten Flüssigkeit aus, die in der Richtung der Z-Axe geradlinig hin- und herströme. Statt einer sollen sich zwei starre Kugeln in der Flüssigkeit befinden; ihre Massen seien gegen die der von ihnen verdrängten Flüssigkeit gross genug, um ihre Mitbewegung mit der Schwingung der Flüssigkeit vernachlässigen, d. h. die Kugeln als in der Flüssigkeit ruhend betrachten zu können. In diesem Falle wird die Symmetrie der Flüssigkeitsbewegung und der Druckvertheilung, welche um eine einzelne Kugel herum statt hat, durch die Anwesenheit der zweiten Kugel gestört, und es ergeben sich für jede Kugel Resultanten der Flüssigkeitsdrucke, welche die Kugeln in bestimmten, von ihrer gegenseitigen Lage abhängigen Richtungen fortzubewegen suchen. Die Art dieser Kräfte, welche die beiden Kugeln scheinbar aufeinander ausüben, ist durch die theoretischen und experimentellen Arbeiten von Bjerknes[1]) klargelegt worden. Diese Arbeiten behandeln allerdings den umgekehrten Fall, dass nämlich die Flüssigkeit ruht und die Kugeln sich bewegen; aber man kann offenbar von der Lösung dieses Problems ganz unmittelbar zu der Lösung unseres Problems dadurch gelangen, dass man sich dem ganzen, aus Flüssigkeit und Kugeln bestehenden Systeme in jedem Augenblick die gleiche, aber gerade entgegengesetzte Geschwindigkeit ertheilt denkt, wie sie Bjerknes bei seinen Kugel voraussetzt. Dann werden in Wahrheit die Kugeln ruhen und die Flüssigkeit wird sich

1) Bjerknes, Rep. der reinen und angewandten Mathematik. 1. p. 264. 1876. — Schiötz, Gött. Nachr. 1877. p. 291.

bewegen; jene scheinbaren Kräfte zwischen den Kugeln aber werden durch diese Gesammtbewegung des Systems nicht geändert werden.

Bjerknes gibt das Potential der scheinbaren Kraft, die zwischen zwei in einer Flüssigkeit bewegten Kugeln von unveränderlichem Volumen besteht, in zwei verschiedenen Formen.[1]) Die eine Form gibt mit ihren Ableitungen den Werth der Kraftcomponenten in einem einzelnen Augenblicke, die andere gestattet den Mittelwerth der Kraft zu berechnen für den Fall, dass beide Kugeln gleichzeitig periodische Schwingungen ausführen. Es ist bekannt, dass diese Kräfte in Grösse und Richtung den fortbewegenden Kräften entsprechen, welche zwei magnetische Molecüle am Ort der Kugelmittelpunkte auf einander ausüben. Aber zwischen den beiden genannten Fällen besteht nach Bjerknes folgender Unterschied. Die Kraft, welche die erste Kugel auf die zweite in jedem Augenblicke ihrer Bewegung ausübt, ist so beschaffen, als ob in jedem Kugelcentrum ein Magnet läge, dessen Axe der Bewegungsrichtung der ersten Kugel parallel orientirt ist; umgekehrt entspricht die Kraft, welche die zweite Kugel auf die erste ausübt, der Wirkung zweier Magnete, deren Axen der Bewegungsrichtung der zweiten Kugel parallel sind. Dagegen ist die mittlere Kraftwirkung zweier schwingenden Kugeln aufeinander gleich der Wirkung zweier Magnete, deren jeder der Bewegungsrichtung der Kugel, an deren Stelle er tritt, parallel orientirt ist. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Richtung der fortschreitenden Bewegung immer als Richtung eines bestimmten Poles, etwa des Nordpoles, genommen wird, und es gilt ferner bei dieser Art der Festsetzung die Einschränkung, dass die hydrodynamischen Wirkungen den magnetischen zwar gleich, aber dem Vorzeichen nach gerade entgegengesetzt sind; d. h. für diese Analogien gilt der Satz: gleiche Pole ziehen sich an, ungleiche stossen sich ab.

Vergleicht man die beiden Formeln, welche Bjerknes für die eine und die andere Form der hydromagnetischen Wirkung aufgestellt hat, so sieht man, dass sie identisch werden,

1) Bjerknes, l. c. p. 270 u. 271.

wenn die beiden Kugeln sich in parallelen Richtungen und in jedem Augenblicke mit gleicher Geschwindigkeit bewegen. In dem Fall also, dass die beiden Kugeln Oscillationen in parallelen Geraden mit gleichen Amplituden und in gleichen Phasen ausführen, ist die mittlere Kraft, mit der sie aufeinander wirken, direct gleich dem mittleren Werthe der Kraft, welche in jedem einzelnen Augenblicke zwischen ihnen besteht. Dieses ist aber gerade derjenige Fall, von dem wir bei der Behandlung unseres Problems ausgehen müssen.

Um die besonderen, für unseren Fall geltenden Formeln aufzustellen, will ich an diejenige Darstellung anknüpfen, welche Kirchhoff in der 18. und 19. Vorlesung seiner Mechanik von diesem Gegenstande gegeben hat. R und R' seien die Radien der beiden Kugeln, $u\ v\ w$, $u'\ v'\ w'$ die Componenten ihrer Geschwindigkeiten, a, b, c, $a'\ b'\ c'$ die Coordinaten ihrer Mittelpunkte, r_0 der Abstand der Mittelpunkte der Kugeln und r und r' die Abstände eines beliebigen Punktes $x\ y\ z$ von dem einen und dem anderen Mittelpnnkte. Bewegen sich die beiden Kugeln in parallelen Geraden mit in jedem Augenblicke gleichen Geschwindigkeiten, und setzen wir die Z-Axe ihrer Bewegungsrichtung parallel, so sind die Geschwindigkeitscomponenten $u = v = u' = v' = 0$ und $w = w'$. Das Geschwindigkeitspotential ist durch eine unendliche Reihe darstellbar, deren erste Glieder sich nach diesen Festsetzungen auf die folgenden Werthe reduciren[1]):

$$\varphi = -w\left\{\frac{R^3}{2}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c} + \frac{R'^3}{2}\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial c'} - \frac{R^3R'^3}{4}\left[\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial c}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a} + \frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial a'}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial c}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b} + \frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial b'}\right) + \frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c^2}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c} + \frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial c'}\right)\right]\right\}.$$

Endlich sind die Kräfte, welche die beiden Kugeln scheinbar aufeinander ausüben, für den Fall, dass ihre Bewegung eine gleichförmige, also w eine Constante ist, die nach $a\,b\,c$, bez. $a'\,b'\,c'$ genommenen partiellen Differentialquotienten des Ausdruckes[2]):

1) Kirchhoff, Mechanik. p. 230. 1877.
2) Kirchhoff, Mechanik. p. 251. 1877.

$$\Omega = -\pi\mu R^3 R'^3 w^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2}.$$

Denkt man sich zu dieser Bewegung eine Gesammtbewegung des ganzen aus der Flüssigkeit und den beiden Kugeln bestehenden Systems von gleicher, aber der Bewegung der Kugeln entgegengerichteter Geschwindigkeit hinzugefügt, so sind in Wahrheit die Kugeln in Ruhe und die Flüssigkeit strömt in der Unendlichkeit mit der Geschwindigkeit w in der Richtung der $-Z$-Axe. Bezogen auf ein ruhendes Coordinatensystem hat das Geschwindigkeitspotential dann die Form:

$$\varphi = w\left\{-z + \frac{R^3}{2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + \frac{R'^3}{2}\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z} - \frac{R^3 R'^3}{4}\left[\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial c}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial c}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)}{\partial y} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)}{\partial z}\right]\right\}.$$

Die zwischen den beiden Kugeln bestehenden, scheinbaren Kräfte werden durch diese gleichförmige Gesammtbewegung des Systems nicht geändert werden.

Ist die Bewegung der Flüssigkeit bei ruhenden Kugeln keine gleichförmige, sondern eine periodische, so sind gleichwohl gemäss der oben aus der Arbeit von Bjerknes gezogenen Folgerung die genannten Kräfte in jedem Augenblick durch den obigen Werth von Ω bestimmt und dieser Ausdruck gestattet uns, den Mittelwerth dieser Kräfte ohne weiteres zu berechnen. In der That braucht man in dem Ausdrucke für φ an Stelle der constanten Geschwindigkeit w nur einzuführen:

$$w = w_0 \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

um den für diesen Fall der Bewegung gültigen Werth des Geschwindigkeitspotentials zu erhalten, und dementsprechend braucht man auch in Ω nur diesen Werth von w einzusetzen und den mittleren Werth für die Dauer einer Schwingung zu berechnen, um den Mittelwerth der Kräftefunction für diesen Fall zu bekommen. Also ist dieser Mittelwerth:

$$\overline{\Omega} = -\frac{\pi \mu R^3 R'^3 w_0^2}{T} \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2} \int_0^T \cos^2 2\pi \frac{t}{T} \, dt$$

$$= -\frac{\pi}{2} \mu R^3 R'^3 w_0^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2}.$$

Ueber die Lage der X-Axe waren bisher keine Annahmen gemacht; sie werde so gelegt, dass die XZ-Ebene die Mittelpunkte der beiden Kugeln enthalte. Bezeichnen wir noch den Winkel, den die Verbindungslinie der beiden Kugeln r_0 mit der Z-Axe bildet, mit ϑ, so lassen sich die Componenten der Kraft, welche auf die erste Kugel scheinbar von der zweiten ausgeübt wird, in der Form schreiben:

$$X = \frac{\partial \Omega}{\partial a} = -\frac{3}{2} \pi \frac{\mu R^3 R'^3 w_0^2}{r_0^4} \sin \vartheta \, (1 - 5 \cos^2 \vartheta)$$

$$Y = \frac{\partial \Omega}{\partial b} = 0$$

$$Z = \frac{\partial \Omega}{\partial c} = -\frac{3}{2} \pi \frac{\mu R^3 R'^3 w_0^2}{r_0^4} \cos \vartheta \, (3 - 5 \cos^2 \vartheta).$$

Die Kraft liegt also in der durch die Bewegungsrichtung der Flüssigkeit und die Verbindungslinie der Kugelcentren gelegten Ebene und bildet mit der $+Z$-Axe einen Winkel φ, der bestimmt ist durch:

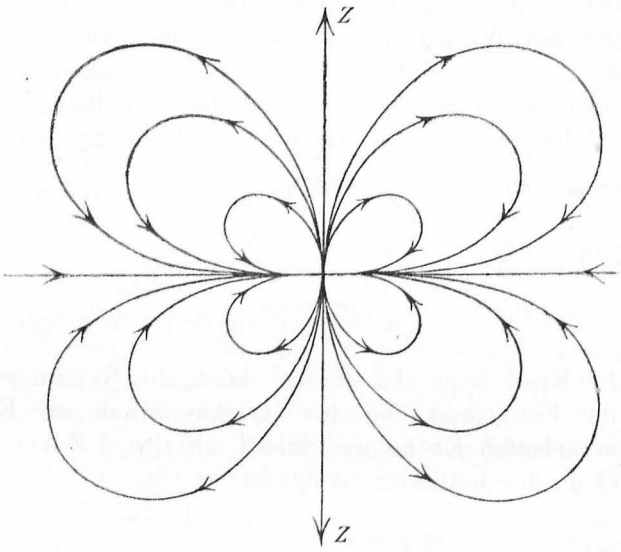
$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \vartheta \frac{1 - 5 \cos^2 \vartheta}{3 - 5 \cos^2 \vartheta}.$$

Die Kraft fällt also mit der Richtung der Verbindungslinie der beiden Kugeln nur zusammen, wenn ϑ ein Vielfaches von $\pi/2$ ist, und zwar ist in diesen Fällen die Kraft eine abstossende vom Betrage $3\pi\mu R^3 R'^3 w_0^2 / r_0^4$, wenn $\vartheta = 0$ oder π ist, d. h. die beiden Kugeln in Richtung der Bewegung hintereinander liegen, dagegen eine anziehende vom Betrage $\frac{3}{2}\pi\mu R^3 R'^3 w_0^2 / r_0^4$, wenn $\vartheta = \pi/2$ oder $3\pi/2$ ist. d. h. die Verbindungslinie der Kugelcentren senkrecht zur Schwingungsrichtung der Flüssigkeit gelegen ist. Nimmt man die Richtung der Kraft in jedem Punkte als Tangente einer Curve, so stellen diese Curven die scheinbaren Kraftlinien dar, die von der zweiten Kugel ausgehen, und auf denen sich die erste Kugel bewegen würde, wenn die zweite

ruhte. Nimmt man den Mittelpunkt dieser zweiten Kugel als Anfangspunkt der Coordinaten, so lautet die Gleichung dieser Kraftlinien in Polarcoordinaten:

$$r = C \sin \vartheta \sqrt{\cos \vartheta},$$

unter C eine willkürliche Constante verstanden. Die Form dieser Curven und die Richtung der Kraft in ihnen wird durch die beifolgende Figur veranschaulicht, in der ZZ die Richtung der Flüssigkeitsströmung bedeutet.



Andererseits wirkt auf die zweite Kugel eine scheinbar von der ersten ausgehende Kraft, welche der an der ersten Kugel angreifenden gleich und parallel, aber entgegengesetzt gerichtet ist. Könnte man sich die beiden Kugeln starr mit einander verbunden denken ohne Aenderung der Flüssigkeitsbewegung, so würden sich die beiden an ihnen angreifenden Kräfte, da sie im Allgemeinen nicht in die Richtung der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte fallen, zu einem Kräftepaar zusammensetzen, welches das System der beiden Kugeln so zu drehen suchen würde, dass die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte senkrecht zur Schwingungsrichtung der Flüssigkeit zu liegen käme. Es ist das ein besonderer Fall des allgemeinen Satzes, dass jeder Rotationskörper in einer strömen-

den Flüssigkeit sich mit seiner Längsrichtung quer gegen die Strömung zu legen sucht.[1])

Wie oben bereits erwähnt, gelten die gleichen Formeln und die gleichen Bemerkungen, nur unter Umkehrung des Vorzeichens der Kraft für die Wirkung zwischen zwei Magneten, und zwar Magneten von den Momenten $R^3 w_0 \sqrt{\pi\mu/2}$ und $R'^3 w'^0 \sqrt{\pi\mu/2}$, wenn ihre Dimensionen klein gegen ihren Abstand sind, ebenso wie in dem hydrodynamischen Problem die Kugelradien als klein gegen den Abstand der Kugeln vorausgesetzt sind. Nur fallen natürlich bei den Kugeln in der reibungslosen Flüssigkeit die Drehungsmomente fort, welche die beiden Magnete noch ausser der fortbewegenden Kraft aufeinander ausüben. Daraus folgt dann der weitere Unterschied, dass bei starrer Verbindung zweier Magnete alle Drehungsmomente sich gegenseitig aufheben, bei starrer Verbindung der beiden Kugeln dagegen das aus den fortbewegenden Kräften entstehende Drehungsmoment in der besprochenen Weise in Wirksamkeit tritt.

Dass in einer schwingenden Flüssigkeit, z. B. im Schwingungsbauche einer tönenden Luftsäule Kräfte der beschriebenen Art bestehen, lässt sich mit Hülfe eines einfachen Versuches zeigen. In eine Kundt'sche Röhre von beträchtlichem Durchmesser führe man einen steifen Draht ein, von dem aus an möglichst biegsamen Coconfäden zwei Kork- oder Hollundermarkkügelchen bis in die Mitte der Röhre herabhängen. Man muss dafür Sorge tragen, dass die Kugeln möglichst nahe bei einander hängen, ohne sich jedoch zu berühren. Schiebt man den Draht so weit hinein, dass die Kugeln an einer Stelle sich befinden, an der beim Tönen ein Schwingungsbauch entsteht, so sieht man beim Erregen der Schwingung deutlich, dass sich die Kugeln abstossen, wenn die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte der Röhrenaxe parallel liegt, dass sie sich dagegen anziehen, wenn diese Linie senkrecht zur Röhrenaxe gerichtet ist.

Befinden sich statt zweier viele Kugeln in einer solchen schwingenden Flüssigkeit, so werden die auf sie wirkenden

1) Thomson u. Tait, Theoretische Physik, deutsch. Braunschweig 1871. 1. Theil. p. 303.

Kräfte in erster Annäherung als die Resultanten der Kräfte der besprochenen Art angesehen werden können, welche zwischen je zweien dieser Kugeln bestehen. Dabei ist der indirecte Einfluss vernachlässigt, den eine Kugel auf eine zweite dadurch ausüben wird, dass sie die Wirkung einer dritten Kugel auf die zweite verändert.[1]) Infolge dieser Kräfte werden sich die Kugeln in bestimmter Weise gruppiren, ähnlich wie man es bei den vielen kleinen Magneten wahrnimmt, die man erhält, wenn man Eisenfeilspähne in ein magnetisches Feld bringt. Aber wegen des entgegengesetzten Vorzeichens der Kraft in den beiden Fällen muss auch die Anordnung der Kugeln und der Magnete einen charakteristischen Gegensatz zeigen. Die magnetisch gewordenen Eisenstückchen ziehen sich in der Richtung der magnetisirenden Kraftlinien an und stossen sich in allen dazu senkrechten Richtungen ab. Sie reihen sich daher hintereinander zu Curven, welche den Kraftlinien folgen und sich senkrecht zu diesen wegen der Abstossung in dieser Richtung deutlich voneinander sondern und in gewissen Entfernungen halten. Besser als in der gewöhnlichen Art durch Bestreuen eines Papieres mit Eisenfeile nimmt man diese Erscheinungen wahr, wenn man Eisenfeile in einer zähen Flüssigkeit vertheilt und diese in das Magnetfeld bringt. Umgekehrt ziehen sich die Kugeln in der schwingenden Flüssigkeit in allen zur Strömungsrichtung senkrechten Richtungen an und stossen sich in der ihr parallelen Richtung ab. Sie müssen daher das Bestreben haben, sich in Flächen aneinander zu reihen, welche auf der Strömungsrichtung senkrecht stehen, und welche sich wegen der Abstossung in der Richtung ihrer Normalen deutlich voneinander absondern werden. Da die Kraft mit der vierten Potenz der Entfernung abnimmt, so wird die abstossende Wirkung beim Auseinanderrücken der Kugeln schnell an Intensität verlieren. Es verdient aber hervorgehoben zu werden, dass, wie aus den Ausdrücken für die Componenten X und Z hervorgeht, die Kraft, wenn die Kugeln oder die Magnete in der Richtung der Z-Axe hintereinander liegen, doppelt so gross ist, als wenn sie in der Richtung der X-Axe

1) Pearson, Quarterly Journal **20**. p. 60. 1885.

nebeneinander liegen. Also ist unter sonst gleichen Umständen in dem hydrodynamischen Probleme die Abstossung in der Richtung der Z-Axe doppelt so gross wie in dem magnetischen Probleme die Abstossung senkrecht zur Z-Axe, und man wird daher erwarten können, dass bei den Kugeln in der Flüssigkeit die Sonderung der Flächen voneinander noch deutlicher hervortritt, als die Sonderung der Curven bei den Feilspähnen im Magnetfelde.

Eine Gruppirung der hier beschriebenen Art ist gerade dasjenige, was für die Kundt'schen Staubfiguren so besonders charakteristisch ist. Denn die bekannten und vielbesprochenen Rippen oder Querwände, die der Staub im Schwingungsbauche einer Kundt'schen Röhre bildet, sind nichts anderes als Anordnungen des Staubes in Flächen, die auf der Schwingungsrichtung senkrecht stehen. Die Uebereinstimmung dieser Erscheinung mit den aus unseren theoretischen Betrachtungen gezogenen Folgerungen ist eine so augenscheinliche, dass sich hierin die denkbar einfachste und natürlichste Erklärung für die bisher noch immer als etwas räthselhaft angesehene Rippenbildung darzubieten scheint. Auch die Thatsache, dass diese Rippen im Schwingungsbauche am stärksten ausgebildet sind und nach den Knoten zu schwächer werden und enger aneinander rücken, stimmt mit dieser Auffassung ihrer Ursache überein; denn die wirkenden Kräfte hängen von dem Quadrat der Geschwindigkeit der Luftbewegung ab, und diese ist im Bauch am grössten, im Knoten Null. Dabei mag es übrigens dahingestellt bleiben, ob der Abstand zweier Rippen als Maass der Entfernung angesehen werden muss, in welcher die Kräfte bereits zu schwach sind, um noch eine Weiterbewegung des Staubes zu veranlassen. Denn es wirken auf jede Querwand von beiden Seiten abstossende Kräfte, und für die stabile Lage einer solchen Wand wäre offenbar die Bedingung ausreichend, dass die Differenz beider Kräfte klein genug ist, um nicht mehr wirksam zu sein. Dass sich dabei die Rippen sehr gleichmässig und in regelmässigen Abständen ausbilden müssen, dürfte aus dieser Art der Zusammenwirkung der Kräfte ebenfalls ohne Schwierigkeit ersichtlich sein. Wenn man sie übrigens durch wiederholtes

leises Anstreichen des tonerzeugenden Stabes allmählich entstehen lässt, wobei sich zuerst kleinere Rippen bilden, die sich dann zu grösseren vereinigen, so bemerkt man auch in den zufälligen Unregelmässigkeiten, wie sie bei derartiger schwächerer Wirkung deutlicher hervortreten, eine so vollkommene Analogie mit der Art der allmählichen Ausbildung der magnetischen Curven bei leiser Erschütterung der das Eisenpulver tragenden Membran, dass die Vorstellung eines in beiden Fällen gleichartigen Spieles von Kräften sehr nahe gelegt wird.

Mit dieser Auffassung steht die Bedeutung, welche der Beschaffenheit des Pulvers für die Ausbildung der Figuren zukommt, durchaus im Einklang. Ist das Pulver so fein, dass es in der Flüssigkeit schwebt, wie Rauch oder Salmiaknebel, so erhält man keine rippen- oder wandförmigen Anordnungen der Theilchen, einerseits weil in diesem Falle die Theilchen nach den Ergebnissen des ersten Abschnittes die Bewegung der Flüssigkeit fast vollständig mitmachen werden und die beschriebenen hydrodynamischen Kräfte sich daher gar nicht entwickeln können, andererseits weil, selbst wenn diese Kräfte auch hier vorhanden wären, die Reibung ihrer Wirksamkeit ebenso hinderlich sein würde, wie der der Schwerkraft. Ausserdem schwächt eine derartige Vertheilung fester Körperchen in der Luft von vornherein die Intensität der Luftschwingungen ausserordentlich ab, wie Dvořák[1]) an mit Salmiaknebeln gefüllten Resonanzröhren beobachtet hat. Ist das Pulver gröber, aber specifisch schwer, so lagert es zu dicht und fest auf dem Boden, als dass die Luftschwingungen zwischen seinen Theilchen sich kräftig genug entwickeln könnten, oder ist überhaupt zu schwer, um von den immerhin schwachen hydrodynamischen Kräften bewegt zu werden. Daher müssen die Versuche mit einem nicht zu feinen, specifisch leichten, lockeren Pulver, wie Korkfeilicht oder Kieselsäure am besten gelingen. Doch wird auch hier eine zu grosse Menge des Pulvers die Luftbewegung erheblich schwächen und dadurch die Ausbildung der Figuren beeinträchtigen.

1) Dvořák, Pogg. Ann. **157**. p. 60. 1876.

Es könnten aber vielleicht einige Einwände gegen diese Erklärungsweise der Rippenbildung erhoben werden, denen ich von vornherein begegnen möchte. Man könnte erstens bemerken, dass die entwickelten Formeln auf der Voraussetzung der Kleinheit der Radien im Verhältniss zu den Abständen der Kugeln beruhen, während sie angewandt werden auf Theilchen, die einander sehr nahe liegen und sich unter der Wirkung dieser Kräfte theilweise bis zur Berührung nähern. Hiergegen wäre auf die ganz directen, hydrodynamischen Versuche hinzuweisen, durch welche Bjerknes und Schiötz die Folgerungen der Theorie geprüft und qualitativ durchaus bestätigt gefunden haben, obwohl auch bei diesen Versuchen jene Bedingung der Theorie keineswegs erfüllt war. Daraus kann man wohl schliessen, dass der Charakter unserer Kräfte bei Nichterfüllung jener Bedingung zum mindesten nicht wesentlich geändert sein kann. Eine andere Schwierigkeit könnte darin erblickt werden, dass die innere Reibung der Flüssigkeit vernachlässigt worden ist. Ueber den Einfluss dieser auf die Luftbewegung in einer Kundt'schen Röhre hat Lord Rayleigh[1]) eine Berechnung angestellt und mit deren Hülfe die Entstehung der eigenthümlichen Strömungen erklärt, welche Hr. Dvořák[2]) in solchen Röhren beobachtet hatte. Diese Strömungen stellen einen Luftaustausch zwischen Bauch und Knoten dar in Form eines Wirbelringes; die Bewegung ist an der Wand vom Bauch zum Knoten gerichtet, entfernt sich im Knoten von der Wand nach dem Röhreninneren zu, kehrt im inneren Theile der Röhre nach dem Bauch zurück und ist im Bauch wieder von dem Inneren nach der Wand zu gerichtet. Hr. Rayleigh bemerkt in der Einleitung seines Aufsatzes, dass diese Luftströmungen als die „augenscheinliche Ursache der Bildung der Staubfiguren" anzusehen wären, beschreibt aber nicht näher, wie dieser Vorgang zu denken wäre. Ich muss gestehen, dass ich mir kein Bild von dem Zusammenhange machen kann, der zwischen dieser, der eigentlichen Schwingungsbewegung der Luft gegenüber verhältnissmässig schwachen Strömung und der Entstehung der hohen Querwände

1) Lord Rayleigh, Phil. Trans. 175. p. 1. 1884.
2) Dvořák, Pogg. Ann. 157. p. 61. 1876.

der Kundt'schen Staubfiguren bestehen könnte. Auch die anderen bisher aufgestellten Erklärungen der Rippenbildung, welche eine genauere Vorstellung von der Art ihres Entstehens zu geben versuchten, gehen in erster Linie auf die Wirkung der Reibung zurück, abgesehen von dem Erklärungsversuche Bourget's[1]), welcher Obertöne zu Hülfe nimmt. Denn sowohl Hr. Dvořák[2]) als auch Hr. Stefan[3]) und ebenso die Herren Schellbach und Böhm[4]) sehen als die eigentliche Ursache für die Bewegung des Staubes die directe fortführende Wirkung an, welche die Flüssigkeitsbewegung auf jedes einzelne Theilchen des Staubes ausübt; die leichteren Theile sollen mitgenommen werden und an den compacteren in Ruhe gebliebenen sich verfangen und hängen bleiben. Diese Auffassung überträgt auf die akustischen Staubfiguren das, was man an langsameren, gröberen Flüssigkeitsbewegungen beobachtet hat. Wenn Wasser über einer ebenen, mit Sand bestreuten oder aus Sand bestehenden Unterlage in eine oscillatorische Bewegung versetzt wird, so gruppirt sich auch der Sand in langgestreckten Linien oder häuft sich zu flachen wellenartigen Rippen an, die stets senkrecht zur Bewegungsrichtung des Wassers verlaufen, und die gleiche Oberflächengestaltung erzeugt der Wind über einer trockenen Sandfläche. Dem Geologen sind diese Gebilde als Wellenspuren oder Rippelmarken bekannt[5]), und die experimentelle Untersuchung über ihre Entstehung, die wir Hrn. G. H. Darwin[6]) verdanken, hat gezeigt, dass sie in erster Linie durch die mitführende Wirkung der Wasserbewegung hervorgebracht werden, dass aber ferner zugleich mit den Rippen auf und zwischen ihnen eigenthümliche Wirbelbewegungen der Flüssigkeit entstehen, welche die weitere Ausbildung und den Bestand der Rippen unterstützen. Ob man aber wegen dieser Analogie berechtigt ist, den gleichen

1) Vgl. Neesen, Wied. Ann. **30.** p. 432. 1887.

2) Dvořák, Pogg. Ann. **151.** p. 634. 1874.

3) Stefan, Wien. Ber. **65.** p. 424. 1872.

4) Schellbach u. Böhm, Wied. Ann. **7.** p. 1. 1879.

5) Vgl. Walther, Abhdlg. der math.-phys. Klasse der sächs. Ges. d. Wiss. **16.** p. 523. 1890.

6) G. H. Darwin, Proc. Roy. Soc. London. **36.** p. 18. 1884.

Vorgang der Entstehung auch bei den akustischen Staubfiguren anzunehmen, das erscheint mir mindestens sehr zweifelhaft. Denn gerade in den wichtigsten Punkten weichen die Verhältnisse bei den beiden Gruppen von Erscheinungen am meisten voneinander ab. Bei den Sandrippen ist der Unterschied der specifischen Gewichte der Flüssigkeit und des festen Körpers relativ gering, die Bewegungen der Flüssigkeit sind langsam und von grosser Periode. Bei den Kundt'schen Staubfiguren dagegen hat man eine grosse Verschiedenheit der specifischen Gewichte und sehr schnelle Schwingungen von erheblicher Intensität. Unter diesen Umständen muss nach den Ergebnissen des ersten Abschnittes unserer Betrachtungen die fortführende Wirkung der Flüssigkeitsbewegung im ersten Falle thatsächlich sehr gross, im zweiten dagegen ausserordentlich gering sein. In dem Maasse aber, als infolge der Abnahme der Schwingungsdauer die Reibungswirkungen mehr und mehr zurücktreten, werden die Wirkungen der rein hydrodynamischen Kräfte, welche von den Quadraten der Geschwindigkeit abhängen, mehr und mehr zur Geltung kommen müssen. Dass diese letzteren die Oberhand über die ersteren gewinnen, kann sogar bei fortschreitender, nicht periodischer Bewegung eintreten, wie ein interessantes Experiment beweist, welches Hr. v. Helmholtz beschrieben hat.[1]) Eine Kugel, welche in einem verticalen, mit Wasser gefüllten Rohre herabfällt, hat bei langsamem Sinken stets das Bestreben, sich nach der Mitte des Rohres zu begeben, während sie bei schnellem Fallen mehrmals gegen die Wand der Röhre anschlägt. Die erstere Erscheinung ist eine Wirkung der Reibung, die letztere eine Wirkung der oben besprochenen hydrodynamischen Kräfte; denn die Flüssigkeitsbewegung ist im zweiten Falle eine solche, dass die Kugel gewissermaassen von ihrem neben und mit ihr zugleich herabfallenden Spiegelbilde angezogen wird und infolgedessen sich der Wand bis zur Berührung nähert. So wie in diesem Beispiele die Reibung infolge der vermehrten Geschwindigkeit hinter dem Einflusse der hydrodynamischen Kräfte zurücktritt, so wird dasselbe bei den akustischen

1) H. v. Helmholtz, Wissenschaftl. Abhdlg. **1.** p. 223.

Schwingungen gegenüber den gröberen Schwingungen einer ganzen Flüssigkeitsmasse wegen der Verkürzung der Periode eintreten, und gerade hierin scheint es mir begründet zu sein, warum gewisse hydrodynamische Wirkungen bei akustischen Schwingungen so besonders deutlich hervortreten. — Es sei endlich darauf hingewiesen, dass auch die Form der Kundt'schen Staubrippen mit jenen der erwähnten Sandrippen doch keine so unbedingte Aehnlichkeit besitzt. Denn die Sandrippen sind flach ansteigende, schwach gewölbte Hügel, die Rippen der akustischen Staubfiguren dagegen steile, hohe, dünne Querwände. Auch hierin scheint sich mir der verschiedene Charakter der vorherrschenden Kräfte auszudrücken, und wenn mit diesen Ueberlegungen die Möglichkeit des Einflusses der Reibung auf die Entstehung dieser Figuren auch nicht vollkommen abgeleugnet werden soll, wenn auch zugegeben werden kann, dass vielleicht gerade für die anfängliche Lockerung und Aufwirbelung des Staubes die Reibungswirkungen in Betracht zu ziehen sind, so glaube ich doch die charakteristische Form der Kundt'schen Staubfiguren in erster Linie den hydrodynamischen Kräften der behandelten Art zuschreiben zu dürfen.

Es erübrigt schliesslich an einem numerischen Beispiel den Nachweis zu führen, dass diese Kräfte gross genug sein können, um die verlangten Bewegungen des Staubes zu bewirken. Nehmen wir, wie im ersten Abschnitt, Korkkugeln von 0,02 cm Radius an. Ihre Mittelpunkte sollen sich in 1 mm Abstand ($r_0 = 0{,}1$ cm) von einander befinden, und die Verbindungslinie dieser Centren soll senkrecht gegen die Schwingungsrichtung der Luft gelegen sein. Dann besteht zwischen den beiden Kugeln eine anziehende Kraft von der Grösse:

$$\tfrac{3}{2}\pi\mu\,\frac{R^3 R'^3 w_0^2}{r_0^4}.$$

Fragen wir, wie gross das Verhältniss dieser Wirkung F zur Wirkung G der Schwerkraft auf die Kugeln ist, wenn die Schwingungszahl des Tones 2000 beträgt und die Amplitude mit a bezeichnet wird. Zwischen dieser letzteren und der Maximalgeschwindigkeit besteht die Beziehung $w_0 = a 2\pi / T$. Die Wirkung der Schwerkraft ist:

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 (\mu' - \mu) g,$$

unter μ' die Dichte der Substanz der Kugeln (0,2) unter g die Beschleunigung durch die Schwere verstanden (981 cm/sec²).

Dann ist:

$$\frac{F}{G} = \frac{9}{2}\frac{\mu}{(\mu' - \mu)}\frac{\pi^2 R'^3}{T^2 r_0^4 g} \cdot a^2$$
$$= 44\, a^2, \text{ oder } = 0{,}44\, a^2,$$

wenn a in Millimetern ausgedrückt wird. Die hydrodynamische Wirkung in diesem Falle würde also derjenigen der Schwerkraft gleich sein für eine Amplitude von ungefähr 1,5 mm. Dieser Werth dürfte für die kurzen Wellen, die hier vorausgesetzt sind, zu gross sein; aber man kann die Amplitude erheblich kleiner annehmen, und man wird unter Berücksichtigung der starken Abhängigkeit der hydrodynamischen Kräfte an der Entfernung immer noch Wirkungen erhalten, die gross genug wären, um die beobachteten Bewegungen des Staubes hervorzubringen.

Phys. Inst. der Univ. Leipzig, Februar 1891.