SUITE DES RECHERCHES SUR LA COURBE QUE FORME UNE CORDE TENDUË, MISE EN VIBRATION,

PAR MR. D'ALEMBERT.

Ce Memoire etant une ſuite du precedent, je conſerveray l'ordre des N°. des articles.

XII. Je vais continuer à examiner les proprietés de la courbe vibrante, qui dans le cas où $t = o$, donne $y = o$. Mais avant que d'entrer dans un plus grand détail, il eſt à propos de faire voir d'une maniére un peu plus étenduë que dans l'art. X, comment on peut conſtruire par le moyen de la courbe O T K (fig. 5. du Mem. preced.) la courbe que forme la corde tenduë. J'appelleray dans la ſuite *Courbe generatrice* cette courbe O T K, (fig. 1.) qui eſt compoſée, comme je l'ay fait voir, d'une infinité de portions ſemblables & egales, & dont les ordonnées, répondantes aux abſciſſes s, ſont egales à ψs.

On a deja vû que la courbe O T K devoit etre telle, que O K fût $= 2l$, & que par conſéquent O S ou $\frac{OK}{2}$ fût $= l$. Maintenant par l'extremité Q, de l'axe qu'on peut ſuppoſer etre un des bouts de la corde, on tirera la ligne Q P, qui faſſe avec la droite O Q N un angle

Digitized by Google

angle de 45 degrés; cela posé, si l'on veut savoir en quel endroit se trouvera, dans un tems donné, un point quelconque G de la corde, dont la distance Q G au point Q soit s, on remarquera d'abord, que comme le tems donné θ est supposé icy $= \sqrt{2am}\,l$, c'est à dire, est exprimé par une ligne droite egale à $\sqrt{2am}\,l$, un tems quelconque t devra etre exprimé par une ligne, qui soit à $\sqrt{2am}\,l$ comme t est à θ. On prendra donc Q N = à cette ligne qui doit exprimer t, & on aura N P = Q N = t. Donc faisant Q g = Q G = s, & menant G A, g F paralleles à Q N, & A B, F I, paralleles à Q P, on aura Q B = $t + s$, & Q I = $t - s$: donc B D — I E ou C D — d E = $\psi(t+s) - \psi(t-s)$. Donc on aura le point γ où doit se trouver G, en prenant G γ = C D — d E.

XIII. Si on suppose que $\sigma\, dt$ soit l'espace que chaque point de la corde tend à parcourir au premier instant (σ etant une fonction de s) on aura (art. XI.) $\frac{d\psi s}{ds} + \frac{d\psi - s}{ds} = \sigma$, d'où l'on tire $\psi s + \psi - s = \int \sigma\, ds$; & comme $\psi s - \psi - s$ est egal à zero, il s'ensuit que $\psi s = \frac{\int \sigma\, ds}{2}$ + Const. D'où l'on voit que les fonctions σ, qui representent les vitesses initiales doivent etre proportionnelles aux differences des ordonnées I E de la courbe generatrice, divisées par les ds correspondants. Or la courbe generatrice etant composée de parties egales & semblables O T, T K, K Y, Y H, O R′, R′V′ &c. il s'ensuit que la courbe Q Z R, (fig. 2.) dont les ordonnées I P expriment les vitesses initiales σ, doit etre telle, que si on prend sur l'axe Q K′, de part & d'autre du point Q, tant de parties qu'on voudra Q G, Q R, R K′, &c. toutes egales à l, les portions de courbe Q F G, Q Z R, R V K′, correspondantes à ces parties, soyent situées alternativement au dessus & au dessous de l'axe, & que de plus elles soyent egales & semblables: savoir la partie R V à la partie R Z, la partie V K′ à la partie Z Q, celle-cy à la partie Q F, & la partie F G à la partie Z R, & ainsi de suite.

Digitized by Google

De plus, comme l'ordonnée I P (σ) eſt egale à zero, lorsque $s = o$ & lorsque $s = l$, il s'enſuit que $\frac{d\psi s}{ds}$ doit etre $= o$ aux points O & T (fig. 1.) c. à. d. que la courbe O T doit toucher la ligne O K en O, & luy etre parallele en T; d'où il s'enſuit néceſſairement que cette courbe aura un point d'infléxion entre O & T; & il en eſt de même des parties T K, K Y, &c. qui doivent etre egales & ſemblables à la portion O T. Le point Z (fig. 1.) qui repond au point d'inflexion Z' de la courbe O T, donnera la plus grande ordonnée z Z (fig. 2.) de la courbe Q Z R. Enfin ſi les parties O Z', Z' T (fig. 1.) de la courbe generatrice, dont l'une eſt couvexe, l'autre concave vers la ligne O K, ſont ſemblables & egales, comme il arrive par ex. dans la courbe appellée *Compagne de la Cycloïde*, alors les parties Q Z, Z R, de la courbe Q Z R (fig. 2.) ſeront ſemblables & egales.

Au reſte, il eſt clair que la valeur de $\psi(t+s) - \psi(t-s)$ eſt la même, ſoit qu'on prenne l'origine en Q, ou qu'on la prenne en O. C'eſt pourquoy nous ſuppoſerons toujours dans la ſuite de ce Memoire, que l'origine de la courbe vibrante ſoit en O.

XIV. Il faut cependant remarquer, qu' au lieu de faire commencer l'origine de la courbe au point O, on pourroit la faire commencer au point S, qui eſt le point de milieu de l'axe. Car ce point S a la même proprieté que le point O, ſavoir, que ſi on prend depuis ce point S de part & d'autre des parties de l'axe egales à l, les portions correſpondantes de la courbe ſont ſemblables & egales. Mais comme les ordonnées de la portion T K diminuent depuis T jusqu'en K, la valeur de $\psi(t+s) - \psi(t-s)$ ſeroit alors negative, au moins en ſuppoſant que la courbe generatrice fût telle qu'elle eſt repreſentée dans la figure, c. à. d. que l'origine de l'axe fût en S & non en T. Ainſi pour avoir une valeur poſitive de y, il faudroit prendre $y = \psi(t-s) - \psi(t+s)$ au lieu de $y = \psi(t+s) - \psi(t-s)$. Cependant on pourroit, ſi l'on vouloit, prendre $y = \psi(t+s) - \psi(t-s)$ & cela ne changeroit rien à la courbe vibrante, ſinon

Digitized by Google

ſinon de mettre en deſſous de l'axe la partie, qui auroit été en deſſus, ce qui eſt aſſés indifferent dans le cas dont il s'agit.

XV. Si les parties O Z′, Z′ T (fig. 3.) de la courbe generatrice, dont l'une eſt convexe & l'autre concave, ſont egales & ſemblables, en ce cas, la courbe qu'on trouveroit pour la corde tenduë, ſeroit la même, ſoit qu'on prit le point O, ou le point s, pour l'origine de l'axe de la courbe generatrice, & pour l'extremité de la corde vibrante. Car faiſant $S\,a = O\,A = t - s$, $S\,c = O\,C = t + s$, l'ordonnée y ſeroit dans le premier cas $= C\,D - A\,E$ (art. XII.), & dans le ſecond cas, $= a\,e - c\,d$ (art. XIV.) Or à cauſe de l'egalité, de la ſimilitude, & de la poſition reſpective des parties O Z′, Z′ T, T X, X K′, on a $C\,D + c\,d = S\,T$, & $A\,E + a\,e = S\,T$; donc $C\,D - A\,E = a\,e - c\,d$. Donc &c.

Il n'en ſeroit pas de même ſi les portions O Z′, Z′ T n'etoient point égales & ſemblables. Car alors la courbe qu'on trouveroit en prenant le point O pour origine, ſeroit differente de celle qu'on trouveroit en prenant pour origine le point S.

Il eſt bien facile de trouver une infinité de courbes telles que O T K′, qui ſoyent compoſées à l'infini de 4 parties egales & ſemblables, O Z′, Z′ T, T X, X K′, dont deux ſoyent convexes, ſavoir O Z′, X K′, & les deux autres concaves. Pour cela il ſuffit de chercher une courbe dont les ordonnées F X, F Z′, (fig. 4.) ſoyent proportionnelles aux arcs correſpondants T V, T L d'une courbe ovale T V S L compoſée de 4 parties egales & ſemblables T V, V S, S L, L T: tels ſont le cercle, l'ellipſe, & une infinité d'autres courbes. Nous examinerons ce point plus en detail dans la ſuite de ce Memoire.

[Lors que la courbe generatrice O T K′ ſera compoſée de 4 parties egales & ſemblables, O Z′, Z′ T, T X, X K′; je l'appellerai pour abreger, *Courbe à inflexion & à 4 parties egales*; & lorsque les parties O Z′, Z′ T, ne ſeront pas egales & ſemblables, j'appelleray la courbe O T K′, *Courbe à inflexion, & à parties egales deux a deux*, parceque la partie O Z′ eſt ſemblable & egale à la partie

Digitized by Google

tie X K′, & que la partie Z′ T, eſt ſemblable & egale à la partie T X.]

XVII. Lorsque la courbe generatrice O T K′, (fig. 5.) eſt *à inflexion & à quatre parties egales*, la courbe O M S (fig. 6.) que forme la corde vibrante, eſt telle, que ſi on la continuoit indéfiniment par delà les points O & S, elle ſeroit auſſy à *inflexion & à 4 parties égales*. En effet ſoit O G (fig. 6.) $= s$, O M′ (fig. 5.) $= t$; O C $= t + s$, O A $= t - s$, on aura G I (fig. 6.) $=$ C D $-$ A E (fig. 5.) $= \psi (t + s) - \psi (t - s)$. Imaginons à preſent que l'axe O S (fig. 6.) ſoit prolongé par de là le point s, & qu'on prenne S g $=$ O G, & dans la fig. 5, C c & A a $=$ O S, on auroit l'ordonnée $g\,i$ (fig. 6.) $= c\,d - a\,e$ (fig. 5.) $=$ C D $-$ A E pris en ſens contraire (art. XV.). Donc en premier lieu la partie S N K′ (fig. 6.) ſera egale & ſemblable à la partie O M S, mais en deſſous l'axe, & la courbe O M S etant continuée, fera de cette maniere des ſerpentemens infinis autour de ſon axe. De plus, ſi on ſuppoſe S g' (fig. 6.) $=$ O G, & qu'on veuille trouver la valeur de l'ordonnée correspondante $g'\,i'$, il faudra prendre dans la fig. 5. M′ c' $=$ O g' auſſi bien que M a', & faire $g'\,i' = c'\,d' - a'\,e'$: or comme A M′ & & M′ C $=$ O G $=$ S g', il eſt evident que A M′ $+$ M′ c' $=$ O S, & que C M′ $+$ M′ a' $=$ O S. Donc $c'\,d' +$ A E $=$ C D $+ a'\,e'$. donc $c'\,d' - a'\,e'$ ou $g'\,i' =$ C D $-$ A E ou G I (fig. 6.); donc les deux parties M S, M O de la courbe vibrante ſont ſemblables & egales. Or nous venons de prouver que la partie S N K′ eſt auſſi ſemblable & egale à la partie O M S, & placée au deſſous de l'axe: donc la courbe O M S que forme la courbe vibrante, eſt telle, que ſi elle etoit continuée, elle ſeroit *à inflexion* en S & en O, & à 4 *parties egales* O M′, M S′, S N′, N K′ &c.

Il n'en eſt pas de même, lorsque la courbe generatrice eſt à *inflexion & à parties égales deux à deux*. La partie S N K′ de la courbe vibrante, continuée (fig. 6.) ne ſeroit point alors ſemblable à la partie O M S, ni la partie M S à la partie O M; mais ſi on prenoit depuis le point O de part & d'autre, tant de parties qu'on voudroit,

Digitized by Google

droit, egales à $2l$, les parties de la courbe correſpondantes à ces diviſions de l'axe, ſeroient egales & ſemblables entr'elles, & ſemblablement ſituées par rapport à l'axe; car on a fait voir dans l'art. IX, qu'en géneral les ordonnées de la courbe generatrice, qui ſont diſtantes l'une de l'autre de $2l$, doivent etre egales.

XVIII. Si $t = \frac{1}{2}l$, c'eſt à dire ſi $OM' = \frac{1}{2}OS$, il eſt facile de voir que $CD - AE$ (fig. 7) $= 2(CD - M'Z')$: ainſi pour former alors la courbe de la corde vibrante, il ſuffira de tracer une courbe OMS (fig. 6), qui ait des ordonnées GI, doubles des ordonnées correſpondantes de la portion $Z'TX$ (fig. 7) de la courbe generatrice, dont on ſuppoſe ici que Z', X ſoient les points d'inflexion, & $Z'X$ l'axe: d'où l'on voit que ſi, par exemple, les ordonnées paralleles à OS ou à $Z'X$, dans la courbe generatrice, ſont dans le rapport de $\frac{n}{m}$ avec les arcs correſpondants d'une courbe ovale quelconque, la courbe que forme la corde vibrante dans l'inſtant où $t = \frac{1}{2}l$, ſera telle, que ſes ordonnées paralleles à OS (fig. 6) ſeront dans le rapport de $\frac{n}{2m}$ avec les arcs correſpondans d'une courbe ovale ſemblable, & double de la premiere.

XIX. Comme l'on a ſuppoſé le tems conſtant θ egal à $\sqrt{2aml}$, il eſt viſible que t ſera $= \frac{1}{2}l$, lorsque le tems t ſera au temps θ, comme $\frac{1}{2}l$ à $\sqrt{2aml}$; donc en general, aprés un tems egal à $\frac{\theta l}{2\sqrt{2aml}}$ ou egal à $\frac{q\theta l}{2\sqrt{2aml}}$, q etant un nombre impair quelconque, la courbe formée par la corde vibrante ſera de la meme nature que la courbe generatrice.

XX. Si on veut ſavoir quels ſeront les momens, où la corde ſera en ligne droite, il faut chercher ſur l'axe OS (fig. 5) les valeurs de t telles, qu'en prenant de part & d'autre du point où elles ſe terminent des valeurs quelconques de s egales entr'elles, les ordonnées correſpondantes, qui ſeront $\psi(t+s)$ & $\psi(t-s)$, ſoient egales entr' elles, ce qui aura lieu, ſi on prend $t = OS$ ou OK', ou

Digitized by Google

en géneral, égal à un multiple de l; or comme $\theta = \sqrt{2aml}$; & que le tems t dont il s'agit ici, ſera $= Rl$, R exprimant un nombre entier quelconque, pair ou impair, il eſt evident, que ce tems t ſera à θ, comme Rl eſt à $\sqrt{2aml}$; donc la corde ſe trouvera dans la ſituation rectiligne aprés chaque tems t, qui contiendra un certain nombre de fois exactement le tems $\frac{\theta l}{\sqrt{2aml}}$, ou $\frac{\theta\sqrt{l}}{\sqrt{2ma}}$.

XXI. Il eſt facile de tirer de notre ſolution génerale la ſolution, que l'on donne ordinairement du Problême *de cordis vibrantibus*. Pour le faire voir il ne ſera pas inutile de rappeller ici la methode qu'on employe pour y arriver. Suivant cette methode on a $-\frac{ddy}{ds^2} : \frac{1}{R} = y : A$, en prenant R pour le rayon de la developpée de la courbe à l'extremité de ſa plus grande ordonnée, & A pour cette plus grande ordonnée; d'où l'on tire $-\frac{ARddy}{ds^2} = y$, donc $-ARdy^2 = y^2ds^2 - A^2ds^2$ & $ds = \frac{dy\sqrt{AR}}{\sqrt{(A^2-y^2)}}$, ou $ds = \frac{Ady}{\sqrt{(AA-yy)}} \cdot \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{A}}$. Donc ſi on nomme l la longueur de la corde, & $2n$ le rapport de la circonference au rayon on aura $\frac{nA}{2} \times \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{A}} = \frac{l}{2}$ & $n^2AR = ll$, donc $R = \frac{ll}{nnA}$; c'eſt à dire que $\frac{ll}{n^2A}$ eſt l'expreſſion du rayon de la developpée à l'extremité de la plus grande ordonnée: donc la force acceleratrice, dont l'expreſſion generale eſt $-\frac{pmlddy}{ds^2}$, ſera à l'extremité de la plus grande ordonnée, $\frac{pml}{R}$ ou $\frac{pmn^2A}{l}$. De plus, ſi on nomme y' la plus grande ordonnée de la courbe aprés un tems quelconque t, on ſait que

Voyez Taylor Method. Increm. & les Mem. de Petersb. 3.

Digitized by Google

que la force $\frac{pmn^2A}{l}$ devient alors $\frac{pmn^2A}{l} \times \frac{y'}{A} = \frac{pmn^2y}{l}$, donc on aura $\frac{dt^2}{\theta^2} \times \frac{2apmn^2y'}{pl} = -ddy'$, d'où l'on tire en integrant $\frac{dy'}{\sqrt{(A^2-y'^2)}} = \frac{ndt}{\theta} \times \frac{\sqrt{2am}}{\sqrt{l}}$, donc $\frac{y'}{A} = \frac{c^{\frac{nt\sqrt{2am}.\sqrt{-1}}{\theta\sqrt{l}}} - c^{\frac{-nt\sqrt{2am}\sqrt{-1}}{\theta\sqrt{l}}}}{2\sqrt{-1}}$. Or quand la plus grande ordonnée eſt A, on trouve par l'équation cy-deſſus $ds = \frac{A\,dy}{\sqrt{(AA-yy)}} \times \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{A}}$, que l'ordonnée à un point quelconque eſt $A \times \frac{c^{\frac{s\sqrt{-1}}{\sqrt{AR}}} - c^{\frac{-s\sqrt{-1}}{\sqrt{AR}}}}{2\sqrt{-1}}$; & quand la plus grande ordonnée eſt y', l'ordonnée y à un point quelconque eſt $y' \times \frac{c^{\frac{s\sqrt{-1}}{\sqrt{AR}}} - c^{\frac{-s\sqrt{-1}}{\sqrt{AR}}}}{2\sqrt{-1}}$, donc $y = A \times \left(\frac{c^{\frac{nt\sqrt{2am}.\sqrt{-1}}{\theta\sqrt{l}}} - c^{\frac{-nt\sqrt{2am}.\sqrt{-1}}{\theta\sqrt{l}}}}{2\sqrt{-1}}\right) \times \left(\frac{c^{\frac{s\sqrt{-1}}{\sqrt{AR}}} - c^{\frac{-s\sqrt{-1}}{\sqrt{AR}}}}{2\sqrt{-1}}\right)$: mettant pour $\sqrt{RA}$ ſa valeur

leur $\frac{l}{n}$ & ſuppoſant pour ſimplifier le calcul $\theta = \nu 2am l$, on aura

$$y = A \times \frac{\left(c^{\frac{nsV-1}{l}} - c^{\frac{-nsV-1}{l}}\right)}{2V-1} \times \frac{\left(c^{\frac{nsV-1}{l}} - c^{\frac{-nsV-1}{l}}\right)}{2V-1}$$

$$= A \times \left[\frac{\left(c^{\frac{nV-1}{l}(t+s)} + c^{\frac{-nV-1}{l}(t+s)}\right)}{-4} - \frac{\left(c^{\frac{nV-1}{l}(t-s)} + c^{\frac{-nV-1}{l}(t-s)}\right)}{-4}\right].$$

Donc dans le cas qu'on a ſeul conſidéré jusqu'icy, on a $\psi(t+s)$

$$= A \times \frac{\left(c^{\frac{nV-1}{l}(t+s)} + c^{\frac{-nV-1}{l}(t+s)}\right)}{-4} \& \psi(t-s)$$

$$= A \times \frac{\left(c^{\frac{nV-1}{l}(t-s)} + c^{\frac{-nV-1}{l}(t-s)}\right)}{-4}.$$

Telle eſt l'equation de la corde vibrante, dans l'hypotheſe qu'elle ſoit en ligne droite au commencement de ſon mouvement, & que chacun de ſes points reçoive l'impulſion convenable, pour qu'elle prenne la forme *de la compagne de la cycloide* extrémement allongée. Si on ſuppoſoit que la corde ne fût pas en ligne droite au commencement de ſon mouvement, & qu'elle eût la forme *de la compagne de la cycloide* trés allongée, alors, comme y' diminueroit à meſure

Digitized by Google

mesure que t croîtroit, on auroit $-\frac{dy^t}{V(A^2-y^2)} = \frac{n\,dt}{\theta}$

$\times \frac{V 2am}{Vl}$ & $y = A \times \frac{c^{\frac{nt\sqrt{-1}}{l}} + c^{\frac{-nt\sqrt{-1}}{l}}}{2}$,

$\times \frac{c^{\frac{ns\sqrt{-1}}{l}} - c^{\frac{-ns\sqrt{-1}}{l}}}{2\sqrt{-1}}$, d'où l'on tireroit fort aisément les valeurs de $\psi(t+s)$ & de $\psi(t-s)$ convenables à cette hypothese.

XXII. Il est facile de voir que dans les deux cas, dont nous venons de parler, $\psi(t+s) - \psi(t-s) = \Delta t \times \Gamma s$, Δt, & Γs exprimant des fonctions de t & de s, & que dans le 1er. cas $\Gamma s = \Delta s$; or je dis qu'il n'y a aucun autre cas où $\psi(t+s) - \psi(t-s)$ puisse etre egal au produit d'une fonction de t par une fonction de s. En effet il est visible par ce que nous avons dit dans le art. VII & VIII, que $\psi(t+s) - \psi(t-s)$ peut etre regardé en general comme l'ordonnée d'une courbe que forme une corde vibrante. Or soient OMV, OLV (fig. 8) deux des courbes quelconques que forme la corde dans deux instans differens; pourque y soit $\Delta t \times \Gamma s$, il faut qu'en tirant tant d'ordonnées qu'on voudra LN, RP, KF, &c. on ait LN: MN = RP: PQ = KF: YF; or dans cette supposition on trouvera facilement par la methode ordinaire, que toutes les courbes OMV, OLV, doivent etre des compagnes de cycloïde, fort allongées; donc on ne peut avoir $\psi(t+s) - \psi(t-s) = \Delta t \times \Gamma s$, que dans le cas de $\Gamma s = \frac{c^{M s\sqrt{-1}} - c^{-M s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

M exprimant un nombre quelconque, & dans celui de $\Delta t = A^{M t\sqrt{-1}}$

Digitized by Google

$$\left(\frac{e^{Mt\sqrt{-1}} - e^{-Mt\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - c\right) \text{ ou bien } = A\left(\frac{c^{Mt\sqrt{-1}} + c^{-Mt\sqrt{-1}}}{2}\right).$$

C'eſt ainſi que l'application de la Mechanique à la Geometrie aide quelque fois à decouvrir des verités purement geometriques, qu'il pourroit être aſsés difficile de trouver, en ſe ſervant de methodes directes.

XXIII. Jusqu'ici nous avons ſuppoſé que y etoit $= o$ lorsque $t = o$, c'eſt à dire que la corde etoit d'abord en ligne droite. Mais il peut arriver par une infinité de cauſes que la corde forme une ligne courbe au commencement de ſon mouvement: par exemple, qu'elle ait été forcée de ſe courber, par des puiſſances qui l'ayent tenu quelque tems en équilibre, & qui viennent à ceſſer tout-à-coup. Il eſt evident qu'en ce cas la ſeule courbure de la corde ſuffira pour qu'elle ſe mette en mouvement, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'imprimer à ſes parties aucune viteſſe primitive. Cependant pour rendre la ſolution que nous allons donner, plus etenduë & plus génerale, nous ſuppoſerons que chaque partie de la corde, outre le mouvement qu'elle reçoit de la courbure même de la corde, ait encore reçu une viteſſe telle, que l'eſpace qu'elle doit parcourir dans le premier inſtant dt ſoit σdt, σ etant une fonction de s. Nous ſuppoſerons de plus que la premiere valeur generale de l'ordonnée y ſoit Σ, Σ exprimant auſsi une fonction de s. Cela poſé, nous aurons en géneral comme dans l'art. VIII, $y = \psi(t+s) + \Delta(t-s)$; or lorsque $s = o$, il faut que $y = o$, quel que ſoit t, on aura donc $\psi t + \Delta t = o$ & $\Delta t = -\psi t$, donc $y = \psi(t+s) - \psi(t-s)$. Cette equation qui paroit la même que celle de l'art. VIII en eſt cependant differente, en ce qu'ici $\psi s - \psi - s$ ne doit pas etre $= o$, mais $= \Sigma$. L'expreſsion génerale de l'eſpace parcouru dans un inſtant eſt $dt\,[\Gamma(t+s) - \Gamma(t-s)]$, & lorsque $t = o$, il faut que $\Gamma s - \Gamma - s = o$; donc $ds\,\Gamma s - ds\,\Gamma - s = \sigma ds$; donc $\psi s + \psi - s$

Digitized by Google

$+ + s - s = \int \sigma ds +$ const. d'où l'on voit que $\int \sigma ds$ doit etre une fonction paire de s, & que par conſéquent σ en eſt une fonction impaire; de meme l'équation $+ s - + - s = \Sigma$ fait voir que Σ doit etre une fonction impaire de s. Donc le probleme eſt impoſſible, ſi les fonctions σ & Σ ne ſont pas l'une & l'autre des fonctions impaires de s, c. à. d. des fonctions où il n'entre que des puiſſances impaires de s, c'eſt à dire qu'on ne pourra trouver alors aucune fonction de $t + s$, telle que $y = + (t + s) - + (t - s)$.

XXIV. Lorsque $\sigma = o$, on a $\psi s + \psi - s = o$. Donc ψs doit etre une fonction impaire, & $\Sigma = 2 \psi s = - 2 \psi - s$, donc 1°. la courbe generatrice doit paſſer par l'origine A de la corde vibrante (fig. 9.) & etre compoſée de deux parties égales & ſemblables l'une au deſſous de l'axe, l'autre au deſſus, leſquelles commencent toutes deux en A, car $\Sigma = 2 \psi s$, donne $\psi s = \frac{\Sigma}{2}$. Or Σ eſt $= o$ quand $s = o$, & comme Σ eſt une fonction impaire, elle doit etre negative, quand s eſt negatif. De plus, comme y doit etre $= o$ lors que $s = l$, il faut que les ordonnées de la courbe generatrice diſtantes l'une de l'autre de $2 l$, ſoyent egales (art. IX.); enfin comme $\Sigma = o$ lorsque $s = l$, il faut que $+ s = o$ lorsque $s = l$, & qu'ainſi la courbe generatrice coupe ſon axe en un point eloigné de A de la quantité l.

De là il s'enſuit que la courbe generatrice doit etre telle, que ſi on prend ſur l'axe AQ de part & d'autre du point A des portions egales à $2 l$, les parties de la courbe répondantes à ces portions de l'axe, ſoyent egales, ſemblables, & ſemblablement ſituées par rapport à l'axe. De plus, ſi on fait AS $= 2 l$ & AK $= 2 l$, on trouvera que la partie KQTGH doit par la même raiſon etre egale & ſemblable à la partie APOLS, & ſemblablement ſituée par rapport à l'axe. Or les parties APLS, & AGTQK doivent etre auſſi egales & ſemblables, mais differemment ſituées. Donc les parties APO, OLS, AGT, TQK, ſont égales, ſemblables & alternativement ſituées au deſſus & au deſſous de l'axe; donc la courbe genera-

Digitized by Google

generatrice coupe ſon axe en une infinité de points diſtans de part & d'autre de A des quantités l, $2l$, $3l$, $4l$ &c. & cette courbe eſt formée de parties égales & ſemblables, qui ſerpentent autour de ces axes, & qui ſe trouvent alternativement au deſſus & au deſſous.

XXV. Pour que la courbure de la corde ſoit telle, que tous ſes points puiſſent arriver à l'axe dans le même inſtant, il faut qu'il y ait une valeur de t telle que $\phi(t+s) - \phi(t-s)$ ſoit $= o$, quelle que ſoit la valeur de s, c'eſt à dire qu'il y ait des points dans l'axe A O, tels que les ordonnées egalement diſtantes de part & d'autre de ces points, ſoyent égales. Or cela ne peut avoir lieu ici, que quand les portions, ou arcades A P O de la courbe generatrice ſont compoſées chacune de deux moitiés egales & ſemblables A P, P O.

XXVI. Il eſt clair par les proprietés qui viennent d'être demontrées de la courbe generatrice A P O, que les ordonnées M N de cette courbe (fig. 10.) peuvent etre repreſentées par les aires correſpondantes P M S d'une courbe K S G B E I, dont les deux parties ſeparées par l'axe P Q peuvent etre égales ou inegales, mais doivent etre compoſées chacune de deux parties egales & ſemblables P K C H, H C Q G; & E P C I, I C Q B; & lorsque A P ſera égale & ſemblable à P O, alors ces 4 parties ſeront toutes égales & ſemblables entr'elles. Voyés l'art. XXXI. cy deſſous.

XXVII. On a déja vû que dans le cas de $\sigma = o$ la fonction ϕs eſt $= \frac{\Sigma}{2}$. D'où il s'enſuit que ſi A K O (fig. 11.) eſt la figure de la corde au premier inſtant de ſon mouvement, on trouvera facilement la courbe generatrice A P O, en coupant par le milieu en G, P, toutes les ordonnées N V, K C, de la courbe A K O.

De là, & de l'art. preced. il s'enſuit que la courbe donnée A K O doit etre telle, que ſes ordonnées paralleles à A O puiſſent etre repreſentées par les aires correſpondantes d'une courbe compoſée de deux parties, dont chacune puiſſe ſe diviſer par une ligne parallele à A O en deux moitiés égales & ſemblables; & pour que tous

Digitized by Google

tous les points de la corde A K O arrivent en même tems à la ligne droite A O, il faut que les deux parties A K, K O, ſoient egales & ſemblables.

XXVIII. Si σ n'eſt pas $= o$, c. à. d. ſi les points de la corde reçoivent au commencement de leur vibration des viteſſes, qui leur ſoyent imprimées par des puiſſances quelconques, on aura $\psi s + \psi - s = A + \int \sigma \, ds$, A marquant une conſtante & $\psi s - \psi - s = \Sigma$. Donc $\psi s = A + \frac{\int \sigma \, ds + \Sigma}{2}$ & $\psi - s = A + \frac{\int \sigma \, ds - \Sigma}{2}$, Σ & σ etant l'une & l'autre des fonctions impaires de s.

Dans ce cas la courbe generatrice Q M L (fig. 12.) doit etre telle, que ſi on prend ſur l'axe A O tant de parties qu'on voudra A O, O R, &c. egales à $2l$, les portions de courbe correſpondantes Q M L, L K N, &c. ſoyent egales & ſemblables; ſavoir, la partie Q M à L K, la partie M L à K Q &c. parceque $\psi(t+s) - \psi(t-s)$ doit etre $= o$ lorsque $s = l$. Par la même raiſon ſi on prend A Z $=$ A O, la partie Q P doit etre egale & ſemblable à la partie L M, & la partie P F à la partie M Q.

Remarque I.

XXIX. Nous avons ſuppoſé dans la ſolution generale du probleme (art. VI.) que θ etoit $= \sqrt{2amn}$; & nous avons fait voir que cette hypotheſe ne limitoit point notre ſolution: cependant ſi on vouloit réſoudre ſans le ſecours de cette hypotheſe le probleme dont il s'agit, voici comment il faudroit s'y prendre.

On remarquera 1°. que la queſtion ſe réduit à trouver des quantites α & β, telles que $\nu \, dt + \beta \, ds$, & $\nu \, ds + \alpha \, dt$ ſoyent des differentielles exactes, & que de plus $\alpha = \frac{\mathfrak{C} \cdot 2amn}{\theta^2}$. Il faut donc trouver une quantité β telle, que $\nu \, dt + \beta \, ds$ & $\nu \, ds + \frac{\mathfrak{C} \cdot 2amn}{\theta^2} dt$ ſoyent des differentielles exactes. 2°. Puiſque la ſolution que nous avons donnée en faiſant $\theta = \sqrt{2amn}$, eſt abſolument géne-

Digitized by Google

rale, la valeur de y qui eſt $\psi(t+s)-\psi(t-s)$ doit donc être la même, ſoit qu'on prenne $\vartheta = v\,2\,a\,m\,l$, ou non. Donc lorſque ϑ ne ſera pas ſuppoſé $= v\,2\,a\,m\,l$, il faudra pour conſerver la valeur de y, prendre au lieu de t, une ligne egale à celle qui exprime le tems t dans le cas de $\theta = v\,2\,a\,m\,l$. Or ſi θ eſt $= g\,v\,2\,a\,m\,l$, g exprimant un nombre quelconque, la ligne qui exprimeroit alors le tems t, ſeroit à celle qui l'exprime dans le cas de $\theta = v\,2\,a\,m\,l$, comme g à 1. Donc, ſi on diviſe par g la ligne qui exprime le tems t dans le cas de $\vartheta = g\,v\,a\,m\,l$, cette ligne ainſi diviſée ſera egale à celle qui exprimeroit le même tems t dans le cas de $\vartheta = v\,2\,a\,m\,l$. Donc ſi au lieu de t, on ecrit $\frac{t}{g}$ ou $\frac{t\,V\,2\,a\,m\,l}{\theta}$ dans la valeur de y, on aura l'expreſſion génerale $\psi\left(\frac{t\,V\,2\,a\,m\,l}{\theta}+s\right)-\psi\left(\frac{t\,V\,2\,a\,m\,l}{\theta}-s\right)$ qui eſt toujours la même, ſoit que $\vartheta = v\,2\,a\,m\,l$, ou non.

Pour voir maintenant comment on arriveroit à trouver cette valeur génerale de y en integrant directement les quantités $v\,dt+\beta\,ds$ & $v\,ds+\frac{\beta.2\,a\,m\,l\,dt}{\theta^2}$, on remarquera que dans le cas de $\theta = v\,2\,a\,m\,l$, ces deux quantités etant ajoutées enſemble, ont donné $v+\beta$ égale à une fonction de $t+s$, & que la ſeconde etant retranchée de la premiere a donné $v-\beta =$ à une fonction de $t-s$; d'où l'on a tiré les valeurs de v & de β. Il faut donc tacher de preparer les deux quantités données, de maniere qu'elles demeurent toujours des differentielles completes, & que les ajoutant & les retranchant ſucceſſivement l'une de l'autre, on ait deux differentielles dont l'une ſoit celle d'une fonction de $\frac{t\,V\,2\,a\,m\,l}{\theta}+s$, & l'autre, celle d'une fonction de $\frac{t\,V\,2\,a\,m\,l}{\theta}-s$. Pour cela il faudra d'abord écrire la ſeconde ainſi $=\frac{\beta\,V\,2\,a\,m\,l}{\theta}\times\frac{dt\,V\,2\,a\,m\,l}{\theta}+v\,ds$, &

la

Digitized by Google

la premiere ainſi $= \frac{v\theta}{V2aml} \times \frac{V2aml}{\theta} dt + \zeta ds$. On multipliera cette derniere par $\frac{V2aml}{\theta}$, ce qui ne l'empechera point d'etre une differentielle exacte, & on la changera en $v \cdot \frac{dtV2aml}{\theta} + \frac{\beta V2aml}{\theta} \cdot ds$; ajoutant enſemble ces deux differentielles, & retranchant enſuite l'une de l'autre, on aura pour la 1ere transformée $\left(\frac{dtV2aml}{\theta} + ds\right) \times \left(\frac{\beta V2aml}{\theta} + v\right)$ & pour la 2de transformée $\left(\frac{dtV2aml}{\theta} - ds\right) \times \left(\frac{\beta V2aml}{\theta} - v\right)$ d'où l'on déduira facilement la valeur generale de y.

Je me ſuis un peu etendu ſur la methode de trouver β & v dans le cas de $\theta = g\sqrt{2aml}$, parce que cette methode eſt generale, quelque autre quantité que l'on ait à la place de $\frac{2aml}{\theta^2}$; par ex. ſi les deux quantités propoſées etoient $v\,dt + \beta\,ds$ & $v\,ds + g\beta\,dt$, g etant un coëfficient conſtant quelconque, il n'y auroit qu'à mettre dans les calculs precedens $\sqrt{g}$ à la place de $\frac{V2aml}{\theta}$, pour trouver v & β. Voyez ma Diſſertation ſur les Vents (art. 87. 88. & 89.) où j'ay eu occaſion de traiter ce probleme plus à fond, & d'une maniere trés générale.

REMARQUE II.

XXX. Il eſt viſible par tout ce qui a été dit jusqu'à preſent, que la ſolution generale du Probleme des cordes vibrantes ſe reduit à deux choſes: 1o. à déterminer de la maniere la plus générale la courbe generatrice. 2o. à trouver enſuite dans chaque cas particulier, quelle doit etre cette courbe, par les valeurs de Σ & de σ.

Digitized by Google

Or nous avons vû, que lorsque $\Sigma = o$, la courbe generatrice A L E (fig. 13.) doit etre telle, qu'en prenant depuis l'origine *a* de part & d'autre, les parties ab, bc, ef, fg, &c. & ac, cd, &c. toutes egales à l, les portions correſpondantes de la courbe, ſoyent toutes egales & ſemblables, & ſituées de la même maniere les unes par rapport aux autres, comme on le voit dans cette figure. C'eſt pourquoy prenant A B $= l$, & imaginant l'origine de la courbe au point L, l'equation de la courbe doit etre telle, que la partie L E ſoit egale & ſemblable aux parties L A, E M, & que la partie M G ſoit egale & ſemblable à la partie L E, & ainſi de ſuite à l'infini. Or faiſant L P $= x$, ces conditions auront lieu, lorsque la valeur de dy en dx ſera telle 1°. que pour un même dx on ait toujours deux valeurs egales de dy, l'une d'un côté de l'axe, l'autre de l'autre côté, c. à. d. l'une poſitive, l'autre negative. 2°. Que $\frac{dy}{dx}$ ſoit $= o$ ou ∞ lorsque $x = o$, c. à. d. au point L; & nous avons de plus fait voir (art. XIII.) que dans le cas particulier dont il s'agit icy, où $\Sigma = o$, il faut que $\frac{dy}{dx}$ ſoit $= \infty$ au point L. 3°. que lorsque $x =$ L B, la valeur de dy ſoit $= o$ ou ∞; & dans le cas particulier de $\Sigma = o$ elle doit etre $= \infty$ (art. XIII.). 4°. Que lorsque $x =$ L B la valeur de y ne ſoit point $= o$, autrement la courbe pourroit retourner ſur elle même ſans avoir un cours infini; 5°. que la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui eſt $= o$ ou ∞, lorsque $x = o$ ou $=$ L B, ſoit imaginaire, lorsque x eſt negative, ou lorsque x eſt poſitive & $>$ L B. 6°. Que ſi la valeur de $\frac{dy}{dx}$ eſt infinie lorsque $x = o$, ou lorsque $x =$ L B. Cette valeur infinie ſoit d'un ordre radical, c. à. d. d'un ordre d'infini au deſſous de ∞, autrement les ordonnées en L & en B ſeroient infinies.

XXXI.

Digitized by Google

XXXI. On peut, ſi l'on veut, tracer la courbe L E M G par le moyen des aires correſpondantes d'une autre courbe auxquelles les ordonnées P R ſoyent proportionnelles. Ainſi toute la difficulté ſe réduit à trouver les conditions de l'equation de cette ſeconde courbe. Ces conditions ſeront 1°. que l'ordonnée u de cette courbe ait toujours deux valeurs egales pour une même x, l'une poſitive, l'autre negative, 2°. qu'en faiſant x negative ou x poſitive & $>$ L B, la valeur de u devienne imaginaire. 3°. Que $x = o$ rende $y = \infty$ ou o, & que dans le cas de $\Sigma = o$, $y = \infty$ lorsque $x = o$. 4°. Que l'aire de cette courbe ſoit nulle, lorsque $x = o$, & qu'ainſi l'ordonnée répondante à $x = o$ ſoit tout au plus un infini radical. 5°. Que cette aire ne ſoit ni $= o$, ni $= \infty$, lorsque $x =$ L B ou $<$ L B.

J'appellerai dans la ſuite *courbe engendrante*, cette courbe, dont les aires ſont proportionnelles aux ordonnées correſpondantes de la courbe generatrice L E M, & dont les ordonnées ſont par conſequent proportionnelles aux dy correſpondans de la courbe L E M.

Ainſi, faiſant L B $= 2a$, on voit que la *courbe engendrante*, dont l'equation ſeroit $u = \frac{1}{(2ax - xx)^{\frac{3}{4}}}$ eſt excluë par la 4e. condition, la courbe qui auroit pour ordonnée $\frac{x}{\sqrt{(4aa - xx)}}$ eſt excluë par la 2e. & la 3e. De même la courbe qui auroit pour ordonnée $\sqrt{\left((a-x)^{\frac{2}{3}} - aa\right)}$ eſt excluë par la 5e. condition. Car l'aire de cette courbe ou l'integrale de $dx\sqrt{\left((a-x)^{\frac{2}{3}} - aa\right)}$ eſt $\sqrt{\left((a-x)^{\frac{2}{3}} - aa\right)} \times \left\{\frac{1}{(a-x)^{\frac{1}{3}}} - (a-x)\right\}$ comme il eſt facile de s'en aſſurer. Or comme a repreſente icy l'unité, il eſt clair que cette aire eſt nulle lors que $x = 2a$, cela vient de ce qu'en faiſant

Digitized by Google

faiſant $x > a$ c'eſt à dire $x > \frac{LB}{2}$ l'ordonnée devient negative. Pour le faire voir, ſuppoſons $a - x = z$, x etant trés peu differente de a, il eſt clair que l'ordonnée ſera $z - \frac{1}{x} = \sqrt[3]{\frac{1}{z}}$ qui devient negative lorsque z eſt negative.

XXXII. Si on veut que la courbe generatrice A L E ait une inflexion en ſon point de milieu R, (fig. 14.) & que les parties R E, L R ſoyent egales & ſemblables, l'une convexe & l'autre concave, il faudra pour lors ſuppoſer, que les ordonnées ſoyent proportionnelles aux aires correſpondantes d'une courbe, qui ait toutes les conditions marquées dans l'art. XXXI. & qui outre cela ſoit compoſée de 4 parties egales & ſemblables. De plus, lorsque x eſt egale à L P, c. á d. à la moitié de L B, l'ordonnée de la *courbe engendrante* ne doit etre ni infinie, ni zero; car imaginons qu'on place au point p l'origine des abciſſes de la *courbe engendrante* & qu'on prenne une abciſſe infiniment petite; ſi l'ordonnée correſpondante etoit nulle ou infinie, elle ne pourroit etre exprimée que par $\sqrt[\pm 2p:m]{\frac{}{x}}$, à cauſe des quatre parties ſemblables & egales, dont (hyp.) la courbe eſt compoſée. Ainſi faiſant z ſucceſſivement poſitif & negatif, on auroit pour les valeurs de l'ordonnée $z^{\pm \frac{p}{m}}$; donc l'ordonnée qui etoit $z^{\pm \frac{p}{m}}$ dans le cas de l'abciſſe poſitive, devendroit $-z^{\pm \frac{p}{m}}$ dans le cas de l'abciſſe negative, c'eſt à dire ſeroit negative elle même. Ainſi, comme les 4 parties de la courbe ſont egales & ſemblables, ſon aire ſeroit $= 0$ lorsque x ſeroit $= LB$. Or cela ne doit point etre (art. XXXI. n. 5.) Donc &c.

D'où l'on voit que la tangente au point d'inflexion R doit faire avec l'axe un angle fini.

XXXIII.

Digitized by Google

XXXIII. Lorsque la partie LE de la courbe generatrice (fig. 13) ne doit pas etre egale & ſemblable à la partie EM, mais à la partie MG, alors la courbe engendrante doit avoir toutes les memes conditions qui ont été marquées cy-deſſus, excepté que les ordonnées de part & d'autre de l'axe ſeront inegales.

Dans ce dernier cas, ſi la courbe LE doit avoir un point d'inflexion en R (fig. 14), & que la partie LR doive être ſemblable à la partie RE, & la partie rA à la partie Lr, alors la courbe engendrante doit être telle, qu'une ligne parallele à AE, qui paſſera par le point de milieu de ſon axe LB, diviſe chacune de ſes parties en deux moitiés egales & ſemblables.

XXXIV. Il eſt donc facile maintenant, ſi on ſe rappelle tout ce qui a eté dit cy-deſſus de trouver Σ & σ, lorſque la courbe generatrice eſt donnée; Il n'eſt pas plus difficile de trouver la courbe generatrice (art. XXVIII) lorſque Σ & σ ſont données. Mais il faut prendre garde que Σ & σ ne peuvent pas être données à volonté, ces quantités doivent avoir de certaines conditions, comme on l'a déja vu dans ce memoire.

On remarquera d'abord que Σ & σ etant des fonctions impaires (art. XXVIII) les courbes dont les ordonnées ſont proportionnelles à Σ & à σ doivent etre telles, qu'etant continuées de part & d'autre de l'origine, elles ayent deux parties indefinies, & ſemblables, & egales, l'une au deſſus de l'axe, l'autre au deſſous. De plus comme $\psi s - \psi - s = \Sigma$, il ſenſuit 1°. que Σ doit etre $= o$ lorſque $s = l$, puiſque $s = l$, rend $\psi s - \psi - s = o$. 2°. comme la courbe AGR, (fig. 15) dont l'abſciſſe $AL = s$, & l'ordonnée $GL = \psi s$, eſt telle que $\psi + s - \psi - s = o$ lorſque $s = l$ ou un multiple de l, il s'enſuit que Σ doit etre auſſy $= o$ toutes les fois que $s = nl$, n etant un nombre entier quelconque, pair ou impair. 3°. Par la même raiſon ſi on prend une abſciſſe $= nl + z$, & une autre $= nl - z$, z etant une quantité quelconque, les ordonnées correſpondantes Σ doivent etre de poſition contraire & egales. Car ſoit $AE = nl$, EC, & $EL = z$, $AM = AE$, $AD = AL$, $AP = AC$, on aura $\psi(nl + z) - \psi - (nl + z) = CR - PN$, & $\psi(nl - z) - \psi$

$= \psi - (nl - z) = GL - OD$. Or $CR = O'D$, $PN = GL$, donc $\psi(nl + z) - \psi - (nl + z) = -[\psi(nl - z) - \psi - (nl - z)]$. Ainſi la courbe dont les ordonnées ſont Σ, & dont la corde vibrante eſt ſuppoſée avoir la figure au premier inſtant, ſera telle que ſi on prend depuis l'origine A tant de parties qu'on voudra de part & d'autre de l'axe, toutes egales à l, les portions correſpondantes de la courbe ſeront alternativément ſituées au deſſus & au deſſous de l'axe, & de plus ſemblables & egales. Cette courbe eſt donc de la même nature que les courbes generatrices de l'art. XXIV.

XXXV. On voit de même par l'equation $\psi s + \psi - s = \int \sigma ds$, que lorsque $s = 2l$ ou $4l$ ou $6l$ &c. les aires correſpondantes $\int \sigma ds$ de la courbe dont les ordonnées ſont σ, doivent etre $= o$, car comme l'on peut toujours ſuppoſer $\psi s = o$, lorsque $s = o$, il s'enſuit que $\psi s = o$ lorsque $s = 2l$, ou $4l$ &c. & par conſéquent auſſi $\psi - s = o$ dans le meme cas. On verra de même que les quantités, $\psi s + \psi - s$, doivent etre egales, lorsque $s = l$, ou $3l$. ou $5l$ &c. d'où il s'enſuit que les aires correſpondantes $\int \sigma ds$ doivent etre egales auſſi. Enfin ſi on prend une abſciſſe $= nl + z$, & une autre $= nl - z$, les aires corréſpondantes $\int \sigma ds$ devront auſſi etre egales. De là il s'enſuit que la courbe dont les ordonnées ſont σ aura les memes proprietés que celle dont les ordonnées Σ, & qui ont été demontrées dans l'art. precedent.

XXXVI. Au reſte chacune de ces courbes peut avoir d'ailleurs telle figure qu'on voudra, pourvu qu'elle ait les proprietés que nous avons marquées, & on trouvera toujours la courbe engendrante qui lui repond. Ainſi on trouvera que la courbe engendrante de la courbe ASTL (fig. 16) moitié de ALE (telle qu'elle eſt repreſentée ici, coupant σ fois ſon axe, depuis A jusqu'en E, qu'on ſuppoſe diſtant de A de la quantité l) on trouvera, dis-je, que la courbe engendrante de cette courbe doit avoir à peu prés la forme repreſentée dans la figure 17, la partie lns donnant la portion LNT, la partie nss la portion RTS, la partie smo la portion SA; & cette derniére courbe repreſentée (fig. 17) doit avoir d'ailleurs par rapport

Fig. 16. & 17.

à ſon

Digitized by Google

à ſon axe & à ſes aſymptotes les conditions marquées cy-deſſus (art. XXXI).

XXXVII. Comme les ordonnées GN de la courbe ASTL (fig. 16) ſont exprimées par une fonction, qui a une infinité de valeurs, il s'enſuit que l'aire *ALgn* (fig. 17) a auſſi une infinité de valeurs, quoique la courbe ne ſoit pas ovale & rentrante en elle même; mais quelque paradoxe que cette verité puiſſe paroitre, on en conviendra aiſément, ſi on fait attention que la courbe, qui auroit pour ordonnée $\frac{1}{\sqrt{(2ax-xx)}}$ & pour abſciſſe x, & dont les aires ſeroient proportionnelles à des arcs de cercle, que cette courbe, dis-je, ſeroit dans le même cas que celui dont il s'agit, quoiqu'elle ait deux aſymptotes aux points où $x=0$, & où $x=2a$.

XXXVIII. On peut donc toujours ſuppoſer que les ordonnées de la courbe generatrice ſont proportionnelles aux aires d'une autre courbe. Mais il faut prendre beaucoup de précautions, lorsqu'on les ſuppoſe egales ou proportionnelles aux arcs correſpondants d'une autre courbe. Car 1°. il n'eſt pas toujours poſsible de trouver une courbe dont les arcs ſoient proportionnels aux ordonnées d'une autre. Soit par ex. $dy=dx\sqrt{(2ax-xx)}$ l'equation de la courbe generatrice, il eſt certain qu'une courbe dont les arcs ſeroient proportionnels aux ordonnées correſpondantes de la courbe generatrice, auroit pour equation $du=dx\sqrt{[n^2(2ax-xx)-1]}$ qui eſt imaginaire lorsque $x=0$. 2°. Il y a encore ſur ce même ſujet d'autres obſervations trés importantes à faire: ſoit par exemple la courbe AROT (fig. 18) dont l'equation ſoit $dy=dx\sqrt{(1-x^{-\frac{2}{3}}-1)}$ ($AP=x$, $PM=y$); il eſt conſtant que cette courbe ſera compoſée de 4 moitiés égales & ſemblables, placées comme on les voit dans la figure; que de plus elle ſera rectifiable, puisque ſon element ſera $dx\sqrt{1-x^{-\frac{2}{3}}}$, quantité facile à integrer; qu'enfin elle n'aura point d'autres branches conjuguées à ces 4 là: car l'equation

Digitized by Google

delivrée de radicaux eſt $\left(\frac{dy^2 + dx^2}{dx^2}\right)^3 = \frac{1}{(1-x)^2}$. Or dans toute equation cubique $z^3 = p$ qui n'a que deux termes, il n'y a qu'une racine réelle; donc $\frac{dy^2 + dx^2}{dx^2}$ n'a qu'une valeur réelle en x, & par conſéquent $\frac{dy}{dx}$ n'a point d'autre valeur reelle que $\sqrt{(1-x)^{-\frac{2}{3}} - 1}$. Si donc on ſe propoſoit de trouver une courbe dont les ordonnées fuſſent proportionnelles aux arcs AM, il ſembleroit d'abord, que la courbe AROT rentrant en elle même, l'integrale de $dx\sqrt{(1-x)^{-\frac{2}{3}}}$, ne devroit pas etre plutôt l'arc AM, que l'arc AMROTA + AM, ou 2 AMROTA + AM, &c. d'où l'on conclurroit que l'ordonnée répondante à l'arc AM, & proportionnelle à cet arc, devroit avoir une infinité de valeurs, & qu'ainſi la quantité $dx\sqrt{(1-x)^{-\frac{2}{3}}}$ ne devroit point etre intégrable, quoiqu'en effet elle le ſoit. De plus, ſi on vouloit faire uſage ici de la démonſtration de Mr. Newton ſur l'impoſſibilité de la rectification indéfinie des courbes ovales, on pourroit croire auſſi qu'il ſeroit facile de l'appliquer au cas preſent, en faiſant tourner autour du centre C une régle mobile CM, & qu'ainſi la rectification de l'arc AM devroit etre impoſſible. Comment donc arrive-t-il qu'on trouve l'expreſſion finie de cet arc? Qu'eſt-ce qui empêche la démonſtration de Mr. Newton d'etre applicable ici? Et pourquoy la courbe dont les ordonnées ſont proportionnelles aux arcs AM, n'a-t-elle pas une infinité de branches ſemblables, comme la compagne de la cycloïde? Voici, ce me ſemble, quelle en eſt la raiſon.

XXXIX. *v.* Quoique l'ordonnée ſoit imaginaire lorſque $x > A o$, cependant l'arc ne l'eſt pas en quelque maniére: ſon expreſſion, ou plutôt l'expreſſion algebrique de la quantité qui le repreſente, eſt réelle. Cela vient de ce que cette quantité n'exprime pas veritable-

ment

Digitized by Google

ment & ſtrictement l'arc de la courbe, elle exprime ſeulement l'intégrale $\int(dx^2+dy^2)$. Or quoyque dy ſoit imaginaire, cette quantité intégrale peut etre réelle, tant que dy^2 ne ſera pas plus petit que dx^2. Ainſi l'intégrale de $dx\sqrt{1-x}^{-\frac{2}{3}}$ ne doit pas etre une quantité, ou ſerie indéfinie, parce qu'elle ne devient pas imaginaire, ni quand $x > AO$, ni quand x eſt négative. Pour rendre cette remarque encore plus ſenſible, je ſuppoſe qu'on décrive la courbe A, dont les aires ſoient proportionnelles aux arcs A M, & par conſéquent aux ordonnées de la courbe, qui auroit pour differentielle de ſes ordonnées la quantité $dx\sqrt{1-x}^{-\frac{2}{3}}$; on trouvera, qu'en nommant u les ordonnées de la courbe A, on aura $\frac{du}{dx}=1$ lorsque $x=0$ & lorsque $x=1$, & que la courbe A aura des aſymptotes aux points où $x=AC$, conditions qui ſont abſolument contraires à celles que nous avons exigées ci-deſſus (art. XXXI & XXXII.)

XL. C'eſt par cette raiſon, pour le dire en paſſant, que la cycloide eſt rectifiable, quoiqu'à une même abſciſſe, il paroiſſe repondre une infinité d'arcs, d'où on pourroit juger que ſa rectification indéfinie ſeroit impoſſible. Pour ſe tirer de cette erreur, on n'a qu'à conſtruire la courbe dont les ordonnées ſoyent egales aux arcs de la cycloide, on verra que ſi u repreſente l'ordonnée de cette courbe, on a $\frac{du}{dx}=1$ lorsque $x=2a$, & que lorsque $x>2a$, l'expreſſion de l'arc eſt encore réelle. Auſſi cette courbe dont les ordonnées ſont egales aux arcs de la cycloide, eſt une parabole indéfinie.

Il n'en eſt pas de même des cycloides allongées ou accourcies, ni des compagnes de la cycloide; auſſi leur rectification indéfinie eſt-elle impoſſible. Car on ſait depuis long-tems que les cycloides allongées, ou accourcies, ne ſont rectifiables que par des arcs

Digitized by Google

d'ellipſe, & on peut facilement démontrer la même choſe des compagnes de la cycloide.

Quoique cette digreſſion ſoit un peu longue, j'ay crû qu'on me la permettroit ici, tant à cauſe du rapport immediat & néceſſaire qu'elle a avec mon ſujet, que parce qu'elle m'a donné occaſion d'expoſer une methode ſimple & nouvelle pour trouver une infinité de courbes non ovales, dont la quadrature, ou la rectification indéfinie, eſt impoſsible.

Remarque III.

XLI. Il eſt à remarquer 1o. que la courbe generatrice A L E (fig. 13.) ayant eté trouvée ſuivant les conditions marquées dans l'art. XXX. & XXXI, on peut tracer enſuite ſuivant des conditions ſemblables une autre courbe generatrice, qui ait le meme ſommet Z & le même axe Z B, & enſuite de ces deux courbes generatrices n'en former qu'une ſeule, qui ait ſes ordonnées paralleles à A E egales à la ſomme des ordonnées correſpondantes des deux 1eres courbes, & ainſi de ſuite à l'infini. 2o. Que la courbe generatrice A L E etant tracée, on peut en tracer une ſeconde qui paſſe par les mêmes points A, E, &c. & qui ait des proprietés ſemblables, & enſuite, de ces deux courbes generatrices n'en faire qu'une ſeule dont les ordonnées perpendiculaires à A E, ſoyent egales à la ſomme des ordonnées correſpondantes des deux premiéres: il eſt donc viſible que de cette ſorte on peut avoir, par le moyen de deux courbes generatrices données, une infinité d'autres courbes generatrices, qui auront les mêmes propriétés generales que les deux courbes propoſées.

Remarque IV.

XLII Jusqu' ici nous avons cherché la courbure que doit avoir la corde, dans l'hypotheſe que tous les points ſoyent pouſſés au premier inſtant avec des viteſſes dont la loy ſoit donnée, & nous avons vû que dans une infinité de cas cette loy pouvoit etre telle, que la corde ne prit jamais la figure d'une compagne de cycloide trés allongée, ainſi qu'on le penſe ordinairement. Cependant Mr. Taylor a pre-

Digitized by Google

a prétendu prouver que la corde devoit toujours prendre cette figure. Mais ſon raiſonnement ne me paroit pas revêtu de toute la clarté poſsible. Ce ſavant Geometre veut prouver que la corde prendra toujours une forme telle que p S (fig. 19.) ſoit à P S, comme q R à Q R. Pour cela il ſuppoſe qu'il y ait un inſtant où p S : P S $\prec$ ou $\succ$ q R : Q R, & il ſe propoſe de démontrer que la corde doit enfin prendre une figure, dans laquelle p S ſera à P S $=$ q R : Q R. Or la preuve que Mr. Taylor donne de cette propoſition, me paroit ſuſceptible de beaucoup de difficultés; car de ce que P p : Q q $\succ$ P S : Q R, comme il arrive lorſque la courbure en P eſt à la courbure en Q en plus grand rapport que P S à Q R, il eſt à la verité en droit de conclurre que p S : P S $\prec$ q R : Q R & p S : q R $\prec$ P S : Q R $\prec$ la force en P eſt à la force en Q. Mais je ne vois pas qu'il s'enſuive de là, comme il le dit, que la courbure en p ſoit moindre par rapport à la courbure en P, que la courbure en q ne l'eſt par rapport à la courbure en Q. D'ailleurs, en ſuppoſant même que cette derniére aſſertion fut démontrée, il faudroit de plus que la viteſſe actuelle & la force acceleratrice devinſſent à la fois & dans le même inſtant proportionnelles aux diſtances à l'axe A C. Or comment cela ſe fera-t-il? c'eſt ce que l'auteur n'explique point. Ne peut-il pas arriver que l'un des points P, Q, vienne à l'axe avant que la proportion exacte ſoit rétablie entre p S, P S, q R & Q R? Toutes ces réflexions jointes aux preuves directes tirées de notre ſolution generale, ſont plus que ſuffiſantes, ce me ſemble, pour nous convaincre qu'il manque quelque choſe à la ſolution, que Mr. Taylor veut donner pour générale.

Remarque V.

XLIII. On met ordinairement une corde en vibration, en la touchant par quelqu'un de ſes points avec un archet, ou un autre inſtrument, & en la faiſant ſortir par ce moyen de ſon état de repos. Pour voir quel mouvement cette action produit dans toute l'etenduë de la corde, ſuppoſons que la corde C A D (fig. 20.) fixe en C & en D, ſoit compoſée d'une infinité de petits poids ou corpuscules

Digitized by Google

A, E, H, F, G &c. unis enſemble par des reſſorts capables de dilatation; il eſt certain que ſi on écarte le point A de la ligne droite A E, en l'obligeant à decrire la ligne A a, la portion A E de la corde deviendra a E, & que le point E ſera pouſſé vers e ſuivant E e, avec une force proportionelle à l'angle a E A. On trouvera de même que le mouvement du point E ou e en produira dans le point F, celui-ci dans le point G, &c. & que les lignes A a, E e, F f, G g &c. ſuivront une progreſſion geometrique, dont le dernier terme ſera la ligne G g decrite par le point G, le plus prés de l'extremité D. Il en eſt de même de l'autre côté de A vers C; il faudroit donc, pour appliquer icy notre ſolution generale, trouver une fonction σ de s, qui exprimât ces proprietés des lignes A a, E e, F f, &c. Or cela eſt impoſſible. Car ſoit C E $= s$; comme les lignes A a, E e, F f &c. ſont (hyp.) en progreſſion Geometrique, la valeur de σ ne pourroit etre que c^{-ns}, c etant le nombre dont le logarithme eſt 1, & n une conſtante quelconque. Or 1°. lorſque $s = o$ & $= C D$, cette valeur devroit etre à egale à zero, ce qui n'eſt pas; 2°. lorſque $s < C A$, la valeur de σ devroit diminuer, au lieu que celle de e^{-ns} va en augmentant depuis A jusqu'en C: enfin c^{-ns} n'eſt pas une fonction paire de s, comme σ le doit etre (art. XXVIII.).

car $c^{-nc} = 1 - ns + \frac{nnss}{2} - \frac{n^3 s^3}{2.3.}$ &c.

XLIV. Il n'y a donc point autre choſe à faire, que de chercher le mouvement de la corde, en la regardant comme compoſée d'un grand nombre de points, unis enſemble par des fils extenſibles. Suppoſons pour cet éffet une corde C D (fig. 21.) chargée de deux corpuscules A, F, joints enſemble par les fils flexibles & extenſibles C A, A F, F D; ſoit C A $= a$, A F $= b$, F D $= c$, A $a = x$, F $f = y$; il eſt facile de voir que la force qui anime les points a, f, eſt proportionnelle aux angles C a f, a f D, c. à. d. à

$\times \left(\frac{a+b}{a}\right)$

Digitized by Google

$x\left(\frac{a+b}{a}\right)-y$ / b & à $\frac{y-x}{b}+\frac{y}{c}$. On aura donc les deux equations $-ddx=\frac{2adt^2.m}{\theta^2}\left\{x\left(\frac{a+b}{a}\right)-y \text{ / } b\right\}$; & $-ddy=\frac{2adt^2}{\theta^2}.m.\left(\frac{y-x}{b}+\frac{x}{c}\right)$; & ces equations ſont génerales ſoit que les poids a, f, achevent en même tems leurs vibrations, comme on l'a ſuppoſé jusqu'ici, ſoit qu'ils les achevent ſeparément. Le nombre de ces mêmes equations augmentera avec celuy des diviſions de la corde, & des poids qui y ſont attachés; mais elles pourront toujours s'integrer par la methode que j'ay donnée il y a 4 ans, dans mon Traité de Dynamique art. 101. J'ai depuis ce tems perfectionné beaucoup cette methode, & j'en ai imaginé pluſieurs autres nouvelles & curieuſes pour integrer differentes equations, qui ſont du même genre que celles-ci. Mais comme ce détail me meneroit trop loin, ce ſera le ſujet d'un autre Memoire, qui contiendra beaucoup de recherches ſur le calcul integral. Ce que je viens de dire, ſuffit pour faire voir, qu'on peut toujours trouver à peu prés les vibrations des differens points de la corde, en l'imaginant comme un fil extenſible chargé de pluſieurs petits poids.

Remarque VI.

XLV. Si on vouloit que la corde, en vertu de l'impulſion d'un de ſes points, prit tout d'un coup la forme d'une courbe, telle qu'elle a eté déterminée dans les art. XIII., XXIII &c. on pourroit facilement trouver ſon excurſion, c'eſt à dire, la quantité dont chacune de ſes parties s'ecarteroit du point de repos. Car ſoit E l'eſpace que la force de l'impulſion feroit parcourir à une maſſe egale à celle de la corde, il faut 1°. que $\int \sigma ds = lE$. De plus, ſi dans le cas, par ex.

Digitized by Google

ex.' où la corde prend la forme d'une compagne de cycloide, on veut avoir la valeur de la plus grande ordonnée A, on ſuppoſera que m' ſoit l'eſpace que le point de milieu de la corde parcourreroit dans le tems θ avec ſa viteſſe initiale, on aura $\frac{m' d\varepsilon}{\theta}$ pour l'eſpace qu'il parcourreroit au 1er inſtant. Or cet eſpace doit etre egal à la differentielle de y, en faiſant varier ε, & ſuppoſant enſuite $\varepsilon = o$ & $s = \frac{1}{2} l$. On aura donc (art. XXL) $\frac{m' d\varepsilon}{\theta}$

$$= A \times \frac{n\, d\varepsilon}{l} \times \frac{c^{\frac{n\sqrt{-1}}{2}} - c^{\frac{-n\sqrt{-1}}{2}}}{2\sqrt{-1}}$$ d'où l'on tirera la valeur de A.

Remarque VII.

XLVI. Si on ſuppoſoit que la corde fit des vibrations longitudinales de C vers A, au lieu de les faire perpendiculairement à ſa longueur, alors imaginant que y fut l'eſpace décrit par un point quelconque, on auroit la même équation que ci-deſſus (art. VI.) entre y & s. Par là on pourroit calculer la viteſſe du ſon d'une maniére beaucoup plus génerale, qu'on ne l'a fait jusqu' ici.

Remarque VIII.

XLVII. Si on ſuppoſe que la corde, faiſant ſes vibrations perpendiculaires à A C, ou ſuivant A C, ne ſoit fixe que par un de ſes bouts, on aura pour lors $y = \psi(\varepsilon + s) - \psi(\varepsilon - s)$, & comme ci-deſſus $\psi s - \psi - s = \Sigma$ & $\psi s + \psi - s = \sigma$. La courbe generatrice pourra dans ce cas être Geometrique, parce qu'il n'eſt plus neceſſaire que les ordonnées diſtantes l'une de l'autre de la quantité $2h$ ſoyent egales. Ainſi on aura par ce moyen les oſcillations d'une corde

Digitized by Google

cordes ſans peſanteur, fixe par un de ſes bouts. Il eſt vray que nôtre ſolution eſt differente de celle des celebres Geometres Mrs. Euler & Bernoulli; mais cela vient de la difference de nos hypotheſes ſur le reſſort. Je regarde ici la corde vibrante comme compoſée de parties flexibles & extenſibles ſans roideur. Ces illuſtres Auteurs la regardent au contraire comme un reſſort roide, & une eſpece de levier, qui a une infinité de points d'appuy, & c'eſt de là que provient la diſparité de nos ſolutions.

Au reſte, puisque l'occaſion s'en preſente, je crois qu'on ne ſera pas faché de voir icy une methode aſſés élegante pour integrer l'équation $d^4y = M y\, dt^4$, par laquelle ces deux ſavans Auteurs expriment la nature de la corde vibrante, & fixe par un des bouts. On peut ſuppoſer toujours que cette équation vienne des deux ſuivantes

$$d\,d\,y = u\,dt^2$$
$$d\,d\,u = M\,y\,dt^2$$

Or multipliant la 2de. de ces équations par un coëfficient conſtant, & indeterminé v, & les ajoutant enſuite enſemble, on aura $d\,d\,y + v\,d\,d\,u = (u + v\,M\,y)\,dt^2$; & faiſant $u + v\,M\,y =$ à un multiple de $y + vu$, on aura $\frac{I}{v} = v\,M$; d'où l'on tire $v = \pm\sqrt{\frac{I}{M}}$. Donc ſi on ſuppoſe $u + M\,y\sqrt{\frac{I}{M}} = z$, & $u - M\,y\sqrt{\frac{I}{M}} = q$, on aura $z\,dt^2 = d\,d\,z\sqrt{\frac{I}{M}}$ & $q\,dt^2 = -d\,d\,q\sqrt{\frac{I}{M}}$. Ces deux dernieres équations, qui s'integrent aiſément, donneront les valeurs de z & de q en t, & par conſéquent auſſi celles de u & de y.

Digitized by Google

HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

ANNÉE MDCCXLVII. 1747



A BERLIN.

CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Academie Royale.
MDCCXLIX.

Digitized by Google

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADEMIE. Année MDCCXLVII. pag. 3.
MEDAILLES. p. 4.
Le Renouvellement de l'Academie. ODE. p. 5.

ELOGE de M. de GOLTZE. p. 9.
- - de M. de BORCK. p. 18.
- - de M. BERNOULLI. p. 22.

MEMOIRES DE L'ACADEMIE.

CLASSE de Philoſophie Experimentale.

Diſſertation Phiſico-Chymique *ſur la ſéparation de l'or d'avec l'Argent, qu'on nomme* ſéparation ſéche, *par* M. ELLER. pag. 3.

Memoire *ſur la maniere de diſſoudre l'etain dans les acides des végétaux, & ſur l'Arſenic qui s'y trouve encore caché, avec les Experiences qui ſervent de preuves, par* M. MARGGRAF. p. 33.

Experiences Pyrotechniques *ſur la Topaze de Saxe, par* M. POTT. p. 46.

Examen Pyrotechnique *de la Pierre nommée par les Anciens* Steatites, *& en Allemand,* Speckſtein, *par* M. POTT. p. 57.

Experiences Chymiques *faites dans le deſſein de tirer un veritable ſucre de diverſes Plantes, qui naiſſent dans nos contrées, par* M. MARGGRAF. p. 79.

Digitized by Google

CLASSE de Mathematique.

Recherches *ſur le mouvement des Corps celeſtes en général, par* M. EULER. pag. 93.
Solution *de quelques Problémes d'Aſtronomie, par* M. D'ALEMBERT. p. 144.
Methode *pour trouver les vrais momens, tant des Nouvelles, que des Pleines Lunes, par* M. EULER. p. 154.
Methode *de trouver le vrai Lieu Geocentrique de la Lune, par l'Obſervation de l'occultation d'une Etoile fixe, par* M. EULER. p. 174.
Methode *de déterminer la longitude des lieux par l'obſervation d'occultations des Etoiles fixes par la Lune,* par M. EULER. p. 178.
Memoire *ſur la force des rames, par* M. EULER. p. 180.
Recherches *ſur la Courbe que forme une Corde tenduë, miſe en vibration, par* M. D'ALEMBERT. p. 214.
Suite *des mêmes Recherches.* p. 220.
Réfléxions *ſur la derniere Eclipſe du Soleil du 25. Juillet A. 1748. par* M. EULER. p. 250.
Sur la perfection des Verres objectifs des Lunettes, par M. EULER. p. 274.
Obſervation *d'une Eclipſe partiale de Lune, faite à Berlin au mois d'Août 1746. par* M. KIES. p. 297.
Obſervation *d'une Eclipſe horizontale de Soleil, au 10. jour du Mois de Mars 1747. par* M. KIES. p. 299.

CLASSE de Philoſophie Speculative.

Diſſertation *ſur Pherecyde, Philoſophe de Syre, par* M. HEINIUS. p. 303.
Les Preuves de l'Exiſtence de Dieu, ramenées aux Notions communes, par M. FORMEY. p. 341.

Examen

Digitized by Google

Examen *de la Preuve qu'on tire des fins de la Nature, pour établir l'Exiſtence de Dieu, par* M. FORMEY. pag. 365.

CLASSE de Belles Lettres.

VIE de FRIDERIC GUILLAUME le Grand. p. 387.

Réponſe de M. DE MAUPERTUIS. p. 429.

Rélation *d'un Voyage fait dans la Lapponie Septentrionale, pour trouver un ancien Monument, par* M. DE MAUPERTUIS. p. 432.

Diſſertation *ſur le Chap. XL. du Livre de TACITE,* des Moeurs des Germains, *& en particulier ſur la Déeſſe* HERTHA, HERTHAM, *ou* ERDAMM, *qui a été autrefois le principal objet du culte dans la Germanice Septentrionale, par* M. ELSNER. p. 446.

Digitized by Google

ERRATA.

p. 43. l. 31. trouvent, *lis.* retrouvent.

Les corrections ſuivantes regardent le Mémoire de M. *de la Condamine*, qui a paru dans le Volume de 1746.

d. 435. l. 15. lavega, *lis*, La Vega.

p. 436. *lis.* p. 437

p. 437. l. 16. Pierre caſſée, *lis. Pierre laſſée.*

p. 438. l. dern. & en pluſieurs autres endroits, Cannar, Cannaris, &c. *lis.* Canſar, Canſaris, &c. ſuivant l'Orthographe Eſpagnole, ou Cagnar, Cagnaris, ſuivant L'Orthogr. Franc.

p. 440. l. 7. à peu de diſtance, *lis.* aſſés prés.

p. 441. l. 23. quant à ceux de Canſar & à leur peu d'etendüe, *lis.* quant au peu d'etendüe des batimens de Canſar.

p, 442. l. 23 & 24. la terraſſe, *lis.* le mur de la terraſſe.

p. 445. conſulté, *lis.* conſultés.

ibid. Cusco, *lis. Cusco.*

l. 4. *boco, lis.* ttoco.

l. 8. *Cabuarcuna, lis. Cabuarcuna.*

p. 447. en marge fig. 3. *lis.* fig. 5.

p. 448. l. 3 que, *lis.* qui.

p. 449. l. 2. coins, *lis. cours.*

l. 21. RTVX, *lis.* RSTVX.

p. 450. l. 15. pieées, *lis.* pieces.

l. 28. (gb) *lis.* (gh)

l. 29. (gib) *lis.* (gih.)

p. 451. l. 3. entrées, *lis.* entrée

l. 5. (gb) *lis.* (gh)

p. 452. l. 13. (b) *lis.* (h)

l. 14. (G) *lis.* (g)

l. 16. (dc) *lis.* (d&c)

l. 17. (b) *lis.* (h)

Digitized by Google

l. 19. (i, m) La lettre i à laquelle on renvoye, n'eſt point dans la figure; il faut la placer dans l'intervalle des deux Pieces quarrées, les plus à main droite, cottées e & f.

p. 453. l. 5. de mays d'ynca, *lis.* de mayz, d'yuca.

p. 454. l. 10. *Cieca, lis Cieça.*

l. 15. Serville, *lis.* Seville.

l. 22. detiges, *lis.* de tiges.

l. antep. *Atabualpa, lis. Atabualpa.*

p. 456. l. 4. *Cieca, lis. Cieça.*

l, 8, il ajoute, *lis.* ils ajoutent.

l. 21. j'allai. *lis.* j'y allai.

Digitized by Google



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`