Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Opera physica miscellanea epistolae. Volumen

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

primum, Leonhardi Euleri commentationes physicae

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

ad physicam generalem et [...]

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

BnF Gallica

Euler, Leonhard (1707-1783). Opera physica miscellanea epistolae. Volumen primum, Leonhardi Euleri commentationes physicae ad physicam generalem et ad theoriam soni pertinentes / ediderunt Eduard Bernoulli, Rudolf Bernoulli, Ferdinand Rubio,... [et al.]. 1926.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au

sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le

producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter **reutilisationcommerciale@bnf.fr**.

LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA
SUB AUSPICIIS SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE
EDENDA CURAVERUNT
F. RUDIO · A. KRAZER · A. SPEISER · L. G. DU PASQUIER

SERIES TERTIA · OPERA PHYSICA · VOLUMEN PRIMUM

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES PHYSICAE

AD PHYSICAM GENERALEM ET AD THEORIAM SONI PERTINENTES

EDIDERUNT

EDUARD BERNOULLI RUDOLF BERNOULLI
FERDINAND RUDIO ANDREAS SPEISER

ADIECTA EST EULERI EFFIGIES
AD IMAGINEM A DARBES PICTAM EXPRESSA

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXVI

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

LEONHARDI EULERI

OPERA OMNIA

LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

FERDINAND RUDIO
ADOLF KRAZER ANDREAS SPEISER
LOUIS GUSTAVE DU PASQUIER

SERIES TERTIA

OPERA PHYSICA MISCELLANEA EPISTOLAE

VOLUMEN PRIMUM

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXVI

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES PHYSICAE

AD PHYSICAM GENERALEM ET AD THEORIAM SONI PERTINENTES

EDIDERUNT

EDUARD BERNOULLI RUDOLF BERNOULLI
FERDINAND RUDIO ANDREAS SPEISER

ADIECTA EST EULERI EFFIGIES
AD IMAGINEM A DARBES PICTAM EXPRESSA

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXVI

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

CONTINUATION DES RECHERCHES SUR LA PROPAGATION DU SON

Commentatio 307 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [15] (1759), 1766, p. 241—264

1. Dans les deux Mémoires précédens sur cette matiere j'ai suffisamment fait sentir, combien il seroit important, si l'on pouvoit déterminer par la théorie la propagation du son en considérant l'air étendu en tout sens; et qu'on pût réussir dans cette hypothese aussi bien que dans celle où l'on ne supposoit à l'air qu'une seule dimension selon une ligne droite. Après avoir expliqué la propagation du son dans cette hypothese d'une seule dimension, dans mon premier Mémoire sur cette matiere, j'ai tâché de traiter ce même sujet dans le supplément, en supposant d'abord à l'air deux dimensions suivant un plan et ensuite en introduisant dans le calcul toutes les trois dimensions. J'ai aussi réussi à trouver des formules analytiques qui contiennent tous les mouvemens possibles dont l'air est susceptible; mais l'application à la question proposée me parut trop difficile, pour que j'en eusse osé espérer un heureux succès.

2. Quand je considérai seulement deux dimensions, j'avois bien appliqué les formules trouvées au cas où la premiere agitation se fait quasi dans un point, d'où les ébranlemens se répandent ensuite par des cercles concentriques partout également, puisque c'est en particulier le cas de la propagation du son. Mais la formule que j'y ai trouvée est assujettie à des difficultés si grandes, que je n'ai vu aucun moyen pour les surmonter; et ayant fait la même application dans l'hypothese de trois dimensions, je pouvois d'autant

moins espérer qu'il me seroit possible de développer la formule qui détermine les ébranlemens répandus en tout sens d'un point fixe par des surfaces sphériques concentriques.

3. Cependant c'est précisément ici, comme je l'ai remarqué depuis, que les difficultés ne sont pas invincibles; et c'est là qu'a lieu un cas semblable à ceux que le Comte RICCATI[1]) a proposés autrefois, où une certaine équation devient intégrable, pendant qu'en général elle ne l'est pas. Cette découverte est d'autant plus importante, qu'elle me mit bientôt en état de déterminer parfaitement la propagation du son, dans l'hypothese que l'air est répandu en tout sens; ce qui m'a paru jusque là presque impossible. Il n'y a aussi aucun doute qu'ayant surmonté ce grand obstacle, on ne parvienne enfin à une méthode de résoudre directement les formules que j'avois trouvées pour la communication des ébranlemens dans l'air et peut être même des formules plus compliquées du même genre, d'où la partie la plus sublime des Mathématiques retireroit les plus grands avantages.

4. Soit A (Fig. 1) le centre de l'agitation primitive, qui se répande successivement par des couches concentriques en tout sens; soit $AP = AV = V$ le rayon d'une surface sphérique quelconque PV dans l'état d'équilibre, laquelle,

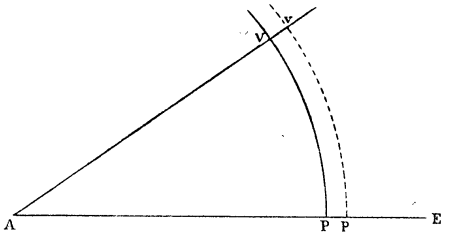


Fig. 1.

après le tems $= t$, prenne la situation pv, dont le rayon soit $Ap = Av = V + u$, où l'intervalle $Pp = Vv = u$, que je suppose extrêmement petit, et il s'agit de déterminer cet intervalle u par le rayon naturel $AV = V$ et le tems

1) I. RICCATI (1676—1754). Voir par ex. la note 1 p. 279 dans *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 11. F. R.

t écoulé depuis l'agitation. Cela posé, j'ai trouvé dans le § 45 du Mémoire précédent, posant $s = \frac{u}{V}$ ou $u = Vs$, cette équation[1])

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right);$$

ou bien, en remettant pour s sa valeur $\frac{u}{V}$, le paragraphe suivant a fourni cette équation[1])

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = -\frac{2u}{VV} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right),$$

où h est la hauteur d'une colonne d'air dont le poids est en équilibre avec l'élasticité de l'air, g marque la hauteur d'où les corps tombent dans une seconde, exprimant le tems t en secondes.

5. Si l'on ne supposoit à l'air que deux dimensions selon un plan et que les ébranlemens se répandissent par des cercles concentriques, en conservant les mêmes dénominations, on auroit à résoudre cette équation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{3}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right),$$

qui me paroit irrésoluble, du moins par la même méthode qui réussit dans l'équation précédente. Pour faire mieux sentir cette différence, considérons ces équations sous une forme plus générale

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{n}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

et voyons comment il faudroit s'y prendre pour trouver la fonction des deux variables V et t à laquelle est égale la variable s. Je me servirai d'une méthode, qui semble pouvoir être employée avec succès dans toutes sortes de semblables équations où le tems entre en considération et qui consiste à éliminer tout à fait le tems.

6. Pour cet effet, je pose

$$s = P\sin(\alpha t + \mathfrak{A}),$$

1) Voir p. 481—482 de ce volume. F. R.

où P soit une fonction de la seule variable V, et puisqu'on aura

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \alpha P \cos(\alpha t + \mathfrak{A}), \quad \left(\frac{dds}{dt^2}\right) = -\alpha\alpha P \sin(\alpha t + \mathfrak{A}),$$

$$\left(\frac{ds}{dV}\right) = \frac{dP}{dV} \sin(\alpha t + \mathfrak{A}), \quad \left(\frac{dds}{dV^2}\right) = \frac{ddP}{dV^2} \sin(\alpha t + \mathfrak{A}),$$

notre équation deviendra divisible par $\sin(\alpha t + \mathfrak{A})$ et sera

$$-\frac{\alpha\alpha P}{2gh} = \frac{ndP}{VdV} + \frac{ddP}{dV^2},$$

qui ne contient que deux variables V et P, où le différentiel dV est pris constant. Il s'agit donc de résoudre cette équation différentio-différentielle, qui, posant

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh} = mm,$$

prendra cette forme

$$mmPdV^2 + \frac{ndVdP}{V} + ddP = 0,$$

qui a cette propriété, que la variable P n'a partout qu'une seule dimension.

7. Donc, posant

$$P = e^{\int p dV} \quad \text{ou} \quad \frac{dP}{P} = pdV,$$

cette équation sera réduite à une différentielle du premier degré

$$mmdV + \frac{npdV}{V} + dp + ppdV = 0,$$

laquelle, posant

$$V^n p = q \quad \text{ou} \quad p = \frac{q}{V^n},$$

se transforme en celle-ci

$$\frac{dq}{V^n} + \frac{qqdV}{V^{2n}} + mmdV = 0$$

ou

$$dq + \frac{qqdV}{V^n} + mmV^n dV = 0.$$

Posons de plus $V^{n-1} = \frac{1}{r}$, pour avoir

$$\frac{1}{V^{n-1}} = r \quad \text{et} \quad -\frac{(n-1)dV}{V^n} = dr,$$

et puisque

$$V = r^{\frac{-1}{n-1}}, \quad \text{donc} \quad V^{2n} = r^{\frac{-2n}{n-1}},$$

nous aurons

$$-(n-1)V^n dV = r^{\frac{-2n}{n-1}} dr$$

et partant notre équation prendra cette forme

$$dq - \frac{qqdr}{n-1} - \frac{mm}{n-1} r^{\frac{-2n}{n-1}} dr = 0,$$

qui est la même qu'autrefois avoit proposée le Comte RICCATI.

8. De là il est clair, si l'on prend $n = 3$, pour le cas de deux dimensions de l'air, qu'on aura

$$dq - \frac{1}{2} qqdr - \frac{mm}{2} r^{-3} dr = 0,$$

ce qui est un des cas irréductibles de l'équation de RICCATI; et cette raison m'a fait désespérer qu'on pourroit jamais déterminer la propagation du son, à moins qu'on ne suppose à l'air qu'une seule dimension selon une ligne droite. Mais, posant $n = 4$, cette équation devenant

$$dq - \tfrac{1}{3} qqdr - \tfrac{1}{3} mmr^{-\frac{8}{3}} dr = 0$$

est un des cas réductibles de l'équation de RICCATI, ce qui change tout à fait la nature de l'équation que nous avons à résoudre et nous laisse espérer que le cas de trois dimensions, que nous donnons à l'étendue de l'air, pourroit admettre la solution, quoique celui de deux dimensions n'en fût pas susceptible.

9. Pour trouver dans ce cas réductible l'équation intégrale, il est bon de se tenir à l'équation différentio-différentielle

$$mmPdV^2 + \frac{ndVdP}{V} + ddP = 0,$$

qu'il faut transformer en supposant

$$\frac{dP}{P} = QdV + \frac{dp}{p},$$

où Q est une certaine fonction de V, qu'il faut déterminer en sorte que l'intégrale ou la valeur de p puisse commodément être développée par une série. Ayant donc, à cause de dV constant, en différentiant

$$\frac{ddP}{P} - \frac{dP^2}{P^2} = dQdV + \frac{ddp}{p} - \frac{dp^2}{p^2}.$$

Or

$$\frac{dP^2}{P^2} = QQdV^2 + \frac{2QdVdp}{p} + \frac{dp^2}{pp},$$

donc

$$\frac{ddP}{P} = QQdV^2 + \frac{2QdVdp}{p} + dQdV + \frac{ddp}{p},$$

d'où nous tirons cette équation

$$mmdV^2 + \frac{nQdV^2}{V} + \frac{ndVdp}{Vp} + \frac{ddp}{p} = 0.$$
$$+ QQdV^2 + dQdV + \frac{2QdVdp}{p}$$

Où il faut faire en sorte que la variable V ait ou nulle ou une seule dimension partout.

10. Posons donc

$$Q = m\sqrt{-1} + \frac{\lambda}{V},$$

de sorte que

$$dQ = -\frac{\lambda dV}{VV},$$

pour avoir

$$2\lambda m\sqrt{-1}\cdot\frac{dV^2}{V} + \frac{\lambda\lambda dV^2}{V^2} + \frac{ndVdp}{Vp} + 2m\sqrt{-1}\cdot\frac{dVdp}{p} + \frac{ddp}{p} = 0.$$
$$+ mn\sqrt{-1}\cdot\frac{dV^2}{V} + \frac{\lambda ndV^2}{V^2} + \frac{2\lambda dVdp}{Vp}$$
$$- \frac{\lambda dV^2}{V^2}$$

Soit de plus $\lambda = -n+1$, pour obtenir cette plus simple forme

$$-\frac{(n-2)mdV^2\sqrt{-1}}{V} - \frac{(n-2)dVdp}{Vp} + \frac{2mdVdp\sqrt{-1}}{p} + \frac{ddp}{p} = 0$$

ou bien, en la multipliant par Vp, celle-ci

$$Vddp + 2mVdVdp\sqrt{-1} - (n-2)dVdp - (n-2)mpdV^2\sqrt{-1} = 0,$$

dont on cherche la valeur de p par une série.

11. Supposons

$$p = A + BV + CV^2 + DV^3 + EV^4 + \text{etc.},$$

et la substitution donnera

$$\begin{aligned}
\frac{Vddp}{dV^2} &= +1\cdot 2CV + 2\cdot 3DV^2 + 3\cdot 4EV^3 + 4\cdot 5FV^4 + \text{etc.},\\
+\frac{2mVdp\sqrt{-1}}{dV} &= +2mBV\sqrt{-1} + 4mCV^2\sqrt{-1} + 6mDV^3\sqrt{-1}\\
&\quad + 8mEV^4\sqrt{-1} + \text{etc.},\\
-\frac{(n-2)dp}{dV} &= -(n-2)B - 2(n-2)CV - 3(n-2)DV^2 - 4(n-2)EV^3\\
&\quad - 5(n-2)FV^4 - \text{etc.},\\
-(n-2)mp\sqrt{-1} &= -(n-2)mA\sqrt{-1} - (n-2)mBV\sqrt{-1}\\
&\quad - (n-2)mCV^2\sqrt{-1} - (n-2)mDV^3\sqrt{-1}\\
&\quad - (n-2)mEV^4\sqrt{-1} - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Ces séries, prises ensemble devant être $=0$, donnent les déterminations suivantes

$B + mA\sqrt{-1} = 0$	$B = -\frac{mA\sqrt{-1}}{1}$
$2(n-3)C + (n-4)mB\sqrt{-1} = 0$	$C = -\frac{(n-4)mB\sqrt{-1}}{2(n-3)}$
$3(n-4)D + (n-6)mC\sqrt{-1} = 0$	$D = -\frac{(n-6)mC\sqrt{-1}}{3(n-4)}$
$4(n-5)E + (n-8)mD\sqrt{-1} = 0$	$E = -\frac{(n-8)mD\sqrt{-1}}{4(n-5)}$
$5(n-6)F + (n-10)mE\sqrt{-1} = 0$	etc.

d'où l'on voit que cette série devient finie aux cas

$$n = 4, \quad n = 6, \quad n = 8, \quad n = 10 \quad \text{etc.}$$

12. Donc, pour notre cas, où $n = 4$, nous aurons

$$B = -mA\sqrt{-1}, \quad C = 0, \quad D = 0 \quad \text{etc.}$$

et partant

$$p = A - mAV\sqrt{-1}, \quad \text{donc} \quad Q = m\sqrt{-1} - \frac{3}{V}$$

et

$$\int Q dV = mV\sqrt{-1} - 3lV.$$

Or, ayant posé

$$\frac{dP}{P} = Q dV + \frac{dp}{p},$$

nous aurons en intégrant

$$lP = mV\sqrt{-1} - 3lV + lp$$

ou

$$P = \frac{Ae^{mV\sqrt{-1}}(1 - mV\sqrt{-1})}{V^3}.$$

Or, puisqu'on peut prendre $\sqrt{-1}$ aussi bien négatif, nous aurons aussi

$$P = \frac{Be^{-mV\sqrt{-1}}(1 + mV\sqrt{-1})}{V^3},$$

et parce que dans notre équation

$$mmPdV^2 + \frac{4dVdP}{V} + ddP = 0$$

P n'a partout qu'une seule dimension [§ 6], ces deux valeurs combinées

$$P = \frac{Ae^{mV\sqrt{-1}}(1 - mV\sqrt{-1})}{V^3} + \frac{Be^{-mV\sqrt{-1}}(1 + mV\sqrt{-1})}{V^3}$$

en donnent l'intégrale complette.

13. Il ne s'agit maintenant que de prendre les constantes A et B en sorte que les imaginaires se détruisent. Pour cet effet il faut remarquer que

$$e^{mV\sqrt{-1}} = \cos mV + \sqrt{-1} \cdot \sin mV$$

et

$$e^{-mV\sqrt{-1}} = \cos mV - \sqrt{-1} \cdot \sin mV,$$

et partant nous aurons

$$PV^3 = A(1 - mV\sqrt{-1})(\cos mV + \sqrt{-1}\cdot\sin mV) + B(1 + mV\sqrt{-1})(\cos mV - \sqrt{-1}\cdot\sin mV)$$

ou

$$PV^3 = (A+B)\cos mV + (A-B)\sqrt{-1}\cdot\sin mV - mV(A-B)\sqrt{-1}\cdot\cos mV + mV(A+B)\sin mV.$$

Soit donc

$$A + B = C \quad \text{et} \quad (A-B)\sqrt{-1} = D,$$

pour avoir cette expression réelle

$$PV^3 = C\cos mV + D\sin mV - mDV\cos mV + mCV\sin mV;$$

soit de plus

$$C = E\sin\zeta \quad \text{et} \quad D = E\cos\zeta,$$

pour rendre cette équation plus simple,

$$PV^3 = E\sin(mV+\zeta) - mEV\cos(mV+\zeta)$$

ou bien

$$P = \frac{E\sin(mV+\zeta)}{V^3} - \frac{mE\cos(mV+\zeta)}{V^2}.$$

14. Nous avons posé [§ 6]

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh} = mm,$$

d'où il s'ensuit $\alpha = m\sqrt{2gh}$, et de là, à cause de $s = P\sin(\alpha t + \mathfrak{A})$, nous aurons

$$s = \frac{E\sin(mV+\zeta)\sin(mt\sqrt{2gh}+\mathfrak{A})}{V^3} - \frac{mE\cos(mV+\zeta)\sin(mt\sqrt{2gh}+\mathfrak{A})}{V^2},$$

où les quantités E, m, ζ, $\mathfrak{A}$ sont absolument arbitraires, de sorte qu'on peut donner une infinité de formules semblables, dont non seulement chacune séparément mais aussi toutes ensemble satisfont également à notre équation [§ 4]

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right),$$

et pour la premiere équation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = -\frac{2u}{VV} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right)$$

nous aurons

$$u = \frac{E\sin(mV+\xi)\sin(mt\sqrt{2gh}+\mathfrak{A})}{VV} - \frac{mE\cos(mV+\xi)\sin(mt\sqrt{2gh}+\mathfrak{A})}{V},$$

ou à un assemblage d'autant de semblables formules qu'on voudra.

15. Or, tout cela n'est encore d'aucun secours pour notre dessein, qui demande des fonctions absolument arbitraires, qui puissent même être discontinues. Mais la considération de ces formes m'a fourni l'idée que notre équation pourroit être résolue par une telle expression:

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi:(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{B}{V}\Phi':(V+t\sqrt{2gh}),$$

où Φ marque une fonction quelconque, et la fonction Φ' en dépend en sorte que

$$d.\,\Phi:z = dz\,\Phi':z;$$

de la même maniere je poserai

$$d.\,\Phi':z = dz\,\Phi'':z, \quad d.\,\Phi'':z = dz\,\Phi''':z \quad \text{etc.}$$

Or de cette position nous tirons

$$\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = +\frac{2ghA}{V^2}\Phi'':(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{2ghB}{V}\Phi''':(V+t\sqrt{2gh}),$$

$$\left(\frac{du}{dV}\right) = -\frac{2A}{V^3}\Phi\cdots + \frac{A}{V^2}\Phi'\cdots + \frac{B}{V}\Phi''\cdots, \\ -\frac{B}{V^2}\Phi'\cdots$$

$$\left(\frac{ddu}{dV^2}\right) = \frac{6A}{V^4}\Phi\cdots - \frac{4A}{V^3}\Phi'\cdots + \frac{A}{V^2}\Phi''\cdots + \frac{B}{V}\Phi'''\cdots \\ + \frac{2B}{V^3}\Phi'\cdots - \frac{2B}{V^2}\Phi''\cdots$$

16. Substituons ces valeurs dans notre équation

$$0 = -\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) - \frac{2u}{VV} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right)$$

et nous aurons

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{6A}{V^4}\Phi \cdots + \frac{2B-4A}{V^3}\Phi' \cdots + \frac{A-2B}{V^2}\Phi'' \cdots + \frac{B}{V}\Phi''' \cdots, \\ & - \frac{4A}{V^4}\Phi \cdots + \frac{2A-2B}{V^3}\Phi' \cdots + \quad \frac{2B}{V^2}\Phi'' \cdots \\ & - \frac{2A}{V^4}\Phi \cdots - \quad \frac{2B}{V^3}\Phi' \cdots - \quad \frac{A}{V^2}\Phi'' \cdots - \frac{B}{V}\Phi''' \cdots \end{aligned}$$

qui se réduit à

$$\frac{-2A-2B}{V^3}\Phi' \cdots = 0$$

et partant $B = -A$, de sorte que notre intégrale soit

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi : (V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\Phi' : (V + t\sqrt{2gh}),$$

qui est infiniment plus générale que celle que nous avions trouvée ci-dessus exprimée par des sinus et cosinus.

17. On pourra aussi prendre le signe du radical $\sqrt{2gh}$ négatif et on aura

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi : (V - t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\Phi' : (V - t\sqrt{2gh})$$

et cette formule jointe à la précédente donnera l'intégrale complette de notre formule. Mais, puisque par l'hypothese les agitations se répandent en tout sens également, cette derniere formule suffira seule, puisqu'on ne sauroit prendre V négatif. De là, quelque fonction qu'on prenne pour Φ, on en connoitra pour chaque tems proposé t la quantité u dont une couche sphérique quelconque, dont le rayon $AV = V$, sera répandue. On en connoitra aussi la vitesse que cette couche aura pour s'éloigner davantage du centre A; cette vitesse sera

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Phi' : (V - t\sqrt{2gh}) + \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi'' : (V - t\sqrt{2gh}).$$

Or, pour l'état initial, où $t = 0$, on aura

$$u = \frac{A}{VV}\Phi : V - \frac{A}{V}\Phi' : V$$

et pour la vitesse

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Phi' : V + \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi'' : V.$$

18. Puisqu'il faut supposer qu'au commencement toute l'agitation soit renfermée dans un petit espace autour du centre A, la nature de la fonction Φ doit être telle, que ces trois expressions $\Phi : z$, $\Phi' : z$, $\Phi'' : z$ soient toujours évanouissantes dès que z surpasse une petite quantité donnée. Pour cet effet,

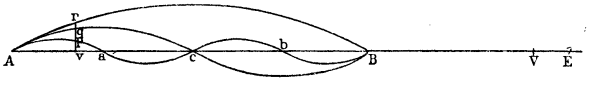


Fig. 2.

qu'on décrive (Fig. 2) sur l'axe AE une courbe quelconque Apa, qu'on dessine encore trois fois alternativement au dessus et au dessous de l'axe, pour avoir la courbe $ApacbB$ dont l'appliquée vp, qui répond à une abscisse quelconque $Av = z$, soit $= \Phi'' : z$. Ensuite, qu'on décrive une autre courbe $AqcB$ quadratrice de celle-là, de sorte que

$$vq = \frac{ar.\,Avp}{c},$$

et l'on aura

$$vq = \frac{1}{c}\Phi' : z,$$

puisque $\Phi' : z = \int dz\,\Phi'' : z$. Ensuite, qu'on décrive la troisieme courbe ArB quadratrice de celle-ci, dont l'appliquée soit

$$vr = \frac{ar.\,Avq}{c} \quad \text{ou} \quad vr = \frac{1}{cc}\Phi : z,$$

de sorte que par ces trois courbes on aura

$$\Phi : z = cc \cdot vr, \quad \Phi' : z = c \cdot vq \quad \text{et} \quad \Phi'' : z = vp.$$

19. Donc, pour l'état initial, prenant l'abscisse Av égale au rayon de la couche sphérique dont on cherche le déplacement, ou $Av = V$, on aura le déplacement

$$u = \frac{Acc}{VV} \cdot vr - \frac{Ac}{V} \cdot vq$$

et la vitesse

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{Ac\sqrt{2gh}}{VV} \cdot vq + \frac{A\sqrt{2gh}}{V} \cdot vp,$$

d'où l'on connoit l'agitation initiale, et l'on comprend que, celle-ci étant donnée, on en tirera réciproquement la construction de la courbe arbitraire Apa. Cependant il importe fort peu de savoir la nature de cette agitation, puisque notre but tend principalement à déterminer la propagation. Au reste on pourroit aussi décrire de semblables courbes tirées des fonctions de $V + t\sqrt{2gh}$, qu'on peut combiner avec celles-ci. Mais on verra bientôt que la vitesse de la propagation n'en est pas altérée et qu'elle demeure la même, quelque courbe qu'on prenne pour Apa. Par cette raison je m'arrêterai au cas que je viens d'indiquer.

20. Je dois aussi remarquer que, quoique les membres de nos formules soient divisés par V et VV, ils ne deviennent pas pourtant infinis au cas $V = 0$, pourvu que la premiere courbe Apa fasse un angle aigu avec l'axe. Car, posant $Av = V$, $vp = p$, $vq = q$ et $vr = r$, soit pour le commencement $p = nV$, où n est un nombre fini quelconque, et on aura

$$q = \frac{nVV}{2c} \quad \text{et} \quad r = \frac{nV^3}{6cc},$$

de là, si l'abscisse V est extrêmement petite, on aura

$$u = \tfrac{1}{6}nAV - \tfrac{1}{2}nAV = -\tfrac{1}{3}nAV$$

et

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\tfrac{1}{2}nA\sqrt{2gh} + nA\sqrt{2gh} = +\tfrac{1}{2}nA\sqrt{2gh},$$

de sorte que le déplacement du centre A soit même infiniment petit, et si l'on veut que sa vitesse évanouisse aussi, on n'a qu'à prendre $n = 0$ ou faire en sorte que la courbe Apa touche l'axe en A.

21. Prenant maintenant un point quelconque V hors de l'agitation initiale, on voit qu'au commencement, où $t = 0$, tant le déplacement u que la vitesse $\left(\frac{du}{dt}\right)$ sera zéro. Car, si $V > AB$, toutes ces fonctions $\Phi : V$, $\Phi' : V$ et $\Phi'' : V$ évanouissent, puisque toutes les trois courbes sont censées se réunir avec l'axe au delà de B. Mais, après le premier instant, dès que la quantité $V - t\sqrt{2gh}$ commence à devenir plus petite que AB, la couche qui passe par V sera ébranlée. Qu'on prenne alors $Vv = t\sqrt{2gh}$, et on aura pour le déplacement de cette couche

$$u = \frac{Acc}{VV} \cdot vr - \frac{Ac}{V} \cdot vq$$

et pour la vitesse

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{Ac\sqrt{2gh}}{VV} \cdot vq + \frac{A\sqrt{2gh}}{V} \cdot vp,$$

d'où l'on voit que, plus le point V est éloigné du centre A, plus seront aussi petits tant son déplacement que sa vitesse, et cela en raison des distances à peu près, si la distance V est fort grande.

22. On se sera imaginé que les agitations répandues dans l'air devroient diminuer en raison des quarrés des distances, et on sera surpris de voir que les petits espaces par lesquels les couches s'avancent diminuent seulement en raison des distances, lorsque les distances sont fort grandes. Mais il faut observer que l'agitation de chaque couche ne dépend pas uniquement de son déplacement u, mais aussi de sa vitesse pendant qu'elle est ébranlée; et celle-ci étant aussi réciproquement proportionnelle à la distance au centre, d'où l'agitation entiere doit être censée bien plus petite. Au reste, si la force du son, en tant qu'il est apperçu, dépend ou du seul déplacement des particules d'air ou seulement de leur vitesse, on pourra dire que la force d'un son diminue en raison des distances; mais, si elle dépend de tous les deux conjointement, elle suivra la raison réciproque quarrée des distances.

23. Posons la distance $AB = a$, qui est le rayon de la sphere qui aura été primitivement agitée, et cette agitation sera transmise jusqu'en V, la distance AV étant $= V$, après le tems t, en sorte que $V - t\sqrt{2gh} = AB = a$, d'où l'on tire

$$t = \frac{V - a}{\sqrt{2gh}};$$

ou bien, dans une seconde l'agitation sera transmise par un espace $V = a + \sqrt{2gh}$, qui est de la quantité a plus grand que celui que nous avions trouvé dans l'hypothese d'une seule dimension, quoique cette même augmentation y ait également lieu. Mais cela ne suffit en aucune maniere pour obtenir la vitesse qu'on connoit par les expériences, et partant il n'y a plus de doute que la force de l'agitation produise cette accélération, pendant que les sons extrêmement foibles seroient d'accord avec notre formule, qui, comme j'ai d'abord remarqué, n'a lieu que lorsque les agitations sont quasi infiniment petites.

24. Or, l'intégrale complette de notre équation étant

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi:(V+t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\Phi':(V+t\sqrt{2gh})$$
$$+ \frac{B}{V^2}\Psi:(V-t\sqrt{2gh}) - \frac{B}{V}\Psi':(V-t\sqrt{2gh}),$$

on en peut faire varier à l'infini l'agitation primitive, non seulement par rapport au déplacement de chaque couche sphérique, mais aussi par rapport à la vitesse qui leur sera imprimée, puisqu'on a en général pour la vitesse

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Phi':(V+t\sqrt{2gh}) - \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi'':(V+t\sqrt{2gh})$$
$$- \frac{B\sqrt{2gh}}{VV}\Psi':(V-t\sqrt{2gh}) + \frac{B\sqrt{2gh}}{V}\Psi'':(V-t\sqrt{2gh}),$$

d'où l'on a pour l'état initial, en posant $t = 0$,

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi:V - \frac{A}{V}\Phi':V + \frac{B}{V^2}\Psi:V - \frac{B}{V}\Psi':V$$

et

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Phi':V - \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi'':V - \frac{B\sqrt{2gh}}{VV}\Psi':V + \frac{B\sqrt{2gh}}{V}\Psi'':V,$$

où les caracteres Φ et Ψ marquent des fonctions quelconques, tant continues que discontinues, ce qui nous met en état de donner une solution générale de notre probleme, en supposant l'agitation primitive quelconque.

25. On peut bien supposer $B = A$, puisque la variété des fonctions Φ et Ψ renferme déjà cette différence, et pour qu'on puisse faire l'application à une agitation primitive quelconque, posons

$$\Phi : V + \Psi : V = \Sigma : V \quad \text{et} \quad \Phi : V - \Psi : V = \Theta : V,$$

de sorte que

$$\Phi : V = \tfrac{1}{2}\Sigma : V + \tfrac{1}{2}\Theta : V \quad \text{et} \quad \Psi : V = \tfrac{1}{2}\Sigma : V - \tfrac{1}{2}\Theta : V,$$

et nous aurons pour l'état initial

$$u = \frac{A}{V^2}\Sigma : V - \frac{A}{V}\Sigma' : V$$

et

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Theta' : V - \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Theta'' : V.$$

Maintenant, posons pour ce même état

$$u = AP \quad \text{et} \quad \left(\frac{du}{dt}\right) = AQ\sqrt{2gh},$$

de sorte que P et Q soient des fonctions données de V conformément à l'agitation primitive, et il s'agit de trouver les fonctions Σ et Θ de ces égalités:

$$\Sigma : V - V\Sigma' : V = V^2 P \quad \text{et} \quad \Theta' : V - V\Theta'' : V = V^2 Q.$$

26. Posons pour cet effet

$$\Sigma : V = p \quad \text{et} \quad \Theta' : V = q,$$

pour avoir

$$p - \frac{Vdp}{dV} = V^2 P \quad \text{et} \quad q - \frac{Vdq}{dV} = V^2 Q$$

ou bien

$$\frac{pdV - Vdp}{VV} = PdV \quad \text{et} \quad \frac{qdV - Vdq}{VV} = QdV,$$

d'où l'on tire

$$-\frac{p}{V} = \int PdV \quad \text{et} \quad -\frac{q}{V} = \int QdV.$$

Donc, connoissant les fonctions P et Q par l'agitation primitive, nous en formerons nos fonctions en sorte

$$\Sigma : V = -V\int P dV, \quad \Theta' : V = -V\int Q dV,$$

donc

$$\Theta : V = -\int V dV \int Q dV$$

et ensuite

$$\Sigma' : V = -\int P dV - VP \quad \text{et} \quad \Theta'' : V = -\int Q dV - VQ,$$

d'où l'on tracera aisément des courbes dont les appliquées représentent toutes les fonctions dont nous avons besoin dans cette recherche.

27. Après avoir déterminé la nature de ces fonctions par l'agitation imprimée au commencement, on en déterminera pour un tems quelconque t l'élargissement u de toutes les couches sphériques dont le rayon est supposé $= V$. On aura pour u l'expression suivante:

$$u = \begin{cases} +\frac{A}{2V\sqrt{V}}\Sigma:(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{A}{2V\sqrt{V}}\Theta:(V+t\sqrt{2gh}) \\ +\frac{A}{2V\sqrt{V}}\Sigma:(V-t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{2V\sqrt{V}}\Theta:(V-t\sqrt{2gh}) \\ -\frac{A}{2V}\ \Sigma':(V+t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{2V}\ \Theta':(V+t\sqrt{2gh}) \\ -\frac{A}{2V}\ \Sigma':(V-t\sqrt{2gh}) + \frac{A}{2V}\ \Theta':(V-t\sqrt{2gh}) \end{cases}$$

d'où l'on voit comme auparavant que, pendant une seconde, le son ne sauroit être transmis que par un espace $= \sqrt{2gh}$, mais pourtant avec cette restriction que le son soit extrêmement foible; pour les sons plus forts on n'en sauroit rien conclure.

28. Cette propagation par des couches concentriques nous fournit une infinité de solutions particulieres des formules générales que j'avois trouvées pour des agitations quelconques dans l'air (voyez le § 43 du Mémoire précédent):

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddy}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddz}{dXdZ}\right),$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddy}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dYdZ}\right),$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dXdZ}\right) + \left(\frac{ddy}{dYdZ}\right) + \left(\frac{ddz}{dZ^2}\right).$$

Car, pour avoir une solution particuliere quelconque, supposons le centre précédent des agitations dans un point déterminé par les coordonnées a, b, c, et nous aurons

$$V = \sqrt{((X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2)}$$

et ensuite

$$x = \frac{X-a}{V} \cdot u, \qquad y = \frac{Y-b}{V} \cdot u, \qquad z = \frac{Z-c}{V} \cdot u.$$

29. Prenant donc pour a, b, c trois constantes quelconques, soit pour abréger

$$\sqrt{((X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2)} = V,$$

et que les caracteres Φ et Ψ marquent des fonctions quelconques régulieres ou irrégulieres, d'où par la différentiation on aura les fonctions dérivées Φ' et Ψ', et qu'on prenne

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi{:}(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\Phi'{:}(V + t\sqrt{2gh})$$
$$+ \frac{B}{V^2}\Psi{:}(V - t\sqrt{2gh}) - \frac{B}{V}\Psi'{:}(V - t\sqrt{2gh}).$$

Alors on aura pour la résolution de nos trois formules les valeurs suivantes des trois variables x, y, z cherchées:

$$x = \frac{X-a}{V} \cdot u, \quad y = \frac{Y-b}{V} \cdot u, \quad z = \frac{Z-c}{V} \cdot u$$

et en changeant les constantes a, b, c à volonté on obtiendra une infinité de semblables valeurs pour x, y, z, qui, étant jointes ensemble, donneront une solution assez générale de notre probleme.

30. Cette solution sert à nous faire comprendre que, s'il y a plusieurs centres d'agitation, la propagation de chacune se fait de la même maniere que si elle se trouvoit toute seule dans l'air. Donc, si plusieurs sons sont excités en différens endroits de l'air, chacun se répand par des couches sphériques et concentriques de la même maniere que s'il existoit tout seul dans l'air, et tous les autres n'en troubleront pas la propagation, et s'il arrive que les mêmes particules de l'air sont ébranlées à la fois par plusieurs sons, leur mouvement sera composé de tous les mouvemens que chaque son y

produiroit séparément; ce qui est la cause que la propagation de chacun n'est pas troublée par les autres. L'explication de ce phénomene, que nous devons uniquement à la théorie, est sans doute bien importante.

31. Avant que de finir cette matiere, je proposerai encore une autre méthode de traiter les trois équations principales rapportées dans le § 28, laquelle consiste dans l'élimination du tems t. Pour cet effet, qu'on pose

$$x = p \sin(\alpha t + \beta), \quad y = q \sin(\alpha t + \beta), \quad z = r \sin(\alpha t + \beta),$$

où p, q, r soient des fonctions des trois variables X, Y et Z, sans renfermer le tems t. Alors, après avoir fait la substitution, on aura les trois équations suivantes, d'où il faut déterminer les trois inconnues p, q, r:

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh} p + \left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ}\right) = 0,$$

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh} q + \left(\frac{ddp}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dYdZ}\right) = 0,$$

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh} r + \left(\frac{ddp}{dXdZ}\right) + \left(\frac{ddq}{dYdZ}\right) + \left(\frac{ddr}{dZ^2}\right) = 0.$$

32. Si nous posons

$$\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = v,$$

nous aurons

$$p = -\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\frac{dv}{dX}\right), \quad q = -\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\frac{dv}{dY}\right), \quad r = -\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

d'où il est évident que

$$\left(\frac{dp}{dY}\right) = \left(\frac{dq}{dX}\right), \quad \left(\frac{dp}{dZ}\right) = \left(\frac{dr}{dX}\right), \quad \left(\frac{dq}{dZ}\right) = \left(\frac{dr}{dY}\right)$$

ou que la formule

$$pdX + qdY + rdZ$$

est intégrable, l'intégrale étant

$$= -\frac{2gh}{\alpha\alpha} v = -\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right)\right).$$

Or, de là nous concluons de plus

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}p+\left(\frac{ddp}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddp}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddp}{dZ^2}\right)=0,$$

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}q+\left(\frac{ddq}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddq}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddq}{dZ^2}\right)=0,$$

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}r+\left(\frac{ddr}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddr}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddr}{dZ^2}\right)=0,$$

de sorte que toutes les trois quantités p, q, r sont déterminées par la même équation, dont il s'agit de trouver la résolution générale.

AUTRE MANIERE DE PARVENIR A LA SOLUTION

33. L'explication de la propagation du son que je viens de trouver peut être déduite immédiatement de nos formules principales, qui, posant

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)+\left(\frac{dy}{dY}\right)+\left(\frac{dz}{dZ}\right)=v,$$

sont

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dX}\right),\quad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dY}\right),\quad \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

d'où l'on tire cette équation pour trouver v

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddv}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddv}{dZ^2}\right),$$

comme je l'ai fait voir dans mon Mémoire précédent [§ 43]. Or, si l'on pose

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=VV,$$

où l'on peut prendre pour a, b, c des quantités constantes quelconques, cette équation est remplie par cette formule

$$v=\frac{A}{V}\Phi:(V\pm t\sqrt{2gh}),$$

comme on peut le voir en faisant la substitution.

34. Car, puisque V ne dépend point du tems t, on aura

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \frac{2Agh}{V}\,\Phi'':(V \pm t\sqrt{2gh});$$

ensuite, à cause de

$$\left(\frac{dV}{dX}\right) = \frac{X-a}{V}, \quad \left(\frac{dV}{dY}\right) = \frac{Y-b}{V} \quad \text{et} \quad \left(\frac{dV}{dZ}\right) = \frac{Z-c}{V},$$

on a

$$\left(\frac{dv}{dX}\right) = -\frac{A(X-a)}{V^3}\,\Phi:(V \pm t\sqrt{2gh}) + \frac{A(X-a)}{V^2}\,\Phi':(V \pm t\sqrt{2gh}),$$

et différentiant encore

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) = -\frac{A}{V^3}\,\Phi:(V \pm t\sqrt{2gh}) - \frac{3A(X-a)^2}{V^4}\,\Phi':(V \pm t\sqrt{2gh})$$
$$+ \frac{A(X-a)^2}{V^3}\,\Phi'':(V \pm t\sqrt{2gh}) + \frac{3A(X-a)^2}{V^5}\,\Phi:(V \pm t\sqrt{2gh}) + \frac{A}{V^2}\,\Phi':(V \pm t\sqrt{2gh}),$$

d'où l'on formera aisément les valeurs des formules $\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)$ et $\left(\frac{ddv}{dZ^2}\right)$, et partant la somme de ces trois formules, à cause de

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = V^2,$$

se réduit à

$$\frac{A}{V}\,\Phi'':(V \pm t\sqrt{2gh});$$

et cette même valeur est aussi celle de $\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)$, d'où l'on voit que la formule

$$v = \frac{A}{V}\,\Phi:(V \pm t\sqrt{2gh})$$

satisfait parfaitement à l'équation rapportée ci-dessus.

35. Pour trouver de là les quantités x, y, z, donnons à la valeur trouvée pour v cette forme

$$v = \frac{A}{V}\,\Phi'':(V + t\sqrt{2gh}),$$

d'où nous aurons

$$\left(\frac{dv}{dX}\right) = -\frac{A(X-a)}{V^3}\,\Phi'':(V + t\sqrt{2gh}) + \frac{A(X-a)}{V^2}\,\Phi''':(V + t\sqrt{2gh}),$$

ce qui est aussi la valeur de $\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$. Prenons donc les intégrales en supposant le seul tems t variable et, puisque

$$\int dt\,\Phi''':(V+t\sqrt{2gh}) = \frac{1}{\sqrt{2gh}}\,\Phi'':(V+t\sqrt{2gh}),$$

nous obtiendrons

$$\frac{1}{\sqrt{2gh}}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{A(X-a)}{V^3}\,\Phi':(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{A(X-a)}{V^2}\,\Phi'':(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{P}{\sqrt{2gh}},$$

où P est une fonction quelconque de X, Y et Z, qu'on regarde ici comme constante, et en intégrant encore,

$$x = -\frac{A(X-a)}{V^3}\,\Phi:(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{A(X-a)}{V^2}\,\Phi':(V+t\sqrt{2gh}) + Pt + \mathfrak{P},$$

où $\mathfrak{P}$ est aussi une fonction quelconque de X, Y et Z.

36. De la même maniere on trouvera

$$y = -\frac{A(Y-b)}{V^3}\,\Phi:(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{A(Y-b)}{V^2}\,\Phi':(V+t\sqrt{2gh}) + Qt + \mathfrak{Q},$$

$$z = -\frac{A(Z-c)}{V^3}\,\Phi:(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{A(Z-c)}{V^2}\,\Phi':(V+t\sqrt{2gh}) + Rt + \mathfrak{R},$$

où Q, R et $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ sont aussi des fonctions des trois variables X, Y, Z, qui dépendent en sorte des précédentes P et $\mathfrak{P}$ que

$$\left(\frac{ddP}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddQ}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddR}{dZ^2}\right) = 0$$

et

$$\left(\frac{dd\mathfrak{P}}{dX^2}\right) + \left(\frac{dd\mathfrak{Q}}{dY^2}\right) + \left(\frac{dd\mathfrak{R}}{dZ^2}\right) = 0.$$

Mais pour notre dessein on peut négliger toutes ces fonctions P, Q, R et $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, ou les supposer égales à 0.

37. Donc, si l'on suppose dans l'air autant de points fixes c, c', c'' etc. (Fig. 3) qu'on voudra, déterminés par les coordonnées

$$Aa = a,\ ab = b,\ bc = c;\ Aa' = a',\ a'b' = b',\ b'c' = c' \text{ etc.},$$

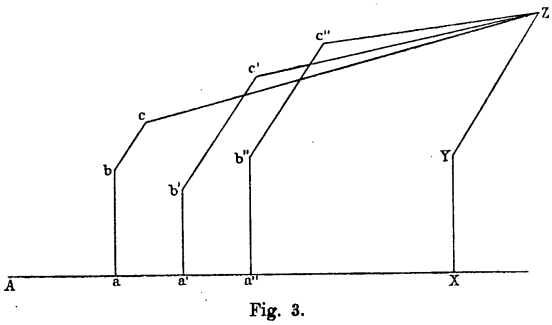


Fig. 3.

et après y avoir tiré d'un point quelconque Z, déterminé par les coordonnées $AX = X$, $XY = Y$ et $YZ = Z$, les droites Zc, Zc', Zc'', qu'on nomme ces distances

$$Zc = V,\quad Zc' = V',\quad Zc'' = V''$$

et qu'on pose pour abréger

$$-\frac{1}{V}\Phi:(V+t\sqrt{2gh}) + \Phi':(V+t\sqrt{2gh})$$
$$-\frac{1}{V}\Sigma:(V-t\sqrt{2gh}) + \Sigma':(V-t\sqrt{2gh}) = P,$$
$$-\frac{1}{V'}\Psi:(V'+t\sqrt{2gh}) + \Psi':(V'+t\sqrt{2gh})$$
$$-\frac{1}{V'}\Theta:(V'-t\sqrt{2gh}) + \Theta':(V'-t\sqrt{2gh}) = Q,$$
$$-\frac{1}{V''}\Omega:(V''+t\sqrt{2gh}) + \Omega':(V''+t\sqrt{2gh})$$
$$-\frac{1}{V''}\Xi:(V''-t\sqrt{2gh}) + \Xi':(V''-t\sqrt{2gh}) = R,$$

les dérangemens du point Z seront exprimés par les équations suivantes:

$$x = \frac{(X-a)P}{VV} + \frac{(X-a')Q}{V'V'} + \frac{(X-a'')R}{V''V''},$$
$$y = \frac{(Y-b)P}{VV} + \frac{(Y-b')Q}{V'V'} + \frac{(Y-b'')R}{V''V''},$$
$$z = \frac{(Z-c)P}{VV} + \frac{(Z-c')Q}{V'V'} + \frac{(Z-c'')R}{V''V''}.$$

38. Ces mêmes formules expriment l'état initial, quand on pose $t = 0$, et celui-ci étant donné, on en connoitra la nature des fonctions Φ, Σ, Ψ, Θ, Ω, Ξ. Supposons ces fonctions telles que, posant $t = 0$, les quantités P, Q, R soient toujours égales à zéro, excepté les seuls cas où les distances V, V', V'' sont à peu près égales à ces quantités D, D', D'', et alors le point Z sera en repos, à moins qu'il n'y ait

$$\text{ou } V - t\sqrt{2gh} = D, \quad \text{ou } V' - t\sqrt{2gh} = D', \quad \text{ou } V'' - t\sqrt{2gh} = D'',$$

d'où l'on voit que les agitations primitives excitées autour des points c, c', c'' sont séparément transmises au point Z et chacune de la même maniere que si les autres n'existoient point. Et partant il est clair que toutes ces agitations ne se troublent pas entr'elles.

INDEX NOMINUM

ADAM, CH., 22
D'ALEMBERT, J. L., 431, 510
ARISTOTELES, 183, 199
ARISTOXENUS, 199, 252, 296
BERNOULLI, D., 64, 175, 182
BERNOULLI, JOH., 64, 189
BURKHARD, E., 181
CARTESIUS vide DESCARTES
DERHAM, W., 187
DESCARTES, R., 22, 46, 183
DUTENS, L., 332
ENESTROEM, G., 80
ENESTROEMIANUS, passim (Index ENESTROEMIANUS Commentationum EULERI)
EPICURUS, 183
EULER, L., 4, 5, 80 (Commentationes 145, 146, 176, 181, 182, 186, 197, 198, 199, 200 indicis ENESTROEMIANI), 202 (Comment. 71), 210 (Comment. 71, *Introd. in anal. infin.*), 429 (Comment. 119, 140), 508 (*Tentamen*), 516 (*Tentamen*), 540 (Comment. 2, 305, 306, 307, 151), 541 (Comment. 2, 305, 306, 307), 547 (Comment. 305), 567 (Comment. 852), 568 (*Tentamen*), 577 (Comment. 314, 315), 587 (*Lettres à une princesse d'Allemagne*)
FABRI, H., 183
FLAMSTEED, J., 187
GOLDBACH, CHR., 332, 515
HALLEY, E., 187
KANT, I., 64
KIRCHER, A., 566
LAGRANGE, J. L., 428, 429, 430, 431, 433, 451, 541
LAMB, H., 175
LEIBNIZ, G., 332, 515, 518, 525
MAIRAN, J. J. D. DE, 449
MARQUARD, 199
MATTHESON, J., 306
MAUPERTUIS, P. L. M. DE, 80
MEIBOM, 199
MERCURIUS, 293, 294, 295, 296, 300
METIUS, 210
MEURSIUS, 199
NEWTON, I., 4, 7, 183, 187, 196, 428, 429, 448, 555
PTOLEMAEUS, 203, 251, 294, 295, 296, 298
PYTHAGORAS, 199, 202, 250, 251, 252, 296, 303, 321
RAMEAU, J. PH., 510, 524
RICCATI, I., 485, 488
RIEMANN, H., 199
SAUVEUR, J., 221
SERRET, J. A., 428
TANNERY, P., 22
TAYLOR, B., 189
TORRICELLI, E., 218
WALLIS, J., 251