BnF Gallica

Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides / par M. d'Alembert,...

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

BnF Gallica

Alembert, D' (1717-1783). Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides / par M. d'Alembert,.... 1752.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter
reutilisationcommerciale@bnf.fr.

[illegible] Ouvrage de M. D'Alembert.
est dedié à M. le Marquis d'Argenson Ministre
retiré du Conseil plus de 5. ans avant que
cet Ouvrage parut. Voyez la lettre dud.
de l'Auteur qui est à la tête et qu'il écrivit
à M. le Mis. D'Argenson en lui envoyant
celivre. M. D'Alembert celui avoit
dedié sans l'en prevenir.).

Je crois cet ouvrage une nouvelle Edon. de celui intitulé
Traité de l'Equilibre et du mouvement des fluides
que M. D'alembert avoit publié en 1744. et dont
Il est fait mention dans l'hist. de l'Academie de
cette année. p. 56. Cependt. M. D'alembert ne dit rien
ni dans l'Epître dédicatoire ni dans la preface, qui
rapele las. Edon. de l'ouvrage.

SA
9285.



Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

ESSAI
D'UNE
NOUVELLE THEORIE
DE LA
RÉSISTANCE DES FLUIDES.

Par M. D'ALEMBERT, *de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, & de la Société Royale de Londres.*

BIBLIOTHEQUE DE L'UNIVERSITÉ

A PARIS,
Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue S. Jacques, à la Plume d'or.

M D C C L I I.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

4° Sc A 3639 (Rés m-)

BIBLIOTHEQUE DE L'ARSENAL

Monsieur

Je vous dois sans doute des excuses d'oser vous dédier
cet ouvrage sans vous en avoir demandé la permission :
Mais, ou votre modestie n'auroit pas accepté mon hommage,
et je voulois me satisfaire ; ou elle m'auroit interdit
tout éloge, et je voulois dire à mon aise la verité. je
vous prie d'être bien persuadé que de tout ce que j'ay ecrit

ou que j'écrirai jamais, rien ne me sera plus cher et
plus precieux que les trois premieres pages de ce Livre.
oserois je me flatter que vous voudrez bien les recevoir,
comme le present d'un Philosophe, & comme le seul
temoignage, mais le plus authentique que je puisse
vous donner du respect & de l'attachement inviolable
avec les quels je serai toute ma vie

BIBLIOTHEQUE DE L'ARSENAL

Monsieur

ce Vendredy 13

Votre très humble
et très obeissant serviteur
D'Alembert

A MONSEIGNEUR
LE MARQUIS D'ARGENSON,
MINISTRE D'ETAT.

MONSEIGNEUR,

Les Savans & des Ecrivains célébres qui vous approchent en ſi grand nombre, applaudiront à l'hommage que je vous rends. Le reſpect qu'ils

vous témoignent eſt d'autant plus ſincere, que l'attachement en eſt le principe, & d'autant plus juſte que vous ne penſez pas à l'exiger. Vous devez, MONSEIGNEUR, *un ſentiment ſi flatteur & ſi vrai, à cette familiarité ſans orgueil avec laquelle vous accueillez les talens, & qui ſeule peut rendre la ſociété des Grands & des gens de Lettres également digne des uns & des autres. Votre commerce, utile & agréable par une étendue de connoiſſances qui vous aſſure le ſuffrage de la partie la plus éclairée de notre Nation, eſt encore pour tous ceux qui vous environnent une leçon continuelle de modeſtie, de candeur, d'amour du bien public, & de toutes les vertus que notre ſiécle ſe contente d'eſtimer. Philoſophe enfin dans vos ſentimens & dans votre conduite, vous joignez à cette qualité trop rare, & qui en renferme tant d'autres, le mérite plus rare encore de l'avoir ſans oſtentation. Puiſſe votre exemple,* MONSEIGNEUR, *& celui de votre*

illuſtre Maiſon, apprendre à la plûpart de nos Mécènes, trop multipliés aujourd'hui pour la gloire & le bien des Lettres, que le vrai moyen d'honorer le mérite en le protégeant, eſt de s'honorer ſoi-même par la maniére dont on le diſtingue. Je ſuis avec un profond reſpect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéiſſant
ſerviteur, D'ALEMBERT.

Extrait des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

MEſſieurs NICOLE & LE MONNIER, qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. D'ALEMBERT, qui a pour titre : *Eſſai d'une nouvelle Théorie de la réſiſtance des Fluides*, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impreſſion : En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris le 22 Décembre 1751.

GRAND-JEAN DE FOUCHY, *Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.*

INTRODUCTION.

QUOIQUE la Phyſique des Anciens ne fut ni auſſi déraiſonnable, ni auſſi bornée que le penſent ou que le diſent quelques Philoſophes modernes, il paroît cependant qu'ils n'étoient pas fort verſés dans les ſciences qu'on appelle Phyſico-Mathématiques, & qui conſiſtent dans l'application du calcul aux phenomenes de la nature. La matiére que j'entreprends de traiter dans cet Ouvrage, eſt une de celles qu'ils paroiſſent avoir le moins étudiées ſous ce point de vûe. Je dis ſous ce point de vûe; car la connoiſſance de la réſiſtance des Fluides étant d'une néceſſité abſolue pour la conſtruction des Navires qu'ils avoient peut être pouſſée plus loin que nous, cette connoiſſance ne ſauroit leur avoir manqué juſqu'à un certain point : il eſt plus que vraiſemblable que l'expérience avoit

fourni de bonne heure quelques régles pour déterminer le choc & la preſſion des eaux. Mais ces régles, bornées ſans doute à la pratique, &, pour ainſi dire, de pure tradition, ne ſont point parvenues juſqu'à nous.

A l'égard de la Théorie de cette réſiſtance, il n'eſt pas ſurprenant que les Anciens l'ayent ignorée. On doit même, s'il eſt permis de parler ainſi, leur tenir compte de leur ignorance, de n'avoir point voulu atteindre à ce qu'il leur étoit impoſſible de ſavoir, & de n'avoir point cherché à faire croire qu'ils y étoient parvenus. C'eſt à la plus ſubtile geométrie qu'il eſt permis de tenter cette Théorie ; & la geométrie des Anciens, d'ailleurs très-profonde & très-ſavante, ne pouvoit aller juſques-là. Il y a bien de l'apparence qu'ils l'avoient ſenti : car leur méthode de philoſopher étoit plus ſage que nous ne l'imaginons communément. Les Geométres modernes ont ſçu ſe procurer à cet égard plus de ſecours, non parce qu'ils ont été ſupérieurs aux Anciens, mais parce qu'ils ſont venus depuis. L'invention des calculs différentiel & intégral, nous a mis en état de ſuivre en quelque maniére le mouvement des corps juſques

ques dans leurs élémens ou dernieres particules. C'eſt avec le ſecours ſeul de ces calculs qu'il eſt permis de pénétrer dans les Fluides, & de découvrir le jeu de leurs parties, l'action qu'exercent les uns ſur les autres ces atômes innombrables dont un Fluide eſt compoſé, & qui paroiſſent tout à la fois unis & diviſés, dépendans & indépendans les uns des autres. Auſſi le méchaniſme intérieur des Fluides, ſi peu analogue à celui des corps ſolides que nous touchons, & ſujet à des loix toutes différentes, devroit être pour les Philoſophes un objet particulier d'admiration, ſi l'étude de la nature, des phenomenes les plus ſimples, des élémens même de la Matiére, ne les avoit accoutumés à ne s'étonner de rien, ou plutôt à s'étonner également de tout. Auſſi peu éclairés que le peuple ſur les premiers principes de toutes choſes, ils n'ont & ne peuvent avoir d'avantage que dans la combinaiſon qu'ils font de ces principes, & les conſéquences qu'ils en tirent; & c'eſt dans cette eſpéce d'analyſe, que les Mathématiques leur ſont utiles. Cependant avec ce ſecours même, la réſiſtance des Fluides renferme encore des difficultés ſi conſidérables, que les efforts des plus

grands hommes ſe ſont bornés juſqu'ici à nous en donner une légere ebauche.

Après avoir réflechi longtems ſur cette importante matiére, avec toute l'attention dont je ſuis capable, il m'a paru que le peu de progrès qu'on y a fait juſqu'à préſent, vient de ce que l'on n'a pas encore ſaiſi les vrais principes, d'après leſquels il faut la traiter. J'ai donc cru devoir m'appliquer à chercher ces principes & la maniére d'y appliquer le calcul, s'il eſt poſſible. Car il ne faut point confondre ces deux objets, & les Geométres modernes n'ont peut-être pas été aſſez attentifs ſur ce point. C'eſt ſouvent le deſir de pouvoir faire uſage du calcul qui les détermine dans le choix des principes, au lieu qu'ils devroient examiner d'abord les principes en eux-mêmes, ſans ſonger d'avance à les plier de force au calcul. La Geométrie qui ne doit qu'obéir à la Phyſique quand elle ſe réunit avec elle, lui commande quelquefois. S'il arrive que la queſtion qu'on veut examiner ſoit trop compliquée pour que tous les élémens puiſſent entrer dans la comparaiſon analytique qu'on en veut faire, on ſépare les plus incommodes, on leur en ſubſtitue d'au-

tres, moins gênans, mais auſſi moins réels, & l'on eſt étonné de n'arriver, malgré un travail pénible, qu'à un réſultat contredit par la nature; comme ſi après l'avoir déguiſée, tronquée ou altérée, une combinaiſon purement méchanique pouvoit nous la rendre.

Je me ſuis propoſé d'éviter cet inconvénient dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui. J'ai cherché les principes de la réſiſtance des Fluides, comme ſi l'Analyſe ne devoit y entrer pour rien, & ces principes une fois trouvés, j'ai eſſayé d'y appliquer l'Analyſe. Mais avant que de rendre compte de mon travail & du degré auquel je l'ai pouſſé, il ne ſera pas inutile d'expoſer ce qui a été fait juſqu'à préſent ſur cette queſtion.

Newton, à qui la Phyſique & la Geométrie ſont ſi redevables, eſt le premier, que je ſache, qui ait entrepris de déterminer par les principes de la Méchanique la réſiſtance qu'éprouve un corps mû dans un Fluide, & de confirmer ſa Théorie par des expériences. Ce grand Philoſophe pour arriver plus facilement à la ſolution d'une queſtion ſi épineuſe, & peut-être pour la préſenter d'une maniére plus générale, envi-

ſage un Fluide ſous deux points de vûe différens. Il le regarde d'abord comme un amas de corpuſcules élaſtiques, qui tendent à s'écarter les uns des autres par une force centrifuge ou répulſive, & qui ſont diſpoſés librement à des diſtances égales. Il ſuppoſe outre cela, que cet amas de corpuſcules qui compoſe le milieu réſiſtant, ait fort peu de denſité par rapport à celle du corps, enſorte que les parties du Fluide pouſſées par le corps, puiſſent ſe mouvoir librement, ſans communiquer aux parties voiſines le mouvement qu'elles ont reçu. D'après cette hypotheſe, M. Newton trouve & démontre les loix de la réſiſtance d'un tel Fluide; loix aſſez connues, pour que nous nous diſpenſions de les rapporter ici. Il réſulte de ces loix que la réſiſtance d'un cylindre dans un pareil Fluide, c'eſt-à-dire la force qui retarde à chaque inſtant ſon mouvement, eſt égale au poids d'un cylindre de Fluide de même baſe, & dont la hauteur ſeroit double de celle d'où un corps peſant devroit tomber pour acquérir la viteſſe actuelle avec laquelle le cylindre ſe meut: M. Newton fait voir encore que dans cette même ſuppoſition, la réſiſtance d'un Globe ſeroit la

moitié de celle qu'éprouveroit le cylindre circonſcrit.

Le célébre Jean Bernoulli dans ſon Ouvrage qui a pour titre : *Diſcours ſur les loix de la communication du Mouvement*, a déterminé d'après la même hypotheſe la réſiſtance des Fluides ; il repréſente cette réſiſtance par une formule aſſez ſimple. J'en ai donné dans un de mes Ouvrages la démonſtration, que M. Bernoulli avoit ſupprimée ; démonſtration dont j'ai fait voir de plus la généralité, quelque figure & quelqu'arrangement qu'on ſuppoſe dans les parties du Fluide.

Mais il faut avouer que cette formule eſt inſuffiſante pour déterminer la réſiſtance que nous cherchons. Dans tous les Fluides qui nous ſont connus, les particules ſont immédiatement contiguës par quelques-uns de leurs points, ou du moins agiſſent les unes ſur les autres à peu près comme ſi elles l'étoient. Ainſi tout corps mû dans un Fluide pouſſe néceſſairement à la fois & au même inſtant un grand nombre de particules ſituées dans la même ligne, & dont chacune reçoit une viteſſe & une direction différente, eu égard à ſa ſituation. Il eſt donc ex-

trêmement difficile de déterminer le mouvement communiqué à toutes ces particules, & par conſéquent le mouvement que le corps perd à chaque inſtant.

Ces réflexions n'avoient pas échappé à M. Newton. Il reconnoît que ſa Théorie de la réſiſtance d'un Fluide compoſé de globules élaſtiques clairſemés, ſi on peut parler ainſi, ne ſauroit s'appliquer ni aux Fluides denſes & continus, dont les particules ſe touchent immédiatement, tels que l'eau, l'huile, le mercure; ni aux Fluides dont l'élaſticité vient d'une autre cauſe que de la force centrifuge de leurs parties, par exemple de la compreſſion & de l'expanſion de ces parties, tel que paroît être l'air que nous reſpirons; il reconnoît de plus, que dans le cas même où le Fluide ſeroit tel qu'il l'imagine, on doit ſuppoſer encore que la viteſſe du corps mû ſoit aſſez grande, pour que les forces centrifuges des parties du Fluide n'ayent pas le tems d'agir, & d'altérer par cette action la réſiſtance qui vient de la ſeule force d'inertie. D'où il s'enſuit que cette premiere partie de la Théorie de M. Newton, & celle de M. Bernoulli qui n'en eſt proprement que le commen-

taire, ſont plutôt une recherche de pure curioſité, qu'elles ne ſont applicables à la nature.

Auſſi l'illuſtre Philoſophe Anglois n'a pas cru devoir s'en tenir là. Il conſidére les Fluides dans l'état de compreſſion où ils ſont réellement, compoſés de particules contiguës les unes aux autres; & c'eſt le ſecond point de vûe ſous lequel il les enviſage. La Méthode qu'il employe dans cette nouvelle hypotheſe pour réſoudre le Problême, conſiſte à chercher d'abord la viteſſe d'une veine de Fluide qui s'échappe d'un vaſe cylindrique par un trou horizontal fait au fond du vaſe, & la preſſion que ſouffriroit une ſurface plane circulaire expoſée à l'action de cette veine. M. Newton employe pour déterminer cette preſſion, une eſpece d'approximation & de tatonnement dont il nous ſeroit difficile de donner ici l'idée à nos Lecteurs; nous nous contenterons d'obſerver que cette preſſion dépend de la hauteur du Fluide, ou, ce qui revient au même, de la viteſſe avec laquelle il s'échappe, du diamétre du trou, & de celui du cercle. Augmentant enſuite à l'infini la capacité du vaſe & même le diamétre du trou, & ſubſtituant le mouvement de la ſurface circulaire à celui du

Fluide, M. Newton trouve que la réſiſtance éprouvée par cette ſurface eſt égale au poids d'un Cylindre dont elle ſeroit la baſe, & qui auroit pour hauteur la moitié de celle d'où un corps peſant devroit tomber pour acquérir une viteſſe égale à la viteſſe actuelle de la ſurface circulaire. Le poids d'un tel cylindre peut donc repréſenter, ſuivant M. Newton, la réſiſtance qu'éprouve à chaque inſtant un Cylindre ſolide de longueur quelconque, qui auroit pour baſe antérieure la ſurface circulaire dont il s'agit; car quelle que ſoit la longueur du Cylindre, cette baſe eſt la ſeule partie expoſée au choc du Fluide. Enfin, par un raiſonnement dont nous parlerons plus bas, M. Newton égale la réſiſtance d'un globe à celle du Cylindre circonſcrit; & parvient à cette concluſion, qu'un Fluide denſe, continu, & comprimé, tel qu'il eſt réellement dans la nature, fait une réſiſtance quatre fois moindre à un corps cylindrique, & deux fois moindre à un corps ſphérique, toutes choſes d'ailleurs égales, que le Fluide à globules élaſtiques de la premiere hypotheſe.

Mais cette ſeconde Théorie de M. Newton, quoique plus conforme à la nature des Fluides, eſt

eſt ſujette encore à beaucoup de difficultés. En premier lieu, elle a pour baſe la Méthode par laquelle ce grand Geométre détermine le mouvement d'un Fluide qui s'échappe d'un vaſe cylindrique ; Méthode certainement très-ingénieuſe, mais inſuffiſante & fautive. La cataracte que M. Newton ſuppoſe formée par la chûte du Fluide, ne ſauroit ſubſiſter, comme l'a fait voir M. Jean Bernoulli dans ſon Hydraulique, parce que le Fluide qu'on ſuppoſe couler dans cette cataracte, & tomber avec toute la force de ſa peſanteur, n'exerçant aucune preſſion latérale, ne peut réſiſter à celle du Fluide ſtagnant qui l'environne.

En ſecond lieu, ſi on s'en rapporte à pluſieurs expériences faites par des Phyſiciens habiles, la preſſion d'un Fluide en mouvement ſur une ſurface circulaire, eſt égale au poids d'un cylindre dont la hauteur ſeroit égale à celle d'où un corps peſant auroit dû tomber pour acquérir la viteſſe actuelle du Fluide ; d'où il s'enſuit que cette preſſion eſt double de celle que M. Newton determine par le calcul.

En troiſiéme lieu, M. Newton trouve par cette nouvelle Théorie de la preſſion des Flui-

des continus, que la réſiſtance qu'éprouve un Globe eſt égale à celle qu'éprouveroit le Cylindre circonſcrit; au lieu que par ſa Théorie de la réſiſtance des Fluides non continus, il trouve que celle du Globe n'eſt que la moitié de celle du Cylindre. Voici ſur quoi M. Newton ſe fonde pour établir dans le ſecond cas l'égalité de réſiſtance entre le Globe & le Cylindre. Selon lui, ſi un Cylindre, une Sphere, & un Spéroide dont les largeurs ou baſes ſont égales, ſe trouvent placés dans le milieu d'un Canal cylindrique, de maniére que les Axes de ces corps coincident avec celui du Canal, ces corps oppoſeront un égal obſtacle au mouvement de l'eau dans le Canal, parce que les eſpaces par leſquels le Fluide coule entre le Canal cylindrique & chacun de ces corps, ſont égaux entr'eux, & que le Fluide doit ſe mouvoir de la même maniére dans des eſpaces égaux. Voilà l'unique preuve que donne M. Newton de cette propoſition fondamentale; preuve qui ne paroît pas d'une grande force.

Car l'eſpace entre le Cylindre & chacun des trois corps, n'eſt le même que dans le plan où ſe trouve la plus grande largeur ou la baſe com-

mune de ces corps; dans tout autre plan paralléle à celui-là, l'eſpace entre le Cylindre & chacun des corps eſt différent, & par conſéquent le Fluide ne ſauroit s'y mouvoir de la même maniére.

De plus, quand le Fluide ſe mouvroit avec la même viteſſe dans ces différens eſpaces, il ne s'enſuivroit pas que ces corps ſouffriſſent une égale preſſion. Car l'eau qui coule par exemple entre le Canal & le Cylindre, preſſe le Cylindre de maniére qu'elle agit ſur ſes parois par des lignes perpendiculaires à l'Axe du Cylindre; d'où il s'enſuit que les preſſions qui agiſſent de chaque côté des parois du Cylindre ſe détruiſent mutuellement, & que la vraie preſſion ſupportée par le Cylindre, vient uniquement de l'action du Fluide qui frappe la baſe antérieure, & qui ne s'eſt point encore répandu dans l'eſpace vuide entre le Cylindre & le Canal. Au contraire, le Fluide qui coule entre les parois du Canal & la ſurface de la Sphere, agit ſur cette Sphere ſuivant des lignes perpendiculaires à ſa ſurface, & par conſéquent ſituées obliquement par rapport à l'Axe de la Sphere, d'où il eſt aiſé de conclure que les forces qui

agiſſent de chaque côté de l'Axe ne ſe détruiſent pas tout-à-fait, comme dans le cas du Cylindre, mais ſe détruiſent en partie, & en partie concourent pour former une ſeule & unique preſſion, laquelle eſt d'autant plus grande, que la direction des forces primitives fait un angle plus aigu avec l'Axe de la Sphere. Rien n'eſt donc moins prouvé que cette prétendue égalité de réſiſtance du Globe & du Cylindre circonſcrit.

Enfin, M. Newton ſuppoſe que les parties du Fluide, qui par leurs mouvemens obliques & ſuperflus peuvent retarder le mouvement du Fluide dans le Canal, ſoient regardées comme glacées & en repos, & comme adhérentes à la ſurface antérieure & poſtérieure du corps; hypotheſe vraie ſans doute juſqu'à un certain point, mais qui préſentée ainſi d'une maniére vague, paroît plutôt deſtinée à éluder la difficulté du Problême qu'à la ſurmonter.

Malgré toutes ces obſervations, nous n'en devons pas moins admirer les efforts & la ſagacité de ce grand Philoſophe, qui après avoir trouvé ſi heureuſement la vérité dans un grand nombre d'autres queſtions, a oſé ſe frayer le

premier une route pour la ſolution d'un Problême que perſonne avant lui n'avoit tenté. Auſſi cette ſolution, quoique peu exacte, brille par-tout de ce génie inventeur, de cet eſprit fécond en reſſources, que perſonne n'a poſſédé dans un plus haut degré que lui.

Aidés par les ſecours que la geométrie & la méchanique nous fourniſſent aujourd'hui en plus grande abondance, eſt-il ſurprenant que nous faſſions quelques pas de plus dans une carriére vaſte & difficile qu'il nous a ouverte? Les erreurs mêmes des grands hommes ſont inſtructives, non-ſeulement par les vûes qu'elles fourniſſent pour l'ordinaire, mais par les pas inutiles qu'elles nous épargnent. Les Méthodes qui les ont égarés, aſſez ſéduiſantes pour les ébloüir, nous auroient trompés comme eux: il étoit néceſſaire qu'ils les tentaſſent, pour que nous en connuſſions les écueils. La difficulté eſt d'imaginer une autre Méthode: mais ſouvent cette difficulté conſiſte plus à bien choiſir celle qu'on ſuivra, qu'à la ſuivre quand elle eſt bien choiſie. Entre les différentes routes qui menent à une vérité, les unes préſentent une entrée facile, ce ſont celles où l'on ſe jette d'abord; & ſi on

ne rencontre des obſtacles qu'après avoir parcouru un certain chemin, alors, comme on ne conſent qu'avec peine à avoir fait un travail inutile, on cherche quelque moyen d'éluder ces obſtacles, quand on ne peut les ſurmonter; d'autres routes, au contraire, ne préſentent d'obſtacles qu'à leur entrée; l'abord en peut être pénible, mais ces obſtacles une fois franchis, le reſte du chemin eſt facile à parcourir.

Il faut convenir au reſte, que la plûpart des Geométres qui ont attaqué M. Newton ſur la réſiſtance des Fluides, n'ont pas été plus heureux que lui; preſque tous nous ont donné au lieu des vrais principes beaucoup de calculs. Il en faut excepter cependant M. Daniel Bernoulli, qui joint à une grande ſagacité dans la Geométrie, beaucoup de lumiere & d'eſprit Philoſophique. Comme il eſt celui qui a le plus approfondi cette matiére, il eſt auſſi celui qui paroît avoir le mieux connu les difficultés qu'elle renferme. Dans le ſecond volume des Mémoires de Peterſbourg (année 1727) il propoſe une formule de la réſiſtance des Fluides, dont les principes ſont différens de ceux de M. Newton, mais dont il ne paroît pas avoir été lui-

même fort ſatisfait ; car il avoue que cette formule donne la réſiſtance quadruple de celle qui réſulte des expériences. L'illuſtre Auteur cherche enſuite par les Méthodes ordinaires, le rapport des réſiſtances d'un Fluide à des Sphéroides quelconques, & d'après ces Méthodes il établit que la réſiſtance du Globe eſt la moitié de celle du Cylindre ; propoſition qu'il a combattue depuis dans ſon Hydrodynamique. En effet, l'hypotheſe ſur laquelle elle eſt appuyée n'eſt pas fort exacte ; car il faut ſuppoſer que les parties du Fluide, lorſqu'elles ont frappé le Cylindre ou le Globe, ou s'anéantiſſent, ou du moins ſe réflechiſſent de maniére qu'elles ne rencontrent aucune autre particule. Cette hypotheſe & quelques autres, dont l'inſuffiſance eſt aiſée à ſentir, ſont la baſe, ou expreſſe ou tacite de preſque tous les Ouvrages publiés juſqu'ici ſur la réſiſtance des Fluides, & laiſſe par conſéquent dans ces Ouvrages beaucoup à déſirer.

En 1741, le grand Geométre dont nous venons de parler, a donné dans le tome VIII des mêmes Mémoires de Peterſbourg une Méthode fort ingénieuſe & beaucoup plus directe, pour

déterminer la preſſion qu'exerce contre un plan une veine de Fluide qui s'échappe d'un vaſe. Mais la formule qu'il propoſe pour cela, quoiqu'elle ſoit appuyée par des expériences, ne paroît pas encore hors de toute atteinte, comme nous eſpérons le montrer dans un des Chapitres de cet Ouvrage. Le détail de cet examen eſt trop geométrique, pour que nous puiſſions en donner l'idée dans cette Introduction.

Quoi qu'il en ſoit, M. Daniel Bernoulli convient que cette Théorie de la preſſion d'une veine de Fluide contre un plan ne ſauroit être d'une grande utilité pour déterminer la preſſion d'un plan entiérement plongé dans un Fluide, parce que le mouvement des particules du Fluide eſt fort différent dans les deux cas. En effet, dans le cas où la veine frappe le plan, les particules du Fluide, dès qu'elles ſont arrivées juſqu'au plan, changent de direction de maniére qu'elles ſe meuvent bientôt parallélement au plan, & gliſſent le long du plan ſuivant cette derniere direction; ce qui ne ſauroit avoir lieu quand le plan eſt entiérement plongé dans un Fluide profond Car dès que les particules du Fluide quittent la ſurface antérieure du plan ſur laquelle

laquelle elles ont gliſſé, elles ſe trouvent pouſſées & ramenées vers la ſurface poſtérieure par le Fluide en mouvement qui les environne à droite & à gauche; enſorte que leur direction, de paralléle qu'elle étoit au plan, lui redevient perpendiculaire, ou du moins fait avec ce plan un très-grand angle aigu, comme l'expérience journaliere le démontre. Or ce reflux des particules & la preſſion qui peut en réſulter ſur la ſurface poſtérieure, doivent altérer la preſſion que la ſurface antérieure éprouve.

Il réſulte de tout ce que nous avons dit juſqu'ici, que la Théorie de la réſiſtance des Fluides, quoique maniée par tant de grands Geométres, eſt encore très-imparfaite dans ſes élémens même. Ces raiſons m'ont engagé à traiter cette matiére par une Méthode entiérement nouvelle, & ſans rien emprunter de ceux qui m'ont précédé dans le même travail. La Théorie que j'expoſe dans cet Ouvrage, ou plutôt dont je vais donner les principes, a, ce me ſemble, l'avantage de n'être appuyée ſur aucune ſuppoſition arbitraire : je ſuppoſe ſeulement, ce que perſonne ne peut me conteſter, qu'un Fluide eſt un corps compoſé de particules très-

petites, détachées, & capables de ſe mouvoir librement.

La réſiſtance qu'un corps éprouve lorſqu'il en choque un autre, n'eſt, à proprement parler, que la quantité de mouvement qu'il perd. Lorſque le mouvement d'un corps eſt altéré, on peut regarder ce mouvement comme compoſé de celui que le corps aura dans l'inſtant ſuivant, & d'un autre qui eſt détruit. Il n'eſt pas difficile de conclure delà, que toutes les loix de la communication du mouvement entre les corps ſe réduiſent aux loix de l'équilibre. C'eſt auſſi à ce principe que j'ai réduit la ſolution de tous les Problêmes de Dynamique dans le premier Ouvrage que j'ai publié en 1743. J'ai eu fréquemment occaſion d'en montrer la fécondité & la ſimplicité dans les différens Traités que j'ai publiés depuis, & peut-être même ne ſeroit-il pas inutile pour nous éclairer juſqu'à un certain point ſur la Métaphyſique très-obſcure de la percuſſion des corps, & des loix auxquelles elle eſt aſſujettie. Quoi qu'il en ſoit, ce principe s'applique naturellement à la réſiſtance d'un corps dans un Fluide; & c'eſt auſſi aux loix de l'équilibre entre le Fluide & le Corps, que je réduis

la recherche de cette réſiſtance. Mais il ne faut pas s'imaginer que cette recherche, quoique facilitée par ce moyen, ſoit auſſi ſimple que celle de la communication du mouvement entre deux corps ſolides. Suppoſons en effet, que nous euſſions l'avantage dont nous ſommes privés, de connoître la figure & la diſpoſition mutuelle des particules qui compoſent les Fluides: les loix de leur réſiſtance & de leur action ſe réduiroient ſans doute aux loix connues du mouvement; car la recherche du mouvement communiqué par un corps à un nombre quelconque de corpuſcules qui l'environnent, n'eſt qu'un problême de Dynamique pour la ſolution duquel on a tous les principes Méchaniques qu'on peut deſirer. Cependant, plus le nombre de corpuſcules ſeroit grand, plus il deviendroit difficile d'appliquer le calcul aux principes d'une maniére ſimple & commode; par conſéquent une telle Méthode ne ſeroit guères pratiquable dans la recherche de la réſiſtance des Fluides. Mais nous ſommes même bien éloignés d'avoir toutes les *données* néceſſaires pour être à portée de faire uſage de cette Méthode. Non-ſeulement nous ignorons la figure & l'arrangement des

parties des Fluides : nous ignorons encore comment ces parties ſont pouſſées par le corps & comment elles ſe meuvent entr'elles. Il y a d'ailleurs une ſi grande différence entre un Fluide & un amas de corpuſcules ſolides, que les loix de la preſſion & de l'équilibre des Fluides ſont très-différentes des loix de la preſſion & de l'équilibre des ſolides. L'expérience ſeule a pu nous inſtruire en détail des loix de l'Hydroſtatique, que la Théorie la plus ſubtile n'eût jamais pû nous faire ſoupçonner ; & aujourd'hui même que l'expérience a fait connoître ces loix, on n'a pu trouver encore d'hypotheſe ſatisfaiſante pour les expliquer & pour les réduire aux principes connus de la ſtatique des ſolides.

Cette ignorance n'a cependant pas empêché que l'on n'ait fait de grands progrès dans l'Hydroſtatique. Car les Philoſophes ne pouvant déduire immédiatement & directement de la nature des Fluides les loix de leur équilibre, ils les ont au moins réduites à un ſeul principe d'expérience, *l'égalité de preſſion en tout ſens* ; principe qu'ils ont regardé (faute de mieux) comme la propriété fondamentale des Fluides, & comme celle à laquelle il falloit rapporter tou-

tes les autres. En effet, condamnés comme nous le ſommes à ignorer les premieres propriétés & la contexture intérieure des corps, la ſeule reſſource qui reſte à notre ſagacité, eſt de tâcher au moins de ſaiſir dans chaque matiére l'analogie des Phenomenes, & de les rappeller tous à un petit nombre de faits primitifs & fondamentaux. C'eſt ainſi que Newton, ſans aſſigner la cauſe de la gravitation univerſelle, n'a pas laiſſé de démontrer que le ſyſtême du monde eſt uniquement appuyé ſur les loix de cette gravitation. La nature eſt une machine immenſe dont les reſſorts principaux nous ſont cachés; nous ne voyons même cette machine qu'à travers un voile qui nous dérobe le jeu des parties les plus délicates. Entre les parties plus frappantes, & peut-être, ſi on oſe le dire, plus groſſieres, que ce voile nous permet d'entrevoir ou de découvrir, il en eſt pluſieurs qu'un même reſſort met en mouvement, & c'eſt là ſur-tout ce que nous devons chercher à démêler.

Ne pouvant donc nous flatter de déduire de la nature même des Fluides la Théorie de leur réſiſtance & de leur action, bornons-nous à la déduire, s'il eſt poſſible, des loix Hydroſtati-

ques qui ſont aujourd'hui bien conſtatées, & ſur leſquelles pluſieurs grands Geométres, dont j'ai fait mention dans mon Traité des Fluides, ont travaillé avec ſuccès. La connoiſſance purement expérimentale de ces loix ſupplée à celle de la figure & de la diſpoſition des parties des Fluides, & peut-être rend le Problême plus ſimple que ſi, pour le réſoudre nous étions bornés à cette derniere connoiſſance.

Je commence donc cet Ouvrage, par faire voir comment les loix de la réſiſtance des Fluides dépendent des loix de leur équilibre; d'où réſultent des Theorêmes aſſez généraux, &, ce me ſemble, nouveaux & utiles, ſur le mouvement d'un ſyſtême de corps ou de corpuſcules qui agiſſent les uns ſur les autres. J'expoſe enſuite en aſſez peu de mots, la Théorie déja connue de l'équilibre des Fluides; & je fais ſur cette Théorie pluſieurs remarques qui pourront être jugées de quelque importance.

Delà ſe déduiſent d'une maniére aſſez ſimple les loix de la preſſion d'un Fluide, ſoit en mouvement, ſoit en repos.

Cette recherche me conduit à celle de la preſſion d'un Fluide qui frappe un corps en repos.

Je fais voir d'abord, que la queſtion ſe réduit à trouver la preſſion du filet de Fluide qui gliſſe immédiatement ſur la ſurface du corps. Pour cela il eſt néceſſaire de connoître la viteſſe des particules de ce filet. Je la détermine donc par deux Méthodes différentes, que les Geométres ne trouveront peut-être pas indignes de leur attention : cette viteſſe étant une fois trouvée, la preſſion du Fluide s'en déduit néceſſairement ; mais la formule de cette preſſion demande une Analyſe très-compliquée dont j'indique les principes.

Je viens enſuite aux loix de la réſiſtance d'un Fluide lorſque le corps eſt mû, & que le Fluide eſt en repos ; & je démontre par une Méthode nouvelle & ſingulière, que la preſſion d'un Fluide mû avec une viteſſe variable contre un corps en repos, eſt égale à la réſiſtance que ce corps, mû avec une viteſſe ſemblable, éprouveroit dans le Fluide en repos ; propoſition ſuppoſée juſqu'ici comme vraie par tous les Auteurs d'Hydrodynamique, mais dont la démonſtration rigoureuſe eſt cependant aſſez difficile, comme je me flatte que mes Lecteurs en ſeront convaincus.

Pour rendre ma Théorie plus générale, je donne les formules de la réſiſtance du Fluide en ayant égard à la peſanteur, au frottement & à la ténacité des particules. Je cherche de plus les loix de la réſiſtance dans le cas où il ſe fait un vuide entre le Fluide & la partie poſtérieure du corps, ce qui peut arriver, comme je le démontre, même quand le Fluide n'eſt pas élaſtique. Mais je dois avouer que le calcul donne ici très-peu de lumiéres réelles, & qu'il eſt peut-être très-difficile de ſoumettre le cas dont il s'agit à l'expérience même.

Après avoir ainſi développé mes principes, j'examine une hypotheſe dont pluſieurs Auteurs d'Hydrodynamique ſe ſont ſervis juſqu'ici, & je fais voir que ſi on ſuivoit une telle hypotheſe pour déterminer la réſiſtance d'un Fluide, cette réſiſtance ſe trouveroit nulle, ce qui eſt contraire à toutes les expériences.

Je traite enſuite de l'action d'une veine de Fluide qui ſort d'un vaſe & qui frappe un plan, & je trouve que cette preſſion eſt un peu moindre que le poids d'un Cylindre qui auroit pour baſe la largeur de la veine, & pour hauteur le double de celle du Fluide dans le vaſe; réſultat qui

qui s'accorde parfaitement avec les expériences exactes & multipliées que l'Académie de Peterſbourg a faites. Enfin, je joins à toutes ces recherches des réflexions ſur la réſiſtance des Fluides élaſtiques, matiére qui juſqu'à préſent avoit été à peine effleurée, & ſur laquelle j'eſſaye de donner quelques principes; mais ſelon toutes les apparences, elle ne ſera jamais bien connue par la Théorie ſeule.

Tels ſont les principaux objets de cet Ouvrage. Pour rendre mes principes encore plus dignes de l'attention des Phyſiciens & des Geométres, j'ai cru qu'il ſeroit à propos de faire voir comment ils peuvent s'appliquer à différentes queſtions qui ont un rapport plus ou moins immédiat à la matiére que je traite; comme le mouvement d'un Fluide qui coule, ſoit dans un Vaſe, ſoit dans un Canal quelconque, les oſcillations d'un corps qui flotte ſur un Fluide lorſque le centre de gravité de la partie ſubmergée & de la partie non ſubmergée ne ſont pas dans la même ligne verticale; & d'autres Problêmes de cette eſpece.

Au reſte, m'étant propoſé de démontrer tout en rigueur dans cet Ouvrage, j'ai trouvé dans

la preuve même des propoſitions les plus ſimples, plus de difficultés qu'on n'auroit dû naturellement en ſoupçonner, & ce n'a pas été ſans peine que je ſuis parvenu à démontrer ſur cette matiére les vérités le plus généralement reconnues & le moins exactement prouvées juſqu'ici. Mais après avoir ſacrifié à la ſûreté des principes la facilité du calcul, je devois naturellement m'attendre que l'application du calcul à ces mêmes principes ſeroit fort pénible, & c'eſt auſſi ce qui m'eſt arrivé. Il me paroît même très-vraiſemblable, que du moins en certains cas la ſolution du Problême ſe refuſera entiérement à l'Analyſe. C'eſt aux Savans à prononcer ſur ce point; je croirois avoir travaillé fort utilement, ſi j'étois parvenu dans une matiére ſi difficile, ſoit à fixer moi-même, ſoit à faire trouver à d'autres juſqu'où peut aller la Théorie, & les limites où elle doit s'arrêter.

Quand je parle ici des bornes que la Théorie doit ſe preſcrire, je ne l'enviſage qu'avec les ſecours actuels qu'elle peut ſe procurer, non avec ceux dont elle pourra s'aider dans la ſuite, & qui ſont encore à trouver. Car en quelque matiére que ce ſoit, on ne doit pas trop ſe hâter

d'élever entre la nature & l'eſprit humain un mur de ſéparation. Pour avoir appris à nous méfier de notre induſtrie, gardons-nous de nous en méfier avec excès. Dans l'impuiſſance où nous ſentons tous les jours de ſurmonter tant d'obſtacles qui ſe préſentent à nous, nous ſerions ſans doute trop heureux, ſi nous pouvions du moins juger au premier coup d'œil juſqu'où nos efforts peuvent atteindre. Mais telle eſt tout à la fois la force & la foibleſſe de notre eſprit, qu'il eſt ſouvent auſſi dangereux de prononcer ſur ce qu'il ne peut pas, que ſur ce qu'il peut. Combien de découvertes modernes dont les Anciens n'avoient pas même l'idée ? combien de découvertes perdues que nous contemplerions trop légérement ? Et combien d'autres, que nous jugerions impoſſibles, ſont réſervées pour notre poſterité ?

J'aurois deſiré pouvoir comparer ma Théorie de la réſiſtance des Fluides aux expériences que pluſieurs Phyſiciens célébres ont faites pour la déterminer. Mais après avoir examiné ces expériences, je les ai trouvées ſi peu d'accord entr'elles, qu'il n'y a, ce me ſemble, encore aucun fait parfaitement conſtaté ſur ce point. Il

n'en faut pas davantage pour montrer combien ces expériences ſont délicates. Auſſi quelques perſonnes très-verſées dans la Phyſique expérimentale ayant entrepris depuis peu de les recommencer, ont preſque abandonné ce projet par les difficultés de l'exécution. La multitude des forces, ſoit actives, ſoit paſſives, eſt ici compliquée à un tel degré, qu'il eſt en quelque ſorte impoſſible de déterminer ſéparément l'effet de chacune; de diſtinguer, par exemple, celui qui vient de la force d'inertie d'avec celui qui réſulte de la ténacité, & ceux-ci d'avec l'effet que peut produire la peſanteur & le frottement des particules. D'ailleurs quand on auroit démêlé dans un ſeul cas les effets de chacune de ces forces & la loi qu'elles ſuivent, ſeroit-on bien fondé à conclure que dans un cas où les particules agiroient tout autrement, tant par leur nombre que par leur direction, leur diſpoſition & leur viteſſe, la loi des effets ne ſeroit pas toute différente? Cette matiére pourroit bien être du nombre de celles où les expériences faites en petit n'ont preſque aucune analogie avec les expériences faites en grand, & les contrediſent même quelquefois; où chaque cas particulier

demande, pour ainſi dire, une expérience iſolée, & où par conſéquent les réſultats généraux ſont toujours très-fautifs & très-imparfaits.

Enfin, quand l'expérience nous donneroit ſur la réſiſtance des Fluides les formules les plus exactes & les plus nettes, il ſeroit encore très-difficile de comparer ces formules avec celles que donne la Théorie. Car le calcul de ces dernieres, ſi on ne l'étaye ſur aucune hypotheſe arbitraire & vague, eſt extrêmement compliqué. Mais ſoit qu'on doive rejetter cet inconvénient ſur l'Analyſe même, ſoit qu'il faille l'attribuer à des difficultés que d'autres franchiront plus heureuſement que moi, il me ſemble qu'on ne peut au moins former aucun doute ſur la vérité de mes principes. Je crois même pouvoir aſſurer, que ſi après avoir déterminé la formule de la réſiſtance par la Méthode longue & pénible à laquelle ces principes m'ont forcé d'avoir recours, cette formule ſe trouvoit contredite par l'expérience, une telle contradiction viendroit uniquement, ſelon moi, de certaines ſuppoſitions purement analytiques, que l'application de la Geométrie à la Phyſique entraîne néceſſairement. Dans ce cas il faudroit, ce me ſem-

ble, entiérement renoncer à toute Théorie ſur la réſiſtance des Fluides, & la regarder comme une de ces queſtions ſur leſquelles le calcul ne peut avoir aucune priſe.

Au reſte, les difficultés de calcul dont je viens de parler, n'ont pas paru ſi frappantes à l'illuſtre Académie Royale des Sciences & des belles Lettres de Pruſſe; & cette conſidération ſeule ſeroit ſuffiſante pour m'engager à éviter ici un ton déciſif, qui ne me convient d'ailleurs en aucune maniére. Ayant propoſé pour le prix de 1750 la Théorie de la réſiſtance des Fluides, cette ſavante Compagnie a jugé à propos de remettre ce prix, & d'engager les Auteurs à faire voir par des Supplémens l'accord de leurs calculs avec l'expérience; condition dont elle n'avoit pourtant fait aucune mention dans ſon Programme de 1748. Il étoit naturel de croire qu'elle demandoit ſimplement alors les vrais principes de cette Théorie, principes juſqu'à préſent inconnus, & dont la recherche paroiſſoit l'objet d'un travail ſuffiſant. Je crus avoir découvert ces principes, & pouvoir en conſéquence concourir pour le prix; la piéce que j'envoyai à Berlin dans cet objet au mois de Dé-

cembre 1749 eſt, à quelques additions près, l'Ouvrage que je donne aujourd'hui. Je me contentai dans cette piéce de faire voir l'accord de mes principes, avec les faits les plus connus de la réſiſtance des Fluides: tels ſont le rapport de cette réſiſtance avec le quarré de la viteſſe, les altérations que la ténacité du Fluide cauſe dans ce rapport, ſur-tout lorſque la viteſſe eſt fort petite, la preſſion d'une veine de Fluide qui s'échappe d'un vaſe & qui frappe un plan, preſſion déterminée, comme je l'ai dit, par des expériences exactes; & quelques autres Phenomenes ſemblables. L'Académie n'ayant pas jugé ces recherches ſuffiſantes, demande aujourd'hui des formules de la réſiſtance toutes calculées & qui s'accordent avec des expériences encore à faire. Mais ne me ſentant ni aſſez de ſagacité, ni aſſez de force, ni aſſez de courage pour terminer dans ſi peu de temps un travail auſſi délicat, auſſi long & auſſi pénible, j'ai cru devoir m'abſtenir de concourir de nouveau; d'autres raiſons dans le détail deſquelles il eſt inutile d'entrer, m'ont confirmé dans cette réſolution. Cependant comme il m'a ſemblé que cet *Eſſai* pouvoit être utile, j'ai cru, pour m'aſſurer la poſſeſſion de ce

qu'il contient, devoir le mettre au jour avant la publication du jugement de l'Académie. Je ſouhaite par l'intérêt que je prends à l'avancement des Sciences, que les Juges nommés par cette illuſtre Compagnie, & qui n'ont pas ſans doute propoſé cette queſtion ſans s'aſſurer ſi la ſolution en étoit poſſible, trouvent pleinement de quoi ſe ſatisfaire dans les Ouvrages qui leur ſeront envoyés pour le concours.

Pour moi qui ai ſenti que la difficulté du calcul me rendroit peut-être impoſſible la comparaiſon de la Théorie & de l'Expérience que d'autres pourront faire avec plus de ſuccès, je me ſuis borné, comme je viens de le dire, à montrer l'accord de mes principes avec les faits les plus certains & les plus connus : dans tout le reſte je laiſſe encore beaucoup à faire à ceux qui travailleront à l'avenir ſur le même plan. On trouvera peut-être ma ſincérité fort éloignée de cet appareil auquel on ne renonce pas toujours en rendant compte de ſes travaux : mais c'eſt à mon Ouvrage ſeul à ſe donner la place qu'il peut avoir. Je ne me flatte pas d'avoir pouſſé à ſa perfection une Théorie que tant de grands Hommes ont à peine commencée. Le

titre

titre d'eſſai que je donne à cet Ouvrage, répond exactement à l'idée que j'en ai : mais je crois être au moins dans la véritable route, & ſans oſer apprétier le chemin que je puis y avoir fait, j'applaudirai avec plaiſir aux efforts de ceux qui pourront aller plus loin que moi, parce que dans la recherche de la vérité, le premier devoir eſt d'être juſte. Je crois encore devoir donner à ceux qui dans la ſuite approfondiront cette matiére, un avis dont je commencerai par profiter moi-même ; c'eſt de ne pas ériger trop légérement des formules d'algébre en vérités ou propoſitions phyſiques. L'eſprit de calcul qui a chaſſé l'eſprit de ſyſtême, regne peut-être un peu trop à ſon tour. Car il y a dans chaque ſiécle un goût de Philoſophie dominant : ce goût entraîne preſque toujours quelques préjugés, & la meilleure Philoſophie eſt celle qui en a le moins à ſa ſuite. Il ſeroit mieux, ſans doute, qu'elle ne fut jamais aſſujettie à aucun ton particulier. Les différentes connoiſſances acquiſes & recueillies par les Savans, en auroient plus de facilité pour ſe rejoindre & former un tout. Mais chaque ſcience paroît en quelque maniére recevoir

& ſecouer ſucceſſivement la loi de celles qui ſont le plus en honneur ou le plus négligées, & la Philoſophie prend, pour ainſi dire, la teinture des eſprits où elle ſe trouve. Chez un Métaphyſicien elle eſt ordinairement toute ſyſtématique, chez un Geométre elle eſt ſouvent toute de calcul; la Méthode du dernier, à parler en général, eſt ſans doute la plus ſûre; mais il ne faut pas en abuſer, & croire que tout s'y réduiſe; autrement nous ne ferions de progrès dans la Geométrie tranſcendante, que pour être à proportion plus bornés ſur les vérités de la Phyſique, & nous reſſemblerions à un homme qui auroit le ſens de la vûe contraire à celui du toucher, ou dans lequel l'un de ces ſens ne ſe perfectionneroit qu'aux dépens de l'autre. Plus on peut tirer d'utilité de l'application de la Geométrie à la Phyſique, plus on doit être circonſpect dans cette application. C'eſt à la ſimplicité de ſon objet que la Geométrie eſt redevable de ſa certitude; à meſure que l'objet devient plus compoſé, la certitude s'obſcurcit & s'éloigne. Il faut donc ſavoir s'arrêter ſur ce qu'on ignore, ne pas croire que les mots &

de *Theorême* & de *Corollaire*, faſſent par quelque vertu ſecrette l'eſſence d'une démonſtration, & qu'en écrivant à la fin d'une propoſition *ce qu'il falloit démontrer*, on rendra démontré ce qui ne l'eſt pas.

TABLE
DES TITRES
Contenus en cet Ouvrage.

INTRODUCTION. page vij

CHAPITRE I. *Principes de Dynamique & d'Hydrodynamique, néceſſaires pour l'intelligence des propoſitions ſuivantes.* pag. 1

CHAP. II. *Principes généraux de l'équilibre des Fluides.* p. 13

CHAP. III. *Principes généraux de la preſſion des Fluides, ſoit en mouvement, ſoit en repos.* p. 18

CHAP. IV. *De la preſſion qu'un Fluide en mouvement exerce ſur un corps en repos qui y eſt plongé.* p. 30

SECTION I. *Obſervations néceſſaires pour l'intelligence des propoſitions ſuivantes.* ibid.

SECTION II. *De la preſſion du Fluide au premier inſtant de l'impulſion.* p. 56

SECTION III. *Méthode pour déterminer la viteſſe du Fluide en un point quelconque.* p. 60
SECTION IV. *De la preſſion du Fluide à chaque inſtant.* page 70
SECTION V. *De la réſiſtance d'une figure plane.* p. 77
SECTION VI. *Remarques ſur notre ſolution du Problême de la preſſion des Fluides.* p. 78
SECTION VII. *Réflexions ſur les expériences qu'on a faites ou qu'on peut faire pour déterminer la preſſion des Fluides.* p. 79
CHAP. V. *De la réſiſtance des Fluides aux corps qui s'y meuvent.* p. 91
SECTION I. *Obſervations générales ſur les diverſes eſpéces de Fluides.* ibid.
SECTION II. *De la réſiſtance des Fluides non élaſtiques, & indéfinis.* p. 94
SECTION III. *Maniére de déterminer par les expériences du pendule la réſiſtance des Fluides, lorſque la viteſſe eſt fort petite.* p. 115
SECTION IV. *Examen d'une hypotheſe qui conduiroit à des paradoxes ſinguliers ſur la réſiſtance des Fluides.* p. 123
SECTION V. *De la réſiſtance des Fluides non élaſtiques & finis.* p. 129
SECTION VI. *De la réſiſtance des Fluides élaſtiques.* p. 134
Principes néceſſaires pour déterminer la preſſion d'un Fluide élaſtique. p. 140

CHAP. VI. *Des Oſcillations d'un corps qui flotte ſur un Fluide.* p. 143
ARTICLE I. *Des Oſcillations rectilignes.* ibid.
ARTICLE II. *Des Oſcillations curvilignes.* p. 144
Des Oſcillations d'un corps de figure irréguliere. p. 155
CHAP. VII. *De l'action d'une veine de Fluide qui ſort d'un vaſe, & qui frappe un plan.* p. 163
CHAP. VIII. *Application des principes expoſés dans cet Eſſai, à la recherche du mouvement d'un Fluide dans un vaſe.* p. 180
CHAP. IX. *Application des mêmes principes à quelques recherches ſur le courant des Rivieres.* p. 185
APPENDICE. *Réflexions ſur les loix de l'Equilibre des Fluides.* p. 190

Fin de la Table des Titres.

ESSAI

ESSAI
D'UNE
NOUVELLE THEORIE
DE LA
RÉSISTANCE DES FLUIDES.

CHAPITRE PREMIER.

Principes de Dynamique & d'Hydrodynamique néceſſaires pour l'intelligence des propoſitions ſuivantes.

PROPOS. I. THEORÈME.

1. SOIT un ſyſtême quelconque de tant de corps qu'on voudra, & que je déſigne par A, B, C, D; &c. ſuppoſons que ces corps ſoient ſollicités par des forces quelconques ϕ, Ψ, π, ϖ, &c. ſavoir A par la force ϕ, B par la force Ψ, &c. & que durant un inſtant quelconque ces mêmes corps ſe meu-

vent avec des viteſſes quelconques V, U, v, u; &c. ſavoir A avec la viteſſe V, B avec la viteſſe U; &c. On voit aiſément que ces corps, s'ils n'étoient point ſollicités par les forces φ, Ψ, π, &c. & qu'il n'y eut d'ailleurs aucun obſtacle à leur mouvement, conſerveroient dans l'inſtant ſuivant les viteſſes V, U, v, u, avec la même direction. Mais à cauſe des forces ſollicitatrices, & de l'action mutuelle que ces corps peuvent exercer les uns ſur les autres, ſuppoſons que dans l'inſtant ſuivant leurs viteſſes ſoient changées en V', U', v', u', &c. Il eſt évident que chacune des viteſſes primitives V, U, v, u, peut être regardée comme compoſée des viteſſes V', V''; U', U''; v', v''; u', u''; ainſi au commencement du ſecond inſtant que j'appelle dt, le corps A tend réellement à ſe mouvoir avec les viteſſes V', V'', φdt; le corps B avec les viteſſes U', U'', Ψdt; le corps C avec les viteſſes v', v'', πdt; le corps D avec les viteſſes u', u'', ϖdt; &c. Mais (par l'hypotheſe) de ces trois viteſſes avec laquelle chacun des corps eſt ſollicité, il n'en reſte qu'une à chacun, ſavoir la viteſſe V' au corps A, la viteſſe U' au corps B, la viteſſe v' au corps C, la viteſſe u' au corps D. Donc ſi les corps A, B, C, D, tendoient à ſe mouvoir avec les ſeules viteſſes V'', φdt; U'', Ψdt; v'', πdt; u'', ϖdt; il n'y auroit aucun mouvement dans le ſyſtême; ou, ce qui revient au même, le ſyſtême ſeroit en repos ou en équilibre; en *repos* ſi les corps ſont abſolument ſéparés & détachés, n'agiſſant point les uns

ſur les autres ; en *équilibre* ſi ces corps ſont liés ou contigus, de maniére qu'ils puiſſent exercer l'un ſur l'autre une action mutuelle.

Dans le premier cas, la viteſſe V'' ſera égale & directement contraire à φdt ; de même U'' ſera égale & directement contraire à Ψdt ; &c. Dans le ſecond cas, il ſuffira pour l'équilibre & par conſéquent pour le repos, que les forces $A \times V''$, $A \times \varphi dt$, $B \times V''$, $B \times \Psi dt$, $C \times v''$, $C \times \pi dt$, $D \times u''$, $D \times \varpi dt$; &c. ſe détruiſent les unes les autres.

Ce principe eſt d'un uſage très-général pour réſoudre toutes les queſtions de Dynamique. On verra dans cet Ouvrage combien il eſt utile pour déterminer la réſiſtance des Fluides.

COROLLAIRE I.

2. Soient les forces $\varphi, \Psi, \pi, \varpi$, &c. $= 0$; il eſt évident que les corps A, B, C, D &c. s'ils tendoient à ſe mouvoir avec les ſeules viteſſes V'', U'', v'', u'' &c. ſeroient en équilibre entr'eux : d'où il s'enſuit que l'équilibre ſubſiſteroit encore, ſi, conſervant la même direction, ils tendoient à ſe mouvoir avec les viteſſes gV'', gU'', gv'', gu'' &c. g étant un coëfficient ou nombre quelconque. Car des puiſſances qui ſont en équilibre y demeurent, quelque changement qu'on leur faſſe ſubir, pourvu qu'elles conſervent la même direction & le même rapport entr'elles.

COROLL. II.

3. Faiſant toujours abſtraction des forces φ, Ψ, &c. ou les regardant comme nulles, ſuppoſons que les viteſſes V, U, v, u, &c. avec leſquelles les corps A, B, C, D, ſe meuvent ou tendent à ſe mouvoir dans un inſtant quelconque, deviennent par quelque cauſe que ce ſoit gV, gU, gv, gu, (g exprimant un coefficient quelconque) & conſervent la même direction; je dis que les viteſſes qui dans l'inſtant ſuivant auroient été V', U', v', u', ſeront gV', gU', gv', gu', avec la même direction qu'auroient eûe les viteſſes V', U', v', u'. Pour rendre la démonſtration plus facile à concevoir, ne prenons que deux corps A, B, (Fig. 1) & ſoient Aa, Bb les eſpaces infiniment petits que ces deux corps décriroient dans l'inſtant dt avec les viteſſes V, U; & $a\alpha$, $b\mathcal{C}$, les eſpaces infiniment petits qu'ils décriroient dans l'inſtant ſuivant avec les viteſſes V', U': ſoient prolongées Aa, Bb, juſqu'à ce que $aa' = Aa$; & $bb' = Bb$; & ſoient achevés les parallélogrammes $\alpha a'$, $\mathcal{C}\mathcal{C}'$: il eſt évident (*art.* 1) que les corps A, B, ſeroient en équilibre, s'ils tendoient à parcourir durant l'inſtant dt les petits eſpaces $a\alpha'$, $b\mathcal{C}'$. En effet, ces petits eſpaces $a\alpha'$, $b\mathcal{C}'$, repréſentent les viteſſes V'', U'', parce que les viteſſes $a\alpha'$, & bb', c'eſt-à-dire V & U ſont compoſées des viteſſes $a\alpha$, $a\alpha'$, & $b\mathcal{C}$, $b\mathcal{C}'$, & que les viteſſes V', U' ſont repréſentées par $a\alpha$, & $b\mathcal{C}$.

Maintenant, imaginons que les corps A, B, ſe meuvent ſuivant Aa, & Bb avec les viteſſes gV, gU: on voit aiſément qu'ils parcourront alors les eſpaces Aa, Bb, dans un inſtant égal à $\frac{dt}{g}$, & que dans l'inſtant ſuivant $\frac{dt}{g}$, ils tendent à ſe mouvoir ſuivant aa', & bb', c'eſt-à-dire ſuivant $a\alpha$, aa'; & $b\beta$, $b\beta'$; or (*hyp.*) les corps A, B, en tant qu'ils tendent à ſe mouvoir dans l'inſtant dt ſuivant aa' & $b\beta'$, ſont en équilibre; donc ils ſeront auſſi en équilibre, s'ils tendent à décrire les mêmes eſpaces dans le tems $\frac{dt}{g}$ (*art.* 2). Donc les corps A, B, décriront réellement dans le ſecond inſtant $\frac{dt}{g}$ les eſpaces $a\alpha$, $b\beta$; donc les viteſſes V', U', ſe changeront en gV', gU', en conſervant la même direction. Or ce que nous venons de démontrer ici pour un ſyſtême de deux corps, ſe démontrera évidemment de la même maniére pour tant de corps qu'on voudra. Donc &c.

COROLL. III.

4. La démonſtration ſeroit la même, ſi quelqu'une ou quelques-unes des viteſſes V, U, v, u, &c. étoient nulles. Car ſoit par exemple la viteſſe U du corps $B = o$, & U' ſa viteſſe dans l'inſtant ſuivant, on aura $Bb = o$,

$bb' = o$, & les côtés $b6$, $b6'$ du parallélogramme $66'$ ſeront égaux, & poſés en ligne droite ; deſorte que la viteſſe U, que l'on ſuppoſe nulle, peut être regardée, en ce cas, comme compoſée de viteſſes égales & contraires U', U'' ; cela poſé, la démonſtration demeurera la même, deſorte que ſi le corps A tend à ſe mouvoir dans un inſtant quelconque avec la viteſſe gV, & que le corps B ſoit en repos ; dans l'inſtant ſuivant le corps A ſe mouvra avec la viteſſe gV' & le corps B avec la viteſſe gU'.

COROLL. IV. ET FONDAMENTAL.

5. Soit un ſyſtême quelconque de tant de corps qu'on voudra A, B, C, D, &c. qui ne ſoient animés par aucune force accélératrice, & qui ſoient d'abord ſuppoſés en repos. Qu'on imprime à un ſeul de ces corps, par exemple au corps A, une viteſſe quelconque ſuivant une direction quelconque ; je dis que les corps A, B, C, D, décriront des Courbes, différentes entr'elles à la vérité ; mais donc chacune en particulier ſera toujours la même, quelle que ſoit la viteſſe initiale imprimée au corps A, pourvû qu'elle ſoit imprimée ſuivant la même direction. Car ſoit a la viteſſe initiale imprimée au corps A, laquelle par l'action mutuelle des corps A, B, C, D, ſe change dans le premier inſtant dt en V, & ſoient U, v, u, les viteſſes que prennent dans ce premier inſtant les corps B, C, D en vertu de cette action. Suppoſons

enſuite que dans le ſecond inſtant dt, ces viteſſes ſe changent en V', U', v', u', il eſt viſible par le Corol. précédent, que ſi la viteſſe imprimée au corps A avoit été $g\alpha$ en conſervant la même direction, les viteſſes réelles des corps A, B, C, D, auroient été dans le premier inſtant $\frac{dt}{g}$, gV, gU, gv, gu, ſans changer de direction. Donc (*Coroll.* 3) dans l'inſtant ſuivant $\frac{dt}{g}$ ces viteſſes ſe changeront en gV', gU', gv', gu', & auront la même direction qu'auroient eûe les viteſſes V', U', v', u'; donc ſoit que la viteſſe initiale imprimée au corps A ſoit α, ou $g\alpha$, g étant un coefficient quelconque, les corps A, B, C, D, &c. décriront toujours chacun la même Courbe; avec cette différence pourtant, que ſi dans le cas de la viteſſe imprimée $= \alpha$, une portion quelconque de chacune de ces Courbes eſt décrite durant un tems t, la même portion ſera décrite durant le temps $\frac{t}{g}$ dans le cas de la viteſſe imprimée $= g\alpha$. Ainſi le temps que chaque corps met à parcourir une partie quelconque de la Courbe qu'il décrit, ſera en raiſon inverſe de la viteſſe initiale imprimée au corps A.

COROLL. V.

6. Soit x l'eſpace rectiligne ou curviligne décrit par un des corps, par exemple A, dans le premier

cas, où la viteſſe imprimée eſt $= \alpha$, & ſoit γ la viteſſe de ce même corps A lorſqu'il a décrit l'eſpace x.

Il eſt clair (*art.* 5) que ſi la viteſſe imprimée eût été $g\alpha$, la viteſſe à la fin de l'eſpace x auroit été $g\gamma$; or $\frac{g\alpha}{g\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$. Donc quelle que ſoit la viteſſe initiale imprimée au corps A, la viteſſe que ce même corps aura à la fin de l'eſpace x ſera toujours à cette viteſſe initiale dans un même rapport. Donc ſi on nomme en général Q la viteſſe initiale imprimée au corps A, q ſa viteſſe initiale réelle, enfin u ſa viteſſe à la fin de l'eſpace x, la fraction $\frac{Q}{u}$ ſera proportionnelle à quelque fonction de x, & il en ſera de même de la fraction $\frac{q}{u}$. Donc nommant X cette fonction de x, on aura $\frac{q}{u} = X$, ou en prenant les différentielles Logarithmiques $- \frac{du}{u} = \xi dx$, ξ étant auſſi une fonction de x.

COROLL. VI.

7. Juſqu'ici nous avons fait abſtraction de toutes forces accélératrices ou retardatrices. Mais ſi on ſuppoſe que chaque corps eſt animé par une force proportionnelle à ſa viteſſe, en ce cas tous les Theorêmes démontrés dans les Corol. 2. 3. 4. &c. auront lieu. Cette derniere obſervation nous ſera utile dans la ſuite, pour déterminer la réſiſtance des Fluides en

ayant

ayant égard aux frottemens. Au reſte, tous les Theorêmes précédens, ſont, ſi je ne me trompe, entiérement nouveaux.

PROPOS. II. THEOREME.

8. *Soit un corps ſolide plongé dans un Fluide tranquille & non Elaſtique ; &, faiſant abſtraction de toutes forces accélératrices qui agiſſent tant ſur le Corps que ſur le Fluide, ſuppoſons qu'on donne à ce corps une impulſion quelconque. Je dis*

1°. Que quelle que ſoit la viteſſe initiale imprimée au corps, pourvû qu'elle ſoit imprimée ſuivant la même direction, ce corps décrira toujours dans le Fluide la même ligne, ſoit droite, ſoit courbe ; mais que le temps qu'il employera à parcourir une partie quelconque de cette ligne, ſera en raiſon inverſe de ſa viteſſe initiale. Cela eſt évident par l'*article* 5.

2°. Qu'une particule quelconque du Fluide décrira toujours la même Courbe, quelle que ſoit la viteſſe initiale imprimée au corps ; & que dans l'inſtant où le corps a fini de décrire l'eſpace x, la viteſſe de cette particule ſera toujours en raiſon donnée avec la viteſſe du corps dans le même inſtant. C'eſt une ſuite du même *article* 5.

3°. Que ſi la réſiſtance du Fluide eſt ſuppoſée dépendre de la ſeule viteſſe du corps mû, elle ne peut être proportionnelle à d'autres fonctions de cette viteſſe qu'au quarré ; car ſoit la viteſſe initiale g, & à la

fin de l'eſpace x la viteſſe $= u$ ou zg, z repréſentant une variable, t le temps employé à parcourir l'eſpace x, & $\varphi(u)$ une fonction de la viteſſe, à laquelle la réſiſtance ſoit proportionnelle ; on aura par le principe général des forces accélératrices $\varphi(u) \times dt = -du$, ou $dx = -\frac{u\,du}{\varphi u} = -\frac{z\,dz \cdot gg}{\varphi(z \times g)}$. Maintenant, ſoit dans un autre cas la viteſſe initiale g' ; la viteſſe à la fin de l'eſpace x ſera zg' (*art.* 3) & l'on aura $dx = -\frac{z\,dz \cdot g'g'}{\varphi(z \times g')}$. Donc comparant ces deux valeurs de dx, on aura $\frac{gg}{\varphi(z \times g)} = \frac{g'g'}{\varphi(z \times g')}$, équation qui doit avoir lieu en général, quelle que ſoit z ; ce qui ne peut être à moins que $\varphi(z \times g)$ ne ſoit $= z^2 g^2$. Donc $\varphi(u) = u^2$. *Ce Q. F. D.*

COROLLAIRE.

9. Soit maintenant en général R la réſiſtance du Fluide, ſoit qu'elle dépende de la viteſſe ſeule, ou de quelqu'autre quantité combinée avec elle, on aura $R\,dx = -u\,du$, & $dx = -\frac{u\,du}{R}$. Or (*art.* 6) on a généralement $dx = -\frac{du}{u\xi}$: donc $\frac{-u}{R} = \frac{-1}{u\xi}$, donc $R = \xi uu$. Donc en général la réſiſtance du Fluide eſt toujours proportionnelle au quarré de la viteſſe multipliée par une fonction quelconque de l'eſpace parcouru par le corps.

Donc puiſque ξ eſt une fonction de $\frac{u}{g}$ (*art.* 6) il s'enſuit que la réſiſtance R eſt comme le produit de uu par une fonction de $\frac{u}{s}$.

SCHOLIE I.

10. Nous démontrerons dans la ſuite que la réſiſtance du Fluide (abſtraction faite de la peſanteur, du frottement, & de l'élaſticité) eſt réellement proportionnelle au quarré de la viteſſe, enſorte que la fonction ξ de l'eſpace parcouru ſe réduit à une conſtante. Cette propoſition a été regardée juſqu'à préſent comme vraie par tous les Auteurs qui ont traité de l'action des Fluides, & pluſieurs l'ont démontrée à leur maniére. Mais, il me ſemble, que les preuves qu'ils en donnent ſont bien peu ſatisfaiſantes. Car les uns ſe fondent ſur ce ſeul raiſonnement, que plus le corps mû a de viteſſe, plus il en communique aux particules du Fluide, & plus il rencontre dans le même temps de particules de ce même Fluide; or perſonne, ce me ſemble, ne peut diſconvenir que ce raiſonnement ne ſoit bien vague. D'autres prétendant traiter cette matiére avec plus d'exactitude, ont trouvé la réſiſtance proportionnelle au quarré de la viteſſe, en faiſant toutes les hypotheſes dont nous avons parlé dans l'Introduction, & dont nous avons montré l'inſuffiſance.

Au reſte, toutes ces preuves, quoique peu convain-

cantes, ſe réuniſſant toutes dans une même concluſion, peuvent faire ſoupçonner qu'en effet cette concluſion eſt vraie ; & que la réſiſtance des Fluides eſt réellement proportionnelle au quarré de la viteſſe des corps qui s'y meuvent. C'eſt ce que nous diſcuterons dans la ſuite plus à fond.

SCHOLIE II.

11. En général, il eſt évident par la nature de notre démonſtration, que dans un ſyſtême quelconque de corps qui agiſſent les uns ſur les autres, (abſtraction faite de la gravité, & de toutes autres forces extérieures) la force par laquelle le mouvement de chaque corps eſt altéré à chaque inſtant, eſt proportionnelle au produit du quarré de la viteſſe par une fonction quelconque de l'eſpace parcouru.

Outre cela, il eſt évident par l'*art.* 5, qu'un corps qui ſe meut dans un même Fluide homogene, ou qui paſſe d'un Fluide dans un autre, décrira toujours la même Courbe, quelle que ſoit la viteſſe initiale, pourvû qu'elle ait la même direction. Donc un Globe, par exemple, qui paſſe obliquement d'un Fluide dans un autre, doit décrire toujours la même Courbe dans ſon paſſage, ſi ſon angle d'incidence ſur le Fluide inférieur ne change point ; quelle que ſoit d'ailleurs ſa viteſſe initiale. Ce qui prouve, pour le dire en paſſant, que ſi on attribue la réfraction de la lumiére à la réſiſtance des milieux, on ne ſauroit ſuppoſer que la différente

couleur, c'eſt-à-dire la différente réfrangibilité des rayons vienne de la différence de leurs viteſſes. Voyez là-deſſus mon Traité de l'Equilibre & du Mouvement des Fluides, l. III. Ch. II.

SCHOLIE III.

12. Il réſulte de tous les Principes poſés juſqu'ici, que les loix de la réſiſtance des Fluides dépendent beaucoup des loix de leur Equilibre. Nous allons donc dans le Chapitre ſuivant expoſer les loix générales de l'Hydroſtatique.

CHAPITRE II.

Principes généraux de l'équilibre des Fluides.

PROPOS. III. THEOREME.

13. *SOIT un Fluide ou une portion quelconque de Fluide* ABCD, (Fig. 2) *dont les particules ſoient ſollicitées par des forces quelconques, de maniére qu'elles ſoient en équilibre ; je dis, que ſi d'un point* P *quelconque pris au-dedans de cette maſſe Fluide on tire les droites* PA, PB *à deux points quelconques* A, B, *de la ſurface* ABCD, *le point* P *ſera également preſſé ſuivant* BP *& ſuivant* AB; *ou, ce qui revient au même, le Fluide contenu dans le Canal ou Syphon rectiligne* APB *ſera en équilibre. En effet,*

perſonne n'ignore que quand un Fluide eſt en équilibre, chaque particule P *eſt également preſſée en tout ſens.*

SCHOLIE I.

14. Quoique le Principe de l'équilibre des Canaux rectilignes, ſoit comme l'on voit, une conſéquence très-naturelle de la preſſion des Fluides en tout ſens; cependant je dois reconnoître ici, que feu *M. Maclaurin* eſt le premier qui ait fait uſage de ce Principe, & qui l'ait appliqué à la recherche importante de la Figure de la Terre. Voyez ſon *Traité des Fluxions* art. 639, & ſon Traité *de Causâ Fluxûs & Refluxûs maris*, Paris 1740.

COROLL. I.

15. Si on prend ſur BP un point quelconque p, la preſſion de p ſuivant Bp ſera égale à celle de Ap, enſorte que le Fluide renfermé dans le Canal rectiligne ApB ſeroit en équilibre. Or le Fluide renfermé dans le Canal APB y ſeroit auſſi: donc le Fluide renfermé dans un Canal triangulaire quelconque ApP ſera en équilibre.

COROLL. II.

16. Donc le Canal ou Syphon rectangle $APCB$, (Fig. 3) ſeroit auſſi en équilibre: car tirant BP, on verra que le Canal APB ſeroit en équilibre, & (*art.* 15) que le Canal PBC y ſeroit auſſi. Donc &c.

COROLL. III.

17. Si on tire *ED* paralléle à *PC*, on verra que le Canal *AEDB* ſera auſſi en équilibre ; donc le Canal rectangle *EDCP* y doit être auſſi.

COROLL. IV.

18. Soit un Canal curviligne quelconque *APB*, (Fig. 4) je dis que le Fluide contenu dans ce Canal ſera auſſi en équilibre ; car ayant pris l'Arc *Pp* infiniment petit, auſſi-bien que l'Arc *Pp'*, on verra (*par l'article* 15) que les Canaux *APp*, *App'* ſont chacun en particulier en équilibre. Donc le Canal *APp'* y ſera auſſi, & on prouvera de même que le Canal *APp'A* ſera en équilibre, auſſi-bien que le Canal *BROP* : or le Canal rectiligne *APRB* eſt en équilibre ; donc le Canal curviligne *APB* ſera auſſi en équilibre : ainſi le Principe de l'équilibre des Canaux curvilignes, n'eſt qu'un Corollaire du principe plus ſimple de l'équilibre des Canaux triangulaires rectilignes, aboutiſſans à la ſurface du Fluide ; Principe dû à *M. Maclaurin.*

COROLL. V.

19. Soient *M*, *N*, *O*, *Q*, (Fig. 5) quatre points ou particules du Fluide, infiniment proches l'une de l'autre, & placées de maniére que *MNQO* ſoit un rectangle infiniment petit. Soit *A* un point fixe quelconque au-dedans ou au-dehors du Fluide, & dans

le plan $MNOQ$, AP paralléle à MO, & l'angle APM droit. Qu'on ſuppoſe que les forces qui ſollicitent les points M, N, O, Q, agiſſant dans le plan $MNOQ$, ou APM; il eſt évident, qu'au lieu de la puiſſance qui agit, par exemple en M, on peut ſuppoſer deux forces qui agiſſent l'une ſuivant MO parallélement à AP, l'autre ſuivant MN paralléle à AZ, & de même des trois autres points N, O, Q. Soit $AP = x$, $PM = y$, R la force du point M ſuivant MO, & Q la force du même point ſuivant MN, $MO = \alpha$, $MN = \epsilon$; maintenant, imaginons que les forces accélératrices des points M, N, O, Q, ſoient proportionnelles à une fonction quelconque des diſtances de ces points aux lignes AZ & PA; enfin, pour rendre plus générale la propoſition, ſuppoſons que le Fluide ſoit héterogene & que la denſité δ d'une particule quelconque M ſoit proportionnelle à une autre fonction quelconque des lignes AP, & PM; en ce cas la force du point N ſuivant NQ ſera $R + \epsilon \times \frac{dR}{dy}$ (*a*) & la denſité de la colomne $NQ = \delta + \epsilon \times \frac{d\delta}{dy}$; ainſi la force de la co-

---

(*a*) J'entends en général par $\frac{dR}{dy}$, $\frac{dR}{dx}$, $\frac{d\delta}{dy}$ &c. les coefficiens qu'auroient dy, dx, &c. dans la différentiation des quantités R, δ, qui (*hyp.*) ſont des fonctions de x & de y. *M. Fontaine* a le premier imaginé cette expreſſion qui eſt extrêmement commode.

lonne

lomne MO ſuivant MO étant $\alpha \times R\delta$, celle de la colomne NQ ſuivant NQ ſera $\alpha \times (R + \frac{6\,dR}{dy}) \times (\delta + \frac{6\,d\delta}{dy})$. Par le même raiſonnement, on trouvera que la force de la colomne MN étant $6Q\delta$, la force du point O ſuivant OQ ſera $Q + \alpha \times \frac{dQ}{dx}$, & que la force de la colomne OQ ſuivant $OQ = 6 \times (Q + \frac{\alpha\,dQ}{dx}) \times (\delta + \frac{\alpha\,d\delta}{dx})$: or (*art.* 17) le Canal rectangle $MNQO$ doit être en équilibre ; donc la force des colomnes MN & NQ ſuivant MN & NQ doit être égale à celle des colomnes MO & OQ ſuivant MO & OQ. Donc (en négligeant ce qui doit ſe négliger, c'eſt-à-dire, les quantités où ſe trouveroient $\alpha 66$ & $6\alpha\alpha$) on aura $6Q\delta + \alpha R\delta + \alpha 6\frac{\delta\,dR}{dy} + \alpha 6\frac{R\,d\delta}{dy} = \alpha R\delta + 6Q\delta + \alpha 6\frac{\delta\,dQ}{dx} + \alpha 6\frac{Q\,d\delta}{dx}$. Donc $\frac{Q\,d\delta}{dx} + \frac{\delta\,dQ}{dx} = \frac{R\,d\delta}{dy} + \frac{\delta\,dR}{dy}$, ou ce qui eſt la même choſe $\frac{d(Q\delta)}{dx} = \frac{d(R\delta)}{dy}$.

COROLL. VI.

20. Donc ſi le Fluide eſt homogene, c'eſt-à-dire, ſi la denſité δ eſt conſtante, on aura $\frac{dQ}{dx} = \frac{dR}{dy}$; propoſition qui étoit déja connue, mais que perſonne, ce

me ſemble, n'avoit encore démontrée par une méthode auſſi ſimple que nous venons de faire. Cette derniere équation nous ſera fort utile dans la ſuite pour déterminer les loix de la réſiſtance des Fluides homogenes, & l'équation $\frac{d(\mathfrak{Q}\delta)}{dx} = \frac{d(\mathfrak{f}R)}{dy}$ pour déterminer celle des Fluides élaſtiques.

CHAPITRE III.

Principes généraux de la preſſion des Fluides, ſoit en mouvement, ſoit en repos.

PROPOS. IV. PROBLÈME.

21. *SOIT un Fluide homogene* MNGH, (Fig. 6) *ſans peſanteur, & qui ſoit ou d'une étendue indéfinie, ou renfermé dans un vaſe de figure & de grandeur quelconques. Soit placé où l'on voudra dans ce Fluide un corps ſolide* BECD, *ſoit priſe autour de ce corps une portion de Fluide terminée par la ſurface* FOKL; *& ſuppoſons que toutes les particules tant du Fluide que du Solide, renfermées par la ſurface* FOKL, *ſoient animées par des forces telles qu'il y ait équilibre entre le Fluide & le Solide. On demande la preſſion que le Fluide exerce ſur un point quelconque* D *du corps ſolide.*

Soient FB, OD, des lignes quelconques terminées par la ſurface du corps & par la ſurface $FOKL$ du

Fluide ; il eſt évident que les particules de la ſurface FO, ſont animées par des forces qui ſont ou abſolument nulles, ou au moins perpendiculaires à la ſurface FO. En effet, $FOKC$ peut être conſidérée comme la ſurface extérieure d'un Fluide en équilibre, puiſque les particules de Fluide placées hors de l'eſpace $FKPL$, ne ſont (*hyp.*) ſollicitées par aucune force. Or le Fluide contenu dans le Canal $FBDO$, doit être en équilibre (*art.* 18) ; donc le poids du Canal $OD =$ le poids du Canal FBD. Donc la preſſion du point D ſera la même, que ſi ce point étoit preſſé perpendiculairement à la ſurface BDC par une force égale au poids du Canal FBD.

COROLLAIRE I.

22. Soit FB (Fig. 7) une ligne droite, la peſanteur de la particule Z ſuivant $ZB = \varphi$, $FZ = z$, la preſſion en B ſera = à ce que devient $\int \varphi dz$ lorſque $z = FB$, & que j'appelle K. Soit de même $BD = s$, & la peſanteur de la particule V ſuivant $VD = \pi$; le poids du Canal BD ſera $\int \pi ds$. Donc la preſſion que ſouffre la particule Dd ſuivant DG perpendiculaire à $D\delta$ ſera $= D\delta \times (K + \int \pi ds)$: donc la preſſion qui réſulte de celle-là ſuivant Dd, c'eſt-à-dire parallélement à BC, ſera $D\delta \times (K + \int \pi ds) \times \frac{Dd}{DK} =$ (à cauſe des triangles ſemblables DKd, $dD\delta$) $d\delta \times (K + \int \pi ds)$.

Donc ſi la ligne *FB* eſt très-petite, on peut ſuppoſer ſans erreur ſenſible, que la preſſion en *D* paralléle à *BC* eſt $d\delta \times \int \pi ds$.

Il faut bien remarquer ici & dans les articles ſuivants, que la denſité du Fluide eſt priſe pour l'unité; car ſi on ne vouloit pas la prendre pour telle, alors nommant cette denſité Δ, il ſeroit néceſſaire de multiplier par Δ l'expreſſion précédente.

COROLL. II.

23. Soit maintenant Ψ la force de gravitation du point *V* ſuivant *VO*, $RV = y$, $BR = x$, on aura $\pi = \frac{\Psi dx}{ds}$. Donc $\pi ds = \Psi dx$: donc $\int \pi ds = \int \Psi dx$: donc la preſſion en *Vu* ſera $= \int \Psi dx$; c'eſt-à-dire qu'elle ſera égale à la peſanteur d'une colomne rectiligne *VN* (Fig. 8) dont les parties ſeroient ſollicitées par la force variable Ψ. De même la preſſion du point *u*, ſelon *uV* ſera par la même raiſon égale au poids qu'auroit la colomne *Nu*: donc la preſſion du point *V* ſelon *VN* ſera égale au poids de la colomne *Vu*, d'où l'on déduit ce Theorême.

Si les parties *V* de Fluide contiguës à la ſurface *BDCE* ſont ſollicitées ſuivant *VO* paralléle à l'Axe *BC* par une puiſſance Ψ, qui ſoit différente (ſi l'on veut) pour chaque point *V*, je dis que la peſanteur que ſouffre le corps *BDCE* en vertu de toutes ces forces ſera

dirigée de C vers B, & égale à la peſanteur qu'auroit le corps ſuivant BC, ſi toutes les parties contenues dans chaque ordonnée QV étoient pouſſées parallélement à BC par la même force Ψ qui agit ſur le point correſpondant V.

COROLL. III.

24. Soit $BDCE$ (Fig. 9) un Canal rentrant en lui-même, & rempli de Fluide; & que les points N, n, ſoient ceux auxquels répond la plus grande largeur Nn du Canal. Suppoſons que ces deux points N, n, ſoient ſollicités parallélement à BC par une force φ, je dis que la preſſion qui en réſultera ſuivant BC ſera $= \varphi \times Nn$. Car la preſſion φ qui agit ſur le point N, agit également ſur tous les points R de la partie NRC: ainſi la preſſion en R agiſſant perpendiculairement aux parois du Canal, eſt $Rr \times \varphi$: de cette preſſion il en réſulte une autre ſuivant rr' qui ſera $= Rr \times \varphi \times \frac{Rr'}{Rr} = \varphi \times Rr'$; donc toute la preſſion ſuivant $CB = \varphi \times \int Rr' = \varphi \times Nn$.

COROLL. IV.

25. Soit $BVDNCEB$ un Canal dont toutes les parties V ſoient ſollicitées ſuivant VL par une force conſtante $= \Psi$; la preſſion de ce Canal ſuivant BC ſera (*art.* 23) $\Psi \int y\,dx$, en déſignant par $\int y\,dx$ la maſſe du corps $BDCE$. Suppoſons, outre cela, que les parties du Canal $BVDN$ ſoient ſollicitées par des forces va-

riables π, qui agiſſent ſuivant VD, enſorte que ces forces π ſe terminent au point N qui répond à la plus grande ordonnée, la preſſion qui en réſulte de B vers C ſera (*art.* 22) $\int dy \int \pi ds$; or ſoit Δ la valeur de $\int \pi ds$ en N, il eſt viſible que la preſſion en N eſt $= \Delta$, & que cette preſſion (*art.* 24) eſt la même dans tous les points du Canal NC: donc la preſſion de C vers B venant du Canal NCE ſera $\Delta \times b$, b déſignant la plus grande ordonnée Nn. Donc ſi on nomme G ce que devient $\int dy \int \pi ds$ lorſque $y = NL$, la preſſion totale ſuivant BC ſera $= \Psi \int y dx - \Delta . b + G$.

REMARQUE.

26. Juſqu'ici nous avons regardé le corps $BDCE$ comme une figure plane, ou, ce qui revient au même, comme un ſolide engendré par le mouvement paralléle d'une figure plane. Mais ſi ce ſolide étoit engendré par la révolution de la figure $BDCE$ autour de l'Axe BC; alors, nommant 2π le rapport de la circonférence du cercle au rayon, il faudroit ſubſtituer dans les Formules précédentes $\pi \int yy dx$ au lieu de $\int y dx$, $\frac{\pi bb}{4}$ au lieu de b & $2\pi y dy$ au lieu de dy.

PROPOS. V. PROBLEME.

27. *Soit un Canal ou Tuyau* ABCD (Figure 10) *d'une longueur indéfinie, dont les parois* AB, CD, *ſoient*

extrêmement proches l'un de l'autre ; & dont la largeur ſoit toujours la même dans ſa partie ſupérieure FABG, *puis croiſſe depuis* A *juſques vers* C, *ou du moins ſoit variable ; ſuppoſons enſuite que dans ce Canal coule un Fluide homogene & ſans peſanteur, deſorte que dans la partie indéfinie & cylindrique* FABG *la viteſſe du Fluide ſoit uniforme & toujours la même. On demande la viteſſe du Fluide en un point quelconque* P *du Canal* ABCD, *& la preſſion du point* P.

1°. Il eſt évident que toutes les parties du Fluide contenues dans une tranche quelconque PM ont toutes la même viteſſe du moins à très-peu près, tant parce que PM eſt ſuppoſée très-petite, que parce qu'on peut imaginer dans les particules du Fluide une certaine tenacité, en vertu de laquelle les particules qui ſont contiguës l'une à l'autre dans une même tranche PM ſoient adhérentes entr'elles, & aient une viteſſe égale. Par la même raiſon, toutes les parties de la tranche AB auront une même viteſſe. Donc tandis que les particules AB viennent en ab, les particules PM viendront en pm, de maniére qu'on aura $PMmp = ABba$ ou $PM \times Pp = AB \times Aa$, parce que l'on peut regarder PM & AB comme perpendiculaires à Pp & Aa. Donc la viteſſe du point P eſt à celle du point A comme Pp à Aa, c'eſt-à-dire comme AB à PM; donc faiſant $PM = y$, $AB = c$, la viteſſe conſtante en $A = b$, & la viteſſe en M ou en $P = x$, on aura $x = \frac{bc}{y}$.

2°. Soit $AP = x$, dt l'inſtant employé à parcourir Pp ; il eſt clair qu'à la fin de l'inſtant dt, la viteſſe u devient $u + du$, deſorte que quand les particules PM paſſent en pm, la viteſſe avec laquelle elles tendent à ſe mouvoir devient $u + du$ (je mets $+ du$, quoique la viteſſe diminue réellement de P en p, la largeur du Canal de A vers P étant ſuppoſée croiſſante dans la Figure ; mais comme du eſt négative lorſque x croît, il s'enſuit que $u + du$ eſt réellement moindre que u) : or la viteſſe u eſt compoſée de $u + du$ & de $- du$: d'où il s'enſuit (*art.* 1) que ſi les tranches PM étoient ſollicitées par la ſeule viteſſe infiniment petite $- du$, ou, ce qui eſt la même choſe, par la ſeule force accélératrice $\frac{-du}{dt}$, le Fluide contenu dans le Canal $ABCD$ ſeroit en équilibre. Donc la preſſion en P ſera la même, que ſi les particules PM de chaque tranche étoient ſollicitées par une force $= \frac{-du}{dt}$: or dans ce cas on trouve que faiſant $Pp = ds$, la preſſion en P ſeroit $\int Pp \times \frac{-du}{dt} = \int ds \times \frac{-du}{dt}$. Donc puiſque $ds = u\,dt$, on aura la preſſion en $P = \int - u\,du = \frac{bb - uu}{2} = bb\,\frac{(yy - cc)}{2yy}$.

COROLLAIRE I.

28. Si (par quelque cauſe que ce ſoit) la viteſſe du

du Fluide dans la portion cylindrique $ABGF$ n'étoit pas toujours la même, enſorte que b fût variable; alors mettant au lieu de b une variable quelconque v, on auroit $u = \frac{vc}{y}$ & $-du = c \times \frac{(-y\,dv + v\,dy)}{yy}$. Donc la preſſion en P ſeroit $\frac{-c\,dv}{dt} \times \int \frac{ds}{y} + bv \int \frac{ds\,dy}{yy\,dt}$, en prenant v, dv, & dt pour conſtantes, parce que la preſſion qu'on cherche n'eſt pas la ſomme des preſſions dans un temps t, mais la preſſion dans un inſtant dt. Donc ſi dans $\frac{ds\,dy}{yy\,dt}$ on met pour dt ſa valeur $\frac{ds}{u}$ ou $\frac{y\,ds}{cv}$, on aura la preſſion en $P = \frac{-c\,dv}{dt} \times \int \frac{ds}{y} + c^2 v^2 \times (\frac{1}{2cc} - \frac{1}{2y^2})$.

COROLL. II.

29. Si le Fluide eſt ſuppoſé peſant, alors prenant g pour la gravité naturelle, il eſt manifeſte, que les particules PM ſollicitées par les forces $g - \frac{du}{dt}$ ſeront (*art.* 1) en équilibre entr'elles. Donc 1°. ſi la viteſſe v eſt conſtante, la preſſion ſera $\int ds\,(g - \frac{du}{dt}) = g.AP + bb\,\frac{(yy - cc)}{2yy}$ à quoi il faut ajouter $g \times FA$. 2°. Si

la viteſſe v eſt variable, la preſſion ſera $g \cdot AP - \frac{6dv}{dt} \times \int \frac{ds}{y} + 6^2 v^2 \left(\frac{1}{2b^4} - \frac{1}{2y^2}\right) + \left(g - \frac{dv}{dt}\right) \cdot FA.$

SCHOLIE I.

30. Si les ordonnées PM décroiſſent de A vers P, alors la viteſſe du Fluide croîtra de A vers P; & la preſſion ſe fera de P vers A. Soit donc en ce cas Q (Fig. 11) l'endroit où la largeur du Canal eſt la moindre, & par conſéquent la viteſſe du Fluide la plus grande; on trouvera que la preſſion en P eſt égale à la moitié du quarré de la viteſſe en Q moins la moitié du quarré de la viteſſe en P. Deſorte que la preſſion eſt la plus grande en A, & nulle en Q.

Mais, dira-t-on peut-être, comment ſe peut-il faire que la preſſion ne ſoit pas nulle en A, & qu'au contraire elle ſoit plus grande que dans un autre point? Car ſi l'on a quelque preſſion en A ſuivant AF, il doit néceſſairement y avoir une égale preſſion ſuivant FA: or le Fluide (*hyp.*) ſe meut uniformément de F vers A: donc il ne peut y avoir en A aucune preſſion ſuivant FA. Je réponds que le Canal $AFBG$ étant ſuppoſé d'une longueur indéfinie, la preſſion en A eſt ſoutenue par la ſeule maſſe du Fluide $AFBG$. En effet, ſi le Fluide contenu dans le Canal cylindrique $AFBG$ n'étoit pas ſuppoſé indéfini, alors il faudroit néceſſairement que la viteſſe y diminuât à chaque inſtant, pour que la viteſſe augmentât dans le Canal rétreci $ABMP$;

par la même raiſon, que quand un corps en choque un autre qui ſe meut du même côté, la viteſſe du corps poſtérieur diminue, & celle du corps antérieur augmente. Pour rendre cela plus ſenſible, ſoit l la longueur du Canal $FABG$ ſuppoſé fini, & imaginons que chaque particule de ce Canal ait reçu une viteſſe V qu'elle ſoit obligée de changer en U à cauſe de la communication avec la partie $AQNB$; la viteſſe en PM ſera $\frac{vc}{y}$, & la preſſion en AB ſuivant FA ſera = à la preſſion en AB ſuivant PA (*art.* 1): d'où l'on tire $(V-U)l = U\int \frac{ds.c}{y}$; donc $U = \frac{Vl}{l+\int\frac{c\,ds}{y}}$; donc $V-U$ n'eſt = o que lorſque l eſt indéfinie; dans tout autre cas on aura $U < V$.

COROLL. III.

31. Si le tuyau n'eſt pas vertical, mais incliné, comme on le voit dans la Figure 12; alors menant la verticale AZ, & l'horizontale PZ, il faudra mettre g, AZ au lieu de g. AP dans les deux formules du Corol. précédent; parce que la quantité $g\,ds$ ſe change en $g \times \frac{Zz}{Pp} \times Pp = g.Zz$.

De plus, s'il n'y a point d'autre force accélératrice & extérieure qui agiſſe ſur le Fluide, que la gravité na-

turelle, on aura dans le cas de l'*art.* 29, $\frac{dv}{dt} = g$, & dans le cas de l'*art. préſ.* $\frac{dv}{dt} = gh$, en nommant h le Coſinus de l'inclinaiſon du tuyau FA. Ainſi dans le premier cas la preſſion ſera égale à $g \cdot AP - \epsilon g \int \frac{ds}{y} + \epsilon^2 v^2 \left(\frac{1}{2\epsilon^2} - \frac{1}{2y^2}\right)$ & dans le ſecond cas ſera $g \cdot AZ - \epsilon g h \int \frac{ds}{y} + \epsilon^2 v^2 \times \left(\frac{1}{2\epsilon^2} - \frac{1}{2y^2}\right)$.

COROLL. IV.

32. Puiſque $\frac{\epsilon v}{y}$ eſt la viteſſe en P ou en M, ſoit en général la viteſſe en $M = v\varrho$, & la preſſion ſera $\frac{-dv}{ds} \times \int \varrho ds + \frac{v^2}{2}[1 - \varrho\varrho]$, g étant $= 0$: cette expreſſion ſera d'un grand uſage dans la ſuite.

SCHOLIE II.

33. En général, ſoit que le Fluide ſoit peſant ou non, on peut ſuppoſer la viteſſe v égale à celle qu'acquereroit un corps ſollicité par la peſanteur g & tombant de la hauteur h ſoit variable, ſoit conſtante. Donc dans le premier cas on aura $bb = 2gh$, & la preſſion en $P = gh(1 - \varrho\varrho)$: ainſi la preſſion en P ſeroit la même que celle d'une colomne de Fluide

ſtagnant, de la peſanteur g, & de la hauteur $h(1-\varrho\xi)$. Par-là on voit que la formule trouvée ci-deſſus pour la quantité de la preſſion, peut ſe rappeller & ſe comparer facilement à des preſſions connues.

SCHOLIE III.

34. Juſqu'ici nous avons ſuppoſé la denſité du Fluide conſtante. Si elle ne l'étoit pas, ſoit δ la denſité du Fluide en P ou en M, & δ' la denſité en A, (Fig. 10) ; je dis que la viteſſe en P ſera $\frac{\varsigma v\delta'}{\gamma\delta}$. Car ſuppoſant la maſſe de $ABba =$ à celle de $PMmp$, on aura $Aa\times\delta'\times Bb = PM\times Pp\times\delta$. Donc faiſant $\frac{\varsigma v}{\gamma} = v\varrho$, & $\delta = \frac{\delta'}{\sigma}$, on aura la viteſſe en $M =$ $v\varrho\sigma$: d'où la preſſion ſera $-\frac{\delta' dv}{dt}\int\frac{\sigma\varrho ds}{\sigma} - \delta' v\int\frac{ds\,d(\varrho\sigma)}{\sigma ds}$, c'eſt-à-dire (à cauſe de $dt = \frac{ds}{v\varrho\sigma}$) $\frac{-\delta' dv}{ds}\cdot\int\varrho ds -$ $\delta' vv\int\varrho d(\varrho\sigma)$, g étant $= 0$.

CHAPITRE IV.

De la preſſion qu'un Fluide en mouvement exerce ſur un corps en repos qui y eſt plongé.

35. POUR déterminer la réſiſtance qu'un Fluide ſoit en mouvement ſoit en repos, fait à un corps qui s'y meut, il eſt à propos de déterminer d'abord l'action qu'un Fluide en mouvement exerce contre un corps en repos. Car nous ferons voir dans le Chapitre ſuivant, que toute la Théorie de la réſiſtance des Fluides dépend delà. Nous commencerons donc par expoſer nos recherches ſur ce ſujet.

SECTION PREMIERE.

Obſervations néceſſaires pour l'intelligence des propoſitions ſuivantes.

36. Soit un Fluide $QqGH$, (Fig. 13) homogene & ſans peſanteur, qui ſoit, ou indéfini, ou renfermé dans un vaſe de figure & de grandeur quelconques; que ce Fluide ſe meuve de Q vers H, & ſoit plongé dans ce Fluide un corps ſolide $AECD$, qui nonobſtant l'action que le Fluide exerce ſur lui, demeure en repos par quelque cauſe que ce puiſſe être; par exemple, par la réſiſtance d'une puiſſance qui pouſſe le corps de C vers A, tandis que le Fluide le pouſſe

de *A* vers *C*: on demande la preſſion du Fluide ſur le corps *ADCE*.

1°. Il eſt évident que les particules du Fluide, ſi le corps *ADCE* ne leur faiſoit point d'obſtacle, devroient décrire les lignes paralléles entr'elles *TF*, *OK*, *PS*, &c. mais la préſence de ce corps fait, que quand elles ſont approchées à une certaine diſtance de lui, elles doivent peu à peu changer de direction en *F*, *K*, *S*, &c. & décrire les Courbes *FM*, *Km*, *Sn*, &c. leſquelles lignes ſeront d'autant plus différentes d'une ligne droite qu'elles ſeront plus proches de la ſurface *ADC*, & au contraire d'autant moins différentes d'une ligne droite, qu'elles ſeront plus éloignées de cette ſurface. Deſorte qu'à une certaine diſtance du corps *ADEC*, par ex. *ZY*, ces Courbes deviendront des lignes droites; & que le Fluide renfermé dans l'eſpace *ZYHQ* ſe mouvra uniformément, de la même maniére que ſi le corps ſolide *ADCE* n'étoit pas dans le Fluide. Il en faut dire autant du Fluide qui eſt de l'autre côté de *AEC*; & ſi cette partie *AEC* eſt égale & ſemblable à *ADC*, les Courbes que décrivent les particules du Fluide du côté de *AEC*, ſeront tout-à-fait ſemblables & égales à celles qui ſont décrites du côté de *ADC*.

2°. Outre cela, puiſqu'on ſuppoſe que le corps *ADCE* eſt en repos, & qu'on fait abſtraction de toutes forces accélératrices qui pourroient agir ſur le Fluide, il eſt évident qu'on doit ſuppoſer le mouvement du

Fluide dans un état permanent, c'eſt-à-dire que les Courbes FD, Km, décrites dans un inſtant quelconque par les particules, ſont toujours les mêmes; enſorte que les particules qui ont décrit par exemple la ligne droite OK, décriront toujours la ligne Courbe Km.

3°. Tout corps mû qui change de direction, n'en change que par degrés inſenſibles. Delà il s'enſuit que les particules qui ſe meuvent dans l'Axe TF, ne parviennent pas juſqu'au ſommet A du corps. Car ſi elles parvenoient juſqu'à A, alors à cauſe de l'angle droit FAa, leur direction TA devroit en un inſtant ſe changer en une autre direction qui feroit avec la premiere TA un angle fini. Donc les particules qui ſe meuvent dans l'Axe TF, commenceront à quitter cette direction, du moins à quelque petite diſtance de A, par exemple en F, & elles décriront la Courbe FM qui touchera la ligne TF en F, & la ſurface du corps en M; enſuite cette Courbe coincidera & s'appliquera exactement ſur la ſurface MDL du corps ſolide juſqu'à un point L où elle quittera cette ſurface, pour venir atteindre & toucher l'Axe TAC en R. Delà il s'enſuit qu'il y a devant & derriere le ſolide des eſpaces FAM, CLR, où le Fluide eſt néceſſairement ſtagnant; il en faut dire autant de l'autre côté AEC.

4°. Suppoſons pour plus de facilité, que la partie AEC du corps ſoit parfaitement ſemblable & égale à la partie ADC, en ce cas l'action du Fluide ſera préciſément la même des deux côtés: c'eſt pourquoi nous

nous ne ferons ici attention qu'à la partie *ADC*. Maintenant, ſoit α la viteſſe des particules du Fluide dans un inſtant quelconque ; que cette viteſſe devienne α' dans l'inſtant ſuivant ; & ſuppoſons que la viteſſe α ſoit compoſée des viteſſes α' & α'' : il eſt évident (*art.* 1) que les particules du Fluide, ſi elles tendoient à ſe mouvoir avec la ſeule viteſſe α'', ſeroient en équilibre ; & qu'en ce cas, la preſſion du Fluide ſeroit la même que s'il étoit ſtagnant, & que ſes parties fuſſent ſollicitées au mouvement par une force accélératrice $\frac{\alpha''}{dt}$: or ſoit α conſtante, c'eſt-à-dire $\alpha = \alpha'$, & ſoient de plus les particules muës en ligne droite, on aura $\alpha'' = \alpha' - \alpha = 0$; donc le corps ne peut ſouffrir aucune preſſion que des particules de Fluide, dont ou la viteſſe, ou la direction, ou toutes les deux ſont changées par la rencontre du corps.

5°. Soient donc α, & α' les viteſſes de ces particules dans deux inſtans conſécutifs (il n'eſt pas néceſſaire d'obſerver que ces quantités α, & α' ſont indéterminées & différentes pour chaque particule) ; il eſt évident que ces particules ſeroient en équilibre, ſi elles étoient ſollicitées au mouvement par la force accélératrice $\frac{\alpha}{dt}$.

Donc ſi γ eſt le point où les particules qui décrivent la ligne *TF* commencent à changer de viteſſe, la preſſion en *D*, par exemple, ſera égale à la preſſion qu'exerceroit un Fluide contenu dans le Canal γFMD,

dont les parties ſeroient animées par la force $\frac{a''}{dt}$ différente pour chacune. La queſtion ſe réduit donc à trouver, tant la courbure du Canal γFMD, que les forces $\frac{a''}{dt}$ dans ce Canal.

Je remarque d'abord qu'il ne peut réſulter aucune preſſion des particules contenues dans la portion FM, qui touche l'Axe en F, & la ſurface en M. Pour le démontrer, je ſuppoſe que la particule a (Fig. 14) de la portion FM, décrive dans un inſtant quelconque la petite ligne ab, & dans l'inſtant ſuivant la ligne bc. Soit faire $bd =$ & en ligne droite avec ab ; il eſt viſible que la particule a, quand elle eſt arrivée en b, décriroit dans l'inſtant ſuivant la ligne bd ſi rien ne l'en empêchoit. Mais comme elle eſt forcée de décrire bc, il s'enſuit qu'on peut regarder (*art.* 1) la viteſſe ab ou bd qu'elle avoit dans l'inſtant précédent, comme compoſée de la viteſſe bc qu'elle a dans l'inſtant ſuivant, & d'une autre viteſſe cd qui doit être détruite. Donc menant bi paralléle à dc, & ie perpendiculaire à bc, il eſt clair que la particule b ſollicitée par les forces be, ei, doit demeurer en équilibre. Cela poſé, je dis que be ſera $= 0$; c'eſt-à-dire en général, que la force accélératrice ou retardatrice de la particule b ſuivant bc doit être nulle. Car ſi elle ne l'étoit pas, ſoit menée bm (Fig. 15) perpendiculaire à Fb, & nq qui en ſoit infiniment proche : donc la partie bn du Fluide

contenu dans le Canal *bnqm* auroit quelque preſſion de *b* vers *n*, ou de *n* vers *b*. Donc puiſque le Fluide contenu dans le Canal *bnqm* doit être en équilibre, il faudroit qu'il y eût auſſi quelque action au moins dans l'une des parties *bm*, *mq*, *qn*, pour contrebalancer l'action de la partie *bn*. Mais on a démontré que le Fluide eſt ſtagnant dans l'eſpace *FAM*: donc il n'y a aucune force qui puiſſe agir ſur *bm*, *mq*, *qn*; donc la preſſion du Canal *bn* ſuivant *bn* ou *nb* eſt nulle. Donc la force ſuivant *be* (Fig. 14) de la particule *b* = 0: donc *bi* ou *cd* eſt perpendiculaire à *bc*; donc il n'y a aucune preſſion dans le Canal *FM*, ſi ce n'eſt celle qui vient, ou de la partie ſupérieure *γF*, (Fig. 13) ou de la force *ei* (Fig. 14). Mais comme cette derniere eſt perpendiculaire aux parois du Canal; il s'enſuit qu'elle n'exerce aucune preſſion de *F* vers *M*: donc le point *M* ne ſouffre aucune preſſion que celle qui peut venir de la partie *γF* (Fig. 13).

Delà il s'enſuit que la viteſſe dans la Courbe *FM*, eſt, ou conſtante ſi elle eſt finie, ou infiniment petite, ſi elle eſt variable. Car dans le premier cas, la force ſuivant *be* ſera abſolument nulle; & dans le ſecond, elle ſera infiniment petite du ſecond ordre, & pourra par conſéquent être regardée comme nulle. Nous ferons voir plus bas, que c'eſt ce ſecond cas qui a lieu ici, c'eſt-à-dire que la viteſſe du Fluide le long de *FaM* doit être infiniment petite, ou du moins ſi petite, qu'on puiſſe la traiter comme zero. D'où il s'enſuit que la

viteſſe du Fluide avant que de commencer à changer de direction en F, commence à changer de quantité dans quelque point γ ſupérieur au point F; de maniére que depuis γ juſqu'en F elle diminue juſqu'à devenir très-petite en F.

COROLLAIRE I.

37. Donc la preſſion ſur un point quelconque D, vient, tant de la partie γF, que des particules de Fluide qui ſont dans le Canal MD. Or comme ces dernieres particules ſe meuvent le long de la ſurface du corps; la force $\frac{a''}{dt}$, détruite dans chacune, eſt compoſée de deux autres, l'une ſuivant la ſurface MD, l'autre perpendiculaire à cette ſurface; nommons la premiere de ces forces π, la ſeconde π', nous verrons aiſément que le point D eſt preſſé perpendiculairement à la ſurface MD, 1°. par la ſomme des forces π dans la Courbe MD. 2°. par la force π' qui agit ſur le ſeul point D. Or cette derniere force qui n'agit que ſur un point unique D étant infiniment petite par rapport à la ſomme des forces π, qui agiſſent ſur le nombre infini des particules placées dans la Courbe MD; il s'enſuit que la preſſion du point D vient de la ſomme ſeule des forces π. Donc prenant dans l'Arc MD une portion quelconque infiniment petite (Fig. 14) $Nm = ds$, la preſſion en D perpendiculaire à la ſurface du corps

ſera $= \int \pi ds$; & cette quantité $\int \pi ds$ doit être priſe de maniére qu'en M on ait $\int \pi ds = 0$.

COROLL. II.

38. Donc pour déterminer la preſſion en D, il faut connoître la force π en un point quelconque N. Soit donc u la viteſſe de la particule N ſuivant Nm dans un inſtant quelconque, & $u + du$ ſa viteſſe dans l'inſtant ſuivant ; on aura (*art.* 1) $\pi = -\frac{du}{dt}$: la queſtion ſe réduit donc à trouver la viteſſe u d'un point quelconque N ſuivant Nm. C'eſt à quoi ſont deſtinées les Propoſitions ſuivantes.

PROPOS. VI. THEOREME.

39. *Quelle que ſoit la viteſſe & la denſité du Fluide mû, & la maſſe du corps* ADCE (Fig. 13) *pourvu que ce corps conſerve toujours la même figure & le même volume ; je dis que chacune des Courbes* FaMD, Kmd, *qui ſont toutes différentes les unes des autres, ſera toujours la même.*

Je démontrerai d'abord, que l'on peut ſuppoſer que chacune de ces Courbes eſt toujours la même ; enſuite je démontrerai qu'on doit néceſſairement les ſuppoſer telles.

I.

Soit U la viteſſe d'une particule quelconque m, quand la viteſſe en γ eſt a. Suppoſons enſuite un ſemblable corps, de la même figure & du même volume, expoſé au courant d'un autre Fluide dont la viteſſe & la denſité ſoient quelconques; enfin, ſuppoſons que dans les deux cas les Courbes FaM, Km, &c. & les deux points γ, F, ſoient les mêmes. Je vais démontrer que cette ſuppoſition eſt légitime. Soit ga la viteſſe en γ, g étant un coefficient quelconque, je dis que les Courbes peuvent demeurer les mêmes, pourvu que la viteſſe en m ſoit gU, c'eſt-à-dire en général, pourvu que la viteſſe en un point quelconque ſoit changée en raiſon de g à 1 ſans changer de direction. En effet, le rapport de la viteſſe U en m, à la viteſſe a, ne dépend que de la diſtance mutuelle des Courbes FM, Km, en m, puiſque le rapport des viteſſes U & a dépend de la largeur du Canal contenu entre les Courbes FM & Km. Donc ces Courbes peuvent demeurer les mêmes, pourvu que le rapport des viteſſes U, a, ne change point; c'eſt-à-dire, pourvu que U devienne gU, a devenant ga.

2°. Quand la viteſſe eſt a en γ & U en m, la force $\frac{a''}{dt}$ repréſente (*art.* 36) la force qui doit être détruite dans chaque particule; deſorte que les parties du Fluide ſollicitées par la force $\frac{a''}{dt}$ ſeroient en équilibre entr'elles.

Or ſi les parties d'un Fluide dont la denſité eſt δ, animées par les forces quelconques π ſont en équilibre, il eſt évident que l'équilibre ſubſiſte, ſi la force π devient πg, & la denſité δh, g & h étant des coefficiens quelconques; pourvu que la direction de la force qui agit ſur chaque particule demeure la même. Donc l'équilibre du Fluide dont les parties ſont animées par la force $\frac{a''}{dt}$ ne ſera point troublé, ſi on change à volonté la denſité du Fluide, & que chaque force $\frac{a''}{dt}$ devienne $\frac{g\,a''}{dt}$, en conſervant la même direction : or les Courbes décrites par les particules du Fluide demeurant toujours les mêmes (*hyp.*) ; il eſt évident que ſi les viteſſes U donnent la force $\frac{a''}{dt}$, les viteſſes gU donneront $\frac{g\,a''}{dt}$. Donc la force $\frac{g\,a''}{dt}$ ſera détruite : donc on peut ſuppoſer que les Courbes FM, Km ſoient les mêmes dans les deux cas.

II.

Je dis maintenant, qu'il s'enſuit de-là que ces Courbes ſont néceſſairement les mêmes. Car les particules du Fluide, comme nous venons de le prouver, *peuvent* toujours décrire les mêmes Courbes dans les deux cas. Donc elles *doivent* réellement les décrire, puiſque la denſité du Fluide & ſa viteſſe étant données avec la

figure & la maſſe du corps, le chemin que chaque particule doit parcourir, eſt néceſſairement déterminé & unique. Ce raiſonnement eſt abſolument analogue à celui-ci, qui eſt admis de tous les Geométres. Si un corps eſt jetté dans le vuide, dans l'hypotheſe de l'attraction Newtonienne, il y a toujours quelque Section conique qu'il *peut* décrire. Donc il *doit* réellement décrire cette Section, puiſque le chemin qu'il doit parcourir eſt néceſſairement unique & déterminé.

COROLL. I.

40. Donc quelles que ſoient la viteſſe a du Fluide, ſa denſité, & la maſſe du corps, $\frac{U}{a}$ ſera toujours conſtante pour un même point m, quoique différente pour différens points : car a devenant ga, U devient gU; or $\frac{U}{a} = \frac{gU}{ga}$. De plus, les viteſſes U & gU auront la même direction en m, puiſque les Courbes décrites par le point m ſont les mêmes dans l'un & l'autre cas.

COROLL. II.

41. Donc ſi on ſuppoſe en général $\frac{U}{a} = \varrho$, la quantité ϱ ne dépendra ni de la denſité du Fluide, ni de la maſſe du corps, mais ſeulement de la figure & du volume du corps, & de la poſition du point m. Donc faiſant

faiſant $AP = x$, & $Pm = z$, ϱ ſera une fonction de x & de z qui variera ſelon la figure du corps $ADCE$.

Coroll. III.

42. Donc puiſque la viteſſe en m a toujours la même direction ; ſi on décompoſe cette viteſſe en deux autres, l'une paralléle à AP, que je nomme aq, l'autre perpendiculaire à AP, que je nomme ap, q & p ſeront des fonctions de x & de z qui ne dépendront ni de la viteſſe a, ni de la denſité du Fluide.

Propos. VII. Theoreme.

43. *Suppoſons qu'une particule quelconque* N *du Fluide* (Fig. 16) *décrive les deux côtés contigus & infiniment petits* FN, Nm *de la Courbe* FNm, *& ſoit* aq *la viteſſe de la particule* N *en* N *parallélement à* AP ; ap *ſa viteſſe en* N *perpendiculairement à* AP, q *&* p *étant* (*art.* 42) *des fonctions inconnues de* AP (x) *&* PN (z). *Soit enfin* $dq = A\,dx + B\,dz$, *&* $dp = A'dx + B'dz$, A, B, *&* A′, B′ *étant des fonctions pareillement inconnues de* x *&* z ; *je dis que la force ſuivant* NB *perpendiculaire à* AP, *qui doit être détruite dans la particule* N *ſera* $-(B'p - A'q)\,a^2$.

Car quand la particule N eſt en N, ſa force ſuivant NB, qui doit être détruite, eſt l'excès de la viteſſe qu'elle a en F ſuivant FE ſur la viteſſe qu'elle a en N ſuivant NB. Or la viteſſe en N ſuivant NB

eſt $= ap$. Donc la viteſſe en F ſuivant $FE = ap - a.FE \times \frac{dp}{dz} - a.NE \times \frac{dp}{dx}$, ou $a \times (p - FE \times B' - NE \times A')$: or la viteſſe en F ſuivant FE eſt à la viteſſe en N ſuivant NB, comme FE à mO ou $apdt$, & de plus, on a $NE = \frac{FE \times q}{p}$. Donc on aura ap: $ap - a.FE \times B' - \frac{aq.FE \times A'}{p} :: apdt : FE$. Donc (regardant FE comme infiniment petite, & rejettant par conſéquent de ſon expreſſion les quantités du troiſiéme ordre) on trouvera $FE = apdt\ (1 - aB'dt - \frac{aA'qdt}{p})$. Donc $FE - Om = a^2pdt^2 \times (-B' - \frac{A'q}{p})$: donc la force en N ſuivant NB, c'eſt-à-dire $\frac{FE - Om}{dt^2} = (-pB' - A'q)\,a^2$. *Ce Q. F. D.*

SCHOLIE.

44. On trouvera par un raiſonnement ſemblable aq: $aq - a \times \frac{NE \times dq}{dx} - \frac{a.NE \times p}{q} \times \frac{dq}{dz} :: aqdt : NE$, d'où l'on tire $\frac{NE - NO}{dt^2}$ (c'eſt-à-dire la force qui doit être détruite en N ſuivant NO) $= (-Aq - Bp)\,a^2$.

Il eſt bon d'obſerver que les lignes FN, Nm ſont toujours dans un plan qui paſſe par l'Axe du corps, quand le corps eſt un ſolide de révolution. Dans les

Propoſitions ſuivantes, nous ne conſidérons que de pareils ſolides engendrés par la révolution de la figure ADC (Fig. 13) autour de l'Axe AC, & nous n'aurons égard qu'à une ſeule Section ADC par l'Axe, parce que le calcul doit être le même pour toutes les autres.

PROPOS. VIII. THEOREME.

45. *Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art. 43, *je dis que* $B' = -A - \frac{p}{z}$ *&* $A' = B$.

Soit KQM' (Fig. 17) la Courbe que décrivent les particules du Fluide infiniment proches de la ſurface AMN, & ſoient menées les ordonnées infiniment proches PNM', pnm'; NR perpendiculaire à pm', & NQ à AN ou $QM'm'$; il eſt évident

1°. Que la viteſſe du Fluide en N ſuivant Nm, eſt en raiſon renverſée de la ſurface conique décrite par la révolution de NQ autour de FP. Donc la viteſſe en N eſt comme $\frac{1}{NQ \times PN}$. Donc ſi ou appelle U la viteſſe ſuivant Nm, & qu'on faſſe $PN = z$ ou y, (*) on aura $NQ = \frac{\alpha^2 a}{Uz}$, a étant la viteſſe en g, & α une conſtante, pour garder la loi des homogenes.

(*) Le point N peut être regardé, ou comme étant ſur la ſurface du corps, ou comme appartenant en général à une ligne

2°. Maintenant, la viteſſe U ſuivant Nm eſt compoſée de la viteſſe ſuivant NR que j'appelle aq, & de la viteſſe paralléle à Rm, que je nomme ap; deſorte que $U : qa :: Nm : NR$; or à cauſe des triangles ſemblables QNM', NRm, on a $Nm : NR :: NM' : NQ$; donc $U \times NQ = aq \times NM'$. Donc puiſque $NQ = \frac{a^2 a}{Uz}$, il s'enſuit que $NM' = \frac{a^2}{qz}$.

3°. Soient p & q des fonctions de AP (x) & PN (y), ou en général des fonctions de $AP = x$, & $PM' = z$, c'eſt-à-dire, ſoit en général la viteſſe d'une particule quelconque, proportionnelle à une fonction des diſtances de cette particule aux lignes AV & AP; il eſt viſible que la viteſſe en N ſuivant NR étant $= aq$, la viteſſe en M' ſuivant $M'r$ ſera $= aq + a \cdot NM' \cdot \frac{dq}{dz} = aq + \frac{a^2 a}{qz} \times \frac{dq}{dz}$. Par la même raiſon la viteſſe en M' paralléle à rm' ſera $ap + \frac{a^2 a}{qz} \times \frac{dp}{dz}$: outre cela

---

Courbe quelconque FN, contiguë au corps ou non, mais décrite par les particules du Fluide. L'ordonnée PN de cette Courbe eſt en général appellée z, & lorſqu'elle devient l'ordonnée même du corps, & que par conſéquent la Courbe coincide avec la ſurface du corps, je la nomme y. Dans cet article & les ſuivants, la Courbe FN n'eſt point regardée comme contiguë à la ſurface du corps, mais éloignée du corps à telle diſtance qu'on voudra. C'eſt pour ne point multiplier les figures, que nous la regardons comme contiguë au corps dans la Figure 17.

NM' étant $= \frac{a^2}{qz}$, on aura $mm' = \frac{a^2}{qz} + a^2 \times Pp \times d\left(\frac{1}{\frac{qz}{dx}}\right) + Rm \times a^2 \times d\left(\frac{1}{\frac{qz}{dz}}\right) = \frac{a^2}{qz} + a^2 \times dx \times d\left(\frac{1}{\frac{qz}{dx}}\right) + a^2 dz \times d\left(\frac{1}{\frac{qz}{dz}}\right)$: donc rm' ou $Rm + mm' - Rr = dz + a^2 dx \times d\left(\frac{1}{\frac{qz}{dx}}\right) + a^2 dz \times d\left(\frac{1}{\frac{qz}{dz}}\right)$: or la viteſſe ſuivant $M'r$ eſt à la viteſſe en M' paralléle à rm', comme $M'r$ à rm'.

Donc on aura l'équation ſuivante ; $\frac{aq + \frac{a^2 a}{qz} \times \frac{dq}{dz}}{ap + \frac{a^2 a}{qz} \cdot \frac{dp}{dz}} = \frac{dx}{dz + a^2 dx \cdot d\left(\frac{1}{\frac{qz}{dx}}\right) + a^2 dz \times d\left(\frac{1}{\frac{qz}{dz}}\right)}$: or $\frac{dx}{dz} = \frac{q}{p}$, puiſque la viteſſe en N paralléle à dx eſt $= aq$, & paralléle à dz eſt $= ap$. Donc on aura (en négligeant les quantités où a^4 ſe rencontre, & en diviſant les autres par $a^2 a$) l'équation ſuivante $\frac{1}{pqz} \times \frac{dq}{dz} - \frac{1}{ppz} \times \frac{dp}{dz} = - d\left(\frac{1}{\frac{qz}{dx}}\right) \times \frac{q^2}{p^2} - \frac{q}{p} \times d\left(\frac{1}{\frac{qz}{dz}}\right)$: donc $\frac{p\,dq - q\,dp}{zppqdz} = \frac{qz^2 dq}{zzqqppdx} + \frac{zq\,dq}{z^2 pqqdz} + \frac{qq}{pzzqq}$: donc $- \frac{dp}{dz} = \frac{dq}{dx} + \frac{p}{z}$:

dont ſi on fait $dy = A\,dx + B\,dz$ & $dp = A'dx + B'dz$, on aura $B' = -A - \frac{p}{z}$.

3°. Maintenant, ſoit T un point quelconque au-deſſus de γ : le Fluide contenu dans le Canal $TNM't$ & animé par les forces $\frac{a''}{dz}$, doit être en équilibre, (*art.* 1) c'eſt-à-dire que la preſſion du Canal NM' ſuivant NM' jointe à la force du Canal $TFMN$ ſuivant FMN, doit être égale à la force du Canal KQM' ; car dans le Canal Tt il n'y a aucune preſſion, puiſque la viteſſe en T, t, eſt uniforme & rectiligne. Or la preſſion en M qui vient du Canal $TFMN$, eſt (*art.* 27) $\frac{aa - UU}{2}$, & la preſſion en M' venant du Canal $tKQM'$, eſt par la même raiſon $\frac{aa}{2} - \frac{U'U'}{2}$ (en nommant U' la viteſſe en M' ſuivant Mm'). Donc $\frac{U'U' - UU}{2}$ = la preſſion du Canal NM' ſuivant NM'. Mais $UU = (pp + qq)\,aa$, & $U'U' = (p'p' + q'q') \times aa = (pp + qq)\,aa + aa \times NM' \times \frac{d(pp+qq)}{dx} = (pp + qq)\,aa + \frac{a^2 a^2}{qz} \times \frac{d(pp+qq)}{dz}$. Donc $\frac{U'U' - UU}{2} = -\left(\frac{p\,dp}{dz} + \frac{q\,dq}{dz}\right) \times \frac{a^2 a^2}{qz} = \frac{a^2 a^2}{z} \times \left(-\frac{B'p}{q} - B\right)$. Or la force du Canal NM' ſuivant NM' eſt (*art.* 43) $NM' \times p \times \left(-B' - \frac{Aq'}{pz}\right) = \frac{a^2 a}{qz} \times$

$p \times (-B' - \frac{A'q}{p})$: on aura donc $\frac{a^2 a}{z} \times (-\frac{B'p}{q} - B) =$

$\frac{a^2 ap}{qz} \times (-B' - \frac{A'q}{p})$: donc $B = A'$. *Ce Q. F. D.*

De-là réſulte ce Theorême.

Soit qa la viteſſe des particules du Fluide parallélement à AP, ap leur viteſſe paralléle à AV, & ſoit $dq = Adx + Bdz$, A & B étant des fonctions de x & de z, on aura $dp = Bdx - A'dz - \frac{pdz}{z}$. ou $d(pz) = zBdx - Azdz$.

COROLLAIRE I.

46. Donc $Adx + Bdz$ & $zBdx - Azdz$ doivent être des différentielles complettes. Nous ferons voir dans la ſuite comment on peut déterminer A & B, ou, ce qui revient au même, q & p par ces conditions.

COROLL. II.

47. Je n'ai pas beſoin d'avertir que la même loi qu'obſervent les quantités p & q n'a pas moins lieu pour la partie ſupérieure FM & les Courbes adjacentes, que pour la partie MD appliquée ſur la ſurface du corps, & les Courbes voiſines. Il faut ſeulement obſerver que comme les Courbes FM, MD n'appartiennent pas à la même équation, les valeurs de p & q dans la Courbe FM ſeront déterminées par une équa-

tion autre que dans la Courbe MD, quoique dans l'une & dans l'autre on doive avoir $dq = Adx + Bdz$ & $d(pz) = zBdx - zAdz$.

Autre démonſtration de la Propoſ. VIII.

48. Les équations $dq = Adx + Bdz$ & $dp = Bdx - Adz - \frac{pdz}{z}$, peuvent être encore trouvées par une autre méthode un peu plus générale que la précédente. J'expoſerai ici cette méthode d'autant plus volontiers, qu'elle nous ſera fort utile dans la ſuite de ces recherches, pour déterminer la réſiſtance qu'un Fluide en repos fait à un corps qui s'y meut.

Soient d'abord N, C, D, B (Fig. 18) quatre particules de Fluide, infiniment proches l'une de l'autre, diſtantes comme on voudra du corps, & placées de maniére que $NCDB$ ſoit un parallélogramme rectangle ; N', C', D', B', quatre autres particules du Fluide, formant un rectangle, enſorte que l'Axe AP ſoit la commune Section des deux plans $NCBD$, $N'C'B'D'$, & NN', BB' des Arcs infiniment petits décrits du centre P.

Maintenant, imaginons que les particules N, C, D, B, parviennent (Figure 19) en n, c, d, b, je dis que $ncdb$ peut être priſe ſans erreur pour un parallélogramme rectangle. Car ayant mené Mnb', $b'bd'$, nc, Gco, ſoit formé le parallélogramme rectangle $nb'dc$,

il

il eſt évident que les triangles $nc'c$, $bd'o$ ſont infiniment petits du troiſiéme ordre (puiſque la ligne nc' eſt infiniment petite du premier, & que la différence des lignes Gc, Mn, eſt infiniment petite du ſecond ordre) : donc la différence des triangles $nc'c$, $bd'o$ eſt infiniment petite du quatriéme ordre. Il en faut dire autant de la différence des triangles $nb'b$, cod ; donc l'aire de la Figure $nbdc$ peut être cenſée égale à celle de la Figure $nb'd'c'$. Donc le petit parallélepipede dont les baſes (Fig. 18) ſont $NN'B'B$, $CC'D'D$, ſera changé l'inſtant ſuivant, ou du moins pourra être cenſé changé dans un autre.

Maintenant ayant fait (Figure 19) $NM = aqdt$, $NC = \alpha$, $NB = \epsilon$, on aura $CG = aqdt + \alpha dt \times \frac{adq}{dx}$; & nc' ou $nc = NC + CG - NM = \alpha + aqdt + \alpha dt \cdot \frac{adq}{dx} - aqdt = \alpha + \alpha dt \cdot \frac{adq}{dx}$: par le même raiſonnement on trouvera $nb' = \epsilon + \epsilon dt \cdot \frac{adp}{dz}$, & ſi on fait (Figure 18) $NN' = k$, alors il eſt évident que N venant en n, la quantité k deviendra $k\left(\frac{pN + Mn}{pN}\right) = k + \frac{kapdt}{z}$: or comme les particules $N, C, D, B, N', C', D', B'$, viennent (Fig. 19) en $n, c, d, b, n', c', d', b'$, &c. il faut que la portion de Fluide infiniment petite renfermée dans le premier parallélepipede, ſoit égale à celle qui remplira le ſecond

parallélepipede. Donc $nc' \times nb' \times (k + \frac{k \alpha p dt}{z}) = NC \times NB \times Nn$: donc $\alpha \mathcal{C} k + k \mathcal{C} \alpha dt \times \frac{\alpha dp}{dx} + k \mathcal{C} \alpha dt \times \frac{\alpha dq}{dx} + \frac{k \mathcal{C} \alpha p dt}{z} = \alpha \mathcal{C} k$. Donc $\frac{dp}{dz} + \frac{dq}{dx} + \frac{p}{z} = 0$: donc $B' = -A - \frac{p}{z}$, comme dans le *n.* 3. *art.* 45.

Maintenant, la force en n ſuivant nb eſt (*art.* 43) $\alpha^2 p \left(-B' - \frac{A'q}{p}\right)$; & la force en n ſuivant nc' ou $nc = \alpha^2 q \times \left(-A - \frac{Bp}{q}\right) = \alpha^2 (-qA - Bp)$ (*art.* 44) : or ces forces devant ſe détruire (*art.* 1), on aura (*art.* 20) $\frac{d(qA + Bp)}{dz} \alpha^2 = \frac{d(qA' + B'p)}{dx} \alpha^2$; c'eſt-à-dire $\frac{q dA}{dz} + \frac{A dq}{dz} + \frac{B dp}{dz} + \frac{p dB}{dz} = \frac{q dA'}{dx} + \frac{A' dq}{dx} + \frac{B' dp}{dx} + \frac{p dB'}{dx}$: je dis maintenant que cette équation aura lieu, ſi $A' = B$, & $B' = -A - \frac{p}{z}$. Car $A dx + B dz$, & $A' dx + B' dz$ étant des différentielles completes, on aura $\frac{dA}{dz} = \frac{dB}{dx}$; & $\frac{dB'}{dx} = \frac{dA'}{dz}$ ou $\frac{dB}{dz}$: donc $\frac{q dA}{dz} + \frac{p dB}{dz} = \frac{q dA'}{dx} + \frac{p dB'}{dx}$; enfin $\frac{A dq}{dz} + \frac{B dp}{dz} = AB - BA - \frac{Bp}{z}$, & $\frac{A' dq}{dx} + \frac{B' dp}{dx} = BA - AB - \frac{Bp}{z}$. Donc les deux quantités

$\frac{d(qA+Bp)}{dz}$, & $\frac{d(qA'+B'p)}{dx}$ ſont réellement égales. Donc &c.

SCHOLIE I.

49. Il eſt bon de remarquer que l'équation $\frac{d(qA+Bp)}{dz} = \frac{d(qA'+B'p)}{dx}$ n'auroit pas lieu, ſi au lieu de ſuppoſer $A' = B$, on ſuppoſoit $A' + \lambda = B$, λ étant une conſtante. Car alors $\frac{Adq}{dz} + \frac{Bdp}{dz}$ ſeroit $A \times (A' + \lambda) + (A' + \lambda) \times (-A - \frac{p}{z}) = (A' + \lambda) \times \frac{p}{z}$: & $\frac{A'dq}{dx} + \frac{B'dp}{dx}$ ſeroit $= A'A + A' \times (-A - \frac{p}{z}) = -\frac{A'p}{z}$. Donc on ne ſçauroit avoir $\frac{Adq}{dz} + \frac{Bdp}{dz} = \frac{A'dq}{dx} + \frac{B'dp}{dx}$, à moins que λ ne ſoit $= 0$.

SCHOLIE II.

50. Avant que d'aſſigner les valeurs de p & de q par les conditions qui ont été trouvées ci-deſſus, il eſt bon de connoître les valeurs de p & de q au premier inſtant. Cette recherche & les remarques dont nous l'accompagnerons, nous ſeront fort utiles pour déterminer la preſſion du Fluide; & nous allons faire voir que les valeurs de p & de q doivent avoir les mêmes

conditions dans le premier inſtant, que dans les ſuivants.

PROPOS. IX. PROBLÊME.

51. *Soit un corps* ADCE (Fig. 13) *plongé au milieu d'un Fluide ſtagnant* QGHq, *& fixement arrêté au milieu de ce Fluide. Imaginons enſuite que toutes les parties du Fluide reçoivent par une cauſe quelconque une viteſſe quelconque* u *parallèle à l'Axe* AC *du corps ; on demande le changement que la rencontre du corps doit produire dans cette viteſſe des parties du Fluide & dans ſa direction.*

Il eſt viſible 1°. que les particules du Fluide contiguës à la ſurface *EAD* ne pouvant ſe mouvoir parallélement à *AC*, ſeront forcées de changer de direction, & qu'il en ſera de même des parties voiſines de celles-là, au moins juſqu'à une certaine diſtance du corps : 2°. qu'il doit néceſſairement y avoir à la partie antérieure du corps (*art. 36*) une portion de Fluide *FAM* qui ſera ſtagnante, & dont par conſéquent le mouvement ſera tout-à-coup anéanti : d'où l'on voit que les particules du Fluide au premier inſtant décriront des Courbes *FaMD*, *OKm* &c.

On prouvera, de plus, comme dans l'*art. 39*, que la viteſſe d'un point quelconque du Fluide ne dépend que de ſa poſition ; on peut donc ſuppoſer dans les parties du Fluide une viteſſe paralléle à AC & $= Uq$, & une autre perpendiculaire à AC & $= Up$, U étant dans un rapport donné avec u ; deſorte qu'au lieu de

Uq, on peut écrire uq, & up au lieu de Up; q & p étant des fonctions de x & de z. Il faut donc (*art.* 1) que les parties du Fluide animées par les viteſſes de tendance u, & $-up$, $-uq$, ſoient en équilibre. Or la viteſſe u étant la même dans toutes, elles ſeroient déja en équilibre en vertu de la ſeule viteſſe de tendance u. Donc elles doivent être en équilibre en vertu des ſeules viteſſes $-up$, $-uq$. Si donc on fait $dq = Adx + Bdz$ & $dp = A'dx + B'dz$, on trouvera d'abord comme dans l'*art.* 45 $B' = -A - \frac{p}{z}$: maintenant comme le Canal $NM'm'm$ (Fig. 17) doit être en équilibre, il faut que la preſſion du Canal $m'm$ ſuivant $m'm$ jointe à la preſſion du Canal mN ſuivant mN, ſoit égale à celle du Canal $m'M'$ + celle du Canal $M'N$, c'eſt-à-dire que la preſſion du Canal $m'm$ moins celle du Canal $M'N$, ſoit égale à la preſſion du Canal $m'M'$ moins celle du Canal mN. Or faiſant $Tt = \mathfrak{G}$, on a $NM' = \frac{\mathfrak{G}'z}{qz}$ & $mm' = \frac{\mathfrak{G}z}{q'z}$, deſorte que les preſſions des petits Canaux $m'm$ & $M'N$ ſont $\frac{\mathfrak{G}'z}{q'z} \times p'$ & $\frac{\mathfrak{G}'z}{qz} \times p$, & leur différence ſera $= \mathfrak{G}z\, d\left(\frac{p}{qz}\right) = \mathfrak{G}z\, qz \left(\frac{A'dx - Adz}{qqzz} - \frac{pdz}{z \cdot q^2z^2}\right) - \mathfrak{G}zp \times \left(\frac{zAdx + zBdz}{qqzz} + \frac{dz}{qzz}\right)$; c'eſt-à-dire (en mettant pour dz ſa valeur $\frac{pdx}{q}$) $\mathfrak{G}dx \left(\frac{A'}{qz} - \frac{2pA}{qqz} - \frac{2pp}{qqzz} - \frac{p^2B}{q^3z}\right)$.

Maintenant, la preſſion de $m'M'$ moins celle de mN, doit être égale (*art.* 15) à la preſſion de $m'rM'$ moins celle de mRN, c'eſt-à-dire à la preſſion de rM' moins celle de RN, & à la preſſion de $m'r$ moins celle de mR. Or la preſſion de rM' moins celle de $RN = NR \times \frac{dq}{dz} \times NM' = \frac{c^2}{qz} \times B\,dx$; & la preſſion de $m'r$ moins celle de $mR = p'dz' - pdz = \frac{dx}{dz}\, d(\frac{p^2}{q}) \times \frac{c^2}{q^2} = 2p \times -\frac{A\,dx \cdot c^2}{qqz} - \frac{2p^2c^2\,dx}{qqzz} - \frac{p^2\,dx \cdot B}{q^2} \times \frac{c^2}{qz}$; on aura donc $dx\,(\frac{A}{qz} - \frac{2pA}{qqzz} - \frac{2pp}{qqzz} - \frac{p^2B}{q^2z}) = \frac{B\,dx}{qz} - \frac{2pA\,dx}{qqz} - \frac{p^2B\,dx}{q^2z} - \frac{2pp\,dx}{qqzz}$, d'où l'on tire $A' = B$ comme dans l'*article* 45.

Delà on voit que les quantités p & q ſe trouvent au premier inſtant par les mêmes équations que dans les inſtans ſuivants. Mais avant que de les déterminer, il nous reſte encore des remarques eſſentielles à faire.

REMARQUE I.

52. La viteſſe des particules depuis F juſqu'en M dans le filet de Fluide FaM (Fig. 15) doit être extrêmement petite. Car ſoit V la viteſſe de la particule b ſuivant bn, & ſoit imaginé, comme dans l'*art.* 36, le Canal rectiligne infiniment petit $mqnb$; il eſt viſ-

ble que toutes les particules qui compoſent ce Canal étant ſuppoſées animées de la viteſſe u paralléle à FA, &. la particule nb de la viteſſe V ſuivant nb, doivent être en équilibre. Or les particules du Canal ſont évidemment en équilibre étant ſuppoſées animées par la viteſſe u qui eſt la même dans toutes. Donc pour que l'équilibre ne ſoit point troublé par la viteſſe V ſuivant bn, cette viteſſe doit être nulle, ou au moins ſi petite, qu'elle puiſſe être regardée comme nulle.

Voilà la démonſtration rigoureuſe de cette propoſition ; & on peut encore ſe convaincre de ſa vérité par la réflexion ſuivante. Dans le premier inſtant du mouvement, toutes les particules reçoivent une viteſſe u égale & paralléle à AC, & cette viteſſe eſt ſubitement & totalement détruite dans les particules qui rempliſſent l'eſpace FAM. Or il ſeroit choquant, que tandis que les particules contenues dans l'eſpace FAM s'arrêtent tout d'un coup, les particules qui ſont ſur la Courbe FaM, & qui ſont la limite de cet eſpace, euſſent une autre viteſſe qu'infiniment petite, puiſque rien ne ſe fait par *ſaults* dans la nature, mais par degrés inſenſibles, & que ſi la viteſſe u devient zero dans une particule quelconque, la viteſſe de la particule voiſine ne peut être qu'infiniment petite. Donc tout conoourt à nous aſſurer que la viteſſe eſt très-petite dans la Courbe FaM.

REMARQUE II.

53. Comme les Courbes *FaM*, *MDL* (Fig. 13) ſont de différente nature, les valeurs de *p* & de *q* ſeront différentes pour ces deux Courbes, de maniére pourtant que ces valeurs deviennent les mêmes au point *M*. Au reſte, nous n'aurons pas beſoin de connoître la Courbe *FaM*; mais il eſt néceſſaire d'obſerver que les valeurs de *p* & de *q* ſont les mêmes pour le premier inſtant & pour les ſuivans.

Delà & de l'*article* 45, il s'enſuit que dès le premier inſtant de l'impulſion, le Fluide commence à décrire les Courbes *FaMD*, (Fig. 13) *Km*, *Sn*, &c, & que dans les inſtans ſuivans il continue à les décrire ſans qu'il arrive aucun changement dans ſa direction ni dans ſa viteſſe. Donc non-ſeulement dans le premier inſtant, mais dans les ſuivans, la viteſſe le long de la Courbe *FaM* eſt très-petite, ou doit être cenſée telle. C'eſt ce que nous avions promis de prouver dans l'*article* 36 *n°*. 5.

SECTION II.

De la preſſion du Fluide au premier inſtant de l'impulſion.

54. Cette recherche eſt abſolument néceſſaire, comme nous le verrons plus bas, pour la détermination des quantités *p* & *q*.

Nous avons vu que les forces détruites au premier inſtant dans chaque particule ſont u, & $-uq$, $-up$; ou

or la preſſion qui réſulte de la viteſſe u commune à toutes les particules & paralléle à AC, ſera $\mu\delta u$, (*art.* 13) en nommant μ la maſſe du corps & δ la denſité du Fluide, & cette preſſion ſera ſuivant CA. Maintenant pour avoir la preſſion qui vient des viteſſes $-uq$, $-up$, ou, ce qui revient au même, de la viteſſe $+u\sqrt{[pp+qq]}$ ſuivant LDM, ſoit $PM=A$, $IL=b$; on verra (*art.* 26) 1°. que cette preſſion eſt = à l'intégrale de $u\delta\int 2\pi y\,dy\int ds\sqrt{[pp+qq]}$ priſe de maniére qu'elle ſoit = o quand $y=b$, & qu'elle finiſſe au point M ou $y=A$. 2°. Qu'il faudra en retrancher la preſſion ſuivant AC exprimée par la quantité $\pi AA(\int ds\sqrt{pp+qq})u\delta$. Cela poſé, on remarquera d'abord que $\int ds\sqrt{pp+qq}=\int p\,dy+q\,dx$, parce que $ds=\frac{p\,dy+q\,dx}{\sqrt{[pp+qq]}}$. Soit de plus $\int 2\pi y\,dy(\int p\,dy+q\,dx)=\Omega$ lorſque $y=b$, l'intégrale étant priſe de maniére qu'elle ſoit = o lorſque $y=A$; enfin, ſuppoſons encore que $\int p\,dy+q\,dx=\Gamma$ lorſque $y=b$. Soit priſe maintenant l'intégrale $\int p\,dy+q\,dx$, de maniére qu'elle ſoit = o lorſque $y=b$, & l'intégrale $\int 2\pi y\,dy\int p\,dy+q\,dx$, de maniére qu'elle ſoit auſſi = o, lorſque $y=b$: je dis que cette intégrale ſera $\pi\Gamma AA-\pi bb\Gamma+\Omega$ lorſque $y=A$. Pour le démontrer, exprimons par $\int p\,dy'+q\,dx'$ l'intégrale de $p\,dy+q\,dx$ priſe de maniére qu'elle ſoit = o lorſque $y=b$, & par $\int p\,dy+q\,dx$ l'intégrale de $p\,dy+q\,dx$ priſe de maniére qu'elle ſoit = o lorſque $y=A$; on

aura $\int p\,dy' + q\,dx' = \Gamma - \int p\,dy + q\,dx$: exprimons auſſi par $\int 2\pi y\,dy'$ l'intégrale de $2\pi y\,dy$, priſe de maniére qu'elle ſoit = o quand $y = b$, & l'on aura $\int 2\pi y dy' (\int p dy' + q dx') = \int 2\pi y dy' (\Gamma - \int p dy + q dx)$: or 1°. l'intégrale de $2\pi\Gamma y\,dy'$ lorſque $y = A$, eſt $\pi\Gamma AA - \pi\Gamma bb$. 2°. L'intégrale de $2\pi y\,dy' \int p dy + p dx$, priſe de maniére qu'elle ſoit = o quand $y = b$, ſera = $-\Omega$ lorſque $y = A$. Car cette intégrale eſt évidemment égale à $\int 2\pi y\,dy \int p dy + q dx$, priſe négativement. Donc $-\int 2\pi y\,dy' \times \int p dy + q dx = +\Omega$.

Donc $\int 2\pi y dy' \int p dy' + q dx' = \pi\Gamma AA - \pi\Gamma bb + \Omega$. Donc la valeur de $u\delta \int 2\pi y\,dy \int ds \sqrt{[pp + qq]} = u\delta(\pi\Gamma AA - \pi\Gamma bb + \Omega)$.

Il faut retrancher de cette quantité $\pi AA \cdot u\delta \int ds \sqrt{[pp + qq]}$ c'eſt-à-dire $\pi\Gamma AA$; enfin il lui faut ajouter $\mu\delta u$; donc la preſſion au premier inſtant ſera $u\delta \times (\mu + \Omega - \pi\Gamma bb)$.

COROLLAIRE I.

55. On peut démontrer aiſément par l'expérience, que $\mu + \Omega - \pi\Gamma bb$ eſt = o. Car on peut trouver un poids capable par ſa ſeule peſanteur, de tenir le corps $ADCE$ en équilibre dès le premier inſtant de l'impulſion du Fluide, & d'empêcher que ce corps ne ſoit mis en mouvement par cette impulſion : or l'action d'un poids qui eſt en équilibre, équivaut à une maſſe finie animée d'une viteſſe infiniment petite,

Donc la force avec laquelle ce poids ſera en équilibre, ſera auſſi infiniment petite : donc la quantité $u\delta(\mu + \Omega - \varpi\Gamma bb)$ doit être équivalente à une maſſe finie animée d'une viteſſe infiniment petite, ou à une maſſe infiniment petite animée d'une viteſſe finie. Donc puiſque la viteſſe u eſt finie, il s'enſuit que $\mu + \Omega - \varpi\Gamma bb$ doit être néceſſairement infiniment petite ; c'eſt-à-dire = zero.

COROLL. II.

56. Suppoſons un corps en repos au milieu d'un Fluide ſtagnant, & qu'on imprime à toutes les parties du Fluide une même viteſſe U paralléle à l'Axe du corps, nous avons vu que dès le premier inſtant les particules du Fluide doivent ſe mouvoir ſuivant des filets qui continueront d'être les mêmes, tant qu'il n'arrivera aucune nouvelle force, & qui ſeront toujours les mêmes, quelle que ſoit la viteſſe imprimée U. Suppoſons préſentement que dans un des inſtans ſuivans on imprime aux parties du Fluide une autre viteſſe U', il eſt viſible que cette nouvelle viteſſe ne dérangera rien dans les filets, puiſque ſi elle eut été ſeule, elle les eût fait décrire : ſeulement la viteſſe en chaque point doit changer en raiſon de $U + U'$ à U.

Cette propoſition nous ſera fort utile dans la ſuite.

SECTION III.

Méthode pour déterminer la viteſſe du Fluide en un point quelconque.

57. Pour réſoudre cette queſtion, il ne s'agit que de déterminer les quantités p & q par le moyen des conditions qui ont été trouvées ci-deſſus (*art.* 45) : or pour réſoudre plus facilement ce Problême, je commencerai par le réſoudre dans l'hypotheſe ſuivante qui eſt plus ſimple, ſavoir que $dq = Mdx + Ndz$, & $dp = Ndx - Mdz$.

PROPOS. X. PROBLEME.

58. *Soient* $Mdx + Ndz$ *&* $Ndx - Mdz$ *des différentielles complettes, on propoſe de trouver les quantités* M, *&* N.

Puiſque $Mdx + Ndz$ eſt une différentielle complette, il s'enſuit que $Mdx + NV-1\,\frac{dz}{V-1}$ ſera auſſi une différentielle complette : de même puiſque $Ndx - Mdz$ eſt une différentielle complette, $NV-1\,dx - MdzV-1$, ou $NV-1\,dx + \frac{Mdz}{V-1}$ le ſera auſſi ; donc la ſomme & la différence de ces deux quantités ſeront l'une & l'autre des différentielles complettes. Donc $(M + NV-1)\,(dx + \frac{dz}{V-1})$,

& $(M - N\sqrt{-1})\left(dx - \frac{dz}{\sqrt{-1}}\right)$ ſeront des différentielles complettes. Donc faiſant $dx + \frac{dz}{\sqrt{-1}} = du$ ou $F + x + \frac{z}{\sqrt{-1}} = u$; $dx - \frac{dz}{\sqrt{-1}} = dt$ ou $G + x - \frac{z}{\sqrt{-1}} = t$; $M + N\sqrt{-1} = \alpha$, & $M - N\sqrt{-1} = \mathcal{C}$, αdu & $\mathcal{C}dt$ ſeront des différentielles complettes. Donc α eſt une fonction de u, c'eſt-à-dire $M + N\sqrt{-1}$ une fonction de $F + x + \frac{z}{\sqrt{-1}}$, & $\mathcal{C}$ eſt une fonction de t, c'eſt-à-dire $M - N\sqrt{-1}$ une fonction de $G + x - \frac{z}{\sqrt{-1}}$: d'où l'on tirera la valeur de M & N.

COROLLAIRE I.

59. On peut encore trouver M & N par la méthode ſuivante qui eſt un peu plus ſimple. Puiſque $\frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx}$ & $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz}$, donc $q\,dx + p\,dz$ & $p\,dx - q\,dz$ ſeront des différentielles complettes. Donc $q + p\sqrt{-1} =$ fonct. $F + x + \frac{z}{\sqrt{-1}}$, & $q - p\sqrt{-1} =$ fonct. $G + x - \frac{z}{\sqrt{-1}}$: donc $q = \frac{\text{fonct. } F + x + \frac{z}{\sqrt{-1}} + \text{fonct. } G + x - \frac{z}{\sqrt{-1}}}{2}$,

$$\& p = \frac{\text{fonct. } F + x + \frac{z}{\sqrt{-1}} - \text{fonct. } G + x - \frac{z}{\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

Donc ſi on veut que p & q ſoient des quantités réelles, il faut ſuppoſer $G = F$, & on aura $q = \xi(x + F + \frac{z}{\sqrt{-1}}) + \sqrt{-1}.\zeta(x + F + \frac{z}{\sqrt{-1}}) + \xi(x + F - \frac{z}{\sqrt{-1}}) - \sqrt{-1}.\zeta(x + F - \frac{z}{\sqrt{-1}})$; $\xi(x + F - \frac{z}{\sqrt{-1}})$ & $\zeta(x + F + \frac{z}{\sqrt{-1}})$ déſignant des fonctions quelconques de $x + F + \frac{z}{\sqrt{-1}}$ différentes ſi l'on veut l'une de l'autre, mais dans leſquelles il n'y ait point de conſtantes imaginaires : on aura de même $p = \frac{\xi(x + F + \frac{z}{\sqrt{-1}}) + \zeta(x + F + \frac{z}{\sqrt{-1}}) - \xi(x + F - \frac{z}{\sqrt{-1}}) + \xi(x + F - \frac{z}{\sqrt{-1}})}{\sqrt{-1}}$. Il eſt évident que dans ces valeurs de p & q les quantités imaginaires ſe détruiront d'elles-mêmes.

COROLL. II.

69. Il faut remarquer que dans les expreſſions précédentes, la lettre F ne ſert qu'à pouvoir placer l'origine où l'on voudra dans la ligne AP. Or comme par

la nature du Problême on peut placer cette origine à volonté, il s'enſuit qu'on peut ſuppoſer $F = o$ en plaçant l'origine des x en quel point on voudra de la ligne AP : d'où les expreſſions de p & q deviennent plus ſimples.

On aura donc $p = \frac{\xi(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}) + \zeta(x + \frac{z}{\sqrt{-1}})}{\sqrt{-1}}$

$- \frac{\xi(x - \frac{z}{\sqrt{-1}}) + \zeta(x - \frac{z}{\sqrt{-1}})}{\sqrt{-1}}$: donc ſi on ſuppoſe par exemple $\xi(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}) = a(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}) + b(x + \frac{z}{\sqrt{-1}})^2 + c(x + \frac{z}{\sqrt{-1}})^3$ & $\zeta(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}) = e(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}) + f(x + \frac{z}{\sqrt{-1}})^2 + g(x + \frac{z}{\sqrt{-1}})^3$, on aura $p = -2az + 2ex - 4bxz + 2fxx - 2fzz - 6cxxz + 2cz^3 + 2gx^3 - 6gxzz$, & $q = 2ax - 2ez + 2bxx - 2bzz + 2fzz$: or de ces expreſſions, je déduis la méthode ſuivante pour déterminer p & q lorſque $dq = Adx + Bdt$, & $d(pz) = zBdx - zAdt$.

PROPOS. XI. PROBLEME.

61. *Déterminer* A *&* B *par ces conditions, que* $Adx + Bdz$ *&* $zBdx - zAdz$, *ſoient l'une & l'autre des différentielles complettes.*

Soit $p = a'x + b'z + c'xx + e'xz + f'zz + g'x^3 + h'xxz + l'xzz + m'z^3$ &c. a', b', c', &c. étant des coefficiens indéterminés. Donc $pz = a'xz + b'zz + c'xxz + e'xzz + f'z^3 + g'x^3z + h'xxzz + l'xz^3 + m'z^4$ &c. Donc $d(pz) = dx\,(a'z + 2c'zx + e'zz + 3g'x^2z + 2h'zzx + l'z^3) + dz\,(a'x + 2b'z + c'xx + 2e'xz + 3f'z^2 + g'x^3 + 2h'xxz + 3l'xz^2 + 4m'z^3)$ &c. Donc à cause de $dq = -\frac{dxdpz}{zdz} + \frac{dzdpz}{zdx}$, on aura $dq = dz\,(a' + 2c'x + e'z - 3l'x^2 + 2h'zx + lz^2) + dx\,(-\frac{a'x}{x} - 2b' - \frac{c'xx}{x} - 2e'x - 3f'z - \frac{g'x^3}{z} - 2h'xx - 3l'xz - 4m'z^2)$: or pour que cette quantité soit une différentielle complette, il faut que $2c' + 6lx + 2h'z = \frac{a'x}{zz} + \frac{c'xx}{zz} - 3f' + \frac{g'x^3}{zz} - 3l'x = 8m'z$: on a donc $a' = 0$, $g' = 0$, $c' = 0$, $f' = 0$, $l = 0$, $4m' = -h$: donc $pz = b'zz + e'xz^2 + h'xxzz - \frac{b'z^4}{4}$, & $p = b'z + e'xz + h'xxz - \frac{b'z^3}{4}$, b', e', h' étant des coefficiens indéterminés.

Delà on voit assez la loi de la quantité p. Car on aura $p = b'z + e'xz + h'xxz + m'z^3 + n'xz^3 + k'x^3z + r'xxz^3 + s'x^4z$ &c. Equation dans laquelle on pourra déterminer la valeur de m' en h', de k' en n', de s' en r', &c. & il restera à déterminer par la nature de la Courbe AMD les indéterminées b', e', h', n', r' &c. *Ce Q. F. Tr.*

COROL. I.

COROLLAIRE I.

62. Pour déterminer maintenant les coefficiens b', e', h' &c. on remarquera qu'en mettant y pour z dans les valeurs de p & de q, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}$. On prendra donc ſur la Courbe AMD un certain nombre de points dans leſquels on connoîtra les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, de y, & de x, & par-là on déterminera les coefficiens b', e', h', &c. préciſément de la même maniére qu'on trouve la quadrature d'une Courbe par approximation, en faiſant paſſer par un certain nombre de points de cette Courbe une ligne de genre parabolique.

REMARQUE.

63. Au reſte, après avoir fait le calcul de ces coefficiens, il en reſtera encore un dont on ignorera la valeur abſolue, valeur qui influera ſur celle de tous les autres; ce qui eſt évident; car qu'on multiplie le haut & le bas de la fraction $\frac{p}{q}$ par une quantité quelconque m, elle ne changera point de valeur. Il faut donc déterminer ce coefficient; de plus, il faut trouver la poſition des points M, L, (Fig. 13) qui déterminent la longueur du filet de Fluide appliqué contre la Courbe; ou, ce qui revient au même, il faut trouver les

abſciſſes qui répondent à ces points. Voilà donc trois inconnues nouvelles qu'il faut trouver pour l'entiere ſolution du Problême. Pour cela, on remarquera que la viteſſe en M & en L doit être très-petite, ou $= 0$ (*art.* 52); d'où l'on tire $a\sqrt{[pp+qq]} = 0$ en M & en L. Donc nommant C & D les abſciſſes des points M & L, & A, b leurs ordonnées qui ſont des fonctions connues de C & de D, il faut 1°. que $\sqrt{[pp+qq]} = 0$ ou $pp+qq = 0$, en mettant dans p & dans q, C pour x, & A pour y. 2°. Que $pp+qq = 0$, en mettant dans p & dans q, D pour x, & b pour y. 3°. Regardant A & b comme connues auſſi-bien que C & D, on aura les valeurs de Γ, & Ω, aſſignées ci-deſſus (*art.* 54); or ces valeurs doivent être telles que $\mu+\Omega-\pi\Gamma bb = 0$ (*art.* 55): donc cette équation avec les deux précédentes, ſervira à déterminer les trois inconnues qui nous reſtent.

COROLL. II.

64. Il eſt conſtant par tout ce qui précede, qu'il ſuffit de connoître la viteſſe du filet du Fluide qui eſt immédiatement contigu à la ſurface du corps. Soient donc ſuppoſées trouvées les quantités p & q, & ſoit miſe dans ces quantités y à la place de z; ſoit ſuppoſé de plus qu'après cette ſubſtitution on ait diviſé p par q, & que le quotient ſoit n; on aura $\frac{p}{q} = n$ ou $p = qn$,

& $pz = qnz$, z étant toujours la même que y. Donc ſi on fait $dn = \lambda dx + \omega dz$, on aura $d(pz) = nzA\,dx + qz\lambda dx + qn dz + nzB dz + zq\omega dz$: or on a $d(pz) = zB\,dx - Azdz$: ces deux valeurs de $d(pz)$ ſont égales & identiques : * car les quantités p & qn ſont égales & identiques: donc $nzA + qz\lambda = zB$, & $qn + nzB + zq\omega = -zA$:

D'où l'on tire 1°. $A = -\frac{zq\omega + zqn\lambda + qn}{\omega nz + z}$,

2°. $B = \frac{-nzq\omega - nnzq\lambda - qnn}{nnz + z} + q\lambda = \frac{-zzq\omega - nnq + q\lambda z}{\omega nz + z}$,

Par conſéquent $dq = \frac{-zq\omega dx - zqn\lambda dx - qndx}{nnz + z} + \frac{-nzq\omega dz - nnqdz + q\lambda zdz}{nnz + z}$: d'où à cauſe de $\lambda dx + \omega dz = dn$, on tire $\frac{dq}{q} = -\frac{ndn}{nn + 1} - \frac{ndx + nndz}{\omega nz + z} + \frac{\lambda dx - \omega dx}{nn + 1}$: or on a $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{dz}{dx} = n$. Donc $ndx = dz$, & $\lambda dz = z\lambda dx$: donc dans le filet AMD, on aura

* J'appelle quantités identiques, celles qui ſont non-ſeulement égales, mais exprimées par les mêmes lettres : par exemple $\frac{aa - bb}{a + b} = a - b$ ou $(aa - bb) = (a + b) \times (a - b)$ eſt une équation identique : mais j'appelle ſimplement égales des quantités, qui quoique les mêmes, ſont exprimées par des lettres différentes. Par exemple y & $\sqrt{[2ax - xx]}$ dans l'équation $y = \sqrt{[2ax - xx]}$.

$\frac{dq}{q} = \frac{-n\,dn}{nn+1} - \frac{dx}{x} + \frac{n\lambda\,dx - \omega\,dx}{nn+1}$: or $n\lambda\,dx - \omega\,dx =$ $n\,dn - n\omega\,dz - \frac{\omega\,dx}{n} = n\,dn - \omega\,dz\,(\frac{nn+1}{n}) = n\,dn -$ $\omega\,dx \times (nn+1)$. Donc $\frac{dq}{q} = \frac{-dx}{x} - \omega\,dx$.

COROLL. III.

65. Il paroît d'abord que rien n'eſt plus facile que de déterminer q par l'équation trouvée dans l'*art. précédent*, puiſque ω eſt donnée par n, & que n eſt donnée par l'équation de la Courbe $\frac{dy}{dx} = n$. Mais pour peu qu'on y faſſe d'attention, on verra que quoique l'équation de la Courbe ou la valeur de $\frac{dy}{dx}$ ſoit donnée, n n'eſt pas donnée pour cela. En effet, n doit être $= \frac{p}{q}$: or on peut exprimer le rapport $\frac{dy}{dx}$ d'une infinité de maniéres différentes ; & parmi ces différentes expreſſions, qui ne ſont pas identiques, quoiqu'égales, il faut trouver celle qui eſt égale à $\frac{p}{q}$, dq étant $A\,dx + B\,dz$ & $d(pz)$ étant $z\,B\,dx - A\,z\,dz$: par exemple, dans le Cercle on a $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y}$ ou $\frac{ay - xy}{2ax - xx}$, ou $\frac{a\sqrt{[2ax - xx]} - xy}{yy}$: or on ne peut pas prendre

à volonté une de ces valeurs pour l'expreſſion de n; il faut de plus que l'équation $p = qn$ ſoit identique.

Pour faire voir encore plus clairement qu'on ne peut pas prendre n à volonté; on obſervera que de l'équation $\frac{dq}{q} = -\frac{dz}{z} - \omega dx$, on tire $\frac{dq}{q} = -\frac{dz}{z} - \frac{\omega dx}{n}$, & $\frac{dq}{q} = -\frac{dz}{z} - \frac{dn}{n} + \frac{\lambda dx}{n}$; équations deſquelles il doit réſulter préciſément la même valeur de q. Or ſi n pouvoit être priſe à volonté, ſoit priſe n telle dans la premiere équation que n ſoit une fonction de z ſeule; on aura $-\frac{\omega dz}{n} = -\frac{dn}{n}$ & $\frac{dq}{q} = -\frac{dz}{z} - \frac{dn}{n}$ ou $q = \frac{c}{nz}$, c déſignant une conſtante. Maintenant, ſoit n égale à une fonction de x ſeule dans l'autre équation, on aura $\frac{\lambda dx}{n} = \frac{dn}{n}$ & $\frac{dq}{q} = -\frac{dz}{z}$, ou $q = \frac{c}{z}$, équation fort différente de $q = \frac{c}{nz}$. Donc &c.

Dans l'*art.* 64, nous avons trouvé $nA + q\lambda = B$, & $qn + nzB + zq\omega = -zA$ en regardant l'équation $p = qn$ comme identique. Soit maintenant en général n' la valeur de $\frac{dy}{dx}$; enſorte que l'équation $p = qn'$ ne ſoit pas identique; & ſoit $dn' = \lambda' dx + \omega' dz$, on aura $n'zAdx + q\lambda' zdx + qn'dz + n'zBdz + zq\omega' dz = Bzdx - Azdz$; donc (à cauſe de $dz = n'dx$) on trouvera $n'zA + q\lambda' z + qn'n' + n'n'zB +$

$z q \omega' n' = Bz - An'z$. On aura donc par cette équation la valeur de A en B, lorſque $z = y$. Mais comme l'inconnue B reſte toujours à déterminer, cette méthode n'eſt peut-être pas d'une grande utilité.

SECTION IV.

De la preſſion du Fluide à chaque inſtant.

66. Suppoſons que par les équations de condition $A dx + B dz = dq$, & $d(pz) = zB dx - zA dz$, on ait trouvé les fonctions q & p, comme nous l'avons enſeigné. Qu'on mette enſuite dans ces fonctions y à la place de z, on aura la viteſſe en $N = a \times \sqrt{[pp + qq]}$: d'où la preſſion en $N = (art.\ 27) \frac{a^2}{2} \times 1 - (pp - qq)$: ainſi comme les quantités p & q ne dépendent que de la figure du corps, il eſt évident que la preſſion dans le point N eſt proportionnelle au quarré a^2 de la viteſſe, & que par conſéquent la preſſion ſur toute la ſurface eſt proportionnelle à ce même quarré.

Au reſte, pour que cette expreſſion ſoit exacte, il faut ſuppoſer que $pp + qq$ eſt par-tout plus petit que 1, c'eſt-à-dire que la viteſſe le long du filet MDL (Fig. 13) eſt par-tout plus petite que a, ou du moins n'eſt pas plus grande. Car ſi après avoir déterminé p & q par le calcul on trouvoit que $\sqrt{[pp + qq]}$ fut > 1 en

certains points, il faudroit d'abord chercher le point ou la valeur de $V[pp+qq]$ seroit un *maximum*, ce qui se feroit en supposant $pdp+qdq=0$. Ensuite nommant K la valeur de $V[pp+qq]$ en ce point, on auroit (*article* 27) $\frac{a^2}{2}(K^2-pp-qq)$ pour la pression en N.

REMARQUE.

67. Quelques lecteurs s'imagineront peut-être, que la vitesse le long du filet MDL doit être plus grande que a; ils peuvent même se fonder en cela sur l'expérience journaliere, par laquelle il paroît constant que le Fluide s'accélere en tournant autour du corps. Cependant si on trouvoit par le calcul $V[pp+qq]<1$, il ne faudroit pas se hâter d'en conclure que notre Theorie fût contraire à l'expérience. Car il ne s'agit dans cette Théorie que du filet qui touche immédiatement la surface du corps; or ce filet échappe à l'observation, & il peut se faire que des filets qui sont très-peu éloignés de lui, ayent beaucoup plus de vitesse que lui.

COROLL. I.

68. Soit $K^2>1$; pour avoir la pression totale, il faudra d'abord intégrer $2\pi y dy(K^2-pp-qq)\frac{a^2}{2}$; (*art.* 26): de plus, la pression en M étant $\frac{a^2}{2}\times K^2$,

auſſi-bien qu'en L, puiſque la viteſſe en M & en L eſt $= 0$, ou cenſée telle; il s'enſuit que la partie AM ſera preſſée (*art.* 24) ſuivant AC avec une force $= \frac{a^2}{2} K^2 \times \pi AA$, & la partie LC en ſens contraire avec une force $= \frac{a^2 K^2}{2} \times \pi bb$. Donc il faudra ajouter à la preſſion la quantité $\frac{a^2 K^2}{2} (\pi AA - \pi bb)$.

Mais ſi la viteſſe le long de la Courbe AMD étoit trouvée plus petite que a, c'eſt-à-dire ſi $\sqrt{[pp + qq]}$ étoit par-tout plus petit que 1, alors au lieu de $K^2 - pp - qq$, il faut $1 - pp - qq$; & au lieu de $a^2 K^2 (\pi AA - \pi bb)$ il faut $a^2 (\pi AA - \pi bb)$. Car la preſſion en F ſeroit alors $\frac{a^2}{2}$; & cette preſſion agiroit ſur l'Arc AM par le Canal $TFAM$, & la preſſion en L ſeroit auſſi $\frac{a^2}{2}$, parce que la viteſſe en L eſt $= 0$, deſorte que cette preſſion agiroit ſur l'Arc LC. Donc &c.

J'appelle en général dans tous ces cas $a^2 \varphi$ la quantité qu'on trouve par le calcul pour la preſſion totale, & qui eſt proportionnelle comme on voit à a^2 : car φ ſera toujours la même quelle que ſoit a, puiſque la poſition des points L, M, & les valeurs de p & de q ne dépendent point de a.

COROL. II.

COROLL. II.

69. Soit la plus grande ordonnée $KD = \gamma$, on aura $\int 2\pi y dy \cdot \frac{K^2 a^2}{2} = \frac{K^2 a^2}{2}(\gamma^2 - A^2) - \frac{K^2 a^2}{2}(\gamma^2 - b^2)$. Donc la preſſion totale ſe réduira dans le premier cas à $\int -2\pi y dy\ (pp + qq)\ \frac{a^2}{2}$, puiſque $\int K^2 \cdot 2\pi y dy + K^2 A^2 - K^2 b^2 = 0$. On trouvera de même, que dans le ſecond cas la preſſion totale ſe réduira à $\int -2\pi y dy\ (pp + qq)\ \frac{a^2}{2}$.

Donc en général, ſi après avoir déterminé p & q par la méthode de l'*art.* 62, on prend l'intégrale de $-2\pi y dy\ (pp + qq)$ enſorte qu'elle ſoit $= 0$ en M, & qu'on nomme φ la valeur de cette intégrale au point L, on aura $a^2\varphi$ pour la preſſion totale.

COROLL. III.

70. Suppoſons (Fig. 20) que les parties AD, DC, ſoient égales entr'elles, & ſoient pris les points V, u, également diſtants du point D : il eſt viſible que la valeur de n, c'eſt-à-dire de $\frac{dy}{dx}$ eſt la même dans ces points ; mais de ſigne différent. Donc ſi on ſuppoſe que le point K ſoit le milieu de AC, & que la diſtance de ce point K à l'origine des x ſoit h, la valeur

de n doit être une fonction de y & de x, telle qu'en faisant $h - x = u$, & en prenant successivement u positive & négative, n soit la même, mais de différens signes. Donc cette fonction doit être telle, qu'il n'y ait aucun terme qui ne renferme quelque puissance impaire de u ou $h - x$. Donc dans la différentielle $\lambda dx + \omega dz$, ω sera négative, quand $h - x$ sera négative, mais elle conservera toujours d'ailleurs la même valeur. Donc dans les points V, u la valeur de ω sera la même, mais de différens signes; d'où l'on peut démontrer aisément que la valeur de $\int \omega dx$ sera la même dans ces points, & de même signe. Donc à cause de l'équation $+ \frac{dq}{q} = - \frac{dy}{y} + \omega dx$, il s'ensuit que la valeur de q est la même en V & u, & qu'ainsi la valeur de $p = qn$, y est la même aussi, mais de différens signes. Donc la valeur de $pp + qq$, sera la même en V, & en u.

Soient donc en général deux points quelconques V & u également distants du point D, ensorte que la viteſſe en V & u soit la même, on aura les quantités $\int - 2\pi y dy (pp + qq)$ de différens signes en V & en u, mais de même valeur.

Delà il s'ensuit que les Arcs LD, DM (Fig. 13) ne sauroient être égaux; car s'ils l'étoient, alors la quantité $- \int 2\pi y dy (pp + qq)$ seroit égale à zero, de maniére que le corps ne souffriroit aucune preſſion de la part du Fluide: ce qui est contre l'expérience. Il

n'y a perſonne qui, au premier coup d'œil, n'eût jugé que les Arcs DL, MD ſont toujours égaux entr'eux, lorſque le Corps eſt compoſé de 4 parties ſemblables & égales, & même ſi on s'en tenoit à la Théorie ſeule, on ſeroit porté à croire, ce me ſemble, que ces Arcs doivent être égaux en effet. D'où l'on voit combien les expériences ſont néceſſaires dans la queſtion préſente.

De plus, il eſt viſible qu'afin que la preſſion ſoit dirigée ſuivant AC, comme l'expérience l'apprend, il faut que $LD > DM$; autrement $\int -2\pi y dy \times (pp + qq)$ ſeroit négative.

Remarque I.

71. Si on imagine (Figure 20) la ligne droite RT* qui ſépare les parties du Fluide dont la viteſſe & la direction ne ſont point changées, de celle dont la viteſſe & la direction ſont changées; on peut, ce me ſemble, prouver par une expérience commune & fort ſimple, que la ligne RT eſt aſſez près du corps. Soit expoſé un pendule au courant d'un Fluide, deſorte qu'il ſoit d'abord également éloigné des parois du Canal où le Fluide coule : l'action du Fluide écartera ce pendule de la ſituation verticale, & le pendule s'élevera dans un plan vertical paſſant par la direction

* Il eſt évident que RT doit être une ligne droite, puiſque les parties qui ſont à la droite de cette ligne doivent avoir (*hyp.*) un mouvement rectiligne.

du courant du Fluide ; enſuite ſoit de nouveau expoſé ce même pendule au même courant, mais de maniére qu'il ſoit beaucoup plus près d'un des parois que de l'autre, il paroîtra s'élever à la même haureur que dans le premier cas, & dans un plan vertical paſſant auſſi pat la direction du courant. Donc, ſoit que le corps ſoit placé au milieu du Canal, ſoit qu'il ſe ttouve beaucoup plus proche d'un des parois que de l'autre, la preſſion ſur les parties *AMD*, *Amd* (Fig. 20) ſera égale dans les deux cas, & par conſéquent auſſi la viteſſe dans les parties *AMD*, *Amd*: d'où il réſulte que les parties du Fluide aſſez voiſines du corps, ſont les ſeules dont le mouvement ſoit changé ſenſiblement par la rencontre du corps.

REMARQUE II.

72. On peut prouver la même propoſition par le moyen d'un corps qui monte dans un vaſe plein d'eau; car ce corps monte toujours verticalement avec la même viteſſe en quelque endroit du vaſe qu'on le place, & quelque près des parois qu'il ſe trouve. D'où il s'enſuit qu'il ne communique de mouvement qu'aux parties du Fluide qui ſont aſſez voiſines de lui. Enfin on peut encore obſerver, que quelle que ſoit la viteſſe du Fluide, la ligne *RT* (Figure 20) doit toujours (*art.* 39) être à la même diſtance du corps. Or l'expérience prouve que quand la viteſſe eſt fort petite,

le mouvement & la direction des parties du Fluide n'eſt altéré que juſqu'à une aſſez petite diſtance du corps. Donc en ce cas la ligne RT eſt aſſez proche du corps. Donc en général, elle eſt aſſez proche du corps, quelle que ſoit la viteſſe a.

SECTION V.

De la réſiſtance d'une figure plane.

73. Juſqu'ici nous avons conſidéré des ſolides de révolution expoſés à l'action ou à la réſiſtance d'un Fluide. Imaginons préſentement une figure plane, ou plutôt pour éviter toute difficulté, imaginons un corps cylindrique dont la Section perpendiculaire à ſon Axe ſoit la Courbe $EADC$, (Fig. 13) & qui rempliſſe exactement toute la largeur du Canal, que je ſuppoſe être un parallélepipede rectangle rempli d'eau, & dont la hauteur perpendiculaire à $qGHQ$ ſoit égale à celle du cylindre; il eſt viſible qu'on peut ſe contenter de conſidérer ce qui arrive à une ſeule des Coupes perpendiculaires à l'Axe. Or on trouvera facilement en gardant les noms de l'*art.* 45, $B' = -A$ & $A' = B$; pour cela il ne faudra que mettre $\frac{\alpha}{q}$, au lieu de NM & de $\frac{\alpha^2}{qz}$ dans la démonſtration de l'*art.* 45, & dans celle de l'*art.* 48, zero au lieu de $\frac{p}{z}$.

On aura donc dans ce cas $dq = Adx + Bdz$, & $dp = Bdx - Adz$, & on trouvera facilement (*art.* 58) la formule générale de la valeur de p & de q. Mais il ne ſera pas fort aiſé d'appliquer cette formule aux différentes figures propoſées ; du moins je n'ai point trouvé de méthode, autre que celle de l'*art.* 61 ; pour choiſir dans cette équation générale, quelle eſt celle qui peut convenir avec l'équation de la figure donnée.

SECTION VI.

Remarques ſur notre ſolution du Problême de la preſſion des Fluides.

74. La ſolution que nous donnons ici du Problême de la preſſion des Fluides, eſt, ce me ſemble, appuyée ſur des principes moins vagues & moins arbitraires, que toutes celles qui ont été données juſqu'à préſent. Tout y eſt rigoureuſement démontré, & c'eſt peut-être par cette raiſon qu'il eſt ſi difficile d'y appliquer le calcul, & de pouvoir le comparer avec l'expérience. Car 1°. nous ne déterminons que par approximation les valeurs de p & de q convenables pour chaque cas. 2°. L'Analyſe par laquelle nous propoſons de les trouver eſt ſi longue, qu'elle eſt capable de rebuter le plus intrépide calculateur. Je ne crois pourtant pas qu'on puiſſe trouver une méthode plus directe & plus ſimple pour déterminer la réſiſtance & la preſſion des Fluides, & j'oſe même aſſurer que ſi cette méthode ne s'ac-

corde pas avec ce qu'on trouvera par l'expérience, on doit preſque déſeſperer de trouver la réſiſtance des Fluides par la Théorie & par le calcul Analytique. Je dis *par le calcul Analytique*; car tous les principes Phyſiques ſur leſquels porte notre Analyſe ont été démontrés en rigueur; il n'y a qu'une hypotheſe *Analytique*, qu'on pût abſolument nous conteſter; c'eſt celle par laquelle nous avons ſuppoſé que p & q ſont des fonctions de x & de z, enſorte que les Courbes $TFMD$, OKm &c. (Fig. 13) ſoient de même nature, & renfermées dans une même équation générale. On peut, à la rigueur, nous diſputer cette ſuppoſition; mais en ce cas, il faut renoncer à toute eſpérance de déterminer par le calcul, & par conſéquent par la Théorie la preſſion des Fluides. Car dès que nous avons prouvé que les valeurs des quantités p & q ne dépendent que de la poſition du point auquel elles répondent, on ne ſauroit faire une hypotheſe plus générale pour le calcul, que de ſuppoſer que ces quantités ſont des fonctions de x & de z.

SECTION VII.

Réflexions ſur les expériences qu'on a faites ou qu'on peut faire pour déterminer la preſſion des Fluides.

75. On peut déterminer de deux maniéres par l'expérience, la preſſion d'un Fluide qui frappe un corps en repos.

La premiere conſiſte à expoſer ce corps au courant d'un Fluide, & à chercher par expérience l'action du courant ſur le corps ; *M. Mariotte* me paroît s'être ſervi pour cela de la méthode la plus ſimple. Elle conſiſte à placer d'abord un Axe horizontal dans un plan perpendiculaire au courant ; on attache enſuite dans un plan perpendiculaire à cet Axe deux verges, qui faſſent entr'elles un angle droit : à l'extrémité d'une de ces verges, on fixe le corps dont on veut trouver la preſſion, & on connoît la quantité de la preſſion par le poids qu'il faut mettre à l'extrémité de l'autre verge, pour qu'elles ſoient toutes deux en équilibre.

M. Mariotte a trouvé par cette Méthode, que la preſſion d'un Fluide contre une ſurface plane perpendiculaire au courant, eſt égale au poids d'un cylindre de Fluide qui auroit pour baſe cette ſurface, & pour hauteur celle qui eſt *dûe à la viteſſe* du Fluide. On pourroit auſſi déterminer facilement par cette Méthode, la preſſion contre une ſurface plane qui ſeroit expoſée obliquement au courant du Fluide.

Pour faire cette expérience plus facilement & rendre les calculs plus ſimples, il eſt bon que les deux verges ſoient diſpoſées de maniére, que dans le cas de l'équilibre l'une ſoit verticale & l'autre horizontale. Pour cela il faut que l'Axe du corps dont on veut déterminer la preſſion, ſoit perpendiculaire à la verge à laquelle ce corps eſt attaché.

Dans le cas où l'on veut éprouver la preſſion d'une

ſurface

ſurface plane ſituée obliquement par rapport au courant, on peut placer cette ſurface plane obliquement par rapport à la verge, & conſerver aux deux verges leurs ſituations horizontale & verticale ; ou bien on laiſſera la ſurface plane dans le même plan que la verge, & alors les deux verges ſeront forcées de s'incliner.

On peut encore déterminer la preſſion par le moyen d'un pendule qu'on expoſera au courant du Fluide : car ce pendule ſortira de la ſituation verticale ; & ayant meſuré l'angle dont il s'en écarte, on fera cette proportion ; *comme le Sinus total eſt à la tangente de cet angle, ainſi le poids du pendule eſt à la preſſion cherchée* : analogie ſi facile à démontrer, que je ne crois pas devoir m'y arrêter.

Cette derniere Méthode ne peut guères s'employer commodément, que pour déterminer la preſſion des corps ſphériques. A l'égard de la précédente, lorſqu'on l'employe pour déterminer la preſſion d'une ſurface plane reſtangle ou circulaire, ou ovale, ou faite en triangle, ou en général en polygone quelconque, il faut obſerver que le centre du preſſion du Fluide eſt ou doit être cenſé au centre de gravité de la Figure ; la connoiſſance de ce centre eſt donc néceſſaire pour déterminer le bras de lévier par lequel agit la force impulſive du Fluide.

76. La ſeconde Méthode pour trouver par l'expérience la preſſion des Fluides, conſiſte à chercher leur réſiſtance. Nous allons en parler dans les *art.* ſuivans.

REMARQUE I.

77. Suivant les expériences qui ont éré faites juſqu'à préſent par différens Auteurs, on a pour la preſſion ſur le Globe $= \frac{\pi b p \delta}{2}$, b exprimant la hauteur dûe à la viteſſe du Fluide, δ ſa denſité, p la gravité naturelle, 2π le rapport de la circonférence d'un cercle à ſon rayon; & 1 le rayon du Globe. Ce que je prouve en cette ſorte.

La réſiſtance qu'un Fluide exerce contre un corps qui s'y meut, eſt égale, comme nous le prouverons dans la ſuite, à la preſſion que le même Fluide, mû avec une viteſſe égale à celle du corps, exerceroit contre ce même corps en repos. De plus, ſuivant la propoſition 39 l. 2 des Princ. Math. de *M. Newton*, la réſiſtance d'un Fluide à un corps ſphérique eſt à la force avec laquelle tout le mouvement de ce corps pourroit être détruit ou engendré, tandis qu'il parcourt les $\frac{2}{3}$ de ſon diamétre, comme la denſité du Fluide à celle du corps. Or ſoit θ le temps pendant lequel le Globe décriroit uniformément les $\frac{2}{3}$ de ſon diamétre avec la viteſſe $\sqrt{2pb}$, la denſité du Globe $= 1$, & par conſéquent ſa maſſe $= \frac{4\pi}{3}$; le temps θ ſera $= \frac{16}{3\sqrt{2pb}}$, & la réſiſtance, ſelon *M. Newton*, ſera $= \frac{4\pi}{3} \times \frac{\sqrt{[2pb]}}{4} \times \frac{\delta}{2} = \frac{\pi b \delta p}{2}$.

Ainſi telle eſt la formule de la réſiſtance ſuivant *M. Newton*, formule qu'il dit avoir confirmée par un grand nombre d'expériences.

M. Daniel Bernoulli a donné dans les Mémoires de l'Académie de Peterſbourg tom. 2. une autre formule pour la réſiſtance des Globes, qu'il a de même confirmée par des expériences, & qui s'accorde, comme on va le voir, avec la précédente. Voici la propoſition de *M. Bernoulli.* Soit s l'eſpace qu'un corps peſant parcourt librement en tombant dans l'eſpace d'une ſeconde, na l'eſpace qu'un corps parcourroit dans le même temps avec la viteſſe uniforme $\sqrt{2pb}$, p' le poids d'un cylindre de Fluide dont la baſe ſoit la circonférence 2π décrite du rayon 1, & dont la hauteur ſoit $= a$; *M. Daniel Bernoulli* trouve que la preſſion ſur le Globe, ou la réſiſtance du Globe, eſt $\frac{nnap'}{8s}$: or $p' = \pi \times \delta \times ap$; donc $\frac{nnap'}{8s} = \frac{\pi\delta pnnaa}{8s}$: mais comme les eſpaces na & $2s$ ſont parcourus dans l'eſpace d'une ſeconde (*hyp.*) on a $\frac{na}{\sqrt{2pb}} = \frac{2s}{\sqrt{2ps}}$, ou $nnaa = 4bs$. Donc $\frac{nnap'}{8s} = \frac{\pi\delta bp}{2}$.

REMARQUE II.

78. Selon *M. Newton*, la réſiſtance du Globe eſt égale à celle du cylindre circonſcrit; ainſi la preſſion

ſur-ce dernier ſeroit $\frac{\pi \delta^2 bp}{2}$: mais ſuivant *M. Daniel Bernoulli*, la preſſion ſur le cylindre eſt double de la preſſion ſur le Globe, & ſera par conſéquent $\pi \delta^2 bp$. Cette derniere propoſition paroît s'accorder avec les expériences de *M. Mariotte*, ſuivant leſquelles la preſſion d'un Fluide contre une ſurface plane eſt égale au poids d'un cylindre dont cette ſurface ſeroit la baſe, & dont la hauteur ſeroit égale à la ligne *b*. Au reſte, *M. Newton* ne paroît pas avoir ſuffiſamment démontré l'égalité prétendue des deux réſiſtances, comme on l'a prouvé dans l'Introduction ; & à l'égard de *M. Daniel Bernoulli*, il prouve que les réſiſtances ſont dans le rapport de 1 à 2, par la même Méthode que *M. Newton* employe dans ſes Principes Math. l. 2. Prop. 34; méthode qui ne ſauroit avoir lieu, lorſqu'il s'agit d'un Fluide continu. *M. Daniel Bernoulli* aſſure qu'il a tenté pluſieurs expériences ſur la réſiſtance des cylindres, & qu'elles s'accordent avec ſa Théorie ; en faiſant abſtraction de la tenacité des Fluides, qui contribue ſouvent à augmenter la réſiſtance, ſur-tout dans les corps cylindriques. C'eſt pourquoi, en attendant de nouvelles expériences ſur ce ſujet, nous prendrons $\pi \delta^2 bp$ & $\frac{\pi \delta^2 bp}{2}$ pour les preſſions du cylindre & du Globe.

En conſidérant les particules du Fluide comme de petits corpuſcules ſans reſſort, & ſéparés les uns des

autres, ainſi que je l'ai fait ailleurs (*a*), il réſulte des formules que j'ai données, que la preſſion du cylindre ſeroit $2\pi p\, b\, \delta$; & en conſidérant les particules du Fluide comme de petits Corpuſcules élaſtiques, la preſſion ſe trouveroit $4\pi p\, \delta\, b$. *M. Euler*, qui dans ſon Traité intitulé *Scientia navalis*, a déterminé la réſiſtance des Fluides par les principes ordinaires, trouve les mêmes réſultats, & en conclut avec raiſon, que la Théorie ſur laquelle ils ſont appuyés ne doit pas être fort exacte, puiſqu'elle eſt contredite par l'expérience. Il obſerve de plus, que dans l'hypotheſe des Corpuſcules élaſtiques, la viteſſe communiquée aux particules du Fluides ſeroit, ſelon les loix ordinaires du mouvement, plus grande que la viteſſe qui reſteroit au corps; & qu'ainſi dans cette hypotheſe il devroit ſe faire un vuide à la partie extérieure du corps, entre le corps & le Fluide : d'où il conclut encore avec raiſon, que cette hypotheſe eſt peu conforme à la nature; ce qui, joint aux raiſons apportées dans l'Introduction, doit déterminer à la rejetter.

Le Savant Geométre dont nous parlons, a donc tâché de démontrer par une autre Méthode, que la preſſion contre une ſurface plane eſt $= p\, b$; ſon raiſonnement peut ſe réduire à celui-ci. Imaginons un vaſe plein d'eau juſqu'à la hauteur b, au bas duquel

(*a*) Traité de l'Equilibre & du Mouvement des Fluides, L. 3. Ch. 1.

on ait fait un trou circulaire ; & qu'on applique à ce trou une ſurface plane. Cette ſurface plane ſera preſſée par une force $= pb$. Or éloignons maintenant cette ſurface à quelque diſtance du trou, l'eau ſortira avec la viteſſe dûe à la hauteur b, & *l'on peut ſuppoſer que la preſſion de la ſurface plane ſera la même qu'auparavant.* Cette derniere ſuppoſition n'eſt point vraie, ainſi que nous le prouverons dans la ſuite. Car la preſſion d'une veine du Fluide qui ſort d'un vaſe & qui frappe un plan, eſt à très-peu près égale à $2ph$, & non à ph, comme il arrive quand la ſurface plane eſt entiérement plongée dans un Fluide. Auſſi l'Auteur n'a-t-il donné aucune preuve de la ſuppoſition que nous combattons ; & nous lui devons la juſtice de dire qu'il paroît en avoir ſenti ou du moins ſoupçonné le peu d'exactitude.

REMARQUE III.

79. *M. s'Graveſande* dans ſes Elém. de Phyſ. Math. trouve pour la réſiſtance du Globe une quantité bien différente de celle que nous venons de donner d'après *Mrs Newton* & *Bernoulli*. Suivant cet Auteur, l'action d'un Fluide ſur un cylindre (abſtraction faite de la ténacité, de la peſanteur, & du frottement des parties) eſt la même que celle que *M. Bernoulli* a trouvée. A l'égard de la preſſion du Globe, elle eſt à celle-là, non comme 1 à 2, mais comme 2 à 3, §. 1950. *M. s'Graveſande* a confirmé ce rapport par des expériences, &

il a même entrepris de le démontrer geométriquement. La démonſtration qu'il en donne eſt la même, quant à la Méthode, que celle par laquelle *Mr. Newton* & *Bernoulli* ont trouvé les réſiſtances en raiſon de 1 à 2; mais avec cette différence, que les Auteurs cités ont ſuppoſé que l'action du Fluide perpendiculaire à chaque petit côté d'une Courbe, eſt en raiſon de ce petit côté, du quarré de la viteſſe & du quarré du Sinus d'incidence; au lieu que ſelon les Principes de *M. s'Graveſande*, l'action eſt en raiſon compoſée du côté de la Courbe, du quarré de la viteſſe, & du Sinus d'incidence ſimple: c'eſt delà que vient la différence des rapports de 1 à 2, & de 2 à 3.

Il eſt vrai que la ſuppoſition de *M. s'Graveſande* paroît contraire au principe admis juſqu'ici par tous les Auteurs d'Hydraulique, ſavoir, que l'action d'un Fluide qui choque obliquement une ſurface plane, eſt, toutes choſes d'ailleurs égales, comme le quarré du Sinus d'incidence. Mais il faut avouer que cette propoſition a été juſqu'à préſent mal démontrée. Car la démonſtration qu'on en donne eſt appuyée ſur cette ſeule conſidération, que plus la ſurface *AB* (Fig. 21) eſt oblique au courant du Fluide, moins il y a de particules qui la frappent, puiſque le nombre de ces particules eſt repréſenté par *ab* perpendiculaire à la direction du Fluide *aA*; & outre cela, moins eſt grande la force avec laquelle chacune de ces particules frappe le plan; de maniére que cette raiſon compoſée donne

celle du quarré du Sinus d'incidence. Or on prouveroit par le même raiſonnement, que la preſſion oblique qu'un Fluide ſtagnant exerceroit contre la ſurface *AB* ſeroit en raiſon de cette ſurface & du quarré du Sinus d'incidence : car la direction de la gravité étant *aA*, il ſemble que *ab* doive repréſenter le nombre des particules ; & la force de la gravité qui agit ſur *AB*, ſemble devoir l'être par le Sinus de l'angle *aAB*. Cependant on ſait par les principes d'Hydroſtatique, que la preſſion ſur *AB* eſt proportionnelle à *AB* ſeulement, quelle que ſoit la poſition de cette ſurface par rapport au Fluide ; parce que les Fluides agiſſant également en tout ſens, la preſſion ſur la ſurface *AB* eſt toujours la même que ſi le Fluide étoit perpendiculaire à cette ſurface.

D'un autre côté cependant, ſi la preſſion du Fluide ſur la ſurface *AB* étoit ſuppoſée proportionnelle à la ſurface ſeule *AB*, enſorte qu'on jugeât à cet égard d'un Fluide mû, comme d'un Fluide en repos ; il s'enſuivroit que cette preſſion ne dépendroit en aucune maniére de la poſition de la ſurface, ce qui eſt contraire à l'expérience ; car il n'eſt perſonne qui n'ait éprouvé que la réſiſtance eſt d'autant plus grande, que la ſurface eſt plus directement oppoſée au courant du Fluide. Donc le Sinus d'incidence doit entrer dans la valeur de la preſſion ; mais comment doit-il y entrer ? c'eſt ce qui me paroît très-difficile à décider. *M. Daniel Bernoulli* dans le to. 8. des Mém. de Peterſbourg,

trouve

trouve que la preſſion d'une veine de Fluide eſt proportionnelle à l'amplitude ou largeur de la veine & au Sinus d'incidence ſimple, ce qui revient, comme on le voit aiſément, au quarré du Sinus. Mais il avoue que ſa formule eſt vague & incertaine, & promet de faire là-deſſus des expériences. A l'égard de *M. s'Graveſande*, il n'apporte, que je ſache, aucune expérience pour prouver que la preſſion eſt en raiſon ſimple du Sinus d'incidence : & même ſi on fait attention à la poſition des aîles dans les moulins à vent, on peut douter de la vérité de cette propoſition. Car ſuivant l'expérience, la poſition des aîles la plus avantageuſe eſt celle qui leur donne 54°. d'inclinaiſon ſur l'Axe ; or on trouve cette même quantité d'inclinaiſon, en ſuppoſant que la preſſion eſt proportionnelle au quarré ss du Sinus d'incidence s ; au lieu que ſi on la ſuppoſoit proportionnelle au Sinus ſimple s, l'angle ſe trouveroit de 45°. ce qui eſt contraire à l'expérience. En effet, dans l'hypotheſe du quarré du Sinus, l'effort du vent pour faire tourner l'aîle eſt proportionnel à $ss\sqrt{[1 - ss]}$, qui eſt un *maximum*, lorſque $1 - ss = \frac{1}{3}$; & dans l'hypotheſe du Sinus ſimple, l'effort eſt proportionnel à $s\sqrt{[1 - ss]}$ qui eſt un *maximum*, lorſque $s = \frac{1}{2}$.

Nous avons déja obſervé que la quantité de la preſſion du Globe déterminée par *M. s'Graveſande*, paroît

confirmée par des expériences qu'il rapporte (§. 1495) & que cette quantité eſt très-différente de celle que *Mrs Newton* & *Bernoulli* ont auſſi confirmée par des expériences. *M. Daniel Bernoulli* avoue cependant dans ſon Hydrodynamique, que l'expérience ne donne point comme la Théorie, la preſſion du Globe égale à la moitié de celle du cylindre. Mais que faut-il donc répondre aux expériences que lui-même a faites? A l'égard de la preſſion du cylindre, *Mrs Mariotte, Bernoulli* & *s'Graveſande* la trouvent la même par la Théorie; mais outre qu'il eſt très-difficile de déterminer cette preſſion par des expériences, *M. s'Graveſande* avoue que celles qu'il a faites ſur cette matiére, ne s'accordent point avec ſa formule. Il ſeroit donc néceſſaire de répéter toutes ses expériences de nouveau, & de commencer par déterminer la preſſion d'un Fluide qui choque obliquement une ſurface plane. C'eſt ce qu'on peut exécuter aiſément par le moyen de la Méthode indiquée *article* 75.

Il faudroit enſuite recommencer les expériences de *Mrs Mariotte, Bernoulli, Newton* & *s'Graveſande* ſur la réſiſtance du Globe. Mais quand même on trouveroit par quelque expérience particuliere la preſſion oblique d'une ſurface plane proportionnelle au Sinus d'incidence ſimple, ce ne ſeroit pas une raiſon pour admettre la Théorie de *M. s'Graveſande*. Car cette Théorie a tous les défauts dont nous avons parlé dans l'Introduction.

CHAPITRE V.

De la réſiſtance des Fluides aux corps qui s'y meuvent.

SECTION I.

Obſervations générales ſur les diverſes eſpéces de Fluides.

80. TOUT Fluide dans lequel un corps ſe meut, eſt élaſtique, ou non élaſtique. J'appelle Fluide élaſtique celui dont les parties peuvent ſe reſſerrer de maniére qu'elles occupent un eſpace moindre qu'avant la compreſſion, & réciproquement ſe dilater de maniére qu'elles occupent un eſpace plus grand qu'avant leur dilatation. Et j'appelle Fluide non élaſtique celui dont les parties ne peuvent ni ſe reſſerrer ni ſe dilater, mais occupent toujours le même eſpace, quelle que ſoit la force qui les comprime.

81. Si un corps ſe meut dans un Fluide de cette derniere eſpéce, & que le Fluide ſoit, ou indéfini, ou renfermé dans un vaſe fini & fermé de toutes parts, dont il rempliſſe exactement la capacité, en ce cas il ne doit & ne peut jamais y avoir aucun vuide entre les parties du Fluide & la ſurface du corps qui s'y meut. Car il ne pourroit y avoir d'eſpace vuide, à moins que les parties du Fluide ne ſe reſſerraſſent, ce qui eſt contre l'hypotheſe.

82. Il pourra en arriver autrement, ſi le corps ſe

meut dans un Fluide non élaſtique & contenu dans un vaſe qui ne ſoit point fermé de tous côtés. Car ſoit par exemple, de l'eau ſtagnante dans un baſſin, & ſoit plongé dans cette eau ſtagnante un corps qui ne ſoit pas fort éloigné de la ſurface ſupérieure de l'eau, & qui ſoit auſſi peſant qu'un égal volume d'eau; j'ajoute cette condition, pour pouvoir faire abſtraction plus facilement de la peſanteur du corps & de celle du Fluide. Qu'on donne à ce corps une impulſion de bas en haut vers la ſurface ſupérieure de l'eau ſtagnante, il eſt viſible que par cette impulſion le Fluide eſt pouſſé dans ſa partie antérieure, c'eſt-à-dire dans la partie qui eſt entre la ſurface de l'eau & la ſurface ſupérieure du corps. Ainſi comme les parties qui ſont à la ſurface de l'eau peuvent ſe mouvoir librement de bas en haut; il pourra arriver que le mouvement imprimé au corps oblige en effet ces parties de ſe mouvoir ainſi, de maniére que la ſurface de l'eau perde en cet endroit-là ſa ſituation & ſa figure rectiligne & horizontale, & s'éleve au-deſſus de ſon niveau. C'eſt pourquoi rien n'empêche alors qu'il ne ſe faſſe un vuide entre la ſurface inférieure du corps & les parties voiſines du Fluide; ſurtout ſi le mouvement imprimé au corps eſt aſſez grand, pour que la preſſion ſe communique dès le premier inſtant à la ſurface de l'eau, & pour que le Fluide contigu à la partie poſtérieure du corps ne puiſſe pas s'élancer avec aſſez de viteſſe dans l'eſpace que ce corps laiſſera vuide par derriere.

83. Si le Fluide eſt élaſtique, ſoit fini, ſoit indéfini, il eſt évident que les parties du Fluide doivent ſe reſſerrer néceſſairement à la partie antérieure du corps, & ſe dilater à la partie poſtérieure; il peut même arriver dans un grand nombre de cas, que le Fluide en s'élançant dans le vuide que le corps laiſſe par derriere, ne rempliſſe pas entiérement ce vuide, ce qui arrivera ſi la viteſſe que le Fluide doit avoir en vertu de ſa compreſſion eſt moindre que la viteſſe imprimée au corps.

84. Nous diviſerons donc en trois parties nos recherches ſur la réſiſtance des Fluides. Nous traiterons dans la premiere de la réſiſtance des Fluides non élaſtiques & indéfinis, ou, ce qui revient au même, contenus dans un vaſe tranquille & fermé de tous côtés, dont ils rempliſſent exactement la capacité, c'eſt-à-dire (généralement parlant) de la réſiſtance des Fluides dans le cas où il ne ſe fait point de vuide entre le Fluide & le corps.

Dans la ſeconde partie, nous traiterons de la réſiſtance des Fluides non élaſtiques & finis, c'eſt-à-dire des cas où il ſe fait un vuide derriere le corps.

Enfin dans la troiſiéme, nous traiterons de la réſiſtance des Fluides élaſtiques. Nous deſtinons à chacune de ces parties un Chapitre particulier, & nous inférerons entre ces Chapitres pluſieurs Remarques importantes.

SECTION II.

De la réſiſtance des Fluides non élaſtiques, & indéfinis.

85. Avant que de déterminer cette réſiſtance, il eſt bon de faire quelques obſervations néceſſaires pour l'intelligence des calculs ſuivans.

1°. Nous ferons d'abord abſtraction dans cette recherche de la ténacité & du frottement des parties du Fluide, dont nous examinerons enſuite ſéparément l'effet.

2°. Nous ferons de même abſtraction d'abord de la peſanteur, tant du corps que du Fluide, & enſuite nous en conſidérerons l'effet ſéparément.

3°. Si le Fluide eſt comprimé par une force quelconque différente de la gravité, nous n'aurons aucun égard à cette compreſſion; par la raiſon qu'elle ne ſauroit, quelque grande qu'elle ſoit, apporter aucun changement à la réſiſtance, dans le cas où il ne ſe fait aucun vuide derriere le corps.

Car ſoit dans un Fluide quelconque comprimé un corps en repos, dont une moitié ſoit ADC, (Fig. 20) & ſoit menée d'un point quelconque V la ligne Vu paralléle à l'Axe AC. Le Fluide étant (*hyp.*) également comprimé de tous côtés, les points V, u, ſont preſſés par des forces égales ſuivant VZ & uz; donc ſi on change ces forces en d'autres ſuivant VF & Vu, & ſuivant uf & uV, on démontrera facilement que les forces ſuivant Vu & uV ſont égales entr'elles, &

que les forces ſuivant VF & uf ſont pareillement détruites par des forces contraires ſuivant FV & fu. Donc la compreſſion du Fluide ne ſauroit produire dans le corps aucun mouvement.

Maintenant, que le corps ſoit mis en mouvement par une cauſe quelconque, la compreſſion ſur les points V & u ſera toujours la même, puiſque (*hyp.*) il n'y a jamais de vuide entre le Fluide & le Corps, & que la force qui comprime le Fluide agit toujours également.

Donc quelle que ſoit la force comprimante du Fluide, elle ne doit produire aucun mouvement dans le corps, ni aucun changement dans ſon mouvement. Cette obſervation a déja été faite par *M. Newton*, & je ſuis ſurpris que quelques Auteurs, d'ailleurs très-habiles, ayent penſé que la réſiſtance devroit être nulle dans un Fluide infiniment comprimé. Voici leur raiſonnement. Si un Fluide, diſent-ils, eſt infiniment comprimé, l'eſpace qu'un corps qui s'y meut laiſſe vuide par derriere, ſera rempli ſur le champ par les particules du Fluide qui s'y élanceront avec une viteſſe infinie. J'en conviens : mais je dis que par cette même raiſon, la réſiſtance à la partie antérieure doit être beaucoup plus grande : car il eſt évident que la compreſſion à la partie antérieure eſt contraire au mouvement du corps ; donc ſi la compreſſion à la partie poſtérieure favoriſe ce mouvement en quelque maniére, la compreſſion à la partie antérieure doit le retarder d'autant ; deſorte que la compreſſion à la partie antérieure & à la

partie poſtérieure, tendent toujours à produire des effets égaux & directement contraires.

Ainſi la compreſſion du Fluide doit être comptée pour rien, dans le cas où il ne ſe fait aucun vuide entre le Fluide & le Corps.

4°. Nous avons démontré dans l'*art.* 39, que quelle que ſoit la viteſſe initiale du corps mû, les particules du Fluide décrivent toujours les mêmes Courbes. Or on peut prouver par un raiſonnement ſemblable, que quelle que ſoit la viteſſe initiale du corps mû, le nombre de parties auxquelles il communique du mouvement dans le premier inſtant eſt toujours le même; & que les parties du Fluide qui ſont en mouvement dans l'inſtant où le corps eſt à la fin de l'eſpace quelconque x, ſont toujours en même nombre, quelle que ſoit la viteſſe de ce corps à la fin de cet eſpace. Or l'expérience prouve que quand un corps ſe meut fort lentement, il n'y a que les particules peu diſtantes du corps qui en reçoivent du mouvement, deſorte que l'action d'un corps qui ſe meut lentement à travers un Fluide, ne s'étend qu'à une petite diſtance de lui: donc l'action d'un corps qui ſe meut avec une viteſſe quelconque dans un Fluide, doit auſſi s'étendre à une petite diſtance de lui; & la même choſe réſulte des *art.* 71 & 72. Au reſte, dans toutes les Propoſitions ſuivantes, nous n'aurons beſoin, comme ci-deſſus, que d'avoir égard aux particules de Fluide immédiatement contiguës à la ſurface du corps.

PROPOS. IX,

PROPOS. XII. PROBLEME.

86. Déterminer la viteſſe qu'un corps de Figure quelconque, mû avec une viteſſe quelconque, communique aux parties d'un Fluide ſans peſanteur, & d'une denſité quelconque, lorſqu'il ſe meut dans un tel Fluide.

Soient comme dans l'*art.* 48 N, B, C, D, (Fig. 16) quatre particules de Fluide diſpoſées de telle maniére qu'elles conſtituent un parallélogramme rectangle, dont le côté NC ſoit paralléle au chemin du corps. Il eſt viſible que la viteſſe de ces particules à chaque inſtant peut être regardée comme compoſée de deux autres; ſavoir d'une viteſſe égale & paralléle à celle que le corps mû a dans cet inſtant, & d'une autre viteſſe qui ſera la viteſſe reſpective de ces particules par rapport au corps. Soit u la viteſſe rectiligne du corps dans un inſtant quelconque, V la viteſſe reſpective de la particule N; donc la viteſſe abſolue de cette particule ſera compoſée de la viteſſe u, & de la viteſſe V. La premiere u de ces viteſſes eſt ſuivant CN, paralléle & égale à la viteſſe du corps : à l'égard de la ſeconde viteſſe V, on peut la regarder comme compoſée de deux autres viteſſes, dont l'une que j'appelle v, ſera ſuivant NC, & l'autre que je nomme v', ſera ſuivant NB.

Or, quand le corps eſt à la fin d'un eſpace quelconque, la viteſſe abſolue de la particule N, doit avoir (*art.* 8) le même rapport à la viteſſe actuelle du corps, quelle

qu'elle ſoit, & la particule N doit avoir la même ſituation par rapport à ce corps, & la même direction; donc puiſque la viteſſe abſolue de la particule N ſuivant NE eſt $u - v$, & ſuivant NB eſt v', il eſt clair que le rapport de $u - v$ à u, & de v' à u dépend de la ſituation de la particule N par rapport au corps, & de l'eſpace x déja parcouru par le corps : or comme $\frac{u-v}{u} = 1 - \frac{v}{u}$, il s'enſuit que le rapport de v à u, & de v' à u dépend de l'eſpace x parcouru par le corps, & de la poſition du point N.

De plus, (*art.* 6) $\frac{-du}{u} = \xi\, dr$, ξ étant une fonction de l'eſpace r décrit par le corps. Donc (*art.* 9) r ſera une fonction de $\frac{u}{g}$. Donc le rapport de v à u & de v' à u, dépend de $\frac{u}{g}$ & de la poſition du point N; c'eſt-à-dire de $\frac{u}{g}$, de x, & de z. Or dans le filet AMD, (Fig. 17) on a $\frac{v}{v'} = \frac{dx}{dy}$, c'eſt-à-dire = à une fonction de x & de y. Donc l'expreſſion du rapport de $\frac{v}{u}$ & de $\frac{v'}{u}$, doit être telle, que diviſant v par v' & faiſant $z = y$, $\frac{u}{g}$ s'évanouiſſe, & diſparoiſſe de ce rapport. Suppoſons donc d'abord que la quantité $\frac{u}{g}$

ne ſe trouve point dans le rapport de v à u & de v' à a, & voyons ce qui réſultera de cette hypotheſe.

Soit, comme dans l'*article* 48, $v = uq$, & $v' = up$, $NB = \alpha$, $NC = \mathcal{C}$, NN' (Fig. 19) $= k$, $dq = Adx + Bdz$, $dp = A'dx + B'dz$, & on trouvera comme dans l'*art.* 48, $\alpha\mathcal{C} = (\alpha - updt + updt + udt \cdot B'\alpha) \times (\mathcal{C} - uqdt + uqdt + udt \cdot A\mathcal{C}) \times (k + \frac{kpdt}{z})$. D'où l'on tirera comme dans ce même *article*, $B' = -A - \frac{p}{z}$: donc cette équation a lieu, ſoit que le Fluide ſe meuve ou qu'il ſoit en repos. Outre cela, on prouvera encore par le même raiſonnement que dans l'*art.* 43 (Fig. 16) que $uq : uq - qdu - u \times NE \times \frac{dq}{dx} - u \times \frac{NE \cdot p}{q} \times \frac{dq}{dz} :: uqdt : NE$. donc $NE = uqdt - qdudt - u^2qdt^2 \times A - u^2pdt^2 \times B$; & on aura de même $FE = updt - pdudt - u^2pA'dt^2 - u^2qB'dt^2$. Donc la particule N ſollicitée par les forces $\frac{du}{dt} - \frac{qdu}{dt} - u^2qA - u^2pB$ ſuivant NC, & par les forces $-\frac{pdu}{dt} - u^2pA - u^2qB'$ ſuivant NB, doit être en équilibre : or la force $\frac{du}{dt}$ eſt la même dans tous les points N, B, C, D, enſorte que les parties du Canal $NBCD$ ſollicitées par cette force ſont en équilibre : donc la particule N doit être en

équilibre étant animée par les ſeules forces $-\frac{q\,du}{dt} - u^2 q A - u^2 p B$, & $-\frac{p\,du}{dt} - u^2 q A' - u^2 p B'$. Donc mettant pour B' ſa valeur $-A-\frac{p}{z}$, on aura $\frac{du}{dt}\times\frac{dq}{dz} + \frac{d(u^2 q A + u^2 B p)}{dz} = \frac{du}{dt}\times\frac{dp}{dx} + \frac{d(u^2 q A' - u^2 A p - \frac{u^2 p p}{z})}{dx}$. Donc puiſque dans cette équation p & q ne dépendent point de l'indéterminée u, on doit avoir ſéparément $\frac{du}{dt}\times\frac{dq}{dz} = \frac{du}{dt}\times\frac{dp}{dx}$; c'eſt-à-dire $\frac{dq}{dz} = \frac{dp}{dx}$ ou $B = A'$, & $\frac{u^2 d(qA+Bp)}{dz} = \frac{u^2 d(qA' - Ap - \frac{pp}{z})}{dx}$ ou $\frac{d(qA+Bp)}{dz} = \frac{d(qA' - Ap - \frac{pp}{z})}{dx}$.

Cette équation ne différe point de celle de l'*art.* 48 $\frac{d(qA+Bp)}{dz} = \frac{d(qA'+B'p)}{dx}$, en ſuppoſant $B' = -A - \frac{p}{z}$, & $A = B'$; car nous avons vu (*art.* 48) que cette derniere équation ſe réduiſoit alors à zero: donc les conditions déja trouvées $B = A'$ & $B' = -A - \frac{p}{z}$ ſatisfont à l'équation $\frac{d(qA+Bp)}{dz} = \frac{d(qA' - Ap - \frac{pp}{z})}{dx}$;

de laquelle il ne réſulte aucune nouvelle condition. Donc les équations $B = A'$ & $B' = -A - \frac{t}{z}$, ont également lieu, ſoit dans le cas où le Fluide ſe meut, ſoit dans le cas où le Fluide eſt en repos, & le corps en mouvement.

SCHOLIE I.

87. Si nous euſſions ſuppoſé $\frac{v}{u} = q\varphi(\frac{u}{g})$ & $\frac{v'}{u} = p\varphi(\frac{u}{g})$, q & p déſignant des fonctions de x & de z, & $\varphi(\frac{u}{g})$ une fonction quelconque de $\frac{u}{g}$, nous ſerions arrivés aux mêmes équations.

Voici maintenant la raiſon pour laquelle nous avons ſuppoſé la fonction $\varphi\frac{u}{g} = 1$. Si nous ſuppoſions $\frac{v}{u} = q\varphi(\frac{u}{g})$, nous trouverions, comme il eſt très-aiſé de le faire voir, la preſſion proportionnelle à $u\varkappa\varphi(\frac{u}{g})^2$, ce qui ne doit pas être ſurprenant, puiſqu'en général la réſiſtance R (*article* 9) eſt proportionnelle à ξuu, ξ étant une fonction de $\frac{u}{g}$: la réſiſtance ne ſeroit donc pas proportionnelle au ſimple quarré de la viteſſe. Or nous allons démontrer dans l'*art.* ſuivant, qu'elle eſt en effet proportionnelle à ce quarré ſeul.

SCHOLIE II.

88. Soit u la viteſſe variable du corps à chaque inſtant, & ſuppoſons que durant tout le tems du mouvement du corps, le ſyſtême du Fluide & du corps ſoit emporté en ſens contraire avec une viteſſe variable u égale à celle-là; il eſt viſible que le corps reſtera en repos, & que ce ſera le Fluide qui viendra le frapper avec une viteſſe variable u; mais par les loix primitives du mouvement, la preſſion du Fluide ſur le corps ne ſera point changée: or je dis que dans ce cas la preſſion du Fluide contre le corps ſera proportionnelle à uu; car ſi on ſuppoſe qu'une force accélératrice ou retardatrice quelconque proportionnelle à kdt agiſſe à chaque inſtant ſur les parties du Fluide, les filets ne ſeront point dérangés (*art.* 56); mais la viteſſe de chaque particule ſera augmentée ou diminuée à chaque inſtant d'une quantité proportionnelle à $kdt\sqrt{[pp+qq]}$. Donc ſi la viteſſe eſt u dans un inſtant quelconque, la preſſion en cet inſtant ſera formée 1°. d'une quantité proportionnelle à $\varphi u u \delta$, (*art.* 68) & qui vient de la viteſſe u; 2°. d'une quantité qui vient de la viteſſe de tendance kdt, & qui eſt $\delta kdt \times (\mu + \Omega - \varpi \Gamma bb)$ (*articles* 54 *&* 56). Or (*art.* 55) cette quantité $\mu + \Omega - \varpi \Gamma bb = 0$; donc la preſſion du Fluide eſt ſimplement proportionnelle à uu.

Les Auteurs d'Hydraulique ont juſqu'à préſent poſé tous pour principe, que la réſiſtance d'un corps mû

dans un Fluide eſt égale à la preſſion que ce Fluide mû avec la même viteſſe exerceroit contre le corps ſuppoſé en repos. Mais 1°. ils n'ont pas fait attention que cette viteſſe étant variable, la preſſion qui en réſulte pourroit contenir l'Elément du, & par conſéquent n'être pas proportionnelle à uu : 2°. en conſidérant même cette viteſſe variable comme ils auroient fait une viteſſe uniforme, ils n'ont prouvé que d'une maniére fort vague, que la preſſion étoit comme uu : voyez ci-deſſus l'*art.* 10. Il me ſemble que nous avons pleinement ſatisfait à toutes ces difficultés, en démontrant que le coefficient de $\frac{du}{dt}$ eſt $= 0$, & que le coefficient φ de uu eſt toujours le même, quelle que ſoit u.

Il faut ſeulement remarquer qu'au premier inſtant la preſſion n'eſt pas proportionnelle à uu, mais qu'elle eſt égale (*art.* 54) à $u\delta(\mu + \Omega - \varpi\Gamma bb)$ c'eſt-à-dire à zero.

Soit donc un corps pouſſé dans un Fluide ſtagnant avec la viteſſe initiale U, & que ce corps au bout du temps t ait la viteſſe u; il eſt viſible qu'on peut le regarder comme animé à chaque inſtant ſuivant CA (Fig. 13) par la force $+\frac{du}{dt}$: ſoit imprimée au ſyſtême du Fluide & du Corps la viteſſe initiale $-U$; & enſuite à chaque inſtant dt la viteſſe $+\frac{du}{dt}$ ſuivant AC, il eſt viſible que le corps ſera en repos, & qu'il ſera

cependant pouſſé continuellement ſuivant AC par une force $= + \frac{du}{dt}$ qui fera équilibre à la preſſion du Fluide.

PROPOS. XIII. PROBLEME.

89. *Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans l'*article précédent, *déterminer la réſiſtance du Fluide.*

La force qui tend à mouvoir le corps dans l'inſtant dt eſt $+ \frac{du}{dt}$. Soit μ le volume de ce corps, & Δ ſa denſité : donc $\mu \times \Delta$ ſera ſa maſſe ; donc $\mu \times \Delta \times + \frac{du}{dt}$ ſera la force ſuivant CA ; cette force doit faire équilibre (*art.* 1) à la preſſion du Fluide, c'eſt-à-dire à $\delta\varphi uu - \frac{\delta du}{dt} \times (\mu + \Omega - \pi\Gamma b^2)$. Donc puiſque $\mu + \Omega - \pi\Gamma b^2 = 0$, on aura $\mu\Delta \frac{du}{dt} + \delta\varphi u^2 = 0$.

COROLLAIRE.

90. Donc $- \frac{du}{u^2} \times \mu\Delta = \varphi\delta dt$ eſt la formule générale pour trouver la viteſſe d'un corps qui ſe meut dans un Fluide. D'où il eſt évident que la réſiſtance du Fluide, toutes choſes d'ailleurs égales, eſt proportionnelle à $uu\varphi\delta$, c'eſt-à-dire qu'elle eſt égale à la preſſion que ce Fluide exerceroit ſur le corps ſuppoſé en repos, ſi ce Fluide venoit le choquer avec la viteſſe u. Cette propoſition, comme nous l'avons dit, a été juſqu'à

juſqu'à préſent reconnue pour vraie, mais elle n'en avoit pas moins beſoin d'être prouvée. Car la preſſion d'un Fluide mû uniformément avec la viteſſe a, ſur un corps en repos, eſt $aa\varphi\delta$, au lieu que la preſſion d'un Fluide en repos ſur un corps qui s'y meut avec une viteſſe variable u, eſt $uu\varphi\delta + \frac{du}{dt} \times \delta\,(\Gamma\pi bb - \Omega - \mu)$: or cette quantité ne ſe réduit pas à $uu\varphi\delta$, à moins que $\Gamma\pi bb - \Omega - \mu$ ne ſoit $= 0$. C'eſt ce qu'il ne paroiſſoit pas facile de démontrer, à cauſe de la difficulté d'exprimer analytiquement les quantités Γ & Ω; mais nous en ſommes heureuſement venus à bout par la conſidération de la viteſſe primitive du corps, ſans avoir beſoin de connoître ces quantités.

PROPOS. XIV. PROBLÈME.

91. *Les mêmes choſes étant poſées, trouver la réſiſtance d'un corps mû dans un Fluide, en ayant égard à la gravité du Fluide & du Corps, & en ſuppoſant que le corps monte dans le Fluide.*

La peſanteur n'étant autre choſe qu'une force qui agit également ſur toutes les particules du Fluide ſuivant des lignes paralléles; on prouvera facilement par le même raiſonnement que dans les *art.* 48 & 56, que l'on aura $A' = B$ & $B' = -A - \frac{p}{z}$: outre cela, la preſſion du Fluide qui vient de ſa viteſſe reſpective,

& de la force $-\frac{du}{dt}$, doit être augmentée de la preſſion $g\mu\delta$ qui provient de la gravité du corps, & elle doit être diminuée de la quantité $gM\Delta$ qui vient de l'effort du Fluide en vertu de ſa peſanteur, & qui agit de bas en haut. Donc la preſſion $\varphi u^2\delta$ trouvée dans l'*art.* 89, doit être augmentée de la quantité $g\mu\delta - g\mu\Delta$. Donc on aura $-du = \frac{\varphi u^2\delta dt}{\Delta \cdot \mu} + (\frac{g\delta}{\Delta} - g)\,dt$.

PROPOS. XIV. PROBLÈME.

92. *Les mêmes choſes étant poſées, trouver la réſiſtance du Fluide, en ayant égard à la tenacité & au frottement des parties.*

1°. Le frottement du Fluide ſur le corps, ne peut venir que de la viteſſe reſpective du Fluide par rapport au corps.

2°. Les expériences faites par le célébre *M. Muſchenbroek*, nous apprennent que le frottement eſt proportionnel à la viteſſe: d'où il s'enſuit que ſi la viteſſe reſpective en un point quelconque eſt nommée U, le frottement ſera proportionnel à nU, n déſignant un coefficient qu'il faut déterminer par l'expérience, & qui eſt la réſiſtance venant du frottement, lorſque la viteſſe U eſt $= 1$.

3°. Les équations $B' = -A - \frac{P}{z}$ & $A' = B$, ont encore lieu ici. Car les forces perdues par chaque par-

ticule du Fluide, & déterminées dans l'*art.* 48, doivent être diminuées des forces $un \times p$, & $un \times q$; parce que le frottement en diminuant la viteſſe, peut être cenſé repréſenté par une force qui agiroit en ſens contraire à la direction de la viteſſe. Donc la force $-un \times p$ doit être ſouſtraite de la force perdue ſuivant NB, (Fig. 16) & la force $-un \times q$ de la force perdue ſuivant NC: on aura donc (*art.* 87) $-nu\frac{dq}{dt} + \frac{du.dq}{dtdx} + u^2\frac{d(qA+Bp)}{dx} = -nu\frac{dp}{dx} + \frac{du.dp}{dtdx} + u^2 d(qA'+B'p)$; & comme p & q ne dépendent point de u, on aura ſéparément $\frac{dq}{dt} = \frac{dp}{dx}$ & $\frac{d(qA+Bp)}{dx} = \frac{d(qA'+B'p)}{dx}$: d'où l'on tire, comme dans l'*article* 48, $B = A'$ & $B' = -A - \frac{p}{z}$.

Donc la preſſion de A vers C trouvée par les calculs précédens, doit être diminuée (*article* 54) de $un\delta\int 2\pi y dy' \int p dy' + q dx' - un\delta\pi\Gamma . AA$, c'eſt-à-dire qu'il lui faut ajouter (*article* 54) $= -un\delta \times (\Omega - bb\Gamma\pi)$. On aura par conſéquent pour l'équation générale $-\mu\Delta . du = \varphi u^2\delta dt + g\delta\mu - g\Delta\mu - un d\Omega + un\delta . \Gamma\pi bb$; & comme $-\Omega + \Gamma\pi bb = \mu$, (*article* 55) on aura $-\mu\Delta du = \varphi u^2\delta dt + g\delta\mu - g\Delta\mu + un\delta\mu$.

REMARQUE.

93. La réſiſtance proportionnelle à la viteſſe, dont nous avons parlé ici, eſt celle qui eſt dûe au frottement des parties du Fluide & du Corps. Ce frottement vient de l'aſperité de la ſurface du corps. Mais il y a de plus une autre réſiſtance qui vient de la ténacité des parties du Fluide, & qui, autant qu'on peut le conjecturer par toutes les expériences, peut être regardée comme une force conſtante. Car 1°. il y a bien des corps, qui, quoique d'une peſanteur ſpécifique moindre que celle de l'eau, ne deſcendent point dans l'eau. Or cette deſcente n'étant empêchée que par la ténacité des parties de l'eau, il s'enſuit que la ténacité eſt néceſſairement dans un rapport fini avec la gravité. En effet, tout corps tant ſoit peu plus peſant que l'eau, y deſcendroit toujours, ſi la ténacité étoit proportionnelle à quelque puiſſance de la viteſſe : car en faiſant la viteſſe $= 0$, la ténacité ſeroit $= 0$, & ainſi elle ne s'oppoſeroit point à la premiere deſcente du corps. 2°. Il n'y a perſonne qui n'ait obſervé cette ténacité dans les gouttes d'eau, car elle empêche ſouvent ces gouttes de tomber, lorſqu'elles ſont adhérentes à la ſurface inférieure de quelque corps. Donc cette ténacité, ſoit qu'elle vienne de quelque force compreſſive, ou de l'attraction des parties, eſt une force conſtante comme la gravité, quoique très-petite par rapport à elle.

La ſeule objection qu'on puiſſe faire contre ce raiſonnement, c'eſt que tout pendule tant ſoit peu plus peſant que l'eau, affecte toujours dans l'eau la ſituation verticale, & y revient quand il en eſt tant ſoit peu écarté ; ce qui n'arriveroit pas, ſi la ténacité étoit une force conſtante. Car ſoit g la gravité α, la force de la ténacité, il eſt clair que le pendule devroit s'arrêter dans toute ſituation où il feroit avec la verticale un angle ou plus petit, ou $= \frac{\alpha}{g}$; ce que perſonne, que je ſache, n'a encore remarqué. Mais comme l'angle $\frac{\alpha}{g}$ eſt fort petit, & par conſéquent peu aiſé à obſerver, & que d'ailleurs le moindre mouvement étranger de la part de l'air ou des corps environnans peut déranger cette expétience ; je ne regarde pas l'objection dont il s'agit, comme aſſez grande pour me faire rejetter une vérité qui me paroît conforme à la raiſon, & qui eſt appuyée d'une infinité d'expériences. *M. s'Graveſande* dans l'ouvrage que nous avons déja cité, trouve (*§.* 1911) que la preſſion d'un Fluide en mouvement contre un corps en repos, eſt proportionnelle en partie à la viteſſe ſimple, à cauſe de la ténacité du Fluide, & en partie au quarré de la viteſſe à cauſe de la force d'inertie. L'intenſité des deux preſſions contre un corps cylindrique, paroît être en raiſon de 20 à 39 ſuivant les expériences qu'il a faites, *§.* 1930 & 1945. La premiere, celle qui vient de la ténacité, eſt indépen-

dante, ſelon *M. s'Graveſande*, de la figure du corps (§. 1916); mais il n'en eſt pas de même de la ſeconde; car dans un Globe elle eſt les $\frac{2}{3}$ de celle du Cylindre, & dans un Cône droit elle eſt à celle du Cylindre, comme le demi diamétre de la baſe eſt au côté, §. 1917, 1918 &c.

Quand le Fluide eſt en repos & le corps en mouvement, alors la réſiſtance totale eſt encore, ſelon *M. s'Graveſande*, compoſée de deux autres: une partie eſt conſtante, l'autre eſt en raiſon du quarré de la viteſſe (§. 1975). Il prouve qu'une partie de la réſiſtance eſt conſtante, parce qu'un corps mû dans un Fluide s'arrête enfin, ce qui n'arriveroit pas, ſi la réſiſtance dépendoit ſimplement de la viteſſe (§. 1963). Cette preuve fortifie celle que nous avons déja donnée de la même propoſition au commencement de cet article: en effet, lorſqu'on ſuppoſe la réſiſtance comme uu, ou comme u, ou comme $uu + u$, on trouvera toujours t, c'eſt-à-dire le temps du mouvement du corps $= \infty$; mais t eſt fini, lorſqu'il entre dans l'expreſſion de la réſiſtance un terme tout conſtant.

Mais comment la réſiſtance qui vient de la cohéſion des parties, eſt-elle proportionnelle à la viteſſe dans le cas du Fluide en mouvement, & conſtante dans le cas du Fluide en repos? c'eſt ce que *M. s'Graveſande* tâche d'expliquer, §. 2065 *& ſuiv.* mais par un raiſonnement qui me paroît très-obſcur; d'ailleurs, je

ne vois point qu'il ait fait aucune expérience pour conſtater cette différence; ou plûtôt, dans les expériences même qu'il a faites ſur la preſſion d'un Fluide en mouvement, il remarque (§. 1914) que la Théorie ne s'accorde point avec l'expérience quand la viteſſe eſt fort petite, mais que la preſſion donnée par l'expérience (§. 1911) eſt plus grande que celle qu'on trouve par la Théorie. Ce qui prouve, ce me ſemble, que la preſſion du Fluide qui vient de la ténacité n'eſt pas rigoureuſement proportionnelle à la viteſſe.

Il faut cependant avouer qu'en examinant en elle-même l'opinion de *M. s'Graveſande*, indépendamment des preuves obſcures & inſuffiſantes par leſquelles il a cherché à l'appuyer, cette opinion peut paroître fondée juſqu'à un certain point, du moins au premier coup d'œil; c'eſt-à-dire qu'on peut penſer que la preſſion d'un Fluide mû contre un corps en repos, & la réſiſtance qu'un corps mû éprouve dans un Fluide en repos, ne ſont pas les mêmes dans les cas où l'on a égard à la ténacité des parties du Fluide; ſi l'on entend par *ténacité* la difficulté qu'ont les particules du Fluide à être ſéparées. En effet, quand un corps ſe meut, on voit clairement que la difficulté de ſéparer les particules eſt un obſtacle pour lui, qui doit néceſſairement lui faire perdre de ſa viteſſe. Mais quand le corps eſt en repos, & que c'eſt le Fluide qui vient le frapper, on ne voit pas d'abord bien diſtinctement comment la ténacité des parties augmente alors la preſſion. Car cette

ténacité paroît une force ſimplement paſſive, plutôt capable de réſiſtance que d'action.

Cependant en examinant cette queſtion plus attentivement, on s'apperçoit bientôt que la ténacité doit augmenter la preſſion dans un Fluide qui eſt mû contre un corps. Car la ténacité eſt une force par laquelle les particules du Fluide réſiſtent à leur diviſion; enſorte que ſi les particules du Fluide n'avoient préciſément qu'une viteſſe aſſez petite pour ne pas pouvoir être détachées les unes des autres, ces parties ſe mouvroient en vertu de cette viteſſe, comme feroit un corps abſolument ſolide, & le Fluide *ſeroit mû conjointement* avec le corps, de maniére que les particules du Fluide n'auroient par rapport au corps aucune viteſſe reſpective. Pour mieux éclaircir notre penſée, ſuppoſons dans un Fluide en repos un corps tant ſoit peu plus peſant que le Fluide, mais qui y demeure ſuſpendu à cauſe de l'adhérence des parties du Fluide; tout le ſyſtême reſtera donc en repos. Donnons à préſent à ce ſyſtême une viteſſe égale & contraire à celle avec laquelle le corps tend à deſcendre, il eſt évident que le Fluide & le Corps ſeront tranſportés avec cette viteſſe, de la même maniére que ſi le tout formoit un corps ſolide; & qu'ils ſeront tranſportés en ſens contraire à celui ſelon lequel le corps tend à ſe mouvoir, Ainſi on voit de quelle maniére la ténacité des particules peut être réduite à l'action d'une force qui tendroit à tranſporter le corps dans un ſens contraire à celui

celui ſelon lequel il ſe meut. On peut encore réduire la ténacité à une force active, en conſidérant que lorſqu'un corps tant ſoit peu plus peſant qu'un pareil volume de Fluide y demeure ſuſpendu à cauſe de la ténacité du Fluide, il eſt dans le même cas, que ſi abſtraction faite de la ténacité, on augmentoit la peſanteur du Fluide d'une quantité telle, que le Fluide & le Corps fuſſent en équilibre. Delà il s'enſuit auſſi que la ténacité peut être cenſée équivalente à une force conſtante, puiſque l'effet de la ténacité eſt équivalent à celui qui réſulteroit d'une augmentation de peſanteur dans le Fluide.

Il me ſemble donc que nous avons diſtingué avec beaucoup de fondement trois eſpeces de réſiſtance : l'une conſtante, qui vient de la ténacité des particules du Fluide, c'eſt-à-dire de la réſiſtance que ces particules apportent à être diviſées ; la ſeconde proportionnelle à la viteſſe, & venant du frottement que les particules du Fluide éprouvent en gliſſant ſur la ſurface du corps en vertu de leur viteſſe reſpective ; la troiſiéme proportionnelle au quarré de la viteſſe, & venant de la force d'inertie. La réſiſtance conſtante ne dépend ni de la figure du corps ni de ſa viteſſe, ni même de ſa largeur. Car cette réſiſtance vient ſur-tout des parties de Fluide qui ſe trouvent dans l'Axe AC prolongé vers A, & que le corps eſt obligé de ſéparer pour ſe mouvoir : or le nombre des particules à ſéparer eſt comme l'eſpace parcouru ; donc la *force vive* perdue

eſt proportionnelle à cet eſpace. En effet, on peut avec aſſez de vraiſemblance comparer cette réſiſtance à l'effort de la gravité, ou à la force d'un fil élaſtique, qui ſeroit toujours la même.

COROLLAIRE.

94. Donc ſi on ſuppoſe que g' ſoit la partie de la réſiſtance qui doit être conſtante, & qu'on ait égard tant à la peſanteur du Fluide & du Corps, qu'à la ténacité & au frottement des parties, on aura $-\mu\Delta du = \varphi u^2\delta dt + g\delta\mu - g\Delta\mu + ung\delta\mu + g'\delta$. Telle eſt l'équation générale du mouvement d'un corps dans un Fluide. Elle ſe réduit à celle-ci $\frac{-du}{\alpha u^2+\epsilon u+\gamma} = dt$, α, ϵ, & γ étant des conſtantes : or l'intégration de cette derniere équation n'a aucune difficulté. Car ſoient $u+k$ & $u+k'$ les deux racines du facteur de la quantité $uu + \frac{\epsilon u}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}$, on aura $\alpha t = -\frac{1}{k-k'} \times \frac{\log.(u+k).(g+k')}{(u+k')(g+k)}$, g marquant la viteſſe initiale du corps.

Donc $\frac{(u+k).(g+k')}{(u+k')(g+k)} = c^{-\alpha t(k-k')}$; ce qui donne la valeur de u en t. Or ſi k eſt imaginaire auſſi-bien que k', ces expreſſions ſe réduiront aiſément à des quantités réelles par la Méthode que j'ai expliquée dans les Mém. de l'Académie des Sciences de Pruſſe 1746. Ainſi la ſolution du Problême eſt réduite maintenant

à une pure difficulté d'Analyſe. C'eſt pourquoi je paſſe à d'autres recherches, en me contentant de faire obſerver que c'eſt par une Méthode entiérement nouvelle que je ſuis arrivé à cette formule.

SECTION III.

Maniére de déterminer par les expériences du pendule la réſiſtance des Fluides, lorſque la viteſſe eſt fort petite.

95. On peut d'abord s'aſſurer aiſément par les expériences du pendule, ſi la réſiſtance eſt à peu près comme le quarré de la viteſſe, lorſque la viteſſe eſt fort petite. Pour le trouver, imaginons un pendule qui décrit de fort petits Arcs : ſoit p la gravité naturelle, A (Fig. 22) le point d'où l'on ſuppoſe que le corps part dans un inſtant quelconque, $AM = y$, $DM = s$, $QP = x$, $AD = B$, $CD = a$, u la viteſſe en M, m la maſſe du pendule, f la réſiſtance que feroit le Fluide à la maſſe m mûe avec une viteſſe $V[2ph]$, on aura $pdx - \frac{fuudy}{2phm} = udu$, dans l'hypotheſe de la réſiſtance comme le quarré de la viteſſe : d'où l'on tire $uu = 2px - \int \frac{fuudy}{phm}$: or $x = \frac{BB-ss}{2a}$; & $s = B - y$; d'où l'on voit que uu eſt à très-peu près égal à $\frac{p(2By-yy)}{a} - \int \frac{fdy}{phm}\left(\frac{p \cdot 2By - pyy}{a}\right)$. Donc

$uu = \frac{p(2By - yy)}{a} - \frac{f}{abm} \times (Byy - \frac{y^3}{3})$. Donc pour trouver le point α juſqu'où le corps remonte, il n'y a qu'à faire $u = 0$, ce qui donnera y ou $AD\alpha = 2B - \frac{2fB^2}{3pbm}$. Donc $\alpha a = \frac{2fB^2}{3pbm}$. Or en ſuppoſant la réſiſtance comme le quarré de la viteſſe, $\frac{pbm}{f}$ doit être égale à une ligne conſtante n. Donc $\alpha a = \frac{2B^2}{3n}$.

96. Maintenant il eſt facile de voir, que de quelque point A que le corps parte, le temps très-court qu'il employe à faire une vibration, & que j'appelle α, ſera toujours ſenſiblement le même. Donc ſi on regarde αa comme une quantité infiniment petite & $= -dB$, & qu'on ſuppoſe auſſi $\alpha = dt$, on aura $-dB$ proportionnel à $\frac{2B^2 dt}{3n}$; donc ſi on ſuppoſe que le premier Arc parcouru par le corps ſoit $= B'$, on trouvera que $\frac{3n}{2B} - \frac{3n}{2B'}$ eſt proportionnel à t. Donc pour que la réſiſtance ſoit comme le quarré de la viteſſe, il faut que $\frac{B' - B}{Bt}$ ſoit une quantité conſtante, t exprimant le temps qu'il y a que le pendule eſt en mouvement. Voici donc comment on s'aſſurera par l'expérience, ſi la réſiſtance eſt comme le quarré de la viteſſe.

97. On fera mouvoir dans le Fluide dont on veut déterminer la réſiſtance, un pendule de longueur arbitraire CD (Fig. 23) ; on aura ſoin ſeulement que la ſuſpenſion en C ſoit telle, que le frottement puiſſe être compté pour rien ; on peut ſe ſervir pour cela d'un fil de pite attaché entre deux lames de cuivre ou d'acier très-polies, auquel on ſuſpendra le pendule. On remarquera enſuite le point O d'où l'on laiſſe tomber le pendule, & on examinera les points B, M, auxquels il remonte après deux temps quelconques t, t' ; je dis que la réſiſtance ſera comme le quarré de la viteſſe, ſi $\frac{OB}{DB} : \frac{OM}{DM} :: t : t'$.

Suppoſant que cette proportion ſe trouve en effet vraie, ou à très-peu près vraie, il ſera facile de connoître la quantité conſtante n. Pour cela, ſoit α le temps d'une vibration du pendule, qu'on peut déterminer avec beaucoup de préciſion, en comptant le nombre des vibrations qu'il fait pendant un tems donné : il eſt clair qu'on peut ſuppoſer $\frac{f}{pm} = \frac{\alpha}{T}$, T déſignant un temps conſtant, mais inconnu. Donc on aura $-dB = \frac{2dt \cdot B^2}{3Th}$ & $\frac{3h}{2B} - \frac{3h}{2B'} = \frac{t}{T} = \frac{tf}{pm\alpha}$: donc $\frac{1}{B} - \frac{1}{B'} = \frac{2t}{3\alpha n}$: donc $n = \frac{3t \cdot B'B}{2\alpha(B' - B)} = \frac{3t}{2\alpha} \times \frac{BD \times DO}{OB}$.

98. Si on trouve que la réſiſtance n'eſt pas proportionnelle au quarré de la viteſſe, en ce cas on ſup-

posera la réſiſtance $= g + \frac{fuu}{2ph} + \frac{ku}{v[2ph]}$, comme nous avons fait dans l'*art.* 94 ; mais alors il ſera très-pénible de déterminer par les expériences du pendule les coefficiens f, g, k, parce que la formule qui donneroit la valeur de B en t, ſera extrêmement compliquée. Je crois donc qu'en ce cas l'Analyſe pour déterminer ces coefficiens, eſt d'une difficulté preſque inſurmontable par l'eſpece d'impoſſibilité qu'il y a de trouver une équation ſimple & commode entre les temps & les eſpaces parcourus. Cependant, il me ſemble que de toutes les hypotheſes qu'on peut faire ſur la réſiſtance des Fluides, la plus vraie & la moins ſujette à conteſtation, eſt celle dont il s'agit ici. Il ſeroit à ſouhaiter qu'on pût trouver moyen de la comparer facilement avec les expériences.

Voici, au reſte, la Méthode que j'ai imaginée pour réduire le plus commodément qu'il eſt poſſible, les expériences au calcul.

On aura $uu = \frac{p}{a}(2By - yy) - \frac{f}{ahm}(By^2 - \frac{y^3}{3})$ $- \frac{2gy}{m} - \frac{2k}{v[2ab].m} \times \int dy\, v[2By - yy]$. Donc ſi on nomme π le rapport de la circonférence d'un cercle à ſon rayon, on trouvera $aa = \frac{2fBB}{3phm} + \frac{2ga}{pm} +$ $\frac{2ka\pi.B}{a.pv[2ha].m}$. Donc faiſant $\frac{f}{pm} = \frac{a}{T} = \frac{dt}{T}$, on aura

$$-dB = \frac{2BBdt}{3Th} + \frac{2agdt}{fT} + \frac{ak\pi Bdt}{fTV[2ab]} \text{ ou } \frac{dt}{T} = -\frac{\frac{3hdB}{2}}{BB + \frac{k\pi \cdot 3V[2ha]}{f} B + \frac{3hga}{f}}.$$

On peut donc ſuppoſer $\frac{dt}{T} = \frac{-3h \cdot dB}{2(B+G)\times(B+A)}$, G & A étant imaginaires ou réelles ; d'où l'on tire $\frac{t}{T} = \int \frac{3h}{2(A-G)} \times \left(\frac{dB}{B+A} - \frac{dB}{B+G}\right)$ & $\frac{2(A-G)t}{3hT} =$ Log. $\frac{B+A}{B'+A} \times \frac{B'+G}{B+G}$. Donc t eſt proportionnelle à Log. $\frac{B+A}{B+G}$ — Log. $\frac{B'+A}{B'+G}$. Delà il s'enſuit que par 3 obſervations on connoîtra A & G, & par conſéquent $\frac{h}{f}$ & $\frac{g}{f}$. Car ſoit obſervé d'abord l'Arc B' de la premiere deſcente, & enſuite ſoient obſervés trois Arcs $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ en des tems t, t', t'' qui ſoient en progreſſion arithmétique, on aura cette proportion geométrique continue $\therefore 1 : \frac{\mathcal{C}+A}{B'+A} \times \frac{B'+G}{\mathcal{C}+G} : \frac{\mathcal{C}'+A\times B'+G}{B'+A\times\mathcal{C}'+G} : \frac{\mathcal{C}''+A\times B'+G}{B'+A\times\mathcal{C}''+G}$; d'où l'on tirera, à la vérité par un calcul très-long, les valeurs de A & de G. De plus, mettant au lieu de T ſa valeur $\frac{pma}{f}$, on aura $\frac{2(A-G)\cdot tf}{3hpma} =$

Log. $\frac{B+A}{B'+A} \times \frac{B'+G}{B+G}$. Donc on connoîtra auſſi $\frac{fm}{f}$ ou le rapport de f à pm.

REMARQUE.

99. *M. Daniel Bernoulli*, to. 3. des Mém. de Peterſbourg, s'eſt propoſé de déterminer par la Théorie le mouvement d'un corps peſant dans un milieu dont la réſiſtance ſeroit en partie conſtante par la ténacité, & en partie proportionnelle au quarré de la viteſſe. Ayant appliqué ſon calcul à l'expérience, il trouve que la force de ténacité par laquelle l'eau reſteroit à un Globe dont le poids dans l'eau ſeroit d'un grain, équivaudroit à environ $\frac{1}{4}$ du poids de ce Globe, réſultat qui paroît ſuſpect à *M. Bernoulli*, comme donnant une valeur trop conſidérable pour la réſiſtance qui vient de la ténacité. Il obſerve, au reſte, que ſuivant les expériences de *M. Newton*, Lib. 2. Scol. Prop. XL, cette réſiſtance n'a lieu que dans les mouvemens très-lents, & que dans les autres la réſiſtance eſt à peu près comme le quarré de la viteſſe.

Dans le to. 5. des mêmes Mémoires, ce grand Geométre continue de traiter le même ſujet. Il applique d'abord le calcul aux expériences des pendules faites par *M. Newton*, Scholie Prop. 31. liv. 2. & il trouve après avoir peſé & diſcuté toutes les circonſtances, 1°. que dans les pendules dont le mouvement n'eſt pas trop lent, la réſiſtance eſt à peu près comme le

quarré

quarré de la viteſſe, 2°. que dans les mouvemens plus lents, il ſe joint à cette réſiſtance une force conſtante. 3°. Enfin, que dans les mouvemens extrêmement lents, il paroît très-difficile de déterminer aſſez exactement la loi que ſuit la réſiſtance totale, parce que les expériences ne s'accordent point alors avec la Théorie. Cependant *M. Bernoulli* croit que dans ce cas même la Théorie ne doit pas être tout-à-fait rejettée, les expériences étant ſi délicates, qu'il paroît difficile d'en rien conclure de certain & de poſitif. Peut-être, au reſte, ſeroient-elles mieux d'accord avec la Théorie, ſi dans le cas où les mouvemens ſont très-lents, on imaginoit la réſiſtance proportionnelle à $fuu + ku + g$, ainſi que nous l'avons fait. Au reſte, il me ſemble que la formule qui a été donnée, p. 135 to. 5 des Mém. de l'Acad. de Peterſbourg, ne repréſente pas exactement la différence des Arcs parcourus dans l'hypotheſe de la réſiſtance proportionnelle à $fuu + g$; c'eſt de quoi on pourra s'aſſurer en comparant nos deux Méthodes.

L'Auteur trouve qu'en appellant t l'Arc de la premiere deſcente, l'Arc remonté ſera $t - \frac{4}{3} ntt$, la réſiſtance étant comme le quarré de la viteſſe, ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé. D'où il conclut qu'après un nombre d'oſcillations $= l$, l'Arc remonté ſera à peu près repréſenté par cette progreſſion geométrique $t - (\frac{4}{3} nl)\, tt + (\frac{4}{3} nl)^2 t^3 - (\frac{4}{3} nl)^3 t^4$ &c.

dont la ſomme eſt $\frac{t}{1+\frac{4}{3}nlt}$; ce qui s'accorde encore avec notre calcul, comme on le peut voir aiſément, quoique nous ayons employé une méthode & des dénominations différentes.

Mais il n'en eſt pas de même dans le cas de la réſiſtance comme le quarré de la viteſſe plus une conſtante : car l'excès d'un Arc deſcendu ſur l'Arc remonté ſuivant, étant $\frac{4ma}{g}+\frac{4}{3}ntt$, comme l'Auteur le trouve, & comme nous l'avons trouvé auſſi, je ne vois pas comment l'Auteur en conclut, que $(t-\frac{4mla}{g}):(1+\frac{4}{3}nlt)$ ſera l'Arc remonté après un nombre d'oſcillations $=l$; il me ſemble, au contraire, que ſuivant la Méthode très-courte & très-ſimple dont nous nous ſommes ſervis, on aura (en conſervant les noms donnés par l'Auteur) $l=\int\frac{-dt}{\frac{4ma}{g}+\frac{4}{3}ntt}$, ce qui eſt fort différent de la valeur de l qu'on tireroit de l'équation $(t-\frac{4mla}{g}):(1+\frac{4}{3}nlt)=r$, r exprimant l'Arc remonté.

SECTION IV.

Examen d'une hypotheſe qui conduiroit à des paradoxes ſinguliers ſur la réſiſtance des Fluides.

100. Tous les Auteurs qui ont traité juſqu'à préſent du mouvement des Fluides renfermés dans des vaſes, ont pris pour hypotheſe, que toutes les parties du Fluide placées dans une même ligne horizontale ont la même viteſſe verticale. Cette hypotheſe étant, ou du moins paroiſſant confirmée par l'expérience, m'avoit tellement ſéduit, que j'avois d'abord cru pouvoir en déduire la Théorie de la réſiſtance des Fluides. Mais ayant fait attention aux calculs qui en réſultent, j'ai remarqué qu'il y avoit un grand nombre de cas dans leſquels la réſiſtance du Fluide ſeroit nulle ſuivant cette Théorie, & qu'elle conduiſoit à beaucoup d'autres conſéquences très-contraires à l'expérience. Il ne ſera peut-être pas inutile d'expoſer cela plus au long.

101. Soit un corps ANB, que je regarderai, pour plus de facilité, comme une ſurface plane, & dont je ne conſidérerai jamais ici qu'une moitié, parce que l'autre moitié eſt ſuppoſée ſemblable & égale à celle-là. Soit ce corps plongé dans un Fluide, lequel ſoit renfermé dans un vaſe cylindrique, dont QV ſoit un des parois. Que le corps ſe meuve de B vers A, & ſoit la droite PNV perpendiculaire à AP. Il eſt évident que le point N viendra en n, de maniére que l'eſpace

$OANVQ$ diminuera d'une quantité $= AaNK = aA \times PN$. Donc les parties de Fluide renfermées dans NV, doivent néceſſairement ſe mouvoir vers ku; donc ſi on ſuppoſe que la viteſſe de toutes ces parties paralléle-ment à Vu, eſt la même, toutes les parties NV par-viendront dans la ſituation ku paralléle à NV, & on aura $NVuk = ANKa$. Donc $Vu = \frac{PN \cdot Aa}{NV}$. Soit donc u la viteſſe du corps ſuivant Aa, $PN = y$, $PV = a$, & v la viteſſe des particules NV, on aura $v = \frac{uy}{a-y}$: cela poſé, je cherche de la maniére ſui-vante la réſiſtance du Fluide.

102. Soit M la maſſe du corps, V la viteſſe impri-mée au premier inſtant, V' la viteſſe réelle qu'il doit avoir à cauſe de la réſiſtance du Fluide. Donc au pre-mier inſtant les particules rangées dans une ligne quel-conque NV, ſe mouvront parallélement à Vu avec la viteſſe $\frac{V'y}{a-y}$. Donc (*art.* 1) la preſſion de ces par-ticules eſt la même, que ſi elles tendoient à ſe mou-voir avec cette même viteſſe parallélement à uV: or dans ce cas la preſſion ſeroit (*art.* 23) $\delta \int y\,dx\,\frac{V'y}{a-y}$: donc $M\Delta.(V - V') = \delta V' \int \frac{y\,dx \cdot y}{a-y}$; donc $V' = \frac{M.\Delta.V}{M.\Delta + \delta \int \frac{yy\,dx}{a-y}}$. Donc puiſque $M = \int y\,dx$, on aura

$V' = \frac{M \cdot V}{\int \frac{y a dx}{a-y}}$ en ſuppoſant $\Delta = \delta$. Or voici l'inconvénient de cette formule : c'eſt qu'au premier inſtant du mouvement, on a ſuivant l'expérience $V = V'$; & que ſuivant la formule, on n'a $V = V'$ que dans le cas où a eſt infiniment grande. Car alors $\int \frac{y a dx}{a-y} = \int y dx = M$: dans les autres cas, on a $\int \frac{y a dx}{a-y} > M$, & par conſéquent $V > V'$, & plus a ſera plus petit, plus V' ſera petite par rapport à V. Or je ne connois aucune expérience qui prouve que la viteſſe perdue au premier inſtant eſt d'autant plus grande, que le vaſe eſt plus étroit : il paroît même que la figure du vaſe ne contribue en rien, ou preſque en rien à la réſiſtance, parce que, comme on l'a prouvé plus haut, le mouvement que le corps communique aux particules du Fluide, s'étend à une fort petite diſtance autour de lui (*art.* 71 *&* 72.)

103. Je vais prouver maintenant, que dans les inſtans ſuivans, la réſiſtance du Fluide ſeroit abſolument nulle, ſi les parties contenues dans la ligne NV avoient toutes la même viteſſe paralléle à AP. En effet $\frac{uy}{a-y}$ étant la viteſſe des particules NV dans un inſtant quelconque dt, ces particules lorſqu'elles ſeront parvenues l'inſtant ſuivant dans la ſituation ku, auront la viteſ-

ſe $\frac{u'y'}{a-y}$, y' déſignant la ligne pk, & u' la viteſſe du corps dans ce ſecond inſtant. Donc la preſſion ſera la même, que ſi toutes les parties de la ligne NV étoient ſollicitées parallélement à uV par une force égale à $\frac{\frac{u'y'}{a-y'} - \frac{uy}{a-y}}{dt}$. Or $u' = u + du$, $y - y' = pk - PN = (Nn + Vu) \times \frac{dy}{dx} = (u\,dt + \frac{uy\,dt}{a-y}) \times \frac{dy}{dx}$. Donc la preſſion ſuivant $AB = \delta \int y\,dx \times \frac{y\,du}{(a-y)\,dt} + \delta \int \frac{au}{(a-y)^2\,dt} \times (u\,dt + \frac{uy\,dt}{a-y}) \times \frac{dy}{dx} \times y\,dx = \frac{\delta\,du}{dt} \times \int \frac{yy\,dx}{a-y} + \delta \int \frac{auuy\,dy}{(a-y)^2} + \delta \int \frac{auuy^2 dy}{(a-y)^3} = \frac{\delta\,du}{dt} \times \int \frac{yy\,dx}{a-y} + \delta auu \int \frac{a\,dy}{(a-y)^3} = \frac{\delta\,du}{dt} \times \int \frac{yy\,dx}{a-y} + \frac{a^2 \delta uu}{2} \times (\frac{1}{(a-y)^2} - \frac{1}{a^2})$ $= \frac{\delta\,du}{dt} \times \int \frac{yy\,dx}{a-y}$, parce que la ſeconde partie eſt $= 0$ lorſque $x = AB$. Donc $\frac{\delta\,du}{dt} \times \int \frac{y^2 dx}{a-y}$ eſt la preſſion du Fluide : donc ſi le vaſe eſt fort large, cette preſſion ſera nulle, ou pourra être regardée comme nulle ; & ſi le vaſe n'eſt pas d'une grande étendue, on aura $\frac{M \cdot \Delta \cdot du}{dt} = \frac{\delta\,du}{dt} \times \int \frac{yy\,dx}{a-y}$, ce qui eſt abſurde 1°. parce que dans une

infinité de cas $M \times \Delta$ ne ſera point $= \delta \int \frac{yy\,dx}{a-y}$: car $\int \frac{yy\,dx}{a-y}$ dépend de la figure du vaſe; or la figure du vaſe n'influe nullement ſur la quantité $\frac{M \cdot \Delta}{\delta}$ qui ne dépend que de la figure du corps, de ſa denſité, & de celle du Fluide. 2°. Quand même il arriveroit par hazard dans certains cas que $M \cdot \Delta$ fût $= \delta \int \frac{yy\,dx}{a-y}$, alors on pourroit prendre du telle qu'on voudroit, & le Problême ſeroit indéterminé, ce qui eſt abſurde encore; puiſque le Fluide & le Corps mû étant donnés, la quantité de la réſiſtance & la viteſſe à chaque inſtant eſt néceſſairement déterminée & non arbitraire.

SCHOLIE I.

104. Dans l'*art. précéd.* nous n'avons conſidéré que la viteſſe des particules du Fluide paralléle à AP. Mais nous aurions trouvé de même la réſiſtance nulle, ſi nous euſſions conſidéré la viteſſe réelle des particules du Fluide, qui ſont immédiatement contiguës à la ſurface du corps. Car ſuppoſons pour plus de facilité, que la Courbe ANB ſoit compoſée de deux parties ſemblables & égales AO, OB, & ſoit fait $AN = s$, & $\frac{ds}{dx} = Y$, cette quantité ſera la même dans les points correſpondans des Arcs AO, OB.

Maintenant, puiſque la viteſſe abſolue des particules du Fluide parallélement à AP eſt $\frac{uy}{a-y}$, & que la viteſſe du corps ANB dans un ſens contraire eſt u; il s'enſuit que leur viteſſe reſpective par rapport au corps, ſera $\frac{uy}{a-y} + u = \frac{au}{a-y}$, en tant que cette viteſſe eſt paralléle à AP. Donc la viteſſe de ces particules ſuivant la ſurface du corps, ſera $\frac{uaY}{a-y}$. Donc 1°. le corps eſt preſſé par le Fluide avec une force $= -\frac{\delta du}{dt} \times \mu$, laquelle agit ſuivant AB. 2°. La viteſſe perdue par le point N eſt $\frac{u'aY}{a-y} - \frac{uaY'}{a-y'} = \frac{aYdu}{a-y} + (\frac{audY}{(a-y)dy} + \frac{auY}{(a-y)^2}) \times (udt + \frac{uydt}{a-y}) \times \frac{dy}{dx}$, & pour le point V directement oppoſé à N, elle ſera $+\frac{aYdu}{a-y} - (\frac{audY}{(a-y)dy} + \frac{auY}{(a-y)^2}) \times (udt + \frac{uydt}{(a-y)}) \times \frac{-dy}{dx}$. D'où il eſt aiſé de voir que la preſſion eſt la même, que ſi les points N, V étoient ſollicités par la ſeule force $\frac{adu}{dt} \times \frac{Y}{a-y}$. Donc la preſſion qui en réſulte ſera $\frac{adu \cdot \delta}{dt} \times \int \frac{dy}{dt} \int \frac{Ydt}{a-y}$. On aura donc $-\mu\Delta du = -\mu\delta du +$

$a\delta du$

$a\delta du\int\frac{dy}{ds}\int\frac{V\,ds}{a-y}$: d'où l'on tire $du = 0$; & par conſéquent la viteſſe u conſtante, & la réſiſtance nulle. Ce qui eſt abſurde. Donc &c.

SCHOLIE II.

105. Il ne faut pas au reſte conclure delà que l'hypotheſe qui vient d'être rejettée pour la recherche de la réſiſtance des Fluides, doive l'être lorſqu'il s'agit de déterminer le mouvement d'un Fluide dans un vaſe. L'expérience qui doit être ici notre guide, prouve que dans ce dernier cas, la ſuppoſition dont il s'agit donne un réſultat analytique aſſez conforme à l'obſervation, au lieu que dans le premier cas le réſultat du calcul donne la réſiſtance nulle : ce qui eſt abſolument contraire à l'expérience. Au reſte, nous aurons occaſion plus bas d'examiner par nos Principes les loix du mouvement d'un Fluide dans un vaſe.

SECTION V.

De la réſiſtance des Fluides non élaſtiques & finis.

106. Nous avons vu (*art.* 82) que cette réſiſtance a lieu, quand un corps plongé dans un Fluide à peu de diſtance de la ſurface ſupérieure de ce Fluide, s'éleve en enhaut, & tend à ſe mouvoir vers cette ſurface. Car ſi le corps étoit profondément plongé dans

le Fluide, & que le Fluide ne fût pas élaſtique, alors il ne ſe feroit aucun vuide derriere le corps, quelque grande que fût ſa viteſſe. En effet, quelle que ſoit la viteſſe, la communication du mouvement ſe fait toujours (*art.* 85 *n°.* 4) au même nombre de parties; or quand la viteſſe eſt fort petite, l'expérience prouve que les parties auxquelles le corps communique du mouvement ſont en petit nombre, & qu'elles ſont fort proches du corps. Donc le mouvement communiqué au Fluide, ne ſauroit s'étendre dans le cas dont il s'agit juſqu'à la ſurface ſupérieure du Fluide; or pour qu'il ſe faſſe un vuide derriere le corps, quand le Fluide n'eſt pas élaſtique, il faut que le mouvement s'étende juſqu'à cette ſurface, & que la partie de la ſurface qui eſt perpendiculairement au-deſſus du corps, s'éleve un peu au-deſſus du niveau.

Delà il s'enſuit, que même dans les cas où il ſe fait un vuide derriere le corps, les parties auxquelles le mouvement ſe communique ne ſont pas fort éloignées du corps, & qu'ainſi on pourroit par cette ſeule raiſon ſe contenter d'avoir égard aux parties contiguës à la ſurface du corps, ſi cela ne s'enſuivoit pas d'ailleurs des *art.* 1, 21, *&* 22.

107. Or avant que de déterminer la réſiſtance pour ce cas-là, nous remarquerons que le nombre de particules auxquelles le corps communique du mouvement n'eſt pas ici toujours le même, comme dans le cas où il ne ſe fait point de vuide derriere le corps.

Car la propoſition d'où nous avons déduit ce Theorême dans l'*art.* 8, n'a lieu que quand les particules du Fluide ne ſont ſollicitées par aucune force accélératrice, ou du moins par une force accélératrice telle, que ſon effet ſoit nul; ce qui arrive quand il ne ſe fait aucun vuide derriere le corps, parce qu'alors (*art.* 85 *n°.* 3) l'effet de la compreſſion eſt nul. Il n'en eſt pas de même quand il ſe fait un vuide, parce qu'alors la viteſſe avec laquelle les parties du Fluide tendent à ſe mouvoir en vertu de leur compreſſion, doit ſe combiner avec celle que le corps leur communique, ou immédiatement, ou par le moyen des autres parties.

108. Maintenant, pour déterminer la réſiſtance, il faut obſerver 1°. que le vuide qui ſe fera derriere le corps ſera d'autant plus grand, que la viteſſe du corps ſera plus grande par rapport à celle avec laquelle les particules du Fluide s'élanceroient dans un eſpace vuide en vertu de leur compreſſion: 2°. que ces particules étant comprimées ſuivant des lignes perpendiculaires à la ſurface du corps, doivent s'élancer dans cette même direction; deſorte que ſi le corps ſe meut, par exemple, ſuivant CA, (Figure 25) la particule placée en O derriere le corps, ſera mue ſuivant OG perpendiculaire à la ſurface du corps. Ainſi la viteſſe ſuivant OG, quand la particule ne quitte point le corps, eſt à la viteſſe du corps ſuivant CA, comme dy à ds. Si donc K eſt la viteſſe que la compreſſion des par-

ticules du Fluide doit leur donner, on aura V à u, comme dy à ds, & le vuide commencera à ſe faire derriere le corps dans le point où $\frac{V}{u}$ ſera $= \frac{dy}{ds}$: de-là il s'enſuit qu'il n'y aura point de vuide ſi $V = u$, ou ſi $V > u$; qu'il n'y en aura que quand V ſera $< u$; & que ce vuide ſera d'autant moindre, toutes choſes d'ailleurs égales, que u ſera plus petite. Car plus u ſera petite, plus le rapport $\frac{V}{u}$ approchera de l'unité; donc plus auſſi le point où $\frac{dy}{ds} = \frac{V}{u}$ ſera proche du point C, puiſque $\frac{dy}{ds} = 1$ en C, & $= 0$ en D.

PROPOS. XV. PROBLÈME.

109. *Trouver la réſiſtance d'un Fluide peſant, comprimé, d'une étendue finie, & non élaſtique.*

Soit O le point où $\frac{dy}{ds} = \frac{V}{u}$; $DK = b$; $KV = Z$, les parties ADC & Adc étant ſuppoſées ſemblables & égales; enfin ſoit Ψ la force qui comprime les particules du Fluide, la compreſſion ſur la partie $odADO$ ſuivant AC ſera $= \Psi\delta\varpi ZZ$: or on peut ſuppoſer $\Psi = p\xi$, c'eſt-à-dire égale à la preſſion d'un Fluide dont la gravité ſeroit p & la hauteur ξ, auquel cas on aura par les loix de l'Hydrodynamique $V = \sqrt{[2p\xi]}$; car un Fluide comprimé par une force $\Psi\delta = p\delta\xi$

s'échappe avec une viteſſe $= \sqrt{[2p\xi]}$, c'eſt-à-dire avec une viteſſe = à celle qu'un corps de peſanteur p acquercroit en tombant de la hauteur ξ. Outre cela, la preſſion ſuivant CA venant de la peſanteur du Fluide, ſera $\delta g \times (ArN + NVODN)$ (†) qu'il faudra retrancher de la peſanteur $g\mu\Delta$ du corps.

A l'égard de la partie de la réſiſtance du Fluide qui vient de l'inertie, on prouvera, comme on l'a fait *article* 55, que la partie $-\frac{du}{dt}$ ſera multipliée par un coefficient = o, & qu'il ne reſtera que la partie $\varphi uu\delta$. Donc en négligeant le frottement & la ténacité des parties, on aura $-\mu\Delta\frac{du}{dt} = \varphi u^2\delta dt - \delta g(ArN + NVODN) + (\mu\Delta g)\,dt + \pi p\xi\delta Z\,Z\,dt$, équation de laquelle on ne ſauroit déduire la valeur de u en t, parce que les quantités ArN, $NVODN$, & Z, ſont variables & dépendent de la poſition du point O, laquelle dépend elle-même de u. Mais on peut du moins avoir toujours la valeur de t en u, ce qui revient à peu près au même.

(†) Remarquez que par Arn & $NVODN$, nous entendons ici les ſolides engendrés par la révolution de ces figures autour de l'Axe AC.

SCHOLIE I.

110. Si la preſſion Ψ provenoit de la peſanteur ſeule des parties du Fluide, alors il faudroit ſupprimer le terme $\pi p \xi Z Z \delta dt$ dans l'équation précédente.

SCHOLIE II.

111. Voici comme on déterminera la quantité φ. Il eſt viſible qu'elle eſt égale à la valeur de $\int 2\pi y dy (1 - pp - qq)$ lorſque $y = OL$, cette valeur étant $= 0$ en quelque point de la Courbe ADO qui répond au point M de la Figure 13; or pour trouver ce point, ſoient A & B l'abſciſſe & l'ordonnée qui y répondent, on cherchera la quantité qui doit multiplier $-\frac{dv}{dt}$ dans la formule de la preſſion du Fluide, & comme cette quantité doit être $= 0$, on aura par-là les inconnues A & B; & par conſéquent la valeur de φ.

SECTION VI.

De la réſiſtance des Fluides élaſtiques.

112. Les Fluides dont nous avons traité juſqu'ici, ont été ſuppoſés incapables d'occuper un eſpace plus grand ou plus petit par l'action de quelque force que ce ſoit: deſorte que ſi un corps ſe meut dans un tel Fluide d'une étendue indéfinie, il ne ſe fait jamais

derriere le corps aucun vuide, & que le Fluide reſte toujours de la même denſité auprès du corps.

113. Il n'en eſt pas de même lorſque le Fluide eſt élaſtique. Car quand un corps ſe meut dans un tel Fluide, le Fluide ſe dilate à la partie poſtérieure du corps, & ſe condenſe à la partie antérieure; & la condenſation d'une part & la dilatation de l'autre, ſont d'autant plus grandes que le corps ſe meut avec plus de viteſſe. De plus, ni la condenſation ni la dilatation ne ſont les mêmes dans tous les points de la ſurface tant antérieure que poſtérieure. Car ſoit par ex. un Globe qui ſe meuve dans un Fluide élaſtique, & ſoit imaginée par le centre de ce Globe une ligne paralléle à la direction du Globe, il eſt évident que la compreſſion du Fluide eſt la plus grande à l'extrémité antérieure de ce diamétre, & que la dilatation eſt la plus grande à l'extrémité poſtérieure; d'où il s'enſuit que la compreſſion & la dilatation ſeront d'autant plus petites dans un point quelconque de la ſurface, que ce point ſera plus éloigné des extrémités du diamétre ſuppoſé; deſorte que dans la ligne qui eſt moyenne entre la ſurface antérieure & la poſtérieure, c'eſt-à-dire dans le grand Cercle qui eſt éloigné de 90°. deſdites extrémités il n'y a aucune compreſſion ni aucune dilatation, ce qu'on peut encore prouver de la maniére ſuivante. Puiſque la condenſation du Fluide ſe fait à la partie antérieure du corps, & que ſa dilatation ſe fait à la partie poſtérieure, & que rien ne ſe fait dans la nature que

par degrés inſenſibles, le Fluide contigu au corps doit paſſer de l'état de condenſation à celui de dilatation par des degrés inſenſibles. Donc depuis le point où la condenſation eſt la plus grande, elle doit décroître, juſqu'au point où la condenſation eſt changée en dilatation ; & par conſéquent le Fluide ne doit être ni dilaté ni comprimé en ce dernier point.

114. Cela poſé, le Fluide ſe dilate à la partie poſtérieure, parce que le mouvement du corps laiſſe derriere ce corps un eſpace vuide dans lequel le Fluide s'élance avec d'autant plus de viteſſe que ſa compreſſion eſt plus grande.

Donc, comme *M. Robins* l'a remarqué le premier, ſi la viteſſe du corps eſt plus grande que celle avec laquelle le Fluide peut s'élancer dans un eſpace vuide, il reſtera néceſſairement un eſpace vuide derriere le corps. De cette conſidération *M. Robins* conclut avec raiſon, que les loix de la réſiſtance des Fluides élaſtiques doivent être fort différentes de celles de la réſiſtance des Fluides non élaſtiques, ſur-tout dans les cas où il ſe fait un vuide derriere le corps. Car, comme l'obſerve très-bien *M. Robins*, ſi la réſiſtance d'un Fluide non continu, & compoſé de parties éloignées les unes des autres, eſt plus grande que celle d'un Fluide continu, c'eſt que dans un Fluide continu il ſe fait derriere le corps un reflux de particules par une eſpece de mouvement circulaire, ce qui contribue à diminuer la réſiſtance du Fluide ſur la ſurface antérieure : de-là il

conclut

conclut que dans un Fluide élaſtique, lorſqu'il ſe fait un vuide derriere le corps, la réſiſtance eſt beaucoup plus grande que dans un Fluide continu, parce que le mouvement & le reflux circulaire des parties ne peut alors avoir lieu. Or, ſelon *M. Newton*, la réſiſtance qu'un Fluide non continu fait à un cylindre qui s'y meut, eſt quadruple de la réſiſtance qu'un Fluide continu fait au même cylindre: de plus, la réſiſtance qu'un Fluide continu fait à un Globe, eſt égale à celle du même Fluide au cylindre: enfin la réſiſtance qu'un Fluide non continu fait à un Globe, eſt la moitié de celle que le même Fluide fait à un cylindre.

Donc, conclut *M. Robins*, l'intenſité de la réſiſtance de l'air à un boulet de canon, lorſqu'il ſe fait un vuide derriere ce boulet, eſt deux fois plus grande (abſtraction faite de la viteſſe) qu'elle ne l'eſt dans les cas où il ne ſe fait point de vuide; & comme outre cela le Fluide ſe condenſe beaucoup à la partie antérieure, dans le cas où il ſe fait un vuide, *M. Robins* juge que la réſiſtance augmente tellement par cette circonſtance, que l'intenſité de la réſiſtance de l'air à un boulet de canon mû très-rapidement, eſt ſelon lui, triple de ce qu'elle ſeroit, ſi le boulet ſe mouvoit avec une viteſſe médiocre, enſorte qu'il ne ſe fit derriere lui aucun vuide. Cette propoſition, ou, ſi on aime mieux, cette conjecture, paroît confirmée par des expériences que *M. Robins* a faites. Mais comme il n'a point donné d'autre Théorie ſur ce ſujet, j'ai cru

qu'il ne ſeroit pas inutile d'expoſer ici quelques vûes ſur cette matiére. Comme l'air eſt le ſeul Fluide élaſtique que nous connoiſſions, je ne traiterai ici que de la réſiſtance de l'air.

OBSERVATIONS.

115. L'air dans ſon état naturel, eſt comprimé par une force égale à celle d'une colonne d'eau d'environ 32 pieds. Or l'air eſt environ 800 fois plus rare que l'eau. Donc l'air dans ſon état naturel eſt comprimé par une force égale à une colomne d'air d'environ 32×800 pieds. Donc ſi l'air comprimé par cette force s'élançoit dans un eſpace vuide, ſa viteſſe ſeroit celle qu'un corps peſant acquereroit en tombant d'une hauteur de 32×800 pieds. Or un corps peſant parcourt 15 pieds par ſeconde; donc en une ſeconde il parcoureroit 30 pieds d'un mouvement uniforme. Donc l'air mû avec la ſuſdite viteſſe, parcourcroit en une ſeconde un eſpace $= 30 \text{ pieds} \times \frac{\sqrt{[32 \times 800]}}{\sqrt{[15]}} =$

$2\sqrt{15} \times \sqrt{[8.8.4.100]} = 2\sqrt{15}.8.2.10$

$= 328\sqrt{15} = 320 \times \sqrt{[16-1]} = 320\left(4 - \frac{1}{8}\right)$

$= 1280 - 40 = 1240$ pieds. Donc pour qu'il ſe faſſe un vuide derriere le corps, il faut que ſa viteſſe ſoit plus grande que de 1240 pieds par ſeconde.

2°. Soit δ' la denſité de l'air dans ſon état naturel, δ, ſa denſité dans un autre état, l'expérience fait voir

qu'on peut ſuppoſer aſſez exactement la compreſſion de l'air en raiſon directe de ſa denſité : donc la compreſſion ſera $\frac{32 \cdot 800 \cdot \delta}{\delta'}$. Mais la viteſſe avec laquelle l'air s'élancera dans un eſpace vuide ſera toujours égale, quelle que ſoit la denſité δ, à celle qu'un corps peſant acquereroit en tombant de la hauteur de 32×800 pieds, c'eſt-à-dire qu'elle ſera toujours de 1240 pieds par ſeconde. Car quand l'air eſt d'une denſité $= \delta$, ſa compreſſion eſt égale au poids d'une colomne de 32×800 pieds & de la denſité δ.

3°. Soit un corps $DAdC$ (Fig. 26) qui ſe meuve dans un Fluide élaſtique, deſorte qu'il parvienne de $DAdC$ en $D'a'd'c$; il eſt évident par tout ce qui a été dit dans l'*art.* 113, que la plus grande compreſſion du Fluide ſera en A, la plus grande dilatation en C, & qu'en D il n'y aura ni compreſſion ni dilatation. Donc ſi on mene Nn paralléle & égale à Aa, & NV perpendiculaire à AD, il eſt évident que la compreſſion ſera d'autant moindre que la ligne NV ſera plus petite : outre cela, la compreſſion en A eſt d'autant plus grande que la viteſſe eſt plus grande; c'eſt pourquoi, nommant comme ci-deſſus δ' la denſité de l'air dans ſon état naturel, u la viteſſe du corps, c'eſt-à-dire du point A, on ne s'écartera, ce me ſemble, pas beaucoup de la vérité, en ſuppoſant la denſité en $A =$ $\delta' \left(1 + \frac{nu}{G}\right)$ G déſignant une certaine viteſſe connue

qui rende la denſité $\delta = \delta' + n\delta'$. Par la même raiſon la denſité en N ſera $\delta' \left(1 + \frac{nu}{G} \times \frac{NV}{Aa}\right) = \delta' \times \left(1 + \frac{nu}{G} \times \frac{dy}{ds}\right)$; & cette denſité qui eſt plus grande que la denſité naturelle dans la partie DAd, deviendra moindre dans la partie DCd où $\frac{dy}{ds}$ eſt négative.

4°. La particule d'air qui eſt en O, tend à ſe mouvoir, quelle que ſoit ſa denſité δ, avec une viteſſe de 1240 P. par ſeconde. Donc pour trouver la partie OCo que le Fluide ne touche point, il n'y a qu'à chercher le point O ou $-\frac{n\,dy}{ds} = 1240$ pieds ; problême facile à réſoudre, ſur-tout quand la figure eſt un Globe.

Ceci bien entendu, voici de quelle maniére on cherchera la réſiſtance des Fluides élaſtiques, dans le cas où il ne ſe fait point de vuide derriere le corps ; & dans ceux où il ſe fait du vuide.

Principes néceſſaires pour déterminer la preſſion d'un Fluide élaſtique.

116. Les parties du Fluide qui ſe meuvent à la ſurface antérieure DAd, peuvent, ainſi que dans le cas des Fluides non élaſtiques, être regardées comme ayant à la fois deux viteſſes, dont l'une que j'appelle u eſt égale & paralléle à la viteſſe du corps, & l'autre eſt

composée des deux viteſſes reſpectives uq, up, dont l'une eſt paralléle à AC, & l'autre à Dd; q & p étant des fonctions de x & de z. Outre cela, la denſité δ eſt encore une fonction de x & de z. Donc ſi on conſidére ici comme dans la Figure 19 les points N', N, B', B, C', C, D', D qui forment un parallélepipede rectangle infiniment petit, & qui ſoient proches de la ſurface du corps, la denſité δ, après que le point N eſt parvenu en n, deviendra, $\delta + \frac{d\delta}{dx} . uq\,dt + \frac{d\delta}{dz} \times up\,dt$, & le parallélepipede rectangle $NN'B'BD.D'C'CN$ dont la maſſe eſt $\alpha\mathcal{C}k\delta$, ſe changera en un autre dont la maſſe ſera $(\alpha + \frac{\alpha\,dp}{dt} . udt) \times (\mathcal{C} + \frac{\mathcal{C}\,dq}{dx} . udt) \times (k + \frac{kp\,dt}{dz}) \times (\delta + \frac{d\delta}{dx} \times uq\,dt + \frac{d\delta}{dz} \times up\,dt)$: or ce ſecond parallélepipede doit être égal en maſſe au premier. Donc on aura $\delta(\frac{dp}{dz} + \frac{dq}{dx} + \frac{p}{z}) + \frac{q\,d\delta}{dx} + \frac{p\,d\delta}{dz} = 0$; c'eſt-à-dire $\frac{d(\delta p)}{dz} + \frac{d(\delta q)}{dx} + \frac{\delta p}{z} = 0$.

Outre cela, on trouvera (*article* 86) que la force ſuivant NC qui doit être détruite, eſt $\frac{du}{dt} - \frac{q\,du}{dt} - u^2Aq - u^2pB$, & que la force qui doit être détruite ſuivant NB, eſt $- \frac{p\,du}{dt} - u^2pA' - u^2qB'$. Donc

(*art.* 19 & 20) on aura $\frac{du}{dt} \times \frac{d(\delta - \delta q)}{dx} - \frac{u^2 d(\delta q A + \delta p B)}{dx}$

$+ \frac{du}{dt} \times \frac{d(\delta p)}{dx} + \frac{u^2 d(\delta q A' + \delta p B')}{dx} = 0.$

117. Pour faire uſage de cette équation, on n'a qu'à ſuppoſer $\delta = u, X$, c'eſt-à-dire = à une fonction de x & de u, enſorte que $\frac{d\delta}{dx} = 0$, & les équations reſtantes ſeront préciſément ſemblables à celles de l'*art.* 87 ; deſorte qu'il ne faudra plus que déterminer δp & δq par la même Méthode qu'on a employée *art.* 61 pour déterminer p & q. Ces quantités étant trouvées, on obſervera que $\delta = \delta' (1 + \frac{nu dy}{ds})$, & mettant pour $\frac{dy}{ds}$ ſa valeur en x que je ſuppoſe ξ, & qui eſt donnée par l'équation de la Courbe, on aura $\delta = \delta' (1 + nu\xi)$; donc $u, X = \delta' (1 + nu\xi)$: connoiſſant donc δ, & ayant trouvé δp & δq, on aura p & q. Et au moyen de ces quantités & de la Méthode de l'*article* 66, on déterminera la preſſion du Fluide à chaque inſtant, & par conſéquent ſa réſiſtance.

Dans le cas où il doit ſe faire un vuide derriere le corps, on employera une Méthode analogue à celle de la Section 5e.

Au reſte, d'autres hypotheſes plus vraies ſur la valeur de δ rendroient le calcul encore plus compliqué ; & tout ceci n'eſt qu'un leger eſſai.

CHAPITRE VI.

Des Oſcillations d'un corps qui flotte ſur un Fluide.

ARTICLE PREMIER.

Des Oſcillations rectilignes.

118. SOIT un corps DAd (Figure 27) compoſé de deux parties égales & ſemblables, placées de part & d'autre de l'Axe AC, & que pour plus de facilité nous conſidérerons comme une figure plane ; imaginons que ce corps ſoit poſé ſur la ſurface QV d'un Fluide en repos, enſorte que l'Axe AC ſoit vertical, & que la partie KAN plongée dans le Fluide ſoit tant ſoit peu moins peſante qu'un égal volume de Fluide, on demande la loi des Oſcillations de ce corps.

1°. On trouvera par la Méthode de l'*art.* 86, que les parties du Fluide outre la viteſſe qui leur eſt commune avec le corps, auront une viteſſe reſpective compoſée de deux viteſſes partielles up & uq. 2°. Le coefficient de $\frac{du}{dt}$ dans la formule de la preſſion du Fluide ſur le corps ſera nul, par les mêmes raiſons qui ont été déja expoſées. Il ne reſtera donc dans la formule de la preſſion que le terme qui vient de la peſanteur du corps, & celui qui renfermera le quarré uu. Or

comme la viteſſe eſt ici fort petite, parce que les Oſcillations ſont fort petites, il eſt permis de négliger ce dernier terme, deſorte que ſi on appelle δ la denſité du Fluide, μ la maſſe du corps, P la partie qui eſt plongée dans l'inſtant dt, & p la gravité, on aura $\frac{du}{dt} = \frac{\mu \Delta p - P \delta p}{\mu \Delta}$. On pourra, au moyen de cette formule, réſoudre aiſément le Problême. *M. Bernoulli* en a donné dans le to. 4. de ſes Œuvres une ſolution qu'on peut conſulter ; d'ailleurs on la trouvera dans l'*article* ſuivant. Mais il étoit néceſſaire pour l'exactitude de cette ſolution, de démontrer que la preſſion du Fluide en ce cas vient de ſa ſeule gravité, & que l'inertie doit être comptée pour rien ; ce que perſonne n'avoit encore prouvé.

ARTICLE II.

Des Oſcillations curvilignes.

119. Les Oſcillations d'un corps qui flotte ſur un Fluide, ne ſont rectilignes que dans un cas, ſavoir dans celui, où le centre de gravité de la maſſe totale, & celui de la partie ſubmergée ſont dans une même ligne droite verticale. S'ils ne ſont point dans cette ligne droite, alors l'action du Fluide pour ſoulever le corps, laquelle agit ſuivant une ligne qui paſſe par le centre de gravité de la partie ſubmergée, ne paſſe plus par le centre de gravité du corps. Ainſi ſelon les princi-

pes

pes de la Dynamique, le centre de gravité doit s'élever de bas en haut dans une ligne verticale, tandis que le corps tourne autour de ce même centre. Pour rendre cela plus ſenſible, ſoit une puiſſance qui agiſſe ſuivant la ligne gf (Fig. 28), je dis que le centre de gravité du corps ſe mouvra ſuivant une ligne paralléle à gf, avec la même viteſſe, que ſi la direction gf de la puiſſance eut paſſé par le centre de gravité, & que ce corps tournera en même temps autour de ſon centre de gravité, avec la même viteſſe que ſi le centre étoit fixe, & que la puiſſance eût la direction gf.

120. Soit donc C le centre de gravité du corps, BOD la partie ſubmergée, $BA = b$, $AD = a$, E le point milieu de BD, G le centre de gravité de la partie BOD, $CF = 6$, α la quantité de l'eſpace que le centre C parcourt verticalement : on trouvera $AE = b - \frac{a+b}{2}$, & $EI = b - 6 - \frac{a+b}{2}$: ſoit auſſi N le poids de la partie ſubmergée BOD; ce poids décroît de la quantité $\alpha\ (a+b)$ quand le centre C parcourt de bas en haut l'eſpace α, deſorte que le centre de gravité G parvient en un autre point g, tel que $EG : Gg :: N : \alpha\ (a+b)$; donc Ii ou $Ff \times N = EI \times \alpha\ (a+b)$: donc $Ff = \frac{\alpha\ (a+b)}{N} \times \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2} - 6\right)$.

121. Maintenant, ſuppoſons que le corps tourne autour du centre C de D vers Q, enſorte que l'angle

décrit du rayon $= 1$ dans le temps t soit $= \epsilon$, alors, la ligne Cg étant presque verticale, il est visible que par ce mouvement de rotation, le centre g avancera horizontalement d'une quantité $= \epsilon (CA + ig) = \epsilon \times (e + f)$ en nommant CA, e, & $GI = f$. De plus, Soit l'angle ACa (Figure 29) $= \epsilon$, $Ca = CA - \alpha$ ou CA, ce qui revient au même ici, & bad perpendiculaire à Ca; BDd deviendra la partie submergée. Soit ensuite $BQ = \frac{1}{3} b$, ensorte que Q soit le centre de gravité du secteur $BN\ell$, & si l'on fait $Ai = \ell'$, on trouvera que la distance du centre de gravité de la partie bND à la ligne CA est à très-peu près $\ell' - \frac{2}{3} b \times \frac{\epsilon bb}{2.N}$, parce que $\frac{\epsilon bb}{2}$ représente le secteur BNb. De même à cause du secteur dND, la distance du centre de gravité de la partie BDd à la ligne CA, sera $\ell' - \frac{2}{3} b \times \frac{\epsilon bb}{2N} - \frac{2}{3} a \times \frac{\epsilon aa}{2N}$: donc puisque $\ell' = Ai = $ (Fig. 28) $CF - fF = \ell - \frac{\alpha (a + b) \times (\frac{b}{2} - \frac{a}{2})}{N}$, il s'ensuit que quand bd (Fig. 29) est dans la situation horizontale, la distance du centre de gravité de la partie bOd à la ligne CA, est $\epsilon (e + f) + \ell - \frac{\alpha (a + b) \times (\frac{b - a}{2})}{N} - \frac{b^3 \epsilon}{3N} - \frac{\epsilon a^3}{3N}$:

& comme dans cette quantité, a & s ſont des variables, on peut mettre y au lieu de a, & x au lieu de s. Maintenant, la force qui éleve le corps en enhaut eſt $p\delta\,[N - y\,(a+b) - \frac{bbx}{2} + \frac{aax}{2}]$; car la partie ſubmergée, quand le centre C a parcouru verticalement l'eſpace y, & que le corps a tourné de la quantité x, eſt $N - y \times (a+b) - \frac{bbx}{2} + \frac{aax}{2}$; or il faut retrancher de cette force le poids $p\Delta . M$ du corps. Donc on aura cette premiere équation : $\frac{M . \Delta\, ddx}{dt^2} = p\delta\,[N - y\,(a+b) - \frac{bbx - aax}{2}] + p\Delta . M$.

122. Soit de plus $\Delta . G$ la ſomme des produits de chaque particule du corps par le quarré de leur diſtance au centre de gravité C, & on aura $\frac{\Delta . G\, ddx}{dt^2} =$ au produit de la force qui tend à élever le corps, & de la diſtance de CA au centre de gravité de la partie ſubmergée; car la direction de cette force paſſe par ce centre de gravité. On aura donc $\frac{\Delta . G\, ddx}{dt^2} = p\delta N dt \times \left[6 - \frac{y\,(a+b) \times (\frac{b-a}{2}) - \frac{b^3x}{3} - \frac{a^3x}{3}}{N} + x\,(e+f)\right]$: ſeconde équation, qui avec la précéden-

te ſervira à déterminer les quantités x, & y, comme nous le ferons voir dans un moment.

123. Soit a l'eſpace qu'un corps peſant parcourt dans le temps θ, & $N\delta - \Delta . M = k\Delta . M$; on aura

$$ddy = \frac{2adt^2}{\theta^2}\left(k - \frac{\delta y(a+b)}{\Delta . M} - \frac{\delta bbx}{2\Delta . M} + \frac{\delta aax}{2\Delta . M}\right),$$

$$\& ddx = \frac{2adt^2}{\theta^2} \times \frac{\delta}{\Delta . G} \times \left(N\mathcal{C} - y\left(\frac{bb-aa}{2}\right) - \frac{b^3x}{3} - \frac{a^3x}{3} + Nx\,[e+f]\right).$$

Avant que d'en venir à l'intégration de ces équations, nous remarquerons que le célébre *J. Bernoulli* dans la ſolution qu'il a donnée de ce Problême, n'a eu égard qu'au cas où le centre C eſt immobile, ou $b = a$, & où la partie ſubmergée eſt toujours du même volume. D'où l'on a $y = 0$, $k = 0$, & $ddx = \frac{2adt^2}{\theta^2} \times \frac{\delta}{\Delta . G} \times [\mathcal{C}N - \frac{b^3x}{3} - \frac{a^3x}{3} + xN(e+f)]$. Or un pendule qui ſeroit d'une longueur $= 1$, auroit un mouvement déterminé par l'équation $ddx = \frac{2adt^2}{\theta^2}(\varphi - x)$; φ étant l'angle initial du pendule avec la verticale; & un pendule qui ſeroit d'une longueur l, & iſochrone au corps oſcillant, donneroit pour l'équation de ſon mouvement $lddx = \frac{2adt^2}{\theta^2}(\pi - x)$ ou $ddx = \frac{2adt^2}{\theta} \times (\frac{\pi}{l} - \frac{x}{l})$; d'où l'on tire $\frac{1}{l} = \frac{\delta}{\Delta . G} \times \frac{b^3 + a^3}{3} - N(e+f)$,

ce qui s'accorde, comme on peut le voir aiſément, avec la formule de *M. Bernoulli*, dans laquelle $e+f$ eſt négative : la quantité qu'il appelle $\int \delta r r p$ eſt ici $\Delta . G$, & celle qu'il appelle $gV = gN\delta$. Mais il eſt évident que nos formules ſont beaucoup plus étendues ; & qu'elles peuvent ſervir à déterminer généralement les oſcillations fort petites d'un corps flottant. Je dis *fort petites* ; car les oſcillations peuvent être fort grandes, quoique la diſtance initiale CF (Figure 28) ſoit très-petite ; ce qui arriveroit par exemple, ſi le corps QDO étoit une Ellipſe dont le grand Axe fût preſque vertical à la ſurface du Fluide.

124. Maintenant, pour intégrer les deux équations qui donnent le mouvement oſcillatoire, qu'on ſe propoſe d'intégrer en général ces deux-ci qui ſont beaucoup plus générales, $ddx + Axdt^2 + Bydt^2 + Mdt^2 = 0$, & $ddy + Cydt^2 + Dxdt^2 + Pdt^2 = 0$, dans leſquelles M & P ſoient des conſtantes, ou des fonctions de t, & A, B, C, D des coefficiens conſtans quelconques ; on multipliera la ſeconde de ces équations par un coefficient indéterminé ν, enſuite on l'ajoutera avec la premiere, puis on ſuppoſera $x + \nu y$ proportionnelle à $Ax + D\nu x + By + C\nu y$, c'eſt-à-dire $A + D\nu = \frac{B+C\nu}{\nu}$, & delà on tirera une équation qui fournira deux valeurs de ν, que j'appelle ν' & ν'' : maintenant ſoit $x + \nu' y = u$, & $x + \nu'' y = z$, & les équations ajoutées ſe changeront en celles-ci,

$ddu + (A + Dv')\,u\,dt^2 + \Gamma\,dt^2 = 0$,
& $ddz + (A + Dv'')\,z\,dt^2 + \varrho\,dt^2 = 0$,
Γ & ϱ étant des fonctions de t ou des conſtantes.

Or il eſt facile d'intégrer chacune de ces équations par des Méthodes connues. Voyez les Mém. Acad. des Sciences de Paris 1745, & de Pruſſe 1748. C'eſt pourquoi je ne m'arrête pas davantage ſur ce ſujet, me contentant d'avoir réduit le Problême au calcul.

SCHOLIE I.

125. Si b, & a étoient à peu près égales, alors les équations deviendroient beaucoup plus ſimples, car on auroit $ddy = \frac{2a\,dt^2}{\theta^2}\left(k - \frac{\delta y\,(a+b)}{\Delta . M}\right)$, & $ddx = \frac{2a\,dt^2}{\theta^2} \times \frac{\delta}{\Delta . G} \times [N\mathfrak{C} - \frac{b^3x}{3} - \frac{a^3x}{3} + Nx\,(e+f)]$, équations qui s'intégreront ſéparément. Si dans la 2de de ces équations le coefficient de x eſt poſitif, c'eſt-à-dire, ſi $N(e+f) > \frac{b^3+a^3}{3}$, c'eſt-à-dire $> \frac{2a^3}{3}$, la valeur de x ne contiendra plus d'Arcs de cercle, & les oſcillations ne ſeront plus infiniment petites.

C'eſt pour cela qu'une Ellipſe dont le grand Axe ſeroit preſque vertical à la ſurface du Fluide, ne ſauroit faire de petites oſcillations. Car ſuppoſons d'abord que cette Ellipſe ſoit un cercle, & que $b = a$, on aura $N(e+f) = \frac{2a^3}{3}$, comme il eſt aiſé de le prouver par

les Principes de ſtatique. Si la figure eſt une Ellipſe dont le petit Axe ſoit au grand, comme ϱ eſt à 1, & que le grand Axe ſoit à peu près vertical, on aura $N(e+f) = \frac{\varrho \cdot 2a^3}{3 \cdot e^3}$, & par conſéquent $N(e+f) > \frac{2a^3}{3}$. Au contraire, ſi c'eſt le petit Axe qui ſoit preſque vertical, alors on a $N(e+f) = \frac{e^3 \cdot 2a^3}{3 \cdot \varrho}$, & par conſéquent $N(e+f) < \frac{2a^3}{9}$: donc alors les oſcillations ſont petites, & la ſolution n'eſt bonne que pour ce cas.

SCHOLIE II.

126. J'ai ſuppoſé juſqu'ici que le Fluide étoit indéfini, enſorte que ſa ſurface ne montoit point avec celle du corps, mais reſtoit toujours au même niveau. Mais ſi le Fluide étoit renfermé dans un vaſe fini, voici comment il faudroit alors réſoudre le Problême.

On a trouvé que ſi la ſurface Fluide reſtoit toujours au même niveau, la partie du ſolide ſubmergée à la fin du temps t ſeroit $N - y(a+b) - \frac{bbx - aax}{2}$. Donc ſi on nomme k' la largeur du Fluide à ſa ſurface, le Fluide doit s'abbaiſſer à la fin du temps t d'une quantité $= \frac{y(a+b) + \frac{bbx - aax}{2}}{k' - a - b}$: donc la partie plongée deviendra $N - y(a+b) - \frac{bbx - aax}{2}$ —

$\frac{y(a+b)^2 - \frac{x(a+b)^2 \cdot (b-a)}{2}}{k'-a-b} = N - \frac{k'v(a+b)}{k'-a-b} -$

$\frac{k'x(bb-aa)}{k'-a-b}$; & la distance du centre de gravité à la ligne CF devra être diminuée de la quantité $\frac{y(a+b)^2 \times (\frac{b-a}{2})}{(k'-a-b) \cdot N} + \frac{\frac{x}{2}(a+b)^2 \times \frac{(b-a)^2}{2}}{(k'-a-b) \cdot N}$; d'où il s'ensuit que cette distance deviendra $= x(e+f) + 6 - \frac{y(b^2-a^2) \cdot k'}{2N(k'-a-b)} - \frac{x}{4} \times \frac{(bb-aa)^2}{N(k'-a-b)} - \frac{b^3x+a^3x}{3N}$: on aura donc $ddx = \frac{2adt^2}{\theta^2} \times \frac{\delta}{\Delta \cdot G} \times [N6 - \frac{y(b^2-a^2)k'}{2(k'-a-b)} - \frac{b^3x}{3} - \frac{a^3x}{3} - \frac{x}{4} \frac{(bb-aa)^2}{k'-a-b} + Nx(e+f)]$, & $ddy =$ $(k - \frac{\delta y(a+b) \cdot k'}{\Delta \cdot M \cdot (k'-a-b)} + \frac{\delta k'x(bb-aa)}{24M(k'-a-b)}) \times \frac{2adt^2}{\theta^2}$.

Si le corps ne doit faire que des oscillations rectilignes, en ce cas $x = 0$, & on a $ddx = \frac{2adt^2}{\theta^2} \times (k' - \frac{\delta y(a+b)k'}{\Delta \cdot M(k'-a-b)})$.

SCHOLIE III.

127. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des figures planes. Voyons maintenant quelles doivent être les oscillations d'un solide, & prenons d'abord des solides

ſolides de révolution. Il eſt facile de voir en premier lieu, que le centre de gravité du ſolide & celui de la partie enfoncée ſeront toujours dans un même plan paſſant par l'Axe : par conſéquent les oſcillations ſe feront toujours dans un même plan paſſant par l'Axe du corps & perpendiculaire à la ſurface du Fluide. Or cela poſé, le Problême n'aura pas plus de difficulté que celui que nous avons réſolu pour les figures planes. Voici ſeulement ce qu'il faudra obſerver.

Soit $QBOD$ (Fig. 29) la coupe du ſolide par un plan perpendiculaire à la ſurface du Fluide, & dans lequel doit ſe faire l'oſcillation. Ayant conſervé les noms ci-deſſus, on mettra ſimplement 1°. au lieu de $a + b$ la ſurface entiere qui eſt la commune Section du ſolide & de la ſurface du Fluide. 2°. Au lieu de N la partie ſolide enfoncée, & au lieu de M le ſolide entier. 3°. Au lieu de G la ſomme des produits des particules par le quarré de leurs diſtances à un Axe horizontal perpendiculaire au plan $QBOD$. 4°. Au lieu de $\frac{b}{2}$ & de $\frac{a}{2}$, la diſtance de la ligne CA aux centre de gravité des deux portions de la ſurface horizontale qui ont AD & AB pour abſciſſes, leſquelles diſtances dans le cas dont il s'agit ſont égales, ou cenſées telles, parce que le corps eſt un ſolide de révolution. 5°. Au lieu de $\frac{3bb}{2}$ & $\frac{3aa}{2}$, on peut mettre $3qb^3$ & $3pa^3$, en ſuppoſant que $4Dqb^3$ & $4Dpa^3$

ſoient les ſolides que formeroient ces portions de ſurface en tournant autour de leurs ordonnées, D étant pris pour déſigner l'angle droit. 6°. Enfin au lieu de $\frac{2}{3}b$ & $\frac{2}{3}a$, on mettra la diſtance de la ligne CA aux centres de gravité de ces ſolides, qui eſt à peu près la même pour chacun, & qu'on nommera r, & s, enſorte que $r - s$ ſera une quantité infiniment petite, ou cenſée telle.

Soient A & B, les deux portions de ſurface qui ont AD & AB pour abſciſſes, h & l les diſtances de leurs centres de gravité à la ligne CA, on aura par le principe du *P. Guldin*, connu des Geométres, $\epsilon q b^3 = Ah\epsilon$, $\epsilon p a^3 = Bl\epsilon$; on aura donc $ddy = \frac{2\pi dt^2}{\theta^2}\left(k - \frac{\delta y(A+B)}{\Delta . M}\right)$ & $ddx = \frac{2\pi dt^2}{\theta^2} \times \frac{\delta}{\Delta . G} \times [N6 - 2rx . hA\epsilon + Nx(\epsilon + f)]$, pour le cas où la ſurface du Fluide ne s'éleve point avec le corps; & pour le cas où elle s'éleve, on nommera K' la ſurface du Fluide, & on aura $ddx = \frac{2\pi dt^2}{\theta^2} \times \frac{\delta}{\Delta . G} \times [N6 - 2rx . hA\epsilon + Nx(\epsilon + f)]$, & $ddy = \frac{2\pi dt^2}{\theta^2} \times \left(k - \frac{\delta y(A+B)K'}{K' - A - B}\right)$. Nous ſuppoſons ici pour plus de facilité $B = A$, & $h = l$.

Des Oſcillations d'un corps de figure irréguliere.

128. Le Problême devient beaucoup plus difficile lorſque le corps eſt de figure irréguliere. Pour le réſoudre, j'imagine d'abord les deux lignes verticales *CA* & *GI* (Figure 30) par leſquelles paſſent au premier inſtant les centres de gravité du corps, & de la partie ſubmergée; & je fais paſſer par ces lignes un plan qui forme dans le corps la ſection verticale *QBOD* perpendiculaire à la ſurface du Fluide. Enſuite tirant par le centre *C* l'horizontale *Cp* : imaginons que cette ligne *Cp* tourne autour du point fixe *C*, dans un plan quelconque incliné comme on voudra à la ſurface du Fluide, mais de maniére que le plan *QBOD* en changeant de ſituation demeure toujours perpendiculaire à la ſurface du Fluide; le mouvement de la ligne *Cp* peut être regardé comme compoſé de deux mouvemens, l'un dans un plan perpendiculaire à la ſurface du Fluide, l'autre dans un plan paralléle à cette même ſurface, & qui ſe fera autour d'une verticale paſſant par *C*.

129. Comme le mouvement de l'Axe *Cp* eſt fort petit, & que la ligne *AI* eſt auſſi fort petite; il eſt viſible que le dernier de ces deux mouvemens ne produira dans le centre de gravité *G* qu'une rotation infiniment petite du ſecond ordre qu'on pourra négliger, & que d'ailleurs ce même mouvement ne fera ſortir ni enfoncer aucune partie du corps.

Mais il n'en eſt pas de même du mouvement de la ligne Cp perpendiculairement à la ſurface du Fluide. Car ſoit $BZDY$ (Figure 31) la commune ſection du corps & de la ſurface du Fluide, ZY perpendiculaire à BD, & γ, γ' les centres de gravité des coins ou ſolides que forment les parties ZDY, ZBY, en tournant autour de l'ordonnée ZY, il eſt facile de voir que nommant n l'angle de cette rotation, la partie enfoncée deviendra $N - nqb^3 + npa^3$, & que le centre de cette partie ſera 1°. reculé horizontalement & parallélement à DB dans un plan vertical de la quantité $n(e + f)$. 2°. avancé dans ce même plan parallélement à DB de la quantité $uA + \frac{nqb^3}{N} + VA \times \frac{npa^3}{N}$. 3°. qu'il ſera avancé horizontalement & parallélement à $V\gamma$ de la quantité $- u\gamma' \times \frac{nqb^3}{N} + V\gamma \times \frac{npa^3}{N}$. 4°. enfin, qu'il ſera auſſi élevé verticalement d'une certaine quantité inutile à notre ſolution.

130. Maintenant, pour avoir le mouvement total du corps, il faut, comme je l'ai fait ailleurs,* imaginer une ſection perpendiculaire à $QBAD$ (Fig. 30), & paſſant par QA; laquelle tourne autour de l'Axe Cp d'un mouvement angulaire dP: par ce mouvement le centre de gravité ſera 1°. mû horizontalement dans un

* Voyez mes Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes, *article 26 & ſuivans.*

ſens contraire à l'angle dP avec une viteſſe $= dP(e + f)$. 2°. Si on prend R & S (Fig. 32) pour les centres de gravité des coins que forment les parties DYB, DZB en tournant autour de DB, & qu'on nomme ces coins $q' \times AY^3 \times P$ & $p' \times AZ^3 \times P$; on verra que le centre de gravité ſera avancé dans le ſens de l'angle dP d'une quantité $= \frac{P \cdot q' AY^3}{N} \times yR + \frac{p' AZ^3 \cdot P}{N} \times SZ'$, & avancé parallélement à AD d'une quantité $= \frac{q' AY^3}{N} \times P \times yA - \frac{p' AZ^3}{N} \times Z'A \times P$.

131. De plus, ſoit a (Fig. 33) le centre de gravité de l'aire $BZDY$; on trouvera que tandis que le corps s'éleve perpendiculairement de la quantité α, le centre de gravité de la partie ſubmergée avance dans un ſens contraire à AY de la quantité $\frac{\alpha \times BZDY}{N} \times ab$, & qu'il avance dans le ſens de AD de la quantité $\frac{\alpha \times BZDY}{N} \times bA$.

132. Donc en ajoutant les différentes quantités que nous venons de calculer, on aura dans la ligne verticale $\sigma\varrho$ (Fig. 34) le point ϱ où ſe trouve le centre de gravité de la partie ſubmergée après le temps t, enſorte que $A\sigma$ ſera $= AI + n(e + f) - \frac{nA \cdot nqb^3}{N} - \frac{\gamma A \cdot npa^3}{N} - \frac{q' AY^3 \cdot P \cdot yA}{N} + \frac{p' AZ^3 \cdot P \cdot Z'A}{N} - \frac{\alpha \cdot BZDY}{N} \times$

bA, que j'appelle $\epsilon - \omega$; & $\varrho\sigma = u\gamma' \times \frac{\eta q b^3}{N} - V\gamma \times \frac{\eta p a^3}{N} - \frac{P \cdot q' A Y^3}{N} \times yR - \frac{P \cdot p' \cdot AZ^3}{N} \times SZ' + \frac{\alpha \cdot BZDY}{N} \times ab$; que j'appelle z.

133. Enfin il eſt conſtant qu'après le temps t, la partie enfoncée ſera $N - \alpha \cdot BZDY + \eta p a^3 - \eta q a^3 - AY^3 \cdot Pq' + AZ^3 \cdot Pp'$; que j'appelle pour abreger $N - k$.

134. Imaginons préſentement, ſuivant la Méthode enſeignée dans mes *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, que tandis que le corps a ſes divers mouvemens, 1°. les forces qui doivent être détruites parallélement au plan QBD (Fig. 30) & à la ſurface du Fluide, ſoient G, & que leur diſtance à ce plan ſoit χ, & leur diſtance à la ſurface du Fluide ξ : 2°. que les forces qui doivent être détruites à chaque inſtant paralléle-ment à la ſurface du Fluide, & perpendiculairement au plan QBD ſoient F, que leur diſtance au plan vertical paſſant par QA & perpendiculaire au plan QBD ſoit θ, & leur diſtance à la ſurface du Fluide ζ : enfin 3°. que les forces verticales qui doivent être détruites ſoient π', & que leur diſtance au plan vertical paſſant par AY (Fig. 32) ſoit ν', & leur diſtance au plan QBD, μ' ; ces forces doivent être en équilibre avec les forces verticales du corps, ſavoir 1°. avec les forces $g\Delta M$ & $- g\Delta (N - k)$, dont l'une eſt

appliquée ou censée appliquée en A, & l'autre à une distance de $YA = 6 - \omega$, & à une distance de $BD = z$;

2°. avec la force verticale $+ \frac{M \Delta d d x}{d t^2}$ appliquée en A.

La somme de ces trois forces est $g \Delta (N - k) - g \Delta . M - \frac{M \Delta d d x}{d t^2}$, & on peut par conséquent les réduire à une seule que j'appelle π'', & qui jointe avec la force π' sera $\pi'' + \pi'$, que j'appelle π, & dont la distance à la ligne AY soit nommée ν, & la distance à la ligne AD soit nommée μ ; on a donc maintenant trois puissances G, F, π dont la position est donnée & qui doivent être en équilibre. Or cette condition donne

$$F\zeta - \pi\mu = 0.$$
$$G\xi - \pi\nu = 0.$$
$$F\theta - G\chi = 0,$$

& on aura par les Principes de statique, $\pi\mu = \pi'\mu' + g \Delta . N z$; & $\pi\nu = \pi'\nu' + g \Delta \nu . (6 - \omega)$.

Maintenant, soit $\frac{K}{2}$ la moitié de la somme des produits de chaque particule par le quarré de sa distance à l'Axe Cp (Fig. 30), & M la somme des produits de chacune par le quarré de sa distance à un plan vertical passant par GA, s l'angle que décrit durant le temps t la projection de l'Axe Cp sur un plan horizontal, y le Cosinus de l'angle que Cp fait avec

l'horiſon, on a 1°. * $G\xi - \pi'\nu' = \frac{K}{2}[-yd(\frac{ydy}{\sqrt{[1-yy]}})$
$-2ydedP - ydP^2\sqrt{[1-yy]} - yde^2\sqrt{[1-yy]}]$
$+ M(-ddy\sqrt{[1-yy)} + yde^2\sqrt{[1-yy]}) -$
$\frac{K}{2}(ddy\sqrt{1-yy} - ydP^2\sqrt{[1-yy]}) -$
$Myd(\frac{ydy}{\sqrt{[1-yy]}})$. 2°. $F\theta - G\chi = M(2ydyde + yyddE)$
$+ \frac{K}{2}(-2ydyde + [1-yy].ddE + ddP\sqrt{[1-yy]})$
$+ \frac{K}{2}ddE - \frac{K}{2}.\frac{2ydydP}{\sqrt{[1-yy]}} + \frac{K}{2}ddP\sqrt{[1-yy]}.$
Enfin 3°. $F\zeta - \pi'\mu' = \frac{K}{2}(\frac{2yydyde}{\sqrt{[1-yy]}} - yddE\sqrt{[1-yy]}$
$-yddP + M(2dydE\sqrt{[1-yy]} + yddE\sqrt{[1-yy]})$
$-\frac{K}{2}(2dydP + yddP)$.

Subſtituant ces valeurs dans les équations précédentes, on aura trois nouvelles équations, deſquelles comparant la ſeconde avec la troiſiéme, on trouvera $ddP = -d(dE\sqrt{[1-yy]}) + g\Delta, Nzdt^2$: & comme y eſt fort peu différente de 1, & e fort petite, on aura ſimplement $ddP = g\Delta Nzdt^2$. De même ſi on examine la premiere équation, on verra

* Toutes ces équations ſont tirées des formules qui ſe trouvent dans mes *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, pour déterminer la rotation d'un corps animé par des forces quelconques.

qu'elle

qu'elle peut ſe réduire, en négligeant tous les autres termes qui ſont infiniment petits, à $g\Delta \cdot N(6-\omega) =$ $(K+M)\times(-yd(\frac{ydy}{\sqrt{[1-yy]}}-ddy\sqrt{[1-yy]}) =$ $(\frac{K}{2}+M)\,ddn$, en ſuppoſant $y =$ Cof. n. A l'égard de la ſeconde équation, elle ſe réduira à $(M-\frac{K}{2})\times$ $d(yydt)+\frac{K}{2}\,d(dP\sqrt{[1-yy]}) = 0$, ou, à cauſe que y eſt preſque $= 1$, $(M-\frac{K}{2})\,dt = 0$.

135. On aura donc

1°. $\frac{M\Delta ddx}{dt^2} = g\Delta\,(N-k) - g\Delta M.$

2°. $g\Delta N(6-\omega)\,dt^2 = (\frac{K}{2}+M)\,ddn.$

3°. $ddP = g\Delta Nz\,dt^2.$

Donc mettant à la place de $6-\omega$ & de z leurs valeurs en P & en x, & donnant des valeurs analytiques aux conſtantes AY (Fig. 31, 32 & 33), AZ, yA, $Z'A$, uA, VA, $BZDY$, bA, $u\gamma'$, $V\gamma$, yR, SZ', ab, on parviendra à trois équations de cette forme,

$$ddx = (Hx+LP+Kn+\Omega)\,dt^2$$
$$ddn = (H'x+L'P+K'n+\Omega')\,dt^2$$
$$ddP = (H''x+L''P+K''n+\Omega'')\,dt^2$$

dont l'intégration peut s'achever aiſément par la Méthode dont j'ai déja parlé ci-deſſus, & que j'ai expliquée plus au long dans le 4ᵉ vol. des Mémoires de l'Açad. Royale des Sciences de Pruſſe, année 1748.

136. On voit par cette ſolution, 1°. que puiſque $dt = 0$, la ligne Cp que nous avons priſe pour l'Axe du corps, n'a qu'un mouvement tout-à-fait inſenſible parallélement à la ſurface du Fluide, & que le corps n'a proprement de rotation que dans deux plans perpendiculaires l'un à l'autre, & tous deux verticaux: ce qui ne doit point ſurprendre, ſi on conſidére que les forces qui agiſſent ici ſur le corps ſont ſimplement verticales. 2°. Il réſulte de la premiere équation (*article* 136) que la force π'' qui eſt $= -g\Delta M +$ $g\Delta (N-k) - \frac{M\Delta ddx}{dt^2}$ eſt $= 0$. De plus, on trouvera facilement que les forces G, F, π', ſont auſſi chacune égale à zero: il ne faut pour cela que chercher l'expreſſion de chacune de ces forces qui eſt dans mes *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, & ſe ſouvenir que par la propriété du centre de gravité $\int \mu x$ f Sin. $X = 0$, $\int \mu x f$ Cof. $X = 0$, $\int \mu x (a-b) = 0$. Car c'eſt une loi connue & démontrée en ſtatique, que quelque plan qu'on faſſe pour paſſer par le centre de gravité d'un corps, la ſomme des produits de chaque particule par ſa diſtance à ce plan eſt $= 0$. 3°. Il eſt aiſé de connoître en achevant les calculs que nous nous contentons d'indiquer ici, dans quel cas le ſolide ne fera que des oſcillations infiniment petites, c'eſt-à-dire tendra à ſe rétablir dans ſon état d'équilibre.

CHAPITRE VII.

De l'action d'une veine de Fluide qui sort d'un vase, & qui frappe un plan.

137. CETTE queſtion ayant quelque rapport à la Théorie de la réſiſtance des Fluides, j'ai cru qu'il ſeroit bon de la traiter ici, non-ſeulement parce que ſa ſolution ſe déduit facilement de mes Principes, mais encore parce qu'elle me donnera occaſion de faire ſur cette matiére quelques obſervations nouvelles, & conformes à l'expérience.

Je remarquerai d'abord avec *M. Daniel Bernoulli*, que toutes les fois qu'une veine de Fluide (d'eau par exemple) vient frapper perpendiculairement un plan, toutes les particules d'eau quittent le plan ſuivant des lignes paralléles à la direction du plan. Cela s'entendra mieux (je me ſers ici des termes de *M. Bernoulli*) par la Figure 35, dans laquelle *AB* marquant l'Axe de la veine du Fluide qui frappe le plan *EF*, on voit que les filets qui compoſent la veine ſe fléchiſſent à une petite diſtance du plan, de maniére qu'en *E* & en *F* où ils quittent le plan, leur direction devient paralléle au plan, ou perpendiculaire à l'Axe *AB*.

138. Suppoſons donc que *AB* (Fig. 36) eſt l'orifice d'un vaſe d'où les eaux s'écoulent avec une viteſſe uniforme, pour venir frapper le plan *CD*; nous ne

conſidérerons ici qu'une moitié du plan CD & de l'orifice AB, parce que de l'autre côté ce ſera préciſément la même choſe. Il eſt viſible par tout ce qui vient d'être dit, que la viteſſe des particules en D, en tant qu'elle eſt paralléle à AC, ſera $= 0$. Donc ſi on exprime la viteſſe paralléle à AC par une fonction q de $CP\ (x)$ & $PN\ (z)$, q doit être une fonction telle, qu'elle devienne $= 0$, quand $x = 0$, c'eſt-à-dire que tous les termes ſoient multipliés par x. 2°. On peut démontrer par le même raiſonnement que dans l'*art.* 36 que la viteſſe eſt conſtante dans la Courbe extrême & extérieure BMD.

Car ſoient Mm, mm', deux petits côtés de la Courbe, décrits par la particule M dans deux inſtans égaux & conſécutifs, & ſoit mn égale en ligne droite avec Mm; ſoit de plus regardée la viteſſe mn comme compoſée de la viteſſe réelle mm', & d'une viteſſe $m'n$ qui doit être détruite ; il eſt clair par les Principes de l'Hydroſtatique, que $m'n$ doit être perpendiculaire à la Courbe BMD; donc $mn = mm'$. Donc la viteſſe dans la Courbe BMD eſt conſtante.

139. De plus, comme l'orifice AB eſt ſuppoſé aſſez petit, & que toutes les parties de la tranche AB ont la même viteſſe verticale, on ne s'éloignera pas beaucoup de la vérité, en ſuppoſant que toutes les parties d'une tranche quelconque PM paralléle à AB, ont auſſi la même viteſſe verticale, deſorte que ſi Pp eſt l'eſpace parcouru par la particule P pendant un inſtant dt,

$PMmp$ ſoit conſtant, c'eſt-à-dire proportionnelle à l'inſtant dt. Or nous venons de prouver, que prenant l'inſtant dt conſtant, Mm doit être conſtante, parce que la viteſſe dans la Courbe BMD eſt conſtante. Donc Mm doit être proportionnelle à $PMmp$: d'où l'on tire l'équation de la Courbe de la maniére ſuivante.

140. Soit $AP = x$, $PM = y$, $BM = s$, $AB = a$, on aura $y\,dx = a\,ds$, puiſque quand $x = 0$, on a $dx = ds$; & $y = a$: donc $y^2\,dx^2 = a^2\,dx^2 + a^2\,dy^2$.

Donc $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{[yy - aa]}}$.

Soit maintenant la viteſſe des particules en $A = v$, la viteſſe en PM ſera $\frac{va}{y}$, & ſi les lignes AB, PM étoient d'égale largeur, la preſſion en un point quelconque de PM ſeroit $\frac{y}{dt}\int\frac{va\,dy}{yy} \times dx = y\int\frac{va\,dy}{yy} \times dx \times \frac{va}{y\,dx}$, à cauſe de $dt = \frac{y\,dx}{va}$: donc la preſſion ſeroit $= y\int\frac{v^2a^2\,dy}{y^3} = v^2a^2y\,(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2y^2})$, ſi AB & PM étoient égales. Mais AB n'étant pas égale à PM, il faut retrancher de la quantité précédente, la preſſion qui viendroit de la partie $B\,b\,M$. Or la preſſion verticale en un point quelconque de la Courbe BM, ſeroit $v^2a^2\,(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2y^2})$ qui étant multipliée par dy & enſuite intégrée, donnera la quantité qu'il faut retrancher

de la précédente. On a donc $\int v^2 a^2 dy \times (\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2y^2}) =$ $\frac{v^2}{2} \times (y - a) + \frac{v^2 a^2}{2y} - \frac{v^2 a^2}{2a}$. Soit donc $v^2 = 2ph$, & la preſſion en PM ſera $phy - \frac{pha^2}{y} - phy +$ $pha - \frac{pha^2}{y} + pha = 2pha - \frac{2pha^2}{y}$.

141. Quelques Lecteurs s'imagineront peut-être que la preſſion en PM doit être la même, que ſi AB étoit $= PM$, parce que ſuivant les Principes de l'Hydroſtatique, ſi l'on a un Fluide dont toutes les parties ſoient ſollicitées par quelque force paralléle à AC, & qui ſoit la même dans tous les points d'une même tranche PM; ce Fluide exerce la même preſſion, que ſi toutes les ordonnées PM étoient égales. Mais il faut remarquer qu'outre la force $- \frac{dv}{dt}$, il exiſte ici d'autres forces. Car 1°. dans la Courbe BMD la force détruite eſt perpendiculaire à la Courbe. Donc cette force eſt compoſée de deux autres, l'une paralléle à AC & $= - \frac{dv}{dt}$, l'autre perpendiculaire à AC. Il en faut dire autant des autres points des ordonnées PM, qui décrivant des Courbes, perdent non-ſeulement une force $- \frac{dv}{dt}$ paralléle à AC, mais encore une autre force perpendiculaire à AC. D'où il s'enſuit que la

preſſion en M par ex. qui ſeroit égale à $\int dx \times \frac{-dv}{dt}$ s'il n'y avoit que la ſeule force $-\frac{dv}{dt}$, ſera nulle. Car cette preſſion ſeroit la même, que la preſſion du Canal BM qui doit (*article* 27) être nulle à cauſe des viteſſes égales en B & en M; & la preſſion dans un autre point par exemple en N eſt = à celle du Canal BMN. Donc puiſque la preſſion du Canal $BM = 0$, cette preſſion eſt la même, que ſi elle venoit de la ſeule partie MN: au lieu que s'il n'y avoit que la force $-\frac{dv}{dt}$, & que le Fluide fût enfermé dans un vaſe $ABDC$, la preſſion en N ſeroit la même, que ſi elle venoit de la ſeule colomne $\mathcal{C}N$. Car dans ce cas, le poids de BM ne ſeroit pas $= 0$, mais = au poids de $\mathcal{C}N$: ainſi ce n'eſt pas ſans raiſon que nous avons déterminé la preſſion, comme nous l'avons fait *art.* 140, en ne regardant pas AB & PM comme égales.

142. Voici maintenant les concluſions qu'on peut tirer de la Théorie précédente. Il eſt clair par l'équation $dx = \frac{ady}{v[yy-aa]}$, que quand $x = AC$, $\frac{dx}{dy}$ n'eſt point $= 0$, à moins qu'on ne ſuppoſe y infinie; or cette ſuppoſition ne pouvant ſe faire phyſiquement, il s'enſuit que la direction du Fluide, quand il eſt parvenu au plan CD, n'eſt pas exactement paralléle à ce plan, mais fait un angle d'autant plus aigu avec le plan CD, que ce plan CD a plus d'étendue par

rapport à l'orifice AB. Cependant comme cette étendue eſt aſſez grande, ſoit b l'étendue du plan, & on aura à peu près $2phaa - \frac{2phaa}{b}$ pour la preſſion du Fluide. Donc b étant beaucoup plus grande que a, on voit que la preſſion ſera un peu moindre que $2pha$, ce qui s'accorde parfaitement avec les expériences faites par *M. Krafft*, & rapportées dans le tome 8 des Mém. de Peterſbourg : car, ſuivant ces expériences, l'action d'une veine de Fluide qui frappe un plan, eſt un peu moindre que le poids d'un cylindre de Fluide dont la baſe eſt a, & la hauteur $2h$, c'eſt-à-dire dont la baſe eſt l'ouverture du trou, & dont la hauteur eſt égale à deux fois la *hauteur dûe à la viteſſe* du Fluide.

SCHOLIE I.

143. Dans les *articles* précédens, nous avons ſuppoſé pour la facilité des calculs, que le vaſe étoit un parallélogramme rectangle : mais ſi on le regardoit comme un cylindre, alors on auroit $yydx = aads$, & $dx = \frac{aadv}{V[yy-aa]}$, équation qui ne peut ſe réduire aux Logarithmes, comme l'équation $dx = \frac{ady}{V[yy-aa]}$, mais qui peut ſe réduire à la rectification des ſections coniques. Voyez les Mém. de l'Acad. des Sciences de Pruſſe an. 1746 to. 2. A l'égard de la preſſion, on la

la trouvera en prenant $2n$ pour le rapport de la circonférence au rayon, de la maniére ſuivante.

$\frac{vaa}{yy}$ eſt la viteſſe en PM: donc ſi PM étoit $= AB$, la preſſion ſeroit $nyy \times (2v^2a^4) \times (\frac{1}{4a^4} - \frac{1}{4y^4}) = nyy \times 4phaa^4 (\frac{1}{4a^4} - \frac{1}{4y^4})$: or ſi on retranche de cette quantité celle-ci $\int ph \times (1 - \frac{a^4}{y^4}) \times 2nydy = nphyy - nphaa + \frac{phna^4}{y^2} - phnaa$, la preſſion en PM ſera $2nphaa - \frac{2nphaa}{yy}$; expreſſion qui s'accorde de nouveau avec les expériences de *M. Krafft.*

SCHOLIE II.

144. Si on a égard à la peſanteur des parties du Fluide, alors la viteſſe verticale peut être ſuppoſée la même dans toutes les parties d'une même tranche PM, mais la viteſſe dans la Courbe BMD n'eſt point conſtante. Or dans ce cas, la viteſſe perdue $m'm$ doit ſe combiner de telle ſorte avec la peſanteur qui agit verticalement, qu'il en réſulte une force unique perpendiculaire à la ſurface de la Courbe. Donc prenant $PMpm$ conſtant, & p pour la gravité, il faut que Mm croiſſe de la quantité $pdt^2 \times \frac{dx}{ds}$, c'eſt-à-dire qu'à cauſe

de $dt = \frac{y\,dx}{va}$, on aura $dds = \frac{py^2dx^2}{v^2a^2} \times \frac{dx}{ds}$: donc $\frac{ds^2}{2} = \frac{py^2dx^2}{v^2a^2} \times x + \frac{py^2dx^2 \times h}{v^2a^2}$.

Donc $dx^2 + dy^2 = \frac{y^2dx^2}{2phaa} \times (2px + 2ph)$, c'eſt-à-dire (en faiſant $x + h = n$) $dn^2 + dy^2 = \frac{y^3ndn^2}{haa}$; équation difficile à intégrer, mais dont on peut trouver l'intégrale au moins par approximation de la maniére ſuivante.

Il eſt évident qu'on auroit $dx = \frac{ady}{\sqrt{(yy-aa)}}$, ſi p étoit $= 0$: donc on auroit $x = \text{Log.}\ \frac{y+\sqrt{[yy-aa]}}{a}$. Donc dans le 2^d membre de l'équation $dx^2 + dy^2 = \frac{y^2dx^2}{2phaa} \times (2px + 2ph)$, ſoit miſe pour x cette valeur, & on aura $dx = \frac{dy}{\sqrt{[\frac{yy}{aa} - 1 + \frac{y^4}{ah}\text{Log.}(y + \frac{\sqrt{(yy-aa)}}{a})]}}$; équation qui repréſente aſſez exactement la Courbe BMD, ſur-tout dans les points qui ne ſont pas trop proches de D.

Maintenant, pour déterminer la preſſion en PM, il faut remarquer que la force détruite dans chaque particule PM dans l'inſtant dt eſt $d(\frac{va}{y}) + p\,dt$: d'où

l'on conclura facilement, que la preſſion déterminée dans l'*art. précéd.* doit être augmentée d'une quantité égale au poids de toute la veine $ABDC$. Or le poids du Fluide $ABDC$ eſt à peu près le même, que ſi dx étoit $= \frac{adr}{r[yy-aa]}$: donc $\int py\,dx = \frac{\int pydy.a}{r[yr-aa]} = paV[yy-aa] = paV[bb-aa]$: donc la preſſion totale $= 2pha - \frac{2phaa}{b} + paV[bb-aa]$. Cette expreſſion ne paroît pas s'accorder avec les expériences de *M. Krafft*; du moins les cas où $aV[bb-aa]$ ſera $> \frac{2haa}{b}$, ce qui pourra arriver ſouvent. Mais il faut remarquer que dans les expériences de *M. Krafft*, l'eau ſortoit du vaſe par un trou vertical, ſuivant une direction horizontale : d'où il s'enſuit que ſa peſanteur n'entroit pour rien dans l'effet de la preſſion. Il ſeroit peut-être néceſſaire de faire des expériences nouvelles ſur la preſſion d'un Fluide qui ſort d'un vaſe dans une direction verticale. Mais ces expériences ſont difficiles à exécuter : quoi qu'il en ſoit, il nous ſuffit que toutes celles qui ont été faites juſqu'à préſent ſur cette matiére, & ſur l'exactitude deſquelles on peut compter, s'accordent avec notre Théorie.

SCHOLIE III.

145. L'expreſſion que nous venons de donner pour la preſſion d'un Fluide ſortant d'un vaſe, eſt un peu

différente de celle qu'a donnée le célébre *M. Daniel Bernoulli* dans le to. 8 des Mém. de l'Académie de Peterſbourg. Selon lui, la preſſion d'un Fluide qui ſort d'un vaſe eſt égale à la ſeule quantité $2phz$. Or nous la trouvons un peu plus petite.

Pour ſavoir d'où vient cette différence, faiſons quelques obſervations ſur la Méthode de *M. Bernoulli.*

Il ſuppoſe en premier lieu, que les Courbes décrites par chaque filet de Fluide peuvent être regardées comme des Canaux dans leſquels un corps ſe meut. Soit donc BMD un Canal dans lequel ſe meut un petit corps que j'appelle m, & nommant v la hauteur *dûe à la viteſſe* en M, cherchons avec *M. Bernoulli* la ſomme de toutes les puiſſances momentanées paralléles à l'Axe.

Soit la puiſſance tangentielle en $M = p$, & variable ſuivant telle loi qu'on voudra ; la force qui en réſulte parallélement à AC ſera $\frac{p\,dx\,dt}{ds}$: outre cela, la force centrifuge en $M = \frac{m \times 2v\,dt}{R}$, R étant le rayon de la développée en M ; & la force qui en réſulte parallélement à AC, eſt $\frac{2v \times m}{R} \times dt \times \frac{dy}{ds}$: donc comme $dt = \frac{ds}{V[2v]}$, cette derniere force ſera $+ \frac{m\,dy \cdot V2v}{R}$.

Donc la ſomme des deux preſſions $= + \frac{m\,dy\,V[2v]}{R} +$

$\frac{p\,dx\,ds}{ds}$: or faiſant ds conſtante, on a $R = -\frac{dy\,ds}{ddx}$, & de plus $p\,dt = -\frac{m\,dv}{\sqrt{[2v]}}$: donc la preſſion ſera $-\frac{m\,ddx\,\sqrt{[2v]}}{ds} - \frac{m\,dv\,dx}{ds\,\sqrt{[2v]}}$, dont l'intégrale eſt $-\frac{m\,dx\,\sqrt{[2v]}}{ds} + m\sqrt{[2k]}$, entendant par $\sqrt{[2k]}$ la viteſſe initiale en B.

Donc ſi $\frac{dx}{ds} = 0$, comme il arrive dans les points où le Fluide atteint le plan, la preſſion en ces points eſt $m\sqrt{[2k]}$; & ſi on ſuppoſe la viteſſe du Fluide conſtante, alors la preſſion $= m\sqrt{[2k]}\,(1 - \frac{dx}{ds}) = m\sqrt{[2k]}$ lorſque $\frac{dx}{ds} = 0$. Donc dans tous les cas, la ſomme des preſſions momentanées de B juſqu'en $D = m\sqrt{[2k]}$.

Maintenant, ſoit la viteſſe uniforme de l'eau qui ſort $= \sqrt{2A}$; ſoit pris à volonté un temps quelconque t, & ſuppoſons que pendant ce temps il ſorte une quantité d'eau $= m$; ſoit p la puiſſance qui ſoutient le plan. Donc on aura $pt = m\sqrt{2A}$; ou $p = \frac{m\sqrt{2A}}{t}$. Or (*hyp.*) la maſſe m ſort uniformément pendant le temps t avec la viteſſe $\sqrt{[2A]}$ par le trou 1 : donc $1 \times \sqrt{[2A]} \times t = m$: donc $t = \frac{m}{\sqrt{2A}}$; & $p = 2A$. Telle eſt, ſuivant

M. Bernoulli, la preſſion de l'eau ; d'où il conclut qu'elle eſt égale au poids d'un cylindre d'eau dont la baſe ſeroit le trou = 1, & la hauteur $2A$.

Il me ſemble que cette Théorie ſe réduit aux propoſitions ſuivantes.

Que dans le premier inſtant $d\theta$ d'un temps quelconque t il s'écoule par l'orifice AB des particules dont chacune ſoit $= n$, & dont par conſéquent le nombre ſoit $= \int n$; il eſt évident que ſi on ſuppoſe l'orifice AB diviſé en portions fort petites $d\alpha$, on aura $n = d\theta \times d\alpha \times \sqrt{[2A]}$; car dans le même inſtant $d\theta$, la particule n qui ſort ſera d'autant plus grande, que la viteſſe $\sqrt{[2A]}$ ſera plus grande. Donc par la même raiſon dans un temps quelconque t ou $\int d\theta$, le nombre des particules qui ſortiront, ſera $\int d\alpha \times t \times \sqrt{2A}$.

Maintenant, chacune des particules n après qu'elle eſt ſortie par l'orifice AB, parvient au plan CD en décrivant une Courbe quelconque avec une viteſſe quelconque ; avec cette ſeule circonſtance que ſon mouvement devient parallèle au plan CD lorſqu'elle eſt arrivée à ce plan. Alors la ſomme des preſſions d'une particule quelconque $d\alpha$, depuis qu'elle paſſe par l'orifice AB juſqu'à ce qu'elle arrive en CD, ſera $d\alpha\sqrt{[2A]}$, & la ſomme des preſſions de toutes les parties $d\alpha$ qui ſortent à la fois de l'orifice AB, ſera $\sqrt{2A} \times \int d\alpha$: donc dans le temps t la preſſion ſera $\sqrt{[2A]} \times \int d\alpha \times \sqrt{2A} \times t$. Donc la preſſion que *M. Bernoulli* regarde comme inſtantanée, ſera $= 2A \times \int d\alpha$, c'eſt-à-dire $=$ au produit de la largeur de l'orifice par $2A$.

Il paroît assez clairement par ces propositions, que la pression déterminée par *M. Bernoulli* est la somme des pressions que les particules qui sortent en même temps du vase, exercent sur le plan depuis l'instant où elles sortent de l'orifice, jusqu'à celui où elles atteignent le plan *CD*. Mais il me semble que la somme de ces pressions ne représente point la vraie pression dont il s'agit ici. Car la somme de ces pressions n'agit que dans un temps fini, c'est-à-dire dans le temps que les particules employent à parvenir de l'orifice du tuyau au plan *CD*. Or ce qu'on demande ici, c'est la pression instantanée, c'est celle qu'exercent dans un même instant sur le plan *CD*, toutes les particules de Fluide qui rempliſſent dans cet instant l'espace *ABDC*. Cette pression, si je ne me trompe, est différente de celle de *M. Bernoulli*. Car considérons les particules qui décrivent la Courbe *BMD*, comme couvrant entiérement cette Courbe dans un instant quelconque, & cherchons la pression qu'elles exercent dans cet instant, sur le plan, nous trouverons, en suivant la Méthode même de *M. Bernoulli*, 1°. que la pression venant de la force centrifuge, est $\frac{2v}{R} \times ds \times \frac{dy}{ds} = \frac{-2vdx}{ds}$, 2°. que la pression venant de la force tangentielle est $-\frac{dv}{v\,2v\,.\,ds} \times ds \times \frac{dx}{ds} = -\frac{dv\,.\,dx}{ds}$; donc la pression d'une particule quelconque est $-\frac{2v\,ddx}{ds} - \frac{dv\,dx}{ds}$, dont l'in-

tégrale eſt $2v \times -\frac{dx}{ds} + 2k + \int \frac{dv\,dx}{ds}$. Or lorſque dv eſt négative, c'eſt-à-dire lorſque la viteſſe va en diminuant de A vers B, cette quantité eſt moindre que $2v \times -\frac{dx}{ds} + 2k$. Donc la preſſion dans chaque Courbe eſt $2k - P$, P étant une quantité poſitive $= \int -\frac{dv\,dx}{ds}$. Donc puiſque le nombre des Courbes eſt égal au nombre de points de l'orifice AB, il s'enſuit que ſi on appelle cet orifice 1, la preſſion ſera $= 1 \times (2h - P)$, c'eſt-à-dire moindre que celle de *M. Daniel Bernoulli*; & plus conforme à celle que nous avons donnée.

Il faut cependant avouer, 1°. que lorſque la viteſſe va en augmentant de A vers B, cette derniere formule donneroit une preſſion plus grande que $2k$, ce qui ſeroit contraire à l'expérience; 2°. que cette même formule s'accorde avec celle de *M. Bernoulli* dans le cas où $dt = 0$, c'eſt-à-dire où la viteſſe eſt ſuppoſée conſtante dans toutes les Courbes. Mais cette derniere hypotheſe, auſſi-bien que la Méthode même, paroît ſujette à quelques difficultés.

Car ſoient ANC, BMD (Fig. 37), deux Courbes ou Canaux infiniment proches l'un de l'autre, & ſoit formé le Canal $ANMB$, il eſt viſible qu'à cauſe de la viteſſe conſtante (*hyp.*) la preſſion dans les parties AN, BM eſt nulle (*art.* 27) auſſi-bien que dans

la

la partie *AB*. Or il y a dans le Canal *MN* quelque preſſion qui vient de la force centrifuge des parties : donc le Canal *ANMB* ne pourroit pas être en équilibre ; ce qui eſt contraire à l'*art.* 18 : d'où il s'enſuit que les viteſſes en *N* & en *M* ne ſauroient être égales. Donc puiſque la viteſſe dans le Canal *BMD* eſt néceſſairement conſtante, il s'enſuit qu'elle ne ſauroit l'être dans le Canal intérieur *ANC*. Outre cela, ſi la viteſſe du Fluide dans chaque Courbe *BD*, *Vd*, (Fig. 36) étoit conſtante, alors par la formule générale de la preſſion trouvée *art.* 27, il s'enſuivroit que la preſſion en *D*, *d*, ſeroit nulle, & qu'ainſi le plan ne ſoutiendroit aucun effort, ce qui eſt contraire à l'expérience. A l'égard de la Méthode dont nous venons de nous ſervir pour déterminer la preſſion du Fluide égale à $2k - P$, elle eſt fautive en ce que la force centrifuge ne doit point entrer dans la valeur de la preſſion, & qu'on ne doit point multiplier les deux forces par $\frac{dy}{ds}$ & $\frac{dx}{ds}$. C'eſt une ſuite de tout ce qui a été dit dans cet Ouvrage ſur les loix de la preſſion des Fluides.

Il me ſemble que nous approchons beaucoup plus de la vérité d'après l'hypotheſe que nous avons faite, que toutes les parties du Fluide dans une même tranche *PM* ayent la même viteſſe parallélement à *AC*. Il faut avouer cependant que cette hypotheſe n'eſt peut-être pas rigoureuſement vraie, comme on le

peut conclure de ce qui a été dit dans l'*article* 100.

Avant de finir cette recherche, je dois avertir que ſuivant *M. Daniel Bernoulli*, les expériences qu'il a faites s'accordent parfaitement avec ſa Théorie. J'ai préféré néanmoins les expériences de *M. Krafft* qui m'ont paru en plus grand nombre, & qui s'accordent toutes à donner la preſſion un peu moindre que $2a$. Peut-être pour établir ſur ce ſujet quelque concluſion certaine, ne ſeroit-il pas inutile de recommencer de nouveau les unes & les autres.

SCHOLIE IV.

146. Au reſte, on pourroit appliquer à la recherche de la preſſion d'une veine de Fluide, la Méthode que j'ai expliquée dans cet Ouvrage. Mais le calcul en ſeroit difficile. En effet, ſoit QAq (Fig. 38) le plan circulaire expoſé au filet du Fluide, FA le filet central, on prouvera, comme on l'a fait *art.* 36, *n.* 3 & 5, que le Fluide eſt ſtagnant dans un eſpace FAM, & que la viteſſe le long de FM eſt très-petite. D'où il s'enſuit, 1°. que ſi on nomme a la viteſſe du Fluide, & qu'on faſſe $Am = AM$, la preſſion ſur MAm ſera égale à $\frac{a^2}{2}$ multiplié par le cercle dont le diamétre eſt MAm; 2°. que les valeurs de p & de q doivent être déterminées par des équations ſemblables à celles des *art.* 45 & 48, & que ſi on nomme AQ,

y, la preſſion en Q ſera $\int 2\pi y\,dy \times \frac{nn}{2}(1 - pp - qq)$, cette intégrale étant priſe de maniére qu'elle ſoit $= 0$, lorſque $AQ = AM$. 3°. Que la valeur de q étant exprimée par une fonction de x & z, & prenant l'origine des x en A, il faut que cette fonction ſoit nulle en faiſant $x = 0$, car la viteſſe q perpendiculaire à FA eſt nulle le long du plan AM. Donc la quantité q doit contenir x à tous ſes termes. Il eſt facile de trouver une infinité de valeurs de q qui ſatisferont à ces conditions, ſur-tout ſi on regarde le plan ſuppoſé comme une ſimple ligne; car alors $dq = A\,dx + B\,dz$, & $dp = B\,dx - A\,dz$. Mais le Problême reſtera d'ailleurs indéterminé. C'eſt ce qui m'a engagé à chercher une autre route, quoique peut-être moins rigoureuſe & moins directe, pour trouver la preſſion d'une veine de Fluide contre un plan.

SCHOLIE V.

147. Ce que nous venons de dire ici de l'action d'une veine de Fluide contre une ſurface plane, peut s'appliquer auſſi à l'action qu'un courant exerce contre un plan qui y eſt plongé. Les valeurs de p & de q me paroiſſent en ce cas indéterminées, ou plûtôt indéterminables; deſorte qu'il eſt comme impoſſible de pouvoir comparer la Théorie à l'expérience, même dans ce cas qui paroît le plus ſimple de

tous. Au reſte, il me ſemble, que toutes choſes d'ailleurs égales, la preſſion d'une veine de Fluide qui ſort d'un vaſe & qui agit contre un plan, doit être plus grande que celle d'un Fluide dans lequel ce plan ſeroit entiérement plongé. Car dans le premier cas il n'y a que la ſurface antérieure du plan, qui ſoit expoſée à l'action du Fluide, au lieu que dans le ſecond cas le Fluide agit ſur la ſurface poſtérieure du plan, & contrebalance en partie par la preſſion qu'il y exerce, celle que ſoutient la ſurface antérieure. Tout cela eſt conforme à l'expérience, ſuivant laquelle, en effet, la preſſion dans le premier cas eſt plus grande que la preſſion dans le ſecond (*art.* 75 *&* 142).

CHAPITRE VIII.

Application des Principes expoſés dans cet eſſai, à la recherche du mouvement d'un Fluide dans un vaſe.

148. LEs Principes que j'ai donnés dans cet Ouvrage pour déterminer les loix de la réſiſtance des Fluides, m'ayant paru avoir beaucoup d'étendue, j'ai cru qu'il ne ſeroit pas inutile de montrer de quelle maniére on peut les appliquer à la recherche du mouvement des Fluides dans des vaſes ou canaux quelconques. Mais comme ces recherches ne ſont point ici directement de mon ſujet, je me contenterai d'en indiquer les Principes.

Imaginons d'abord un vaſe de Figure quelconque & d'une longueur indéfinie $HGLI$ (Fig. 39), dans lequel ſoit renfermée une quantité de Fluide $ABFE$, qui, ſoutenue par le fond FE, ſoit ſtagnante dans ce vaſe, & qu'enſuite on ôte tout-à-coup le fond FE : on demande quel doit être le mouvement du Fluide.

Pour rendre le calcul plus facile, nous regarderons d'abord le vaſe comme une figure plane, & nous prendrons l'origine des x en C, les x étant verticales, & les y ou z horizontales. Si le vaſe étoit cylindrique, il eſt viſible que le Fluide tomberoit à la maniére des corps peſans ordinaires, enſorte que nommant g la gravité naturelle, t le temps écoulé depuis le commencement de la chûte, & u la viteſſe à la fin du temps t, on auroit $u = gt$. Mais la figure curviligne du vaſe doit changer entiérement cette valeur de u, enſorte qu'au bout d'un temps t, les viteſſes horizontale & verticale, doivent être une fonction de t, x, z. Or en premier lieu, ces viteſſes doivent être telles, qu'en faiſant $z = PM = y$, le rapport qu'elles auront entr'elles ſoit égal à la fonction de x & de y, qui exprime le rapport de dx à $-dy$ au point M; & cette condition doit avoir lieu, quel que ſoit le temps t. Donc ſi on nomme la viteſſe verticale Q, & horizontale P, il faut que $\frac{Q}{P} = \frac{dx}{-dy}$, en mettant dans Q & dans P, y au lieu de z. Donc il faut que t s'évanouiſſe entiérement dans la diviſion de Q par P; ce

qui ne peut arriver qu'en ſuppoſant $Q = \theta q$, $P = \theta p$, θ étant une fonction de t ſeulement, & q, p, des fonctions de x & de z.

149. Cela poſé, ſoit $d(\theta q) = qT dt + \theta A dx + \theta B dz$, & $d(\theta p) = pT dt + \theta A' dx + \theta B' dz$, on trouvera facilement par une Méthode ſemblable à celle de l'*art.* 48, 1°. que $\theta B'$ ſera $= -\theta A$. 2°. que la force accélératrice horizontale qui doit être détruite, eſt $-\theta B' p - \theta A' q - pT$, & que la force verticale eſt $g - B\theta p - A\theta q - qT$, d'où il s'enſuit que l'on aura $\frac{d(g - B\theta p - A\theta q - qT)}{dz} = \frac{d(-\theta q A' - \theta p B' - pT)}{dx}$; équation à laquelle on ſatisfera, en ſuppoſant $A' = B$; comme dans l'*article* 48. Donc on aura

$$dq = A dx + B dz,$$
$$\& \; dp = B dx - A dz,$$

équations par leſquelles on déterminera la forme générale des quantités q & p.

150. Maintenant, au commencement du mouvement, lorſque le temps $t = 0$, les ſurfaces AB, EF étant horizontales, la force perdue doit être perpendiculaire à ces ſurfaces; d'où il s'enſuit que p doit être égal à zero, lorſque $x = 0$, & lorſque $x = CD$, quelque valeur qu'on donne à z. De plus, ſi les parois du vaſe ne ſont pas perpendiculaires aux lignes AB, EF, en A, B, F, E, il faut que $q = 0$ lorſque $x = 0$ & $z = CB$, & lorſque $x = CD$ & $z = DF$. Car le mouvement des particules A, B, F, E, ne pouvant

ſe faire que ſuivant les parois du vaſe, on ne ſauroit avoir $p = o$ en ces points-là, qu'on n'ait auſſi $q = o$.

Il faut encore que dans le commencement du mouvement, lorſque $t = o$, la preſſion dans le Canal CD ſoit nulle, ce qui donne $\int dx\,(g - \frac{\theta q}{dt}) = o$, l'intégrale étant priſe de maniére qu'elle ſoit $= o$ lorſque $x = o$, & lorſque $x = CD$. D'où l'on peut conclure que la fonction θ doit être telle, qu'en y faiſant $t = dt$, on ait $\frac{\theta}{dt} = 1$. Donc $\theta = t$.

151. Au moyen de toutes les conditions précédentes & de la courbure des parois BMF qui eſt connue, & dans laquelle $\frac{dx}{-dy}$ doit être $= \frac{q}{p}$, on aura la valeur des coefficiens qui doivent entrer dans q & dans p.

152. Suppoſons maintenant, qu'après un temps quelconque t, les deux ſurfaces du Fluide ſoient acb, (Fig. 40) edf, & nommons Cc, a, Cd, b: je dis d'abord, que ſuppoſant a & b connues, il ſera poſſible de trouver les Courbes acb, edf; car dans chacune de ces Courbes la force perdue doit être perpendiculaire à la Courbe, d'où il s'enſuit que ſi on nomme Pm, s, il faut que $\frac{-ds}{dx} = \frac{g - q - Aqt - Bpt}{p + Bqt - Apt}$, en mettant dans p & dans q, s pour z, ce qui donnera les deux Courbes. Ces deux Courbes étant connues, & renfermant a & b dans leur équation, voici comment on déterminera les

quantités a, b. On obſervera 1°. que la maſſe du Fluide $acbfdea$ eſt donnée ; premiere équation. 2°. que la preſſion dans le Canal CD doit être nulle, d'où l'on tire $\int dx(g - q - tAq - tBp) = 0$ lorſque $x = a$, & lorſque $x = b$. Delà on aura la valeur de a & de b en t, & le Problême ſera entiérement réſolu.

REMARQUE I.

153. Si le vaſe étoit regardé non comme une figure plane, mais comme un corps ſolide, alors il faudroit ſuppoſer non $B' = -A$; mais $B' = -A - \frac{p.t}{x}$ comme dans l'*article* 48. Du reſte, le calcul ſera le même que dans l'*article* précédent.

REMARQUE II.

154. Si le Fluide au lieu de couler toujours au-dedans du vaſe, s'en échappe, alors le calcul ſera le même encore que dans les *art.* précédens ; avec cette différence, qu'au lieu que dans le premier cas (*art.* 152) la maſſe de Fluide $acbfdec$ étoit conſtante, elle ne le ſera plus ici : il faudra donc changer cette condition en un autre, ſavoir que dans la Courbe edf, s ſoit $= DF$ (Fig. 41) lorſque $x = CD$. C'eſt là le ſeul changement qu'il ſoit néceſſaire de faire au calcul.

REMARQUE III.

REMARQUE III.

155. Cette Méthode de déterminer le mouvement d'un Fluide eſt beaucoup plus rigoureuſe, que celle dont je me ſuis ſervi dans mon Traité *de l'Equilibre & du mouvement des Fluides*; mais le calcul en eſt ſi pénible, qu'il faut preſque y renoncer. D'ailleurs, l'expérience paroît s'accorder aſſez bien avec la Théorie que nous avons établie dans l'ouvrage cité.

CHAPITRE IX.

Application des mêmes Principes à quelques recherches ſur le courant des Rivieres.

156. SOIT Bm (Figure 42) le fond du lit de la riviere, CM ſa ſurface ſupérieure, & ſoit ſuppoſé que la riviere coule de C vers M, & que ſon lit ſoit par-tout d'une égale largeur. Ayant tiré à volonté l'horizontale Qo & la verticale AQ, il eſt certain qu'on pourra exprimer les viteſſes horizontale & verticale du point quelconque o par p & q, c'eſt-à-dire par des fonctions de AQ, x, & Qo, z. De plus, on trouvera par les Méthodes déja expliquées, que ſi $dq = Adx + Bdz$, on aura $dp = Bdx - Adz$. Donc 1°. connoiſſant l'équation de la ſurface Bm, on pourra déterminer les quantités q & p, à un coefficient près, comme dans l'*art.* 62.

2°. Les forces horizontales & verticales qui doivent être perdues à la ſurface CM devant en produire une ſeule, qui combinée avec la peſanteur, ſoit perpendiculaire à cette ſurface, on tirera de cette condition l'équation différentielle de la ſurface CM; & ſuppoſant qu'on connoiſſe la profondeur de la riviere en deux endroits C, M, les grandeurs connues des lignes AC, AP, PM, jointes avec l'équation de la Courbe CM, feront trouver le coefficient inconnu des quantités q & p.

REMARQUE I.

157. Le Problême eſt encore plus facile à réſoudre, quand on ne ſuppoſe pas que le fond Bm eſt donné, mais qu'on lui ſuppoſe une figure à volonté. Car ſoit $TV = u$, il n'y a qu'à prendre $\frac{dx}{du} = \frac{q}{p} =$

$$\sqrt{-1}\,\frac{\left[\Delta\left(x+\frac{u}{\sqrt{-1}}\right)+\Delta\left(x-\frac{u}{\sqrt{-1}}\right)\right]}{\Delta\left(x+\frac{u}{\sqrt{-1}}\right)-\Delta\left(x-\frac{u}{\sqrt{-1}}\right)}.$$

REMARQUE II.

158. Voilà le Problême réſolu généralement, mais il ſe préſente ici une obſervation à faire. Comme on ſuppoſe que le Fluide eſt parvenu à un état permanent, il eſt conſtant que la ſurface CM demeure toujours la même, & qu'ainſi tous les points de cette ſur-

face ſe meuvent le long de la ſurface même, deſorte que l'on a $\frac{q}{p} = \frac{dx}{dy}$ à la ſurface CM: or on a de plus $\frac{dx}{dy} = \frac{g - Aq - Bb}{Bq - Ap}$, il faut donc que $gp - Bpp = Bqq$, & $qdy = pdx$ ſoient à la fois l'équation de la Courbe AM.

Voici, ce me ſemble, comment on peut ſatisfaire à ces deux conditions. Suppoſons les points A, C donnés, auſſi-bien que la Courbe Bm: on prendra pour q & p, deux fonctions très-générales de x & de z avec un grand nombre de coefficiens indéterminés; on ſuppoſera la Courbe CM repréſentée par l'équation $gp - Bpp = Bqq$, les coefficiens reſtant toujours indéterminés: imaginant enſuite la Courbe CM tracée, & ayant pris dans les deux Courbes CM, Bm enſemble, autant de points qu'il y a de coefficiens à déterminer, on trouvera ces coefficiens par les équations $\frac{q}{p} = \frac{dx}{dy}$, $\frac{q}{p} = \frac{dx}{du}$, & $gp - Bpp = Bqq$.

REMARQUE III.

159. Au lieu de prendre l'origine des coordonnées en A, on peut, ſi on le juge plus commode, prendre cette origine en G; il faudra ſeulement alors mettre y au lieu de x, $-dy$ au lieu de dx, &c. tout le reſte demeurant comme auparavant.

REMARQUE IV.

160. Si on ne vouloit pas que la ſurface CM fut permanente, mais qu'elle changeât à chaque inſtant; en ce cas on ne devroit plus ſuppoſer $\frac{q}{p} = \frac{dx}{dy}$, mais à la place de cette équation on en auroit une autre; en effet, l'équation de la ſurface CM eſt en général $\frac{g - Aq - Bp}{Bq - Ap} = \frac{dx}{dy}$. Or la ſurface CM ſe changeant en am (Fig. 43), q devient $q + Aqdt + Bpdt$; p, $p - Apdt + Bqdt$; A, $A + \frac{dA}{dx} \times qdt + \frac{dA}{dz} \times pdt$; B, $B + \frac{dB}{dx} qdt + \frac{dB}{dz} pdt$: enfin dx devient $dx + dt \times (Adx + Bdy)$ & dy, $dy + dt\,(Bdx - Ady)$: d'où l'on tire $2A \frac{(g - Aq - Bp)}{Bq - Ap} dt + Bdt - Bdt \times \frac{(g - Aq - Bp)^2}{(Bq - Ap)^2} = d\left(\frac{g - Aq - Bp}{Bq - Ap}\right)$, en mettant pour dA, dq, dB, dp, leurs valeurs $qdt \times \frac{dA}{dx} + pdt \times \frac{dA}{dz}$, $Aqdt + Bpdt$, $qdt \times \frac{dB}{dx} + pdt \times \frac{dB}{dz}$, $- Apdt + Bqdt$; ainſi on aura une équation, qui, en ſuppoſant q & p priſes à volonté avec des coefficiens indéterminés, ne renfermera que des quantités finies, puiſqu'on pourra faire diſparoître dt qui ſe trouve à tous les termes;

on ſe ſervira de cette équation pour déterminer les coefficiens de q & de p par le moyen des deux Courbes CM, Bm. Je ne fais qu'indiquer ici la Méthode, les détails me meneroient trop loin.

Au reſte, je dois avertir ici, qu'il m'eſt tombé entre les mains il y a quelque temps, une Théorie manuſcrite ſur le courant des rivieres; la Méthode que l'Auteur employe, quoique moins ſimple, ce me ſemble, & moins exacte que la mienne, a néanmoins quelque choſe de commun avec elle; mais je ſuis en état de prouver que j'avois trouvé les Principes ſur leſquels eſt appuyée ma Méthode, dès la fin de l'année 1749, c'eſt-à-dire plus d'un an avant que le Mémoire dont il s'agit me tombât entre les mains, & plus de huit mois avant qu'il pût y tomber. Il ne ſeroit pas même impoſſible que la Méthode expoſée dans mon Ouvrage fut inconnue à l'Auteur du Mémoire dont je parle, & ne l'eût aidé dans ſes Recherches ſur le courant des rivieres.

APPENDICE.

CETTE Appendice contiendra des réflexions ſur les loix de l'Equilibre des Fluides, que je n'ai pas cru devoir inſérer dans le corps de l'Ouvrage, pour ne pas interrompre la ſuite des matiéres, mais qui me ſemblent dignes d'être ſoumiſes au jugement des Savans; & qui ont d'ailleurs un rapport aſſez immédiat avec le ſujet de cet Ouvrage.

Réflexions ſur les loix de l'Equilibre des Fluides.

161. L'équation $\frac{d(\partial Q)}{dx} = \frac{d(\partial R)}{dy}$ trouvée *art.* 19, peut encore l'être par une autre Méthode, que je vais expoſer ici, parce qu'elle me donnera lieu de faire quelques obſervations aſſez importantes ſur les loix de l'Equilibre des Fluides.

Soient M, N, m, O, (Fig. 44) quatre points du Fluide, & tels, 1°. que les forces qui ſollicitent les points M, m, ſoient dirigées ſuivant les lignes MN, mO perpendiculaires à Mm; 2°. que MN ſoit à mO, comme la force ſuivant mO multipliée par la denſité en m, eſt à la force ſuivant MN multipliée par la denſité en M: il eſt viſible que dans le Canal rectiligne infiniment petit $MNOm$, les petites colomnes MN, mO ſeront en équilibre entr'elles. Ainſi les petits Canaux

Mm, NO, doivent être auſſi en équilibre entr'eux. Or comme tous les points du Canal MN ſont ſollicités (*hyp.*) par des forces perpendiculaires à MN, le poids de ce Canal eſt nul. Donc le poids du Canal NO doit auſſi être nul, c'eſt-à-dire que les forces qui agiſſent ſur les points N, O, doivent être perpendiculaires à NO aux points N, O. Or je vais démontrer, que pour que cette condition ait lieu, il faut que $\frac{d(Q\delta)}{dx} = \frac{d(R\delta)}{dy}$.

Soit $Mm = ds$, la force ſuivant MN ſera $\sqrt{[RR + QQ]}$, & on pourra ſuppoſer $MN = \frac{d\zeta}{\delta\sqrt{[RR+QQ]}}$, $d\zeta$ étant une quantité ~~déterminée~~, mais infiniment petite. Maintenant ſoit la force en m ſuivant $mO = \sqrt{[R'R' + Q'Q']}$, on aura (*hyp.*) $mO \times \delta' \times \sqrt{[R'R' + Q'Q']} = MN \times \delta \times \sqrt{[RR + QQ]}$. Donc $mO = \frac{d\zeta}{\delta'\sqrt{[R'R'+Q'Q']}}$; & menant NR parallèle à Mm, on aura $RO = \frac{d\zeta}{\delta'\sqrt{[R'R'+Q'Q']}} - \frac{d\zeta}{\delta\sqrt{[RR+QQ]}}$: or $R' = R + Pp \times \frac{dR}{dx} - KM \times \frac{dR}{dy}$ (j'écris $-KM$ au lieu de KM, parce que AP (x) croiſſant, PM (y) diminue); de plus, Pp ou $mK = \frac{Mm \times Q}{\sqrt{[RR+QQ]}}$: car à cauſe des triangles ſemblables MmK, MVN, on a $mK : Mm :: VN :$

$MN :: Q : \sqrt{[RR+QQ]}$. Donc $Pp = \frac{Q\,ds}{\sqrt{[RR+QQ]}}$:
on trouvera de même $KM = \frac{R\,ds}{\sqrt{[RR+QQ]}}$: donc
$R' = R + \frac{dR}{dx} \times \frac{Q\,ds}{\sqrt{[RR+QQ]}} - \frac{dR}{dy} \times \frac{R\,ds}{\sqrt{[RR+QQ]}}$: de
plus, $\delta' = \delta + \frac{d\delta}{dx} \times (\frac{Q\,ds}{\sqrt{[RR+QQ]}}) + \frac{d\delta}{dy} \times (-\frac{R\,ds}{\sqrt{[RR+QQ]}})$:
enfin, on aura par la même raiſon $Q' = Q + \frac{dQ}{dx} \times$
$\frac{Q\,ds}{\sqrt{[RR+QQ]}} + \frac{dQ}{dy} \times \frac{-R\,ds}{\sqrt{[RR+QQ]}}$. Donc $\frac{1}{\delta'\sqrt{[R'R'+Q'Q']}} =$
$\frac{1}{\delta\sqrt{[RR+QQ]}} + \frac{1}{\delta(RR+QQ)^{\frac{1}{2}}} \times (-\frac{R\,dR}{dx} \times \frac{Q\,ds}{\sqrt{[RR+QQ]}}$
$+ \frac{R\,dR}{dy} \times \frac{R\,ds}{\sqrt{[RR+QQ]}} - \frac{Q\,dQ}{dx} \times \frac{Q\,ds}{\sqrt{[RR+QQ]}} + \frac{Q\,dQ}{dy} \times$
$\frac{R\,ds}{\sqrt{[RR+QQ]}}) - \frac{1}{\delta\delta\sqrt{[RR+QQ]}} \times (\frac{d\delta}{dx} \times \frac{Q\,ds}{\sqrt{[RR+QQ]}} +$
$\frac{d\delta}{dy} \times \frac{-R\,ds}{\sqrt{[RR+QQ]}})$. Donc puiſque RO a été trouvée
ci-deſſus $= d\zeta\,(\frac{1}{\delta'\sqrt{[R'R'+Q'Q']}} - \frac{1}{\delta\sqrt{[RR+QQ]}})$;
on aura $\frac{RO}{RN}$ c'eſt-à-dire l'angle $ONR = \frac{RO}{ds} =$
$\frac{d\zeta}{\delta(RR+QQ)^{\frac{3}{2}}} \times (-\frac{RQ\,dR}{dx} + \frac{RR\,dR}{dy} - \frac{QQ\,dQ}{dx} + \frac{QR\,dR}{dy})$
$- \frac{d\zeta}{\delta\delta(RR+QQ)} \times (\frac{Q\,d\delta}{dx} - \frac{R\,d\delta}{dy})$.

Maintenant;

Maintenant, ſoient Mm, $M\mu$ deux côtés égaux & contigus de la Courbe QMm, NR & Nr paralléles à ces côtés; & ſoit prolongée MN en G; il eſt évident que MN perpendiculaire (*hyp.*) à la Courbe MN en M, diviſe en deux également l'angle μMm. Donc elle diviſera auſſi en deux également l'angle RNr: de plus, ſoit μo à MN comme la force $V[RR+QQ]$ ſuivant MN, multipliée par la denſité en M, eſt à la force ſuivant μo, multipliée par la denſité en μ; on aura pour ro la même valeur que pour RO, mais négative. Donc l'angle $RNO = rNo$. Mais nous avons démontré que la force qui ſollicite le point N doit être perpendiculaire à la Courbe ONo: donc ſi Ng eſt la direction de cette force, on aura l'angle $ONg = gNo$; $ONo = RNr$, & $\frac{RNr}{2} = \frac{ONo}{2}$, c'eſt-à-dire $RNG = \frac{ONo}{2} = ONg$. Donc $RNG = ONg$: donc $GNg = ONR$. Or $\frac{Q}{R}$ étant la tangente de l'angle NMV, & $\frac{Q'}{R'}$ celle de l'angle FNg, ſoit $Q' = Q + k$ & $R' = R + m$, la différence des angles NMV, FNg, c'eſt-à-dire l'angle GNg, ſera $= \frac{Rk - Qm}{RR+QQ}$, comme le ſavent les Geométres; (car ſi $\frac{y}{x}$ eſt la tangente d'un angle, la différentielle de cet an-

gle ſera $\frac{x\,dy - y\,dx}{xx+yy}$) : or on a ici $k = \frac{dQ}{dy} \times VN +$ $\frac{dQ}{dx} \times MV = \frac{dQ}{dy} \times \frac{d\zeta}{\delta V[RR+QQ]} \times \frac{Q}{V[RR+QQ]} + \frac{dQ}{dx} \times$ $\frac{d\zeta}{\delta V[RR+QQ]} \times \frac{R}{V[RR+QQ]}$; & $m = \frac{dR}{dx} \times \frac{d\zeta}{\delta V[RR+QQ]} \times$ $\frac{R}{V[RR+QQ]} + \frac{dR}{dy} \times \frac{d\zeta}{\delta V[RR+QQ]} \times \frac{Q}{V[RR+QQ]}$.

Donc l'angle $GNg = \frac{d\zeta}{\delta(RR+QQ)^2} \times (\frac{RR\,dQ}{dx} +$ $\frac{RQ\,dQ}{dy} - \frac{QR\,dR}{dx} - \frac{QQ\,dR}{dy})$. Donc puiſque nous venons de prouver que l'angle $GNg = ONR$, & que nous avons trouvé ci-deſſus la valeur de l'angle ONR, nous aurons, en comparant ces deux valeurs, l'équation $-(\frac{RR+QQ}{\delta}) \times (\frac{Q\,d\delta}{dx} - \frac{R\,d\delta}{dy}) + \frac{RR\,dR}{dy} -$ $\frac{QQ\,dQ}{dx} = \frac{RR\,dQ}{dx} - \frac{QQ\,dR}{dy}$: donc en tranſpoſant & multipliant par $\frac{\delta}{V[RR+QQ]}$, il vient $\frac{\delta\,dQ}{dx} + \frac{Q\,d\delta}{dx} =$ $\frac{\delta\,dR}{dy} + \frac{R\,d\delta}{dy}$, c'eſt-à-dire $\frac{d(dQ)}{dx} = \frac{d(\delta R)}{dy}$.

SCHOLIE I.

162. Dans la ſeconde Méthode par laquelle nous avons démontré (*art. précédent*) l'équation $\frac{d(Q\delta)}{dx} =$

$\frac{d(R\delta)}{dy}$, il ſe préſente une obſervation aſſez eſſentielle.

Si nous ſuppoſons avec les Auteurs qui ont juſqu'à préſent traité cette matiére, que la denſité ſoit conſtante dans chaque couche QMm, ONo en particulier, mais qu'elle varie comme on voudra d'une couche à l'autre, on ne trouvera pour la loi de l'équilibre que la ſeule équation $\frac{d(Q)}{dx} = \frac{d(R)}{dy}$, c'eſt-à-dire la même qu'on trouveroit, ſi la denſité δ étoit conſtante par-tout. Néanmoins, ſi dans ce même cas où la denſité n'eſt pas uniforme, on cherchoit par la Méthode de l'*article* 19 l'équation qui réſulte de l'équilibre, on trouveroit $\frac{d(Q\delta)}{dx} = \frac{d(R\delta)}{dy}$: or comment ces deux équations peuvent-elles avoir lieu à la fois dans le cas préſent ?

Je réponds que la denſité étant conſtante dans chaque couche (*hyp.*), on aura $dx \times \frac{d\delta}{dx} + dy \times \frac{d\delta}{dy} = 0$: donc à cauſe de $dy = -\frac{R\,dx}{Q}$, on trouvera $\frac{Q\,d\delta}{dx} - \frac{R\,d\delta}{dy} = 0$. D'où l'équation $\frac{d(\delta Q)}{dx} = \frac{d(\delta R)}{dy}$ ſe réduit à celle-ci $\frac{\delta\,dQ}{dx} = \frac{\delta\,dR}{dy}$, c'eſt-à-dire $\frac{dR}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Mais il faut remarquer que l'équation $\frac{dR}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ n'a lieu dans ce cas

que pour les couches QMm, ONo auxquelles la direction de la pesanteur est perpendiculaire, au lieu que l'équation $\frac{d(\delta Q)}{dx} = \frac{d(\delta R)}{dy}$ a lieu généralement pour telle couche qu'on voudra, perpendiculaire ou non à la direction de la pesanteur. D'où je conclus que la Méthode de l'*art.* 19 est la seule vraîment générale pour déterminer les loix de l'équilibre des Fluides. Surquoi voyez la *Théorie de la Terre, par M. Clairaut.*

SCHOLIE II.

163. Au reste, j'ai supposé dans l'*art.* 161 la densité variable, même dans chaque Courbe en particulier QMm, ONo, & je ne crois pas que cette supposition ait rien d'absurde. Car pourvu que l'équation $\frac{d(\delta Q)}{dx} = \frac{d(R\delta)}{dy}$ ait lieu, & que la force de la pesanteur soit perpendiculaire à la premiere couche QMm, la masse du Fluide sera toujours en équilibre, quelle que soit la loi de la densité dans chaque couche en particulier. Je crois donc pouvoir avancer en général, qu'une masse de Fluide hétérogene quelconque sera toujours en équilibre, pourvu que l'équation précédente soit observée. Il est vrai que l'expérience semble contraire à cette assertion: car elle nous fait voir que des Fluides de différente densité ne peuvent se mêler ensemble. Mais la raison qui empêche ce mélange, c'est que la gravité étant *la même* pour tous ces Fluides,

l'équation $\frac{d(Q\delta)}{dx} = \frac{d(R\delta)}{dy}$ ne ſauroit avoir lieu tant qu'ils ſont mêlés.

SCHOLIE III.

164. Il faut encore remarquer que l'équation $\frac{d(Q\delta)}{dx} = \frac{d(R\delta)}{dy}$ n'a lieu qu'en ſuppoſant δ, R & Q des fonctions variables x & y. Or je ne vois point de raiſon de ſe borner à cette hypotheſe. En effet, pour faciliter le calcul, imaginons que la denſité δ ſoit conſtante par-tout ; pourquoi ne ſuppoſerions-nous pas R & Q des fonctions non-ſeulement de x & de y, mais encore d'une troiſiéme variable ζ, repréſentée par exemple, par quelque ligne RQ, Rq, qui ſeroit variable pour les différentes couches QMm, ONo, & conſtante pour la même couche ? Cela poſé, on trouveroit pour l'angle ONR la même valeur que ci-deſſus (*art.* 161) ; mais dans l'expreſſion de l'angle GNg, il faudroit augmenter k de la quantité $d\zeta \times \frac{dQ}{d\zeta}$, & m de la quantité $\frac{dR}{d\zeta} \times d\zeta$. C'eſt pourquoi la valeur trouvée ci-deſſus de l'angle GNg ſeroit augmentée de $\frac{d\zeta}{RR + QQ} \times \left(\frac{R\,dQ}{d\zeta} - \frac{Q\,dR}{d\zeta}\right)$: comparant donc les deux

valeurs des angles GNg, ONR, on auroit $\frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy} + \frac{RdQ}{d\zeta} - \frac{QdR}{d\zeta} = 0$.

Maintenant, ſoient R & Q des fonctions de x & de ζ ſeulement, enſorte que $\frac{dR}{dy} = 0$, on aura $\frac{dQ}{dx} + \frac{RdQ}{d\zeta} - \frac{QdR}{d\zeta} = 0$: donc prenant pour Q une fonction quelconque de x & de ζ, on aura facilement R.

Car on trouvera $\frac{dQd\zeta}{QQdx} = (\frac{QdR}{d\zeta} - \frac{RdQ}{d\zeta})\frac{d\zeta}{QQ}$. Donc traitant x comme conſtante, on aura $\int \frac{dQd\zeta}{QQdx} = \frac{R}{Q} + \xi$, ξ étant une fonction quelconque de x ; & $\int \frac{dQd\zeta}{QQdx}$ ſera l'intégrale de $\frac{dQd\zeta}{QQdx}$, en traitant ζ comme variable, & x comme conſtante. Donc on aura facilement R.

Comme la force R eſt ſuppoſée perpendiculaire à la Courbe en Q, q, &c. il faut avoir ſoin de prendre la fonction Q, telle que dans tous les points Q, q, &c. de la ligne RQ cette fonction ſoit $= 0$. Donc menant AB perpendiculaire à AP & RQ, & faiſant $RB = a$, Q doit être une fonction de x, a, ζ, telle qu'en faiſant $x + a = \zeta$, cette fonction devienne $= 0$; ce qui peut ſe trouver facilement d'une infinité de maniéres.

Il eſt aiſé de voir que cette derniere formule $\frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy} + \frac{R\,dQ}{d\zeta} - \frac{Q\,dR}{d\zeta} = 0$, dans laquelle la denſité δ eſt ſuppoſée conſtante, eſt plus générale que la formule $\frac{dR}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, trouvée dans l'*art.* 162 pour le même cas.

Cependant les équations $\frac{dR}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ & $\frac{d(\delta Q)}{dx} = \frac{d(\delta R)}{dy}$ ſont les ſeules dont nous nous ſoyons ſervis dans cet Ouvrage, parce que ce ſont les ſeules auxquelles le calcul paroiſſe pouvoir s'appliquer dans la recherche de la réſiſtance des Fluides.

SCHOLIE IV.

165. Il eſt viſible par le Scholie précédent, que toutes les parties de Fluide contenues dans une couche quelconque ONo ſont également preſſées par le Fluide qui eſt au-deſſus, puiſque le poids des colomnes MN, mO, μo, eſt le même. Ainſi dès qu'il y a équilibre dans le Fluide, chaque couche intérieure ONo, à laquelle la peſanteur eſt perpendiculaire, eſt également preſſée en tous ſes points. Ne peut-on pas conclure de-là avec aſſez de vraiſemblance, que la preſſion doit auſſi être égale dans tous les points de la premiere couche ou ſurface extérieure $mM\mu$? En ce cas les forces ſuivant μo, MN, mO devroient être égales entr'elles: mais dans les couches inférieu-

res, il ne ſeroit pas néceſſaire que la force inhérente à chaque particule fût la même, il ſuffiroit que chaque particule fut également preſſée par le poids de la colomne ſupérieure.

Outre cela, ſi on conſidére les particules du Fluide dans la couche $m M \mu$ comme de petits Globules qui ſe preſſent mutuellement, & qu'on faſſe abſtraction des couches inférieures, on peut trouver aiſément par les Principes de ſtatique, que pour que ces Globules ſoient en équilibre, il faut qu'en un point quelconque M la force qui agit ſuivant MN ſoit en raiſon inverſe du rayon de la développée en M. Si cette proportion avoit lieu, & qu'outre cela la force en M dût être conſtante, ſelon ce qu'on vient d'obſerver, il s'enſuivroit que dans la ſurface extérieure $m M \mu$ tous les rayons oſculateurs devroient être égaux; & qu'ainſi un Fluide ne pourroit être en équilibre, à moins que ſa ſurface extérieure ne fût plane ou ſphérique.

Cependant on peut démontrer par le raiſonnement ſuivant, que la ſurface d'un Fluide en équilibre n'eſt pas aſſujettie à l'une ou l'autre de ces deux figures.

Imaginons un Fluide dont les parties ſoient en mouvement: il eſt évident que dans une infinité de cas ſa ſurface ne ſera ni plane ni ſphérique. Soit donc $OPQR$ (Fig. 46) cette ſurface dans un inſtant quelconque, P, Q, deux points ou corpuſcules placés ſur cette ſurface, dont les viteſſes ſoient u, v, & que ces viteſſes dans l'inſtant ſuivant ſoient changées en u', v'; enfin,

enfin ; ſoient regardées les viteſſes u, v, comme compoſées des viteſſes u', v'' ; v', v'' ; il eſt évident (*article* 1) que les points P & Q, s'ils étoient ſollicités à ſe mouvoir avec les ſeules viteſſes u'', v'', reſteroient en équilibre. Donc comme les viteſſes u, v', v, v' ſont données, ou ſuppoſées données, il s'enſuit qu'on peut toujours trouver des forces qui tiendroient les points P, Q, en équilibre ſur la ſurface Fluide $OPQR$; il en eſt de même des autres points. Donc quelque figure qu'ait la ſurface $OPQR$ d'un Fluide, il y a toujours un ſyſtême poſſible de forces qui la tiendroient en équilibre.

De-là réſulte au moins cette premiere conſéquence, que le principe de l'égalité des forces à la ſurface extérieure, & celui de la proportionalité de ces forces avec les rayons oſculateurs, ne ſauroient être vrais tous deux. Au reſte, il faut convenir que ni l'un ni l'autre n'eſt appuyé ſur des fondemens bien ſolides. Car en premier lieu, pour que le principe de la proportionalité des forces avec les rayons oſculateurs fût vrai, il faudroit avoir démontré, non-ſeulement que les particules des Fluides ſont des Globules, ce qui eſt fort incertain ; mais encore que l'effort de ces Globules agit ſeulement ſur ceux qui leur ſont contigus dans la même couche, & nullement ſur ceux qui ſont au-deſſous ; ce qui n'eſt pas vrai. A l'égard du principe de l'égalité des forces, il eſt évident que s'il étoit admis, toutes les Théories qu'on a données de la Fi-

gure de la Terre, en la conſidérant comme un Fluide, & en ayant égard à l'attraction des parties & à la rotation de l'Axe, devroient être regardées comme fauſſes. Ce que je ne prétends pas décider; mais je veux ſeulement faire voir, que ſi on rejette le principe de l'égalité de preſſion à la ſurface extérieure, il faut néceſſairement convenir que l'égalité de preſſion des couches intérieures, n'eſt, pour ainſi dire, qu'une propriété accidentelle, & nullement une loi fondamentale de l'équilibre des Fluides.

Auſſi *M. Maclaurin*, le premier qui ait parlé de ces couches *ONo* (Fig. 49) auxquelles la peſanteur eſt perpendiculaire, & qu'il appelle *ſurfaces de niveau*, n'a point déduit la loi de l'équilibre, de l'égalité de preſſion de ces ſurfaces. Mais après avoir pris dans l'intérieur du Fluide une colomne *Pp* de direction quelconque, dont le poids ſoit égal à celui de la colomne *AO*, il ſe contente d'en déduire par ſimple Corollaire, que la ſurface *Op*, paſſant par tous les points *p* & par le point *O*, ſera une *ſurface de niveau*. Nous avons cru devoir ſuivre entiérement ſa Méthode à cet égard.

SCHOLIE V.

166. Au reſte, la même Méthode par laquelle nous avons démontré que la ſurface extérieure d'un Fluide peut toujours être en équilibre avec un ſyſtême de forces convenable, peut ſervir auſſi à démontrer, qu'un Flui-

de hétérogene, ou pluſieurs Fluides quelconques de différentes denſités, peuvent toujours être en équilibre, de quelque maniére que ces Fluides ſoient mêlés & diſpoſés, pourvu qu'on ſuppoſe un ſyſtême convenable de forces. Il ne faut, pour s'en convaincre, qu'imaginer un Fluide hétérogene dont les parties ſoient mêlées comme on voudra, ſuppoſer enſuite que ces parties ayent un mouvement quelconque, & appliquer ici le raiſonnement de l'*art.* 165.

Nous avons donc eu raiſon de ſuppoſer que dans un Fluide en équilibre, chaque couche de niveau n'eſt pas néceſſairement d'une denſité uniforme dans toute ſon étendue.

SCHOLIE VI.

167. Nous venons de faire voir qu'il n'eſt pas néceſſaire que les couches de niveau ſoient d'une denſité uniforme dans toute leur étendue. Nous allons faire voir préſentement, que ſi un Fluide eſt compoſé de différentes couches dont chacune ſoit d'une denſité uniforme, il n'eſt point néceſſaire pour l'équilibre, que ces couches ſoient des couches de niveau.

Pour le démontrer, ſoit une maſſe de Fluide *DAEF*, (Figure 47) dont les parties ſoient animées par des forces quelconques, il eſt évident que toutes les forces qui agiſſent ſur chaque particule *P* peuvent ſe réduire à deux, dont l'une agiſſe ſuivant *PC*, l'autre ſuivant une perpendiculaire à *PC*. Suppoſons, pour ſimplifier.

le calcul, que cette ſeconde force ſoit très-petite par rapport à la premiere ; chacune des couches $EADF$ différera très-peu d'un cercle. Cela poſé :

Soit $CA = r$, l'angle $ACP = z$, $CP = r + \alpha\varrho Z$, α étant une conſtante fort petite, & qui ſoit la même pour toutes les couches, ϱ une fonction de CA (r) & Z une fonction de l'angle z, ou plûtôt de ſon Sinus &c. il eſt évident que $\frac{P\pi}{P\pi} = \frac{\alpha\varrho dZ}{r dz}$. Soit de plus, la force en P ſuivant $PC = \varrho' + \alpha\varrho'' Z'$ (ϱ', ϱ'' étant des fonctions de r, & Z' une fonction de z) & la force perpendiculaire à $CP = \alpha\varrho''' Z''$; il eſt évident que la force qui agit ſuivant PC peut ſe décompoſer en deux, l'une perpendiculaire à la couche APD en P, l'autre dans la direction même de cette couche, & que cette derniere ſera $\varrho' \times \frac{\alpha\varrho dZ}{r dz}$: à l'égard de la force $\alpha\varrho''' Z''$ perpendiculaire à PC, la force qui en réſulte ſuivant PP' eſt auſſi $\alpha\varrho''' Z''$, parce que $P\pi$ & PP' ne different que d'une quantité infiniment petite du 3e. ordre. Donc la force ſuivant $P'P$ eſt $(\alpha\varrho\varrho' \frac{dZ}{r dz} - \alpha\varrho''' Z'')$; & cette fonction étant multipliée par $P'P$ ou $r dz$ & par la denſité de la couche APD, que je nomme δ, on aura pour la force de la petite particule $P'P$ l'expreſſion $\alpha dz (\delta\varrho\varrho' \frac{dZ}{dz} - \delta r\varrho''' Z'')$: donc la force de $P'P$ moins celle de $P'P = \alpha dz\, d(\delta\varrho\varrho \frac{dZ}{dz} - \delta r\varrho''' Z'')$.

Maintenant, la force ſuivant CP eſt $\varrho' + \alpha\varrho'' Z'$, & l'on a $Pp = dr + \alpha Z d\varrho$; donc à cauſe que la denſité eſt δ, on aura la force de pP ſuivant $pP = \delta(\varrho' + \alpha\varrho'' Z') \times (dr + \alpha Z d\varrho)$: donc la force de $p'P'$ moins celle de $pP = \alpha\delta dr \cdot \frac{\varrho'' dz}{dz} + \alpha\delta\varrho' d\varrho \cdot \frac{dZ}{dz}$.

Or (*article* 17) il faut que le Canal $pp'P'P$ ſoit en équilibre, c'eſt-à-dire que la force de $p'p$ — celle de $P'P$, ſoit égale à la force de $p'P'$ moins celle de pP: donc $\frac{dZ}{dz} d(\delta\varrho\varrho') - Z'' d(\delta r\varrho''') = \delta\varrho'' dr \frac{dZ}{dz} + \delta\varrho' d\varrho \cdot \frac{dZ}{dz}$, équation générale de l'équilibre.

Pour que les couches fuſſent de niveau, il faudroit que la force ſuivant $P'P$ fut égale à zero, c'eſt-à-dire que $\varrho\varrho' \frac{dz}{rdz} - \varrho''' Z''$ fût $= 0$; d'où il s'enſuit, qu'en faiſant $\frac{dz}{dz} = \pm Z''$, comme il eſt néceſſaire, on auroit $d(\delta\varrho\varrho') \mp d(\delta r\varrho''') = 0$. Or cette équation eſt beaucoup moins générale que la précédente; cela eſt aiſé à voir: mais pour le prouver, ſuppoſons d'abord $\frac{dz}{dz} = \pm Z'' = \pm \frac{dz'}{dz}$, l'équation précédente donnera $d(\delta\varrho\varrho' \mp \delta r\varrho''') = \pm d\varrho'' dr \pm \delta\varrho' d\varrho$, qui ne ſe réduit point à $\delta\varrho\varrho' \mp \delta\varrho''' r = 0$ que dans le cas où $\varrho'' = \mp \frac{\varrho' d\varrho}{dr}$,

En ſecond lieu, ſuppoſons $d(\delta\varrho\varrho') - \delta\varrho' d\varrho = \pm\mp \delta\varrho'' = \mp d(\delta r\varrho''')$, & l'on aura $\frac{dZ}{dz} \pm Z'' = \pm \frac{dZ'}{dz}$; ce qui donne encore une autre équation différente de $d(\delta\varrho\varrho' \mp \delta r\varrho''') = 0$.

SCHOLIE VII.

168. Il faut bien remarquer, au reſte, que dans le Scholie précédent, on a ſuppoſé que le Fluide étoit compoſé d'une infinité de couches dont les denſités augmentent ou diminuent par degrés inſenſibles, ou plûtôt infiniment petits; de maniere que deux couches infiniment proches de ce Fluide ne différent qu'infiniment peu de denſité.

Suppoſons maintenant que le Fluide ſoit compoſé de pluſieurs couches différemment denſes, & dont la différence de denſités ſoit finie; je dis que le Fluide pourra encore être en équilibre, quoique les ſurfaces qui ſéparent ces différentes couches ne ſoient point de niveau. En effet, ſoit $AFEB$ (Fig. 48) un vaſe dans lequel ſoit renfermée une liqueur homogene ſtagnante, dont la denſité ſoit δ, & dont les parties ſoient animées par la gravité naturelle g. Ayant tiré une ligne oblique quelconque DC, imaginons que la partie $ADCB$ devienne de la denſité δh, & que la force qui anime chaque corpuſcule de cette partie devienne $\frac{g}{h}$; il eſt évident que le Fluide reſtera en équilibre,

& cependant la ſurface DC qui ſépare les parties $ADCB$, $DCEF$, dont les denſités ſont entr'elles comme h eſt à 1, n'eſt point de niveau. Dans cette hypotheſe, ſi on mene deux lignes dc, dc paralléles à DC, l'une au-deſſus, l'autre au-deſſous, le poids des deux Canaux $DCcd$ ſera le même, quoique le Fluide ſoit de différente denſité dans l'un & dans l'autre, parce que la peſanteur eſt en raiſon inverſe de la denſité.

Donc quand un Fluide eſt compoſé de couches de différentes denſités, il n'eſt point néceſſaire pour l'équilibre que les couches ſoient de niveau. On nous objectera peut-être, que c'eſt admettre une loi trop peu naturelle & trop bizarre, que de ſuppoſer que la peſanteur d'une particule de Fluide puiſſe être en raiſon inverſe de ſa denſité; puiſque dans cette hypotheſe deux points infiniment proches Q, q, ſeroient animés par des forces dont la différence ſeroit finie. Je réponds à cela, 1°. que cet inconvénient prétendu n'a pas lieu dans le cas où les couches infiniment proches different infiniment peu de denſité, puiſque (Scholie 5) les forces qui agiſſent ſur un point P, peuvent alors être réglées par une fonction ſeule de ſa diſtance à C, & de l'angle ACP, fonction dans laquelle la denſité n'entre point. 2°. qu'il ne me paroît pas plus abſurde de ſuppoſer, que deux points infiniment proches Q & q ſoient animés par des forces accélératrices dont la différence ſoit finie, que de ſuppoſer que les denſités de ces points Q, q, aient entr'elles un rapport

ſini : or cette derniere ſuppoſition n'a jamais choqué perſonne. 3°. D'ailleurs, il eſt bien vrai que ſi la peſanteur dépend de la poſition ſeule des corpuſcules, les points infiniment proches Q, q, ſeront animés par des forces qui ne différeront qu'infiniment peu l'une de l'autre. Mais pourquoi s'aſtreindre à ſuppoſer que la force ſollicitatrice ne dépende que de la poſition des particules ? Si deux Fluides contigus, & de différente denſité, ſont en mouvement, ne ſe peut-il pas faire que les forces accélératrices qui les animent ſoient inégales ? Or cela poſé, comme la force de gravité eſt la même pour les deux Fluides, il s'enſuit que les forces qui doivent être détruites, ſeront différentes.

Au reſte il faut obſerver, que pour que chacune des couches $EADF$ (Fig. 47) ſoit à peu près un cercle, il faut que Z, Z', Z'', ſoient des fonctions du Sinus de l'angle ACP, afin que la valeur de ces quantités demeure la même lorſqu'on augmentera l'angle z, ſoit de la circonférence, ſoit de pluſieurs fois la circonférence.

SCHOLIE VIII.

169. Je remarquerai à cette occaſion, qu'il me ſemble qu'on n'a point encore réſolu d'une maniére aſſez générale le Problême de la figure de la Terre, dans l'hypotheſe que l'attraction ſoit en raiſon inverſe du quarré des diſtances, & que la Terre ſoit compoſée d'un

d'un amas de Fluides de différentes denſités. En effet, ſoit CA (Fig. 47) $= r$, $CP = r + r\varrho zz$ (en nommant z le Sinus de l'angle ACP, & prenant la couche $EADF$ pour une Ellipſe) R la denſité de cette Ellipſe, c la circonférence dont le rayon eſt 1, φ le rapport de la force centrifuge à la peſanteur ſous l'Equateur, A ce que devient $\int R\,r\,r\,dr$, & F ce que devient $\int R\,d\varrho$ lorſque $2r$ devient l'Axe de la terre, on trouvera 1°. que la force au point P ſuivant $P\pi$, eſt $2z\sqrt{[1-zz]} \times$

$$\left[\frac{2c\varrho\int R\,r\,r\,dr}{rr} - \frac{2c\int R\,d(r^5\varrho)}{5r^4} - \frac{2crF}{5} + \frac{2cr\int R\,d\varrho}{5} - cr\,A\varphi\right]:$$

il faudra multiplier cette force par $P\pi = \frac{r\,dz}{\sqrt{[1-zz]}}$ & par la denſité R, pour avoir la force ſuivant $P\pi$; par conſéquent la différence des forces ſuivant pp', & PP' eſt

$$2z\,dz\,d\left(\frac{2cR\varrho r}{rr}\int R\,r\,r\,dr - \frac{2cRr}{5r^4}\int R\,d(r^5\varrho) - \frac{2cRrrF}{5} + \frac{2cRrr\int R\,d\varrho}{5} - R\,crr\,A\varphi\right).$$

2°. Il faut maintenant pour avoir l'équation du Sphéroide, égaler cette quantité au poids de $p'P$ moins celui de pP, qui eſt (*a*) $2z\,dz\,dr\left(\frac{R\,d(r\varrho)}{dr} \times \frac{2c\int R\,r\,r\,dr}{r^2} -\right.$

(*a*) Ces formules ſe trouvent toutes calculées dans l'Ouvrage de *M. Clairaut* ſur la Fig. de la Terre : on peut y parvenir par différentes Méthodes.

$\frac{4ceR}{r^2} \times \int Rrrdr + \frac{6cR\int Rd(r^5\varrho)}{5r^4} - \frac{4cRr}{5} \times (F - \int Rd\varrho)$
$- 2cR \times A\varphi r)$.

Soit donc $\frac{2ce\int Rrrdr}{rr} - \frac{2c\int Rd(r^5\varrho)}{5r^4} - \frac{2crF}{5} +$
$\frac{2cr\int Rd\varrho}{5} - crA\varphi = 2Kc$, K exprimant une variable indéterminée, on aura 1°. en multipliant cette derniere équation par $5r^4$, & en différentiant deux fois, l'équation ſuivante; $ddq - qdr^2(\frac{6}{rr} - \frac{2Rr}{\int Rrrdr}) +$
$\frac{2Rrrdr}{\int Rrrdr}dq = \frac{r^2}{\int Rrrdr} \times d(\frac{d(Kr^4)}{r^4})$.

2°. De plus, l'équation de l'équilibre donnera $2zdz\,d(RrK) \times 2c = 2zdz\,d[\frac{d(rq)}{dr} \times \frac{2cR\int Rrrdr}{r^2} -$
$\frac{8cRq\int Rrrdr}{r^2} + \frac{2cR\int Rd(r^5p)}{r^4} + 4cRK]$, qui étant diviſée par $2cR$, & multipliée par r^4, puis différentiée, donne $ddq - qdr^2(\frac{6}{rr} - \frac{2Rr}{\int Rrrdr}) + \frac{2Rrrdrdq}{\int Rrrdr} =$
$\frac{2}{r^3\int Rrrdr} \times [d(\frac{r^4d(KRr)}{R}) - 2drd(Kr^4)]$. Comparant cette équation différentielle du ſecond degré avec la précédente, & ôtant ce qui ſe détruit, il vient $\frac{1}{r^3\int Rrrdr} \times d(\frac{r^5KdR}{R}) = 0$, ou $\frac{r^5KdR}{R} = Mdr$, M étant une conſtante quelconque. Donc l'équation générale

eſt $dd\varrho = \varrho dr^2 \left(\frac{6}{rr} - \frac{2Rr}{\int Rrrdr}\right) - \frac{2Rrrdrd\varrho}{\int Rrrdr} + \frac{r^2}{\int Rrrdr} \times$

$d\left[d\left(\frac{MRdr}{rd\varpi}\right) \times \frac{1}{rr}\right]$.

SCHOLIE IX.

170. Si $M = 0$, alors on a $dR = 0$, ou $K = \sigma$, c'eſt-à-dire la denſité conſtante, ou bien la force ſuivant $P\pi$ nulle, & par conſéquent la couche quelconque $EADF$ de niveau; l'équation du Sphéroide eſt alors $dd\varrho = \varrho dr^2 \left(\frac{6}{rr} - \frac{2Rr}{\int Rrrdr}\right) - \frac{2Rrrdrd\varrho}{\int Rrrdr}$ qui eſt la ſeule qu'on ait trouvée juſqu'ici, mais qui n'eſt pas auſſi générale que la précédente.

On aura encore $dd\varrho = \varrho dr^2 \left(\frac{6}{rr} - \frac{2Rr}{\int Rrrdr}\right) - \frac{2Rrrdrd\varrho}{\int Rrrdr}$, 1°. lorſque $\frac{Rdr}{rdR}$ ſera $=$ à une conſtante, c'eſt-à-dire lorſque $R = Ar^n$, A & n étant des conſtantes quelconques. 2°. Lorſque $d\left(\frac{Rdr}{rdR}\right)$ ſera $= Br^4 dr$, B étant conſtante, c'eſt-à-dire lorſque $\frac{dR}{R}$ ſera $= \frac{dr}{r(Cr^5 + G)}$, C & G étant des conſtantes. Dans tout autre cas l'équation du Sphéroide ſera plus compliquée, que celle qui lui a été aſſignée juſqu'ici par les ſavans Geométres qui ont traité cette matiére.

Lorſque $r = 1$, il faut que $K = 0$, parce que la premiere couche doit néceſſairement être de niveau.

Donc il n'y a qu'à ſuppoſer la valeur de R telle que $\frac{Rdr}{r^5 dR} = 0$, ou, ce qui eſt la même choſe $\frac{dR}{dr} = \infty$, lorſque $r = 1$; ce qui ſe peut faire d'une infinité de maniéres. En général il n'y a qu'à ſuppoſer l'équation entre R & r repréſentée par une Courbe, dont la tangente coincide avec l'ordonnée R lorſque l'abſciſſe $r = 1$, l'ordonnée R étant finie.

SCHOLIE X.

171. Par la Méthode que nous propoſons ici pour déterminer la figure de la Terre Elliptique, il eſt aiſé de voir que dès que les couches ſont de niveau, les poids de pP & de $p'P'$ ſont égaux. En effet, quand les couches ſont de niveau, on a $K = 0$ & $dd\varsigma = \varsigma dr^2 \left(\frac{6}{rr} - \frac{2Rr}{\int Rrrdr}\right) - \frac{2Rrrdrd\varsigma}{\int Rrrdr}$: or dans ce même cas on a $M = 0$, & l'équation générale ſe réduit à $dd\varsigma = \varsigma dr^2 \left(\frac{6}{rr} - \frac{2Rr}{\int Rrrdr}\right) - \frac{2Rrrdrd\varsigma}{\int Rrrdr}$. Donc le principe du niveau des couches, & celui de l'égalité de force entre les colomnes pP & $p'P'$ donnent la même équation. Je traiterai ailleurs ce ſujet plus à fond.

FIN.

FAUTES A CORRIGER.

Page 108 *lig.* 11, *au lieu de* moindre, *liſ.* plus grande.
Page 120, *lig.* 10, *au lieu de* reſteroit, *liſ.* réſiſteroit.

Fig. Ier.

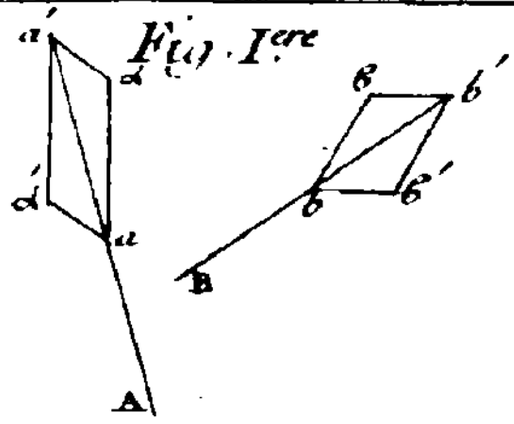


Fig. 2.

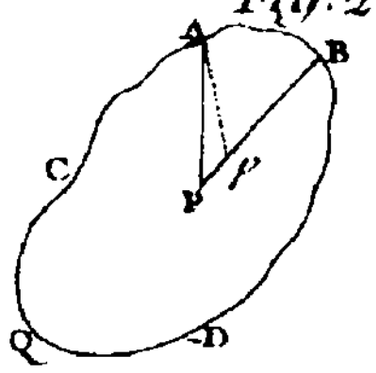


Fig 3

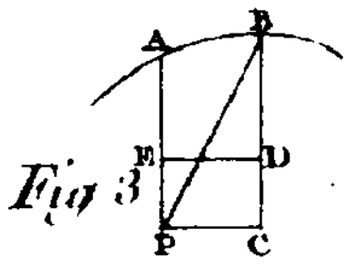


Fig. 4.

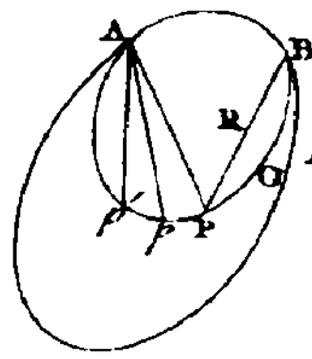


Fig. 5.

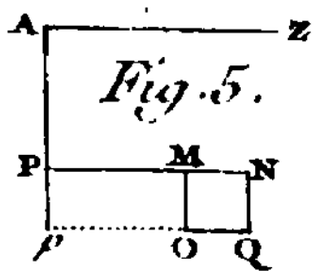


Fig. 6.

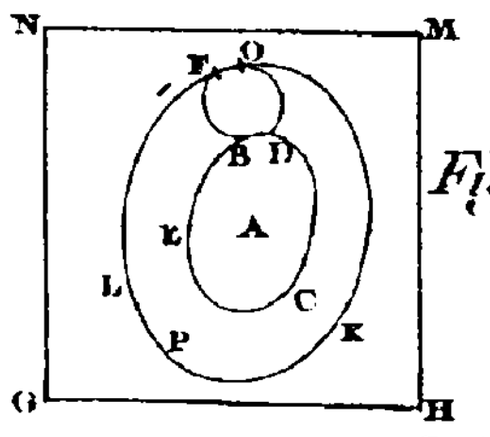


Fig. 7.

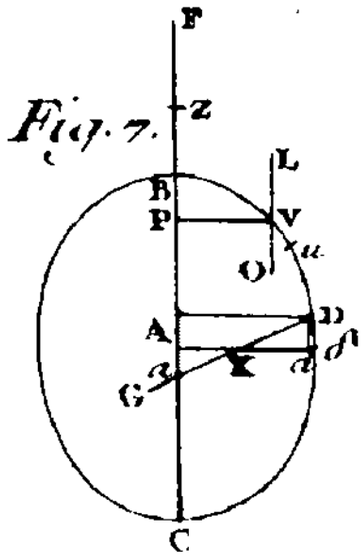


Fig. 8.

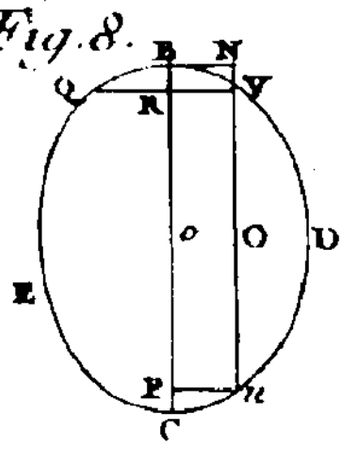


Fig 9

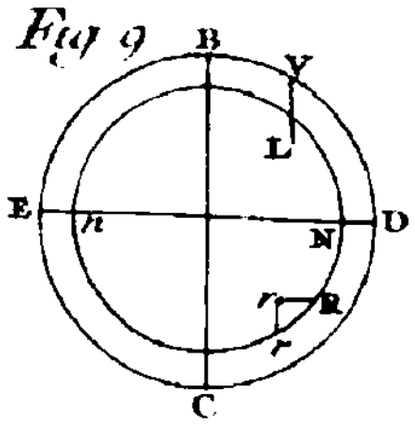


Fig 10

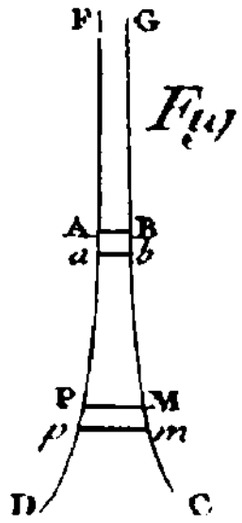


Fig. 11.

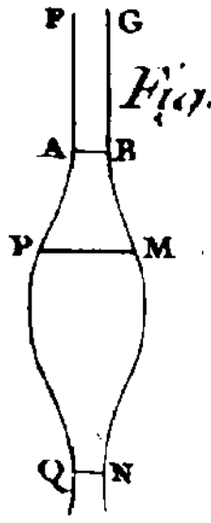


Fig. 12.

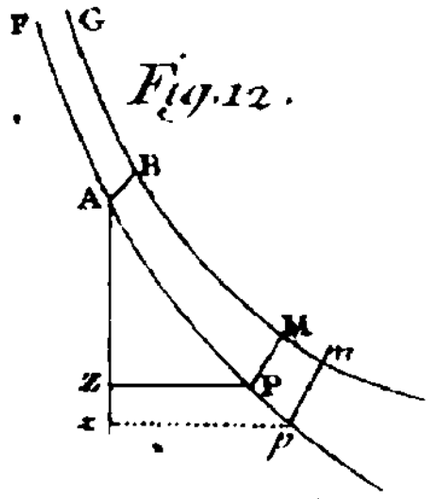


Fig. 14.

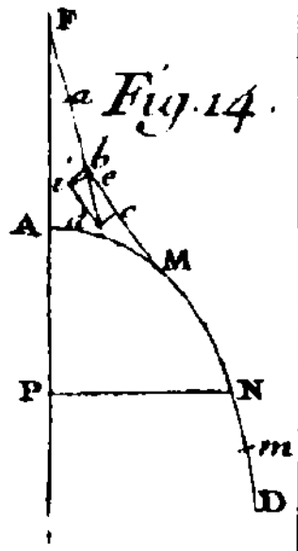


Fig. 13

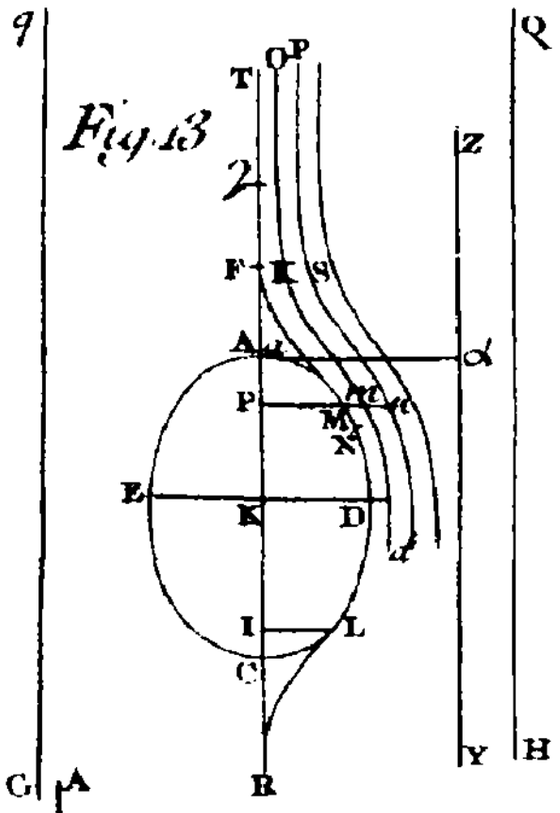


Fig. 15.

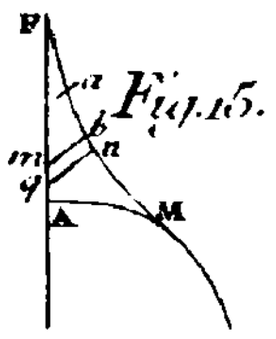


Fig. 16.

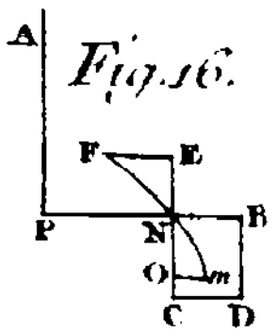
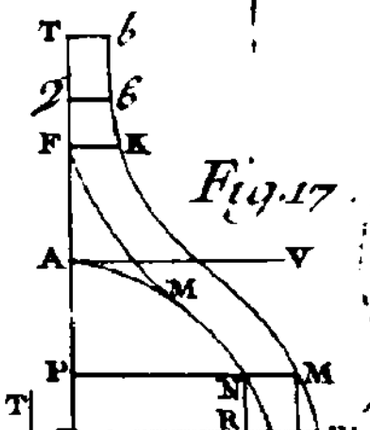


Fig. 17.



BIBLIOTHEQUE NATIONALE

Fig. 19.

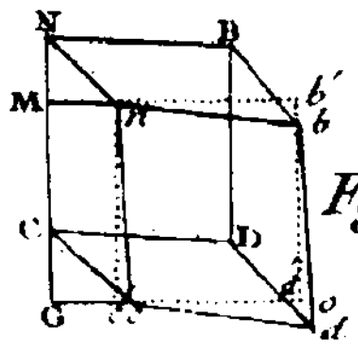


Fig. 20.

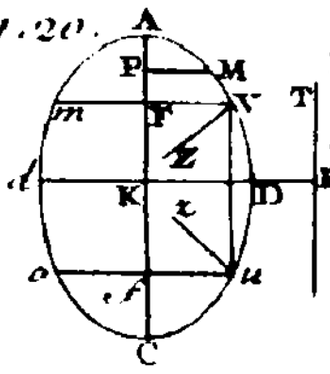


Fig. 21.

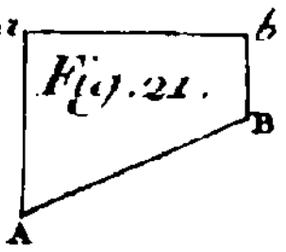


Fig. 18.

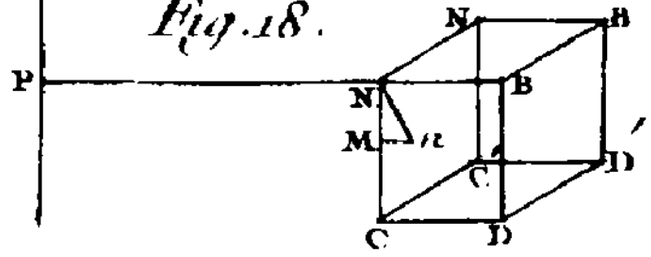


Fig. 22.

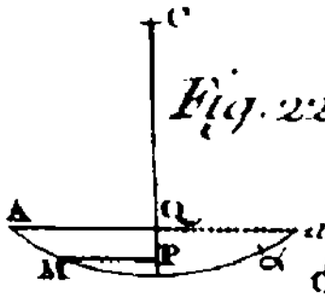


Fig. 23.

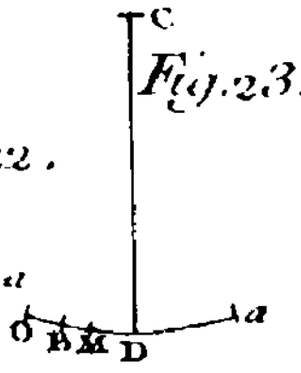


Fig. 24.

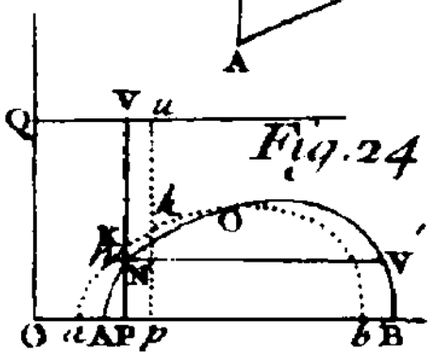


Fig. 25.

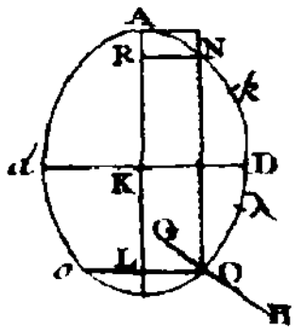


Fig. 26.

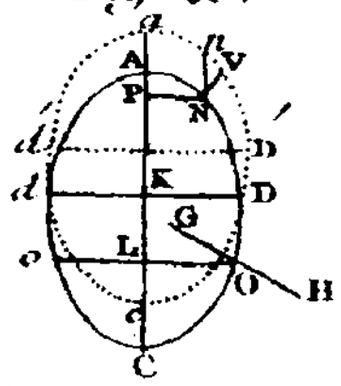


Fig. 27.

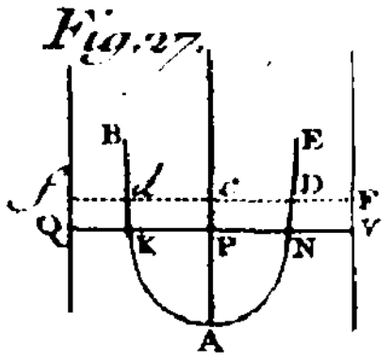


Fig 28

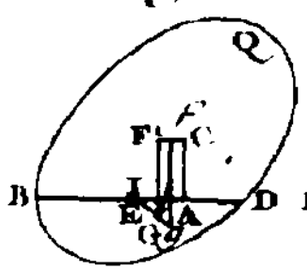


Fig. 29

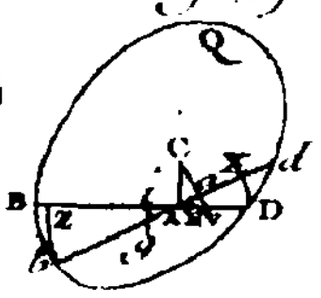


Fig 30

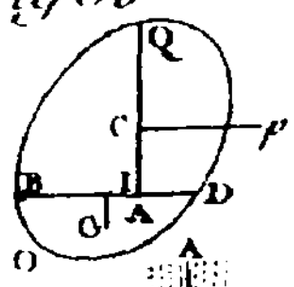


Fig 31

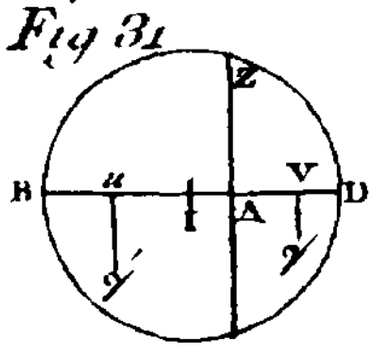


Fig 32

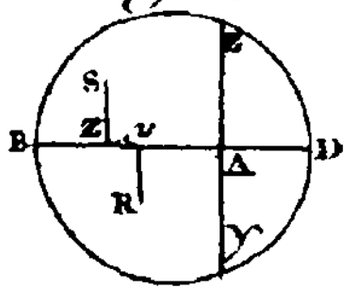


Fig 33

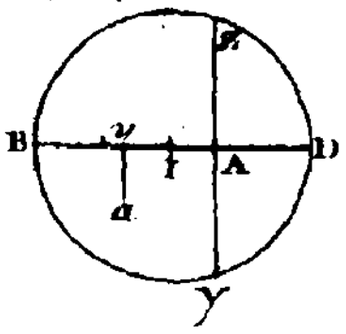


Fig. 34.

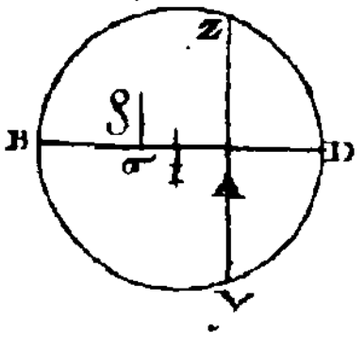


Fig. 35.

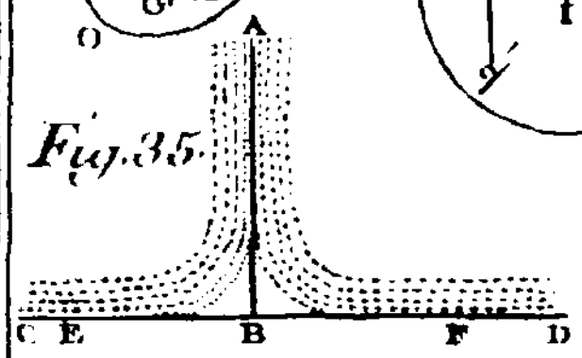


Fig. 36.

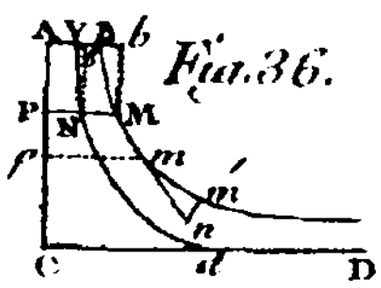


Fig. 37.

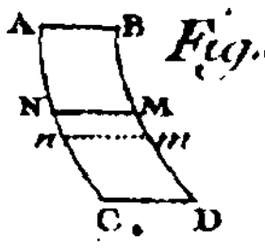


Fig. 38.

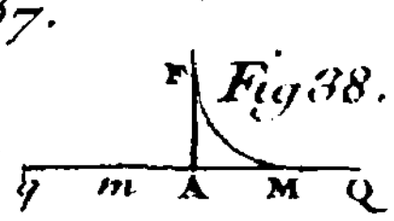


Fig. 39.

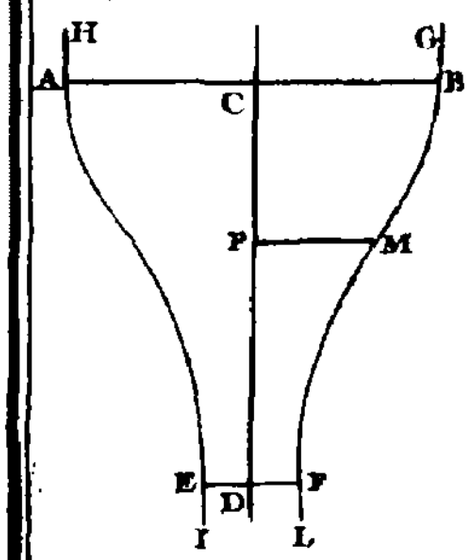


Fig. 40.

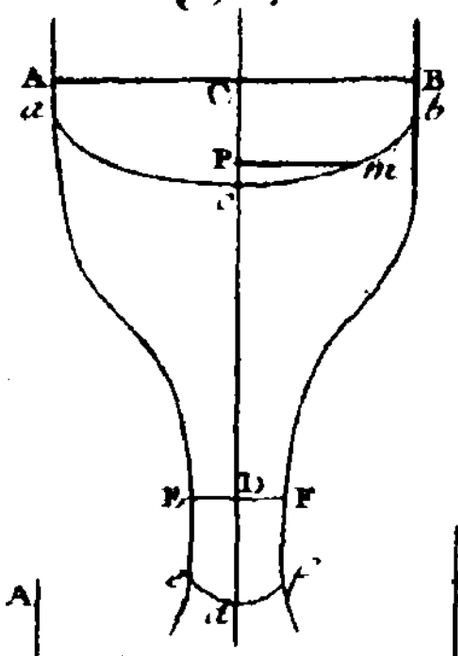


Fig. 41.

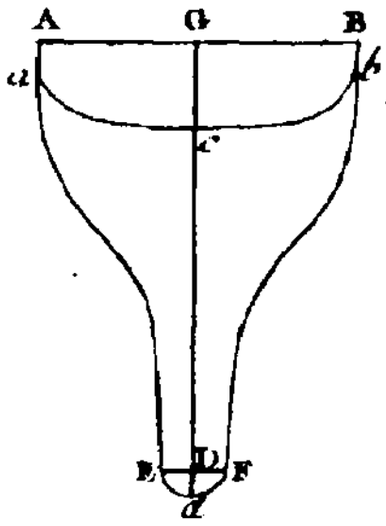


Fig. 42.

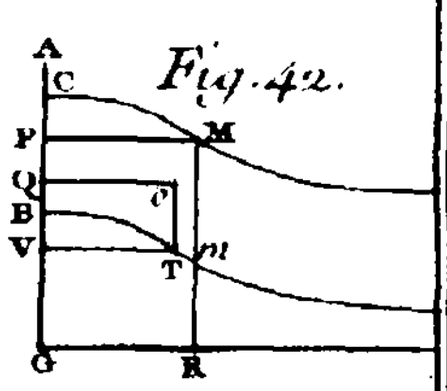


Fig. 43.

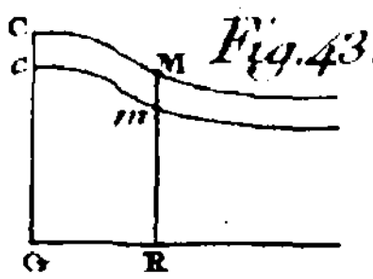


Fig. 44.

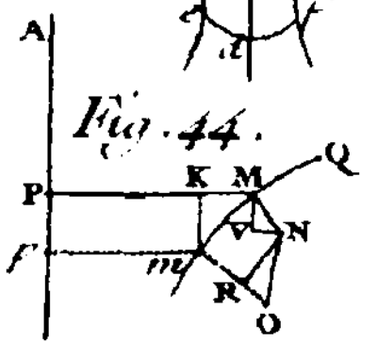


Fig. 45.

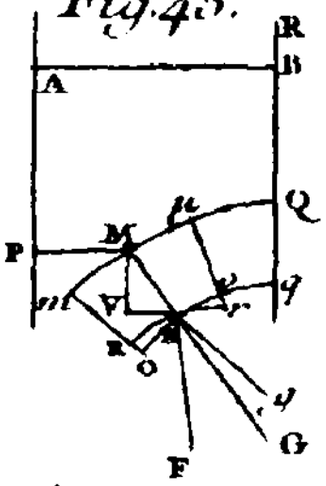


Fig. 46.

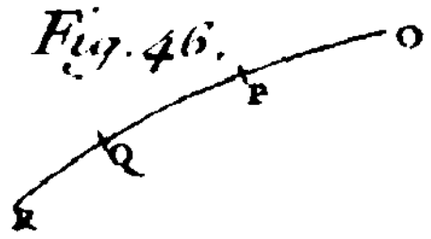


Fig. 47.

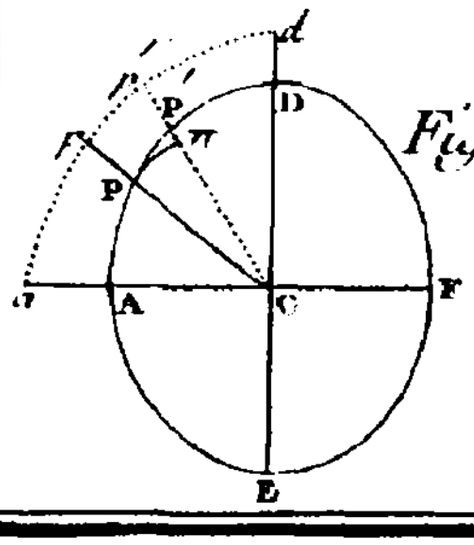


Fig. 48.

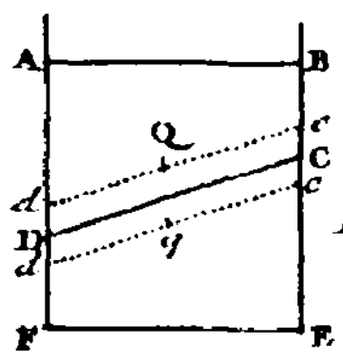


Fig. 49.

