Max Planck Research Group
Epistemes of Modern Acoustics

Sound & Science: Digital Histories

König, Walter. "Hydrodynamisch-akustische Untersuchungen (3)."
Annalen der Physik, 4th ser. 43, (1891): 43–60.

https://acoustics.mpiwg-berlin.mpg.de/node/507

Scan licensed under: CC BY-SA 3.0 DE | Max Planck Institute for the History of Science

MAX PLANCK INSTITUTE
FOR THE HISTORY OF SCIENCE

Signatur
Nr. 609/19

ANNALEN
DER
PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

[F. 3]

BAND XLIII.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT NEUNUNDSIEBZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

NEBST SIEBEN FIGURENTAFELN.

FRIEDRICH-WERDERSCHEN GYMNASIUM BERLIN



LEIPZIG, 1891.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

Verein. Askan. u. Tempelh. Gymnasium
Lehrerbücherei

Inhalt.

Neue Folge. Band XLIII.

Fünftes Heft.

		Seite
I.	O. E. Meyer. Ein Verfahren zur Bestimmung der inneren Reibung von Flüssigkeiten	1
II.	Kurt Mützel. Ueber innere Reibung von Flüssigkeiten	15
III.	W. König. Hydrodynamisch-akustische Untersuchungen	43
IV.	F. Auerbach. Absolute Härtemessung	61
V.	J. Schumann. Untersuchungen von Amalgamen	101
VI.	P. Drude. Ueber die Reflexion und Brechung ebener Lichtwellen beim Durchgang durch eine mit Oberflächenschichten behaftete planparallele Platte	126
VII.	P. Drude. Ueber die Grösse der Wirkungssphäre der Molecularkräfte und die Constitution von Lamellen der Plateau'schen Glycerin-Seifen-Lösung	158
VIII.	P. Drude. Zur Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes	177
IX.	C. Fromme. Magnetische Experimentaluntersuchungen	181
X.	P. Sack. Ueber die Bestimmung des Maximums der Leitfähigkeit von sehr verdünnten Kupfervitriollösungen	212

Geschlossen am 15. April 1891.

Sechstes Heft.

Seite

I. J. Elster und H. Geitel. Ueber die Abhängigkeit der durch das Licht bewirkten Electricitätszerstreuung von der Natur der belichteten Oberfläche 225

II. F. Streintz. Beiträge zur Theorie des Secundärelementes . 241

III. C. Fromme. Magnetische Experimentaluntersuchungen . . 256

IV. H. Jahn. Ueber die electromagnetische Drehung der Polarisationsebene in Flüssigkeiten, besonders in Salzlösungen . 280

V. H. Jahn. Zur Thermochemie der Rechts- und Linksweinsäure 306

VI. A. Heydweiller. Ueber den Durchgang der Electricität durch Gase. 3. Funkenentladungen von Condensatoren in normaler Luft 310

VII. E. Cohn und F. Heerwagen. Ueber die Periode sehr schneller electrischer Schwingungen 343

VIII. F. Koláček. Zur Theorie der electrischen Schwingungen . 371

IX. H. Kayser und C. Runge. Ueber die Spectra der Elemente der zweiten Mendelejeff'schen Gruppe 385

X. W. Voigt. Zur Theorie des Lichtes 410

XI. N. v. Klobukow. Vorlesungsversuch zur Demonstration der Wirkung von Complementärfarben und Farbengemischen beim Zusammenbringen von gelösten Farbstoffen 438

XII. P. Glan. Ein Spectrosaccharimeter 441

Geschlossen am 15. Mai 1891.

Siebentes Heft.

I. E. Vogel. Ueber die Lage der Absorptionsstreifen und Lichtempfindlichkeit organischer Farbstoffe 449

II. E. Lommel. Berechnung von Mischfarben 473

III. A. Hussell. Ueber die Drehung ultrarother Strahlen im Quarz 498

IV. G. Kümmell. Rotationsdispersion weinsaurer Salze . . . 509

V. O. Lehmann. Halbbegrenzte Tropfen 516

Seite

VI. J. Russner. Ueber die Abhängigkeit der Elasticität des Kautschuks von der Temperatur 533

VII. H. Kayser. Ueber Diffusion und Absorption durch Kautschuk 544

VIII. J. Müller. Ueber die Diffusion des Ammoniaks durch Wasser und durch Alkohol 554

IX. F. Paschen. Electromotorische Kräfte 568

X. E. Hagenbach und L. Zehnder. Die Natur der Funken bei den Hertz'schen elektrischen Schwingungen 610

XI. A. Raps. Selbstthätige Quecksilberluftpumpe 629

XII. K. Prytz. Methode zur absoluten Messung von Rotationszeiten 638

XIII. K. Prytz. Bestimmung des Verhältnisses zwischen Rotationszeit einer Axe und Schwingungszeit einer Stimmgabel . . 652

XIV. C. L. Weber. Zur Messung der magnetischen Inclination 659

Geschlossen am 15. Juni 1891.

Achtes Heft.

I. Th. Des Coudres. Ueber thermoelectrische Eigenschaften des Quecksilbers und der sehr verdünnten Amalgame . . 673

II. J. Rosenthal. Ueber die electrische Leitfähigkeit fester Electrolyte bei verschiedenen Temperaturen 700

III. P. Bachmetjew. Ueber den Einfluss der Magnetisirung auf die thermoelectrischen Eigenschaften des Eisens und Nickels 723

IV. O. Knoblauch. Absorptions-Spectralanalyse sehr verdünnter Lösungen 738

V. W. Böhlendorff. Bemerkungen zu der Abhandlung des Hrn. B. Walter: „Ueber den Nachweis des Zerfalles von Moleculargruppen in Lösungen durch Fluorescenz- und Absorptionserscheinungen 784

VI. H. Ebert. Einfluss der Helligkeitsvertheilung in den Spectrallinien auf die Interferenzerscheinungen 790

VII. P. v. Bjerkén. Untersuchung der durch Druck und Zug hervorgerufenen Doppelbrechung bei Kautschuk und Leimgallerten 808

Seite

VIII. P. v. Bjerkén. Ueber die Analogie zwischen Kautschuk und Leimgallerten in Bezug auf Elasticität und Wärme . 817

IX. W. Voigt. Ueber einen einfachen Apparat zur Bestimmung der thermischen Dilatation fester Körper, speciell der Krystalle 831

X. R. Lamprecht. Ueber die Gleichungen der electromagnetischen Kraft 835

XI. K. Hartwig. Ueber die moleculare Leitungsfähigkeit von Lösungen einiger Glieder der Fettsäurereihe in Wasser und einigen Alkoholen, sowie der Oxalsäure in Aethylalkohol . 839

Geschlossen am 1. Juli 1891.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel	Ia.	C. Fromme.
»	Ib.	F. Auerbach.
»	II.	F. Streintz.
»	III.	A. Hussell.
»	IV.	O. Lehmann.
»	V.	J. Müller.
»	VI.	A. Raps.
»	VII.	O. Knoblauch.

III. *Hydrodynamisch-akustische Untersuchungen; von Walter König.*

III. Ueber das Drehungsmoment, das ein ruhendes Rotationsellipsoid in einer schwingenden Flüssigkeit erfährt; Theorie der Rayleigh'schen Scheibchen.

Ausser den bisher behandelten fortbewegenden Kräften übt eine bewegte Flüssigkeit, wenn die in ihr ruhenden Körper keine Kugeln sind, auch Drehungsmomente auf sie aus. Wir erhalten den einfachsten Fall dieses Problems, wenn wir annehmen, dass nur ein einziger fester ruhender Körper in der unendlich ausgedehnten, in der Unendlichkeit geradlinig hin- und herströmenden Flüssigkeit gegeben sei, und dass er die einfachste Abweichung von der Kugelgestalt, nämlich die Form eines Rotationsellipsoides besitze. Der Körper sei in einer beliebigen Lage gegen die Flüssigkeitsströmung festgelegt, und es werde das Kräftepaar, zu dem sich die infolge der Flüssigkeitsbewegung ungleichmässig über die Körperoberfläche vertheilten Flüssigkeitsdrucke zusammensetzen, zunächst für den Fall einer gleichförmigen Bewegung der Flüssigkeit berechnet.

Einen allgemeinen Ausdruck für dieses Drehungsmoment haben Thomson und Tait in ihrer theoretischen Physik[1]) für den Fall eines beliebig gestalteten Rotationskörpers aufgestellt und den Schluss aus ihm gezogen, dass jeder Rotationskörper das Bestreben hat, sich mit seiner Längserstreckung senkrecht zur Flüssigkeitsströmung zu stellen. In unserem Falle also wird ein verlängertes Ellipsoid sich mit seiner Axe quer gegen den Strom, ein abgeplattetes dagegen mit seiner Axe in die Richtung des Stromes stellen, und das Letztere ist gerade das, was man an den Rayleigh'schen Scheibchen wahrnimmt. Zur speciellen Berechnung des

1) Thomson u. Tait, Theor. Physik. (Deutsch.) Braunschweig 1871. 1. Theil. p. 303.

Drehungsmomentes müssen wir auf die Bewegungsform der Flüssigkeit, d. h. auf das Geschwindigkeitspotential zurückgehen. Der Fall eines in einer strömenden Flüssigkeit ruhenden Ellipsoides ist vielfach behandelt worden.[1]) Ich knüpfe wieder an diejenige Darstellung an, welche Kirchhoff in seiner Mechanik[2]) von diesem Problem gegeben hat.

Der Mittelpunkt des Coordinatensystems liege im Centrum des Rotationsellipsoides und die Z-Axe falle mit der Rotationsaxe zusammen. Die Längen der halben Axen sollen mit a und c bezeichnet werden, sodass die Gleichung des Ellipsoides:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

ist. Die Richtungswinkel der nach aussen gehenden Normale eines Oberflächenelementes dS des Ellipsoides sollen mit $\alpha\beta\gamma$ bezeichnet werden, und p bedeute den Druck der Flüssigkeit auf dieses Oberflächenelement.

Da dieser in einer reibungslosen Flüssigkeit, wie wir sie hier voraussetzen, normal zur Oberfläche steht, so sind die Componenten der Gesammtkraft, welche die bewegte Flüssigkeit auf das Ellipsoid ausübt:

$$\left\{\begin{array}{c} X=-\int p\cos\alpha\, dS, \quad Y=-\int p\cos\beta\, dS, \\ Z=-\int p\cos\gamma\, dS \end{array}\right. \tag{2}$$

und die Componenten des Drehungsmomentes:

$$\left\{\begin{array}{l} L=-\int p(y\cos\gamma-z\cos\beta)\, dS \\ M=-\int p(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\, dS \\ N=-\int p(x\cos\beta-y\cos\alpha)\, dS, \end{array}\right. \tag{3}$$

wobei die Integrale über die Oberfläche des Ellipsoides auszudehnen sind. Die Vorzeichen der Drehungsmomente sind so gewählt, dass ein positiver Werth z. B. von M ein Drehungsmoment um die Y-Axe im Sinne einer Drehung von der $+Z$- nach der $+X$ Axe bedeutet. Der Druck p

1) Ich verweise hinsichtlich der Literatur auf Auerbach, Theor. Hydrodynamik. Braunschweig 1881. p. 83.

2) Kirchhoff, Mechanik. p. 219. 1877.

berechnet sich aus dem Geschwindigkeitspotential φ nach der Formel:

$$(4) \quad p = \text{Const.} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \mu \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right),$$

vorausgesetzt, dass keine Kräfte auf die Flüssigkeit wirken. Da das constante Glied bei der Integration herausfällt, und $\partial \varphi / \partial t$ bei einer stationären Bewegung gleich Null ist, so kommt vorläufig nur das letzte Glied obiger Gleichung in Betracht.

Strömt die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit w in der der $+Z$-Axe entgegengesetzten Richtung, so ist nach Kirchhoff das Geschwindigkeitspotential gegeben durch:

$$\varphi_1 = \frac{w}{2\pi(2 - C)} \frac{\partial \Omega}{\partial z} - wz,$$

wenn:
$$\Omega = \pi a^2 c \int_s^\infty d\lambda \cdot \frac{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda}}{(a^2 + \lambda)\sqrt{c^2 + \lambda}},$$

$$(5) \quad C = a^2 c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)^{3/2}}$$

und s die positive Wurzel der Gleichung:

$$(6) \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} = 1$$

bedeutet. Strömt die Flüssigkeit in der Richtung der negativen X-Axe mit der Geschwindigkeit u, so hat das Geschwindigkeitspotential entsprechend den Werth:

$$\varphi_2 = \frac{u}{2\pi(2 - A)} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - ux,$$

wo (7)
$$A = a^2 c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^2 \sqrt{c^2 + \lambda}}$$

ist und Ω dieselbe Bedeutung wie soeben hat. Auch die Summe beider Lösungen stellt eine mögliche Flüssigkeitsbewegung dar und genügt offenbar der Bedingung, dass die Flüssigkeit in der Unendlichkeit zwar auch geradlinig und parallel der XZ-Ebene ströme aber mit einer Geschwindigkeit:

$$(8) \quad W = \sqrt{u^2 + w^2}$$

und in einer Richtung, deren Winkel mit der Z-Axe durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{u}{w} \tag{9}$$

bestimmt ist. Dieser Fall entspricht demjenigen, für welchen wir die Wirkung der Flüssigkeitsströmung auf das Rotationsellipsoid berechnen wollen. Denn da um die Z-Axe herum alles symmetrisch ist, so kann die Y-Axe ohne Einschränkung der Allgemeinheit so gelegt werden, dass sie auf der Richtung der Flüssigkeitsströmung senkrecht steht. Es ist also:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

zu setzen. Berechnet man die Werthe von $\partial\Omega/\partial x$ und $\partial\Omega/\partial z$, und führt zu weiterer Erleichterung die Bezeichnungen ein:

$$A_s = a^2 c \int_s^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{c^2+\lambda}}, \tag{10}$$

$$C_s = a^2 c \int_s^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)^{3/2}}, \tag{11}$$

so lässt sich φ in der Form schreiben:

$$\varphi = -\frac{ux A_s}{2-A} - \frac{wz C_s}{2-C} - ux - wz \tag{12}$$

und folglich:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= -\frac{ux}{2-A}\frac{\partial A_s}{\partial x} - \frac{wz}{2-C}\frac{\partial C_s}{\partial x} - \left(\frac{A_s}{2-A}+1\right)u,\\
\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= -\frac{ux}{2-A}\frac{\partial A_s}{\partial y} - \frac{wz}{2-C}\frac{\partial C_s}{\partial y},\\
\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= -\frac{ux}{2-A}\frac{\partial A_s}{\partial z} - \frac{wz}{2-C}\frac{\partial C_s}{\partial z} - \left(\frac{C_s}{2-C}+1\right)w.
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Für die Berechnung der Flüssigkeitsdrucke auf das Ellipsoid bedürfen wir derjenigen Werthe der Geschwindigkeitscomponenten, welche an der Oberfläche des Ellipsoids, also für $s = 0$ statt haben. Es müssen daher in den Gleichungen (13) die Differentialquotienten von A_s und C_s berechnet werden mit Hülfe der Werthe von $\partial s/\partial x$, $\partial s/\partial y$, $\partial s/\partial z$, welche man aus der Gleichung (6) ermittelt, und in den so erhaltenen allgemeingültigen Ausdrücken ist alsdann $s = 0$ zu setzen. Man erhält auf diese Weise für die Geschwin-

digkeitscomponenten an der Oberfläche des Ellipsoides die Werthe:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 2c^4 \dfrac{x}{c^4 + (a^2 - c^2)z^2}\left(\dfrac{ux}{a^2(2-A)} + \dfrac{wz}{c^2(2-C)}\right) - \dfrac{2u}{2-A}, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 2c^4 \dfrac{y}{c^4 + (a^2 - c^2)z^2}\left(\dfrac{ux}{a^2(2-A)} + \dfrac{wz}{c^2(2-C)}\right), \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 2a^2c^2 \dfrac{z}{c^4 + (a^2 - c^2)z^2}\left(\dfrac{ux}{a^2(2-A)} + \dfrac{wz}{c^2(2-C)}\right) - \dfrac{2w}{2-C}, \end{cases}$$

und demgemäss für den Druck p, abgesehen von den beiden von vorn herein zu vernachlässigenden Gliedern der Gleichung (4):

$$p = -2\mu\left\{\frac{u^2}{(2-A)^2} + \frac{w^2}{(2-C)^2}\right\}$$
$$+ 2\mu a^2c^4 \frac{1}{c^4 + (a^2 - c^2)z^2}\left\{\frac{ux}{a^2(2-A)} + \frac{wz}{c^2(2-C)}\right\}^2.$$

Von diesen beiden Gliedern von p ist das erste ein constantes, fällt also wiederum bei der Integration heraus. In die Integrale braucht also nur das letzte Glied eingesetzt zu werden. Zur Ausführung der Integrationen mögen für x und y Polarcoordinaten eingeführt werden:

$$x = r \cdot \cos\varphi, \qquad y = r \cdot \sin\varphi.$$

Dann ist r ausschliesslich von z abhängig:

$$r^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - z^2)$$

und die Integration braucht nur über φ von 0 bis 2π und über z von $+c$ bis $-c$ ausgeführt zu werden. Berechnet man nach bekannten Formeln die Cosinus der Richtungswinkel der Normalen und den Werth des Oberflächenelementes dS als Functionen von φ und z, resp. $d\varphi$ und dz, so erhält man für die in die Integrale (2) und (3) einzusetzenden Grössen die Ausdrücke:

$$(15)\quad \begin{cases} \cos\alpha\, dS = \dfrac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2}\, dz \cdot \cos\varphi\, d\varphi, \\ \cos\beta\, dS = \dfrac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2}\, dz \cdot \sin\varphi\, d\varphi, \\ \cos\gamma\, dS = \dfrac{a^2}{c^2} z\, dz\, d\varphi; \end{cases}$$

FREIE UNIVERSITÄT BERLIN UNIVERSITÄTS-SCHRIFT

$$(15)\quad \begin{cases} (y\cos\gamma - z\cos\beta)\,dS = \dfrac{a}{c}\dfrac{a^2-c^2}{c^2}\sqrt{c^2-z^2}\,z\,dz\sin\varphi\,d\varphi, \\ (z\cos\alpha - x\cos\gamma)\,dS = -\dfrac{a}{c}\dfrac{a^2-c^2}{c^2}\sqrt{c^2-z^2}\,z\,dz\cos\varphi\,d\varphi, \\ (x\cos\beta - y\cos\alpha)\,dS = 0, \end{cases}$$

und für die variablen Glieder in dem Ausdrucke für p:

$$\frac{2\mu c^2 u^2}{(2-A)^2}\frac{c^2-z^2}{c^4+(a^2-c^2)z^2}\cos^2\varphi + \frac{2\mu a^2 w^2}{(2-C)^2}\frac{z^2}{c^4+(a^2-c^2)z^2} + \frac{4\mu a c u w}{(2-A)(2-C)}\frac{\sqrt{c^2-z^2}\,.\,z}{c^4+(a^2-c^2)z^2}\cos\varphi.$$

Es ist schon aus der Form dieser Glieder und der damit zu multiplicirenden Ausdrücke ersichtlich, dass von den zu berechnenden Integralen alle bis auf eines gleich Null werden. Man erhält:

$$X = Y = Z = L = N = 0,$$

$$M = \frac{4\mu a^2 u w}{(2-A)(2-C)}\frac{a^2-c^2}{c^2}\int_{-c}^{+c}\frac{(c^2-z^2)z^2\,dz}{c^4+(a^2-c^2)z^2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$= 4\pi\mu u w\frac{a^2}{(2-A)(2-C)}\frac{a^2-c^2}{c^2}\int_{-c}^{+c}\frac{(c^2-z^2)z^2}{c^4+(a^2-c^2)z^2}dz.$$

Diese Gleichungen besagen, dass ein constanter Strom einer idealen Flüssigkeit auf ein in ihm ruhendes Rotationsellipsoid keine fortbewegende Wirkung, wohl aber ein Drehungsmoment um eine zur Rotationsaxe des Ellipsoides und zur Richtung des Stromes senkrechte Axe ausübt. Zur weiteren Berechnung dieses Drehungsmomentes setzen wir:

$$\frac{z}{c} = t \quad \text{und} \quad \frac{a^2-c^2}{c^2} = \pm\varepsilon^2,$$

je nachdem das Ellipsoid ein abgeplattetes oder verlängertes ist. Dann hat das Drehungsmoment den Werth:

$$M = \pm 4\pi\mu u w\frac{a^2 c}{(2-A)(2-C)}\varepsilon^2\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t^2)t^2}{1\pm\varepsilon^2 t^2}dt.$$

I. Verlängertes Rotationsellipsoid. $a < c$.

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t^2)t^2}{1-\varepsilon^2 t^2}dt = +\frac{2}{3\varepsilon^2} + 2\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^4} - \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^5}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Ferner ist, wenn man die Integrale (5) und (7) berechnet:

$$(16)\qquad \begin{cases} A = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, \\ C = -2\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}. \end{cases}$$

Damit ergibt sich:

$$(17)\qquad \begin{cases} M = -4\pi\mu u w a^2 c \dfrac{\varepsilon^3}{\frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \varepsilon} \\ \qquad \times \dfrac{\frac{2}{3}\varepsilon^3 + \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \varepsilon}{2\varepsilon^3 + \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \varepsilon}. \end{cases}$$

Die beiden Grenzfälle des verlängerten Rotationsellipsoides sind die Kugel einerseits und der unendlich lange Kreiscylinder andererseits. Für den ersten Grenzfall ist $c = a$, $\varepsilon = 0$, und es lässt sich ohne Schwierigkeit der Nachweis führen, dass der obige Ausdruck von M für diesen Werth von ε in der That gleich Null wird, wie es für eine Kugel erforderlich ist. Für den zweiten Grenzfall ist $c = \infty$, $\varepsilon = 1$. Wenn man berücksichtigt, dass für diesen Werth von ε das Product $(1-\varepsilon^2)\log[(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)]$ gleich Null wird, so ist aus der obigen Gleichung direct ersichtlich, dass M unendlich wird von derselben Ordnung, wie die Axe des Cylinders, oder dass M/c endlich bleibt, und zwar hat dieser Quotient, den man als den auf die Längeneinheit entfallenden Theil des ganzen Drehungsmomentes bezeichnen könnte, den Werth:

$$\lim_{c=\infty}\frac{M}{c} = -\tfrac{4}{3}\pi\mu a^2 u w,$$

oder wenn man für die Componenten u und w die Gesammtgeschwindigkeit W und ihren Winkel ϑ mit der Z-Axe einführt:

$$\lim_{c=\infty}\frac{M}{c} = -\tfrac{2}{3}\pi\mu a^2 W^2 \sin 2\vartheta.$$

Doch ist zu bemerken, dass dieser Grenzfall insofern nicht mehr den Grundvoraussetzungen unseres Problemes entspricht, als die Flüssigkeit nicht mehr überall in der Unendlichkeit parallel der Z-Axe strömen kann, wenn der in

ihr ruhende Körper selber sich bis in die Unendlichkeit erstreckt. Man erhält denselben Grenzfall aber auch, wenn man c endlich und a unendlich klein annimmt. Der Körper ist dann ein Stab von der endlichen Länge $l = 2c$ und dem unendlich kleinen kreisförmigen Querschnitt $q = \pi a^2$; das von der Flüssigkeit auf ihn ausgeübte Drehungsmoment ist dann unendlich klein von der Ordnung des Querschnittes und wird in erster Annäherung, d. h. unter Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von a/c durch den Ausdruck:

$$M = -\tfrac{1}{3}\mu\, q\, l\, W^2 \sin 2\vartheta$$

dargestellt.

Das Drehungsmoment ist für ein verlängertes Rotationsellipsoid stets negativ, hat also den Sinn einer Drehung von der $+Z$- nach der $-X$-Axe. Unseren Annahmen gemäss strömt die Flüssigkeit mit den Geschwindigkeitscomponenten u und w in der Richtung der $-X$- und der $-Z$-Axe, also fällt die Richtung der Strömung in die Quadranten zwischen $-X$- und $-Z$-, resp. $+X$- und $+Z$ Axe. Der Sinn des Drehungsmomentes ist also der, dass sich das Ellipsoid mit seiner Rotationsaxe, d. h. mit seiner Längserstreckung senkrecht zur Flüssigkeitsströmung zu stellen sucht. Das Drehungsmoment wird Null für $\vartheta = 0$ und für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$; aber das Gleichgewicht ist im ersten Falle ein labiles, im zweiten ein stabiles.

II. Abgeplattetes Rotationsellipsoid. $a > c$.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-t^2)\,t^2}{1+\varepsilon^2 t^2}\,dt = -\frac{2}{3\varepsilon^2} + 2\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^4} - 2\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^5}\operatorname{arc\,tg}\varepsilon.$$

$$(19)\qquad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{\varepsilon^2} + \dfrac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\operatorname{arc\,tg}\varepsilon, \\ C = +2\dfrac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} - 2\dfrac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\operatorname{arc\,tg}\varepsilon. \end{cases}$$

Mittels dieser Werthe erhält man für M:

$$(20)\qquad M = 4\pi\mu\, u\, w\, a^2 c\, \frac{\varepsilon^3}{(1+\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - \varepsilon} \times \frac{(1+\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - \varepsilon - \frac{2}{3}\varepsilon^3}{(1+\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - \varepsilon - 2\varepsilon^3}.$$

Dabei liegt ε zwischen 0 und ∞. Der erste dieser Grenzwerthe entspricht dem Fall einer Kugel, und ergibt

wieder, wie erforderlich und aus der Formel leicht ersichtlich ist, $M = 0$. Der zweite Grenzwerth entspricht dem Fall einer unendlich dünnen, kreisförmigen Scheibe vom Radius a. Um den Werth von M für diesen Grenzfall zu erhalten, schreibt man den obigen Ausdruck besser in der Form:

$$M = 4\pi\mu u w a^2 \sqrt{a^2 - c^2} \frac{1}{\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}} \times \frac{\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{2}{3}}{\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} - 2}.$$

Berücksichtigt man, dass für $c = 0$ ε unendlich, $\operatorname{arctg}\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$ wird, so erhält man für den gesuchten Grenzwerth:

$$(21) \qquad \begin{cases} M = \frac{8}{3}\mu u w a^3, \\ \quad = \frac{4}{3}\mu a^3 W^2 \sin 2\vartheta. \end{cases}$$

Das Vorzeichen des Drehungsmomentes ist in diesem Falle und überhaupt für ein abgeplattetes Rotationsellipsoid positiv, d. h. die Axe des Ellipsoides sucht sich in die Richtung der Strömung, oder seine flache Seite sich quer gegen die Strömung zu stellen.

Es ist bemerkenswerth, dass die Rechnung einen bestimmten, endlichen Werth für das Drehungsmoment auch dann ergibt, wenn das Ellipsoid in eine unendlich dünne Scheibe übergeht, obwohl in diesem Grenzfalle die Voraussetzungen des Problems nicht mehr vollständig erfüllt sind. Eine Betrachtung der in den Gleichungen (14) für die Geschwindigkeitscomponenten aufgestellten Ausdrücke lehrt nämlich, dass am Rande der Scheibe die Geschwindigkeit der Flüssigkeit unendlich gross, der Druck daher negativ unendlich sein würde, eine Folgerung, die mit der Voraussetzung eines stetigen Zusammenhanges der Flüssigkeit nicht verträglich erscheint. In der Natur freilich würde dieses theoretische Bedenken nicht in Betracht kommen, weil der behandelte ideale Fall aus einem doppelten Grunde überhaupt nicht zu verwirklichen ist, erstens weil es keine unendlich dünnen Scheiben, und zweitens weil es keine reibungslosen Flüssigkeiten gibt. Beiden Umständen wäre demnach noch Rechnung zu tragen, wenn man eine auf natürliche Vorgänge anwendbare Formel erhalten wollte.

Um eine Correction für die Dicke der Scheibe zu er-

halten, wird man in erster Annäherung eine Scheibe von endlicher Dicke als ein sehr stark abgeplattetes Ellipsoid betrachten können und demgemäss M unter Beibehaltung der ersten Potenz des Verhältnisses c/a berechnen. Die Ausführung der Rechnung ergibt:

$$(22)\quad \begin{cases} M = \frac{4}{3}\mu a^3 W^2 \sin 2\vartheta \left(1 - \frac{\pi^2 - 8}{2\pi}\frac{c}{a}\right) \\ \quad = \frac{4}{3}\mu a^3 W^2 \sin 2\vartheta \left(1 - 0{,}2977\,\frac{c}{a}\right). \end{cases}$$

wobei a den Radius, c die halbe Dicke der Scheibe bedeutet.

Für denjenigen Fall der Flüssigkeitsreibung, der dem hier behandelten Probleme der Bewegung einer idealen Flüssigkeit entspricht, ist eine Lösung von Hrn. Oberbeck aufgestellt worden[1]), unter der üblichen Beschränkung auf unendlich kleine Geschwindigkeiten. Infolge dieser Beschränkung ergeben sich auf diesem Wege nur Wirkungen der Flüssigkeit, welche von der ersten Potenz der Geschwindigkeit abhängen, sodass Wirkungen, wie die oben berechneten, dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen, hier bereits ausser Betracht fallen. Hr. Oberbeck gibt die Werthe der Geschwindigkeitscomponenten u, v, w einer reibenden Flüssigkeit für den besonderen Fall an, dass ein Ellipsoid in der Flüssigkeit ruht, und die Bewegung der Flüssigkeit im Unendlichen der einen Axe des Ellipsoides parallel gerichtet ist. Um die unseren früheren Bedingungen entsprechende Form der Aufgabe zu erhalten, haben wir das Ellipsoid als Rotationsellipsoid anzunehmen und die Flüssigkeit im Unendlichen in einer Richtung strömend zu denken, welche mit der Rotationsaxe einen Winkel ϑ bildet. Die Lösung für diesen allgemeinen Fall lässt sich dann wieder durch einfache Summation der Lösungen für die beiden besonderen Fälle einer Strömung parallel und einer Strömung senkrecht zur Axe des Rotationsellipsoides darstellen, und für diese Fälle lassen sich die Lösungen aus der Arbeit des Hrn. Oberbeck entnehmen. Wählen wir also wieder die Rotationsaxe als Z-Axe, und bezeichnen wir die Geschwindigkeits-

1) A. Oberbeck, Crelle's Journ. 81. p. 62. 1876.

componenten und den Flüssigkeitsdruck mit u_z, v_z, w_z und p_z, wenn die Flüssigkeit in der Unendlichkeit mit der Geschwindigkeit w parallel der Z-Axe strömt, dagegen mit u_x, v_x, w_x und p_x, wenn sie in der Unendlichkeit mit der Geschwindigkeit u parallel der X-Axe strömt, so genügen auch die Lösungen:

$$u' = u_x + u_z, \qquad v' = v_x + v_z, \qquad w' = w_x + w_z,$$
$$p' = p_x + p_z$$

den Differentialgleichungen und stellen eine Bewegung dar, bei welcher die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit $W = \sqrt{u^2 + w^2}$ in der Unendlichkeit in einer Richtung strömt, die mit der Rotationsaxe des Ellipsoides den durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{u}{w}$$

definirten Winkel bildet. Die Ausdrücke für u', v', w' und p' sind unter Benutzung der Oberbeck'schen Lösungen zu entwickeln; mit Hülfe dieser Werthe sind dann die Druckcomponenten X_x, Y_y, Z_z u. s. w. nach den bekannten Formeln:

$$(23) \quad \begin{cases} X_x = p' - 2k\dfrac{\partial u'}{\partial x}, & Y_z = Z_y = -k\left(\dfrac{\partial v'}{\partial z} + \dfrac{\partial w'}{\partial y}\right) \\ Y_y = p' - 2k\dfrac{\partial v'}{\partial y}, & Z_x = X_z = -k\left(\dfrac{\partial w'}{\partial x} + \dfrac{\partial u'}{\partial z}\right) \\ Z_z = p' - 2k\dfrac{\partial w'}{\partial z}, & X_y = Y_x = -k\left(\dfrac{\partial u'}{\partial y} + \dfrac{\partial v'}{\partial x}\right) \end{cases}$$

zu berechnen, und schliesslich in die Integrale (2) und (3) an Stelle der früher benutzten Druckcomponenten $p\cos\alpha$, $p\cos\beta$, $p\cos\gamma$ die Ausdrücke:

$$(24) \quad \begin{cases} X_n = X_x\cos\alpha + X_y\cos\beta + X_z\cos\gamma \\ Y_n = Y_x\cos\alpha + Y_y\cos\beta + Y_z\cos\gamma \\ Z_n = Z_x\cos\alpha + Z_y\cos\beta + Z_z\cos\gamma \end{cases}$$

einzusetzen. Aber man kann sich die umständliche Ausführung der Berechnung ersparen, wenn man sich vergegenwärtigt, dass die Druckcomponenten X_x, Y_y, Z_z u. s. w. sich bei der allgemeineren Lösung der u', v', w', p' einfach als die Summen der Druckcomponenten für die beiden Sonder-

fälle der (u_x, v_x, w_x, p_x) und (u_z, v_z, w_z, p_z) darstellen lassen, weil die Gleichungen (23) in Bezug auf diese Grössen, bezüglich ihre Ableitungen linear sind. Daher werden auch die schliesslichen, nach den Gleichungen (2) und (3) berechneten Werthe der Gesammtdrucke und -Drehungsmomente in dem allgemeinen Falle einfach die Summen der für die beiden Sonderfälle berechneten Gesammtdrucke und -Drehungsmomente sein. Infolge dieser Ueberlegung ist das Ergebniss für die Drehungsmomente ein sehr einfaches. Aus Gründen der Symmetrie ist unmittelbar ersichtlich, dass das Drehungsmoment gleich Null sein muss, sowohl wenn der Strom parallel der Rotationsaxe als auch wenn er senkrecht zu ihr gerichtet ist. Da das Drehungsmoment bei einer beliebigen Richtung des Stromes durch Summation jener beiden erhalten wird, so ist es unter allen Umständen gleich Null. Berücksichtigt man also nur den Einfluss der Reibung, so übt ein Flüssigkeitsstrom auf ein in ihm ruhendes Rotationsellipsoid gar keine drehende, sondern nur eine fortbewegende Wirkung aus. Der Vollständigkeit wegen mögen die Componenten dieser letzteren Wirkung für einen stationären Flüssigkeitsstrom noch angegeben werden. Sie lassen sich unmittelbar aus der Oberbeck'schen Arbeit entnehmen. Ist die Flüssigkeitsströmung in der Unendlichkeit parallel der X-Axe gerichtet, so ergibt sich:

$$X = \frac{16\,\pi a^2 c k u}{Q_0 + a^2 A}; \quad Y = 0; \quad Z = 0,$$

hat sie die Geschwindigkeit w parallel zur Z-Axe, so ist:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = \frac{16\,\pi a^2 c k w}{Q_0 + c^2 C};$$

dabei bedeutet k die Reibungsconstante; A und C haben die durch die Gleichungen (5) und (7) definirte Bedeutung und Q_0 ist gegeben durch:

$$Q_0 = a^2 c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{c^2 + \lambda}}.$$

Für den Fall, dass die Flüssigkeitsströmung schief zur Rotationsaxe unter dem Winkel ϑ erfolgt, ergibt die Summation beider Lösungen:

$$(25)\qquad X = \frac{16\pi a^2 c}{Q_0 + a^2 A} ku; \quad Y = 0; \quad Z = \frac{16\pi a^2 c}{Q_0 + c^2 C} kw.$$

I. Verlängertes Rotationsellipsoid. $a < c$.

$Q_0 = a^2/\varepsilon \,.\, \log(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ unter Benutzung der früheren Bezeichnungsweise. Dies und die oben bereits angegebenen Werthe für A und C in die Gleichungen eingesetzt, ergeben:

$$(26)\qquad \begin{cases} X = 16\pi cku \dfrac{2\varepsilon^3}{(3\varepsilon^2-1)\,\ln\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} + 2\varepsilon} \\ Y = 0 \\ Z = 16\pi ckw \dfrac{\varepsilon^3}{(\varepsilon^2+1)\,\ln\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - 2\varepsilon}. \end{cases}$$

Für $a = c$ wird $\varepsilon = 0$ und die Ausdrücke gehen in den bekannten Werth für die Kugel über:

$$X = 6\pi aku, \qquad Y = 0, \qquad Z = 6\pi akw.$$

Nur in diesem Falle setzen sich die Componenten zu einer Resultante zusammen, welche in die Richtung der Flüssigkeitsströmung hineinfällt. Im allgemeinen bildet die Richtung, in der die Flüssigkeit das Rotationsellipsoid zu verschieben sucht, mit der Rotationsaxe einen Winkel φ, der durch die Gleichung:

$$(27)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\vartheta \dfrac{2(\varepsilon^2+1)\ln\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - 4\varepsilon}{(3\varepsilon^2-1)\ln\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} + 2\varepsilon} \end{cases}$$

bestimmt, und daher, wie an diesem Ausdrucke nachzuweisen ist, immer grösser als ϑ ist. Für ein Rotationsellipsoid, bei dem c unendlich gross gegen a ist, würde $\operatorname{tg}\varphi = 2\operatorname{tg}\vartheta$ sein.

II. Abgeplattetes Rotationsellipsoid. $a > c$.

$$Q_0 = 2\frac{a^2}{\varepsilon}\operatorname{arc\,tg}\varepsilon.$$

$$(28)\qquad \begin{cases} X = 16\pi cku \dfrac{\varepsilon^3}{(1+3\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - \varepsilon} \\ Y = 0 \\ Z = 16\pi ckw \dfrac{\varepsilon^3}{-2(1-\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon + 2\varepsilon}. \end{cases}$$

Es gelten ähnliche Betrachtungen, wie für ein verlängertes Ellipsoid. Die Resultante der obigen Componenten bildet mit der Rotationsaxe einen Winkel φ, der durch die Gleichung:

$$\text{(29)} \qquad \left| \quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\vartheta \cdot \frac{2\varepsilon - 2(1-\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon}{(1+3\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - \varepsilon} \right.$$

gegeben ist. Nur für eine Kugel fällt die Richtung dieser Kraft mit der Strömungsrichtung zusammen. Im allgemeinen bildet sie mit der Rotationsaxe einen kleineren Winkel als die Stromrichtung. In dem Grenzfalle einer Scheibe wird ε unendlich gross und man erhält:

$$X = \frac{32}{3} aku; \qquad Y = 0; \qquad Z = 16\, akw$$

und:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{3}\operatorname{tg}\vartheta .$$

Ein geradliniger, stationärer Strom einer reibenden Flüssigkeit sucht also, wenn nur die erste Potenz der Geschwindidigkeit in Betracht gezogen wird, ein in ihm ruhendes Rotationsellipsoid nicht zu drehen, sondern nur zu verschieben, aber in einer Richtung, welche im allgemeinen mit der Richtung der Flüssigkeitsströmung nicht zusammenfällt, sondern einen bestimmten Winkel mit ihr einschliesst.

Es bleibt schliesslich die Frage zu erörtern, wie sich die Verhältnisse in einer reibenden Flüssigkeit bei grösseren Geschwindigkeiten gestalten würden. Für diese allgemeinste Aufgabe besteht jedoch noch keine Lösung. Da aber der Fall einer idealen Flüssigkeit den Grenzfall einer reibenden Flüssigkeit für einen unendlich kleinen Werth der Reibung bildet, so wird man erwarten können, dass der oben (p. 48 u. ff.) entwickelte Ausdruck für das Drehungsmoment bei Flüssigkeiten von geringer Reibung wenigstens die erste Annäherung an die Wirklichkeit darstellen wird. Wie weit diese Annäherung geht, darüber wird eine experimentelle Untersuchung Aufschluss zu geben haben.

Bei den bisherigen Betrachtungen ist eine stationäre Flüssigkeitsströmung vorausgesetzt worden. Es soll endlich unter Vernachlässigung der Reibung noch die Frage beantwortet werden, wie die beschleunigenden Kräfte und die Drehungsmomente ausfallen werden, wenn die Strömung mit der Zeit veränderlich ist. Es genügt, um auf diesen Fall

zu kommen, in dem durch Gleichung (12) gegebenen Ausdruck des Geschwindigkeitspotentiales u und w als Functionen der Zeit anzunehmen. Dann ist der früher berechnete Werth von p gemäss Gleichung (4) zu vermehren um $-\mu(\partial\varphi/\partial t)$ und diese Grösse hat für die Oberfläche des Rotationsellipsoides den Werth:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial t} \frac{2}{2-A} x + \mu \frac{\partial w}{\partial t} \frac{2}{2-C} \cdot z.$$

Dieses Zusatzglied in die Integrale (2) eingesetzt, ergibt für die beschleunigenden Kräfte die Ausdrücke:

$$(30) \qquad \begin{cases} X = \frac{8}{3}\pi\mu \frac{a^2 c}{2-A} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}, \\ Y = 0, \\ Z = \frac{8}{3}\pi\mu \frac{a^2 c}{2-C} \cdot \frac{\partial w}{\partial t}. \end{cases}$$

Nimmt man an, dass die resultirende Geschwindigkeit W constante Richtung, aber veränderliche Grösse hat, sodass:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} \cdot \sin\vartheta, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} \cdot \cos\vartheta,$$

so ersieht man aus obigen Formeln, dass die resultirende beschleunigende Kraft mit der Rotationsaxe einen anderen Winkel bildet, als die Strömungsrichtung, ganz ähnlich, wie wir es bei der Resultante der Reibungswirkungen gefunden hatten. Nennt man diesen Winkel wiederum φ, so ist seine Bestimmungsgleichung:

$$(31) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\vartheta \cdot \frac{2-C}{2-A},$$

wobei für A und C die oben entwickelten Ausdrücke einzusetzen sind. Für ein verlängertes Ellipsoid ist φ grösser als ϑ und würde für ein Ellipsoid, dessen Querdimension unendlich klein gegen seine Längserstreckung ist, durch $\operatorname{tg}\varphi = 2\operatorname{tg}\vartheta$ gegeben sein. Für ein abgeplattetes Ellipsoid ist φ kleiner als ϑ; für eine Scheibe wird:

$$X = 0, \qquad Z = \tfrac{8}{3}\mu a^3 \frac{\partial w}{\partial t},$$

und daher $\varphi = 0$. Nur für eine Kugel ist $\varphi = \vartheta$, weil in diesem Falle $A = C = \frac{2}{3}$ ist. Man erhält mit diesen Werthen

für die Kugel den schon in der ersten Abhandlung benutzten Ausdruck der beschleunigenden Kraft[1]):

$$X = \tfrac{3}{2} m' \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad Z = \tfrac{3}{2} m' \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Führt man die entsprechenden Rechnungen mit den Integralen (3) durch, welche die Drehungsmomente ergeben, so findet man, dass die von der Beschleunigung der Flüssigkeit abhängigen Theile der Drehungsmomente sämmtlich gleich Null werden. Daher gilt der oben berechnete Werth von M nicht blos bei stationärer Strömung, sondern ist auch für einen nicht stationären Strom der vollständige Ausdruck des in jedem Augenblicke bei der jeweiligen Geschwindigkeit W vorhandenen Drehungsmomentes. Nimmt man im besonderen an, dass die Bewegung die Form einer einfachen Sinusschwingung habe, so ist zu setzen:

$$W = W_0 \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

und man erhält für den Fall einer Scheibe vom Radius a und der halben Dicke c als Drehungsmoment zur Zeit t:

$$M = \tfrac{4}{3} \mu a^3 \left(1 - 0\,2977 \frac{c}{a}\right) W_0^2 \sin 2\vartheta \cdot \cos^2 2\pi \frac{t}{T}.$$

Das Drehungsmoment variirt demnach zwischen Null und einem maximalen Werthe, hat aber in allen Phasen der Bewegung denselben Sinn, indem sich die Scheibe mit ihrer flachen Seite stets quer gegen die Strömung zu stellen sucht. Erfolgen daher die Schwingungen sehr schnell, wie es bei akustischen Schwingungen der Fall ist, während die Scheibe nur langsam den auf sie einwirkenden Kräftepaaren zu folgen vermag, so wird man das schnell veränderliche Drehungsmoment M durch ein constantes Drehungsmoment compensiren können, und dieses letztere wird gleich dem Mittelwerthe des veränderlichen Drehungsmomentes für je eine Schwingungsperiode, d. h. gleich dem Werthe:

$$[M] = \tfrac{2}{3} \mu a^3 \left(1 - 0.2977 \frac{c}{a}\right) W_0^2 \sin 2\vartheta$$

sein müssen.

1) Vgl. den vorigen Band p. 360.

Die Erscheinung, welche nach diesen theoretischen Auseinandersetzungen eintreten muss, wenn eine Scheibe im Schwingungsbauche einer tönenden Luftsäule aufgehängt wird, hat Lord Rayleigh zuerst beobachtet. Sein Vorschlag, sie zur Schallstärkemessung zu verwenden, ist von Hrn. Grimsehl genauer durchgeführt worden. Die Anwendung der hier abgeleiteten Formel würde dieses Verfahren zu einer sehr einfachen Methode absoluter Intensitätsmessung gestalten, vorausgesetzt, dass die Formel trotz der Vernachlässigung der Reibung der Wirklichkeit hinreichend gerecht wird, und zwar würde dieses Verfahren nicht blos zur Messung andauernder Töne verwendbar sein, sondern es müsste auch, rein theoretisch betrachtet, möglich sein, auf diesem Wege unter Anwendung des ballistischen Princips die Intensität eines kurz dauernden Schalles in absolutem Maasse zu ermitteln, ähnlich wie man mit einem Electrodynamometer andauernde Wechselströme und einzelne Stromstösse oder kurz dauernde Oscillationen zu messen vermag. Praktisch freilich dürfte das Verfahren wohl an der Schwierigkeit scheitern, alle sonstigen Luftbewegungen zu vermeiden.

Ob die entwickelte Formel ausreicht, um die Erscheinungen darzustellen, wird eine experimentelle Untersuchung zu lehren haben. Die bis jetzt vorliegenden Messungen der Herren Rayleigh und Grimsehl geben leider keinen Anhalt zu einer absoluten Berechnung und würden, da die Intensität der Töne nur in dieser einen Weise gemessen wurde, auch kein Urtheil über die Richtigkeit der absoluten Werthe gestatten. Hier möge als Abschluss dieser theoretischen Betrachtungen nur noch die Bemerkung hinzugefügt werden, dass die behandelte Erscheinung auch für die scharfe Ausbildung der Kundt'schen Staubrippen eine gewisse Bedeutung hat. Denn wenn man die Staubfiguren z. B. mit Korkfeilicht erzeugt, dessen Theile sehr unregelmässig gestaltet sind, so nimmt man an allen das Bestreben wahr, sich mit der Längserstreckung quer gegen die Schwingungsrichtung der Luft, d. h. gegen die Axe der Röhre zu stellen. Es liegt auf der Hand, dass dadurch der wandartige Charakter der aus diesen Theilchen aufgebauten Rippen noch erheblich

verstärkt wird. Abgesehen von diesem äusserlichen Zusammenwirken aber geht aus dem Vorliegenden auch hervor, dass beide Erscheinungen, die Rippenbildung der Kundt'schen Staubfiguren und die Drehungen der Rayleigh'schen Scheibchen als Aeusserungen eines und desselben Principes anzusehen sind, wenn man sie, wie es hier geschehen ist, als Vorgänge rein hydrodynamischer Natur zu deuten versucht.

Phys. Inst. der Univ. Leipzig, März 1891.