Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Opera physica miscellanea epistolae. Volumen

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

primum, Leonhardi Euleri commentationes physicae

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

ad physicam generalem et [...]

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

BnF Gallica

Euler, Leonhard (1707-1783). Opera physica miscellanea epistolae. Volumen primum, Leonhardi Euleri commentationes physicae ad physicam generalem et ad theoriam soni pertinentes / ediderunt Eduard Bernoulli, Rudolf Bernoulli, Ferdinand Rubio,... [et al.]. 1926.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au

sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le

producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter **reutilisationcommerciale@bnf.fr**.

LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA
SUB AUSPICIIS SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE
EDENDA CURAVERUNT
F. RUDIO · A. KRAZER · A. SPEISER · L. G. DU PASQUIER

SERIES TERTIA · OPERA PHYSICA · VOLUMEN PRIMUM

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES PHYSICAE

AD PHYSICAM GENERALEM ET AD THEORIAM SONI PERTINENTES

EDIDERUNT

EDUARD BERNOULLI RUDOLF BERNOULLI
FERDINAND RUDIO ANDREAS SPEISER

ADIECTA EST EULERI EFFIGIES
AD IMAGINEM A DARBES PICTAM EXPRESSA

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXVI

LEONHARDI EULERI

OPERA OMNIA

LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

FERDINAND RUDIO
ADOLF KRAZER ANDREAS SPEISER
LOUIS GUSTAVE DU PASQUIER

SERIES TERTIA

OPERA PHYSICA MISCELLANEA EPISTOLAE

VOLUMEN PRIMUM

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXVI

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES PHYSICAE

AD PHYSICAM GENERALEM ET AD THEORIAM SONI PERTINENTES

EDIDERUNT

EDUARD BERNOULLI RUDOLF BERNOULLI
FERDINAND RUDIO ANDREAS SPEISER

ADIECTA EST EULERI EFFIGIES
AD IMAGINEM A DARBES PICTAM EXPRESSA

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXVI

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

DE LA PROPAGATION DU SON

Commentatio 305 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [15] (1759), 1766, p. 185—209.

1. Les Physiciens aussi bien que les Géometres se sont donnés bien de la peine pour expliquer comment le son est transmis par l'air, mais il faut avouer que la théorie en a été jusqu'ici fort incomplette. Ce que le grand NEWTON[1]) a donné sur cette matiere est plus ingénieux que suffisant, ayant fondé ses raisonnemens sur des hypotheses purement arbitraires; et M. DE LA GRANGE[2]), très savant Géometre à Turin, vient de remarquer très judicieusement dans le premier volume des Miscellanea Physico-Mathematica publiés à Turin a. 1759, que, quelques autres hypotheses qu'eût prises NEWTON, il en auroit tiré les mêmes conclusions. Cela pourroit bien suffire pour nous assurer de la justesse des conclusions, qui regardent la vitesse dont le son est transmis par l'air; mais le vrai mouvement dont les particules de l'air sont ébranlées successivement nous demeure également inconnu; et nous ne saurions nous vanter de comprendre la propagation du son, à moins que nous ne fussions en état d'expliquer clairement, comment ces ébranlemens sont engendrés et transmis dans l'air.

---

1) I. NEWTON (1643—1727). Sa formule pour la vitesse du son fut publiée pour la première fois dans *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini 1687. F. R.

2) J. L. LAGRANGE (1736—1813), *Recherches sur la nature et la propagation du son*, Miscellanea Taurinensia 1 (1759); *Oeuvres de LAGRANGE*, publiées par les soins de M. J. A. SERRET, t. I, p. 37. Et *Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son*, Miscellanea Taurinensia 2 (1760/61); *Oeuvres de LAGRANGE*, t. I, p. 151. F. R.

2. Tous ceux qui ont traité cette matiere après NEWTON ou sont tombés dans le même défaut ou, voulant approfondir le vrai mouvement de l'air, se sont précipités dans des calculs intraitables, d'où l'on ne sauroit absolument tirer aucune conclusion; et je dois avouer qu'il m'est arrivé l'un ou l'autre, toutes les fois que j'ai entrepris cette recherche. Je fus donc bien agréablement surpris, lorsque je vis, dans cet excellent livre que je viens d'alléguer, que M. DE LA GRANGE a surmonté heureusement toutes ces difficultés, et cela par des calculs qui paroissent tout à fait indéchiffrables C'est sans contredit une des plus importantes découvertes qu'on ait faites depuis longtems dans les Mathématiques, et qui nous pourra conduire à bien d'autres.

3. En examinant ces calculs prodigieux, j'ai pensé d'abord s'il ne seroit pas possible de parvenir au même but par une route plus facile, et après quelques efforts j'y suis arrivé. J'aurai donc l'honneur d'expliquer ici la méthode qui me semble la plus propre pour cette recherche; mais, quelque simple qu'elle puisse paroitre, je dois protester qu'elle ne me seroit pas venue dans l'esprit, si je n'avois pas vu l'ingénieuse analyse de M. DE LA GRANGE. Il y a une circonstance qui nous arrêteroit tout court, si l'Analyse n'étoit applicable qu'à des quantités continues, ou dont la nature puisse être représentée par une courbe réguliere, ou renfermée dans une certaine équation. Ce n'est donc que l'adresse d'introduire des quantités discontinues dans le calcul qui nous peut conduire à la solution cherchée; et cela se peut faire d'une maniere semblable à celle dont j'ai déterminé le mouvement d'une corde à laquelle on aura donné au commencement une figure quelconque inexplicable par aucune équation.[1])

4. En effet, on n'a qu'à envisager la propagation du son comme elle se fait actuellement: l'air étant brusquement agité en quelque endroit, les particules d'air qui en sont assés éloignées n'en ressentent d'abord rien; ce n'est qu'après un certain tems qu'elles sont ébranlées, et depuis elles sont rétablies dans un parfait équilibre. Concevons donc une particule quelconque, éloignée du lieu où se fait l'impulsion de la distance $= x$, et qu'après le tems T elle

1) Voir les mémoires 119 et 140 (suivant l'*Index* d'ENESTRÖM): *De vibratione chordarum exercitatio,* Nova acta erud. 1749, p. 512—527, et *Sur la vibration des cordes. Traduit du Latin,* Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin [4] (1748), 1750, p. 69—85; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series II, vol. 8. F. R.

reçoive l'agitation pendant un moment $= \theta$. Maintenant, si nous considérons l'état de cette particule et que nous posions sa vitesse $= v$, elle doit dépendre en sorte de la distance x et du tems t, que, tant que t est moindre que T, il soit $v = 0$, et que la vitesse v ait une valeur finie, pendant que le tems t est pris entre les limites T et $T + \theta$, mais, qu'en prenant $t > T + \theta$, la vitesse v redevienne pour toujours égale à zéro. On voit bien que cela ne sauroit être représenté par aucune fonction réguliere du tems t.

5. Il ne faut pas penser qu'une fonction semblable à celles qui représentent les courbes toutes renfermées dans un certain espace soit propre à exprimer l'état des particules de l'air dans la propagation du son; une telle fonction de t, qui n'auroit des valeurs réelles que tant que t se trouve entre les limites T et $T + \theta$, ne convient nullement à notre cas pour exprimer la valeur de v, puisqu'elle donneroit pour les cas où $t < T$ ou $t > T + \theta$ des valeurs imaginaires, au lieu que la vitesse v est alors véritablement $= 0$ et point du tout imaginaire. On ne sauroit dire non plus que la vitesse seroit alors extrêmement petite, mais pourtant variable, afin qu'elle puisse être considérée comme liée par la loi de continuité avec les valeurs finies qu'elle reçoit pendant l'intervalle de tems θ; car, avant l'agitation qui arrive à cette particule, et après, elle se trouve dans un aussi parfait repos que s'il n'y avoit eu jamais d'agitation. C'est sans doute une des principales raisons qui ont empêché de soumettre au calcul la propagation du son.

6. Mr. DE LA GRANGE[1]) a heureusement évité cet écueil, ayant considéré les particules de l'air comme isolées, sans former un tout continu; et dans cette vue il leur a assigné une grandeur finie, de sorte que le nombre de toutes les particules dispersées par un intervalle quelconque demeurât fini. Il s'est servi de la même méthode dont il a déterminé dans le même ouvrage les vibrations d'une corde chargée d'un nombre fini de poids; et c'est par cette méthode qu'il a fait voir, par la résolution des équations, que le calcul peut montrer un ébranlement dans une seule particule de l'air, pendant que toutes les autres demeurent en repos. Or, à la fin on voit que le nombre des particules n'entre plus en considération, et que la même circonstance doit avoir lieu en supposant infini le nombre des particules d'air qui remplissent

1) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. I, p. 151. Voir la note 2 p. 428. F. R.

un certain espace. Tout revient donc à ce qu'on sache introduire des fonctions discontinues dans l'Analyse qui sert à résoudre ce probleme; ce qui paroit un grand paradoxe.

7. En effet, lorsque je donnai ma solution générale pour les vibrations des cordes, qui comprend aussi les cas où la corde auroit eu au commencement une figure irrégulière et inexprimable par aucune équation, elle parut d'abord fort suspecte à quelques grands Géometres. Et M. D'ALEMBERT[1]) aima mieux soutenir que dans ces cas il étoit absolument impossible de déterminer le mouvement d'une corde, que d'admettre ma solution, quoiqu'elle ne differe en rien de la sienne dans les autres cas. Il n'étoit pas même suffisant de faire voir, comme j'ai fait, que ma construction satisfaisoit parfaitement à l'équation différentielle du second degré, qui renferme sans contredit la véritable solution; la discontinuité lui parut toujours incompatible avec les lois du calcul. Mais à présent M. DE LA GRANGE[2]) ayant justifié pleinement ma solution, et cela d'une manière incontestable, je ne doute pas qu'on ne reconnoisse bientôt la nécessité des fonctions discontinues dans l'Analyse, surtout quand on verra que c'est l'unique moyen d'expliquer la propagation du son.

8. Le paradoxe paroitra encore plus grand, quand je dis qu'il y a une partie très considérable du calcul intégral, où l'on est obligé d'admettre de telles fonctions discontinues, aussi bien qu'on admet des constantes arbitraires dans les intégrations ordinaires. Comme le calcul intégral est une méthode de trouver des fonctions d'une ou de plusieurs variables, lorsqu'on connoit quelque rapport entre leurs différentiels du premier ordre ou d'un plus haut, toute la partie où il s'agit des fonctions de deux ou plusieurs variables est susceptible de fonctions quelconques, sans en excepter les discontinues; et cela par la même raison, que les fonctions d'une seule variable, qu'on trouve par l'intégration, reçoivent une constante arbitraire, qu'il faut déterminer ensuite par les conditions essentielles à chaque question.

---

1) JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717—1783), *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration,* Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin [3] (1747), 1749. F. R.

2) Voir la note 2 p. 428. F. R.

9. Pour mettre cela dans tout son jour, cherchons une fonction z de deux variables x et t, de sorte qu'il soit

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = a\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

où l'on sait déjà que $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ marque la fraction $\frac{dz}{dt}$ en ne supposant que t variable, et $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ la fraction $\frac{dz}{dx}$, en ne supposant que x variable. Cette condition est semblable à celle qui renferme le mouvement des cordes vibrantes, qui est $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = a\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, qui ne differe de celle-là que puisqu'il y a ici des différentiels du second degré, de sorte que les mêmes circonstances ont lieu dans l'une et dans l'autre. Or, il est évident qu'on satisfait à la condition $\left(\frac{dz}{dt}\right) = a\left(\frac{dz}{dx}\right)$ en prenant pour z une fonction quelconque de $x + at$, sans en exclure les fonctions discontinues. Car, concevant une courbe quelconque tracée de main libre sans aucune loi, si l'on prend l'abscisse $= x + at$, l'appliquée donnera une juste valeur de z, qui satisfait à l'équation $\left(\frac{dz}{dt}\right) = a\left(\frac{dz}{dx}\right)$; et puisqu'on ne demande pas autre chose, il n'y a rien qui nous oblige à croire qu'une courbe réguliere et continue soit plus propre à remplir cette condition, qu'une courbe irréguliere et discontinue, et encore moins que celles-ci doivent être exclues.

10. Supposons qu'il s'agisse du mouvement d'un fil, et que les conditions soient telles, qu'il s'ensuive qu'après un tems quelconque t il réponde à l'abscisse x une appliquée z en sorte qu'il soit

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = a\left(\frac{dz}{dx}\right);$$

et je dis que prenant z égale à une fonction quelconque de la quantité $x + at$, ou

$$z = \Phi : (x + at),$$

on aura résolu généralement le probleme, quelque fonction, soit réguliere, soit irréguliere, que marqua le signe Φ. Mais la signification de ce même signe est toujours déterminée par la nature de la question, qui ne sauroit subsister à moins que la figure du fil pour quelque moment, savoir $t = 0$, ne fut donnée; or alors, ayant $z = \Phi : x$, cela doit être précisément l'équation pour la figure initiale du fil, quelle qu'elle ait été, soit réguliere, soit irréguliere. Maintenant, connoissant cette figure, on en déterminera aisément la figure que

le fil aura après un tems quelconque t; car à une abscisse quelconque x il répondra la même appliquée, qui répond dans la figure initiale à l'abscisse $x + at$.

11. C'est sur un semblable raisonnement qu'est fondée ma construction du probleme des cordes vibrantes[1]), et qui est à présent mise à l'abri de toute objection. C'est aussi sur ce même fondement que j'établirai la solution du probleme sur la propagation du son, et qui me dispensera des calculs embarrassans que M. DE LA GRANGE a été obligé de développer. Je conçois donc ce probleme sous le même point de vue que cet habile Géometre, en ne considérant que les particules de l'air qui sont situées sur une même ligne droite, suivant laquelle se fait la propagation du son. Car, quoique le son se répande de toute part également, il semble très certain que la propagation suivant chaque ligne droite n'est pas troublée par les mouvemens des particules voisines autour d'elle. Cependant il seroit bien à souhaiter qu'on pût résoudre cette question en déterminant l'agitation par toute l'étendue de l'atmosphere, mais on y rencontre des difficultés qui paroissent encore insurmontables. Je m'arrêterai donc, comme M. DE LA GRANGE, au seul mouvement qui se fait par une ligne droite.

ANALYSE POUR LA PROPAGATION DU SON SUR UNE LIGNE DROITE

12. Je ne considere donc qu'une seule étendue de l'air suivant la ligne droite AE (Fig. 1), tout comme si l'air étoit renfermé dans un tuyau infiniment

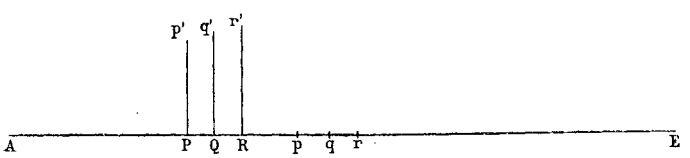


Fig. 1.

mince AE, que je supposerai de plus bouché par les deux extrémités en A et E, afin que les circonstances auxquelles il faut appliquer le calcul soient parfaitement déterminées. Soit la longueur de ce tuyau $AE = a$ et sa lar-

1) Voir la note 1 p. 429. F. R.

geur, que je suppose partout la même et quasi infiniment petite, $= ee$, de sorte que le volume d'air contenu dans ce tuyau soit $= aee$. Soit d'abord cet air en équilibre, ou de la même densité par toute la longueur du tuyau, de sorte que son élasticité soit aussi partout la même; que la hauteur h soit la mesure de l'élasticité dans cet état d'équilibre, qu'il faut entendre en sorte, que l'élasticité soit balancée par le poids d'une colonne d'air, dont la hauteur $= h$, ou bien que chaque particule d'air dans le tuyau soit pressée de part et d'autre par le poids d'une masse d'air semblable, dont le volume est $= hee$, et que l'élasticité soit en équilibre avec cette pression.

13. Que cet air dans le tuyau ait maintenant essuyé une agitation quelconque, dont l'état d'équilibre soit troublé, et pour en représenter l'effet, considérons trois points infiniment proches, qui dans l'état d'équilibre aient été en P, Q, R à des intervalles égaux et infiniment petits $PQ = QR = \omega$, et qui par l'agitation arrivée ayent été transportés après le tems $= t$ en p, q, r, de sorte que les particules d'air comprises entre les points P, Q, R se trouvent maintenant entre les points p, q, r et partant plus ou moins condensées, selon que les intervalles pq et qr sont plus petits ou plus grands que les intervalles naturels PQ et QR, et l'élasticité sera changée dans le même rapport. Pour connoitre ce changement, posons pour l'état d'équilibre les distances

$$AP = x, \quad AQ = x' = x + \omega, \quad AR = x'' = x + 2\omega$$

et pour l'état troublé

$$Pp = y, \quad Qq = y', \quad Rr = y'';$$

de là nous aurons les intervalles

$$pq = \omega + y' - y \quad \text{et} \quad qr = \omega + y'' - y'$$

et les masses des particules d'air qui y sont contenues seront les mêmes qui occupoient dans l'état d'équilibre les intervalles PQ et $QR = \omega$ et partant $= ee\omega$.

14. Qu'on observe ici que les quantités x se rapportent à l'état d'équilibre et qu'elles expriment la distance de chaque particule d'air depuis le point fixe A, mais que les quantités y marquent le dérangement de chaque

particule causé par l'agitation qui lui convient après le tems t. Ainsi la particule d'air, qui dans l'état d'équilibre étoit éloignée du point fixe A de l'intervalle $= x$, s'entrouvera après le tems $= t$ de l'intervalle $= x + y$ et partant l'air ne sera pas en équilibre, à moins que toutes les y ne soient évanouissantes; si l'on met perpendiculairement aux points P, Q, R les appliquées Pp', Qq', Rr', égales aux intervalles Pp, Qq, Rr, la ligne courbe qui passe par les points p', q', r' marquera l'état troublé de l'air dans le tuyau pour le tems $= t$; où il est évident que la premiere de ces appliquées en A et la derniere en E doivent évanouir. Car puisque le tuyau est fermé par les deux extrémités, les particules d'air en A et E ne sauroient s'éloigner de leurs places.

15. L'élasticité qui étoit dans l'état d'équilibre partout exprimée par la hauteur $= h$, sera à présent dans l'intervalle pq exprimée par une hauteur

$$= \frac{h \cdot PQ}{pq}$$

et dans l'intervalle qr par une hauteur

$$= \frac{h \cdot QR}{qr}.$$

Donc, ayant posé $PQ = QR = \omega$, puisque

$$pq = \omega + y' - y \quad \text{et} \quad qr = \omega + y'' - y',$$

la hauteur qui mesure l'élasticité dans l'intervalle pq sera

$$= \frac{h\omega}{\omega + y' - y}$$

et dans l'intervalle qr

$$= \frac{h\omega}{\omega + y'' - y'}.$$

Or c'est de l'inégalité de ces hauteurs que dépend l'accélération ou retardation du mouvement de la particule en q. Pour cet effet, ayant partagé toute la longueur AE en des intervalles infiniment petits et égaux entr'eux $= \omega$, dont chacun contient un volume d'air $= ee\omega$, dans l'état d'équilibre concevons ces particules comme réunies dans les points P, Q, R, pour avoir

maintenant en q un volume d'air $= ee\omega$, qui sera poussé en arriere vers A par une force

$$= \frac{eeh\omega}{\omega + y'' - y'}$$

et en avant vers E par une force

$$= \frac{eeh\omega}{\omega + y' - y}.$$

16. Joignant ces deux forces, la particule d'air en q sera poussée selon la direction qE par la force qui est

$$= \frac{eeh\omega(y'' - 2y' + y)}{(\omega + y' - y)(\omega + y'' - y')};$$

dont la distance depuis le point fixe A étant $Aq = x' + y'$, dont la partie x' demeure invariable par rapport au tems t, l'autre partie y' seule souffrira l'effet de cette force, et pendant l'élément de tems dt, on aura, conformément aux principes de Mécanique, en divisant par la masse $ee\omega$, cette équation

$$\frac{ddy'}{dt^2} = \frac{2gh(y'' - 2y' + y)}{(\omega + y' - y)(\omega + y'' - y')},$$

où g marque la hauteur par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, et alors le tems t sera exprimé en secondes. Il s'agit donc de trouver pour chaque abscisse x et pour chaque tems t la valeur de l'intervalle y.

17. Considérons maintenant aussi x comme variable et il est clair que y sera une fonction des deux variables x et t; et puisque dans la formule $\frac{ddy}{dt^2}$ on suppose x constante, nous devons écrire $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ pour éviter toute ambiguité. Ensuite, l'autre membre de notre équation ne regarde que la variabilité de x; posant donc $\omega = dx$, nous aurons

$$y' - y = dx\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{et} \quad y'' - 2y' + y = dx^2\left(\frac{ddy}{dx^2}\right);$$

d'où notre équation prendra cette forme

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) : \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right).$$

qui seroit encore bien difficile à résoudre. Mais on suppose de plus, que les agitations sont extrêmement petites et que les y évanouissent quasi par rapport aux x; au moins on peut se contenter de connoitre la propagation du son, quand les agitations sont fort petites, et alors, rejettant le terme $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, on aura à résoudre cette équation

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{ddy}{dx^2}\right).$$

18. Il en est ici de même que de la vibration des cordes, dont on suppose aussi infiniment petites les excursions, et nonobstant cela les Géometres prétendent avoir bien expliqué les mouvemens des cordes. Donc aussi dans notre cas je ne chercherai que les phénomenes des agitations extrêmement petites, de sorte que la courbe qui passe par les points p', q', r' ne s'éloigne qu'infiniment peu de l'axe AE, tout comme on envisage la figure des cordes. Cette ressemblance va encore plus loin, puisque cette même équation qui exprime la propagation du son détermine aussi les ébranlemens d'une corde fixée par les termes A et E. Nous aurons donc aussi la même équation intégrale, qui dans toute son étendue est:

$$y = \Phi:(x + t\sqrt{2gh}) + \Psi:(x - t\sqrt{2gh}).$$

Cette intégrale est même complette, puisqu'elle renferme deux formes arbitraires de fonctions, tout comme la double intégration exige.

19. Pour déterminer la nature de ces deux fonctions, il en faut faire l'application aux conditions prescrites dans la question; et d'abord il est clair que, posant $t = 0$, l'équation $y = \Phi:x + \Psi:x$ exprime l'état de l'air dans le tuyau lorsqu'il reçut la premiere agitation. Donc, si nous posons que par l'agitation l'air dans le tuyau AE (Fig. 2) ait été réduit dans l'état représenté par la courbe AZE, de sorte que chaque point X ait été transporté vers E par un intervalle $= XZ$, nommant $AX = x$ et $XZ = z$, nous aurons $z = \Phi:x + \Psi:x$. Puisque z est une fonction donnée de x, soit elle $z = \Theta:x$ et nous aurons

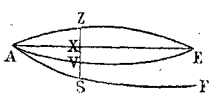


Fig. 2.

$$\Phi:x + \Psi:x = \Theta:x,$$

d'où la nature de l'une de nos deux fonctions indéterminées Φ et Ψ sera déterminée. Or il faut bien remarquer que la courbe AZE doit être dans son étendue quasi infiniment proche de l'axe AE; cependant elle doit se réunir avec l'axe aux deux extrémités A et E, de sorte que z soit très petite, et tout à fait $= 0$ aux cas $x = 0$ et $x = a$.

20. L'autre détermination doit être tirée du mouvement que toutes les particules d'air auront eu au premier moment de l'agitation. Concevons donc une autre courbe donnée AVE, dont les appliquées $XV = v$ expriment les vitesses qui ont été imprimées aux particules d'air X dans le sens XE, de sorte que v soit aussi une fonction donnée de x. Car, quelle que soit l'agitation, son premier effet sera toujours déterminé par ces deux courbes AZE et AVE, dont la premiere montre l'espace par lequel chaque particule a été transportée et l'autre montre la vitesse qui lui a été imprimée par ce mouvement. Si l'on veut que les particules d'air, ayant été poussées par les intervalles marqués, y soient arrêtées et ensuite subitement relâchées, la courbe AVE conviendra avec l'axe AE, de sorte que par tout $v = 0$. Mais toujours il faut remarquer que les vitesses en A et E doivent être $= 0$.

21. Pour profiter de cette condition, cherchons en général la vitesse d'un point quelconque qui est $\left(\frac{dy}{dt}\right)$; il faut différentier nos fonctions et, employant pour cet effet les signes suivans

$$d.\,\Phi : u = du\,\Phi' : u \quad \text{et} \quad d.\,\Psi : u = du\,\Psi' : u,$$

la formule

$$y = \Phi : (x + t\sqrt{2gh}) + \Psi : (x - t\sqrt{2gh}),$$

en ne prenant que t pour variable, donnera

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \sqrt{2gh}\,(\Phi' : (x + t\sqrt{2gh}) - \Psi' : (x - t\sqrt{2gh}))$$

et partant au commencement, où $t = 0$ et la vitesse $= v$, nous aurons

$$\frac{v}{\sqrt{2gh}} = \Phi' : x - \Psi' : x.$$

Multiplions par dx et intégrons pour avoir

$$\frac{\int v\,dx}{\sqrt{2gh}} = \Phi : x - \Psi : x,$$

où $\int v dx$ ou l'aire AXV, étant aussi une fonction donnée de x, soit elle $\int v dx = \Sigma : x$, et nous aurons cette équation:

$$\Phi : x - \Psi : x = \frac{\Sigma : x}{\sqrt{2gh}}.$$

22. Cette équation jointe à celle que nous avons trouvée ci-dessus

$$\Phi : x + \Psi : x = \Theta : x$$

déterminera la nature de toutes les deux fonctions générales Φ et Ψ par les deux fonctions données Θ et Σ, d'où nous obtiendrons

$$\Phi : x = \frac{1}{2}\Theta : x + \frac{\frac{1}{2}\Sigma : x}{\sqrt{2gh}} \quad \text{et} \quad \Psi : x = \frac{1}{2}\Theta : x - \frac{\frac{1}{2}\Sigma : x}{\sqrt{2gh}}.$$

Donc notre équation générale, qui marque après un tems quelconque t le lieu de la particule X, sera

$$y = \frac{\Theta(x + t\sqrt{2gh}) + \Theta(x - t\sqrt{2gh})}{2} + \frac{\Sigma(x + t\sqrt{2gh}) - \Sigma(x - t\sqrt{2gh})}{2\sqrt{2gh}}$$

et la vitesse de cette même particule vers E sera

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{\Theta'(x + t\sqrt{2gh}) - \Theta'(x - t\sqrt{2gh})}{2}\sqrt{2gh} + \frac{\Sigma'(x + t\sqrt{2gh}) + \Sigma'(x - t\sqrt{2gh})}{2},$$

où il faut remarquer que $\Sigma' : x = v$, puisque $\Sigma : x = \int v dx$.

23. Maintenant toute la solution seroit déterminée, si les deux extrémités A et E étoient éloignées à l'infini. Car, décrivant encore une autre courbe ASF dont les appliquées XS expriment les aires AXV, de sorte que $XS = \Sigma : x$, on pourroit prendre dans les deux courbes [ASF et] AZE, où $XZ = \Theta : x$, les appliquées qui répondent à toutes les abscisses $x + t\sqrt{2gh}$ et $x - t\sqrt{2gh}$ et de là on auroit pour tous les momens les quantités y qui conviennent à chaque particule d'air X. Mais, dès que le fil d'air AE est terminé par les points A et E, au delà desquelles l'agitation ne sauroit être communiquée, ces courbes formées sur le premier état de l'air ne fournissent plus les appliquées qui répondent aux abscisses $x + t\sqrt{2gh}$, quand elles sont plus

grandes que $AE = a$, ni aux abscisses $x - t\sqrt{2gh}$, quand elles sont négatives. Il ne s'agit pas ici de la continuation naturelle de ces courbes, qui n'entre en aucune considération, puisque les courbes données AZE et ASF pourroient être même discontinues.

24. Nous avons donc besoin de quelques déterminations accessoires, qui nous découvrent les véritables appliquées de nos deux courbes données, lorsqu'on prend, ou l'abscisse plus grande que $AE = a$, ou négative. Pour cet effet nous n'avons qu'à regarder les conditions mentionnées ci-dessus, que prenant ou $x = 0$ ou $x = a$, l'appliquée y doit toujours demeurer $= 0$; d'où nous tirons

$$\Theta : t\sqrt{2gh} + \Theta : -t\sqrt{2gh} + \frac{\Sigma : t\sqrt{2gh} - \Sigma : -t\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh}} = 0$$

et

$$\Theta : (a + t\sqrt{2gh}) + \Theta : (a - t\sqrt{2gh}) + \frac{\Sigma : (a + t\sqrt{2gh}) - \Sigma : (a - t\sqrt{2gh})}{\sqrt{2gh}} = 0.$$

Ayant donc une abscisse, ou plus grande que a, comme $a + u$, ou négative comme $-u$, nous aurons

$$\Theta : (a + u) + \frac{\Sigma : (a + u)}{\sqrt{2gh}} = -\Theta : (a - u) + \frac{\Sigma : (a - u)}{\sqrt{2gh}}$$

et

$$\Theta : (-u) - \frac{\Sigma : (-u)}{\sqrt{2gh}} = -\Theta : u - \frac{\Sigma : u}{\sqrt{2gh}},$$

d'où l'on pourra toujours assigner ces appliquées par celles qui se trouvent actuellement entre les limites A et E.

DE LA PROPAGATION DU SON

25. Maintenant, pour expliquer la propagation du son par la ligne AE (Fig. 3), supposons que par quelque force une petite partie d'air mn ait été ébranlée et mise dans l'état représenté par la petite courbe mon, où l'air ayant été en repos soit relâché subitement, tandis que le reste en Am et nE soit

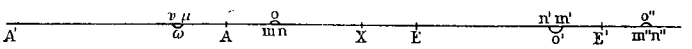


Fig. 3.

encore dans un parfait équilibre, et voyons comment ce dérangement se communique successivement avec les autres particules de l'air. Dans cette hypothese la fonction Σ évanouit et il ne reste que la fonction Θ, qui exprime les appliquées de la courbe *mon*, tant que les abscisses tombent dans l'espace *mn*. Or, puisqu'au commencement, où $t = 0$, les particules d'air hormis l'espace *mn* sont en équilibre, la ligne entiere qui représente cet état initial sera composée de la droite Am, de la courbe *mon* et de la droite nE et partant une ligne mixtiligne $AmonE$, dans laquelle, prenant une abscisse $= u$, l'appliquée donnera la valeur de $\Theta : u$. Ensuite, puisque $\Theta : (-u) = -\Theta : u$, il faut dans la continuation précédente $AA' = a$ concevoir la même ligne $A\mu\omega\nu A'$ dans une situation renversée. De plus, puisque

$$\Theta : (a + u) = -\Theta : (a - u),$$

il faut dans la continuation EE' établir la même ligne aussi renversée et ainsi de suite pour les autres intervalles $= a$ pris sur cette ligne de part et d'autre.

26. De là on voit que l'appliquée $\Theta : u$ sera toujours $= 0$, à moins que l'abscisse u, à compter depuis le point A en droite, ne tombe

$$\text{ou entre les limites } \begin{cases} Am \\ An \end{cases} \text{ ou entre } \begin{cases} An' \\ Am' \end{cases} \text{ ou entre } \begin{cases} Am'' \\ An'' \end{cases} \text{ etc.}$$

$$\text{ou entre } \begin{cases} -A\mu \\ -A\nu \end{cases} \text{ ou entre } \begin{cases} -A\nu' \\ -A\mu' \end{cases} \text{ etc.}$$

Donc, si nous posons $Am = m$ et $An = n$, ces limites hors desquelles l'appliquée $\Theta : u$ est partout $= 0$, seront

$$\text{ou } \begin{cases} m \\ n \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2a - n \\ 2a - m \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2a + m \\ 2a + n \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 4a - n \\ 4a - m \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 4a + m \\ 4a + n \end{cases} \text{ etc.}$$

$$\text{ou } \begin{cases} -m \\ -n \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -2a + n \\ -2a + m \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -2a - m \\ -2a - n \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -4a + n \\ -4a + m \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -4a - m \\ -4a - n \end{cases} \text{ etc.}$$

En général donc deux limites quelconques seront

$$\begin{cases} \pm 2ia \pm m \\ \pm 2ia \pm n \end{cases}$$

et à moins que l'abscisse u ne tombe entre deux telles limites, l'appliquée $\Theta : u$ sera toujours $= 0$.

27. Prenons à présent un point quelconque X sur la droite AE, posant $AX = x$, et cherchons les agitations qu'il subira, que nous connoitrons par la quantité y dont la valeur après le tems t est

$$y = \tfrac{1}{2}\Theta : (x + t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Theta : (x - t\sqrt{2gh}),$$

et d'abord nous voyons que le premier membre est $= 0$, à moins que $x + t\sqrt{2gh}$ ne tombe entre les limites

$$\begin{cases} m \\ n \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2a-n \\ 2a-m \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2a+m \\ 2a+n \end{cases} \text{ etc.}$$

Or, l'autre membre évanouit toujours, à moins que la quantité $x - t\sqrt{2gh}$ ne tombe entre les limites $\begin{cases} m \\ n \end{cases}$ ou son négatif $t\sqrt{2gh} - x$ entre

$$\begin{cases} m \\ n \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2a-n \\ 2a-m \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2a+m \\ 2a+n \end{cases} \text{ etc.}$$

Donc, si nous supposons $AX = x > n$, cette particule demeurera en repos jusqu'à ce qu'il devienne

$$x - t\sqrt{2gh} = n \quad \text{ou} \quad t = \frac{x-n}{\sqrt{2gh}}.$$

Ce n'est donc qu'après ce tems, que la particule en X commence à s'ébranler et ensuite elle sera rétablie en repos après le tems $\frac{x-m}{\sqrt{2gh}}$, de sorte que l'ébranlement durera un tems $\frac{n-m}{\sqrt{2gh}}$. D'où l'on voit que chaque particule d'air n'est ébranlée que pendant un très petit tems selon l'étendue de l'agitation initiale mn, et c'est alors que le son y est senti.

28. Il faut donc un tems $t = \frac{x-n}{\sqrt{2gh}}$, avant que le son parvienne de n en X, ou qu'il soit transmis par l'espace $nX = x - n$. D'où l'on voit que ce tems est proportionel à l'espace, tout comme on le sait par l'expérience. J'ai déjà remarqué que le tems t est exprimé en secondes, si l'on prend pour g la hauteur d'où tombe un corps grave dans une seconde; donc, pendant une seconde, posant $t = 1$, le son sera transmis par un espace $= \sqrt{2gh}$. Or on sait que $g = 15\frac{5}{8}$ pieds de Rhin, et si le ressort de l'air est contrebalancé

par une colonne d'eau de 32 pieds, en supposant l'eau 800 fois plus pesante que l'air, la hauteur h sera $= 32 \cdot 800$ pieds, d'où l'on trouve

$$\sqrt{2gh} = \sqrt{31\tfrac{1}{4} \cdot 32 \cdot 800} = 400\sqrt{5} = 894 \text{ pieds.}$$

Or on sait que le son est transmis dans une seconde par un espace de presque 1100 pieds et personne n'a encore bien découvert la cause de cette accélération sur la théorie.

29. Mais, après que la particule d'air en X a été ébranlée la premiere fois, elle sera depuis mise en agitation encore plusieurs et même une infinité de fois, car elle se trouvera agitée toutes les fois que le tems écoulé t sera contenu entre les limites suivantes:

$$t\sqrt{2gh} = \begin{cases} x+m, & 2a-n-x, & 2a-n+x, & 2a+m-x, & 2a+m+x \text{ etc.} \\ x+n, & 2a-m-x, & 2a-m+x, & 2a+n-x, & 2a+n+x \text{ etc.} \end{cases}$$

Si la ligne AE n'étoit point du tout terminée, la particule en X ne seroit ébranlée qu'une seule fois; si elle n'étoit terminée qu'à une extremité A, la distance $AE = a$ étant infinie, elle recevroit encore un ébranlement après le tems $= \frac{x+m}{\sqrt{2gh}}$, ce qui est l'explication d'un écho simple. Mais, si la ligne AE est terminée par les deux bouts A et E, l'ébranlement arrivera plusieurs fois de suite, ce qui sert à expliquer les échos réitérés. Pour cet effet, il faut que les dernieres particules d'air en A et E ne soient succeptibles d'aucun ébranlement, ce qui est une condition nécessaire pour la production des échos.

30. Puisque nous avons trouvé

$$y = \tfrac{1}{2}\Theta : (x + t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Theta : (x - t\sqrt{2gh}),$$

il faut encore remarquer que l'ébranlement de la particule X n'est que la moitié de celui dont la particule mn a été primitivement agitée. Car la quantité y ne reçoit de grandeur que lorsque l'un ou l'autre membre tombe dans l'intervalle mn et puisque tous les deux n'y sauroient tomber à la fois, la quantité y ne deviendra égale qu'à la moitié de l'appliquée dans l'intervalle mn, d'où il s'ensuit que les agitations de la particule X sont deux

fois plus foibles que l'agitation primitive dans la particule *mn*. Cela est aussi une suite nécessaire du principe, que l'effet ne sauroit être plus grand que la cause; car, puisque l'agitation originaire en *mn* se communique également vers *A* et *E*, à chaque instant il y aura deux particules également éloignées de part et d'autre de *mn* qui seront ébranlées, dont les mouvemens pris ensemble doivent être égaux au mouvement primitif en *mn*, de sorte que chacun n'en puisse être que la moitié. Mais cette diminution sera bien plus grande, quand l'agitation en *mn* sera répandue en tous sens; d'où l'on voit que les sons transmis par un tuyau doivent être plus forts.

EXPLICATION D'UN PARADOXE

31. Il se présente ici un doute, qui n'est pas si facile à lever; il semble que l'agitation qui se trouve à présent en *X*, pourroit être regardée comme l'agitation primitive en *mn* et qu'elle devroit être transmise aussi bien en arriere qu'en avant; cependant cela n'arrive pas, puisque nous venons de voir, que l'agitation qui est à présent en *X*, se transmet successivement en avant vers *E* et point du tout en arriere vers *A*; il en est de même des agitations, qui de *mn* se répandent en sens contraire vers *A*, qui sont transmises dans le même sens, sans qu'elles engendrent de nouvelles agitations en sens contraire. Je fais ici abstraction des limites *A* et *E*, ou je les considère comme éloignées à l'infini, puisque je ne les ai introduites dans le calcul que pour expliquer les *échos*. On demandera donc avec raison, quelle est la différence entre l'agitation primitive en *mn* et celle qui en est engendrée depuis en *X*: car, si tout est en repos excepté les particules auprès de *X*, qui se trouvent déplacées de leur état naturel, il semble que cette agitation pourroit être envisagée comme la primitive et qu'elle devroit se communiquer aussi bien vers *A* que vers *E*. Cependant cela seroit tout à fait contraire à l'expérience et l'on sait qu'il y a une grande différence entre le lieu où le son est engendré et ceux où il est apperçu.

32. Il faut donc qu'il y ait une différence essentielle entre l'agitation communiquée aux particules d'air en *X* et l'agitation primitive en *mn*; et tout revient à découvrir cette différence. Or, ayant introduit dans le calcul l'agitation primitive en *mn*, j'y ai supposé une restriction, en négligeant les fonctions marquées par le signe Σ, qui renferme cette condition, que les parti-

cules de l'espace mn, ayant été déplacées de leur situation naturelle, se soient trouvées sans aucun mouvement et que de cet état elles ayent été relâchées subitement. De là il faut bien conclure que, si les particules de X, après avoir été déplacées, se trouvoient tout à la fois en repos, il en devroit résulter le même effet que de l'agitation primitive en mn. Mais, quoique chaque particule de X, étant parvenue à sa plus grande digression, y soit réduite en repos, cela n'arrive pas dans toutes les particules qui sont autour de X au même instant et partant c'est ici, sans doute, qu'il faut chercher l'explication de notre difficulté.

33. De là on comprend que la propagation dépend non seulement du déplacement des particules en mn, mais aussi du mouvement qui leur aura été imprimé au premier instant, qui influe tant sur la propagation, que dans un certain cas elle ne se fait que dans un sens. Il est donc bien important de traiter ce sujet dans toute son étendue, sans négliger les fonctions du signe Σ. Pour cet effet je ne me bornerai pas à une ligne ou tuyau terminé et je le supposerai infini, puisqu'il ne s'agit plus des échos. Qu'au commencement donc les particules d'air contenues dans l'espace mn (Fig. 4) ayent

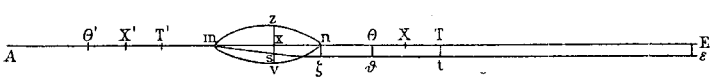


Fig. 4.

été ébranlées, en sorte que le point x ait été transporté vers E par un espace $= xz$ appliquée de la courbe donnée mzn, et qu'à ce même point ait été imprimée alors une vitesse $= xv$ aussi dans le même sens vers E, où xv, appliquée de la courbe donnée mvn, exprime l'espace que cette vitesse parcouroit dans une seconde. Qu'on forme par la quadrature de cette courbe mvn une nouvelle, $ms\zeta$, en sorte que son appliquée $xs = \frac{mxv}{\sqrt{2gh}}$, et puisque la ligne de vitesse mvn se confond de part et d'autre de l'espace mn avec l'axe même mA et nE, la continuation de la courbe $ms\zeta$ sera vers A l'axe même mA et vers E la droite $\zeta\varepsilon$ parallele à l'axe nE.

34. Cela posé, prenant un point quelconque X et posant $AX = x$, après le tems $= t$ il sera poussé vers E par un espace y, de sorte que

$$y = \tfrac{1}{2}\Theta:(x+t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Theta:(x-t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Sigma:(x+t\sqrt{2gh}) - \tfrac{1}{2}\Sigma:(x-t\sqrt{2gh}),$$

puisqu'ici le dénominateur $\sqrt{2gh}$ qui se trouve § 22 est déjà renfermé dans la fonction Σ. Or ici Θ marque les appliquées de la courbe mzn, qui de part et d'autre de l'espace mn se confond avec l'axe, de sorte que $\Theta : u$ est toujours zéro, à moins que u ne soit compris entre les limites Am et An, où A est un point fixe pris à volonté, d'où je compte les abscisses, sans que le tuyau y soit terminé ou fermé. De la même maniere, le caractere Σ marque les appliquées de la ligne $Amsζε$, de sorte que la valeur de $\Sigma : u$ est zéro, quand $u < Am$, et égale à $nζ = Eε$, quand $u > An$. Or, si u se trouve entre ces deux limites, comme si $u = Ax$, alors on aura $\Sigma : u = xs$. Il n'est pas besoin d'avertir que, si quelque appliquée tomboit en sens contraire, qu'elle est représentée dans la figure, il la faudroit considérer comme négative.

35. Considérons premierement un point X plus éloigné du point fixe A que l'intervalle mn, et puisque $AX = x$, prenons de part et d'autre les intervalles $XT = X\Theta = t\sqrt{2gh}$, pour avoir $AT = x + t\sqrt{2gh}$ et $A\Theta = x - t\sqrt{2gh}$, et il est clair que, tant que $X\Theta < Xn$, il y aura

$$y = \tfrac{1}{2} Tt - \tfrac{1}{2} \Theta\vartheta = 0,$$

puisque

$$\Theta : AT = 0, \quad \Theta : A\Theta = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma : AT = Tt, \quad \Sigma : A\Theta = \Theta\vartheta.$$

Or, quand le point Θ tombe dans l'espace mn, ou que $X\Theta = t\sqrt{2gh} = Xx$, on aura

$$\Theta : AT = 0, \quad \Theta : Ax = xz, \quad \Sigma : AT = Tt = nζ \quad \text{et} \quad \Sigma : Ax = xs$$

et partant

$$y = \tfrac{1}{2}(xz + nζ - xs),$$

qui est l'espace par lequel le point X sera transporté de son lieu naturel vers E après le tems $t = \frac{Xx}{\sqrt{2gh}}$. Mais, après le tems $t = \frac{Xm}{\sqrt{2gh}}$, on aura

$$y = \tfrac{1}{2} nζ,$$

qui demeurera aussi la valeur de y, lorsque $t > \frac{Xm}{\sqrt{2gh}}$; de sorte que depuis ce tems il sera en repos, quoiqu'éloigné de son lieu naturel de l'espace

$= \frac{1}{2} n\zeta$, son agitation n'ayant duré que depuis le tems $t = \frac{Xn}{\sqrt{2gh}}$ jusqu'au tems $t = \frac{Xm}{\sqrt{2gh}}$.

36. Considérons maintenant un point quelconque X' de l'autre côté de l'espace ébranlé mn, de sorte que $AX' = x$, et, prenant de part et d'autre les intervalles égaux $X'T' = X'\Theta' = t\sqrt{2gh}$, on voit que, tant que $X'T' < X'm$, ou $t < \frac{X'm}{\sqrt{2gh}}$, le point X' restera en repos; mais, si T' avance en x, de sorte que $t = \frac{X'x}{\sqrt{2gh}}$, à cause de

$$\Theta : Ax = xz, \quad \Theta : A\Theta' = 0, \quad \Sigma : Ax = xs \quad \text{et} \quad \Sigma : A\Theta' = 0,$$

on aura

$$y = \tfrac{1}{2} xz + \tfrac{1}{2} xs = \tfrac{1}{2}(xz + xs),$$

et après le tems $t = \frac{X'n}{\sqrt{2gh}}$ on aura

$$y = \tfrac{1}{2} n\zeta,$$

qui demeurera depuis constamment la valeur de y, de sorte que cette particule X' aussi, après avoir été ébranlée, se trouvera éloignée de son lieu naturel vers E de l'intervalle $= \frac{1}{2} n\zeta$. Donc, après que tous les ébranlemens seront passés, toute la ligne d'air AE sera avancée dans la direction AE de l'intervalle $\frac{1}{2} n\zeta$.

37. De là on voit que les ébranlemens des particules X et X', dont l'une est en deça et l'autre au delà de l'agitation primitive mn, sont tout à fait différentes, vu qu'en X le plus grand déplacement est $= \frac{1}{2}(xz - xs + n\zeta)$ et en X' $= \frac{1}{2}(xz + xs)$, et partant dans ce cas le son est tout autrement transmis en avant qu'en arriere, au lieu que, dans le cas précédent, où les vitesses primitives xv évanouissoient, la propagation étoit de part et d'autre la même. Mais on voit de plus, qu'il seroit possible que la propagation se fît seulement dans un sens; ce qui arriveroit, s'il y avoit par tout l'espace mn $xz - xs + n\zeta = 0$. Pour cet effet, puisque xz et xs évanouissent en m, il faudroit qu'il fût $n\zeta = 0$ et $xs = xz$. Posant donc

$$xz = z, \quad xv = v \quad \text{et} \quad xs = \frac{\int v\,dx}{\sqrt{2gh}},$$

cette condition exige qu'il soit

$$z\sqrt{2gh} = \int v dx \quad \text{et} \quad v = \frac{dz\sqrt{2gh}}{dx}.$$

Dans ce cas la courbe $ms\zeta$ sera égale et semblable à l'autre mzn et se rejoindra en n avec l'axe, de sorte que $n\zeta = 0$. Alors les particules X situées d'une part de l'espace ébranlé mn vers E, n'en seront point ébranlées et la propagation ne se fera que vers l'autre part de m vers A.

38. Or, c'est précisément le cas des ébranlemens qui sont produits par une agitation primitive quelconque, lesquels sont toujours tels que, quand même ils seraient primitifs, ils ne se communiqueroient que dans un sens. Pour s'en asseurer on n'a qu' à donner à z la valeur de y trouvée ci-dessus et à v la valeur de $\left(\frac{dy}{dt}\right)$; alors on aura

$$z = \tfrac{1}{2}\Theta:(x+t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Theta:(x-t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Sigma:(x+t\sqrt{2gh}) - \tfrac{1}{2}\Sigma:(x-t\sqrt{2gh}),$$

$$\frac{v}{\sqrt{2gh}} = \tfrac{1}{2}\Theta':(x+t\sqrt{2gh}) - \tfrac{1}{2}\Theta':(x-t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Sigma':(x+t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Sigma':(x-t\sqrt{2gh}),$$

et prenant le différentiel de z, en ne supposant que x variable,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \tfrac{1}{2}\Theta':(x+t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Theta':(x-t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Sigma':(x+t\sqrt{2gh}) - \tfrac{1}{2}\Sigma':(x-t\sqrt{2gh}).$$

Or, il n'y a toujours, comme nous avons vu ci-dessus, que l'une des deux abscisses $x + t\sqrt{2gh}$ ou $x - t\sqrt{2gh}$ à laquelle réponde une appliquée finie. Donc, si c'est la premiere, il y aura évidemment

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{v}{\sqrt{2gh}};$$

et partant une telle agitation ne sauroit se communiquer que dans un seul sens. Voilà donc la véritable explication du paradoxe proposé.

POURQUOI PLUSIEURS SONS NE SONT PAS CONFONDUS

39. De là on comprend clairement la raison, pourquoi plusieurs sons ne sont pas confondus, question qui a de tout tems tourmenté les Physiciens. La théorie du grand NEWTON, quoique juste au fond, ne paroit pas suffisante

pour expliquer ce phénomene, puisqu'elle ne détermine point la véritable nature des ébranlemens auxquels toutes les particules de l'air sont assujetties. M. DE MAIRAN[1]) s'est imaginé que chaque son, selon qu'il est grave ou aigu, n'est transmis que par certaines particules d'air, dont le ressort lui est convenable. Mais, outre que l'état d'équilibre demande absolument que toutes les particules d'air soient douées d'un même degré de ressort, cette explication est renversée par les premiers principes sur lesquels notre théorie est fondée et dont la certitude ne sauroit être révoquée en doute. En effet, la propagation ne se rapporte qu'à un seul ébranlement excité dans l'air et il n'importe pas, si celui-ci est suivi des autres ou non, et encore moins dépend-elle de l'ordre de leur succession, d'où l'on juge le grave et l'aigu des sons.

40. Pour s'éclaircir entierement là dessus on n'a qu'à supposer plusieurs agitations primitives a, b, c, d, α, β etc. sur la ligne droite AE (Fig. 5) et, en



Fig. 5.

considérant une particule d'air quelconque en P, on voit par ce que je viens d'expliquer que l'agitation α lui sera communiquée après le tems $\frac{P\alpha}{\sqrt{2gh}}$; ensuite elle recevra l'agitation a après le tems $\frac{Pa}{\sqrt{2gh}}$ et ainsi des autres, de sorte que chaque agitation est transmise par la même particule P dans un tems déterminé et une oreille placée en P percevra tous ces ébranlemens, sans que les uns soient troublés par les autres. Il pourra aussi arriver que deux ébranlemens arrivent au même instant à la même particule, comme O, les distances aO et αO étant égales; mais alors cette particule sera tout autrement ébranlée, que si elle recevoit une simple agitation, et elle communiquera ensuite son ébranlement tant en avant qu'arriere. Or, c'est précisément le cas où l'on devroit penser que les agitations se confondissent, ce qui n'arrive pas pourtant, aussi peu en O qu'en tout autre point P.

1) J. J. DORTOUS DE MAIRAN (1678—1771), *Discours sur la propagation du son*, Mém. de l'acad. d. sc. de Paris, 1737. F. R.

REFLEXIONS SUR LA THEORIE PRECEDENTE

41. D'abord il faut remarquer que je n'ai ici considéré la propagation que sur une ligne droite, ou comme si l'air étoit renfermé dans un tuyau cylindrique fort étroit; d'où l'on pourroit penser que dans un air libre elle devroit suivre des loix tout à fait différentes. Du moins est-il évident que les agitations, étant répandues en tous sens, doivent diminuer bien plus considérablement que dans le cas d'un tuyau; mais, pour ce qui regarde la nature des ébranlemens et la vitesse dont elles sont transmises à des distances quelconques, il semble certain qu'il en sera de même dans l'air libre que dans un air renfermé dans un tuyau; car, puisque le son, de même que la lumiere, se communique par des lignes droites, qu'on peut nommer des rayons sonores, la transmission par chacune de ces lignes droites doit suivre les mêmes regles que je viens de découvrir, avec cette seule différence que les agitations deviendront d'autant plus foibles, plus sera grande la distance. Cependant il seroit fort à souhaiter qu'on fût en état de résoudre le même probleme dans le cas d'un air libre.

42. En second lieu, c'est toujours une grande difficulté, que le son parcourt effectivement un plus grand espace que celui que la théorie indique; je reconnois à présent que les ébranlemens suivans n'en sauroient être la cause, comme je me l'étois imaginé autrefois. Mais il faut bien comparer le cas de l'expérience avec celui auquel la théorie est adstreinte. Sans prétendre que l'air libre puisse causer cette différence, il faut se souvenir que notre calcul suppose des agitations quasi infiniment petites, qui produiroient des sons trop foibles, pour qu'on puisse observer la distance de leur propagation pendant une seconde. Donc, puisque les sons qu'on a employés dans les expériences sont produits par des agitations très fortes, il est fort vraisemblable que dans l'équation principale § 17, qui est

$$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

il n'est plus permis de négliger le terme $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, comme j'ai fait dans le calcul précédent. Peut-être que c'est ici qu'il faudroit chercher le développement de cette difficulté.

43. Enfin, quoique ce soit à Mr. DE LA GRANGE qu'on est redevable de cette importante découverte, je me flatte que ce Mémoire ne manque pas de recherches très intéressantes. Car, outre que mon analyse est très simple, j'y ai mis dans tout son jour l'usage des fonctions discontinues, contesté par quelques grands Géometres, mais qui est absolument nécessaire toutes les fois qu'il s'agit de trouver par intégration des fonctions de deux ou plusieurs variables, et que l'on demande une solution générale. Ensuite, quoique la résolution soit semblable à celle des cordes vibrantes, que j'ai donnée autrefois, j'ai ici déterminé avec plus d'exactitude les fonctions arbitraires par les conditions propres à la nature de la question. Mais aussi cette solution appliquée aux cordes est plus générale, puisque pour l'état initial on ne peut pas seulement donner à la corde une figure quelconque, mais aussi à tous ses élémens un mouvement quelconque; ce que je n'avois pas remarqué dans mon Mémoire là dessus, ni même ceux qui ont traité la même matiere. Enfin je crois que l'explication du paradoxe, que les ébranlemens causés par la propagation du son sont d'une nature tout à fait différente que les primitifs, nous fournit des éclaircissemens très considérables dans cette matiere épineuse.

INDEX NOMINUM

ADAM, CH., 22
D'ALEMBERT, J. L., 431, 510
ARISTOTELES, 183, 199
ARISTOXENUS, 199, 252, 296
BERNOULLI, D., 64, 175, 182
BERNOULLI, JOH., 64, 189
BURKHARD, E., 181
CARTESIUS vide DESCARTES
DERHAM, W., 187
DESCARTES, R., 22, 46, 183
DUTENS, L., 332
ENESTROEM, G., 80
ENESTROEMIANUS, passim (Index ENESTROEMIANUS Commentationum EULERI)
EPICURUS, 183
EULER, L., 4, 5, 80 (Commentationes 145, 146, 176, 181, 182, 186, 197, 198, 199, 200 indicis ENESTROEMIANI), 202 (Comment. 71), 210 (Comment. 71, *Introd. in anal. infin.*), 429 (Comment. 119, 140), 508 (*Tentamen*), 516 (*Tentamen*), 540 (Comment. 2, 305, 306, 307, 151), 541 (Comment. 2, 305, 306, 307), 547 (Comment. 305), 567 (Comment. 852), 568 (*Tentamen*), 577 (Comment. 314, 315), 587 (*Lettres à une princesse d'Allemagne*)
FABRI, H., 183
FLAMSTEED, J., 187
GOLDBACH, CHR., 332, 515
HALLEY, E., 187
KANT, I., 64
KIRCHER, A., 566
LAGRANGE, J. L., 428, 429, 430, 431, 433, 451, 541
LAMB, H., 175
LEIBNIZ, G., 332, 515, 518, 525
MAIRAN, J. J. D. DE, 449
MARQUARD, 199
MATTHESON, J., 306
MAUPERTUIS, P. L. M. DE, 80
MEIBOM, 199
MERCURIUS, 293, 294, 295, 296, 300
METIUS, 210
MEURSIUS, 199
NEWTON, I., 4, 7, 183, 187, 196, 428, 429, 448, 555
PTOLEMAEUS, 203, 251, 294, 295, 296, 298
PYTHAGORAS, 199, 202, 250, 251, 252, 296, 303, 321
RAMEAU, J. PH., 510, 524
RICCATI, I., 485, 488
RIEMANN, H., 199
SAUVEUR, J., 221
SERRET, J. A., 428
TANNERY, P., 22
TAYLOR, B., 189
TORRICELLI, E., 218
WALLIS, J., 251