BnF Gallica

Journal de l'École polytechnique / publié par le Conseil d'instruction de cet établissement

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque de l'Ecole polytechnique

{BnF Gallica

École polytechnique (Palaiseau, Essonne). Journal de l'École polytechnique / publié par le Conseil d'instruction de cet établissement. 1808.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter
reutilisationcommerciale@bnf.fr.

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

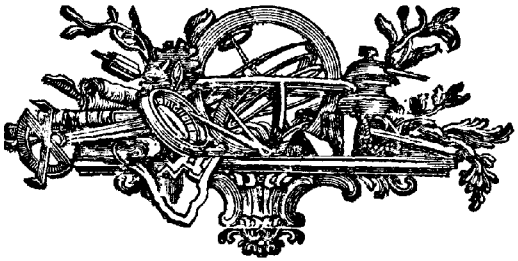
PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

QUATORZIÈME CAHIER.

TOME VII.



A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

Avril 1808.

Rés 4°
S699

BIBLIOTHÈQUE CENTRALE PRÊT NATIONALE

MÉMOIRE

SUR LA THÉORIE DU SON,

Lu à l'Institut le 17 août 1807;

Par M. POISSON.

ON sait depuis long-temps que le son est produit par les vibrations de l'air mis en mouvement par le corps sonore ; mais M. *Lagrange* est le premier qui ait soumis ce mouvement à l'analyse mathématique, et qui en ait déduit les points principaux de la théorie du son. Ses belles recherches sur ce sujet, sont assez connues de tous les géomètres, pour qu'il soit inutile de les rappeler ici. A l'époque où elles ont été publiées, le calcul aux différences partielles, d'où dépend la solution de ce genre de questions, était à peine connu ; on n'était pas d'accord sur l'usage des *fonctions discontinues*, qu'il est cependant indispensable d'employer pour représenter l'état de l'air à l'origine du mouvement : heureusement les progrès de l'analyse ont fait disparaître ces difficultés, et celles qui subsistent encore tiennent à la nature de la question. Nous sommes loin de penser que nous les ayons toutes surmontées ; notre but dans ce mémoire est principalement de démontrer plusieurs théorèmes généraux qui nous ont paru devoir intéresser également les physiciens et les géomètres.

Ces théorèmes sont indépendans des mouvemens particuliers des molécules d'air et de la cause qui a produit le son ; ils sont relatifs à sa propagation et à sa réflexion, que nous avons considérées sous un point de vue plus général qu'on ne l'avait fait jusqu'ici. En conservant à l'air ses trois dimensions, M. *Lagrange* et *Euler* ont supposé que la vîtesse

des molécules d'air ne dépend que de la distance à l'origine du mouvement; ou, autrement dit, que l'intensité du son est la même en tous les points de l'onde sonore, en entendant par *onde sonore*, la partie de l'air en mouvement à chaque instant. Dans ce cas particulier, l'équation connue qui renferme la théorie du son, peut être intégrée sous forme finie, et le problème est susceptible d'une solution qui ne laisse rien à desirer; mais, dans le cas général où l'intensité du son varie d'une manière quelconque d'un point à un autre de l'onde sonore, l'équation du son n'est plus intégrable sous forme finie; cependant nous démontrons par un moyen simple, et sans recourir aux séries, que, dans ce cas général, la vîtesse du son est encore la même sur les différens rayons sonores, ce qui revient à dire que l'onde sonore conserve toujours une figure sphérique, dont le centre est celui de l'ébranlement primitif. La loi suivant laquelle l'intensité du son varie sur une même onde sonore, dépend de la cause qui a produit le son. S'il a été produit en comprimant ou en dilatant une portion de la masse d'air, puis en rétablissant tout-à-coup la communication entre cette portion d'air et la masse entière, il est facile de prouver que l'intensité du son sera la même en tous les points de l'onde sonore, du moins quand cette onde sera parvenue à une grande distance de l'origine du mouvement. En effet, décomposons la portion d'air comprimée ou dilatée en une infinité de parties infiniment petites; chacune de ces particules, si elle était seule comprimée ou dilatée, produirait une ondulation dont cette particule serait le centre, et qui se répandrait également dans tous les sens : or, d'après le principe de *Daniel Bernoulli*, sur la coexistence des petites oscillations, toutes ces ondulations peuvent avoir lieu en même temps, sans se nuire en aucune manière; d'ailleurs, il est visible que, quand les rayons de toutes ces ondes partielles seront devenus fort grands par rapport aux dimensions de la portion d'air comprimée ou dilatée, toutes ces ondes se confondront en une seule : d'où l'on peut conclure que, quelle que soit la figure de la portion d'air dilatée ou comprimée, quelle que soit même la loi de la densité dans l'intérieur de cette portion d'air, l'intensité

du

du son sera bientôt la même en tous les points de l'onde sonore. Mais quand la portion d'air que l'on comprime ou que l'on dilate, reçoit en même temps des vîtesses qui peuvent être différentes en grandeur et en direction, pour toutes les molécules qui la composent, on ne peut plus dire comment un ébranlement de cette espèce se répand dans la masse fluide. Ainsi, par exemple, la portion d'air placée à l'extrémité d'un instrument, tel qu'un porte-voix, est à-la-fois comprimée et mise en mouvement par les vibrations de l'air intérieur: l'expérience prouve que l'intensité du son est la plus grande en avant du porte-voix dans la direction de l'axe; mais quel est le rapport qui existe entre cette intensité et celle qui a lieu dans une autre direction, à même distance de l'origine du mouvement? c'est un problème que nous n'avons pas résolu. Il n'en est pas de même de l'intensité du son sur un même rayon sonore, c'est-à-dire, sur une même ligne droite menée par le centre de l'ébranlement primitif; quel que soit cet ébranlement, les vîtesses des molécules d'air situées sur un même rayon, sont en raison inverse des distances au centre du mouvement, quand ces distances sont très-grandes par rapport aux dimensions de la portion d'air primitivement ébranlée. Si donc on compare le son au choc d'un fluide contre un obstacle fixe, qui est ici l'organe de l'ouie; et si l'on suppose ce choc proportionnel au carré de la vîtesse du fluide, il en résultera que l'intensité du son sur un même rayon sonore, doit décroître proportionnellement au carré de la distance au corps sonore, du moins lorsque cette distance est devenue fort grande. L'angle que fait la direction de la vîtesse d'une molécule d'air avec le rayon sonore qui passe par cette molécule, diminue continuellement à mesure que ce rayon augmente; de sorte que bientôt cet angle peut être regardé comme nul; or, il est naturel de penser que c'est la direction des vîtesses des molécules d'air qui nous fait juger de la direction du son, comme c'est leur grandeur qui détermine son intensité; cela explique donc pourquoi la direction du son nous indique l'endroit d'où il est parti.

Nous avons obtenu ces résultats relatifs à la direction et au décroissement

des vîtesses des molécules d'air, en développant l'intégrale de l'équation du son en série ordonnée suivant les puissances décroissantes de la distance au centre du mouvement. Après avoir trouvé cette série, nous l'avons transformée en une intégrale définie, qui nous a fait découvrir une classe très-étendue d'intégrales particulières sous forme finie, qui satisfont à l'équation du son. Chacune de ces intégrales répond à une hypothèse particulière sur la nature de l'ébranlement primitif; elles ont l'avantage de montrer comment cet ébranlement, produit dans une très-petite portion d'air, peut se répandre dans la masse entière, de manière que la vîtesse des molécules d'air ne soit pas la même dans tous les sens; et l'on peut vérifier sur chacune d'elles, que, malgré cette différence de vîtesse, celle du son est toujours la même sur tous les rayons sonores, comme nous l'avons démontré généralement.

Lorsque la masse d'air est terminée par une surface de position fixe, l'expérience fait voir que le son, parvenu à cette surface, est réfléchi par elle. M. *Lagrange* a considéré cette réflexion du son dans un canal cylindrique infiniment étroit; mais personne encore ne l'a déterminée d'une manière satisfaisante, en conservant à l'air ses trois dimensions, et en supposant la surface réfléchissante coupée sous tous les angles possibles par les rayons sonores. Quand cette surface est un plan indéfini, nous démontrons que la réflexion du son se fait comme celle de la lumière sur un miroir plan, c'est-à-dire, que le son réfléchi est le même pour la direction et pour l'intensité, que si l'ébranlement primitif avait eu lieu derrière le plan, à une distance égale à celle du véritable ébranlement primitif en avant du plan, et de manière que la droite qui joint les deux centres fût perpendiculaire à ce plan. Il résulte de là que chaque molécule d'air est mise en mouvement deux fois différentes; chaque fois elle décrit une petite ligne droite, la première fois sur le rayon direct, et la seconde fois sur le rayon réfléchi; ces deux mouvemens sont séparés par un intervalle de temps qui dépend de la distance de la molécule au plan fixe; et quand la molécule est très-voisine du plan, les deux mouvemens coïncident en partie, le commencement de l'un avec la fin

de l'autre ; par conséquent cette molécule décrit une petite courbe dont la nature dépend de celle de l'ébranlement primitif. On peut supposer cet ébranlement tel que les courbes dont nous parlons aient plusieurs points d'inflexion ; c'est le cas où les molécules d'air font plusieurs allées et venues sur le rayon direct et sur le rayon réfléchi. Mais quelles que soient ces courbes, les molécules qui ne touchent pas le plan, pourront en approcher indéfiniment et ne l'atteindront jamais, et les lignes qu'elles décrivent seront toujours terminées par deux droites, l'une dirigée suivant le rayon direct, l'autre suivant le rayon réfléchi ; au contraire, les molécules qui touchent le plan n'en sortiront point, et leur mouvement aura lieu dans le plan même.

Dans le système de l'émission de la lumière, il suffirait de savoir comment la lumière est réfléchie sur un plan, pour en conclure sa réflexion sur une surface quelconque ; parce que l'on peut considérer isolément chaque rayon lumineux, et substituer à la surface réfléchissante son plan tangent au point où ce rayon vient tomber : ce n'est plus ensuite qu'une simple question de géométrie, de déterminer l'intensité de la lumière réfléchie en un point donné, ou, ce qui est la même chose, le nombre de rayons réfléchis qui viennent se croiser en ce point. Mais, quand on veut savoir comment les ondes produites dans un fluide élastique ou dans un fluide incompressible, sont réfléchis par une surface qui termine ce fluide, il faut nécessairement considérer la réflexion de l'onde entière, et déterminer la figure et la vîtesse de l'onde réfléchie. C'est ce qui fait la difficulté du problème, qui ne peut être résolu que pour chaque surface réfléchissante en particulier.

En supposant que le son parte de l'un des foyers d'un ellipsoïde de révolution, et qu'il soit réfléchi par sa surface, nous démontrons rigoureusement que le son réfléchi forme une onde sonore dont le centre est à l'autre foyer de l'ellipsoïde, et qui se rapproche continuellement de cet autre foyer, en conservant toujours la figure sphérique.

Les rayons de l'onde sonore directe et de l'onde sonore réfléchie, qui aboutissent à un même point de la surface réfléchissante, font donc des

angles égaux avec la normale en ce point ; ainsi l'on peut dire que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, comme dans la réflexion de la lumière, quoique cela ne tienne pas à la même cause. De plus, nous déduisons l'intensité du son réfléchi de celle du son direct ; et le calcul fait voir que le rapport de ces intensités sur deux rayons sonores qui aboutissent à un même point de la surface, est le même que celui qui aurait lieu, dans le même cas, entre la lumière directe et la lumière réfléchie. Sur un même rayon sonore, l'intensité du son réfléchi va en croissant à mesure que l'on s'approche du second foyer de l'ellipsoïde ; de manière que, pour des points voisins de ce foyer, cette intensité est beaucoup plus grande que celle du son direct. Ce résultat est confirmé par l'expérience ; car on sait que si l'on parle à voix basse au foyer d'une voûte elliptique, la voix se fait entendre distinctement à l'autre foyer, tandis qu'elle disparaît en tout autre point. Quant à la vîtesse du son réfléchi, elle est la même que celle du son direct ; d'où il suit que le son parvient en un point quelconque, par une ligne brisée, dans le même temps que le son direct emploierait à parcourir une ligne droite égale en longueur à cette ligne brisée.

Ce qui est démontré par un ellipsoïde de révolution dans lequel la distance des foyers est quelconque, convient également au paraboloïde, en supposant que cette distance devienne infinie. Le son produit au foyer d'un paraboloïde de révolution, sera donc réfléchi par sa surface, parallèlement à son axe, et réciproquement.

Nous avons aussi considéré le son produit à l'un des foyers d'un hyperboloïde de révolution, et réfléchi par sa surface concave ou convexe ; cette réflexion présente des propriétés analogues à celles de la réflexion sur l'ellipsoïde. Enfin, si l'on fait abstraction d'une dimension de l'air, on trouve que le son produit au foyer d'une section conique, est réfléchi vers l'autre foyer.

Il existe une différence sensible entre la vîtesse du son, calculée d'après la théorie, et celle qui résulte de l'expérience. Tous les physiciens qui ont mesuré directement cette vîtesse, s'accordent à la trouver plus grande

que la vîtesse calculée. Les membres de l'Académie des Sciences ont trouvé que le son parcourt 337^m par seconde sexagésimale ; or, si l'on fait usage des données sur l'élasticité de l'air et sur sa densité, qui résultent des expériences les plus récentes, on trouve que la vîtesse du son, calculée d'après la théorie, est seulement égale à 282^m, quantité trop petite d'un *sixième*.

Nous ne rappellerons pas ici toutes les hypothèses que l'on a faites pour accorder, sur ce point, le calcul et l'observation ; une seule mérite l'attention des physiciens.

M. *Lagrange* avait déjà remarqué (*Mémoires de Turin*, tome 2) que l'on pouvait déduire de l'analyse la vîtesse observée, en supposant que dans la compression de l'air, son élasticité augmentât plus rapidement que sa densité ; mais il observe lui-même que cette supposition n'est point admissible, puisque *Mariotte* et tous ceux qui ont répété ses expériences, ont trouvé que la densité de l'air croît dans le même rapport que les poids qui le compriment, tant que la température reste invariable. Cependant on peut concilier cette loi de *Mariotte* avec l'accroissement d'élasticité qu'exige la vîtesse du son : c'est ce qu'a fait M. *Laplace*, en ayant égard au développement de chaleur qui accompagne la compression de l'air. En effet, il est maintenant bien connu que, quand on comprime un volume donné d'un gaz quelconque, on en dégage une quantité de chaleur assez grande pour enflammer un corps combustible, mais qui se dissipe bientôt sous forme rayonnante, ou autrement ; or, à densité égale, l'élasticité de l'air augmente ou diminue avec la température ; la loi des densités proportionnelles aux pressions, suppose donc que l'on a laissé à l'air comprimé le temps de perdre l'augmentation de chaleur produite par la compression ; et dans le premier moment, l'élasticité doit croître dans un plus grand rapport que la densité. On manque d'expériences directes pour déterminer la quantité de chaleur rendue sensible dans la compression de l'air ; d'ailleurs, dans la production du son, chaque couche d'air est comprimée entre deux autres couches d'air, et il pourrait se faire que, dans un pareil mode de

compression, la chaleur rendue sensible ne fût pas la même que quand nous comprimons un volume d'air dans un vaisseau fermé : il est donc impossible de déterminer, *à priori*, l'augmentation de l'élasticité due au développement de chaleur qui accompagne la propagation du son. Quoi qu'il en soit, cet accroissement n'en est pas moins incontestable, et l'on ne saurait douter qu'il n'influe sur la vîtesse du son. La différence qui existe entre le calcul et l'observation, provient-elle de cette seule cause? Il nous semble qu'on sera autorisé à le conclure, si l'on ne peut faire aucune objection contre l'analyse d'où l'on a déduit la vîtesse du son, et si en même temps on a eu égard, dans le calcul de cette vîtesse, à toutes les circonstances physiques qui peuvent avoir quelque influence sur le résultat. En comparant alors la vîtesse calculée à la vîtesse observée, on déterminera la quantité de chaleur rendue sensible dans la production du son, et employée à augmenter l'élasticité de l'air. On trouvera dans la suite de notre Mémoire, le résultat de la comparaison de ces deux vîtesses.

Dans le calcul d'où l'on déduit la vîtesse du son, on considère la vîtesse des molécules d'air comme très-petite, et l'on néglige le carré et les puissances supérieures de cette vîtesse. *Euler* avait pensé que la différence entre le calcul et l'observation tenait à cette circonstance. Selon lui, la vîtesse des molécules d'air qui produit le son, n'est pas assez petite pour qu'on puisse négliger son carré sans erreur sensible, sur-tout quand l'intensité du son est fort grande, comme dans les cas où l'on a déterminé sa vîtesse par l'observation. Pour lever cette difficulté, nous avons considéré la propagation du son dans une ligne d'air, et nous n'avons supprimé aucun terme de l'équation du mouvement. Alors cette équation n'a plus la forme linéaire; elle n'est plus intégrable sous forme finie; mais elle admet, sous cette forme, une intégrale particulière qui renferme une fonction arbitraire, et qui suffit pour déterminer le mouvement de l'air, quand on suppose que la vîtesse des molécules, sans être très-petite, est seulement plus petite que celle du son. Au moyen de cette intégrale, on démontre, en toute rigueur, que

la vîtesse du son est indépendante de celle des molécules d'air, ainsi que de la cause qui a produit le son. Le son, fort ou faible, se transmet donc avec la même vîtesse, ce qui est conforme à l'expérience.

Tout ce que nous venons de dire suppose la température et la densité constantes dans toute la masse d'air; mais comme la vîtesse du son est égale à la racine carrée du rapport de l'élasticité de l'air à sa densité (quand on néglige la correction due au développement de la chaleur), il s'ensuit que toutes les fois que ce rapport ne changera pas, la vîtesse du son ne changera pas non plus ; d'où nous pouvons conclure qu'en supposant toutes les couches de l'atmosphère à la même température, la vîtesse du son doit être la même que si la densité de l'air ne variait pas en passant d'une couche à l'autre; car dans ce passage l'élasticité varie dans le même rapport que la densité, quelle que soit la loi de la pesanteur. Il n'en sera pas de même si la température varie en même temps que la densité; alors le son ne se transmettra plus d'un mouvement uniforme, et, de plus, sa vîtesse ne sera pas la même sur tous les rayons sonores ; en sorte que l'onde sonore n'aura pas une figure sphérique, comme dans le cas de la température constante. Supposons, par exemple, que la température décroisse proportionnellement à la hauteur verticale, à mesure que l'on s'élève au-dessus de la surface de la terre, ce qui a effectivement lieu dans la nature, comme il résulte de la théorie des réfractions comparée à l'expérience (*Voyez* le 10.e livre de la Mécanique céleste). Dans ce cas, si l'on imagine un rayon sonore, partant d'un point élevé dans l'atmosphère et aboutissant à la surface de la terre, la température, et par conséquent le rapport de l'élasticité à la densité de l'air, croîtront sur ce rayon, proportionnellement à sa longueur multipliée par le cosinus de l'angle qu'il fait avec la verticale; d'où l'on peut conclure que le mouvement du son sur chaque rayon sonore, sera de même nature que celui d'un corps pesant qui glisserait sur ce rayon comme sur un plan incliné, et qui partirait de l'origine du rayon avec une vîtesse donnée. Ainsi, la vîtesse du son sera d'autant plus grande que le rayon sonore s'écartera moins de la verticale, et cette vîtesse sur

un même rayon s'accélérera proportionnellement au temps écoulé depuis l'origine du mouvement.

L'équation aux différences partielles qui renferme la théorie du son ; change de forme quand on a égard à la pesanteur de l'air et à la variation de température. Pour en déduire directement la vîtesse avec laquelle le son se propage, il faut employer l'intégrale de cette équation, exprimée au moyen d'une intégrale définie, et l'on est conduit de cette manière à l'expression de la vîtesse que nous ont indiquée les considérations précédentes. Cette même intégrale fournit aussi un moyen de déterminer l'intensité du son produit à différentes hauteurs dans l'atmosphère. Lorsque la température est supposée constante, on parvient à ce résultat remarquable, que l'intensité du son ne dépend que de la distance qu'il a parcourue, et de la densité de la couche de l'atmosphère d'où il est parti ; de sorte que cette intensité est la même, dans tous les cas, que si l'atmosphère était homogène et d'une densité égale à celle de cette couche. Il suit de là que les personnes qui s'élèvent en ballon, doivent entendre le bruit qui a lieu à la surface de la terre, aussi bien que si elles fussent restées à cette surface même ; tandis que le bruit qu'elles produisent dans une couche élevée de l'atmosphère, est aussi faiblement entendu à la surface de la terre, qu'il le serait dans cette même couche, à distance égale. On s'assure aisément que la variation de température, d'une couche à une autre de l'atmosphère, ne saurait altérer sensiblement ce résultat, qui paraît en effet conforme à l'expérience.

En général, il est facile d'obtenir des intégrales définies qui satisfassent à une équation donnée aux différences partielles; mais ces intégrales ne sont le plus souvent qu'un simple jeu d'analyse, qui n'apprend rien sur la nature de la fonction qu'on veut déterminer, et qui n'avance en rien la solution du problème qu'on se propose de résoudre. Celles dont M. *Laplace* a montré l'usage pour intégrer les équations aux différences partielles du second ordre à trois variables (*Mémoires de l'Académie*, année 1779), ne sont pas dans le même cas; ce sont, au contraire, des intégrales de cette forme qui nous ont donné la vîtesse et l'intensité du

du son, lorsque la densité et la température de l'air sont supposées variables; et M. *Laplace* s'en était déjà servi pour déterminer la vîtesse du son dans le cas où l'on fait abstraction d'une dimension de l'air, et où l'on suppose que l'intensité ne dépend que de la distance au centre de l'ébranlement primitif. Beaucoup d'autres questions, comme la transmission du mouvement dans une chaîne pesante, la propagation du son dans un tuyau dont la largeur n'est pas constante, les vibrations des cordes inégalement épaisses, se résolvent au moyen des intégrales définies. Pour en donner un exemple, nous avons résolu, à la fin de notre Mémoire, le problème de la chaîne pesante, en la supposant homogène et d'une égale épaisseur dans toute son étendue.

Équations différentielles du Mouvement de l'air.

[1.] POUR prendre la question sous le point de vue le plus général, considérons un fluide élastique dont toutes les molécules sont soumises à l'action de forces quelconques. Soient m une de ces molécules; x, y, z les trois coordonnées rectangulaires de cette molécule, au bout du temps t écoulé depuis l'origine du mouvement; u, v, v' les trois vîtesses de m, au même instant, respectivement parallèles aux axes des x, y, z; enfin, soient, toujours au bout du temps t, ρ et p la densité de m et la pression que cette molécule supporte en vertu de son élasticité, cette pression étant rapportée à l'unité de surface. Si la température était la même dans toute la masse fluide, p serait proportionnelle à ρ, d'après la loi de *Mariotte*; généralement p dépendra de la température et de la densité de m; mais nous supposerons le fluide tellement disposé, que les molécules de même densité aient aussi même température, et alors nous pourrons regarder p comme fonction de ρ seulement.

Décomposons toutes les forces appliquées à la molécule m, en trois autres X, Y, Z, dirigées respectivement suivant les coordonnées x, y, z, et tendantes à augmenter ces coordonnées. La formule $Xdx + Ydy + Zdz$

est une différentielle exacte, toutes les fois que les forces appliquées au point m sont dirigées vers des centres fixes ou mobiles, et que chaque force n'est fonction que de la distance du point m au centre vers lequel elle est dirigée; ce qui est le cas de toutes les forces de la nature. Nous pouvons donc faire

$$Xdx + Ydy + Zd\zeta = dq,$$

q étant une fonction de x, y, ζ. Nous supposerons également que la formule $udx + vdy + v'd\zeta$ soit une différentielle exacte, et nous ferons

$$udx + vdy + v'd\zeta = d\varphi,$$

φ désignant une fonction de x, y, ζ, t, et la différentielle $d\varphi$ étant prise seulement par rapport à x, y, ζ. Cette supposition est permise toutes les fois que le fluide ne fait que des oscillations très-petites autour de l'état d'équilibre, et que l'on ne retient dans le calcul que les premières puissances des vîtesses u, v, v'; or, c'est particulièrement ce genre de mouvement que nous nous proposons d'examiner dans la suite de ces recherches. D'ailleurs on démontre que la formule $udx + vdy + v'd\zeta$ est une différentielle exacte pour toutes les valeurs de t, si cela a lieu pour une seule valeur particulière de cette quantité. Il suffit donc, pour légitimer notre supposition, d'imaginer que l'ébranlement primitif du fluide a été tel, que la formule en question fût alors une différentielle exacte; ce qui comprend le cas où les vîtesses initiales des molécules sont toutes nulles, et une infinité d'autres cas.

Cela posé, les équations du mouvement du fluide se réduisent à deux (*Voyez* la Mécanique analytique), savoir :

$$q - \int \cdot \frac{dp}{\rho} = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{d\zeta^2} \right) \ldots \text{(a)},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d.\rho \frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \frac{d.\rho \frac{d\varphi}{dy}}{dy} + \frac{d.\rho \frac{d\varphi}{d\zeta}}{d\zeta} = 0 \ldots\ldots\ldots \text{(b)}.$$

Comme p est une fonction donnée de ρ, ces deux équations ne renferment que les deux inconnues ρ et φ. En les intégrant, on aurait donc

les valeurs de Φ et ρ en fonctions de x, y, z, t; et, par suite, on aurait celles de u, v, v', au moyen des équations

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad v' = \frac{d\varphi}{dz};$$

par conséquent le problème serait résolu complétement, puisqu'on aurait à chaque instant, et en un lieu quelconque de la masse fluide, la densité, la pression, la vîtesse et la direction du fluide. L'intégration générale de ces équations est impossible; mais elles se simplifient beaucoup, lorsqu'il s'agit de l'espèce particulière de mouvement de l'air qui produit le son; et quoiqu'elles ne deviennent point encore intégrables sous forme finie, on peut cependant en déduire les propriétés les plus importantes de ce mouvement: je veux dire celles qui sont relatives à sa propagation et à sa réflexion.

Propagation du Son dans une masse d'air dont la densité et la température sont constantes.

[2.] Nous ferons abstraction dans cet article de la pesanteur de l'air, et nous supposerons la densité et la température constantes dans toute l'étendue de la masse fluide. Concevons donc une pareille masse d'air en repos; supposons que l'on vienne à en comprimer ou dilater une portion très-petite, et qu'en même temps on communique, par un moyen quelconque, des vîtesses aux molécules qui composent cette portion d'air: cet ébranlement partiel se répandra dans la masse entière, de proche en proche et par ondulations; or, c'est la loi de cette *propagation* qu'il s'agit de découvrir.

Pour fixer les idées, nous supposerons que la portion d'air primitivement ébranlée soit une sphère dont nous représenterons le rayon par α, et au centre de laquelle nous placerons l'origine des coordonnées x, y, z. La condensation et la vîtesse des molécules varient d'une manière quelconque dans l'intérieur de cette sphère; de sorte que, si la portion d'air ébranlée n'était point une sphère, on pourrait toujours lui supposer

cette figure, pourvu que l'on supposât en même temps que les vîtesses et les condensations sont nulles dans certaines parties de cette sphère. Nous appellerons *onde sonore*, la partie de l'air en mouvement à chaque instant, et *rayons sonores*, les lignes menées du centre de l'ébranlement primitif aux différens points de l'onde sonore. Enfin, nous regarderons comme très-petites les condensations et les vîtesses des molécules d'air qui produisent la sensation du son; et nous supprimerons dans le calcul les produits et les carrés de ces quantités, ainsi que l'ont fait tous les auteurs qui se sont occupés de la théorie du son. Lors même que les condensations et les vîtesses initiales ne seraient pas très-petites, elles ne tarderaient pas à le devenir, puisque l'ébranlement primitif a eu lieu dans une portion d'air dont les dimensions sont très-petites, et qu'il doit se répandre, en tous sens, dans une masse d'air indéfinie.

[3.] SOIENT D la densité et h la hauteur du baromètre, dans toute l'étendue de la masse d'air, avant que le mouvement ait commencé; faisons $\rho = D(1+\gamma)$, en sorte que γ représentera la condensation, positive ou négative des molécules d'air, pendant le mouvement; en appelant g la gravité, et en prenant pour unité la densité du mercure, on aura gh pour la pression correspondante à la densité D, pression qui est la mesure de l'élasticité de l'air; et d'après la loi de *Mariotte*, la pression deviendrait pendant le mouvement, $p = gh(1+\gamma)$, si la température ne variait pas. Mais ce mouvement étant accompagné d'une compression ou d'une dilatation de l'air, la température doit s'élever ou s'abaisser, et il en doit résulter une variation dans l'élasticité; d'ailleurs la condensation γ étant très-petite, on peut supposer la variation de température proportionnelle à cette condensation; il faudra donc ajouter à la quantité $gh(1+\gamma)$, un terme de la forme $gh.k\gamma$, pour avoir l'élasticité de l'air pendant le mouvement, k étant un coëfficient constant, dont nous déterminerons la valeur dans la suite de ce Mémoire. (*Voyez* l'article ayant pour titre : *Examen des différentes circonstances physiques qui peuvent influer sur la vîtesse du son*).

Ainsi nous aurons $p = gh(1+\gamma+k\gamma)$, et $\int \frac{dp}{\rho} = a^2 . \log.(1+\gamma)$, en faisant, pour abréger, $\frac{gh}{D} . (1+k) = a^2$. Les équations (a) et (b) du n.° 1, deviendront donc

$$a^2\gamma + \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0;$$

en faisant attention qu'on a $q = 0$, puisqu'aucune force n'agit sur les molécules d'air; et en supprimant les termes de seconde dimension par rapport à la condensation γ et aux vîtesses $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$. Éliminant γ entre ces deux équations, il vient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) \ldots (1).$$

C'est l'équation connue qui renferme la théorie du son; et quand la fonction φ sera déterminée, ses différences partielles par rapport à x, y, z, feront connaître la vîtesse de la molécule d'air qui répond aux coordonnées x, y, z, respectivement parallèles à ces trois coordonnées, tandis que la différence $\frac{d\varphi}{dt}$ donnera la condensation de la même molécule, en vertu de l'équation $a^2\gamma + \frac{d\varphi}{dt} = 0$.

L'équation (1), même en faisant abstraction d'une dimension de l'air, ce qui la réduit à

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\right),$$

n'est pas intégrable sous forme finie, c'est-à-dire, que son intégrale générale ne peut être exprimée qu'en série infinie. M. *Legendre* a démontré directement cette proposition (*Mémoires de l'Académie*, année 1787); et d'ailleurs on savait déjà que la dernière équation n'était pas intégrable sous forme finie, dans le cas particulier où φ n'est fonction que de t et $\sqrt{(x^2+y^2)}$; d'où l'on pouvait conclure, à plus forte raison, qu'elle ne l'était pas quand φ est une fonction de t, x, y.

Il est facile d'obtenir des intégrales particulières sous forme finie, qui satisfassent à l'équation (1). Ces intégrales répondent à des hypothèses particulières sur la nature de l'ébranlement primitif ; mais, jusqu'à présent, on n'en a trouvé que deux pour lesquelles l'ébranlement primitif soit renfermé dans une portion très-petite de la masse d'air : ce sont les seules qui puissent servir dans la théorie du son, où il s'agit de savoir comment un pareil ébranlement se répand dans la masse entière. Ces deux intégrales se rapportent au cas où l'on fait abstraction de deux dimensions de l'air, et au cas où la quantité Φ n'est fonction que de t et $\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$; il en existe une infinité d'autres que nous donnerons bientôt.

[4.] TRANSFORMONS les coordonnées x, y, z, en coordonnées polaires qui aient la même origine : soient r le rayon vecteur, u le cosinus de l'angle que ce rayon fait avec l'axe des z, ω l'angle que fait la projection du même rayon sur le plan des x et y, avec l'axe des x; on aura

$$z = ru,\ x = r.\sqrt{(1-u^2)}.\cos.\omega,\ y = r.\sqrt{(1-u^2)}.\sin.\omega;$$

et l'équation (1) deviendra

$$\frac{d^2.r\varphi}{dt^2} = a^2.\left(\frac{d^2.r\varphi}{dr^2} + \frac{d.(1-u^2)\ \frac{d.r\varphi}{du}}{r^2.du} + \frac{1}{r^2(1-u^2)}.\frac{d^2.r\varphi}{d\omega^2}\right)\ldots(2).$$

On aura, de plus,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dz}.u + \frac{d\varphi}{dx}.\sqrt{(1-u^2)}.\cos.\omega + \frac{d\varphi}{dy}.\sqrt{(1-u^2)}.\sin.\omega;$$

d'où l'on peut conclure que $\frac{d\varphi}{dr}$ exprimera la vîtesse suivant le rayon r, car les trois termes de la valeur de $\frac{d\varphi}{dr}$, ne sont autre chose que les trois vîtesses $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, décomposées suivant ce rayon.

On trouvera aussi

$$\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2} = \frac{d\varphi^2}{dr^2} + \frac{d\varphi^2}{du^2}.\frac{1-u^2}{r^2} + \frac{d\varphi^2}{d\omega^2}.\frac{1}{r^2(1-u^2)};$$

équation qui donnera la valeur de la vîtesse dans sa propre direction; de sorte que si l'on appelle m, l'angle que cette direction fait avec le rayon r, on aura

$$\cos. m = \frac{\frac{d\varphi}{dr}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dr^2} + \frac{d\varphi^2}{du^2}\cdot\frac{1-u^2}{r^2} + \frac{d\varphi^2}{d\omega^2}\cdot\frac{1}{r^2(1-u^2)}\right)}}.$$

[5.] En multipliant tous les termes de l'équation (2), par $du\,d\omega$, et intégrant ensuite par rapport à u et à ω, depuis $u = 1$ jusqu'à $u = -1$, et depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$ (π représente le rapport de la circonférence au diamètre), on aura

$$\frac{d^2.rR}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2.rR}{dr^2},$$

R désignant, pour abréger, l'intégrale $\int. \Phi\,du\,d\omega$. En effet, le terme $\frac{d.(1-u^2)\frac{d.r\varphi}{du}}{du}$, multiplié par du, et ensuite intégré par rapport à u, donne $(1-u^2)\frac{d.r\varphi}{du}$, quantité nulle aux deux limites $u = 1$ et $u = -1$; et le terme $\frac{d^2.r\varphi}{d\omega^2}$, multiplié par $d\omega$, et ensuite intégré par rapport à ω, donne $\frac{d.r\varphi}{d\omega}$, quantité qui a la même valeur aux deux limites $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$.

L'intégrale de la dernière équation est

$$R = \frac{f(r-at)}{r} + \frac{F(r+at)}{r},$$

f et F étant les deux fonctions arbitraires. On tire de là

$$r^2\cdot\frac{dR}{dr} = r.f'(r-at) - f(r-at) + r.F'(r+at) - F(r+at),$$

$$r^2\cdot\frac{dR}{dt} = ar.F'(r+at) - ar.f'(r-at),$$

en désignant par $f'(r-at)$, $F'(r+at)$, les différentielles de $f(r-at)$, $F(r+at)$, prises par rapport à r, et divisées par dr. Or, si l'on conçoit une surface sphérique dont le rayon soit r, et dont

le centre soit à l'origine des coordonnées, et si l'on décompose la vîtesse de chacune des molécules d'air, placées à cette surface, suivant le rayon r qui aboutit à cette molécule; il est évident que $r^2 . \frac{dR}{dr}$ sera la somme de toutes ces vîtesses décomposées, et que $-\frac{r^2}{a^2} . \frac{dR}{dt}$ exprimera la somme des condensations des mêmes molécules. Mais, à l'origine du mouvement, l'air n'a été ébranlé que dans une portion qui s'étendait depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \alpha$, autour de l'origine des coordonnées que nous avons placées au centre de l'ébranlement primitif; les deux fonctions $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dt}$ doivent donc être nulles, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de r qui surpassent α; condition qui sera remplie, si les fonctions fr et Fr sont nulles pour toutes ces valeurs de r : alors la fonction $f(r - at)$ sera nulle tant qu'on aura $r > at + \alpha$, et la fonction $F(r + at)$ sera nulle toutes les fois qu'on aura $r > \alpha - at$; je dis de plus, que $f(r - at)$ sera aussi nulle, quand on aura $r < at$. En effet, imaginons une sphère dont le rayon soit $\alpha' < \alpha$, et dont le centre soit à l'origine des coordonnées; supposons que les molécules d'air qui font partie de cette sphère, n'aient reçu ni condensations ni vîtesses à l'origine du mouvement, il faudra que $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dt}$ soient nulles, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de $r < \alpha'$; fr sera donc nulle pour les valeurs de $r < \alpha'$, comme pour les valeurs de $r > \alpha$; donc $f(r - at)$ sera nulle quand on aura $r < at + \alpha'$; et comme cette conclusion a lieu, quelque petit que soit le rayon α', elle subsiste encore quand on a $\alpha' = 0$, et il s'ensuit que $f(r - at)$ sera nulle toutes les fois qu'on aura $r < at$. D'après cela, les valeurs ci-dessus de $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dt}$ seront nulles tant qu'on aura $r > at + \alpha$; à l'instant où l'on aura $r = at + \alpha$, les quantités $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dt}$ prendront des valeurs autres que zéro, et elles redeviendront nulles aussitôt qu'on aura $r = at$. Les molécules d'air, placées à la distance r de l'origine des coordonnées, ne commenceront donc

donc à s'ébranler que quand on aura $r = at + \alpha$, et leur ébranlement ne pourra durer que jusqu'à ce qu'on ait $r = at$, c'est-à-dire, pendant un temps égal à $\frac{\alpha}{a}$: elles s'ébranleront donc toutes au même instant à très-peu-près, puisque la durée de leur ébranlement sera très-courte, α étant toujours fort petit par rapport à a. Ainsi, de quelque manière que le son ait été produit, *sa vîtesse sera la même sur tous les rayons sonores, l'onde sonore conservera toujours une figure sphérique, et la vîtesse de cette onde sera constante et égale à* a.

Observons que l'on satisfait aux équations $\frac{dR}{dr} = 0$ et $\frac{dR}{dt} = 0$, quand $t = 0$, autrement qu'en prenant $fr = 0$ et $Fr = 0$. En effet, ces équations donnent

$$rf'r - fr + rF'r - Fr = 0,$$
$$F'r - f'r = 0,$$

d'où l'on tire

$$fr = b + cr, \quad Fr = -b + cr,$$

b et c étant des constantes arbitraires. On aurait alors

$$f(r - at) = b + cr - at, \quad f'(r - at) = c,$$
$$F(r + at) = -b + cr + at, \quad F'(r - at) = c;$$

mais en faisant usage de ces valeurs, on trouve que celles de $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dt}$ sont nulles pour toutes les valeurs de t, comme si l'on eût pris $fr = 0$, $Fr = 0$. Cependant il était bon de faire cette observation, pour prévenir une difficulté qu'on aurait pu élever contre la rigueur de la démonstration précédente. On pourrait aussi craindre que les fonctions $\frac{dR}{dr}$, $\frac{dR}{dt}$, ne fussent égales à zéro, sans que les vîtesses et les condensations des molécules d'air placées à la distance r de l'origine des coordonnées, fussent nulles ; alors il arriverait que ces molécules seraient ébranlées avant que $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dt}$ eussent pris des valeurs, ou après que ces fonctions seraient redevenues nulles, ce qui renverserait notre démonstration.

Mais il est évident que cela ne peut avoir lieu qu'en faisant une supposition particulière sur la nature de l'ébranlement primitif, et en plaçant l'origine des coordonnées d'une manière convenable; d'où il suit qu'en transportant cette origine en un autre point de la portion d'air ébranlée, les fonctions $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dt}$ cesseront de pouvoir être nulles, sans que les vîtesses et les condensations le soient aussi.

[6.] MAINTENANT, si l'on veut connaître la grandeur et la direction de la vîtesse des molécules d'air en chaque point de l'onde sonore, il faut intégrer en série l'équation (2). Pour cela, faisons $x = r - at$, et

$$r\varphi = f(x, u, \omega) + \frac{1}{r} \cdot \int f_1(x, u, \omega)\, dx + \frac{1}{r^2} \cdot \int^2 f_2(x, u, \omega)\, dx^2 + \&c.\ldots. \text{(f)};$$

f, f_1, f_2, &c., désignant des fonctions de x, u, ω, qu'il s'agit de déterminer. Substituons cette série à la place de $r\Phi$, dans l'équation (2), et comparons les termes multipliés par des puissances semblables de r, nous aurons généralement

$$r(n+1) \cdot f_{n+1} = n \cdot n+1 \cdot f_n + \frac{d.(1-u^2)\,\frac{df_n}{du}}{du} + \frac{d^2 f_n}{d\omega^2} \cdot \frac{1}{1-u^2},$$

n étant un indice quelconque. De cette équation, on tirera successivement les valeurs de f_1, f_2, f_3, &c., au moyen de f qui restera une fonction arbitraire.

En faisant $x' = r + at$, on satisfera encore à l'équation (2), au moyen de la série

$$r\varphi = F(x', u, \omega) + \frac{1}{r} \cdot \int F_1(x', u, \omega)\, dx' + \frac{1}{r^2} \cdot \int^2 F_2(x', u, \omega) dx'^2 + \&c.\ldots \text{(F)},$$

F étant une fonction arbitraire de x', u, ω, et F_1, F_2, F_3, &c., étant d'autres fonctions de x', u, ω, qui se déduisent de la première, d'après l'équation générale,

$$r(n+1) \cdot F_{n+1} = n \cdot n+1 \cdot F_n + \frac{d.(1-u^2)\,\frac{dF_n}{du}}{du} + \frac{d^2 F_n}{d\omega^2} \cdot \frac{1}{1-u^2},$$

dans laquelle n est un indice quelconque. La somme de ces deux séries donnera l'intégrale complète de l'équation (2).

[7.] L'INTÉGRALE en série de l'équation (2), présentée sous cette forme, est propre à déterminer la vîtesse du son, que nous venons de trouver par un autre moyen. En effet, la portion d'air ébranlée à l'origine du mouvement, étant supposée s'étendre depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \alpha$, il faut que les quatre différences partielles $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{d\omega}$, $\frac{d\varphi}{du}$, $\frac{d\varphi}{dr}$, soient nulles, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de r qui surpassent α; or, on remplit cette condition en supposant,

1.° Que les fonctions $f(r, u, \omega)$ et $F(r, u, \omega)$ sont nulles pour toutes les valeurs de r qui surpassent α, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de u et ω; ce qui fait que les différences partielles de ces fonctions par rapport à u et à ω, et par conséquent toutes les fonctions f_1, f_2, f_3, &c.; F_1, F_2, F_3, &c., seront aussi nulles pour les mêmes valeurs de r;

2.° Que les intégrales $\int . f_1 (r, u, \omega)\, dr$, $\int . F_1 (r, u, \omega)\, dr$, sont prises depuis une valeur de r qui surpasse α, jusqu'à la valeur variable de r; en sorte que ces intégrales seront nulles quand cette seconde valeur de r surpassera aussi α;

3.° Que les doubles intégrales $\int^2 . f_2 (r, u, \omega)\, dr^2$, $\int^2 . F_2 (r, u, \omega)\, dr^2$, sont prises, une première fois, depuis une valeur de r, choisie arbitrairement, pourvu qu'elle surpasse α, jusqu'à la valeur variable de r, et une seconde fois, depuis une valeur de $r > \alpha$, jusqu'à la valeur variable de r; de manière que si cette dernière valeur de r surpasse aussi α, ces doubles intégrales sont nulles; et ainsi de suite.

Tous les termes de la série (f) seront donc nuls, tant qu'on aura $x > \alpha$ ou $r > at + \alpha$; de même tous les termes de la série (F) seront nuls, tant qu'on aura $r + at < \alpha$; donc la fonction Φ et ses différences partielles seront nulles, tant que r surpassera $at + \alpha$. Ce sera donc à l'instant où l'on aura $r = at + \alpha$, que les molécules d'air qui sont à la distance r de l'origine des coordonnées, commenceront à se mettre en

mouvement ; ainsi la vîtesse du son sera la même sur tous les rayons sonores, et sur chaque rayon elle sera constante et égale à a, comme nous l'avons déjà vu [n.° 5].

On peut aussi prouver que l'ébranlement des molécules situées à l'extrémité du rayon r, doit cesser quand on aura $r = at$. Il faut, pour cela, imaginer, comme nous l'avons fait plus haut [n.° 5], une sphère qui ait son centre à l'origine des coordonnées, et dont le rayon soit $\alpha' < \alpha$, et supposer que toutes les molécules d'air, comprises dans cette sphère, n'ont reçu ni condensations ni vîtesses à l'origine du mouvement. Dans cette hypothèse, les fonctions f, f_1, f_2, &c.; F, F_1, F_2, &c., devront être nulles, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de $r < \alpha'$, comme pour les valeurs de $r > \alpha$; et comme cela doit avoir lieu, quelque petit que soit le rayon α', il s'ensuit, quand α' est nul ou infiniment petit, que les fonctions f, f_1, f_2, &c. seront nulles, après un temps quelconque, si la valeur de x, ou de $r - at$, est négative. On conclut de là que tous les termes de la série (f) seront nuls, quand on aura $r < at$; tous les termes de la série (F) seront aussi nuls, si l'on a en même temps $r + at > \alpha$: la fonction φ et ses différences partielles redeviendront donc égales à zéro, dès l'instant qu'on aura $r < at$.

[8.] En supposant qu'il s'agisse des molécules d'air situées hors des limites de l'ébranlement primitif, et qu'on ait par conséquent $r > \alpha$; il est évident que tous les termes de la série (F) seront nuls, quel que soit le temps t; de sorte que, pour ces molécules, la valeur de $r\varphi$ se réduira à la série (f). De plus, si r est très-grand par rapport à α, ce qui a lieu pour les molécules très-éloignées du lieu où le son a été produit, et si l'on néglige les quantités de l'ordre $\frac{\alpha}{r}$, la série (f) se réduira à son premier terme. En effet, la fonction $f_1(x, u, \omega)$ n'ayant de valeurs que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \alpha$, il s'ensuit que le terme $\frac{1}{r} \cdot f \cdot f_1(x, u, \omega)\, dx$ est une quantité de l'ordre $\frac{\alpha}{r}$; de même la fonction $f_2(x, u, \omega)$ étant nulle pour toutes les valeurs de x qui tombent

hors des limites $x = 0$, $x = \alpha$, le terme $\frac{1}{r^2} \cdot f^2 \cdot f_2(x, u, \omega)\, dx^2$ sera une quantité de l'ordre $\frac{\alpha^2}{r^2}$; et ainsi de suite pour les autres termes de la série *(f)*.

On aura donc simplement

$$r\varphi = f(x, u, \omega);$$

divisant par r, et différenciant ensuite par rapport à r, on aura

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d.f(x, \omega, u)}{dr} - \frac{1}{r^2} \cdot f(x, u, \omega),$$

ou, plus simplement,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d.f(x, u, \omega)}{dr},$$

en négligeant le terme divisé par r^2. On trouvera aussi

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d.f(x, u, \omega)}{du},$$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d.f(x, u, \omega)}{d\omega};$$

et par conséquent [n.° 4],

$$\cos. m = \frac{\frac{df}{dr}}{\sqrt{\left[\left(\frac{df}{dr}\right)^2 + \left(\frac{df}{du}\right)^2 \cdot \frac{1 - u^2}{r^2} + \left(\frac{df}{d\omega}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^2(1 - u^2)}\right]}};$$

où l'on voit qu'à mesure que r augmentera, le cosinus de l'angle m approchera d'être égal à l'unité, c'est-à-dire, que l'angle formé par la direction de la vîtesse de chaque molécule d'air, avec le rayon sonore qui aboutit à cette molécule, diminuera indéfiniment.

Si donc nous considérons la propagation du son à une grande distance du lieu où il a été produit, nous pourrons supposer que les molécules d'air, pendant toute la durée de leur ébranlement, ne sortent pas du rayon sonore sur lequel elles sont placées; alors leur vîtesse sera égale à $\frac{d\varphi}{dr}$, et à cause de $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{dr}$, on voit que cette vîtesse, pour toutes

les molécules placées sur un même rayon, est en raison inverse de la distance au centre de l'ébranlement primitif; donc si l'on admet que l'intensité du son est proportionnelle au carré de cette vîtesse, il s'ensuivra que cette intensité doit décroître comme le carré des distances augmente, lorsque ces distances sont devenues fort grandes par rapport aux dimensions de la portion d'air primitivement ébranlée. Au reste, cette intensité peut varier d'une manière quelconque, en passant d'un point à un autre d'une même onde sonore, puisque $\frac{df}{dr}$ est une fonction de u et ω, dont la forme dépend de la nature de l'ébranlement primitif, ou de la cause qui a produit le son.

[9.] La série *(f)* peut être exprimée au moyen d'une intégrale définie, relative à une nouvelle variable h. En effet, il est facile de vérifier que l'on a généralement

$$\int^n . f_n(x, u, \omega)\, dx^n = \int . \frac{f_n(x, u, \omega).(x-h)^{n-1}.dh}{1.2.3.....n-1};$$

pourvu qu'on fasse $h = x$, après l'intégration; en prenant donc $\int . f(x, u, \omega)\, dx$, au lieu de $f(x, u, \omega)$, ce qui est permis, et en faisant, pour abréger, $\frac{x-h}{r} = \theta$, la série *(f)* deviendra

$$\int . [f(h, u, \omega) + \theta f_1(h, u, \omega) + \frac{\theta^2}{2} . f_2(h, u, \omega) + \text{&c.}]\, dh.$$

Soit

$$y = f + \theta . f_1 + \frac{\theta^2}{2} . f_2 + \frac{\theta^3}{2.3} . f_3 + \frac{\theta^4}{2.3.4} . f_4 + \text{&c.}$$

Convenons, pour simplifier, d'indiquer par la caractéristique δ, placée devant une fonction quelconque $\downarrow$ de u et ω, cette expression:

$$\delta\downarrow = \frac{d.(1-u^2)\frac{d\downarrow}{du}}{du} + \frac{d^2\downarrow}{d\omega^2} . \frac{1}{1-u^2};$$

nous aurons

$$\delta y = \delta f + \theta . \delta f_1 + \frac{\theta^2}{2} . \delta f_2 + \frac{\theta^3}{2.3} . \delta f_3 + \text{&c.};$$

et, à cause qu'on a généralement [n.° 6],

$$\delta f_n = 2(n+1).f_{n+1} - n.n+1.f_n,$$

le terme général de cette dernière série sera

$$\frac{\theta^n}{2.3\ldots n}.[2(n+1)f_{n+1} - n(+1).f_n];$$

d'où l'on peut conclure, en comparant cette série à celle qui exprime la valeur de y, l'équation

$$\delta y = \frac{d.(2\theta - \theta^2)\ \frac{dy}{d\theta}}{d\theta},$$

ou bien, en remettant pour δy ce qu'il représente,

$$\frac{d.(1-u^2)\ \frac{dy}{du}}{du} + \frac{d^2y}{d\omega^2}.\frac{1}{1-u^2} = \frac{d.(2\theta-\theta^2)\ \frac{dy}{d\theta}}{d\theta} \ldots (3)$$

On tirera de cette équation une valeur de y, renfermant deux fonctions arbitraires; mais l'une de ces fonctions se déterminera, en prenant les valeurs de y et $\frac{dy}{d\theta}$, relatives à $\theta = 0$, et en observant que la valeur de y étant prise pour la fonction $f(h, u, \omega)$, celle de $\frac{dy}{d\theta}$ doit être $f_1(h, u, \omega)$ qui est égale à $\frac{1}{2}.\delta f(h, u, \omega)$. Ayant réduit de cette manière les deux fonctions arbitraires à une seule, on aura $fydh$ pour la somme de la série *(f)*, en remplaçant h par x après l'intégration. On transformerait de même la série *(F)*.

Ce résultat est analogue à celui que M. *Laplace* a obtenu (*Mémoires de l'Académie*, année 1779), relativement aux équations du second ordre aux différences partielles à trois variables : les intégrales de ces équations s'expriment par des intégrales définies, relatives à une nouvelle variable; et la fonction qui est alors sous le signe intégral, dépend d'une équation différentielle à deux variables. De même ici, l'intégrale de notre équation à cinq variables, φ, t, r, u, ω, s'exprime par des intégrales définies; et la fonction sur laquelle porte le signe intégral, dépend d'une

équation à quatre variables. Si l'on supposait la fonction Φ indépendante de ω, l'équation (2) ne renfermerait plus que quatre variables, et l'équation (3), d'où dépend la valeur de y, ne serait plus qu'une équation à trois variables : en faisant $\theta = 1 + v$, cette équation prendrait la forme

$$\frac{d.(1-u^2)\frac{dy}{du}}{du} = \frac{d.(1-v^2)\frac{dy}{dv}}{dv};$$

équation fort simple, qui n'est cependant point intégrable sous forme finie.

[10.] Si l'on fait, pour abréger, $\int . y\,du\,d\omega = Y$, l'intégrale étant prise depuis $u = 1$ jusqu'à $u = -1$, et depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$, π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, l'équation (3) donnera

$$\frac{d.(2\theta - \theta^2)\frac{dY}{d\theta}}{d\theta} = 0;$$

d'où l'on tire

$$(2\theta - \theta^2)\frac{dY}{d\theta} = \text{const.};$$

mais il faut prendre cette constante arbitraire égale à zéro, sans quoi la valeur de Y ou de $\int y\,du\,d\omega$ renfermerait $\log.\theta$, ce qui ne doit pas être, puisque y représente une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de θ. On aura donc $\frac{dY}{d\theta} = 0$, et par conséquent Y sera une quantité indépendante de θ; ainsi Y sera une fonction de h, que nous désignerons par $\downarrow h$; mais en ayant seulement égard à la série (f), on a $r\Phi = \int . y\,dh$; d'où il suit $rR = \int . Y\,dh = \int . \downarrow h\,dh$, R représentant, comme plus haut, l'intégrale $\int . \Phi\,du\,d\omega$; et comme on doit faire $h = x = r - at$, après l'intégration, la quantité $\int . \downarrow h\,dh$ sera une fonction de $r - at$, et l'on aura $rR = \text{fonct.}\,(r - at)$. La série (F) donnerait de même $rR = \text{fonct.}\,(r + at)$; par conséquent la valeur complète de rR, sera

$$rR = \text{fonct.}\,(r - at) + \text{fonct.}\,(r + at),$$

comme nous l'avions déjà trouvé [n.° 5].

[11.]

[11.] Les intégrales définies que nous avons substituées aux séries *(f)* et *(F)*, vont nous servir à trouver une classe d'intégrales particulières de l'équation (2), qu'il serait difficile de découvrir en considérant les séries elles-mêmes.

Pour cela, observons que l'on satisfait à l'équation (3), en prenant $y = U.V$, U et V étant des fonctions, la première de u et ω, et la seconde de θ, que l'on déterminera au moyen des équations

$$\frac{d.(2\theta-\theta^2).\frac{dV}{d\theta}}{d\theta} + i.i + 1.V = 0,$$

$$\frac{d.(1-u^2).\frac{dU}{du}}{du} + \frac{d^2U}{d\omega^2}.\frac{1}{1-u^2} + i.i + 1.U = 0,$$

dans lesquelles i est un nombre entier et positif, que l'on peut prendre comme on voudra. On pourrait prendre tout autre coëfficient constant, à la place du coëfficient $i.i + 1$; mais en employant un coëfficient de cette forme, les fonctions U et V s'expriment sous forme finie. En effet, si l'on développe, suivant les puissances ascendantes de l'indéterminée θ, la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{[1-2\theta[uu'+\sqrt{(1-u^2)}.\sqrt{(1-u'^2)}.\cos.(\omega-\omega')]+\theta^2}]},$$

dans laquelle u' et ω' sont des constantes quelconques, on pourra prendre pour U le coëfficient de la puissance θ^i dans ce développement, lequel coëfficient est une fonction rationnelle et entière de u, $\sqrt{(1-u^2)}.\cos.\omega$, $\sqrt{(1-u^2)}.\sin.\omega$. (*Voyez* la Mécanique céleste, livre III, chapit. II.) D'ailleurs on satisfait à l'équation qui détermine V, en prenant

$$V = A + A_1.\theta + A_2.\theta^2 + A_3.\theta^3 + \ldots + A_i.\theta^i;$$

pourvu qu'on ait entre les coëfficiens A, A_1, A_2, A_3, $\ldots A_i$, l'équation générale

$$2(n+1)^2.A_{n+1} - n.n+1.A_n + i.i+1.A_n = 0,$$

de laquelle on déduira les valeurs de tous ces coëfficiens, au moyen du premier, qui restera une fonction arbitraire de h.

Ainsi l'on aura

$$y = U.(A + A_1.\theta + A_2.\theta^2 + \ldots A_i.\theta^i);$$

et l'on peut admettre cette valeur de y, puisque la relation qui doit exister [n.° 9] entre les valeurs de y et $\frac{dy}{d\theta}$, relatives à $\theta = 0$, a évidemment lieu; car ces valeurs sont $A.U$ et $A_1.U$: or, on a

$$A_1 = -\frac{i.i+1.A}{2}, \quad U = -\frac{\partial U}{i.i+1};$$

d'où il suit

$$A_1.U = \frac{A\partial U}{2} = \frac{\partial.AU}{2}.$$

Maintenant, si l'on remet $\frac{x-h}{r}$, à la place de θ, dans la valeur de y, si l'on multiplie par dh, que l'on intègre par rapport à h, et que l'on fasse $h = x$, après l'intégration; on aura, en supposant la fonction U indépendante de h,

$$r\varphi = U.(fx + \tfrac{1}{r}.\int f_1 x.dx. + \tfrac{1}{r^2}.\int^2 f_2 x.dx^2 + \tfrac{1}{r^3}.\int^3 f_3 x.dx^3 \ldots$$

$$\ldots + \tfrac{1}{r^i}.\int^i f_i\, x.dx^i),$$

fx étant une fonction arbitraire de x ou de $r - at$, et les fonctions $f_1 x$, $f_2 x$, $f_3 x \ldots\ldots f_i x$, dérivant de la première, d'après l'équation générale

$$2.(n+1)^2.f_{n+1}x - n.n+1.f_n x + i.i+1.f_n x = 0.$$

Comme on peut prendre pour i tel nombre entier et positif que l'on voudra, il s'ensuit qu'on aura une infinité de valeurs particulières de $r\varphi$, qui satisferont à l'équation (2), et la somme d'un nombre quelconque de ces valeurs satisfera encore à la même équation, à cause de sa forme linéaire. On peut aussi prendre pour x, indifféremment $r - at$ ou $r + at$; en sorte qu'on aura deux suites d'intégrales particulières de l'équation (2).

Ces différentes intégrales répondent à des hypothèses particulières

sur la nature de l'ébranlement primitif, qu'on pourra toujours supposer compris dans une portion d'air limitée de toutes parts, comme l'exige la théorie du son. On peut vérifier, sur chacune de ces intégrales, le théorème que nous avons démontré généralement; savoir, que la vîtesse du son est la même sur tous les rayons sonores, quoique son intensité varie en passant d'un rayon à un autre.

[12.] Si l'on donne à i toutes les valeurs possibles en nombres entiers et positifs, depuis $i = 0$ jusqu'à $i = \infty$; que l'on prenne successivement $x = r - at$ et $x = r + at$; enfin, que l'on fasse la somme de toutes ces valeurs particulières de $r\Phi$, en les rangeant suivant les valeurs croissantes de i, on aura l'intégrale complète de l'équation (2), développée en série ordonnée suivant des fonctions rationnelles et entières de u, $\sqrt{(1-u^2)}.\sin.\omega$, $\sqrt{(1-u^2)}.\cos.\omega$, dont la propriété est de satisfaire à l'équation générale,

$$\frac{d.(1-u^2)\frac{dU_i}{du}}{du} + \frac{d^2U_i}{d\omega^2}.\frac{1}{1-u^2} + i.i+1.U_i = 0,$$

dans laquelle i est un indice quelconque.

Nous indiquons cette forme de développement, à cause de son analogie avec la forme du développement que M. *Laplace* a donné pour l'intégrale de l'équation

$$\frac{d.(1-u^2)\frac{dV}{du}}{du} + \frac{d^2V}{d\omega^2}.\frac{1}{1-u^2} + \frac{rd^2.rV}{dr^2} = 0,$$

et dont il a si heureusement tiré parti dans la théorie des attractions des sphéroïdes et dans celle de la figure des planètes.

En partant de cette propriété des fonctions U_i (Mécanique céleste, liv. III, chap. II), que l'intégrale $\int U_i\,du\,d\omega$, prise depuis $u = 1$ jusqu'à $u = -1$, et depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$, est égale à zéro, excepté quand on a $i = 0$, on peut aisément retrouver l'équation

$$rR = \text{fonct.}\,(r-at) + \text{fonct.}\,(r+at).$$

Mélange des Sons simultanés.

[13.] La somme des deux séries *(f)* et *(F)* donne la valeur la plus générale de $r\varphi$ qui satisfasse à l'équation (2); cependant quand l'air a été ébranlé dans plusieurs lieux à-la-fois, il serait difficile de déterminer les fonctions arbitraires que ces séries renferment, de manière à représenter l'état de l'air à l'origine du mouvement. On élude cette difficulté, en observant que si l'on transporte l'origine des coordonnées x, y, z en un autre point, et que x', y', z' soient les nouvelles coordonnées, dont on n'a pas changé la direction, l'équation (1) du n.° 3 deviendra

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx'^2} + \frac{d^2\varphi}{dy'^2} + \frac{d^2\varphi}{dz'^2}\right);$$

de plus, si l'on désigne par r' le rayon vecteur d'une molécule quelconque, relatif à cette nouvelle origine, par u' le cosinus de l'angle que ce rayon fait avec l'axe des z', par ω' l'angle que la projection du même rayon sur la place des x', y' fait avec l'axe des x', l'équation précédente se changera en

$$\frac{d^2.r'\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2.r'\varphi}{dr'^2} + \frac{d.(1-u'^2)\,\frac{d.r'\varphi}{du'}}{r'^2\,.\,du'} + \frac{d^2.r'\varphi}{d\omega'^2}\,.\,\frac{1}{r'^2(1-u'^2)}\right),$$

équation que l'on doit regarder comme une transformée de l'équation (2) du n.° 4. On conclut de ce que cette transformée est semblable à l'équation (2) elle-même, que l'on satisfera encore à cette équation (2), en remplaçant dans les séries *(f)* et *(F)* les quantités u, ω, r, respectivement par u', ω', r', ce qui donnera de nouvelles séries que nous désignerons par *(f')* et *(F')*; d'ailleurs, à cause de la forme linéaire de l'équation (2), on peut ajouter ces nouvelles séries aux anciennes, et la somme satisfera également.

Maintenant, si l'air a été ébranlé à-la-fois vers l'origine des coordonnées r', u', ω' et vers celle des coordonnées r', u', ω'; si le premier ébranlement s'étendait depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \alpha$, et le second,

depuis $r' = 0$ jusqu'à $r' = \alpha'$; on représentera cet état primitif de l'air, en supposant que les fonctions arbitraires de $r - at$ et $r + at$ qui entrent dans les séries (f) et (F), sont nulles pour toutes les valeurs de ces quantités qui sont négatives, ou qui surpassent α, tandis que les fonctions arbitraires de $r' - at$ et $r' + at$, que renferment les séries (f') et (F'), sont nulles pour toutes les valeurs de $r' - at$ et $r' + at$ qui surpassent α', et pour toutes les valeurs négatives de $r' - at$. D'après cela, il est visible que les deux ébranlemens partiels se propageront indépendamment l'un de l'autre, et comme si chacun d'eux existait seul; et il en sera de même quand l'air aura été ébranlé en plus de deux endroits différens.

En général, désignons par r, u, ω les coordonnées polaires d'une molécule d'air par rapport à une certaine origine, et représentons par (f) et (F) les sommes des séries que nous avons trouvées [n.° 6], pour exprimer la valeur de $r\Phi$; désignons de même par r', u', ω'; r'', u'', ω'', &c., les coordonnées polaires de la même molécule par rapport à d'autres origines; soient (f'), (f''), (f'''), &c.; (F'), (F''), (F'''), &c., ce que deviennent (f) et (F), quand on y remplace les quantités r, u, ω, par leurs analogues r', u', ω'; r'', u'', ω''; r''', u''', ω''', &c. : on satisfera à l'équation (2), en prenant

$$\Phi = \frac{(f)}{r} + \frac{(F)}{r} + \frac{(f')}{r'} + \frac{(F')}{r'} + \frac{(f'')}{r''} + \frac{(F'')}{r''} + \&c.$$

Mais il est bon d'observer que l'équation

$$\Phi = \frac{(f)}{r} + \frac{(F)}{r},$$

n'en est pas moins l'intégrale complète de l'équation (2), puisque cette valeur de Φ renferme deux fonctions arbitraires; ainsi l'addition des autres termes n'augmente en rien la généralité de la valeur de Φ, seulement cette valeur prend une forme plus convenable pour l'usage que l'on en veut faire, et nous en allons voir un exemple remarquable dans la théorie des *échos*.

Réflexion du Son.

[14.] Lorsque la masse d'air dans laquelle le son se propage, est terminée par une surface de position fixe, il faut que toutes les molécules adjacentes à cette surface, n'aient aucune vîtesse suivant sa normale; car il est évident qu'elles ne peuvent que glisser le long de cette surface. Néanmoins, jusqu'à ce que le son soit parvenu à cette surface, il doit se propager absolument comme si elle n'existait pas; en prenant donc l'origine des coordonnées polaires r, u, ω, au centre de l'ébranlement primitif, il faut que la valeur de Φ renferme d'abord une série de la forme que nous avons trouvée plus haut; savoir :

$$\Phi = \frac{f(x,u,\omega)}{r} + \frac{1}{r^2}\cdot f\cdot f_1(x,u,\omega)\,dx + \frac{1}{r^3}\cdot f^2\cdot f_2(x,u,\omega)\,dx^2 + \&c.,$$

dans laquelle on a fait $x = r - at$, et où f, f_1, f_2, f_3, &c. sont des fonctions de x, u, ω, liées entre elles par une certaine équation, de telle sorte, que la première reste seule une fonction arbitraire [n.° 6]. La forme de cette fonction dépend de la nature de l'ébranlement primitif; s'il a eu lieu depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \alpha$, il faut que la fonction f, et par suite toutes les autres fonctions f_1, f_2, f_3, &c. soient nulles [n.° 7] pour toutes les valeurs de $x < 0$ ou $> \alpha$; par ce moyen, la formule précédente fera connaître la propagation du son, tant qu'il ne sera pas parvenu à la surface de position fixe. Mais pour avoir une formule d'où dépende la propagation du son, quand il aura atteint cette limite, il faut ajouter à la fonction Φ, une autre fonction Φ', que l'on déterminera de manière :

1.° Que cette fonction Φ' soit de même nature que la fonction Φ, c'est-à-dire, qu'elle satisfasse comme elle à l'équation (2);

2.° Que, pour chaque molécule adjacente à la surface de position fixe, la vîtesse suivant la normale, qui provient de la fonction Φ', soit toujours égale et de signe contraire à la vîtesse suivant la normale, qui provient de la fonction Φ;

3.° Que les différences partielles de φ', par rapport aux trois coordonnées et au temps, soient nulles tant que le son ne sera pas parvenu à la surface de position fixe, afin que le mouvement de l'air ne soit pas troublé avant que le son ait atteint cette surface.

Nous allons montrer par des exemples, comment on peut satisfaire à toutes ces conditions.

[15.] Supposons d'abord la masse d'air terminée par un plan indéfini. Appelons c le centre de l'ébranlement primitif, ou l'origine des coordonnées r, u, ω; du point c, abaissons une perpendiculaire sur le plan fixe, et prolongeons-la au-delà de ce plan, d'une quantité égale, jusqu'en un point c'; concevons, pour fixer les idées, que le plan fixe est horizontal, le point c au-dessous du plan, et le point c' au-dessus: on satisfera aux trois conditions qu'on vient d'énoncer, en prenant $x' = r' - at$, et

$$\varphi' = \frac{F(x', u', \omega')}{r'} + \frac{1}{r'^2}\int F_1(x', u', \omega')dx' + \frac{1}{r'^3}\int^2 F_2(x', u', \omega')dx'^2 + \&c.,$$

u', ω', r', étant des coordonnées polaires dont l'origine est au point c'; F, F_1, F_2, &c. étant en u', ω', x', les mêmes fonctions que f, f_1, f_2, &c. sont en u, ω, x; de sorte que l'on a $F = f$, $F_1 = f_1$, $F_2 = f_2$, &c., quand $u = u'$, $\omega = \omega'$, $x = x'$.

D'abord cette valeur de φ' satisfera à l'équation (2); ensuite, si on l'ajoute à la valeur de φ, il y aura deux ondulations sphériques dans la masse d'air, absolument identiques, l'une autour du point c, l'autre autour du point c'; quand la première parviendra aux molécules situées au-dessous du plan, la seconde n'y sera pas encore parvenue; d'où il suit que ces molécules seront ébranlées par le son direct, comme si le plan fixe n'existait pas: mais les deux ondulations atteindront en même temps les molécules adjacentes au plan fixe; et si l'on décompose les deux vîtesses d'une même molécule, suivant le plan et perpendiculairement au plan, ces dernières composantes seront égales et de signe

contraire ; par conséquent les molécules adjacentes au plan fixe n'auront jamais de vîtesses perpendiculaires à ce plan.

Après que les deux ondulations seront parvenues au plan fixe, celle qui se fait autour du point c' continuera à se propager au-dessous de ce plan ; les molécules d'air situées au-dessous de ce plan seront donc une seconde fois ébranlées, et le son réfléchi sera évidemment le même que si l'ébranlement primitif qui a produit le son direct, avait eu son centre au point c'. C'est ainsi que la lumière qui part d'un point lumineux placé en avant d'une glace, est réfléchi par cette glace, de manière que la lumière réfléchie est la même en grandeur et en direction, que si elle partait de l'image du point lumineux dans la glace.

Il est donc démontré que quand la surface réfléchissante est un plan indéfini,

1.° Chaque rayon sonore se réfléchit en faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion ;

2.° La vîtesse du son réfléchi est la même que celle du son direct ;

3.° L'intensité du son réfléchi à l'extrémité d'un rayon brisé, est précisément celle qui aurait lieu à l'extrémité d'un rayon droit, égal en longueur au rayon brisé, si le son, au lieu de se réfléchir, se fût propagé au-delà du plan fixe.

On voit aisément ce qui aurait lieu, si la masse d'air était comprise entre deux plans indéfinis et parallèles : le son subirait alors une suite infinie de réflexions, semblables à celles de la lumière entre deux glaces parallèles. Nous ne nous arrêterons pas davantage à considérer la réflexion du son sur des surfaces planes ; nous indiquerons seulement un cas particulier où elle se fait d'une manière fort simple ; c'est celui où la masse d'air est terminée par deux plans indéfinis et perpendiculaires entre eux. On déterminera cette réflexion, en plaçant, hors de la masse d'air, des centres fictifs d'ondulations, qui soient tels que les molécules adjacentes aux deux plans ne prennent jamais de vîtesses perpendiculaires à ces plans, soit en vertu du son direct, soit en vertu du son réfléchi par l'un des plans sur l'autre. On trouve qu'il suffit pour cela

cela de trois centres fictifs ; ainsi il y aura en tout quatre ondulations coexistantes dans la masse d'air, et par conséquent chaque molécule sera ébranlée quatre fois différentes.

[16.] Pour second exemple de la réflexion du son, prenons le cas où le son est produit au foyer d'un ellipsoïde de révolution, et réfléchi par sa surface qui enveloppe de toutes parts la masse d'air. Appelons c et c' les deux foyers de cet ellipsoïde ; plaçons au point c l'origine des coordonnées r, u, ω ; r étant le rayon vecteur, u le cosinus de l'angle que ce rayon fait avec l'axe de révolution, et ω l'angle formé par le plan de ce rayon et de l'axe, avec un méridien de l'ellipsoïde, choisi arbitrairement ; enfin, supposons que le foyer c est le centre de l'ébranlement primitif qui s'étendait depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \alpha$.

La formule

$$\varphi = \frac{f(x,u,\omega)}{r} + \frac{1}{r^2}\cdot\int f_1(x,u,\omega)\,dx + \frac{1}{r^3}\cdot\int^2 f_2(x,u,\omega)\,dx^2 + \&c.,$$

dans laquelle $x = r - at$, fera connaître la propagation du son, telle qu'elle aurait lieu si l'ellipsoïde n'existait pas, et telle qu'elle doit subsister jusqu'à ce que le son ait atteint cette surface. Pour obtenir la formule d'où dépend la propagation du son réfléchi, transportons l'origine des coordonnées au point c' ; l'angle ω restera le même ; nous désignerons par r' le nouveau rayon vecteur, et par u' le cosinus de l'angle qu'il fait avec l'axe de révolution sur lequel sont les deux foyers : de plus, soit b la longueur de cet axe, et faisons, pour abréger, $b - r' - at = x'$; la formule demandée sera

$$\varphi' = \frac{F(x',u',\omega)}{r'} + \frac{1}{r'^2}\cdot\int F_1(x',u',\omega)\,dx' + \frac{1}{r'^3}\cdot\int^2 F_2(x',u',\omega)\,dx' + \&c.,$$

F, F_1, F_2, &c. étant une suite de fonctions qui satisfont à l'équation générale,

$$2\cdot(n+1)\cdot F_{n+1} = n(n+1)\cdot F_n + \frac{d\cdot(1-u^2)\frac{dF_n}{du}}{du} + \frac{d^2F_n}{d\omega^2}\cdot\frac{1}{1-u^2} ;$$

de sorte que la première reste seule une fonction arbitraire. Ces fonctions ne sont pas, comme dans l'exemple précédent, de même forme que les fonctions f, f_1, f_2, f_3, &c. qui entrent dans la valeur de φ; seulement les fonctions F, F_1, F_2, &c. sont nulles pour toutes les valeurs de x' qui surpassent α, ou qui sont négatives, et il existe une certaine relation entre les deux fonctions arbitraires f et F, comme nous le verrons bientôt.

Il s'agit donc de prouver que la valeur de φ' remplit les conditions énoncées plus haut [n.° 14]; or, cette valeur satisfait à l'équation (2), comme celle de la fonction φ; de plus, si l'on ajoute la valeur de φ' à celle de φ, il y aura dans la masse d'air deux ondulations sphériques, la première s'écartant sans cesse de son centre c, et la seconde se rapprochant continuellement de son centre c'. Cela posé, considérons une molécule m située dans l'intérieur de l'ellipsoïde. Pour cette molécule, $r + r'$ sera plus petit que b; par conséquent, lorsqu'on aura $x = \alpha$, on aura au même instant $x' > \alpha$: la première onde sonore parviendra donc au point m avant la seconde; la molécule m sera donc ébranlée par le son direct, comme si la surface fixe n'existait pas. Maintenant, si la molécule m est adjacente à la surface de l'ellipsoïde, on aura $r + r' = b$; donc on aura à-la-fois $x = \alpha$ et $x' = \alpha$, et de même $x = 0$ et $x' = 0$; donc la molécule sera ébranlée à-la-fois par les deux ondes sonores, et ses deux mouvemens cesseront aussi en même temps. Décomposons donc les deux vîtesses de la molécule m, suivant le plan tangent et suivant la normale à l'ellipsoïde; représentons par V et V' les vîtesses normales : ces vîtesses seront données au moyen des différences partielles des fonctions φ et φ'; l'une d'elles sera donc une fonction de x, u, ω, r, et l'autre une fonction de x', u', ω, r'; mais toutes ces variables pourront être réduites à trois, savoir, x', u', ω; car le point m étant à la surface de l'ellipsoïde, on pourra exprimer r, r', u en fonctions de u', et à cause de $r + r' = b$, on aura $x = x'$. En posant donc l'équation

$$V + V' = 0,$$

on peut concevoir qu'elle serve à déterminer la fonction F au moyen de la foncion f, puisque cette équation ne contient pas d'autres variables que les trois x', u', ω, qui entrent dans la fonction F; or, cette fonction étant ainsi déterminée, les molécules adjacentes à la surface de l'ellipsoïde, ne prendront jamais de vîtesses perpendiculaires à cette surface.

Après que les deux ondes sonores seront parvenues à la surface de l'ellipsoïde, à laquelle elles arrivent en même temps, la deuxième onde continuera à se propager, en se rapprochant sans cesse du foyer c'; chacune des molécules situées dans l'intérieur de l'ellipsoïde, sera donc une seconde fois ébranlée. Le second ébranlement de la molécule m commencera quand on aura $x' = b - r' - at = \alpha$, c'est-à-dire, au bout d'un $t = \frac{b - r' - \alpha}{a}$, et il durera jusqu'à ce qu'on ait $t = \frac{b - r'}{a}$; or, si l'on prolonge le rayon r' jusqu'à la surface de l'ellipsoïde, que l'on désigne par h la distance du point de rencontre au foyer c, et par k la distance du même point à la molécule m, on aura $h + k = b - r'$; donc le son réfléchi parviendra à la molécule m par le rayon brisé $h + k$, dans le même temps que le son direct emploie à parcourir une ligne droite, égale en longueur à $h + k$, savoir, dans un temps égal à $\frac{h + k - \alpha}{a}$.

En général, si l'on décrit deux sphères des points c et c' comme centres, la première avec un rayon $at + \alpha$, et la seconde avec un rayon $b - at - \alpha$; que l'on retienne seulement les portions de ces surfaces comprises dans l'intérieur de l'ellipsoïde, ces deux portions de sphères contiendront toutes les molécules qui commencent à s'ébranler au bout du temps t, soit en vertu du son direct, soit en vertu du son réfléchi.

[17.] La vîtesse des molécules d'air, d'où dépend l'intensité du son réfléchi, étant donnée au moyen des différences partielles de φ', on voit clairement que cette intensité doit croître à mesure que le son réfléchi

parvient à des points plus voisins du foyer c', puisqu'alors r' diminue. Mais quel est le rapport qui existe entre le son direct et le son réfléchi? Pour le déterminer, il faut résoudre l'équation $V + V' = 0$, par rapport à F, afin d'en déduire la valeur de F au moyen de celle de f, qui est censée donnée, et qui dépend de la nature de l'ébranlement primitif. On y parvient aisément, quand on suppose les distances des foyers c et c', aux différens points de la surface de l'ellipsoïde, très-grandes par rapport à α, ce qu'on peut regarder comme généralement vrai; alors la valeur de φ se réduit à son premier terme [n.° 8], la vîtesse des molécules d'air devient

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot f(x, u, \omega)}{dx},$$

et cette vîtesse est dirigée suivant le rayon r. De même, la vîtesse des molécules d'air qui provient du son réfléchi, sera dirigée suivant le rayon r', et se réduira à

$$\frac{d\varphi'}{dr'} = -\frac{1}{r'} \cdot \frac{d \cdot F(x', u', \omega)}{dx'}.$$

Or, les deux rayons vecteurs r et r' qui aboutissent à un même point de la surface de l'ellipsoïde, faisant des angles égaux avec la normale en ce point, il suffira que les vîtesses $\frac{d\varphi}{dr}$ et $\frac{d\varphi'}{dr'}$ soient égales et de signes contraires pour que la vîtesse normale soit nulle; on aura donc, à tous les points de l'ellipsoïde,

$$\frac{d \cdot F(x', u', \omega)}{dx'} = \frac{r'}{r} \cdot \frac{d \cdot f(x, u, \omega)}{dx}.$$

Mais, pour tous ces points, $\frac{r'}{r}$ est une certaine fonction de u' que je représenterai par U', u est une autre fonction de u' que je désignerai par $u_{,}$, et x est égal à x'; en supposant donc $\frac{d \cdot f(x, u, \omega)}{dx} = \downarrow(x, u, \omega)$, on aura

$$\frac{d \cdot F(x', u', \omega)}{dx'} = U' \cdot \downarrow(x', u_{,}, \omega).$$

La vîtesse des molécules d'air qui provient du son réfléchi, sera donc égale à $-\frac{U'}{r'} \cdot \downarrow (x', u_{,}, \omega)$, tant qu'il s'agira de molécules éloignées du foyer c'; mais, quand on voudra avoir la vîtesse d'une molécule voisine de ce foyer, il faudra substituer la valeur de $F(x', u', \omega)$, c'est-à-dire, $U' \cdot \int \cdot \downarrow (x', u_{,}, \omega)\, dx'$, dans la série qui donne la valeur de φ'; ne négliger aucun terme de cette série, en prendre les différences partielles, par rapport à x', u', ω, au moyen desquelles on déterminera la grandeur et la direction de la vîtesse demandée, qui ne sera plus dirigée suivant le rayon r'.

[18.] Le son étant réfléchi par une surface concave, son intensité doit être augmentée après la réflexion, c'est-à-dire, qu'elle doit surpasser celle qu'aurait eue le son direct, s'il se fût propagé à même distance au-delà de la surface réfléchissante. Pour connaître le rapport de ces deux intensités, appelons h et $b - h$ les deux rayons vecteurs qui partent des foyers c et c' et qui aboutissent en un point quelconque de l'ellipsoïde; soit $\frac{A}{r}$ la vîtesse, relative au son direct, de la molécule d'air placée sur le rayon h, à la distance r du foyer c. D'après ce qu'on vient de trouver [n.° précédent], on aura $-\frac{A(b-h)}{hr'}$ pour la vîtesse, relative au son réfléchi, de la molécule d'air placée sur le rayon $b - h$ à la distance r' du foyer c'; par conséquent l'intensité du son réfléchi en ce point sera représentée par $\frac{A^2(b-h)^2}{h^2 r'^2}$. Le son ayant été produit au foyer c, aura parcouru une ligne brisée, égale en longueur à $b - r'$, quand il sera parvenu à l'extrémité du rayon r'; or, si l'on imagine le rayon h prolongé au-delà de la surface de l'ellipsoïde jusqu'à ce qu'il soit égal à $b - r'$, on aura $\frac{A^2}{(b-r')^2}$ pour l'intensité du son direct parvenu à cette distance du point c; donc le rapport de l'intensité du son réfléchi à celle du son direct, sera exprimé par

$$\frac{(b-r')^2 \cdot (b-h)^2}{h^2 \cdot r'^2};$$

quantité qui surpassera toujours l'unité, puisqu'on a $b - r' > h$ et $b - h > r'$. On vérifie aisément, au moyen des formules de la catoptrique (*Voyez* le Mémoire de M. *Malus*, imprimé au commencement de ce volume), que ce rapport est égal à celui qui aurait lieu dans les mêmes circonstances, entre l'intensité de la lumière réfléchie et celle de la lumière directe; d'où l'on peut tirer cette conclusion importante, que, relativement à son intensité, aussi bien qu'à sa direction, le son produit au foyer d'un ellipsoïde et réfléchi par sa surface concave, suit les mêmes lois que la lumière dans l'hypothèse de l'émission.

[19.] Lorsque le son réfléchi sera parvenu au foyer c, ce qui aura lieu au bout d'un temps égal à $\frac{b-a}{a}$, l'onde sonore réfléchie s'évanouira; il lui en succédéra une autre dont le centre sera au point c', et qui s'écartera indéfiniment de ce centre : celle-ci atteindra la surface de l'ellipsoïde; elle sera réfléchie par cette surface vers le foyer c; elle s'évanouira quand elle aura atteint ce foyer; il lui en succédera une nouvelle dont le centre sera au point c; et ce mouvement alternatif continuera indéfiniment, chaque oscillation ayant lieu dans un temps qui sera le même pour toutes, et égal à $\frac{b-a}{a}$. En effet, si l'on décrit une sphère du point c' comme centre et d'un rayon a, il est évident qu'à l'instant où la molécule qui occupe le foyer c' sera mise en mouvement par le son réfléchi, toute la masse d'air sera en repos, excepté la partie comprise dans cette sphère : ce sera donc comme si l'on produisait un ébranlement partiel autour du point c', et cet ébranlement devra se répandre dans la masse entière, de la même manière que l'ébranlement initial qui a eu lieu autour du point c.

[20.] La distance des deux foyers c et c' ayant été supposée quelconque, le point c peut s'éloigner à l'infini, auquel cas l'ellipsoïde se changera en un paraboloïde. Nous pouvons donc conclure de l'analyse précédente, que si le son est produit au foyer d'un paraboloïde de

révolution, il sera réfléchi, à la rencontre de cette surface, parallèlement à l'axe; toutes les molécules situées sur un même plan perpendiculaire à cet axe, seront ébranlées en même temps par le son réfléchi, et elles commenceront à se mettre en mouvement au bout d'un temps égal à celui que le son direct emploierait pour parcourir la distance du sommet du paraboloïde à ce plan, plus la distance du sommet au foyer. On pourrait déterminer directement la réflexion du son sur le paraboloïde; mais il est plus simple de la considérer, ainsi que nous le faisons, comme un cas particulier de la réflexion sur l'ellipsoïde.

Pour ne pas répéter les raisonnemens que nous venons de faire, nous nous contenterons d'indiquer la réflexion du son sur l'hyperboloïde engendré par une branche d'hyperbole, tournant autour de la ligne qui joint les deux foyers. Si le son part du foyer extérieur, il sera réfléchi par la surface convexe de l'hyperboloïde; l'onde sonore réfléchie conservera toujours la figure sphérique; elle aura son centre au foyer intérieur, dont elle s'écartera indéfiniment. Réciproquement, quand le son sera produit au foyer intérieur, il sera réfléchi par la surface concave, et l'onde sonore réfléchie conservera toujours la figure sphérique, en s'écartant continuellement de son centre placé au foyer extérieur. Dans l'un et l'autre cas, le son parvient à une molécule d'air par un rayon brisé, dans le même temps que le son direct emploierait à parcourir une ligne droite égale en longueur à cette ligne brisée. Ces propositions se démontrent au moyen de l'analyse précédente, à laquelle on fait quelques modifications qu'il est facile d'imaginer.

Enfin, si l'on fait abstraction d'une dimension de l'air, c'est-à-dire, si l'on considère la propagation du son dans un plan, on pourra déterminer, d'après les principes que nous venons d'établir [n.° 14], la réflexion du son sur une section conique, pourvu qu'il ait été produit à l'un des foyers de cette courbe. Les résultats sont analogues à ceux que présente la réflexion sur une surface du second degré; mais les démonstrations sont plus compliquées, quoiqu'elles soient fondées sur

les mêmes principes. Nous n'entreprendrons pas de les donner ici, dans la crainte que ce Mémoire ne devienne beaucoup trop long.

Examen des différentes Circonstances physiques qui peuvent influer sur la vîtesse du Son.

[21.] Nous avons représenté [n.° 3] par D et gh la densité et l'élasticité de l'air avant que le mouvement ait commencé, et par $D(1+\gamma)$ et $gh(1+\gamma+k\gamma)$, ce que deviennent cette densité et cette élasticité pendant le mouvement, le terme $gh.k\gamma$ étant l'augmentation d'élasticité due au développement de chaleur qui accompagne la compression de l'air; ensuite nous avons fait, pour abréger, $\frac{gh}{D}.(1+k)=a^2$, et c'est cette quantité a qui représente la vîtesse du son. Il s'agit donc d'examiner les variations que cette quantité peut subir, puis de calculer sa valeur numérique, pour la comparer à la vîtesse du son déterminée par l'observation.

La densité D diminuant à mesure que la température augmente, il en faut conclure que la vîtesse du son doit augmenter avec la température; ainsi cette vîtesse doit être généralement plus grande en été qu'en hiver: le calcul suivant nous fera juger de ce que peut être cette différence.

En désignant par D la densité de l'air à la température de la glace fondante, et sous une pression quelconque, cette densité devient $\frac{D}{1+n(0{,}00375)}$ sous la même pression et à une température de n degrés centigrades; car les expériences de M. *Gai-Lussac* ont prouvé que l'air se dilate uniformément depuis 0 jusqu'à 100°, et que son augmentation de volume pour chaque degré, est égale à 0,00375 de son volume à zéro. La vîtesse du son, relative à cette température, deviendra donc

$$\sqrt{\left(\frac{gh}{D}\right)}.[1+n(0{,}00375)].\sqrt{(1+k')},$$

k' désignant ce que devient k à la même température. Si l'on prend, par

par exemple, $n = 30°$, on trouve à-peu-près $\sqrt{[1 + n.(0{,}00375)]} = 1 + \frac{1}{16}$; d'où il suit que quand la température passe de zéro à 30°, la vîtesse du son varie d'environ $\frac{1}{16}$ de sa valeur à zéro, en négligeant toutefois la variation inconnue de la quantité k. Cette variation de vîtesse doit être appréciable dans des expériences comparatives et bien faites, et ces expériences offriraient aussi un moyen de reconnaître si la quantité k varie sensiblement avec la température de l'air.

Il n'en est pas de l'état hygrométrique de l'air comme de sa température : l'expérience a prouvé que cet état n'a pas d'influence sur la vîtesse du son ; car les physiciens qui ont mesuré cette vîtesse, ont observé qu'elle est la même dans un temps serein et dans un temps pluvieux. Cela vient, d'une part, de ce que la densité de la vapeur d'eau ne diffère pas beaucoup de celle de l'air, à la même température et sous la même pression ; et, en second lieu, de ce que la quantité de vapeur suspendue dans l'atmosphère, est toujours fort petite relativement à la masse de l'air. En effet, *Saussure* a trouvé (*voyez* l'Essai sur l'Hygrométrie) que sous la même pression et à la même température, la densité de la vapeur d'eau est à celle de l'air comme 5 est à 7 ; d'ailleurs, quand l'hygromètre marque le point de la saturation, on peut évaluer, d'après les expériences du même physicien, à environ $\frac{1}{72}$ de la masse totale, la quantité de vapeur suspendue dans un volume d'air à 15° du thermomètre de *Réaumur*, et sous la pression ordinaire de l'atmosphère : or, il est facile, au moyen de ces données, de s'assurer que l'état hygrométrique de l'air ne saurait faire varier la vîtesse du son, d'un *cinq centième* de sa valeur relative au point de la plus grande sécheresse.

[22.] CALCULONS maintenant la valeur numérique de la vîtesse du son. En prenant pour unité la seconde sexagésimale, on a $g = 9^m,7979$; la hauteur du baromètre la plus commune en nos climats, est de $0^m,76$;

sous cette pression et à la température de la glace fondante, le rapport de la densité du mercure à celle de l'air, est égal à 10475,68, selon MM. *Biot* et *Arago* (*Physique* de M. *Haüy*, page 299) : au moyen de ces données, on trouve $\sqrt{\cdot \frac{gh}{D}} = 279^{m},395$. Ce serait la vîtesse du son, relative à la température zéro, si l'on négligeait la quantité k; par conséquent, en multipliant ce nombre de mètres par $\sqrt{[1+n(0,00375)]}$, on aurait la vîtesse du son, l'air étant à la température n. En prenant, par exemple, $n = 6°$, on trouve $282^{m},42$ pour la vîtesse du son, relative à cette température.

Or, les membres de l'Académie des Sciences ont conclu (*Mémoires* de cette Académie, pour l'année 1738) d'une suite d'expériences faites sur une ligne d'environ 29000^{m}, le thermomètre marquant 6° centigrades, terme moyen, que le son parcourt $337^{m},18$ par seconde, quantité qui surpasse d'un cinquième la vîtesse $282^{m},42$, qui aurait lieu si l'on négligeait la quantité k. Cette différence est trop grande pour qu'on puisse l'attribuer aux erreurs de l'observation, ou à l'inexactitude des données qui servent de base au calcul; il est donc indispensable d'avoir égard, dans le calcul de la vîtesse du son, au développement de chaleur produit par la compression de l'air. Pour accorder le calcul et l'observation, il suffit de faire

$$(282^{m},42) \cdot \sqrt{(1+k)} = 337^{m},18,$$

équation d'où l'on tire $k = 0,4254$. Voyons maintenant quelle est l'augmentation de température que suppose cette valeur de k.

Pour cela, concevons un volume d'air dont la densité soit D, la pression gh, et la température θ; supposons que l'on comprime cet air de manière que sa densité devienne $D(1+\gamma)$, et soit ω le nombre de degrés dont cette compression ferait monter le thermomètre, si la masse de cet instrument n'était pas comparable à celle de l'air : il s'agit de déterminer l'élasticité correspondante à la densité $D(1+\gamma)$ et à la température $\theta+\omega$.

On a d'abord $gh(1+\gamma)$ pour la pression qui correspond à la densité

$D(1+\gamma)$ et à la température θ. Si l'on échauffe l'air soumis à cette pression, jusqu'à ce que sa température soit devenue $\theta+\omega$, il se dilatera, et d'après la loi donnée par M. *Gai-Lussac*, sa densité deviendra

$$\frac{D\cdot(1+\gamma)\cdot[1+\theta\cdot(0{,}00375)]}{1+(\theta+\omega)\cdot(0{,}00375)}.$$

Enfin, l'air étant dans cet état, si nous imaginons qu'on le comprime lentement, de manière à lui faire reprendre la densité $D(1+\gamma)$, sans augmenter sa température, nous aurons

$$\frac{gh\cdot(1+\gamma)[1+(\theta+\omega)\cdot(0{,}00375)]}{1+\theta\,(0{,}00375)},$$

pour la pression correspondante à la densité $D(1+\gamma)$ et à la température $\theta+\omega$.

Dans la propagation du son, la compression ou la dilatation qui a lieu successivement dans toute l'étendue de la masse d'air, étant supposée très-petite, on peut regarder l'augmentation ou la diminution de température, due à ce changement de densité, comme lui étant proportionnelle; faisons donc $\omega = m\gamma$, et alors, en négligeant le carré de γ, nous aurons

$$gh\cdot\left[1+\gamma+\frac{(0{,}00375)\cdot m}{1+\theta\cdot(0{,}00375)}\cdot\gamma\right],$$

pour la pression que nous avons désignée dans le n.° 3, par $gh.(1+\gamma+k\gamma)$. On aura donc

$$k=\frac{(0{,}00375)\cdot m}{1+(0{,}00375)\cdot\theta};$$

d'où l'on tire $m = 115°{,}99$, en prenant $\theta = 6°$, et $k = 0{,}4254$; par conséquent, si la dilatation ou la compression a été de $\frac{1}{116}$, la température a dû s'abaisser ou s'élever d'un degré centigrade; et généralement si une couche d'air éprouve une condensation très-petite et désignée par γ, entre deux autres couches d'air, la température de la première devra s'élever de $(116°).\gamma$. En admettant ce résultat, qu'on ne peut vérifier par aucune expérience directe, on fera disparaître la différence

que *Newton* a remarquée, le premier, entre la vîtesse du son donnée par le calcul, et celle qui résulte de l'observation.

Mouvement d'une Ligne d'air dans le cas où les Vîtesses des molécules ne sont pas supposées très-petites.

[23.] En supposant que la masse d'air se réduise à une simple ligne, et en prenant cette ligne pour l'axe des abscisses x, les quantités ρ et φ ne seront plus fonctions que de x et t; et si l'on fait abstraction de la pesanteur, les équations (a) et (b) du n.° 1 deviendront

$$\int . \frac{dp}{\rho} + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} . \frac{d\varphi^2}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho . \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\rho}{dx} . \frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

Si l'on suppose de plus la température constante dans toute la ligne d'air, la pression p sera proportionnelle à la densité ρ, et l'on aura $p = a^2 . \rho$, a étant un coëfficient constant qui représente la racine carrée du rapport de l'élasticité de l'air à la densité, avant que le mouvement ait commencé. La première de ces équations deviendra donc

$$a^2 . \log. \frac{\rho}{D} + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} . \frac{d\varphi^2}{dx^2} = 0, \qquad (1)$$

D étant la densité de l'air avant le mouvement; éliminant ρ entre celle-ci et l'équation précédente, on trouve

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\varphi}{dx} . \frac{d^2\varphi}{dx\,dt} + \frac{d\varphi^2}{dx^2} . \frac{d^2\varphi}{dx^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}. \qquad (2)$$

L'intégrale complète de cette équation est impossible sous forme finie. Il est facile de s'en assurer, en lui appliquant la méthode que M. *Laplace* a donnée pour intégrer les équations aux différences partielles du second ordre, après l'avoir ramenée à la forme linéaire, que cette méthode suppose, au moyen d'une transformation connue que l'on doit à M. *Legendre*. Cette transformée linéaire est comprise parmi les équations que M. *Laplace* a intégrées, par le moyen d'une intégrale

définie (*Voyez* le Calcul intégral de M. *Lacroix*, où sont exposées toutes les méthodes d'intégration que nous citons); mais cette forme d'intégrale ne peut servir à rien pour déterminer le mouvement de la ligne d'air que nous considérons : heureusement l'équation (2) admet une intégrale particulière sous forme finie, qui renferme une fonction arbitraire, et qui suffit, comme nous le ferons voir, pour déterminer la loi suivant laquelle ce mouvement a lieu, pourvu que l'on suppose les vîtesses des molécules d'air plus petites que la vîtesse a, pendant toute la durée du mouvement et dans toute l'étendue de la ligne d'air.

[24.] POUR trouver cette intégrale, j'observe que l'on satisfait à l'équation (2), au moyen de celle-ci,

$$\frac{d\varphi}{dt} - a.\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2}.\frac{d\varphi^2}{dx^2} = fk; \qquad (3)$$

fk étant une fonction arbitraire de la quantité k, qui est telle que l'on ait

$$\frac{dk}{dt} + \frac{dk}{dx}.\left(a + \frac{d\varphi}{dx}\right) = 0.$$

En effet, en différenciant l'équation (3) successivement par rapport à t et à x, en multipliant la seconde différence partielle par $a + \frac{d\varphi}{dx}$, et l'ajoutant ensuite à la première, on retrouve l'équation (2). On y satisfait également au moyen de cette seconde équation,

$$\frac{d\varphi}{dt} + a\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2}.\frac{d\varphi^2}{dx^2} = Fk_{,}; \qquad (4)$$

$Fk_{,}$ étant une fonction arbitraire de la quantité $k_{,}$, qui est telle que l'on ait

$$\frac{dk_{,}}{dt} - \frac{dk_{,}}{dx}.\left(a - \frac{d\varphi}{dx}\right) = 0.$$

Or, $\frac{d\varphi}{dx}$ et k étant des fonctions de x et t, on peut regarder $\frac{d\varphi}{dx}$ comme une fonction de t et k; faisant donc $\frac{d\varphi}{dx} = \downarrow(k, t)$, et intégrant

l'équation

$$\frac{dk}{dt} + \frac{dk}{dx} \cdot [a + \downarrow (k, t)] = 0,$$

par les méthodes connues, on aura

$$k = \text{fonct.}\,[x - at - \int . \downarrow (k, t)\, dt],$$

l'intégrale $\int . \downarrow (k, t)\, dt$ étant prise en regardant k comme une constante, et si l'on veut, de manière qu'elle soit nulle quand $t = 0$. On aura de même

$$k_{,} = \text{fonct.}\,[x + at - \int . \downarrow_{,} (k_{,}, t)\, dt],$$

en supposant $\frac{d\varphi}{dx} = \downarrow_{,} (k_{,}, t)$; l'intégrale $\int . \downarrow (k_{,}, t)\, dt$ étant prise de manière qu'elle soit nulle quand $t = 0$, et en regardant la quantité $k_{,}$ comme constante. Les équations (3) et (4) deviendront donc

$$\frac{d\varphi}{dt} - a \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d\varphi^2}{dx^2} = f[x - at - \int . \downarrow (k, t)\, dt],$$

$$\frac{d\varphi}{dt} + a \frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d\varphi^2}{dx^2} = F[x + at - \int . \downarrow_{,} (k_{,}, t)\, dt],$$

d'où l'on tire, à cause de l'équation (1),

$$\left.\begin{aligned} 2a \cdot \frac{d\varphi}{dx} &= F[x + at - \int . \downarrow_{,} (k_{,}, t) dt] - f[x - at - \int . \downarrow (k, t)\, dt], \\ 2a^2 . \log . \frac{\varphi}{D} &= - F[x + at - \int . \downarrow_{,} (k_{,}, t) dt] - f[x - at - \int . \downarrow (k, t)\, dt]. \end{aligned}\right\} (5).$$

Maintenant, supposons que l'ébranlement primitif de la ligne d'air s'étendait depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \alpha$. Il faudra donc que la vîtesse $\frac{d\varphi}{dx}$ soit nulle et la densité ρ égale à D, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de x qui surpassent α ou qui sont négatives; d'où il suit, à cause des équations (5), que, pour toutes ces valeurs de x, les fonctions fx et Fx doivent être nulles. Cela posé, si nous considérons, au bout d'un temps quelconque, une molécule correspondante à une abscisse x positive et plus grande que α, nécessairement la quantité $x + at - \int . \downarrow_{,} (k_{,}, t)\, dt$ sera plus grande que x, et par conséquent plus grande que α; de sorte

qu'on aura

$$F[x + at - \int . \downarrow_1 (k_1, t)\, dt] = Fk_1 = 0.$$

En effet, l'intégrale $\int . \downarrow_1 (k_1, t)\, dt$, qui est nulle quand $t = 0$, ne peut jamais devenir plus grande, abstraction faite du signe, que Vt, V étant la plus grande valeur que puisse avoir la vîtesse $\frac{d\varphi}{dx}$, pendant toute la durée du mouvement et dans toute l'étendue de la ligne d'air ; mais cette vîtesse ayant été supposée plus petite que a, on a $Vt < at$, et par conséquent $\int . \downarrow_1 (k_1, t)\, dt < at$; d'où il suit que $x + at - \int . \downarrow_1 (k_1, t)\, dt$ est une quantité plus grande que α, pour toutes les valeurs de x, positives et plus grandes que α.

Ainsi, en considérant le mouvement dans la partie de la ligne d'air qui répond aux abscisses positives, la première des équations (5) se réduira à

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{2a} . f[x - at - \int . \downarrow (k, t)\, dt] = -\frac{1}{2a} . fk ;$$

d'où il résulte que $\frac{d\varphi}{dx}$, ou $\downarrow (k, t)$, sera seulement fonction de k ; donc on aura $\int . \downarrow (k, t)\, dt = \frac{d\varphi}{dx} . t$, puisque cette intégrale doit être prise en considérant la quantité k comme une constante ; et à cause que f désigne une fonction arbitraire, l'équation précédente deviendra

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x - at - \frac{d\varphi}{dx} . t). \qquad (a)$$

On doit observer que cette équation seule ne satisferait pas à l'équation (2) ; il faut y joindre l'équation (4), qui se réduit à

$$\frac{d\varphi}{dt} + a\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2} . \frac{d\varphi^2}{dx^2} = 0, \qquad (b)$$

à cause de $Fk_1 = 0$.

Il est facile de vérifier que le système de ces deux équations satisfait à l'équation (2), et que les valeurs de $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ que l'on déduit de

ces équations, savoir,

$$\frac{d\varphi}{dx} = f, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -af - \frac{1}{2} \cdot f^2,$$

satisfont aussi à la condition d'intégrabilité

$$\frac{d \cdot \frac{d\varphi}{dx}}{dt} = \frac{d \cdot \frac{d\varphi}{dt}}{dx},$$

quelle que soit la forme de la fonction de $x - at - \frac{d\varphi}{dx} \cdot t$, que l'on désigne par f. Si donc on donne à la fonction f une forme déterminée, on pourra déduire des équations (a) et (b) les valeurs de $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ en fonctions de x et t, et par suite on aura la valeur de φ, en intégrant la formule

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx} \cdot dx + \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt.$$

Cette valeur de φ sera une intégrale seconde, sans fonction abitraire, de l'équation (2); on doit donc regarder l'ensemble des équations (a) et (b), comme représentant une intégrale seconde de l'équation (2), d'une forme singulière; mais comme cette intégrale seconde ne renferme qu'une seule fonction arbitraire, il s'ensuit qu'elle n'est qu'une intégrale particulière.

On est encore loin de connaître toutes les formes différentes sous lesquelles peuvent se présenter les intégrales des équations aux différences partielles d'un ordre supérieur au premier. Il ne paraît pas que personne ait encore eu l'occasion de remarquer que ces intégrales pouvaient être données, par un système d'équations entre les variables et les différences du premier ordre, en même nombre que ces différences, mais dont on ne saurait déduire les valeurs de ces mêmes différences, sans déterminer les fonctions arbitraires.

[25.] Il s'agit actuellement de conclure de l'équation (a), la loi suivant laquelle le mouvement se propage dans le sens des abscisses positives.

positives. Si l'on considérait le mouvement dans le sens des abscisses négatives, on aurait de même, pour le déterminer, les équations

$$\frac{d\varphi}{dx} = F\left[x + t\left(a - \frac{d\varphi}{dx}\right)\right],$$
$$\frac{d\varphi}{dt} - a.\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2}.\frac{d\varphi^2}{dx^2} = 0;$$

dont le système est également une intégrale particulière de l'équation (2). Il suffira d'examiner la valeur de $\frac{d\varphi}{dx}$ relative aux abscisses positives; la seconde présenterait les mêmes résultats.

Puisque la fonction fx est nulle tant qu'on a $x > \alpha$ ou $x < 0$, il s'ensuit que la valeur de $\frac{d\varphi}{dx}$ donnée par l'équation (a), sera aussi nulle tant qu'on aura

$$x > t\left(a + \frac{d\varphi}{dx}\right) + \alpha, \text{ ou } x < t\left(a + \frac{d\varphi}{dx}\right).$$

La molécule qui correspond à l'abscisse $x > \alpha$, commencera donc à s'ébranler, à l'instant où l'on aura $x = t\left(a + \frac{d\varphi}{dx}\right) + \alpha$, ou simplement $x = at + \alpha$, parce que la vîtesse naissante $\frac{d\varphi}{dx}$ doit être regardée comme infiniment petite; et la même molécule cessera de se mouvoir, quand on aura $x = t\left(a + \frac{d\varphi}{dx}\right)$, ou simplement $x = at$, parce que la vîtesse $\frac{d\varphi}{dx}$ doit être infiniment petite à l'instant où le mouvement cesse, comme à celui où il commence.

Nous voyons donc clairement que l'ébranlement primitif se transmettra uniformément et avec une vîtesse égale à a; cette vîtesse sera indépendante de la nature de l'ébranlement primitif et de la grandeur des vîtesses des molécules d'air; la durée de l'ébranlement sera la même pour toutes les molécules, et égale à $\frac{\alpha}{a}$; enfin la largeur de l'onde mobile, de part et d'autre de l'origine, restera constamment égale à α.

Jusqu'à présent, ces propositions n'avaient été démontrées que dans

le cas où les vîtesses des molécules d'air sont supposées très-petites. Ordinairement, on néglige dans le calcul les puissances de ces vîtesses supérieures à la première, et l'on trouve $\frac{d\varphi}{dx} = f(x - at)$, comme il résulte de l'équation (a), en négligeant dans le second membre la vîtesse $\frac{d\varphi}{dx}$ par rapport à la vîtesse a. M. *Lagrange* a poussé plus loin l'approximation; il a conservé dans le calcul, le carré de la vîtesse $\frac{d\varphi}{dx}$, et il a trouvé (*Mémoires de Turin*, tome II) une équation qui revient à celle-ci,

$$\frac{d\varphi}{dx} = f[x - at - t \cdot f(x - at)];$$

d'où il a conclu, comme nous, que la grandeur des vîtesses des molécules d'air n'a pas d'influence sur la vîtesse du son. La formule de M. *Lagrange* se déduit de l'équation (a), en substituant dans le second membre de cette équation, à la place de $\frac{d\varphi}{dx}$, sa valeur approchée $f(x - at)$; on en déduirait de même pour la vîtesse $\frac{d\varphi}{dx}$, d'autres valeurs de plus en plus approchées.

Propagation du Son, lorsque la température et la densité de l'air sont supposées variables.

[26.] CONSERVONS les notations du n.° 1; pour simplifier la question, regardons la pesanteur comme une force constante et de direction parallèle dans toute l'étendue de la masse d'air où le son se propage; représentons cette force par g, et prenons les ordonnées z verticales et dirigées de haut en bas : nous aurons $q = gz$. Soient p' et ρ' la pression et la densité dans l'état d'équilibre, ces quantités seront des fonctions de z, et l'on aura, en vertu de l'équation (a) du n.° 1,

$$gz - \int \cdot \frac{dp'}{\rho'} = 0.$$

Représentons par D la valeur de ρ' dans la couche d'air qui répond à

$z = 0$, par h la hauteur du baromètre dans la même couche, par a^2 la quantité $\frac{gh}{D}$, et enfin prenons pour unité la densité du mercure; on aura $p' = a^2 \rho'$, si l'on considère d'abord le cas particulier où la température est constante, et où la densité varie seule d'une couche à une autre de la masse d'air. Substituant cette valeur de p' dans l'équation précédente, et différenciant par rapport à z, on trouve

$$g - a^2 . \frac{d\rho'}{\rho' dz} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\rho' = D e^{\frac{g}{a^2} . z},$$

en désignant par e la base du système de logarithmes dont le module est l'unité, et en faisant attention qu'on doit avoir $\rho' = D$, quand $z = 0$.

Maintenant, soit $\rho = \rho' (1 + \gamma)$, γ étant la condensation de l'air pendant le mouvement; en faisant abstraction de la chaleur rendue sensible par la compression, on aura $p = p' + a^2 \rho' \gamma$, et par conséquent

$$\int . \frac{dp}{\rho} = \int . \frac{dp'}{\rho'} + a^2 . \gamma,$$

en négligeant le carré et les puissances supérieures de γ. Les équations (a) et (b) du n.° 1, deviendront donc

$$\frac{d\varphi}{dt} + a^2 . \gamma = 0,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right) + \frac{d\rho'}{\rho' dz} . \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

en y supprimant les termes de seconde dimension par rapport aux vîtesses et à la condensation. Substituant dans la seconde équation, à la place de $\frac{d\rho'}{\rho' dz}$, sa valeur $\frac{g}{a^2}$, et éliminant γ au moyen de la première, il vient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right) + g \frac{d\varphi}{dz} .$$

On fait disparaître la différence du premier ordre que cette équation renferme, en faisant $\Phi = \Phi_{,} e^{-\frac{g}{2a^2}\cdot\zeta}$; cette équation devient alors

$$\frac{d^2\varphi_{,}}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi_{,}}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_{,}}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_{,}}{d\zeta^2}\right) - \frac{g^2}{4a^2}\cdot\Phi_{,},$$

et par conséquent

$$\frac{d^2.r\varphi_{,}}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2.r\varphi_{,}}{dr^2} + \frac{d.(1-u^2)\,\frac{d.r\varphi_{,}}{du}}{rd^2u} + \frac{d^2.r\varphi_{,}}{d\omega}\cdot\frac{1}{r^2(1-u^2)}\right) - \frac{g^2}{4a^2}\cdot r\Phi_{,},$$

en transformant les coordonnées x, y, ζ, en coordonnées polaires r, u, ω, comme dans le n.° 4.

Afin de ne pas nous jeter dans de trop longs calculs, supposons la fonction Φ, indépendante de u et de ω, l'équation précédente se réduira simplement à

$$\frac{d^2.r\varphi_{,}}{dt^2} = a^2.\frac{d^2.r\varphi_{,}}{dr^2} - \frac{g^2}{4a^2}\cdot r\Phi_{,}; \qquad (1)$$

et celle-ci n'est point encore intégrable sous forme finie.

[27.] POUR obtenir son intégrale en série, soient $r - at = s$, $r + at = s_{,}$, et pour abréger $\frac{g^2}{16a^4} = m$, nous aurons

$$\frac{d^2.r\varphi_{,}}{ds\,ds_{,}} = m\,.\,r\Phi_{,};$$

équation dont l'intégrale complète est la somme de deux séries infinies, savoir :

$$r\Phi_{,} = fs + ms_{,}.\int fs\,ds + \frac{m^2s_{,}^2}{2}.\int^2 fs\,ds^2 + \frac{m^3s_{,}^3}{2.3}.\int^3 fs\,ds^3 + \&c.$$

$$+ Fs_{,} + ms\,.\int Fs_{,}\,ds_{,} + \frac{m^2s^2}{2}.\int^2 Fs_{,}ds^2_{,} + \frac{m^3s^3}{2.3}\int^3 Fs_{,}ds^3_{,} + \&c.,$$

fs et $Fs_{,}$ étant les deux fonctions arbitraires.

Chacune de ces deux séries peut être transformée en une intégrale

définie relative à une nouvelle variable h. En effet, on a généralement

$$\int^n . f s ds^n = \frac{1}{1.2.3 \ldots n-1} . \int . (s - h)^{n-1} . f h dh,$$

pourvu que l'on remplace h par s après l'intégration ; si donc on prend $\int . f s ds$ et $\int . F s_{,} ds_{,}$ au lieu de fs et $Fs_{,}$, ce qui est permis, et si l'on fait

$$H = 1 + (s-h) . h s_{,} + \frac{(s-h)^2 . h^2 s^2_{,}}{2.2} + \frac{(s-h)^2 . h^3 s^3_{,}}{2.3.2.3} + \&c.,$$

$$H_{,} = 1 + (s-h) . h s + \frac{(s_{,}-h)^2 . h^2 s^2}{2.2} + \frac{(s_{,}-h)^3 . h^3 s^3}{2.3.2.3} + \&c.,$$

on aura

$$r \Phi_{,} = \int . H f h dh + \int . H_{,} F h dh;$$

la première intégrale étant prise depuis une valeur arbitraire de h jusqu'à $h = s$, et la seconde, depuis une valeur arbitraire de h jusqu'à $h = s$.

On peut déduire de cette valeur de $r \Phi_{,}$, les différences partielles $\frac{d . r \varphi_{,}}{dr}$, $\frac{d . r \varphi_{,}}{dt}$; mais comme il nous suffira de connaître la forme de ces quantités, nous observerons qu'elle est la même que celle de la fonction $r \Phi_{,}$; car en différenciant l'équation (1) par rapport à t ou à r, on aura pour déterminer $\frac{d . r \varphi_{,}}{dt}$ ou $\frac{d . r \varphi_{,}}{dr}$, une équation de même forme que l'équation (1) elle-même. De là on conclut aisément que l'on doit avoir

$$\frac{d \varphi_{,}}{dr} = \frac{1}{r} . \int . H f_{,} h dh + \frac{1}{r^2} . \int . H f_{,} h dh$$

$$+ \frac{1}{r} . \int . H_{,} F_{,} h dh + \frac{1}{r^2} . \int . H_{,} F_{,} h dh,$$

$$\frac{d \varphi_{,}}{dt} = \frac{1}{r} . \int . H f' h dh + \frac{1}{r} . \int . H_{,} F' h dh;$$

pourvu que, après les intégrations, on fasse $h = s$ dans les trois intégrales $\int . H f_{,} h dh$, $\int . H f_{,} h dh$, $\int . H f' h dh$, et $h = s_{,}$, dans les trois autres ; les fonctions $f_{,} h$, $f_{,} h$, $f' h$, dérivent de la fonction arbitraire fh, et les fonctions $F_{,} h$, $F_{,} h$, $F' h$, dérivent de Fh.

La série H dépend d'une équation différentielle du second ordre ; car si l'on fait $(h - s) . m s_{,} = \theta$, il est facile de voir, d'après la forme

de la série, que l'on aura

$$\frac{d.\theta\,\frac{dH}{d\theta}}{d\theta} + H = 0;$$

équation d'où l'on tirera une valeur de H contenant deux constantes arbitraires, que l'on déterminera de manière qu'on ait $H = 1$, $\frac{dH}{d\theta} = -1$, quand $\theta = 0$. Cette équation n'est intégrable, sous forme finie, par aucune des méthodes connues; mais elle est comprise parmi celles qu'*Euler* a intégrées au moyen des intégrales définies (*Traité des différences et des séries* de M. *Lacroix*, page 491). On y satisfait en prenant

$$H = A.\int. \frac{\cos. h'\sqrt{\theta}\,.\,dh'}{\sqrt{(4-h'^2)}},$$

A étant une constante arbitraire, et l'intégrale relative à h', étant prise depuis $h' = 0$ jusqu'à $h' = 2$. En effet, en substituant cette valeur de H dans le premier membre de l'équation précédente, et effectuant les intégrations par rapport à h', qui deviennent possibles après cette substitution, on trouve

$$\frac{d.\theta\,\frac{dH}{d\theta}}{d\theta} + H = \frac{A}{4\sqrt{\theta}}\,.\sqrt{(4-h'^2)}\,.\,\sin. h'\sqrt{\theta},$$

quantité nulle aux deux limites $h' = 0$, $h' = 2$. D'ailleurs les conditions $H = 1$ et $\frac{dH}{d\theta} = -1$, quand $\theta = 0$, sont remplies en prenant $A = \frac{2}{\pi}$; car on a pour cette valeur de θ, $H = \frac{A\pi}{2}$ et $\frac{dH}{d\theta} = -\frac{A\pi}{2}$; on aura donc

$$H = 1 - \theta + \frac{\theta^2}{2.2} - \frac{\theta^3}{2.3.2.3} + \&c. = \frac{2}{\pi}\,.\int.\frac{\cos. h'\sqrt{\theta}\,.\,dh'}{\sqrt{(4-h'^2)}}.$$

Cette formule donnera également la valeur de la série $H_{,}$, en y faisant $\theta = (h - s_{,})\,.\,ms$, et de cette manière la valeur de $\Phi_{,}$ sera complétement exprimée par des intégrales définies.

[28.] A cause de $\varphi = \varphi_{,} \cdot e^{-\frac{g}{2a^2} \cdot \zeta}$, et de $a^2\gamma + \frac{d\varphi}{dt} = 0$, nous aurons

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = -\frac{g}{2a^2} \cdot \frac{e^{-\frac{g}{2a^2} \cdot \zeta}}{r} \cdot (\int . Hfhdh + \int . H_{,} Fhdh),$$

$$\gamma = -\frac{e^{-\frac{g}{2a^2} \cdot \zeta}}{a^2 r} \cdot (\int . Hf'hdh + \int . H_{,} F'hdh),$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{e^{-\frac{g}{2a^2} \cdot \zeta}}{r} \left(\int . Hf_{,} hdh + \int . H_{,} F_{,} hdh + \frac{\int . Hf_{2} hdh}{r} + \frac{\int . H_{,} F_{2} hdh}{r} \right);$$

il s'agit donc de déduire de ces formules, la loi suivant laquelle le son se propage.

Supposons pour cela que l'ébranlement primitif s'étendait depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \alpha$ autour de l'origine des coordonnées; il faudra que les différences partielles $\frac{d\varphi}{d\zeta}$, $\frac{d\varphi}{dr}$ et la condensation γ soient nulles, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de $r > \alpha$; or, on satisfait à cette condition, en supposant que les fonctions arbitraires fh, Fh, $f'h$, &c. sont nulles pour toutes les valeurs de $h > \alpha$, et que les intégrales $\int . Hfh$, $\int . H_{,} Fhdh$, $\int . Hf'hdh$, &c. commencent à $h = \alpha$; car ces intégrales devant se terminer à $h = r$, quand $t = 0$, il en résulte que si r surpasse α, les quantités Hfh, $H_{,} Fh$, $Hf'h$, &c., seront nulles dans toute l'étendue des intégrales, et par conséquent ces intégrales seront aussi nulles. Cela posé, au bout d'un temps quelconque, ces mêmes intégrales seront encore nulles tant qu'on aura $s > \alpha$ et $s_{,} > \alpha$, c'est-à-dire, $r - at > \alpha$ et $r + at > \alpha$; le mouvement atteindra donc les molécules situées à la distance r du centre de l'ébranlement primitif, à l'instant où l'on aura $r - at = \alpha$: donc la vîtesse du son sera constante, la même sur tous les rayons sonores, et égale à a, comme si la masse d'air était composée de couches de même densité.

La vîtesse des molécules d'air d'où dépend l'intensité du son, sera

égale à $\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{d\zeta^2}+\frac{d\varphi^2}{dr^2}\right)}$; or, si l'on considère des molécules situées à une grande distance de l'origine du mouvement, on aura

$$\int.H_1Fhdh=0,\ \int.H_1F_1hdh=0,\ \int.H_1F_2hdh=0;$$

et en négligeant les termes divisés par r^2, il viendra

$$\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{d\zeta^2}+\frac{d\varphi^2}{dr^2}\right)}=\frac{e^{-\frac{g}{2a^2}\cdot\zeta}}{r}\cdot A;$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{g^2}{4a^2}\cdot\left[(\int.Hfhdh)^2+(\int.Hf_1hdh)^2\right]=A^2.$$

Nous avons regardé l'intensité du son comme proportionnelle au carré de la vîtesse des molécules d'air qui choquent l'organe de l'ouie, quand la densité de ce fluide ne change pas; mais si l'on veut comparer cette intensité dans différentes couches d'air, il faudra la supposer proportionnelle à la densité de la couche d'air où le son est entendu : ainsi cette intensité sera représentée par $\rho'\left(\frac{d\varphi^2}{d\zeta^2}+\frac{d\varphi^2}{dr^2}\right)$, c'est-à-dire, par $\frac{D.A^2}{r^2}$, à cause de $\rho'=D.e^{\frac{g}{a^2}\cdot\zeta}$ [n.° 26]. Or, θ est une quantité extrêmement petite entre les limites des intégrales $\int.Hfhdh$, $\int.Hf_1hdh$; ces intégrales reprendront donc à très-peu près les mêmes valeurs pour des valeurs égales de s ou de $r-at$; d'où il suit que l'intensité du son, ou la quantité $\frac{D.A^2}{r^2}$, décroîtra en raison inverse du carré de la distance r, de même que dans le cas où la densité est constante dans toute la masse d'air. On voit de plus que cette intensité, à distance égale, sera proportionnelle à la densité D de la couche d'air où le son a été produit. En effet, la quantité A est indépendante de cette densité; car d'abord la vîtesse a est égale à la racine carrée du rapport de l'élasticité à la densité, rapport qui est le même pour toutes les couches de la masse d'air, puisque l'on a supposé la température constante; et, de plus, si l'on voulait déterminer les fonctions arbitraires que

que A renferme, au moyen des vîtesses et de la condensation à l'origine, on aurait, pour déterminer ces fonctions, des équations où D n'entrerait pas. Ainsi l'intensité du son produit par une même cause, dépend seulement de la densité de l'air à l'endroit où il a été produit, et de la distance qu'il a parcourue ; et, à distance égale, cette intensité est d'autant plus faible que le son est parti d'un point plus élevé dans l'atmosphère.

[29.] Il résulte de la théorie des réfractions, comparée à l'expérience, que la température décroît dans l'atmosphère à mesure que l'on s'élève au-dessus de la surface de la terre, proportionnellement à la hauteur verticale (*Mécanique céleste*, livre X). Dans l'état d'équilibre, au lieu d'avoir simplement $p' = a^2 \rho'$, comme dans le n.° 26, nous aurons donc $p' = a^2 \rho' . (1 + bz)$, b étant un coëfficient constant et positif. Substituant cette valeur dans l'équation $f. \frac{dp'}{\rho'} - gz = 0$, et différenciant par rapport à z, on trouve

$$(g - a^2 . b) . dz - a^2 (1 + bz) . \frac{d\rho'}{\rho'} = 0 ;$$

d'où l'on tire

$$\rho' = D(1 + bz)^{\frac{g - a^2 b}{a^2 b}},$$

en observant qu'on a $\rho' = D$, quand $z = 0$. Pendant le mouvement la densité deviendra $\rho = \rho' (1 + \gamma)$, et la pression $p = p' + a^2 . (1 + bz) . \rho' \gamma$, si l'on fait abstraction de la chaleur rendue sensible par la compression. Nous ignorons si cette quantité de chaleur dépend de la densité et de la température primitives de l'air que l'on comprime, et par conséquent si la quantité k du n.° 1 varie ou reste constante en passant d'une couche à une autre de l'atmosphère. Quoi qu'il en soit, les variations de k auront peu d'influence sur celles de la vîtesse du son, parce que la correction due au développement de chaleur n'est que la moindre partie de cette vîtesse ; c'est pour cette raison que nous négligeons d'avoir égard à cette quantité k dans la question qui nous occupe.

En négligeant les termes de seconde dimension par rapport aux vitesses des molécules d'air et à leur condensation, on aura

$$\int . \frac{dp}{\rho} = \int . \frac{dp'}{\rho'} + a^2 . \int . (1 + bz) d\gamma,$$

et les équations (a) et (b) du n.° 1 deviendront

$$\frac{d\varphi}{dt} + a^2 . \int . (1 + bz) d\gamma = 0,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{d\rho'}{\rho' . dz} . \frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Différenciant la première par rapport à z, et substituant dans la seconde, à la place de $\frac{d\rho'}{\rho' dz}$, sa valeur, il vient

$$\frac{d^2\varphi}{dt\,dz} + a^2 . (1 + bz) . \frac{d\gamma}{dz} = 0,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{1}{a^2} . \frac{g - a^2 b}{1 + bz} . \frac{d\varphi}{dz} = 0;$$

éliminant γ entre ces deux équations, et faisant $\frac{d\varphi}{dz} = \downarrow$, on trouve

$$\frac{d^2\downarrow}{dt^2} = a^2 (1 + bz) . \left(\frac{d^2\downarrow}{dx^2} + \frac{d^2\downarrow}{dy^2} + \frac{d^2\downarrow}{dz^2} \right) + (g - a^2 b) . \frac{d\downarrow}{dz} - \frac{(g - a^2 b)}{1 + bz} . b\downarrow.$$

On peut faire disparaître la différence du premier ordre que cette équation renferme, en prenant $\downarrow = \downarrow_1 . (1 + bz)^{\frac{a^2 b - g}{2a^2 b}}$; si l'on transforme en même temps les coordonnées x, y, z en coordonnées polaires r, u, ω, comme on a fait dans le n.° 4, et si l'on suppose, pour simplifier la question, la fonction $\downarrow_1$ indépendante de l'angle ω, on aura

$$\frac{d^2 . r\downarrow_1}{dt^2} = a^2 (1 + bru) . \left(\frac{d^2 . r\downarrow_1}{d^2 r} + \frac{d . (1 - u^2) \frac{d . r\downarrow_1}{du}}{r^2 du} \right) - \frac{B . r\downarrow_1}{1 + bru},$$

B étant un coëfficient constant, et u le cosinus de l'angle que le rayon r fait avec la verticale z.

On ne peut pas supposer la fonction $\downarrow$, indépendante de la variable u; car si l'on faisait cette supposition, l'équation précédente se réduirait à

$$\frac{d^2 . r\downarrow}{dt^2} = a^2(1 + bru) . \frac{d^2 . r\downarrow}{dr^2} - \frac{B . r\downarrow}{1 + bru};$$

en sorte qu'elle contiendrait encore la variable u, ce qui serait une contradiction. Cette équation n'est point intégrable sous forme finie; son intégrale en série, ou exprimée par des intégrales définies, paraît trop compliquée pour qu'on en puisse déduire la vîtesse du son dans le cas de la température variable : nous renoncerons donc à déterminer cette vîtesse, en conservant à l'air ses trois dimensions, et nous nous bornerons à considérer le cas particulier où la masse d'air est réduite à un canal infiniment étroit.

[30.] Concevons donc un pareil canal, de figure quelconque, rempli d'un fluide dont la température et la densité varient dans toute l'étendue du canal. Soit X la largeur du canal, à une distance x d'une origine fixe, choisie arbitrairement sur le canal, la distance x étant comptée sur sa longueur. Dans l'état d'équilibre, représentons par ρ' la densité du fluide à la distance x de l'origine, par p' la pression en ce point rapportée à l'unité de surface, par q la pesanteur au même point décomposée suivant la direction du canal. La masse de la molécule qui répond à la distance x, sera égale à $X\rho' . dx$; son poids, décomposé suivant la direction du canal, sera par conséquent $X\rho' q . dx$; elle éprouvera sur sa base X une pression $p' X$; cette pression, transmise sur l'autre base $X + dX$, deviendra $p' . (X + dX)$; en y ajoutant le poids $X\rho' q . dx$, on aura la pression totale qu'éprouve la base $X + dX$, savoir, $p' . (X + dX) + X\rho' q . dx$. Mais à la distance $x + dx$, la fonction p' devient $p' + dp'$: la pression qu'éprouve la base $X + dX$ doit donc être exprimée par $(X + dX) . (p' + dp')$; donc on aura

$$(X + dX) . (p' + dp') = p' . (X + dX) + X\rho' q . dx,$$

ou bien, en réduisant,

$$\frac{dp'}{dx} = \rho' q.$$

C'est l'équation d'équilibre du fluide; et comme on a $p' = \rho' . K$, K étant un coëfficient constant, quand la température est constante dans toute l'étendue du canal, et une fonction donnée de x, quand la température varie suivant une loi connue, cette équation deviendra

$$K . \frac{d\rho'}{\rho' dx} + \frac{dK}{dx} - q = 0.$$

Représentons maintenant par ρ, p et v, la densité, la pression et la vîtesse de la molécule fluide qui répond à la distance x, au bout d'un temps quelconque t écoulé depuis l'origine du mouvement. L'instant suivant, la même molécule répondra à la distance $x + v\,dt$, par conséquent sa vîtesse sera devenue $v + \frac{dv}{dt} . dt + \frac{dv}{dx} . v\,dt$; sa force motrice, au bout du temps t, sera donc égale à $\rho X dx . \left(\frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx} . v\right)$. Or, d'après le principe de *d'Alembert*, l'équilibre doit exister dans le fluide, entre les forces motrices dont les molécules sont animées, prises en sens contraire de leurs directions, les poids de ces molécules et les pressions qu'elles éprouvent; substituant donc dans l'équation $\frac{dp'}{dx} = \rho' q$, ρ à ρ', p à p', $q - \frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dx} . v$ à q, on aura

$$\frac{dp}{dx} = \rho \left(q - \frac{dv}{dt} - v . \frac{dv}{dx}\right),$$

pour l'une des équations du mouvement.

Si l'on fait $\rho = \rho' . (1 + \gamma)$, $p = p' + \rho' K\gamma$, et si l'on néglige les termes de seconde dimension par rapport à la condensation γ et à la vîtesse v, cette équation deviendra

$$K . \frac{d\gamma}{dx} + \frac{dv}{dt} = 0. \quad (a)$$

Comme on a deux inconnues γ et v à déterminer, il faut une seconde équation; on la trouvera en observant que la masse de la molécule qui

répond au bout du temps t, à la distance x, ne doit pas varier avec le temps; or, cette masse est égale à $X\rho.(x'-x)$, en désignant par x' la distance $x+dx$; l'instant d'après, x, x', X, ρ deviennent $x+vdt$, $x'+vdt+\frac{dv}{dx}.dxdt$, $X+\frac{dX}{dx}vdt$, $\rho+\frac{d\rho}{dt}.dt+\frac{d\rho}{dx}.vdt$; il faudra donc qu'on ait

$$X\rho.(x'-x)=(X+\frac{dX}{dx}.vdt).(\rho+\frac{d\rho}{dt}+\frac{d\rho}{dx}.vdt).(x'-x+\frac{dv}{dx}.dxdt),$$

équation qui se réduit à

$$\frac{dX}{dx}.\rho v+\frac{d\rho}{dx}.Xv+X.\frac{d\rho}{dt}+X\rho.\frac{dv}{dx}=0.$$

En mettant dans cette équation, $\rho'(1+\gamma)$ au lieu de ρ, et en négligeant les termes de seconde dimension par rapport à γ et v, elle devient

$$\frac{d.\log.X\rho'}{dx}.v+\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dv}{dx}=0;$$

éliminant γ entre celle-ci et l'équation (a), on trouve

$$\frac{d^2.v}{dt^2}=K\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}.\frac{d.\log.\rho'X}{dx}+v.\frac{d^2.\log.\rho'X}{dx^2}\right). \qquad (b)$$

[31.] On peut faire une infinité d'hypothèses sur la forme des fonctions K, ρ', X, qui rendent cette équation intégrable sous forme finie; le cas le plus remarquable est celui où l'on suppose la densité ρ' en raison inverse de la largeur X et la température constante : l'équation (b) se réduit alors à

$$\frac{d^2v}{dt^2}=K.\frac{d^2v}{dx^2},$$

K étant un coëfficient constant; d'où l'on peut conclure que, dans ce cas, la propagation du son a lieu comme si la densité était constante et que le canal fût cylindrique.

Si l'on imagine que le canal fait partie de l'atmosphère; qu'il est d'une largeur égale dans toute son étendue, et qu'il fait avec la verticale un angle dont le cosinus est égal à u, on aura [n.° 29] $K = a^2.(1+bxu)$, $q = gu$, $X =$ const., en supposant l'origine des x au-dessus de la surface de la terre et les valeurs positives de cette variable, dirigées vers cette surface. L'équation d'équilibre deviendra

$$\frac{dp'}{p'dx} = \frac{(g - a^2b).u}{a^2.(1+bu.x)},$$

et l'équation (b)

$$\frac{d^2v}{dt^2} = a^2(1 + bu.x).\frac{d^2v}{dx^2} + (g - a^2b)u.\frac{dv}{dx} - \frac{(g-a^2b).bu^2}{1+bu.x}v.$$

Pour intégrer cette équation, soit d'abord $\sqrt{(1 + bu.x)} = y$; elle deviendra

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{a^2b^2u^2}{4}.\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{(2g-3a^2b).bu^2}{4y}.\frac{dv}{dy} - \frac{(g-a^2b).bu^2}{1+bu.x}.v;$$

faisant ensuite $v = v_1.y^{\frac{3a^2b-2g}{2a^2b}}$, la différence du premier ordre disparaîtra, et l'on aura

$$\frac{d^2v_1}{dt^2} = \frac{a^2b^2u^2}{4}.\left(\frac{d^2v_1}{dy^2} - \frac{mv_1}{y^2}\right),$$

m étant un coëfficient constant; enfin soient $y - \frac{abu}{2}t = s$, $y + \frac{abu}{2}.t = s_1$, cette dernière équation deviendra

$$\frac{d^2v_1}{ds\,ds_1} = \frac{mv_1}{(s+s_1)^2}.$$

L'intégrale complète de cette équation est la somme de deux séries infinies; savoir,

$$v_1 = fs - \frac{m}{s+s_1}.\int fs\,ds + \frac{m_1}{2.(s+s_1)}.\int^2 fs\,ds^2 - \frac{m_{11}}{2.3.(s+s_1)^2}.\int^3 fs\,ds^3 + \&c.$$

$$+ Fs_1 - \frac{m}{s+s_1}.\int Fs_1ds_1 + \frac{m_1}{2.(s+s_1)^2}.\int^2 Fs_1ds_1^2 - \frac{m_{11}}{2.3.(s+s_1)^3}.\int^3 Fs_1ds_1^3 + \&c.;$$

fs et $Fs_{,}$ étant les deux fonctions arbitraires; $m_{,}$, $m_{,,}$, &c. désignant des coèfficiens constans et déterminés. On peut transformer chacune de ces séries en une intégrale définie, relative à une nouvelle variable h, comme on a fait dans le n.° 28; et si l'on fait

$$H = 1 + \frac{(h-s).m}{s+s_{,}} + \frac{(h-s)^{2}.m_{,}}{2.2.(s+s_{,})^{2}} + \frac{(h-s)^{3}.m_{,,}}{2.3.2.3.(s+s_{,})^{3}} + \&c.,$$

$$H_{,} = 1 + \frac{(h-s_{,}).m}{s+s_{,}} + \frac{(h-s_{,})^{2}.m_{,}}{2.2.(s+s_{,})^{2}} + \frac{(h-s_{,})^{3}.m_{,,}}{2.3.2.3.(s+s_{,})^{3}} + \&c.$$

on aura

$$v_{,} = \int.Hfhdh + \int.H_{,}Fhdh;$$

pourvu qu'après les intégrations, on mette à la place de h, s dans la valeur de $\int.Hfhdh$, et $s_{,}$ dans celle de $\int.H_{,}Fhdh$. Les séries H et $H_{,}$ dépendent d'équations différentielles du second ordre qu'on ne sait pas intégrer sous forme finie.

On aura donc

$$v = (1 + bu.x)^{\frac{3a^{2}b-2g}{2a^{2}b}}.(\int.Hfhdh + \int.H_{,}Fhdh);$$

par conséquent, si l'on suppose que l'ébranlement primitif a eu lieu depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \alpha$, il sera facile de conclure de cette formule, sans que nous soyons obligés de répéter ce qui a été dit plus haut [n.° 28], que la molécule d'air qui répond à la distance x positive et plus grande que α, commencera à s'ébranler à l'instant où l'on aura

$$\sqrt{(1 + bu.x)} = \frac{abu}{2}.t + \sqrt{(1 + bu.\alpha)};$$

d'où l'on tire, en élevant au carré et divisant par bu,

$$x = \alpha + at.\sqrt{(1 + bu.\alpha)} + \frac{a^{2}bu}{4}.t^{2}.$$

Ainsi, le son se propagera dans le sens des x positives, d'un mouvement uniformément accéléré; sa vîtesse à chaque instant sera la même que celle d'un corps animé d'une force accélératrice constante, égale à $\frac{a^{2}b}{2}$, et dirigée verticalement; lequel corps glisserait le long du

canal en vertu de cette force accélératrice décomposée, et d'une vîtesse initiale égale à $a.\sqrt{(1+bu.\alpha)}$, ou simplement à a, à cause que la quantité α peut être négligée. On peut remarquer que cette vîtesse initiale est indépendante de la direction du canal, et qu'elle est la vîtesse constante du son quand le canal est horizontal.

Il résulte de la formule qui donne la valeur de v, que le son se propage également dans le sens des abscisses négatives. La molécule qui répond à la distance $-x$, commence à s'ébranler à l'instant où l'on a

$$\sqrt{(1-bu.x)}+\frac{abu}{2}.t=1,$$

c'est-à-dire,

$$x=at-\frac{a^2bu}{4}.t^2;$$

de sorte qu'en s'éloignant de la surface de la terre, ou dans le sens des x négatives, le son se propage d'un mouvement uniformément retardé, la vîtesse initiale et la force retardatrice étant les mêmes, au signe près, que dans le sens des x positives. Ces résultats confirment ce qui a été dit au commencement de ce Mémoire.

[32.] Au reste, il est bon d'observer que la vîtesse du son varie très-lentement, à cause de la petitesse de la quantité b. Pour le montrer par un exemple, supposons le canal cylindrique vertical, et le son produit à la surface de la terre; comparons sa vîtesse en ce point, à sa vîtesse à la hauteur de 6980^m à laquelle M. *Gai-Lussac* s'est élevé en ballon; désignons par a' cette dernière vîtesse, et par n le nombre de secondes sexagésimales que le son emploie à parvenir à cette hauteur; nous aurons

$$a'=a-\frac{a^2b}{2}.n, \qquad 6980^m=an-\frac{a^2b}{4}.n^2;$$

d'où l'on tire

$$a'^2=a^2[1-b.(6980^m)].$$

Or, à cette même hauteur, la température observée par M. *Gai-Lussac*, était

était de $-9°,5$ centigrades, tandis qu'à la surface de la terre, elle était de $30°,75$; le rapport de l'élasticité de l'air à la densité à cette hauteur, est donc [n.° 22] égal à

$$a^2 \cdot \left(\frac{1 - (40,25).(0,00375)}{1 + (30,75).(0,00375)} \right);$$

et comme nous avons désigné ce rapport à la hauteur quelconque x, par $a^2 . (1 + bx)$, on trouvera, en prenant $x = -6980^m$,

$$b . (6980^m) = \frac{71.(0,00375)}{1+(30,75).(0,00375)} = 0,23852.$$

On aura donc

$$a' = a\sqrt{(1 - 0,23852)} = a . (0,87262),$$

d'où il suit que la vîtesse du son, quand il s'est élevé à une hauteur de 6980^m dans l'atmosphère, est à peine diminué d'un *huitième* de sa valeur à la surface de la terre.

Nous remarquerons encore que le son s'élevera, quelle que soit l'inclinaison du canal, jusqu'au point de l'atmosphère où son élasticité devient nulle en vertu du décroissement de chaleur, et où l'on a par conséquent $1 - bu.x = 0$. En effet, il doit s'élever jusqu'à ce que la vîtesse variable avec laquelle il se propage soit devenue nulle; or, si l'on calcule la hauteur où cela arrive, on trouve $x = \frac{1}{bu}$, comme à la limite de l'atmosphère.

Mouvement d'une Chaîne pesante.

[33.] CONSIDÉRONS une chaîne pesante, suspendue verticalement par l'une de ses extrémités. Supposons que l'on fasse prendre à une portion de cette chaîne, une figure quelconque qui s'écarte très-peu de la ligne verticale, le reste de la chaîne, au-dessus et au-dessous de cette portion, conservant la position verticale; si l'on cesse de retenir cette portion de chaîne dans la position où on l'a placée, elle se mettra en mouvement, en vertu de la pesanteur, pour reprendre la ligne verticale, et le mouvement se transmettra de proche en proche dans

toute l'étendue de la chaîne. Tous ceux qui ont eu l'occasion de remarquer ce mouvement, savent qu'il se propage par une sorte d'ondulation sensible à la vue : la question que nous nous proposons de résoudre, c'est de déterminer la vîtesse avec laquelle cette ondulation se propage, dans le cas particulier où la chaîne pesante est homogène et d'une égale épaisseur dans toute son étendue.

En appelant l la longueur de la chaîne entière, g la gravité, x la distance d'un point quelconque de cette chaîne au point de suspension; en désignant par y et z les coordonnées du même point, au bout du temps t écoulé depuis l'origine du mouvement, et en supposant que ces coordonnées restent très-petites par rapport à x, pendant toute la durée du mouvement: les équations de ce mouvement, telles qu'on les trouve dans la Mécanique analytique, *page 335*, seront

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g.\frac{d.(l-x).\frac{dy}{dx}}{dx},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g.\frac{d.(l-x).\frac{dz}{dx}}{dx}.$$

Comme ces deux équations sont semblables, il suffira d'en considérer une seule, la première, par exemple; les valeurs de z suivront la même loi que celles de y.

Mettons cette première équation sous la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g.(l-x).\frac{d^2y}{dx^2} - g.\frac{dy}{dx}; \qquad (1)$$

et pour l'intégrer, faisons

$$\sqrt{(l-x)} + \frac{t.\sqrt{g}}{2} = s,\ \sqrt{(l-x)} - \frac{t.\sqrt{g}}{2} = s_1,\ y = \frac{y_1}{\sqrt{(l-x)}};$$

elle deviendra

$$\frac{d^2y_1}{ds\,ds_1} = -\frac{y_1}{4(s+s_1)};$$

équation que nous avons déjà intégrée [n.° 31], et dont l'intégrale complète est

$$y_{,} = \int . Hfhdh + \int . H_{,}Fhdh;$$

fh et Fh étant les deux fonctions arbitraires, l'intégrale $\int . Hfhdh$ commençant à une valeur arbitraire de h et finissant à $h = s$, et l'intégrale $\int . H_{,}Fhdh$ étant prise depuis une valeur arbitraire de h jusqu'à $h = s_{,}$; enfin H et $H_{,}$ désignant les mêmes séries que dans le n.° 31; savoir:

$$H = 1 + \frac{(h-s).m}{s+s_{,}} + \frac{(h-s)^{2}.m_{,}}{2.2.(s+s_{,})^{2}} + \frac{(h-s)^{3}.m_{,,}}{2.3.2.3.(s+s_{,})^{3}} + \&c.;$$

$$H_{,} = 1 + \frac{(h-s_{,}).m}{s+s_{,}} + \frac{(h-s_{,})^{2}.m_{,}}{2.2.(s+s_{,})^{2}} + \frac{(h-s)^{3}.m_{,,}}{2.3.2.3.(s+s_{,})^{3}} + \&c.,$$

dans lesquelles il faut prendre $m = -\frac{1}{4}$.

On aura donc

$$y = \frac{1}{\sqrt{(l-x)}} .(\int . Hfhdh + \int . H_{,}Fhdh);$$

de plus, la valeur de $\frac{dy}{dt}$ doit être de même forme que celle de y; car en différenciant l'équation (1) par rapport à t, on a pour déterminer $\frac{dy}{dt}$ la même équation que pour déterminer y; ainsi l'on aura également

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(l-x)}} .(\int . Hf_{,}hdh + \int . H_{,}F_{,}hdh);$$

$f_{,}h$ étant une fonction qui dérive de fh, et $F_{,}h$ de Fh.

Cela posé, si l'ébranlement primitif a eu lieu depuis $x = c$ jusqu'à $x = c + \alpha$, il faudra que l'ordonnée y et la vîtesse $\frac{dy}{dt}$ soient nulles pour toutes les valeurs de $x > c + \alpha$ ou $< c$; or, on satisfera à cette condition, en supposant, 1.° que les fonctions fh, $f_{,}h$, Fh, $F_{,}h$ sont nulles pour toutes les valeurs de $h > \sqrt{(l-c)}$ ou $< \sqrt{(l-c-\alpha)}$; 2.° que les intégrales $\int . Hfhdh$ et $\int . Hf_{,}hdh$ commencent à $h = \sqrt{(l-c-\alpha)}$, et les intégrales $\int . H_{,}Fhdh$ et $\int . H_{,}F_{,}hdh$ à

$h = \sqrt{(l-c)}$. En effet, ces quatre intégrales devant se terminer à $h = \sqrt{(l-x)}$, quand $t = 0$, il s'ensuit d'abord que les fonctions fh et $f_{,}h$ seront nulles, entre les limites des deux premières intégrales, pour toutes les valeurs de $x > c + \alpha$; par conséquent ces deux intégrales seront nulles pour toutes ces valeurs de x : il en sera de même des deux autres intégrales pour toutes les valeurs de $x < c$. De plus, les intégrales $\int . Hfhdh$ et $\int . Hf_{,}hdh$ seront aussi nulles, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de $x < c$; car alors ces intégrales doivent être prises depuis $h = \sqrt{(l-c-\alpha)}$ jusqu'à $\sqrt{(l-x)}$, ou, ce qui revient au même, on peut les prendre en deux parties, la première, depuis $h = \sqrt{(l-c-\alpha)}$ jusqu'à $h = \sqrt{(l-c)}$, et la seconde, depuis $h = \sqrt{(l-c)}$ jusqu'à $\sqrt{(l-x)}$; cette seconde partie est évidemment nulle, puisque les fonctions fh et $f_{,}h$ sont nulles entre les deux limites $h = \sqrt{(l-c)}$ et $h = \sqrt{(l-x)}$; la première partie est aussi nulle, parce que les intégrales $\int . Hfhdh$ et $\int . Hf_{,}hdh$, prises depuis $h = \sqrt{(l-c-\alpha)}$ jusqu'à $h = \sqrt{(l-c)}$, et ensuite divisées par $\sqrt[4]{(l-c)}$, représentent, à l'origine du mouvement, les valeurs de y et $\frac{dy}{dt}$, relatives au point de la chaîne qui répond à $x = c$; or, quel que soit l'ébranlement primitif, puisqu'il se termine en ce point, l'écartement y et la vîtesse $\frac{dy}{dt}$ de ce point, doivent être nuls ou infiniment petits, quand $t = 0$. On prouvera de même que les intégrales $\int . H_{,}Fhdh$ et $\int . H_{,}F_{,}hdh$ sont nulles, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de $x > c + \alpha$; ainsi les quatre intégrales $\int . Hfhdh$, $\int . Hf_{,}hdh$, $\int . H_{,}Fhdh$, $\int . H_{,}F_{,}hdh$, n'auront pas de valeurs, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de x qui tombent hors des limites de l'ébranlement primitif; par conséquent ces intégrales seront propres à représenter l'état primitif de la chaîne pesante.

Les intégrales $\int . Hfhdh$, $\int . Hf_{,}hdh$, n'acquerront de valeurs qu'à l'instant où l'on aura

$$s = \sqrt{(l-x)} + \frac{t\sqrt{g}}{2} = \sqrt{(l-c-\alpha)},$$

et les intégrales $\int . H_{,} F h dh$, $\int . H_{,} F_{,} h dh$ resteront nulles jusqu'à ce qu'on ait

$$s_{,} = \sqrt{(l - x)} - \frac{t\sqrt{g}}{2} = \sqrt{(l - c)}.$$

La première condition ne pourra avoir lieu que pour les valeurs de $x > c + \alpha$, et la seconde pour les valeurs de $x < c$; il s'ensuit donc que la propagation du mouvement se fera au-dessous de l'ébranlement primitif, d'après l'équation $s = \sqrt{(l - c - \alpha)}$, et au-dessus de cet ébranlement, d'après l'équation $s_{,} = \sqrt{(l - c)}$. On tire de la première équation

$$x = c + \alpha + t . \sqrt{g(l - c - \alpha)} - \frac{t^2 . g}{4},$$

et de la seconde

$$c - x = t . \sqrt{g(l - c)} + \frac{t^2 . g}{4};$$

ce qui nous apprend qu'il se produira deux ondulations, l'une descendante et l'autre ascendante : la première descendra le long de la chaîne, d'un mouvement uniformément retardé, dont la force retardatrice sera égale à la moitié de la pesanteur naturelle; la seconde remontera suivant la longueur de la chaîne, d'un mouvement uniformément accéléré, dont la force accélératrice sera aussi la moitié de la pesanteur naturelle.

[34.] La vîtesse initiale de l'ondulation descendante est égale à $\sqrt{g(l - c - \alpha)}$: or, on voit que cette vîtesse est précisément celle qui est nécessaire pour que l'ondulation parcoure la ligne $l - c - \alpha$, distance de l'ébranlement primitif à l'extrémité inférieure de la chaîne; elle atteindra donc cette extrémité; et quand elle y sera parvenue, sa vîtesse sera nulle, quel que soit le point d'où elle est partie. La vîtesse initiale de l'ondulation ascendante est égale à $\sqrt{g(l - c)}$: c'est la vîtesse qu'elle aurait acquise en vertu de l'accélération de son mouvement, si elle fût partie de l'extrémité inférieure de la chaîne; lors donc qu'elle

aura atteint l'extrémité supérieure, sa vîtesse sera égale, quel que soit son point de départ, à celle qu'elle acquerrait en parcourant la chaîne entière.

Il résulte de là qu'on peut rendre la transmission du mouvement dans une chaîne pesante, aussi rapide que l'on voudra, en suspendant à son extrémité inférieure un poids considérable ; car il est évident que jusqu'à ce que l'ondulation descendante soit parvenue à cette extrémité, le mouvement de la chaîne sera le même que si on l'eût alongée d'une certaine quantité; de sorte que si on appelle l' la longueur d'une portion de la même chaîne, dont le poids soit égal à celui qu'on a employé, les vîtesses initiales des ondulations ascendante et descendante deviendront $\sqrt{g(l+l'-c)}$ et $\sqrt{g(l+l'-c-\alpha)}$; par conséquent ces ondulations atteindront, dans un temps plus court, les deux extrémités de la chaîne.

Les limites de l'intégrale $\int.Hfhdh$ deviendront alors $h=\sqrt{(l+l'-c-\alpha)}$ et $h=\sqrt{(l+l'-x)}+\frac{t\sqrt{g}}{2}$; et comme cette dernière limite doit être plus petite que $\sqrt{(l+l'-c)}$, pour que fh ne soit pas nulle, il s'ensuit que la différence de ces limites sera plus petite que $\sqrt{(l+l'-c)}-\sqrt{(l+l'-c-\alpha)}$; la quantité $\frac{(h-s).m}{s+s'}$ sera donc plus petite que $\frac{[\sqrt{(l+l'-c)}-\sqrt{(l+l'-c-\alpha)}].m}{2\sqrt{(l+l'-x)}}$, dans toute l'étendue de l'intégrale $\int.Hfhdh$; donc si l'on suppose les lignes α et x très-petites par rapport à $l+l'$, la série H sera très-convergente, et en ne prenant que son premier terme, on aura

$$\int.Hfhdh = \text{fonct.}\left[\sqrt{(l+l'-x)}+\frac{t\sqrt{g}}{2}\right].$$

On aura de même

$$\int.H,Fhdh = \text{fonct.}\left[\sqrt{(l+l'-x)}-\frac{t\sqrt{g}}{2}\right],$$

et par conséquent

$$y = \frac{\text{fonct.}\left[\sqrt{(l+l'-x)} + \frac{t\sqrt{g}}{2}\right]}{\sqrt[4]{(l+l'-x)}} + \frac{\text{fonct.}\left[\sqrt{(l+l'-x)} - \frac{t\sqrt{g}}{2}\right]}{\sqrt[4]{(l+l'-x)}}.$$

Il sera facile alors de construire la figure de la chaîne pesante à un instant donné, d'après sa figure à l'origine du mouvement; et l'on voit que la longueur de la partie de la chaîne en mouvement à chaque instant, de part et d'autre de l'ébranlement primitif, sera constante et égale à α pendant toute la durée du mouvement. Ce résultat n'aurait plus lieu, si l'on n'attachait pas à l'extrémité inférieure de la chaîne, un poids considérable par rapport au poids de cette chaîne; car, sans cette addition, la série H serait divergente pour des valeurs de x peu différentes de l; la figure de la portion de chaîne en mouvement, changerait vers l'extrémité inférieure, et la longueur de l'ondulation ne serait plus la même dans toute l'étendue de la chaîne.

[35.] L'EXTRÉMITÉ inférieure de la chaîne étant libre, le point situé à cette extrémité peut prendre la vîtesse qui lui est communiquée, et il n'en résulte aucune nouvelle condition à remplir; mais l'extrémité supérieure étant fixe, il faut que l'ordonnée y du point qui répond à $x = 0$ soit nulle pour toutes les valeurs de t; or il suffit, pour satisfaire à cette condition, d'ajouter, aux deux termes de la valeur de y, un troisième terme de même forme, qui n'acquière de valeur qu'à l'instant où l'ondulation ascendante parvient au point de suspension, et dont les valeurs relatives à ce point, ou à $x = 0$, soient toujours égales et de signe contraire aux valeurs du terme $\frac{f.H,Fhdh}{\sqrt[4]{(l-x)}}$. Cette addition est permise, puisque la valeur de y continuera de satisfaire à l'équation (1), à cause de la forme linéaire de cette équation : il résultera du terme ajouté, une ondulation descendante dont le mouvement sera le même que celui de la première ondulation de cette espèce, et qui succédera à l'ondulation ascendante comme l'écho succède au son direct, dans une

ligne d'air terminée par un point fixe. En général, la transmission du mouvement dans une chaîne pesante, homogène, également épaisse dans toute son étendue, et suspendue par une de ses extrémités, est analogue à la propagation du son dans un canal cylindrique, lorsque la température et la densité de l'air varient, comme nous l'avons supposé au n.° 31, et que le canal est fermé à son extrémité inférieure; et si l'épaisseur de la chaîne était variable suivant une loi donnée, on trouverait toujours une loi de température et de densité dans l'étendue du canal, pour laquelle le mouvement de la chaîne et celui de l'air seraient encore semblables.

SUITE