RECHERCHES
SUR LA COURBE QUE FORME UNE CORDE TENDUE MISE EN VIBRATION,
PAR MR. D'ALEMBERT.

I.

Je me propose de faire voir dans ce Memoire, qu'il y a une infinité d'autres courbes que *la Compagne de la Cycloide allongée*, qui satisfont au Probleme dont il s'agit. Je supposeray toujours 1mo, que les excursions ou vibrations de la corde sont fort petites, ensorte que les arcs A M de la courbe qu'elle forme, puissent toujours être supposés sensiblement égaux aux abscisses correspondantes A P. 2°. que la corde est uniformement epaisse dans toute sa longueur: 3°. que la force F de la tension est au poids de la corde, en raison constante, c. a. d. comme m à 1; d'où il s'ensuit que si on nomme p la gravité, & l la longueur de la corde, on pourra supposer $F = p\,m\,l$; 4°. que si on nomme A P ou A M, s; P M, y; & qu'on fasse ds constante, la force acceleratrice du point M suivant M P, est $-\frac{F\,ddy}{ds^2}$, si la courbe est concave vers A C, ou $\frac{F\,ddy}{ds^2}$ si elle est convexe. *Voyez Taylor Meth. Incr.*

Fig. 1.

II. Cela

Digitized by Google

II. Cela posé, imaginons que M m, m n, soyent deux côtés consécutifs de la courbe dans un instant quelconque, & que P p $= p\pi$, c. à. d. que ds soit constant. Soit t le tems écoulé depuis que la corde a commencé à entrer en vibration: il est certain que l'ordonnée P M ne peut etre exprimée que par une fonction du tems t, & de l'abscisse ou de l'are correspondant s ou A P. Soit donc P M $= \varphi(t, s,)$ c. à. d. egale à une fonction inconnuë de t, & de s; on fera $d[\varphi(t, s,)] = p\,dt + q\,ds$, p, & q etant pareillement des fonctions inconnuës de t & de s; or il est evident par le Theor. de Mr. Euler, Tom. VII. des Mem. de Petersb. p. 177, que le coëfficient de ds dans la differentielle de p doit etre egal au coëfficient de dt dans la differentielle de q; soit donc $dp = \alpha\,dt + \nu\,ds$, on aura $dq = \nu\,dt + b\,ds$, α, ν, β, etant encore des fonctions inconnuës de t & de s. *Fig. 2.*

III. De là il s'ensuit, que comme les cotés M m, m n, appartiennent à la même courbe, on aura $p\,m$ — P M égale à la difference de $\varphi(t, s,)$ en ne faisant varier que s, c. à. d. que $p\,m$ — P M $= q\,ds = ds.q$; & que la quantité que nous avons nommé cy-dessus ddy, c. a. d. la difference seconde de P M, prise en ne faisant varier que s, sera $ds.b\,ds$, on aura donc $\frac{F\,ddy}{ds^2} = F\,\mathfrak{G}$.

IV. Imaginons presentement que les points M, m, n viennent en M', m', n'; il est certain que l'excés de P M' sur P M sera egal à la difference de $\varphi(t, s,)$ prise en ne faisant varier que t, c. à. d. que P M' — P M $= p\,dt = dt.p$; & que la difference seconde de P M prise en ne faisant varier que t, c. à. d. la difference de M M', ou ce qui est la même chose, l'espace parcouru par le point M en vertu de la force acceleratrice qui l'anime, sera $= \alpha\,dt$. *Fig. 3.*

V. Cela posé, soit a l'espace qu'un corps pesant animé de la gravité p, parcourreroit dans un tems donné & constant θ: il est evident que l'on aura (par le Lem. XI. Sect. I. Liv. I. Princ. Math.)

$a\,dt^2$:

Digitized by Google

$\alpha dt^2 : 2a = F\beta dt^2 : p\vartheta^2$, donc $\alpha = \frac{2aF\beta}{p\vartheta^2} = \frac{2apml\beta}{p\vartheta^2} = 6 \cdot \frac{2aml}{\vartheta^2}$.

VI. Nous remarquerons d'abord, que l'on peut repreſenter le tems donné θ par une ligne conſtante de telle grandeur que l'on voudra : il faudra ſeulement avoir ſoin de prendre, pour exprimer les parties variables & indeterminées du tems, des lignes t qui ſoyent à la ligne qu'on aura priſe pour marquer θ, dans le rapport de ces parties variables du tems au tems conſtant & donné, pendant lequel un corps peſant parcourt l'eſpace a. On pourra donc ſuppoſer θ telle, que $\vartheta^2 = 2aml$: & en ce cas on aura $\alpha = \beta$. Donc puiſque $dp = \alpha dt + \nu ds$, il faut que dq ou $\nu dt + \beta ds$ ſoit $= \nu dt + \alpha ds$.

VII. Pour déterminer par ces conditions les quantités α & ν, on remarquera, que comme $dp = \alpha dt + \nu ds$, & $dq = \nu dt + \alpha ds$, on aura $dp + dq = (\alpha + \nu) \cdot (dt + ds)$; & $dp - dq = (\alpha - \nu) \cdot (dt - ds)$. d'où il s'enſuit

1°, que $\alpha + \nu$ eſt egale à une fonction de $t + s$, & que $\alpha - \nu$ eſt egal a une fonction de $t - s$.

2°. Que par conſequent on aura $p = \frac{\Phi(t+s) + \Delta(t-s)}{2}$ ou ſimplement $= \Phi(t+s) + \Delta(t-s)$; & $q = \Phi(t+s) - \Delta(t-s)$, d'où l'on tire P M ou $s(p\,dt + q\,ds) = \Psi(t+s) + \Gamma(t-s)$, $\Psi(t+s)$ & $\Gamma(t-s)$ exprimant des fonctions encore inconnuës de $t + s$ & de $t - s$.

l'equation generale de la courbe eſt donc

$$y = \Psi(t+s) + \Gamma(t-s).$$

VIII.

Digitized by Google

VIII. Or il eſt aiſé de voir que cette equation renferme une infinité de courbes. Pour le faire voir, ne prenons icy qu'un cas particulier, ſavoir celui, où $y = o$, quand $t = o$; c. à. d. ſuppoſons que la corde, lorsqu'elle commence à entrer en vibration, ſoit etenduë en ligne droite, & qu'elle ſoit forcée à ſortir de ſon etat de repos, par l'action de quelque cauſe que ce puiſſe etre; il eſt evident que l'on aura $\psi s + \Gamma - s = o$, donc $\Gamma - s = -\psi s$. De plus, comme la corde paſſe toujours par les points fixes A & B, il faut que $s = o$, & $s = l$, rendent $y = o$, quelle que ſoit t; donc 1°. $\psi t + \Gamma t = o$, & $\Gamma t = -\psi t$; donc $\Gamma(t - s) = -\psi(t - s)$; donc on aura $y = \psi(t + s) - \psi(t - s)$; donc il faut que $-\psi - s = \Gamma s = -\psi s$; donc ψs doit etre une fonction de s dans laquelle il n'entre que des puiſſances paires, lorsqu'on l'aura reduite en ſerie. 2°. De plus la condition de $y = o$ lorsque $s = l$, donne $\psi(t + l) - \psi(t - l) = o$. Il faut donc trouver une quantité $\psi(t + s)$, telle, que $\psi s - \psi - s = o$ & $\psi(t + l) - \psi(t - l) = o$.

IX. Pour y parvenir, imaginons la courbe $t\ o\ T$, dont les coordonnées ſoyent $TR = u$, $QR = z$, & qui ſoyent telles, que $u = \psi z$; cela poſé puisque $\psi s - \psi - s$ doit etre egale à zero, il eſt evident qu'en prenant $Qr = QR$, il faut que $rt = RT$; & qu'ainſi la courbe $t\ o\ T$ aura, de part & d'autre du point o, des portions ſemblables & egales, $t\ o$, $o\ T$. De plus, comme $\psi(t + l)$ doit etre $= \grave{a}\ \psi(t - l)$ & que la difference de $t + l$ & de $t - l$ eſt $2l$, il eſt evident que la courbe $t\ o\ T$ doit etre telle, qu'etant ſuppoſée entierement decrite, deux ordonnées quelconques diſtantes l'une de l'autre de la quantité $2l$, ſoyent egales entr'elles. Donc ſi on ſuppoſe $QR = l$, on verra que la partie TK doit etre egale & ſemblable à tO; que la partie KX doit etre auſſy egale & ſemblable à $o\ T$ &c.; & comme les parties $t\ O$, $o\ T$, ſont dejà ſemblables & egales, il s'enſuit que la courbe cherchée s'etend à l'infini des deux côtés du point o, & qu'elle eſt compoſée de parties toutes egales & ſemblables à la partie $o\ TK$, dont l'abſciſſe $QV = 2l$, & qui eſt

Fig. 4.

Digitized by Google

divisée par son point de milieu T en deux parties semblables & égales.
Fig. 5. Or les Geometres savent qu'une telle courbe peut toujours s'engendrer par le moyen d'une autre courbe T V' S R V', qui rentre en elle même, & dont les deux parties T R S, T V' S soyent semblables & egales: car si par un point quelconque L de l'axe T S on tire une droite L H, laquelle soit egale à un multiple de l'arc T R, plus à une fonction quelconque de l'abscisse T L & de l'ordonnée L R; ou bien si l'on fait la ligne L H egale à une fonction quelconque de l'abscisse T L & de l'ordonnée L R, plus à l'espace T L R divisé par une constante quelconque; il est certain qu'on aura par ce moyen une courbe o T K, dont les deux parties seront égales & qui s'etendra à l'infini, ayant toutes ses parties semblables & égales à o T K, comme la cycloide ordinaire.

X. Ayant donc décrit une telle courbe O T K, il sera facile de déterminer pour un tems quelconque t, la courbe que forme alors la corde tenduë: car cette courbe se construira toujours en prenant pour l'ordonnée qui répond à une abscisse quelconque s, la difference de deux ordonnées de la courbe O T K, rapportée à un axe quelconque Z V, & desquelles l'une $\psi(t+s)$ soit distante du point Z de la quantité $t+s$, & l'autre $\psi(t-s)$ soit distante de ce même point Z, de la quantité $t-s$

XI. Nous avons deja remarqué que ψs doit etre une fonction paire de s, donc $\psi(t+s)$ doit etre ausi une fonction paire de $t+s$. Donc la difference de $\psi(t+s) - \psi(t-s)$, prise en ne faisant varier que t, c'est à dire dt. $[\Delta(t+s) - \Delta(t-s)]$ doit etre telle, que $\Delta(t+s)$ & $\Delta(t-s)$ soyent des fonctions impaires de $t+s$ & de $t-s$: or il est facile de voir que $\Delta(t+s) - \Delta(t-s)$ ou $\frac{PM' - PM}{dt}$ exprime en general la viteſſe du point M, & que $\Delta s - \Delta - s$, exprime la viteſſe initiale de ce même point; donc l'expresſion de la viteſſe initiale imprimée à chaque point de la corde, lorsqu'elle est en ligne

Digitized by Google

ligne droite, & qu'elle commence à ſe mouvoir, doit etre telle, qu'etant reduite en ſerie, elle ne renferme que des puiſſances impaires de s; autrement, ſi la fonction de s, qui exprime cette viteſſe initiale, n'etoit pas une fonction impaire de s, le problême ſeroit impoſſible, c. à. d. on ne pourroit pas aſſigner une fonction de t & de s, qui repreſentât en general la valeur des ordonnées de la courbe pour une abſciſſe s, & pour un tems t quelconque.

Il y a un grand nombre d'autres conſéquences à tirer de la ſolution generale que nous venons de donner. Elles feront le ſujet d'un ſecond Memoire.

Digitized by Google

HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

ANNÉE MDCCXLVII. 1747



A BERLIN.

CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Academie Royale.
MDCCXLIX.

Digitized by Google

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADEMIE. Année MDCCXLVII. pag. 3.
MEDAILLES. p. 4.
Le Renouvellement de l'Academie. ODE. p. 5.

ELOGE de M. de GOLTZE. p. 9.
- - de M. de BORCK. p. 18.
- - de M. BERNOULLI. p. 22.

MEMOIRES DE L'ACADEMIE.

CLASSE de Philoſophie Experimentale.

Diſſertation Phiſico-Chymique *ſur la ſéparation de l'or d'avec l'Argent, qu'on nomme* ſéparation ſéche, *par* M. ELLER. pag. 3.

Memoire *ſur la maniere de diſſoudre l'etain dans les acides des végétaux, & ſur l'Arſenic qui s'y trouve encore caché, avec les Experiences qui ſervent de preuves, par* M. MARGGRAF. p. 33.

Experiences Pyrotechniques *ſur la Topaze de Saxe, par* M. POTT. p. 46.

Examen Pyrotechnique *de la Pierre nommée par les Anciens* Steatites, *& en Allemand,* Speckſtein, *par* M. POTT. p. 57.

Experiences Chymiques *faites dans le deſſein de tirer un veritable ſucre de diverſes Plantes, qui naiſſent dans nos contrées, par* M. MARGGRAF. p. 79.

Digitized by Google

CLASSE de Mathematique.

Recherches *ſur le mouvement des Corps celeſtes en général, par* M. EULER. pag. 93.
Solution *de quelques Problémes d'Aſtronomie, par* M. D'ALEMBERT. p. 144.
Methode *pour trouver les vrais momens, tant des Nouvelles, que des Pleines Lunes, par* M. EULER. p. 154.
Methode *de trouver le vrai Lieu Geocentrique de la Lune, par l'Obſervation de l'occultation d'une Etoile fixe, par* M. EULER. p. 174.
Methode *de déterminer la longitude des lieux par l'obſervation d'occultations des Etoiles fixes par la Lune,* par M. EULER. p. 178.
Memoire *ſur la force des rames, par* M. EULER. p. 180.
Recherches *ſur la Courbe que forme une Corde tenduë, miſe en vibration, par* M. D'ALEMBERT. p. 214.
Suite *des mêmes Recherches.* p. 220.
Réfléxions *ſur la derniere Eclipſe du Soleil du 25. Juillet A. 1748. par* M. EULER. p. 250.
Sur la perfection des Verres objectifs des Lunettes, par M. EULER. p. 274.
Obſervation *d'une Eclipſe partiale de Lune, faite à Berlin au mois d'Août 1746. par* M. KIES. p. 297.
Obſervation *d'une Eclipſe horizontale de Soleil, au 10. jour du Mois de Mars 1747. par* M. KIES. p. 299.

CLASSE de Philoſophie Speculative.

Diſſertation *ſur Pherecyde, Philoſophe de Syre, par* M. HEINIUS. p. 303.
Les Preuves de l'Exiſtence de Dieu, ramenées aux Notions communes, par M. FORMEY. p. 341.

Examen

Digitized by Google

Examen *de la Preuve qu'on tire des fins de la Nature, pour établir l'Exiſtence de Dieu, par* M. FORMEY. pag. 365.

CLASSE de Belles Lettres.

VIE de FRIDERIC GUILLAUME le Grand. p. 387.

Réponſe de M. DE MAUPERTUIS. p. 429.

Rélation *d'un Voyage fait dans la Lapponie Septentrionale, pour trouver un ancien Monument, par* M. DE MAUPERTUIS. p. 432.

Diſſertation *ſur le Chap. XL. du Livre de TACITE,* des Moeurs des Germains, *& en particulier ſur la Déeſſe* HERTHA, HERTHAM, *ou* ERDAMM, *qui a été autrefois le principal objet du culte dans la Germanice Septentrionale, par* M. ELSNER. p. 446.

Digitized by Google

ERRATA.

p. 43. l. 31. trouvent, *lis.* retrouvent.

Les corrections ſuivantes regardent le Mémoire de M. *de la Condamine*, qui a paru dans le Volume de 1746.

d. 435. l. 15. lavega, *lis*, La Vega.

p. 436. *lis.* p. 437

p. 437. l. 16. Pierre caſſée, *lis. Pierre laſſée.*

p. 438. l. dern. & en pluſieurs autres endroits, Cannar, Cannaris, &c. *lis.* Canſar, Canſaris, &c. ſuivant l'Orthographe Eſpagnole, ou Cagnar, Cagnaris, ſuivant L'Orthogr. Franc.

p. 440. l. 7. à peu de diſtance, *lis.* aſſés prés.

p. 441. l. 23. quant à ceux de Canſar & à leur peu d'etendüe, *lis.* quant au peu d'etendüe des batimens de Canſar.

p, 442. l. 23 & 24. la terraſſe, *lis.* le mur de la terraſſe.

p. 445. conſulté, *lis.* conſultés.

ibid. Cusco, *lis. Cusco.*

l. 4. *boco, lis.* ttoco.

l. 8. *Cabuarcuna, lis. Cabuarcuna.*

p. 447. en marge fig. 3. *lis.* fig. 5.

p. 448. l. 3 que, *lis.* qui.

p. 449. l. 2. coins, *lis. cours.*

l. 21. RTVX, *lis.* RSTVX.

p. 450. l. 15. pieées, *lis.* pieces.

l. 28. (gb) *lis.* (gh)

l. 29. (gib) *lis.* (gih.)

p. 451. l. 3. entrées, *lis.* entrée

l. 5. (gb) *lis.* (gh)

p. 452. l. 13. (b) *lis.* (h)

l. 14. (G) *lis.* (g)

l. 16. (dc) *lis.* (d&c)

l. 17. (b) *lis.* (h)

Digitized by Google

l. 19. (i, m) La lettre i à laquelle on renvoye, n'eſt point dans la figure; il faut la placer dans l'intervalle des deux Pieces quarrées, les plus à main droite, cottées e & f.

p. 453. l. 5. de mays d'ynca, *lis.* de mayz, d'yuca.

p. 454. l. 10. *Cieca, lis Cieça.*

l. 15. Serville, *lis.* Seville.

l. 22. detiges, *lis.* de tiges.

l. antep. *Atabualpa, lis. Atabualpa.*

p. 456. l. 4. *Cieca, lis. Cieça.*

l, 8, il ajoute, *lis.* ils ajoutent.

l. 21. j'allai. *lis.* j'y allai.

Digitized by Google



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`