Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Opera physica miscellanea epistolae. Volumen

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

primum, Leonhardi Euleri commentationes physicae

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

ad physicam generalem et [...]

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

BnF Gallica

Euler, Leonhard (1707-1783). Opera physica miscellanea epistolae. Volumen primum, Leonhardi Euleri commentationes physicae ad physicam generalem et ad theoriam soni pertinentes / ediderunt Eduard Bernoulli, Rudolf Bernoulli, Ferdinand Rubio,... [et al.]. 1926.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au

sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le

producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter **reutilisationcommerciale@bnf.fr**.

LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA
SUB AUSPICIIS SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE
EDENDA CURAVERUNT
F. RUDIO · A. KRAZER · A. SPEISER · L. G. DU PASQUIER

SERIES TERTIA · OPERA PHYSICA · VOLUMEN PRIMUM

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES PHYSICAE

AD PHYSICAM GENERALEM ET AD THEORIAM SONI PERTINENTES

EDIDERUNT

EDUARD BERNOULLI RUDOLF BERNOULLI
FERDINAND RUDIO ANDREAS SPEISER

ADIECTA EST EULERI EFFIGIES
AD IMAGINEM A DARBES PICTAM EXPRESSA

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXVI

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

LEONHARDI EULERI

OPERA OMNIA

LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

FERDINAND RUDIO
ADOLF KRAZER ANDREAS SPEISER
LOUIS GUSTAVE DU PASQUIER

SERIES TERTIA

OPERA PHYSICA MISCELLANEA EPISTOLAE

VOLUMEN PRIMUM

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXVI

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES PHYSICAE

AD PHYSICAM GENERALEM ET AD THEORIAM SONI PERTINENTES

EDIDERUNT

EDUARD BERNOULLI RUDOLF BERNOULLI
FERDINAND RUDIO ANDREAS SPEISER

ADIECTA EST EULERI EFFIGIES
AD IMAGINEM A DARBES PICTAM EXPRESSA

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXVI

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

SUPPLEMENT AUX RECHERCHES SUR LA PROPAGATION DU SON

Commentatio 306 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [15] (1759), 1766, p. 210—240

1. Dans le Mémoire précédent je n'ai supposé à l'air par lequel le son est transmis qu'une seule dimension selon une ligne droite; en quoi j'ai suivi les autres Géometres qui ont traité cette même matiere. Puisqu'on a principalement en vue la vitesse de la propagation, il semble qu'elle doit être la même, soit que l'air ait une étendue selon toutes les trois dimensions ou selon une seule, quoiqu'il soit certain que les ébranlemens excités dans l'air diminuent beaucoup plus considérablement, lorsque l'air est répandu de toutes parts. Mais la principale raison de cette restriction est sans doute, qu'on rencontre des difficultés insurmontables, lorsqu'on veut supposer à l'air une étendue vers toutes les trois dimensions, ou seulement vers deux, en ne considérant qu'une couche d'air renfermée entre deux plans paralleles et extrêmement proches.

2. Cependant il est encore douteux, si la vitesse du son, qu'on trouve dans l'hypothese d'une seule dimension, n'est pas altérée par l'étendue selon les autres dimensions, et puisque la vitesse actuelle du son conclue par les expériences est considérablement plus grande que celle que donne la théorie fondée sur l'hypothese d'une seule dimension, on a lieu de soupçonner que l'étendue vers toutes les dimensions pourroit bien causer cette accélération. Du moins sera-t-il toujours fort important de faire des efforts pour développer les autres hypotheses où l'on suppose à l'air ou deux ou toutes les trois

dimensions; pour l'une et l'autre hypothese je tâcherai de ramener les ébranlemens de l'air à des formules analytiques, dont la résolution sera un très digne sujet pour occuper l'adresse des Géometres.

3. Je commence par l'hypothese de deux dimensions, ou l'air soit étendu selon un plan, qui soit celui de la planche; on lui peut donner une petite épaisseur, qui soit partout la même $= e$, et d'abord je considere l'état d'équilibre, où l'air a partout la même densité et le même ressort. Que l'unité exprime cette densité naturelle de l'air, et que son élasticité soit en équilibre avec le poids d'une colonne d'air dont la hauteur soit $= h$, en supposant aussi cet air de l'état naturel, dont la densité $= 1$; on voit bien que cette hauteur h se détermine par celle du barometre, en multipliant celle-ci par le rapport dont la densité ou gravité spécifique du vif argent surpasse celle de l'air. Ainsi la hauteur du barometre étant $= k$, si nous supposons la gravité spécifique du vif argent 14 fois plus grande que celle de l'eau, et celle-ci 800 fois plus grande que celle de l'air naturel, nous aurons

$$h = 14 \cdot 800\, k = 11200\, k.$$

4. Dans l'état d'équilibre considérons un point quelconque Y (Fig. 1), duquel on baisse à une ligne fixe AE la perpendiculaire YX, pour avoir les deux coordonnées $AX = X$ et $XY = Y$, qui déterminent le lieu du point Y. Maintenant, après une agitation quelconque excitée dans notre air, et à un instant donné, que le point Y se trouve en y, dont le lieu soit déterminé par les coordonnées $Ax = x$ et $xy = y$, et il est clair que x et y seront certaines fonctions de X et Y, où le tems entre bien aussi, mais tant que nous considérons l'état de l'air pour le même instant, le tems n'y entre pas encore en considération, ou sera regardé comme constant. Donc, puisque tant x que y est une fonction de deux variables X et Y, supposons

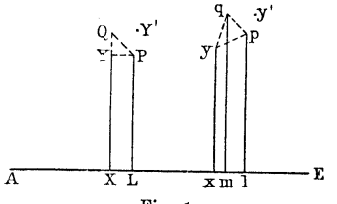

Fig. 1.

$$dx = L\,dX + M\,dY \quad \text{et} \quad dy = P\,dX + Q\,dY.$$

5. Pour trouver tant la densité que l'élasticité en y dans l'état troublé, considérons un volume d'air infiniment petit, qui dans l'état naturel soit YPQ, et après l'agitation dans l'état troublé soit ypq; dont le rapport à celui-là fera connoitre tant la densité que l'élasticité du volume ypq. Comme le point Y déterminé par les coordonnées X et Y est transporté en y déterminé par les coordonnées x et y, tout autre point infiniment proche de Y et déterminé par les coordonnées $X+dX$ et $Y+dY$ sera transporté dans un point déterminé par les coordonnées

$$x+LdX+MdY \quad \text{et} \quad y+PdX+QdY.$$

Que le triangle YPQ soit pris en sorte comme il est représenté dans la figure, et posons $YP=XL=\alpha$ et $YQ=\beta$, et

le point	dont les coordonnées			se trouvera	au point	dont les coordonnées		
Y	X	et	Y		y	x	et	y
P	$X+\alpha$	et	Y		p	$x+L\alpha$	et	$y+P\alpha$
Q	X	et	$Y+\beta$		q	$x+M\beta$	et	$y+Q\beta$

6. Donc, ayant tiré de p et q les ordonnées pl et qm, nous aurons

$$Ax=x, \quad Al=x+L\alpha, \quad Am=x+M\beta,$$

$$xy=y, \quad lp=y+P\alpha, \quad mq=y+Q\beta,$$

d'où il faut chercher l'aire du triangle ypq, qui se détermine par celle des trapezes $xypl$, $xyqm$, $lpqm$ en sorte

$$\Delta ypq=\tfrac{1}{2}xm(xy+mq)+\tfrac{1}{2}ml(mq+lp)-\tfrac{1}{2}xl(xy+lp);$$

or

$$xm=M\beta, \quad ml=L\alpha-M\beta \quad \text{et} \quad xl=L\alpha,$$

donc

$$\Delta ypq=\tfrac{1}{2}\beta M(2y+\beta Q)+\tfrac{1}{2}(\alpha L-\beta M)(2y+\alpha P+\beta Q)-\tfrac{1}{2}\alpha L(2y+\alpha P)$$

ou

$$\Delta ypq=\tfrac{1}{2}\beta M(-\alpha P)+\tfrac{1}{2}\alpha L(\beta Q)=\tfrac{1}{2}\alpha\beta(LQ-MP).$$

Donc, puisque dans l'état naturel l'aire du triangle YPQ étoit $\frac{1}{2}\alpha\beta$, la densité du même air remplissant maintenant le triangle ypq sera

$$= \frac{1}{LQ-MP}$$

et l'élasticité

$$= \frac{h}{LQ-MP};$$

d'où nous tirons cette conclusion: densité en y

$$= \frac{1}{LQ-MP},$$

l'élasticité en y

$$= \frac{h}{LQ-MP}.$$

7. Comme le lieu du point y dépend de celui de Y, le ressort ou élasticité en y (que l'on la pose $= \Pi$, de sorte que $\Pi = \frac{h}{LQ-MP}$) sera aussi une fonction de X et Y, considérant encore toujours le tems comme constant; et partant nous aurons $d\Pi = EdX + FdY$, où E et F sont déterminées en sorte des lettres L, M, P, Q:

$$E = \frac{-h\left(Q\left(\frac{dL}{dX}\right) + L\left(\frac{dQ}{dX}\right) - P\left(\frac{dM}{dX}\right) - M\left(\frac{dP}{dX}\right)\right)}{(LQ-MP)^2},$$

$$F = \frac{-h\left(Q\left(\frac{dL}{dY}\right) + L\left(\frac{dQ}{dY}\right) - P\left(\frac{dM}{dY}\right) - M\left(\frac{dP}{dY}\right)\right)}{(LQ-MP)^2}.$$

C'est à dire un point Y' dans l'état d'équilibre infiniment proche de Y, déterminé par les coordonnées $X + dX$ et $Y + dY$, étant transporté par l'agitation en y', l'élasticité y sera exprimée par la hauteur

$$\Pi + EdX + FdY,$$

pendant que l'élasticité en y répond à la hauteur

$$\Pi = \frac{h}{LQ-MP}.$$

8. Or, le lieu du point y' étant déterminé par les coordonnées

$$x + LdX + MdY \quad \text{et} \quad y + PdX + QdY,$$

nous pourrons assigner la variation du ressort depuis le point y dans l'état troublé jusqu'à un autre point y' infiniment proche. Soient pour le point y' les coordonnées $x + \alpha$ et $y + \beta$, prenant α et β pour marquer des élémens infiniment petits, et nous n'avons qu'à chercher le lieu Y' du même point dans l'état naturel. Pour cet effet posons

$$LdX + MdY = \alpha \quad \text{et} \quad PdX + QdY = \beta,$$

d'où nous tirons

$$dX = \frac{\alpha Q - \beta M}{LQ - MP} \quad \text{et} \quad dY = \frac{\beta L - \alpha P}{LQ - MP}.$$

Donc, pour le point y' dans l'état troublé, déterminé par les coordonnées $x + \alpha$ et $y + \beta$, nous aurons l'élasticité exprimée par la hauteur

$$\Pi + \frac{\alpha(EQ - FP) + \beta(FL - EM)}{LQ - MP}.$$

9. Pour mieux développer cette valeur et celle des lettres E et F, il faut remarquer qu'ayant posé

$$dx = LdX + MdY \quad \text{et} \quad dy = PdX + QdY,$$

nous aurons

$$\left(\frac{dL}{dY}\right) = \left(\frac{dM}{dX}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{dP}{dY}\right) = \left(\frac{dQ}{dX}\right)$$

et partant

$$E = \frac{h\left(P\left(\frac{dL}{dY}\right) - Q\left(\frac{dL}{dX}\right) - L\left(\frac{dP}{dY}\right) + M\left(\frac{dP}{dX}\right)\right)}{(LQ - MP)^2},$$

$$F = \frac{h\left(P\left(\frac{dM}{dY}\right) - Q\left(\frac{dL}{dY}\right) - L\left(\frac{dQ}{dY}\right) + M\left(\frac{dP}{dY}\right)\right)}{(LQ - MP)^2},$$

d'où nous tirons

$$= \frac{EQ - FP}{h\left(2PQ\left(\frac{dL}{dY}\right) - QQ\left(\frac{dL}{dX}\right) - PP\left(\frac{dM}{dY}\right) - (LQ + MP)\left(\frac{dP}{dY}\right) + MQ\left(\frac{dP}{dX}\right) + LP\left(\frac{dQ}{dY}\right)\right)}{(LQ - MP)^2},$$

$$= \frac{FL - EM}{h\left(2LM\left(\frac{dP}{dY}\right) - MM\left(\frac{dP}{dX}\right) - LL\left(\frac{dQ}{dY}\right) - (LQ + MP)\left(\frac{dL}{dY}\right) + MQ\left(\frac{dL}{dX}\right) + LP\left(\frac{dM}{dY}\right)\right)}{(LQ - MP)^2}.$$

Ensuite il faut aussi observer qu'il y a

$$L = \left(\frac{dx}{dX}\right), \quad M = \left(\frac{dx}{dY}\right), \quad P = \left(\frac{dy}{dX}\right) \quad \text{et} \quad Q = \left(\frac{dy}{dY}\right).$$

10. De là, si nous considérons dans l'état troublé un élément d'air $yprq$ (Fig. 2) dont la figure soit rectangle, les côtés étant $yp = \delta$ et $yq = \varepsilon$ et pris paralleles à nos coordonnées, nous pourrons pour les quatre points y, p, q, r déterminer l'élasticité. Car, ayant pour le point y l'élasticité $= \Pi$, pour le point p, dont les coordonnées sont $x + \delta$ et y (donc $\alpha = \delta$ et $\beta = 0$), l'élasticité sera $= \Pi + \frac{\delta(EQ - FP)}{LQ - MP}$. Ensuite pour le point q, dont les coordonnées sont x et $y + \varepsilon$ (donc $\alpha = 0$ et $\beta = \varepsilon$), l'élasticité sera $= \Pi + \frac{\varepsilon(FL - EM)}{LQ - MP}$.

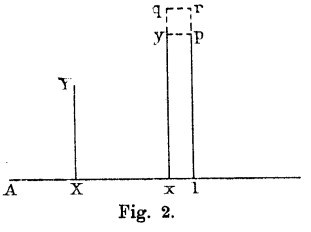

Fig. 2.

Et pour le point r, dont les coordonnées sont $x + \delta$ et $y + \varepsilon$ (donc $\alpha = \delta$ et $\beta = \varepsilon$) l'élasticité sera

$$= \Pi + \frac{\delta(EQ - FP) + \varepsilon(FL - EM)}{LQ - MP},$$

d'où nous pourrons déterminer la pression de l'air sur les quatre côtés du rectangle $ypqr$.

11. Le côté $yp = \delta$ ayant une épaisseur $= e$ et partant l'aire $= \delta e$, puisque les pressions en y et p sont inégales, si nous prenons un milieu, la

pression sur le côté yp sera égale au poids d'un volume d'air: pression sur yp

$$= \delta e\left(2\Pi + \frac{\delta(EQ-FP)}{2(LQ-MP)}\right).$$

De même sur le côté opposé qr nous aurons pression sur qr

$$= \delta e\left(2\Pi + \frac{\delta(EQ-EP)+2\varepsilon(FL-EM)}{2(LQ-MP)}\right).$$

Ensuite sur le côté $yq = \varepsilon e$, nous aurons la pression sur yq

$$= \varepsilon e\left(2\Pi + \frac{\varepsilon(FL-EM)}{2(LQ-MP)}\right)$$

et de la même maniere pression sur pr

$$= \varepsilon e\left(2\Pi + \frac{2\delta(EQ-FP)+\varepsilon(FL-EM)}{2(LQ-MP)}\right).$$

Puisque la différence entre les forces en y et q est égale à celle des forces en p et r, on voit bien que l'inégalité des forces ne trouble point l'effet.

12. Puisque ces forces agissent perpendiculairement sur les côtés, l'élément $ypqr$ sera poussé par les deux premieres forces suivant la direction yx par une force qui est

$$= \frac{\delta\varepsilon e(FL-EM)}{LQ-MP};$$

et les deux dernieres produisent ensemble une force

$$= \frac{\delta\varepsilon e(EQ-FP)}{LQ-MP}$$

selon xA. Ou bien l'élément $ypqr$ sera poussé par les deux forces suivantes: force suivant la direction Ax

$$= \frac{\delta\varepsilon e(FP-EQ)}{LQ-MP},$$

force suivant la direction xy

$$= \frac{\delta\varepsilon e(EM-FL)}{LQ-MP}.$$

Or le volume contenu dans ce rectangle $ypqr$ étant $= \delta\varepsilon e$, si nous le multiplions par la densité $\frac{1}{LQ-MP}$, la masse sera

$$= \frac{\delta\varepsilon e}{LQ-MP}.$$

13. Ayant trouvé ces forces sollicitantes, introduisons le tems t, et dans l'élément du tems dt nous pourrons assigner les accélérations suivant les mêmes directions. Si nous exprimons le tems t en secondes et que g marque la hauteur d'où un corps pesant tombe dans une seconde, les principes de Mécanique nous fournissent les équations suivantes

$$\frac{\delta\varepsilon e}{LQ-MP}\cdot\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 2g\cdot\frac{\delta\varepsilon e(FP-EQ)}{LQ-MP}$$

et

$$\frac{\delta\varepsilon e}{LQ-MP}\cdot\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2g\cdot\frac{\delta\varepsilon e(EM-FL)}{LQ-MP},$$

ou bien celles-ci

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 2g(FP-EQ) \quad \text{et} \quad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2g(EM-FL),$$

et maintenant il faut regarder x et y comme des fonctions non seulement des deux variables primitives X et Y, mais aussi du tems t.

14. Voilà la solution générale de notre probleme; mais, pour en faire l'application au cas que nous avons en vue, il faut regarder tous les changemens causés par l'agitation comme extrêmement petits, de même qu'on le suppose dans l'hypothese d'une seule dimension. Les différences entre x et X, de même qu'entre y et Y, seront donc extrêmement petites; pour tenir compte de cette circonstance, posons $x = X+p$ et $y = Y+q$; et les quantités p et q doivent être considérées comme évanouissantes. De là nous aurons

$$dX+dp = LdX+MdY \quad \text{et} \quad dY+dq = PdX+QdY$$

ou

$$dp = (L-1)dX+MdY \quad \text{et} \quad dq = PdX+(Q-1)dY,$$

et partant les quantités M et P seront extrêmement petites, et L et Q ne différeront de l'unité qu'extrêmement peu.

15. Donc, pour les agitations infiniment petites, nous aurons à peu près

$$L = 1, \quad M = 0, \quad P = 0 \quad \text{et} \quad Q = 1,$$

et ensuite

$$L = 1 + \left(\frac{dp}{dX}\right), \quad M = \left(\frac{dp}{dY}\right), \quad P = \left(\frac{dq}{dX}\right), \quad Q = 1 + \left(\frac{dq}{dY}\right),$$

d'où nous tirons

$$\left(\frac{dL}{dX}\right) = \left(\frac{ddp}{dX^2}\right), \quad \left(\frac{dL}{dY}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdY}\right) = \left(\frac{dM}{dX}\right), \quad \left(\frac{dM}{dY}\right) = \left(\frac{ddp}{dY^2}\right),$$

$$\left(\frac{dP}{dX}\right) = \left(\frac{ddq}{dX^2}\right), \quad \left(\frac{dP}{dY}\right) = \left(\frac{ddq}{dXdY}\right) = \left(\frac{dQ}{dX}\right), \quad \left(\frac{dQ}{dY}\right) = \left(\frac{ddq}{dY^2}\right).$$

De là, ayant $LQ - MP = 1$, nous aurons

$$E = h\left(-\left(\frac{ddp}{dX^2}\right) - \left(\frac{ddq}{dXdY}\right)\right) = -h\left(\frac{ddp}{dX^2}\right) - h\left(\frac{ddq}{dXdY}\right),$$

$$F = h\left(-\left(\frac{ddp}{dXdY}\right) - \left(\frac{ddq}{dY^2}\right)\right) = -h\left(\frac{ddq}{dY^2}\right) - h\left(\frac{ddp}{dXdY}\right),$$

et substituant ces valeurs, nous obtiendrons les deux équations suivantes pour la détermination du mouvement

$$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + 2gh\left(\frac{ddq}{dXdY}\right)$$

et

$$\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + 2gh\left(\frac{ddp}{dXdY}\right).$$

16. Au lieu des lettres p et q écrivons les lettres x et y, pour marquer mieux leur rapport avec les coordonnées principales X et Y, et nous aurons la solution suivante. Une particule d'air, qui dans l'état d'équilibre étoit en Y, les coordonnées étant $AX = X$ et $XY = Y$, se trouvera après une agitation infiniment petite quelconque, le tems écoulé étant $= t$, au point y, dont les coordonnées étant posées $Ax = X + x$ et $xy = Y + y$, les quantités x et y seront quasi infiniment petites et certaines fonctions des trois variables X, Y et t, dont la nature doit être déterminée par les deux équations suivantes

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddy}{dXdY}\right)$$

et

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddx}{dXdY}\right).$$

Tout revient donc à la résolution de ces deux équations, qui est sans doute incomparablement plus difficile que celle que nous avions trouvée pour le cas d'une seule dimension et qui se déduit aisément de ces formules, en posant $Y = 0$ et $y = 0$, d'où l'on obtient

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dX^2}\right).$$

17. D'abord j'observe qu'on peut satisfaire à ces deux équations en supposant

$$x = B\Phi : (\alpha X + \beta Y + \gamma t)$$

et

$$y = C\Phi : (\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

le signe Φ marquant une fonction quelconque de la quantité adjointe; et il ne s'agit que de déterminer les quantités constantes α, β, γ, B et C. Or, de là nous tirons

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = B\gamma\gamma\Phi'' : (\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = C\gamma\gamma\Phi'' : (\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddx}{dX^2}\right) = B\alpha\alpha\Phi'' : (\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddx}{dXdY}\right) = B\alpha\beta\Phi'' : (\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddy}{dY^2}\right) = C\beta\beta\Phi'' : (\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddy}{dXdY}\right) = C\alpha\beta\Phi'' : (\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

où il faut se souvenir que, posant $v = \Phi : u$, je me sers des signes suivans pour marquer la différentiation:

$$\frac{dv}{du} = \Phi' : u \quad \text{et} \quad \frac{ddv}{du^2} = \Phi'' : u.$$

18. Substituant ces valeurs et divisant par $\Phi'' : (\alpha X + \beta Y + \gamma t)$, nous obtiendrons les deux équations suivantes

$$\frac{B\gamma\gamma}{2gh} = B\alpha\alpha + C\alpha\beta \quad \text{et} \quad \frac{C\gamma\gamma}{2gh} = C\beta\beta + B\alpha\beta,$$

dont l'une divisée par l'autre donne

$$\frac{B}{C} = \frac{B\alpha\alpha + C\alpha\beta}{C\beta\beta + B\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta};$$

donc

$$B = \alpha \text{ et } C = \beta$$

et ensuite

$$\frac{\gamma\gamma}{2gh} = \alpha\alpha + \beta\beta$$

ou

$$\gamma = \sqrt{2gh}(\alpha\alpha + \beta\beta).$$

Maintenant on pourra joindre autant de telles fonctions qu'on voudra et on aura

$$x = \alpha\Phi:(\alpha X + \beta Y + t\sqrt{2gh}(\alpha\alpha + \beta\beta)) + \alpha'\Psi:(\alpha' X + \beta' Y + t\sqrt{2gh}(\alpha'\alpha' + \beta'\beta')) + \text{etc.},$$

$$y = \beta\Phi:(\alpha X + \beta Y + t\sqrt{2gh}(\alpha\alpha + \beta\beta)) + \beta'\Psi:(\alpha' X + \beta' Y + t\sqrt{2gh}(\alpha'\alpha' + \beta'\beta')) + \text{etc.},$$

où Φ, Ψ etc. marquent des fonctions quelconques; mais le même charactere signifie dans l'une et l'autre expression la même fonction; or, α, β, α', β' etc. sont des quantités constantes arbitraires.

19. Pour mettre cette solution plus clairement devant les yeux, soit P une fonction quelconque de

$$\alpha X + \beta Y + t\sqrt{2gh}(\alpha\alpha + \beta\beta),$$

P' une fonction quelconque de

$$\alpha' X + \beta' Y + t\sqrt{2gh}(\alpha'\alpha' + \beta'\beta'),$$

P'' une fonction quelconque de

$$\alpha'' X + \beta'' Y + t\sqrt{2gh}(\alpha''\alpha'' + \beta''\beta'')$$

etc.,

où l'on peut prendre pour α, β, α', β', α'', β'' etc. des nombres quelconques; et l'on aura pour la solution du probleme les formules suivantes

$$x = \alpha P + \alpha' P' + \alpha'' P'' + \alpha''' P''' + \text{etc.},$$

$$y = \beta P + \beta' P' + \beta'' P'' + \beta''' P''' + \text{etc.}$$

Si l'on suppose ici $t = 0$, on aura l'état au premier instant après l'agitation; lequel étant donné, il en faut convenablement déterminer les nombres α, α', β, β' etc. Cependant il s'en faut beaucoup que cette solution soit générale, à moins qu'on n'augmente à l'infini le nombre des formules P, P', P'' etc.

20. Faisons un autre effort pour résoudre nos deux équations trouvées (§ 16), qui renferment la solution de notre probleme. Posons

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) = v,$$

et nos deux équations deviendront

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{dv}{dX}\right)$$

et

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{dv}{dY}\right),$$

d'où nous tirons

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3x}{dt^2 dX}\right) = \left(\frac{ddv}{dX^2}\right)$$

et

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3y}{dt^2 dY}\right) = \left(\frac{ddv}{dY^2}\right).$$

Or, la premiere supposition donne

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^3x}{dt^2 dX}\right) + \left(\frac{d^3y}{dt^2 dY}\right),$$

d'où il s'ensuit

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dY^2}\right).$$

Voilà donc réduit notre probleme à l'invention d'une seule fonction v des trois variables t, X, Y, ce qui paroit être la route la plus aisée pour parvenir à la solution.

21. Puisque nous venons de trouver

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{dv}{dX}\right)$$

et

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{dv}{dY}\right),$$

la différentiation ultérieure donne

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3x}{dt^2dY}\right) = \left(\frac{ddv}{dXdY}\right) = \frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3y}{dt^2dX}\right).$$

Donc, posant

$$\left(\frac{dx}{dY}\right) = p \quad \text{et} \quad \left(\frac{dy}{dX}\right) = q,$$

nous aurons

$$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddq}{dt^2}\right),$$

d'où, traitant X et Y de constantes, nous en tirons par intégration

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} + M$$

et

$$p = q + Mt + N,$$

où M et N sont des fonctions quelconques de X et Y, de sorte que nous ayons

$$\left(\frac{dx}{dY}\right) - \left(\frac{dy}{dX}\right) = Mt + N,$$

laquelle étant jointe à l'une de nos deux équations principales contiendra aussi la solution du probleme.

22. De cette derniere équation nous concluons

$$\left(\frac{ddx}{dXdY}\right) = \left(\frac{ddy}{dX^2}\right) + t\left(\frac{dM}{dX}\right) + \left(\frac{dN}{dX}\right),$$

$$\left(\frac{ddy}{dXdY}\right) = \left(\frac{ddx}{dY^2}\right) - t\left(\frac{dM}{dY}\right) - \left(\frac{dN}{dY}\right)$$

et ces formules étant substituées dans nos équations principales donneront

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddx}{dY^2}\right) - t\left(\frac{dM}{dY}\right) - \left(\frac{dN}{dY}\right),$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddy}{dX^2}\right) + t\left(\frac{dM}{dX}\right) + \left(\frac{dN}{dX}\right),$$

où il faut remarquer que M et N sont des fonctions des deux variables X et Y seulement et qu'elles ne renferment point le tems t. De là on peut encore tirer une solution particuliere, prenant pour M et N des fonctions quelconques des deux variables X et Y:

$$x = \alpha t X + t\left(\frac{dM}{dY}\right) + \gamma X + \left(\frac{dN}{dY}\right),$$

$$y = \beta t Y - t\left(\frac{dM}{dX}\right) + \delta Y - \left(\frac{dN}{dX}\right).$$

Car de là il s'ensuit

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) = v = (\alpha + \beta)t + \gamma + \delta,$$

donc

$$\left(\frac{dv}{dX}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dv}{dY}\right) = 0.$$

23. Cette solution particuliere peut être jointe aux autres solutions particulieres données ci-dessus; car, si les valeurs $x = P$ et $y = Q$ fournissent une solution et aussi celles-ci $x = P'$ et $y = Q'$, on en pourra toujours former une solution nouvelle plus générale

$$x = \alpha P + \beta P'$$

et

$$y = \alpha Q + \beta Q'.$$

Or, ci-dessus j'ai indiqué une infinité de fonctions, dont chacune fournit une solution du probleme; les prenant donc toutes ensemble et y joignant encore les valeurs de x et y que je viens de trouver ici en dernier lieu, et qui ne semblent pas être comprises dans les précédentes, on aura une solution in-

finiment plus générale. Cependant il ne paroit pas encore, comment on doit déterminer toutes ces fonctions, pour que, posant $t = 0$, on obtienne une agitation initiale donnée. Cependant chaque solution particuliere se rapporte à un certain état initial, lequel étant supposé avoir lieu, on en pourra assigner pour tout tems l'agitation qui aura lieu dans l'air.

24. Pour en donner un exemple, considérons cette solution particuliere

$$x = \Phi : (X + t\sqrt{2gh}) + \Psi : (X - t\sqrt{2gh}),$$
$$y = \Sigma : (Y + t\sqrt{2gh}) + \Theta : (Y - t\sqrt{2gh}),$$

où les caracteres Φ, Ψ, Σ, Θ marquent des fonctions quelconques des quantités qui leur sont attachées, sans en excepter les fonctions irrégulieres et discontinues. Cela posé, ces formules donnent non seulement pour chaque tems proposé t les déplacemens x et y de chaque particule d'air, dont le lieu dans l'état d'équilibre est déterminé par les coordonnées X et Y, mais aussi le mouvement de cette même particule, qu'on connoit par les vitesses suivant la direction des coordonnées; et ces vitesses seront

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\Phi' : (X + t\sqrt{2gh}) - \Psi' : (X - t\sqrt{2gh})\right)\sqrt{2gh},$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\Sigma' : (Y + t\sqrt{2gh}) - \Theta' : (Y - t\sqrt{2gh})\right)\sqrt{2gh}.$$

25. Maintenant, pour l'état initial posant $t = 0$, on aura

$$x = \Phi : X + \Psi : X,$$
$$y = \Sigma : Y + \Theta : Y$$

et

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = (\Phi' : X - \Psi' : X)\sqrt{2gh},$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = (\Sigma' : Y - \Theta' : Y)\sqrt{2gh}.$$

Donc, si au commencement on a eu

$$x = \Gamma : X, \quad y = \Delta : Y,$$
$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \Lambda' : X \cdot \sqrt{2gh}, \quad \frac{dy}{dt} = \Xi' : Y \cdot \sqrt{2gh},$$

nos fonctions seront déterminées par celles-ci en sorte

$$\Phi : X + \Psi : X = \Gamma : X,$$
$$\Phi : X - \Psi : X = \Delta : X,$$
$$\Sigma : Y + \Theta : Y = \Delta : Y,$$
$$\Sigma : Y - \Theta : Y = \Xi : Y,$$

et partant

$$\Phi : X = \tfrac{1}{2}\Gamma : X + \tfrac{1}{2}\Delta : X, \quad \Psi : X = \tfrac{1}{2}\Gamma : X - \tfrac{1}{2}\Delta : X,$$
$$\Sigma : Y = \tfrac{1}{2}\Delta : Y + \tfrac{1}{2}\Xi : Y, \quad \Theta : Y = \tfrac{1}{2}\Delta : Y - \tfrac{1}{2}\Xi : Y,$$

d'où nos équations seront

$$x = \tfrac{1}{2}\Gamma : (X + t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Delta : (X + t\sqrt{2gh})$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Gamma : (X - t\sqrt{2gh}) - \tfrac{1}{2}\Delta : (X - t\sqrt{2gh}),$$

$$y = \tfrac{1}{2}\Delta : (Y + t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Xi : (Y + t\sqrt{2gh})$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Delta : (Y - t\sqrt{2gh}) - \tfrac{1}{2}\Xi : (Y - t\sqrt{2gh}).$$

26. Supposons ces fonctions telles, que

$$\Gamma : u, \quad \Delta : u, \quad \Delta : u \quad \text{et} \quad \Xi : u$$

soient toujours égales à zéro, excepté les seuls cas où $u = 0$, auquel leurs valeurs soient α, β, γ, δ infiniment petites, et l'on voit que l'agitation initiale aura été telle que pour $X = 0$ et $Y = 0$ on a $x = \alpha$ et $y = \gamma$, c'est à dire la ligne d'air BC (Fig. 3) a été poussée en bc et la ligne DE en de, tout le reste de l'air demeurant en repos au premier instant; les autres fonctions expriment les vitesses imprimées à ces lignes d'air au commencement. Cela posé, après un tems quelconque t, qu'on prenne

$$AP = AP' = t\sqrt{2gh} \quad \text{et} \quad AL = AL' = t\sqrt{2gh},$$

et toute la ligne QPR sera déplacée en qr par l'intervalle

$$= \tfrac{1}{2}\Gamma : 0 - \tfrac{1}{2}\Delta : 0 = \frac{\alpha - \beta}{2};$$

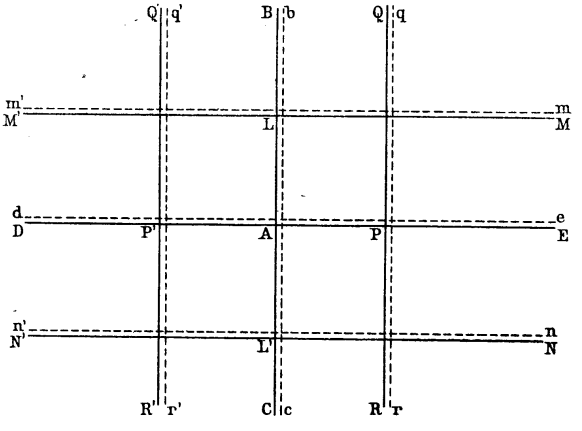

Fig. 3.

or, de l'autre côté la ligne $Q'P'R'$ se trouvera en $q'r'$ par l'intervalle

$$= \frac{1}{2} I' : 0 + \frac{1}{2} \mathcal{A} : 0 = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Ensuite, la ligne MLM' sera transportée en mm' par l'intervalle $= \frac{\gamma - \delta}{2}$ et la ligne $NL'N'$ en nn' par l'intervalle $= \frac{\gamma + \delta}{2}$. Or tout le reste sera en repos. Donc les ébranlemens originaires selon les lignes BC et ED sont continués par des lignes paralleles, sans se troubler mutuellement, avec une vitesse de $\sqrt{2gh}$ par seconde.

27. Pour le cas où l'agitation originaire n'aura subsisté que dans un très petit espace autour du point A, il est évident que les agitations produites se continueront par des cercles concentriques. Dans ce cas donc, les déplacemens x et y seront proportionnels aux coordonnées X et Y; pour cet effet posons

$$x = vX \quad \text{et} \quad y = vY$$

et nous aurons

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = X\left(\frac{dv}{dt}\right), \quad \left(\frac{dx}{dX}\right) = v + X\left(\frac{dv}{dX}\right), \quad \left(\frac{dx}{dY}\right) = X\left(\frac{dv}{dY}\right),$$

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = X\left(\frac{ddv}{dt^2}\right), \quad \left(\frac{ddx}{dX^2}\right) = 2\left(\frac{dv}{dX}\right) + X\left(\frac{ddv}{dX^2}\right), \quad \left(\frac{ddx}{dXdY}\right) = \left(\frac{dv}{dY}\right) + X\left(\frac{ddv}{dXdY}\right),$$

et de la même maniere

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = Y\left(\frac{ddv}{dt^2}\right), \quad \left(\frac{ddy}{dY^2}\right) = 2\left(\frac{dv}{dY}\right) + Y\left(\frac{ddv}{dY^2}\right), \quad \left(\frac{ddy}{dXdY}\right) = \left(\frac{dv}{dX}\right) + Y\left(\frac{ddv}{dXdY}\right),$$

d'où nos équations principales [§ 16] deviendront

$$\frac{X}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = 3\left(\frac{dv}{dX}\right) + X\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) + Y\left(\frac{ddv}{dXdY}\right),$$

$$\frac{Y}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = 3\left(\frac{dv}{dY}\right) + Y\left(\frac{ddv}{dY^2}\right) + X\left(\frac{ddv}{dXdY}\right).$$

28. Mais il est évident que v est une fonction seulement des deux variables t et $\sqrt{(XX+YY)}$; posons donc

$$\sqrt{(XX+YY)} = Z \quad \text{et} \quad dv = Mdt + NdZ;$$

d'où, puisque

$$dZ = \frac{XdX + YdY}{Z},$$

nous tirons

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = M,$$

$$\left(\frac{dv}{dX}\right) = \frac{NX}{Z} \quad \text{et} \quad \left(\frac{dv}{dY}\right) = \frac{NY}{Z}$$

et ensuite

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{dM}{dt}\right)$$

et

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) = \frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dX}\right) + \frac{N}{Z} - \frac{NXX}{Z^3} = \frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dX}\right) + \frac{NYY}{Z^3},$$

$$\left(\frac{ddv}{dXdY}\right) = \frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right) - \frac{NXY}{Z^3},$$

$$\left(\frac{ddv}{dY^2}\right) = \frac{Y}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right) + \frac{N}{Z} - \frac{NYY}{Z^3} = \frac{Y}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right) + \frac{NXX}{Z^3}.$$

Posons

$$dN = Pdt + QdZ = Pdt + \frac{QXdX + QYdY}{Z};$$

et puisque

$$\left(\frac{dN}{dX}\right) = \frac{QX}{Z}, \quad \left(\frac{dN}{dY}\right) = \frac{QY}{Z},$$

nous aurons

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) = \frac{QXX}{ZZ} + \frac{NYY}{Z^3},$$

$$\left(\frac{ddv}{dXdY}\right) = \frac{QXY}{ZZ} - \frac{NXY}{Z^3},$$

$$\left(\frac{ddv}{dY^2}\right) = \frac{QYY}{ZZ} + \frac{NXX}{Z^3}.$$

29. Ces valeurs étant substituées, nos équations deviendront

$$\frac{X}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \frac{3NX}{Z} + QX$$

et

$$\frac{Y}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \frac{3NY}{Z} + QY$$

et se réduisent par conséquent à une seule

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \frac{3N}{Z} + Q.$$

Or, puisque

$$N = \left(\frac{dv}{dZ}\right) \quad \text{et} \quad Q = \left(\frac{dN}{dZ}\right) = \left(\frac{ddv}{dZ^2}\right),$$

il s'agit de trouver pour v une telle fonction des deux variables t et Z qui satisfasse à cette équation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \frac{3}{Z}\left(\frac{dv}{dZ}\right) + \left(\frac{ddv}{dZ^2}\right).$$

Alors un point quelconque Z (Fig. 4), dont la distance au point fixe A est dans l'équilibre $AZ = Z$, sera transporté après le tems $= t$ par un espace

$$Zz = \sqrt{(xx + yy)} = vZ,$$

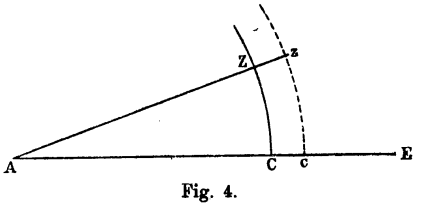

Fig. 4.

dont il s'éloignera du point fixe A. Si nous nommons cet éloignement $Zz = vZ = z$, de sorte que $v = \frac{z}{Z}$, nous aurons

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -\frac{z}{ZZ} + \frac{1}{Z}\left(\frac{dz}{dZ}\right) + \left(\frac{ddz}{dZ^2}\right).$$

30. Si cette équation admettoit une telle solution qu'il fût

$$z = P\Phi : (Z \pm t\sqrt{2gh}),$$

on en concluroit que la propagation des ébranlemens se fit avec la même vitesse que dans la premiere hypothese, qui seroit par conséquent moindre que selon l'expérience. Mais une telle forme substituée pour z ne satisfait point à notre équation, d'où l'on peut conclure que la propagation du son pourroit bien se faire avec une autre vitesse dans cette hypothese. Cependant on n'en sauroit rien conclure de positif, avant qu'on soit en état de résoudre généralement cette équation; mais, quoiqu'on en puisse aisément assigner plusieurs valeurs particulieres, il ne paroit pas comment on en pourroit déduire la valeur générale. Par cette raison on ne sauroit apporter trop de soins à perfectionner la partie de l'Analyse qui s'occupe à résoudre ces sortes d'équations.

CETTE MÊME RECHERCHE POUR L'HYPOTHESE DE TROIS DIMENSIONS

31. Dans l'état d'équilibre considérons un point quelconque Z (Fig. 5), dont la position soit déterminée par les trois coordonnées

$$AX = X, \quad XY = Y, \quad YZ = Z.$$

Or, après une agitation excitée dans l'air pour un tems donné, ce même point ait été transporté en z, dont le lieu soit déterminé par de semblables trois coordonnées

$$Ax = x, \quad xy = y, \quad yz = z,$$

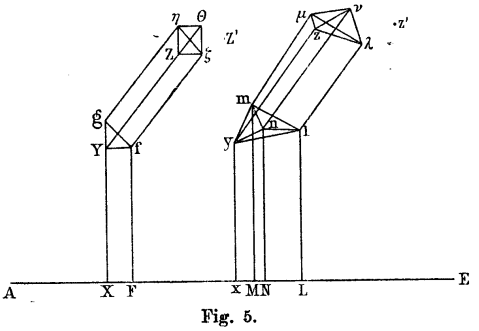

Fig. 5.

perpendiculaires entr'elles. Et il est clair que chacune de ces coordonnées sera une certaine fonction des trois principales X, Y, Z, qui répondent à l'état d'équilibre; posons donc

$$dx = LdX + MdY + NdZ,$$

$$dy = PdX + QdY + RdZ,$$

$$dz = SdX + TdY + VdZ,$$

car, quoiqu'elles renferment aussi le tems t, je n'en tiens pas encore compte, puisque je rapporte toutes ces recherches au même instant.

32. Considérons maintenant dans l'état d'équilibre une pyramide d'air infiniment petite $Z\zeta\eta\theta$ (Fig. 5), terminée par les quatre points Z, ζ, η, θ, auxquels répondent les coordonnées comme il suit:

du point	les trois coordonnées		
Z	X,	Y,	Z,
ζ	$X+\alpha$,	Y,	Z,
η	X,	$Y+\beta$,	Z,
θ	X,	Y,	$Z+\gamma$,

cette pyramide sera la sixieme partie du parallelepipede formé par les trois côtés α, β, γ, que je suppose infiniment petits. Donc, la solidité de cette pyramide sera $= \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$, dont la densité est supposée $= 1$ et l'élasticité exprimée par la hauteur h, en sorte qu'une colonne d'air naturel de cette hauteur tienne l'élasticité en équilibre.

33. Qu' après l'agitation cette même pyramide ait été transportée en $z\lambda\mu\nu$, dont les quatre angles seront déterminés chacun par les trois coordonnées suivantes:

du point	les trois coordonnées		
z	$Ax = x,$	$xy = y,$	$yz = z,$
λ	$AL = x + L\alpha,$	$Ll = y + P\alpha,$	$l\lambda = z + S\alpha,$
μ	$AM = x + M\beta,$	$Mm = y + Q\beta,$	$m\mu = z + T\beta,$
ν	$AN = x + N\gamma,$	$Nn = y + R\gamma,$	$n\nu = z + V\gamma.$

Or, la solidité de cette pyramide est égale à

$$ymnz\mu\nu + ylnz\lambda\nu + lmn\lambda\mu\nu - ylmz\lambda\mu$$

et partant, en prenant la solidité de chaque part,

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{1}{3}yln\,(yz + l\lambda + n\nu) \\ +\frac{1}{3}ymn\,(yz + m\mu + n\nu) \\ +\frac{1}{3}lmn\,(l\lambda + m\mu + n\nu) \\ -\frac{1}{3}ylm\,(yz + l\lambda + m\mu) \end{array}\right| = \left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}yln\,(3z + S\alpha + V\gamma) \\ +\frac{1}{3}ymn\,(3z + T\beta + V\gamma) \\ +\frac{1}{3}lmn\,(3z + S\alpha + T\beta + V\gamma) \\ -\frac{1}{3}ylm\,(3z + S\alpha + T\beta) \end{array}\right.$$

laquelle expression se réduit à celle-ci

$$-\tfrac{1}{3}S\alpha\cdot\triangle ymn - \tfrac{1}{3}T\beta\cdot\triangle yln + \tfrac{1}{3}V\gamma\cdot\triangle ylm.$$

34. Or, les aires de ces triangles se trouvent en sorte:

$$\triangle ymn = \tfrac{1}{2}xM(xy + Mm) + \tfrac{1}{2}MN(Mm + Nn) - \tfrac{1}{2}xN(xy + Nn),$$

$$\triangle yln = \tfrac{1}{2}xN(xy + Nn) + \tfrac{1}{2}LN(Ll + Nn) - \tfrac{1}{2}xL(xy + Ll),$$

$$\triangle ylm = \tfrac{1}{2}xM(xy + Mm) + \tfrac{1}{2}LM(Ll + Mm) - \tfrac{1}{2}xL(xy + Ll),$$

et partant les aires de ces triangles seront

$$\triangle ymn = \tfrac{1}{2}xM(2y + Q\beta) + \tfrac{1}{2}MN(2y + Q\beta + R\gamma) - \tfrac{1}{2}xN(2y + R\gamma)$$

ou

$$\triangle ymn = \tfrac{1}{2} Q\beta \cdot xN - \tfrac{1}{2} R\gamma \cdot xM;$$

$$\triangle yln = \tfrac{1}{2} xN(2y + R\gamma) + \tfrac{1}{2} LN(2y + P\alpha + R\gamma) - \tfrac{1}{2} xL(2y + P\alpha)$$

ou

$$\triangle yln = \tfrac{1}{2} R\gamma \cdot xL - \tfrac{1}{2} P\alpha \cdot xN;$$

$$\triangle ylm = \tfrac{1}{2} xM(2y + Q\beta) + \tfrac{1}{2} LM(2y + P\alpha + Q\beta) - \tfrac{1}{2} xL(2y + P\alpha)$$

ou

$$\triangle ylm = \tfrac{1}{2} Q\beta \cdot xL - \tfrac{1}{2} P\alpha \cdot xM.$$

Or

$$xL = L\alpha, \quad xM = M\beta \quad \text{et} \quad xN = N\gamma.$$

Donc

$$\triangle ymn = \tfrac{1}{2} NQ\beta\gamma - \tfrac{1}{2} MR\beta\gamma = \tfrac{1}{2}\beta\gamma(NQ - MR),$$

$$\triangle yln = \tfrac{1}{2} LR\alpha\gamma - \tfrac{1}{2} NP\alpha\gamma = \tfrac{1}{2}\alpha\gamma(LR - NP),$$

$$\triangle ylm = \tfrac{1}{2} LQ\alpha\beta - \tfrac{1}{2} MP\alpha\beta = \tfrac{1}{2}\alpha\beta(LQ - MP).$$

35. De là nous trouvons la solidité de notre pyramide

$$-\tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma S(NQ - MR) - \tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma T(LR - NP) + \tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma V(LQ - MP)$$

et partant la densité de l'air y sera

$$\frac{1}{LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT}$$

et par conséquent, si nous posons Π pour la hauteur qui y mesure l'élasticité, nous aurons

$$\Pi = \frac{h}{LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT}.$$

Cette quantité sera donc aussi une fonction des trois variables X, Y, Z, et si nous posons

$$d\Pi = Ed X + F dY + G dZ,$$

les quantités E, F, G se détermineront aisément par la différentiation de la valeur de Π, puisque

$$E = \left(\frac{d\Pi}{dX}\right), \quad F = \left(\frac{d\Pi}{dY}\right), \quad G = \left(\frac{d\Pi}{dZ}\right).$$

36. Si nous concevons dans l'état d'équilibre un point Z' infiniment proche de Z et déterminé par ces trois coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, il se trouvera maintenant en z', en sorte que les coordonnées seront

$$x + LdX + MdY + NdZ,$$
$$y + PdX + QdY + RdZ,$$
$$z + SdX + TdY + VdZ.$$

Donc, si la position du point z' infiniment proche de z est donnée par les coordonnées $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$, nous en pourrons trouver le lieu dans l'état d'équilibre. Car, si nous posons pour abréger

$$LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT = K,$$

de sorte que $\Pi = \frac{h}{K}$, nous aurons

$$dX = \frac{\alpha(QV - RT) + \beta(NT - MV) + \gamma(MR - NQ)}{K},$$
$$dY = \frac{\alpha(RS - PV) + \beta(LV - NS) + \gamma(NP - LR)}{K},$$
$$dZ = \frac{\alpha(PT - QS) + \beta(MS - LT) + \gamma(LQ - MP)}{K}.$$

37. De là l'élasticité en z étant $= \frac{h}{K} = \Pi$, elle sera en z'

$$= \Pi + EdX + FdY + GdZ;$$

donc, si nous posons pour abréger

$$E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) = A,$$
$$E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) = B,$$
$$E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) = C,$$

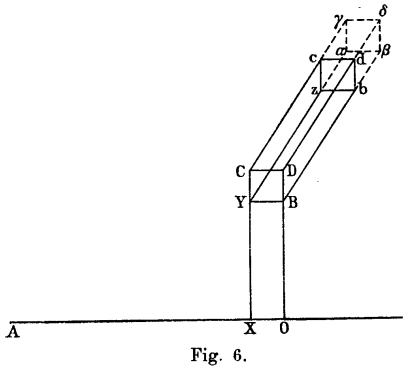

Fig. 6.

l'élasticité en z' sera

$$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}.$$

Or, la densité en z est $= \frac{1}{K}$. Donc, si nous considérons un parallelepipede rectangle infiniment petit $zbcd\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 6), dont les côtés soient paralleles à nos trois coordonnées, et que nous nommions

$$zb = \alpha, \quad zc = \beta, \quad z\alpha = \gamma,$$

la solidité de ce parallelepipede sera $= \alpha\beta\gamma$ et la masse d'air qui y est contenue $= \frac{\alpha\beta\gamma}{K}$.

38. Voyons maintenant les forces dont ce parallelepipede sera sollicité; pour cet effet, cherchons l'élasticité à chacun de ses angles, ce qui se fera aisément par les trois coordonnées qui répondent à chacun:

du point	les coordonnées			l'élasticité
z	$x,$	$y,$	z	$\Pi,$
b	$x+\alpha,$	$y,$	z	$\Pi + \frac{A\alpha}{K},$
c	x	$y+\beta,$	z	$\Pi + \frac{B\beta}{K},$
d	$x+\alpha,$	$y+\beta,$	z	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta}{K},$
α	$x,$	$y,$	$z+\gamma$	$\Pi + \frac{C\gamma}{K},$
β	$x+\alpha,$	$y,$	$z+\gamma$	$\Pi + \frac{A\alpha + C\gamma}{K},$
γ	$x,$	$y+\beta,$	$z+\gamma$	$\Pi + \frac{B\beta + C\gamma}{K},$
δ	$x+\alpha,$	$y+\beta,$	$z+\gamma$	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}.$

39. Pour trouver la force dont le parallelepipede est poussé vers la direction AX, considérons les faces $zc\alpha\gamma$ et $bd\beta\delta$, et nous voyons que toutes les pressions sur la face $bd\beta\delta$ surpassent celles qui agissent sur l'autre $zc\alpha\gamma$ de la quantité $\frac{A\alpha}{K}$. Donc, l'aire de chacune de ces deux faces étant $= \beta\gamma$, il en résulte une force selon la direction Ax

$$= -\frac{A\alpha\beta\gamma}{K}.$$

De la même maniere les forces qui agissent sur la face $cd\gamma\delta$ surpassent celles qui agissent sur la face $zb\alpha\beta$ de la quantité $\frac{B\beta}{K}$; donc, l'aire de ces faces étant $= \alpha\gamma$, il en résulte une force selon la direction xy

$$= -\frac{B\alpha\beta\gamma}{K}.$$

Enfin, les forces qui agissent sur la face $\alpha\beta\gamma\delta$ surpassent celles qui agissent sur la face $zbcd$ de la quantité $\frac{C\gamma}{K}$; donc, l'aire de ces faces étant $= \alpha\beta$, il en résulte une force dans la direction yz

$$= -\frac{C\alpha\beta\gamma}{K}.$$

40. Après avoir trouvé ces forces selon les directions de nos trois coordonnées, le parallelepipede, dont la masse est $= \frac{\alpha\beta\gamma}{K}$, recevra les accélérations suivantes:

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = -2gA, \quad \text{suivant} \quad Ax,$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -2gB, \quad \text{suivant} \quad xy,$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -2gC, \quad \text{suivant} \quad yz,$$

où l'on n'a qu'à mettre pour A, B, C les valeurs supposées cidessus. Mais ici, considérant les agitations comme extrêmement petites, pour en tenir compte posons

$$x = X + p, \quad y = Y + q \quad \text{et} \quad z = Z + r,$$

de sorte que p, q, r soient des quantités quasi infiniment petites; et partant on aura

$$dp = (L-1)dX + MdY + NdZ,$$

$$dq = PdX + (Q-1)dY + RdZ,$$

$$dr = SdX + TdY + (V-1)dZ.$$

41. De là nous aurons à peu près

$$L = 1,\ M = 0,\ N = 0,\ P = 0,\ Q = 1,\ R = 0,\ S = 0,\ T = 0,\ V = 1,$$

donc $K = 1$, en tant que nous n'en considérions les différentiels; mais pour le différentiel de Π nous aurons

$$E = \left(\frac{d\Pi}{dX}\right) = -\left(\left(\frac{dL}{dX}\right) + \left(\frac{dQ}{dX}\right) + \left(\frac{dV}{dX}\right)\right)h,$$

$$F = \left(\frac{d\Pi}{dY}\right) = -\left(\left(\frac{dL}{dY}\right) + \left(\frac{dQ}{dY}\right) + \left(\frac{dV}{dY}\right)\right)h,$$

$$G = \left(\frac{d\Pi}{dZ}\right) = -\left(\left(\frac{dL}{dZ}\right) + \left(\frac{dQ}{dZ}\right) + \left(\frac{dV}{dZ}\right)\right)h.$$

Ensuite nous trouvons

$$A = E,\quad B = F,\quad C = G$$

et enfin, pour éliminer les autres lettres, remarquons que

$$L = 1 + \left(\frac{dp}{dX}\right),\quad Q = 1 + \left(\frac{dq}{dY}\right),\quad V = 1 + \left(\frac{dr}{dZ}\right)$$

et outre les coordonnées principales X, Y, Z avec le tems t nous n'aurons que les trois petites quantités p, q, r, qui marquent le déplacement de chaque point.

42. Substituons donc ces valeurs, et le mouvement de l'air causé par une agitation quelconque, mais extrêmement petite, sera déterminé par les trois équations suivantes:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ}\right),$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dYdZ}\right),$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdZ}\right) + \left(\frac{ddq}{dYdZ}\right) + \left(\frac{ddr}{dZ^2}\right),$$

ou bien, si nous posons

$$\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = v,$$

nos équations prendront les formes suivantes

$$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dX}\right), \quad \left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dY}\right), \quad \left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

d'où nous concluons

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dZ^2}\right),$$

où il n'y a qu'une seule variable inconnue, v.

43. Voilà donc la solution du probleme sur la propagation du son ayant égard à toutes les dimensions de l'air. Un élément d'air, dont le lieu dans l'état d'équilibre est déterminé par les trois coordonnées X, Y, Z, se trouvera après le tems t dans un lieu déterminé par les coordonnées $X+x$, $Y+y$, $Z+z$, où x, y, z sont telles fonctions des quatre variables X, Y, Z et t dont la nature est exprimée par les équations suivantes:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddy}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddz}{dXdZ}\right),$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddy}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dYdZ}\right),$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dXdZ}\right) + \left(\frac{ddy}{dYdZ}\right) + \left(\frac{ddz}{dZ^2}\right).$$

Ou bien, posant

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) + \left(\frac{dz}{dZ}\right) = v,$$

on aura

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dX}\right),\ \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dY}\right),\ \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dZ}\right)$$

et

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dZ^2}\right).$$

44. Il n'est pas difficile de trouver une infinité de solutions particulieres; on n'a qu'à poser

$$x = A\Phi : (\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

$$y = B\Phi : (\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

$$z = C\Phi : (\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

et l'on obtiendra les égalités suivantes:

$$\frac{A\alpha\alpha}{2gh} = A\beta\beta + B\beta\gamma + C\beta\delta = \beta(A\beta + B\gamma + C\delta),$$

$$\frac{B\alpha\alpha}{2gh} = A\beta\gamma + B\gamma\gamma + C\gamma\delta = \gamma(A\beta + B\gamma + C\delta),$$

$$\frac{C\alpha\alpha}{2gh} = A\beta\delta + B\gamma\delta + C\delta\delta = \delta(A\beta + B\gamma + C\delta),$$

d'où il s'ensuit

$$A = \beta,\quad B = \gamma,\quad C = \delta \quad \text{et} \quad \alpha = \sqrt{2gh(\beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta)}.$$

Or, on peut prendre à volonté les trois nombres β, γ, δ, et partant on aura une infinité de pareilles fonctions qui, étant ajoutées ensemble, donneront des valeurs convenables pour les inconnues x, y, z.

45. Tirons de là le cas où les agitations partant d'un point A se répandent en tout sens également. Alors on aura $x = Xs$, $y = Ys$, $z = Zs$ et s sera une fonction des deux quantités t et $\sqrt{(XX + YY + ZZ)}$. Posons $V = \sqrt{(XX + YY + ZZ)}$, de sorte que V marque la distance du point Z au centre A dans l'état d'équilibre; et puisque

$$ds = dt\left(\frac{ds}{dt}\right) + dV\left(\frac{ds}{dV}\right)$$

ou bien

$$ds = dt\left(\frac{ds}{dt}\right) + \frac{X\,dX}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{Y\,dY}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{Z\,dZ}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),$$

nous aurons

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) = s + \frac{X\,X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),\quad \left(\frac{dy}{dY}\right) = s + \frac{Y\,Y}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),\quad \left(\frac{dz}{dZ}\right) = s + \frac{Z\,Z}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),$$

donc

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) + \left(\frac{dz}{dZ}\right) = 3s + V\left(\frac{ds}{dV}\right).$$

Maintenant, ayant

$$\left(\frac{ds}{dX}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),\quad \left(\frac{dV}{dX}\right) = \frac{X}{V} \quad \text{et} \quad \left(\frac{ddsdV}{dVdX}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{ddsdV}{dV^2}\right),$$

car puisque en général

$$\left(\frac{du}{dX}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{du}{dV}\right)$$

posant $u = \left(\frac{ds}{dV}\right)$ nous aurons

$$\left(\frac{ddsdV}{dXdV}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{ddsdV}{dV^2}\right),$$

la premiere équation sera

$$\frac{X}{2gh}\left(\frac{ddsdV}{dt^2}\right) = \frac{3X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + X\left(\frac{ds}{dV^2}\right),$$

ou bien

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddsdV}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{ddsdV}{dV^2}\right)$$

et à cette même équation aussi les autres conduiront.

46. Le point Z s'éloignera directement du centre par le petit intervalle $sV(XX + YY + ZZ) = Vs$; donc, si nous posons cet intervalle $Vs = u$, à cause de $s = \frac{u}{V}$ nous aurons

$$\left(\frac{ddsdV}{dt^2}\right) = \frac{1}{V}\left(\frac{ddudV}{dt^2}\right),\quad \left(\frac{ds}{dV}\right) = -\frac{u}{VV} + \frac{1}{V}\left(\frac{du}{dV}\right)$$

et

$$\left(\frac{ddsdV}{dV^2}\right) = \frac{2u}{V^3} - \frac{2}{VV}\left(\frac{du}{dV}\right) + \frac{1}{V}\left(\frac{ddudV}{dV^2}\right),$$

d'où l'intervalle du déplacement u sera exprimé par cette équation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = -\frac{2u}{VV} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right).$$

C'est donc de la résolution de cette équation que dépend la propagation du son par l'air étendu en tout sens. Puisque cette équation est différente de celle que nous avons trouvée pour le cas de deux dimensions, la propagation du son sera aussi différente.

47. Or, pour trouver une solution générale de nos formules du § 43, qu'on prenne

O fonction quelconque de $\alpha X + \beta Y + \gamma Z \pm t\sqrt{2gh}(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)$,

O' fonction quelconque de $\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z \pm t\sqrt{2gh}(\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma')$,

O'' fonction quelconque de $\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z \pm t\sqrt{2gh}(\alpha''\alpha'' + \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'')$

etc.

en augmentant le nombre de telles fonctions à l'infini, puisque α, β, γ, α', β', γ' etc. sont des nombres arbitraires. Ensuite soient L, M, N, P, Q, R des fonctions quelconques des trois variables X, Y, Z, sans qu'elles renferment le tems t, et on aura les valeurs suivantes pour les variables cherchées x, y, z:

$$x = \alpha O + \alpha' O' + \alpha'' O'' + \text{etc.} + t\left(\frac{dd(L-M)}{dYdZ}\right) + \left(\frac{dd(P-Q)}{dYdZ}\right),$$

$$y = \beta O + \beta' O' + \beta'' O'' + \text{etc.} + t\left(\frac{dd(M-N)}{dXdZ}\right) + \left(\frac{dd(Q-R)}{dXdZ}\right),$$

$$z = \gamma O + \gamma' O' + \gamma'' O'' + \text{etc.} + t\left(\frac{dd(N-L)}{dXdY}\right) + \left(\frac{dd(R-P)}{dXdY}\right),$$

d'où l'on connoitra aussi les vitesses

$$\left(\frac{dx}{dt}\right),\ \left(\frac{dy}{dt}\right),\ \left(\frac{dz}{dt}\right)$$

de chaque particule d'air pour chaque moment.

48. Posant ensuite $t = 0$, on aura l'état où l'air se trouve immédiatement après la premiere agitation qui lui aura été imprimée; les formules que nous venons de trouver marqueront pour cet instant tant les trois déplacemens x, y, z, arrivés à chaque particule d'air, que les trois vitesses qui leur auront été imprimés; c'est en quoi consiste l'état initial. Or, cet état étant donné, il s'agit de déterminer convenablement toutes les fonctions O, O', O'' etc. avec leurs nombres respectifs α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' etc., de même que les fonctions L, M, N, P, Q, R, pour que l'état initial qui en résulte convienne précisément avec celui qui est proposé. Mais c'est ici qu'on rencontre la plus grande difficulté, et il est encore fort douteux, si nos formules, quoiqu'on augmente leurs nombres à l'infini, s'étendent à tous les cas possibles; du moins seroit-il fort à souhaiter, qu'on trouvât moyen de les représenter sous une forme finie et plus commode.