BnF Gallica

# Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

BnF Gallica

Académie des sciences (France). Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. 1816-1949.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter
**reutilisationcommerciale@bnf.fr**.

# MÉMOIRES

DE

# L'ACADÉMIE DES SCIENCES

## DE L'INSTITUT DE FRANCE

---

## TOME 10

Institut de France.
Mémoires de
10
*3225*




PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER

QUAI DES AUGUSTINS, 55

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

# MÉMOIRES

DE

## L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

# DE L'INSTITUT

# DE FRANCE.

TOME X.

DE L'IMPRIMERIE DE AMB. FIRMIN DIDOT,
IMPRIMEUR DU ROI ET DE L'INSTITUT, RUE JACOB, N° 24.

# MÉMOIRES

DE

## L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

# DE L'INSTITUT

# DE FRANCE.

## TOME X.

PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT FRÈRES, LIBRAIRES,

RUE JACOB, N° 24.

1831.

# TABLE

## DES MÉMOIRES CONTENUS DANS CE VOLUME,

*Qui est le* dixième *de la collection des Mémoires de l'Académie des Sciences, depuis l'ordonnance de* 21 *mars* 1816.


Pages

QUATRIÈME MÉMOIRE sur les canaux de navigation considérés sous le rapport de la chute et de la distribution de leurs écluses, par M. S. GIRARD ..... 1

EXPÉRIENCES sur le mécanisme de la respiration des poissons, par M. FLOURENS ..... 53

RAPPORT sur l'ouvrage de M. JACOBI, intitulé : *Fundamenta nova theoriæ fonctionum ellipticarum*, par M. POISSON ..... 73

REMARQUES GÉNÉRALES sur l'application des principes de l'Analyse algébrique aux équations transcendantes, par M. le baron FOURIER ..... 119

RECHERCHES sur la chaleur spécifique des fluides élastiques, par M. DULONG ..... 147

EXPOSÉ des recherches faites par ordre de l'Académie royale des Sciences, pour déterminer les forces élastiques de la vapeur d'eau à de hautes températures, par MM. le baron de PRONY, ARAGO, GIRARD, DULONG, rapporteur ..... 193

MÉMOIRE sur le pouvoir thermo-électrique des métaux, par M. BECQUEREL ..... 237

MÉMOIRE sur les sulfures, iodures, bromures, etc., métalliques, par M. BECQUEREL ..... 259

MÉMOIRE sur de nouveaux effets électro-chimiques propres à pro-

Pages

duire des combinaisons, et sur leur application à la cristallisation du soufre et d'autres substances, par M. Becquerel.... 271

Mémoire sur la théorie de la lumière, par M. A. L. Cauchy, première partie..... 293

Mémoire sur le mouvement de deux fluides élastiques superposés, par M. Poisson..... 317

Mémoire sur la pose des conduites d'eau dans la ville de Paris, tableaux et discussions d'expériences entreprises à ce sujet sur la dilatabilité de la fonte de fer, par M. Girard..... 405

Nouvel essai de trigonométrie sphéroidique, par M. Puissant.. 457

Note sur l'aire d'un triangle sphéroidique dont les côtes sont des lignes de plus courte distance généralement à double courbure. 530

Application du calcul des probabilités à la mesure de la précision d'un grand nivellement trigonométrique, par M. Puissant. 533

Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques, par M. Poisson..... 549

Observations sur quelques maladies des oiseaux, par M. Flourens..... 607

Expériences sur l'action de la moëlle épinière dans la circulation, par M. Flourens..... 625

## HISTOIRE DE L'ACADÉMIE.

*Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences, pendant l'année* 1827.

### PARTIE MATHÉMATIQUE,

Pages

Par M. le baron Fourier, secrétaire-perpétuel..... .. j

Éloge historique de M. le marquis de Laplace, par M. le baron Fourier, secrétaire-perpétuel..... lxxxj

*Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences, pendant l'année* 1827.

## PARTIE PHYSIQUE,

Pages

Par M. le baron Cuvier, secrétaire-perpétuel ..... ciij

Éloge historique de M. Bosc, par M. le baron Cuvier, secrétaire-perpétuel..... cxj

## ERRATA.

*Nouvel essai sur la trigonométrie sphéroidique.*

Pages 469, ligne 3, qu'il faudra, *lisez :* qu'il faudrait.
492, lig. 9, qui donneront, *lisez :* qui donnerait.
497, lig. 5, plus, *lisez :* puis.
522, lig. 2, en remontant, venons faire, *lisez :* venons de faire.
535, lig. 12 et 13, somme, *lisez* : moyenne.
539, lig. 2, en remontant, attendu, *lisez :* entendu.
543, lig. 13, en remontant, on les diminuerait, *lisez :* on diminuerait ces bases.

# MÉMOIRE

SUR

## LA PROPAGATION DU MOUVEMENT DANS LES MILIEUX ÉLASTIQUES.

PAR M. POISSON.

Lu à l'Académie, le 11 octobre 1830.

Tous les corps, solides, liquides, aëriformes sont susceptibles de compression. Dans les solides et les liquides, la compressibilité est très-faible, et il faut employer de très-grandes forces pour la rendre sensible. Dès qu'on enlève ces forces, les liquides reprennent leur volume primitif. Il n'en est pas de même à l'égard de tous les corps solides : les uns conservent la forme et le volume que ces forces leur avaient fait prendre; les autres reviennent exactement à leur volume et à leur forme propres, aussitôt que ces forces ont cessé d'agir, en sorte que ces corps sont parfaitement élastiques, aussi bien que les liquides et les gaz. Un milieu élastique peut donc être un gaz, un liquide ou un solide; et le mouvement ayant été imprimé d'une manière quelconque, à une portion limitée d'un semblable milieu, l'objet de ce Mémoire est de déterminer les lois suivant lesquelles il doit s'y pro-

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

pager. Pour former les équations différentielles de ce mouvement, il est nécessaire d'avoir égard à la nature intime du système, aux forces d'attraction ou de répulsion qui ont lieu entre ses molécules, et à la propriété essentielle qui distingue les fluides des corps solides. C'est ce que j'ai fait dans un autre Mémoire; dans celui-ci, il s'agira d'intégrer ces équations, de déterminer, d'après l'état initial du système, les fonctions arbitraires qui complètent leurs intégrales, puis de déduire de ces intégrales, les lois de la propagation du mouvement et la constitution des ondes mobiles, à une grande distance de l'ébranlement primitif, c'est-à-dire, leurs propriétés indépendantes du mode particulier de cet ébranlement.

Nous supposerons très-petites, les vitesses de tous les points du système, ainsi que les dilatations ou condensations qui les accompagnent, et nous négligerons, en conséquence, les carrés et les produits de ces quantités, ce qui rendra linéaires, les équations différentielles dont elles dépendent. Nous supposerons aussi le milieu homogène et partout à la même température, afin que les coefficients relatifs à la nature du système, que ces équations renferment, soient des quantités constantes, et que les intégrales puissent s'obtenir sous une forme qui ne soit pas trop compliquée.

## § I.

### *Propagation du mouvement dans un fluide.*

(1) Soit M un point quelconque d'un fluide, dont la position, au bout du temps $t$, est déterminée par les trois coordonnées rectangulaires $x, y, z$, et qui est sollicité suivant

leurs prolongements, par les forces X, Y, Z, accélératrices ou rapportées à l'unité de masse. Représentons, au même instant par $u$, $v$, $w$, les trois composantes de la vitesse de M, en sorte qu'on ait

$$u=\frac{dx}{dt},\quad v=\frac{dy}{dt},\quad w=\frac{dz}{dt}.$$

Soient aussi $p$ et $\rho$ deux fonctions de $x, y, z, t$, qui représentent, au point M et au bout du temps $t$, la pression rapportée à l'unité de surface et la densité du fluide. Les équations du mouvement seront celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}
\rho\left(\mathrm{X}-\frac{du}{dt}-u\frac{du}{dx}-v\frac{du}{dy}-w\frac{du}{dz}\right)&=\frac{dp}{dx},\\
\rho\left(\mathrm{Y}-\frac{dv}{dt}-u\frac{dv}{dx}-v\frac{dv}{dy}-w\frac{dv}{dz}\right)&=\frac{dp}{dy},\\
\rho\left(\mathrm{Z}-\frac{dw}{dt}-u\frac{dw}{dx}-v\frac{dw}{dy}-w\frac{dw}{dz}\right)&=\frac{dp}{dz},
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

qui sont fournies par le principe de d'Alembert, et celle-ci

$$\frac{d\rho}{dt}+\frac{d.\rho u}{dx}+\frac{d.\rho v}{dy}+\frac{d.\rho w}{dz}=0,\qquad(2)$$

qui exprime que la masse de chaque petite partie du fluide ne varie pas pendant son mouvement.

Les équations (1) supposent la pression $p$ égale en tous sens autour du point M et normale à la surface sur laquelle elle s'exerce. C'est, en effet, ce que l'on admet ordinairement; mais, en examinant avec attention la cause de cette égalité de pression, j'ai fait voir, dans un autre Mémoire, qu'elle peut s'observer dans l'état d'équilibre d'un fluide et n'avoir plus lieu pendant son mouvement. Les équations (1) devraient alors être remplacées par d'autres, que l'on trouvera dans le

Mémoire cité et dont nous ne nous occuperons pas dans celui-ci.

(2) Les équations (1) et (2) sont communes aux gaz et aux liquides. S'il s'agit d'un fluide aëriforme, et si l'on veut que sa densité soit constante dans son état d'équilibre, il faudra que les forces X, Y, Z, soient nulles. Désignons alors par D, la densité naturelle de ce fluide, et par $gh$ la mesure de sa force élastique; $g$ étant la gravité et $h$ la hauteur d'un liquide déterminé dont la densité est prise pour unité. Dans l'état d'équilibre, on aura

$$\rho = D, \quad p = gh.$$

Au bout du temps $t$, soit $s$ la dilatation du fluide qui a lieu au point M, en sorte que sa densité y soit diminuée dans le rapport de $1 - s$ à l'unité. Suivant la loi de Mariotte, la pression $p$ varierait dans le même rapport; mais on sait que pendant le mouvement, elle suit une loi différente, et qu'on aura, en même temps,

$$\rho = D(1 - s), \quad p = gh(1 - \gamma s); \qquad (3)$$

$\gamma$ étant une constante positive et plus grande que l'unité, qui représente le rapport de la chaleur spécifique du gaz sous une pression constante, à sa chaleur spécifique sous un volume constant. En négligeant les quantités du second ordre par rapport à $s$, $u$, $v$, $w$, et faisant, pour abréger,

$$\frac{gh\gamma}{D} = a^2,$$

les équations (1) deviendront

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{ds}{dx}; \quad \frac{dv}{dt} = a^2 \frac{ds}{dy}, \quad \frac{dw}{dt} = a^2 \frac{ds}{dz}, \qquad (4)$$

et l'équation (2) se réduira à

$$\frac{ds}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}. \qquad (5)$$

Dans le cas d'un liquide, nous représenterons encore par D sa densité naturelle correspondante à une pression $gh$. La densité de ce liquide, au point M et au bout du temps $t$, devenant $D(1-s)$, par l'effet des forces X, Y, Z, et de l'état de mouvement, les équations (3) subsisteront toujours; mais $\gamma$ y représentera une constante qui dépendra de la dilatation du liquide, correspondante à une diminution de pression donnée. Ainsi, par conséquent, en supposant que la pression et la densité deviennent en même temps, $g(h-k)$ et $D(1-\varepsilon)$, on aura

$$g(h-k) = gh(1-\gamma\varepsilon);$$

d'où l'on tire

$$\gamma = \frac{k}{h\varepsilon}, \qquad a^2 = \frac{gk}{D\varepsilon}.$$

Si donc on suppose les forces X, Y, Z, nulles, et que l'on néglige les quantités du second ordre par rapport à $u, v, w, s$, les équations (1) et (2) se changeront encore dans les équations (4) et (5); par conséquent, les lois du mouvement qui en dépendent, ne différeront, dans les deux cas d'un liquide et d'un fluide aëriforme, que par la valeur de la constante $a$ et par les données de l'expérience qui serviront à la déterminer.

Mais il ne faut pas confondre le mouvement qui se propage dans un liquide, en vertu de son élasticité et des petites dilatations ou condensations dont il est susceptible, avec le mouvement produit par la pesanteur de ses parties, lorsqu'on

l'écarte un tant soit peu de son état d'équilibre. C'est ce second cas que j'ai traité dans mon Mémoire sur la propagation des ondes à la surface et suivant la profondeur de l'eau : j'ai alors négligé la dilatation $s$ et considéré la densité $\rho$ comme constante ; mais je me propose de reprendre bientôt cette question, et de considérer le mouvement de l'eau en ayant égard, à la fois, à sa pesanteur et à son élasticité.

Dans tous les cas, si le fluide, gaz ou liquide, est contenu dans un vase, on joindra aux équations précédentes, celles qui expriment que la vitesse normale aux parois est nulle en chacun de leurs points. S'il s'agit d'un liquide et qu'une partie de sa surface soit libre et soumise à une pression constante, on aura, en tous les points de cette surface, l'équation $dp = 0$ qui servira à la déterminer à chaque instant. Mais dans ce Mémoire, on ne s'occupera que de la propagation du mouvement dans un fluide qui se prolonge indéfiniment en tous sens et dont on ne considère pas la pesanteur, mais seulement l'élasticité, ce qui réduit la question à l'intégration des équations (4) et (5), et à la discussion des valeurs de $u, v, w, s$, qui en résulteront.

(3) Pour intégrer ces équations (4) et (5), je désigne par $\varphi$ une fonction inconnue de $x, y, z, t$, et je fais

$$s = \frac{1}{a^2}\,\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (6)$$

Les équations (4) donneront

$$u = \frac{d\varphi}{dx} + \mathrm{U}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy} + \mathrm{V}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz} + \mathrm{W}; \qquad (7)$$

U, V, W, étant des fonctions arbitraires de $x, y, z$. On a coutume de supposer, d'après la *Mécanique analytique*, que

dans les petits mouvements des fluides, les trois composantes $u, v, w$, de la vitesse de chaque molécule, sont les différences partielles relatives à $x, y, z$, d'une fonction de $x, y, z, t$. Cela revient à faire égales à zéro, les trois quantités U, V, W; hypothèse qui ne conduirait qu'à une solution particulière des équations (4) et (5); et, en effet, il est évident que la formule $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ ne peut être une différentielle exacte à trois variables indépendantes, pendant toute la durée du mouvement, à moins que cette condition ne soit remplie à l'origine; ce qui n'a pas lieu nécessairement. Nous supposerons qu'on a $\varphi = 0$ quand $t = 0$; les trois fonctions U, V, W, arbitraires et indépendantes l'une de l'autre, seront alors les valeurs initiales de $u, v, w$. La valeur de $\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}$ qui répond à $t = 0$, sera une quatrième fonction arbitraire, qui représentera la dilatation initiale en un point quelconque du fluide; et dans chaque cas particulier, cette valeur et celles de U, V, W, seront données en fonctions de $x, y, z$.

Cela posé, si l'on substitue les formules (6) et (7) à la place de $s, u, v, w$, dans l'équation (5), et qu'on fasse, pour abréger,

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}}{dy} + \frac{d\mathrm{W}}{dz} = \psi(x, y, z),$$

on aura

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \psi(x, y, z)\right). \qquad (8)$$

Mais quelle que soit la fonction $\psi$, on a, d'après la formule de Fourier étendue à trois variables,

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^3}\iiiint\psi(x', y' z')\cos.[\alpha(x - x') + 6(y - y') + \gamma(z - z')]\,d\alpha\,d6\,d\gamma\,dx'\,dy'\,dz';$$

les limites de ces six intégrales étant $\pm\infty$. Si donc, nous faisons

$$\varphi = \varphi' + \frac{1}{8\pi^3}\iiiint\psi(x',y',z')\cos.[\alpha(x-x') + \mathcal{C}(y-y') + \gamma(z-z')]\frac{d\alpha\,d\mathcal{C}\,d\gamma\,dx'\,dy'\,dz'}{\alpha^2+\mathcal{C}^2+\gamma^2}, \quad (9)$$

l'équation (8) deviendra

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2} + \frac{d^2\varphi'}{dz^2}\right).$$

Or, j'ai trouvé, dans un autre Mémoire,

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(x + at\cos.\theta, y + at\sin.\theta\sin.\omega, z + at\sin.\theta\cos.\omega)\,t\sin.\theta\,d\theta\,d\omega + \frac{1}{4\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Pi(x + at\cos.\theta, y + at\sin.\theta\sin.\omega, z + at\sin.\theta\cos.\omega)\,t\sin.\theta\,d\theta\,d\omega, \quad (10)$$

pour l'intégrale complète de cette dernière équation; $\pi$ désignant le rapport de la circonférence au diamètre, et F et $\Pi$ étant les deux fonctions arbitraires, lesquelles sont telles que l'on a

$$\varphi' = \Pi(x,y,z),\ \frac{d\varphi'}{dt} = \mathrm{F}(x,y,z),$$

quand $t=0$. Donc, à cause de $\varphi=0$ pour cette valeur de $t$, et, en vertu de l'équation (9), $\mathrm{F}(x,y,z)$ sera la valeur initiale de $\frac{d\varphi}{dt}$, et l'on aura

$$\Pi(x,y,z) = -\frac{1}{8\pi^3}\iiiint\psi(x',y',z')\cos.[\alpha(x-x') + \mathcal{C}(y-y') + \gamma(z-z')]\frac{d\alpha\,d\mathcal{C}\,d\gamma\,dx'\,dy'\,dz'}{\alpha^2+\mathcal{C}^2+\gamma^2},$$

pour la valeur de $\Pi(x, y, z)$. Les deux fonctions F et $\Pi$ étant ainsi déterminées, si l'on met la formule (10), à la place de $\varphi'$, dans la formule (9), l'expression de $\varphi$ qui en résultera, sera l'intégrale complète de l'équation (8); et en substituant cette expression de $\varphi$ dans les équations (6) et (7), on aura les intégrales complètes des équations (4) et (5). Mais avant d'effectuer ces substitutions, nous réduirons à une forme plus simple, l'intégrale contenue dans la formule (9) et dans la valeur précédente de $\Pi(x, y, z)$.

(4) Considérons $\alpha, \mathcal{6}, \gamma$, comme les trois coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de l'espace; remplaçons ces trois variables, par les coordonnées polaires du même point; et faisons, en conséquence,

$$\alpha = \rho \cos.\theta, \quad \mathcal{6} = \rho \sin.\theta \sin.\omega, \quad \gamma = \rho \sin.\theta \cos.\omega;$$

$\rho$ étant son rayon vecteur, et $\theta$ et $\omega$ les deux angles qui en déterminent la direction. Nous aurons

$$d\alpha\, d\mathcal{6}\, d\gamma = \rho^2 \sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega;$$

les intégrales relatives à $\rho, \theta, \omega$, s'étendront depuis $\rho = 0$, $\theta = 0$, $\omega = 0$, jusqu'à $\rho = \infty$, $\theta = \pi$, $\omega = 2\pi$; et la formule (9) deviendra

$$\varphi = \varphi' + \frac{1}{8\pi^3} \iiint\iiint \psi(x', y', z') \cos.\rho [(x - x') \cos.\theta + (y - y') \sin.\theta \sin.\omega + (z - z') \sin.\theta \cos.\omega] \sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega\, dx'\, dy'\, dz$$

Mais, d'après des formules connues, si l'on fait

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r'^2,$$

et que l'on regarde $r'$ comme positif, on a

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos.\rho\,[(x-x')\cos.\theta+(y-y')\sin.\theta\sin.\omega$$
$$+(z-z')\sin.\theta\cos.\omega]\sin.\theta\,d\theta\,d\omega=\frac{4\pi\sin.\rho\,r'}{\rho\,r'},$$
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin.\rho\,r'}{\rho}d\rho=\tfrac{1}{2}\pi;$$

d'où il résultera

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\varphi'+\frac{1}{4\pi}\iiint\psi(x',y',z')\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r'},\\ \Pi&=-\frac{1}{4\pi}\iiint\psi(x',y',z')\frac{dx'\,dy'\,dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')]^{\frac{1}{2}}};\end{aligned}\right\}(11)$$

ce qui réduit à une intégrale triple, l'intégrale sextuple dont il s'agissait.

(5) Pour réduire encore davantage, l'intégrale dépendante de celle-ci ou de la fonction Π, que renferme la formule (10), soit

$$\zeta=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(x+at\cos.\theta-x')^2+(y+at\sin.\theta\sin.\omega-y')^2$$
$$+(z+at\sin.\theta\cos.\omega-z')^2]^{-\frac{1}{2}}at\sin.\theta\,d\theta\,d\omega. \qquad (12)$$

En faisant

$$\left.\begin{aligned}x'-x&=r'\cos.\theta',\\ y'-y&=r'\sin.\theta'\sin.\omega',\\ z'-z&=r'\sin.\theta'\cos.\omega',\end{aligned}\right\}(13)$$

nous aurons d'abord

$$\zeta=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[r'^2-2r'at(\cos.\theta\cos.\theta'+\sin.\theta\sin.\theta'\cos.(\omega'-\omega))$$
$$+a^2t^2]^{-\frac{1}{2}}at\sin.\theta\,d\theta\,d\omega.$$

Cette intégrale double est relative à tous les points d'une surface sphérique dont l'élément différentiel est $\sin.\theta\, d\theta\, d\omega$. Or, si l'on fait

$$\cos.\theta\cos.\theta' + \sin.\theta\sin.\theta'\cos.(\omega'-\omega) = \cos.\mu,$$

on pourra considérer $\theta, \theta'$ et $\mu$, comme les trois côtés d'un triangle sphérique dans lequel $\omega'-\omega$ est l'angle opposé au côté $\mu$; en appelant $\lambda$ l'angle opposé à $\theta'$, on pourra substituer les variables $\mu$ et $\lambda$ à $\theta$ et $\omega$; l'élément différentiel de la surface s'exprimera alors par $\sin.\mu\, d\mu\, d\lambda$; et l'intégrale devra s'étendre depuis $\mu=0$ et $\lambda=0$ jusqu'à $\mu=0$ et $\lambda=2\pi$, en sorte que l'on aura

$$\zeta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{at\sin.\mu\, d\mu\, d\lambda}{\sqrt{r'^2 - 2r'at\cos.\mu + a^2t^2}}.$$

Aux deux limites $\mu=0$ et $\mu=\pi$, les valeurs du radical $\sqrt{r'^2-2r'at\cos.\mu+a^2t^2}$ seront $\pm(r'-at)$ et $\pm(r'+at)$; et comme ce radical doit être une quantité positive dans toute l'étendue de l'intégration, il faudra prendre, à la première limite, $r'-at$ ou $at-r'$, pour sa valeur, selon qu'on aura $at<r'$ ou $at>r'$, et dans les deux cas, $r'+at$ à la seconde limite. Cela étant, on aura

$$\zeta = \frac{2\pi}{r'}[(r'+at)-(r'-at)] = \frac{4\pi at}{r'},$$

dans le cas de $r'>at$, et

$$\zeta = \frac{2\pi}{r'}[(r'+at)-(at-r')] = 4\pi,$$

dans le cas de $r'<at$.

En comparant la seconde formule (11) et la formule (12),

on en conclura

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Pi(x+at\cos.\theta,\quad y+at\sin.\theta\sin.\omega,\quad z+at\sin.\theta\cos.\omega)\,at\sin.\theta\,d\theta\,d\omega$$

$$=-\iiint\psi(x',y',z')\frac{at\,dx'\,dy'\,dz'}{r'},\text{ ou}=-\iiint\psi(x',y',z')\,dx'dy'dz'.$$

et, par conséquent

$$\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Pi(x+at\cos.\theta,\quad y+at\sin.\theta\sin.\omega,\quad z+at\sin.\theta\cos.\omega)\,t\sin.\theta\,d\theta\,d\omega$$

$$=-\iiint\psi(x',y',z')\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r'},\text{ ou }=0,$$

selon qu'on aura $at<r'$, ou $at>r'$. Mais, d'après les équations (13), si l'on substitue $r',\theta',\omega'$, à $x',y',z'$, dans l'intégration relative à ces dernières variables, on aura

$$dx'\,dy'\,dz'=r'^2\sin.\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\omega';$$

les limites relatives à $x',y',z'$, étant $\pm\infty$, celles qui répondent à $r',\theta',\omega'$, seront $r'=0$, $\theta'=0$, $\omega'=0$, et $r'=\infty$, $\theta'=\pi$, $\omega'=2\pi$; on aura donc

$$\iiint\psi(x',y',z')\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r'}=\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x+r'\cos.\theta',\ y+r'\sin.\theta'\sin.\omega',\ z+r'\sin.\theta'\cos.\omega')\,r'\sin.\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\omega',$$

et, par conséquent,

$$\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Pi(x+at\cos.\theta,\quad y+at\sin.\theta\sin.\omega,\quad z+at\sin.\theta\cos.\omega)\,t\sin.\theta\,d\theta\,d\omega$$

$$=-\int_{at}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x+r'\cos.\theta',\ y+r'\sin.\theta'\sin.\omega',\ z+r'\sin.\theta'\sin.\omega')\,r'\sin.\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\omega'.$$

Or, en vertu de ces deux dernières équations, si l'on ajoute, membre à membre, l'équation (10) et la première équation (11), on aura finalement

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(x + at\cos.\theta,\quad y + at\sin.\theta\sin.\omega,\quad z + at\sin.\theta\cos.\omega)\, t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{at}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x + \rho\cos.\theta,\quad y + \rho\sin.\theta\sin.\omega,\quad z + at\sin.\theta\cos.\omega)\, \rho\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega, \tag{14}$$

en employant dans cette dernière intégrale, $\rho, \theta, \omega$, au lieu de $r', \theta', \omega'$.

Cette expression de $\varphi$ est, sous la forme la plus simple, l'intégrale générale de l'équation (8). En la substituant, comme on l'a dit, dans les équations (6) et (7), on aura les intégrales des équations (4) et (5) qu'il s'agissait d'obtenir. On se souviendra que $\frac{1}{a^2}\mathrm{F}(x, y, z)$, U, V, W, sont les valeurs de $s, u, v, w$, qui répondent à $t = 0$, et qu'on a fait, pour abréger,

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}}{dy} + \frac{d\mathrm{W}}{dz} = \psi(x, y, z).$$

(6) Appliquons ce résultat au cas où les quantités U, V, W sont les différences partielles relatives à $x, y, z$, d'une fonction de ces trois variables, et supposons qu'on ait

$$\mathrm{U} = \frac{df(x,y,z)}{dx},\quad \mathrm{V} = \frac{df(x,y,z)}{dy},\quad \mathrm{W} = \frac{df(x,y,z)}{dz};$$

d'où il résultera

$$\psi(x + \rho\cos.\theta,\ y + \rho\sin.\omega,\ z + \rho\sin.\theta\cos.\omega) = \frac{d^2\varpi}{dx^2} + \frac{d^2\varpi}{dy^2} + \frac{d^2\varpi}{dz^2}, \tag{15}$$

en faisant, pour abréger,

$$f(x+\rho\cos.\theta,\quad y+\rho\sin.\theta\sin.\omega,\quad z+\rho\sin.\theta\cos.\omega)=\varpi.$$

D'après cette expression de $\varpi$, on aura

$$\frac{d\varpi}{d\rho}=\frac{d\varpi}{dx}\cos.\theta+\frac{d\varpi}{dy}\sin.\theta\sin.\omega+\frac{d\varpi}{dz}\sin.\theta\cos.\omega,$$

$$\frac{d\varpi}{d\theta}=-\frac{d\varpi}{dx}\rho\sin.\theta+\frac{d\varpi}{dy}\rho\cos.\theta\sin.\omega+\frac{d\varpi}{dz}\rho\cos.\theta\cos.\omega,$$

$$\frac{d\varpi}{d\omega}=\frac{d\varpi}{dy}\rho\sin.\theta\cos.\omega-\frac{d\varpi}{dz}\rho\sin.\theta\sin.\omega;$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\varpi}{dx}=\frac{d\varpi}{d\rho}\cos.\theta-\frac{d\varpi}{d\theta}\frac{\sin.\theta}{\rho},$$

$$\frac{d\varpi}{dy}=\frac{d\varpi}{d\rho}\sin.\theta\sin.\omega+\frac{d\varpi}{d\theta}\frac{\cos.\theta\sin.\omega}{\rho}+\frac{d\varpi}{d\omega}\frac{\cos.\omega}{\rho\sin.\theta},$$

$$\frac{d\varpi}{dz}=\frac{d\varpi}{d\rho}\sin.\theta\cos.\omega+\frac{d\varpi}{d\theta}\frac{\cos.\theta\cos.\omega}{\rho}-\frac{d\varpi}{d\omega}\frac{\sin.\omega}{\rho\sin.\theta}.$$

En mettant $\frac{d\varpi}{dx}$ au lieu de $\varpi$ dans la première de ces trois dernières équations, on a

$$\frac{d^2\varpi}{dx^2}=\frac{d^2\varpi}{dxd\rho}\cos.\theta-\frac{d^2\varpi}{dxd\theta}\frac{\sin.\theta}{\rho};$$

et en différentiant successivement cette même équation par rapport à $\rho$ et à $\theta$, il vient

$$\frac{d^2\varpi}{dxd\rho}=\frac{d^2\varpi}{d\rho^2}\cos.\theta-\frac{d^2\varpi}{d\rho d\theta}\frac{\sin.\theta}{\rho}+\frac{d\varpi}{d\theta}\frac{\sin.\theta}{\rho^2},$$

$$\frac{d^2\varpi}{dxd\theta}=\frac{d^2\varpi}{d\rho d\theta}\cos.\theta-\frac{d\varpi}{d\rho}\sin.\theta-\frac{d^2\varpi}{d\theta^2}\frac{\sin.\theta}{\rho}-\frac{d\varpi}{d\theta}\frac{\cos.\theta}{\rho};$$

par conséquent, on aura

$$\frac{d^2\varpi}{dx^2}=\frac{d^2\varpi}{d\rho^2}-2\frac{d^2\varpi}{d\rho\,d\theta}\frac{\sin.\theta\cos.\theta}{\rho}+\frac{d^2\varpi}{d\theta^2}\frac{\sin.^2\theta}{\rho^2}$$
$$+2\frac{d\varpi}{d\theta}\frac{\sin.\theta\cos.\theta}{\rho}+\frac{d\varpi}{d\rho}\frac{\sin.^2\theta}{\rho}.$$

Par des combinaisons analogues, on obtiendra les valeurs de $\frac{d^2\varpi}{dy^2}$ et $\frac{d^2\varpi}{dz^2}$ en différences partielles relatives à $\rho$, $\theta$, $\omega$. En les ajoutant ensuite à la valeur de $\frac{d^2\varpi}{dx^2}$, on trouve, toutes réductions faites,

$$\frac{d^2\varpi}{dx^2}+\frac{d^2\varpi}{dy^2}+\frac{d^2\varpi}{dz^2}=\frac{1}{\rho}\frac{d^2.\rho\varpi}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho^2\sin.\theta}\frac{d.\frac{d\varpi}{d\theta}\sin.\theta}{d\theta}+\frac{1}{\rho^2\sin.^2\theta}\frac{d^2\varpi}{d\omega^2}.$$

On conclut delà

$$\int_0^{at}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{d^2\varpi}{dx^2}+\frac{d^2\varpi}{dy^2}+\frac{d^2\varpi}{dz^2}\right)\rho\sin.\theta\,d\rho\,d\theta\,d\omega$$
$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{at}\frac{d^2.\rho\varpi}{d\rho^2}d\rho\right)\sin.\theta\,d\theta\,d\omega$$
$$+\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{d.\frac{d\varpi}{d\theta}\sin.\theta}{d\theta}d\theta\right)\frac{d\rho\,d\omega}{\rho}+\int_0^{at}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{d^2\varpi}{d\omega^2}d\omega\right)\frac{d\rho\,d\theta}{\rho\sin.\theta}.$$

On a évidemment

$$\int_0^{at}\frac{d^2.\rho\varpi}{d\rho^2}d\rho=\frac{d.at\varpi'}{adt}-f(x,y,z),$$

en désignant par $\varpi'$ la valeur de $\varpi$ qui répond à $\rho=at$, et observant que $f(x,y,z)$ est la valeur de $\varpi$ qui a lieu quand $t=0$. On a aussi

$$\int_0^{\pi}\frac{d.\frac{d\varpi}{d\theta}\sin.\theta}{d\theta}=0,$$

et de plus

$$\int_0^{2\pi} \frac{d^2\varpi}{d\omega^2} d\omega = 0,$$

à cause que les valeurs de $\frac{d\varpi}{d\omega}$ qui répondent à $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$, sont égales entre elles. On aura donc simplement

$$\int_0^{at}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{d^2\varpi}{dx^2}+\frac{d^2\varpi}{dy^2}+\frac{d^2\varpi}{dz^2}\right)\rho\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega$$
$$= \frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varpi' t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega - 4\pi f(x,y,z).$$

Donc, en vertu de l'équation (15), et en faisant

$$\varphi + f(x,y,z) = \varphi_1,$$

la formule (14) deviendra

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(x+at\cos.\theta,\quad y+at\sin.\theta\sin.\omega,\quad z+at\sin.\theta\cos.\omega)\, t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega$$
$$+\frac{1}{4\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int^{2\pi} f(x+at\cos.\theta,\quad y+at\sin.\theta\sin.\omega,\quad z+at\sin.\theta\cos.\omega)\, t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega; \qquad (16)$$

ce qui est effectivement vrai, en observant qu'on a

$$\varphi = 0,\quad \varphi_1 = f(x,y,z),\quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} = F(x,y,z),$$

quand $t = 0$, et que l'équation (8) se change en celle-ci :

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}+\frac{d^2\varphi_1}{dy^2}+\frac{d^2\varphi_1}{dz^2}\right),$$

dont l'intégrale complète est l'équation (16), d'après la formule (10) citée plus haut.

(7) Voici maintenant les conséquences relatives à la propagation du mouvement qui se déduisent des formules précédentes.

Soit $r$ le rayon vecteur du point M, $\mu$ l'angle qu'il fait avec l'axe des $x$, $\lambda$ l'angle compris entre le plan de ces deux droites et celui des $x$ et $z$; on aura

$$x = r\cos.\mu, \quad y = r\sin.\mu\sin.\lambda, \quad z = r\sin.\mu\cos.\lambda;$$

et les fonctions $F(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$, $f(x,y,z)$, résultant de l'état initial du fluide, se changeront en trois autres fonctions de $r$, $\mu$, $\lambda$, qui seront aussi données et que nous représenterons par $F(r,\mu,\lambda)$, $\psi(r,\mu,\lambda)$, $f(r,\mu,\lambda)$. Soit ensuite

$$\left.\begin{aligned} &r\cos.\mu + \rho\cos.\theta = r'\cos.\mu', \\ &r\sin.\mu\sin.\lambda + \rho\sin.\theta\sin.\omega = r'\sin.\mu'\sin.\lambda', \\ &r\sin.\mu\cos.\lambda + \rho\sin.\theta\cos.\omega = r'\sin.\mu'\cos.\lambda'; \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

désignons par $r_1$, $\mu_1$, $\lambda_1$, les valeurs de $r'$, $\mu'$, $\lambda'$, qui répondent à $\rho = at$; la formule (14) deviendra

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(r_1,\mu_1,\lambda_1)\, t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega \\ + \frac{1}{4\pi}\int_0^{at}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(r',\mu',\lambda')\,\rho\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega; \end{aligned} \quad (18)$$

et la formule (16) se changera en celle-ci:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(r_1,\mu_1,\lambda_1)\, t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega \\ + \frac{1}{4\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r_1,\mu_1,\lambda_1)\, t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega. \end{aligned} \quad (19)$$