HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

ANNE'E MDCCLIII.



A BERLIN.

CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Académie Royale.
MDCCLV.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE

DES

SCIENCES

ET

BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPERIMENTALE.

RE'FLE'XIONS
ET
ECLAIRCISSEMENS
SUR LES NOUVELLES VIBRATIONS DES CORDES EXPOSÉES DANS LES MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE *de* 1747. & 1748.

PAR M. DANIEL BERNOULLI.

I.

Mr. *Taylor* eſt parvenu le premier à connoitre le nombre des vibrations, que fait dans un tems donné une corde uniformement epaiſſe d'une longueur donnée, d'un poids donné, & tenduë par une force donnée. Il n'étoit pas poſſible de déterminer ce nombre ſans connoitre préalablement les courbures, que prendroient les cordes pendant tout le tems que dureroient leurs vibrations ; il a donc démontré, que cette courbure étoit

conſtamment la compagne d'une cycloïde extremement allongée, dans laquelle les appliquées repréſentent les ſinus des arcs repréſentés par les abſciſſes : auſſi n'eſt-ce à mon avis que ſous cette forme que les vibrations peuvent devenir régulieres, ſimples, & iſochrones, malgré l'inégalité des excurſions. Avec cette idée, que j'ai toujours euë, je ne pouvois qu'être ſurpris de voir dans les Mémoires des années 1747. & 1748. une infinité d'autres courbures comme douées de la même propriété; il ne me falloit pas moins que les grands noms de Mrs. d'*Alembert* & *Euler*; que je ne pouvois ſoupçonner d'aucune inattention, pour examiner s'il n'y auroit pas quelque équivoque dans l'aggrégation de toutes ces courbes avec celle de M. *Taylor*, & dans quel ſens on pourroit les admettre. J'ai vû auſſi-tôt, qu'on ne pouvoit admettre cette multitude de courbes que dans un ſens tout-à-fait impropre; je n'en eſtime pas moins les calculs de Mrs. d'*Alembert* & *Euler*, qui renferment certainement tout ce que l'Analyſe peut avoir de plus profond & de plus ſublime; mais qui montrent en même tems, qu'une analyſe abſtraite, qu'on écoute ſans aucun examen ſynthetique de la queſtion propoſée, eſt ſujette à nous ſurprendre plutôt qu'à nous éclairer. Il me ſemble à moi, qu'il n'y avoit qu'à faire attention à la nature des vibrations ſimples des cordes, pour prévoir ſans aucun calcul tout ce que ces deux grands Géometres ont trouvé par les calculs les plus épineux & les plus abſtraits, dont l'eſprit analytique ſe ſoit encore aviſé.

II. Remarquons d'abord que, ſuivant la théorie de M. *Taylor*, une corde tenduë peut former ſes vibrations uniformes d'une infinité de manieres, qui different entre elles pour le phyſique, mais qui reviennent au même pour le géometrique, parce que dans chacune de ces manieres on ne fait que changer l'unité qui ſert de meſure. Ces manieres differentes conſiſtent dans le nombre des ventres, que la corde peut former durant ſes vibrations. Quand il n'y a qu'un ſeul ventre, comme dans la premiere Figure, les vibrations ſont les plus tardives, elles forment le ſon fondamental; quand il y a deux ventres, & un noeud

noeud au milieu de l'axe, les vibrations ſe doublent, & elles forment l'octave du ſon fondamental; lorsque la corde forme trois, quatre, ou cinq ventres, avec deux, trois, ou quatre noeuds, par des diſtances mutuelles égales, comme dans les figures 3. 4. & 5. les vibrations ſe triplent, quadruplent, ou quintuplent, & forment la douzième, la double octave, ou la tierce majeure de la double octave, rélativement au ſon fondamental. Cette multiplicité va à l'infini. Dans chaque eſpece de ces vibrations les excurſions totales peuvent être grandes ou petites à diſcrétion, pourvû que les plus grandes puiſſent être cenſées extrêmement petites. La nature de ces vibrations eſt telle que, non ſeulement chaque point commence & finit chaque vibration ſimple au même inſtant, mais encore que tous les points ſe mettent après chaque demi-vibration ſimple dans la poſition de l'axe AB. Il faut conſidérer toutes ces conditions comme eſſentielles, & tout auſſi-tôt il n'y a que les courbes données par M. *Taylor*, qui ſatisfaſſent au problème. Mais en ſéparant ces conditions on peut former une infinité de courbes, qui ſatisfaſſent à quelque condition ſéparément; mais je ferai voir combien peu on ſeroit fondé en ces cas à appeller les vibrations iſochrones pour chaque point. Il en eſt de ces vibrations, comme des mouvemens réciproques des corps, qui deſcendent & montent alternativement ſur une courbe; cette courbe ne peut être que la cycloïde, ſi l'on demande que toutes les deſcentes, grandes ou petites, ſoyent iſochrones entre elles de même que les montées; mais ſi l'on veut ſimplement que les vibrations entieres ſoyent iſochrones entre elles, on peut donner autant de courbes qu'on demande, qui ſatisfaſſent à ce problème; puiſque j'ai demontré dans les Mémoires de Petersbourg, que quelle courbe de deſcente on donne, on peut toujours déterminer la courbe de montée, telle que les deux tems employés à la deſcente & à la montée pris enſemble faſſent une même ſomme, quelque inégalité qu'il y ait entre les amplitudes des excurſions.

III. Si j'ai dit que les cordes peuvent faire leurs vibrations ſimples d'une infinité de manieres, dont les cinq premieres figures ſervent

 d'exem-

d'exemples, ce n'eſt pas là une vérité abſtraite ſeulement ; on peut la rendre réelle, comme l'exemple des trompettes marines le montre aſſez par les ſons qu'on en tire : les Expériences qu'on fait en plaçant un chevalet dans quelqu'un des points *a*, & en pinçant le bout A*a*, confirment la même choſe ; puisqu'elles nous aprennent, qu'il ſe forme aux points *b*, *c*, *d*, &c. des noeuds à diſtances égales, qui demeurent comme en repos, pendant que tous les autres points ſont agités. Cette multiplicité infinie de vibrations ſe manifeſte dans tous les corps ſonores, de quelque nature qu'ils puiſſent être ; c'eſt par là qu'on peut tirer des cors de chaſſe, des trompettes, &c. tous les ſons qui vont en progreſſion des nombres naturels ; c'eſt à dire dans la même progreſſion que les ſons, qu'on peut tirer d'une ſeule & même corde par ſes differentes eſpeces de vibrations. En fermant tous les trous d'une flûte traverſiere, on peut par la ſimple variation de l'embouchure obtenir d'abord le ſon le plus bas, ou fondamental, & puis ſucceſſivement ſon octave, ſa douzième, ſa double octave, ſa dix-ſeptième majeure, qui ſont pareillement comme 1, 2, 3, 4 & 5. mais il ne faut pas croire pour cela, que cette progreſſion ſoit générale. Aprés m'être formé une bonne théorie ſur les vibrations de l'air dans les inſtrumens à vent, j'en ai conclu, qu'on ne pourroit tirer des tuyaux bouchés que les ſons, qui vont en progreſſion des nombres impairs, ſavoir 1, 3, 5, 7, &c. & ma concluſion a été confirmée par l'Expérience : car ayant ôté la piece d'en-haut d'une flûte traverſiere, & la bouchant avec la main, j'en ai tiré d'abord le ſon le plus bas, & puis renforçant le ſoufle ſa douzième ſans paſſer par l'octave, enſuite ſa dix-ſeptième majeure, & enfin un ton qui n'eſt pas reçu dans la Muſique, & qui approchoit de la vingt-unième du ſon fondamental. Je ne ſai ſi cette propriété a déjà été remarquée par d'autres ; mais elle me paroit d'autant plus remarquable, qu'elle eſt peut-être propre à expliquer en quoi conſiſtent ces accès de facile réfléxion & de facile transmiſſion des rayons, obſervés avec tant de ſagacité par le grand Newton. C'eſt ſur quoi je compte de donner un Mémoire, quand j'aurai expliqué & réduit au calcul les vibra-

vibrations de l'air formées dans des tuyaux ouverts & bouchés, & démontré l'analogie entre ces vibrations de l'air & celles de l'ether, qui fait la lumiere. Je n'ai fait ici cette remarque, que pour prouver, que les differens ſons tirés du même corps ſonore ne vont pas toujours dans la progreſſion des nombres naturels. Mais je dis plus : ces ſons peuvent avoir telle proportion, qu'il n'y a aucune formule en quantités finies qui puiſſe l'exprimer; comme on peut voir par les ſons, que j'ai calculés autrefois, qui ſont ceux qu'on peut tirer d'une verge d'acier frappée par des petits coups. C'étoit un problème nouveau, & qui demandoit beaucoup de circonſpection; après l'avoir réſolu, je l'ai propoſé à M. *Euler*, qui en a donné une ſolution parfaitement conforme à la mienne, quoique incomplete d'abord en ce qu'il avoit omis la moitié des ſons poſſibles ; je l'en ai averti, & il y a ſuppléé dans les Actes de Leipſig.

IV. Ma concluſion eſt, que tous les corps ſonores renferment en puiſſance une infinité de ſons, & une infinité de manieres correſpondantes de faire leurs vibrations régulieres ; enfin, que dans chaque differente eſpece de vibrations les infléxions des parties du corps ſonore ſe font d'une maniere differente. Mais ce n'eſt pas de cette multitude de vibrations appliquée aux cordes tenduës, que Mrs. d'*Alembert* & *Euler* prétendent parler ; elle n'étoit pas inconnuë à M. *Taylor :* ils multiplient à l'infini chaque eſpece, en accordant à chaque intervalle entre deux noeuds voiſins une infinité de courbures telles que chaque point commence & acheve aux mêmes inſtans ſes vibrations, pendant que, ſuivant la théorie de M. *Taylor*, chaque dit intervalle doit néceſſairement prendre la ſeule courbure de la compagne de la cycloïde extrémement allongée. Cette contradiction apparente entre d'auſſi grands Géometres me paroit demander quelque éclairciſſement.

V. Remarquons donc, que la corde AB peut non ſeulement faire ſes vibrations ſuivant la figure premiere, ou ſeconde, ou troiſième, & ainſi à l'infini, mais qu'il peut ſe faire encore un mêlange de toutes ces vibrations avec toutes les combinaiſons poſſibles ; & cependant

toutes

toutes les nouvelles courbes & nouvelles eſpeces de vibrations données par Mrs. d'*Alembert* & *Euler* ne ſont abſolument qu'un mêlange de pluſieurs eſpeces de vibrations Tayloriennes. Si cela eſt vrai, je ne ſaurois approuver l'aggrégation de toutes ces nouvelles courbes ; puisque la corde en s'y conformant ne donne pas un ſeul & même ton, mais pluſieurs tons à la fois. Pour ſentir l'incongruïté de cette nouvelle aggrégation, ſuppoſons, au lieu d'une ſeule corde, cinq cordes par exemple, entierement égales en tout ſens ; que la premiere faſſe ſes vibrations ſuivant la loi de la premiere figure ; la ſeconde corde ſuivant la loi de la ſeconde figure, & ainſi des autres. Suppoſons que toutes ces cordes commencent leurs vibrations dans un même inſtant ; voudroit-on appeller ces cinq eſpeces de vibrations iſochrones entre elles, ſimplement parce qu'elles finiſſent une de leurs vibrations au même instant que la premiere corde finit chacune des ſiennes ? Non ſans doute, parce que la ſeconde corde fait deux vibrations, la troiſième trois, & ainſi des autres, pendant que la premiere corde n'en fait qu'une ; & que chaque corde donne un ton different à proportion. Cependant tout ce que je viens de dire par rapport à pluſieurs cordes entierement égales, peut & doit être appliqué à une ſeule & même corde.

VI. Effectivement tous les Muſiciens conviennent, qu'une longue corde pincée donne en même tems, outre ſon ton fondamental, d'autres tons beaucoup plus aigus ; ils remarquent ſur tout le mêlange de la douzième & de la dix-ſeptième majeure : s'ils ne remarquent pas auſſi diſtinctement l'octave & la double octave, ce n'eſt qu'à cauſe de la trop grande reſſemblance de ces deux tons avec le ton fondamental. Voilà une preuve évidente, qu'il peut ſe faire dans une ſeule & même corde un mêlange de pluſieurs ſortes de vibrations Tayloriennes à la fois. On entend pareillement dans le ſon des groſſes cloches un mêlange de tons differens. Si l'on tient par le milieu une verge d'acier, & qu'on la frappe, on entend à la fois un mêlange confus de pluſieurs tons, lesquels étant appréciés par un habile Muſicien ſe trouvent extrémement

ment desharmonieux, de ſorte qu'il ſe forme ici un concours de vibrations, qui ne commencent & ne finiſſent jamais dans un même inſtant, ſinon par un grand hazard : d'où l'on voit que l'harmonie des ſons, qu'on entend dans une même corps ſonore à la fois, n'eſt pas eſſentielle à cette matiere, & ne doit pas ſervir de principe pour les ſyſtèmes de Muſique. L'air n'eſt pas exemt de cette multiplicité de ſons coëxiſtans : il arrive ſouvent qu'on tire deux ſons differens à la fois d'un tuyau ; mais, ce qui prouve le mieux, combien peu les differentes ondulations de l'air s'entre-empêchent, eſt qu'on entend diſtinctement toutes les parties d'un concert, & que toutes les ondulations cauſées par ces differentes parties ſe forment dans la même maſſe d'air ſans ſe troubler mutuellement, tout comme les rayons de la lumiere, qui entrent dans une chambre obſcure à travers une petite ouverture, ne ſe troublent point.

VII. Après ces remarques il ſera facile de conſtruire une infinité de courbes initiales à la corde AB avec cette condition, que chaque point de la corde arrive quelquefois en même tems à un point de repos inſtantané, & de donner la loi générale pour toutes ces courbes ſans aucun calcul préalable. Commençons par la combinaiſon des deux premieres figures. Suppoſons que la corde faſſe ſes vibrations pour former le ſon fondamental conformément à la premiere figure ; cette courbure étant cenſée infiniment petite, la corde pourra encore être conſidérée comme une ligne droite, & ſa courbe pourra ſervir d'axe mobile à la courbe de la ſeconde figure, à deux branches ; & de là il réſulte une nouvelle courbe, qui remplira la condition préſcrite. Voici donc la conſtruction de cette nouvelle courbe.

VIII. Soit (Fig. 6.) A *m a n* B la courbure de la premiere figure : qu'on conſidére cette courbe comme un axe droit, ſur lequel on conſtruiſe A *p a q* B, entiérement la même par rapport à ſon axe courbé que celle de la figure ſeconde, par rapport à l'axe parfaitement droit AB ; & cette courbe A *p a q* B ſera telle qu'on deſiroit, & la plus ſimple des courbes données par M^rs. d'*Alembert* & *Euler*.

Comme la plus grande appliquée pm peut avoir un rapport quelconque à la plus grande appliquée ar, il eſt clair, que cette courbe ApaqB contient déjà une infinité d'eſpeces. Voici à préſent les propriétés de cette courbe ApaqB.

(a) Je dis que la courbe idéale AmanB fera ſes vibrations par rapport à l'axe droit Arb, entierement ſuivant la loi des vibrations ſimples de la premiere figure.

(b) Enſuite, que chaque point de la courbe ApaqB aura ſon mouvement rélatif par rapport à chaque point correſpondant de la courbe AmanB, le même que le mouvement abſolu repréſenté par la ſeconde figure.

(c) Or chaque point de la ſeconde figure fait préciſément deux vibrations, pendant que le même point en fait une dans les vibrations de la premiere figure. Il faut donc que tous les points de la courbe ApaqB finiſſent leurs vibrations alternes au même inſtant, que ceux de la figure AmanB finiſſent chacune des leurs.

(d) Lorsque, au commencement, un point de la courbe ApaqB eſt en dehors de la courbe AmanB, ce même point au bout de ſes deux vibrations ſera en dedans de cette derniere courbe, qui n'aura fait qu'une ſeule vibration; & ainſi la courbe AmanB ayant pris la ſituation A$m'a'n'$B, il arrivera que la courbe ApaqB prenne la ſituation A$p'a'q'$B, & que la courbe A$p'a'q'$B ſoit tout à fait la même qu'elle avoit été, en changeant ſimplement l'ordre des côtés, c'eſt à dire, la même que BqapA, ce qui fait un cas du beau théoreme de M. *Euler*.

IX. De la même façon que nous avons combiné les vibrations de la premiere, & de la ſeconde figure, on pourra combiner les vibrations de la premiere figure, avec celles de toute autre figure ſans exception

exception à l'infini; toutes ces combinaiſons peuvent même ſubſiſter à la fois; ainſi; par exemple, la courbe abſoluë A*paq*B de la ſixième figure, pourra encore être conſidérée comme une courbe translatrice, on pourra la partager en trois parties égales, & y appliquer la même courbe qui, dans la troiſième figure, eſt appliquée à l'axe droit AB. Quelle que ſoit la courbe abſoluë réſultante de toutes ces combinaiſons faites à diſcrétion, il arrivera toujours que tous les points de la courbe arrivent dans un même inſtant au point de repos inſtantané du côté oppoſé de l'axe, & la courbe dans cet état ſera toujours la même, en ſituation renverſée, qu'elle avoit été au commencement, comme le dit M. *Euler.*

X. Si l'on ne combine enſemble que les figures, qui ont un nombre de ventres impair, ces courbes auront encore cette propriété, que chaque point de la courbe abſoluë réſultante paſſe dans un même inſtant par l'axe droit AB, ce qui peut par conſéquent ſe faire d'une infinité de façons; mais auſſi-tôt qu'une ſeule courbe à ventres pairs s'y mêle, cela n'arrive plus. Voilà un expoſé phyſique des nouvelles vibrations des cordes données par M^rs. d'*Alembert* & *Euler;* & ſi j'ai bien compris leurs énoncés, toutes les nouvelles courbes qu'ils donnent, ſont compriſes dans notre conſtruction, & ſont un ſimple mêlange de pluſieurs eſpeces de vibrations, dont chacune à part ſe fait ſuivant les loix décrites par M. *Taylor.* Mais il me ſemble que ce n'eſt là qu'une eſpece de compoſition de mouvement, qui ne peut donner aucune amplification à la théorie de M. *Taylor.*

XI. Pour mieux ſentir l'incongruïté d'une telle amplification, nous combinerons la courbe fondamentale de M. *Taylor*, qui eſt repréſentée par la premiere figure, avec la figure anguiforme Taylorienne qui auroit 1001 ventres; il en réſultera une courbe du nombre des nouvelles courbes, qui aura cette propriété, que tous les points commençans au même inſtant leur vibration, paſſeront tous dans un même inſtant par l'axe droit, & arriveront dans un même inſtant au

point de repos, de l'autre côté de l'axe, pour recommencer un nouveau mouvement pareil au précedent. Mais qu'arrive-t-il pendant ce mouvement ? Je dis qu'il y aura dans la corde préciſément 1000 points à de petites diſtances égales, dont chacun fait une vibration, abſolument de la même maniere que ſi les vibrations ſe faiſoient ſimplement ſuivant la loi de la premiere figure, pendant que tous les autres points feront 1001 allées & venuës, ou 1001 vibrations, & pourront même paſſer 1001 fois l'axe droit. Ces 1001 vibrations ſeront entieres & parfaites ; dans chacune de ces vibrations chaque élément aura un moment de repos abſolu & parfait, & un moment auquel ſa viteſſe ſoit la plus grande. Si l'on vouloit confondre ces petites vibrations rapides avec la ſimple vibration fondamentale, uniquement parce que la mille & unième petite vibration finit au même inſtant dans chaque point, que la vibration fondamentale finit, ce ſeroit appeller ſynchrones deux pendules ſimples, dont l'un auroit 1 pied de longueur & l'autre 1002001 pieds, parce que ces deux pendules, commençans leurs vibrations au même inſtant, les finiſſent auſſi dans un même tems ; on pourroit même unir ces deux pendules en ſuppoſant un corps extrèmement peſant, ſuſpendu par une très longue corde, & un petit corps attaché au grand par un petit fil, on pourra toujours obtenir que le petit pendule attaché au grand commence la premiere de ſes vibrations, & finiſſe la derniere, aux mêmes inſtans que le grand pendule commence & finit une ſeule vibration ; mais ſera-t-on fondé pour cela d'appeller ces vibrations iſochrones ?

XII. Voyons encore ſi toutes les nouvelles courbes trouvées par M. *Euler*, ſont compriſes dans notre remarque. Pour cet effet il faudra donner une équation pour toutes les courbes Tayloriennes, dont les cinq premieres figures ſont autant d'exemples. Je me ſerviraï des dénominations de M. *Euler*. Soit donc la longueur de la corde $AB = a$; $\pi =$ à la demi-circonference du cercle dont le rayon eſt exprimé par l'unité, la plus grande appliquée au milieu de chaque ventre

ventre pour la premiere figure $= \alpha$, pour la ſeconde $= \mathfrak{G}$, pour la troiſième $= \gamma$, pour la quatrième $= \delta$; ſoit enfin x une abſciſſe quelconque, & y l'appliquée pour cette abſciſſe, on aura ſuivant M. *Taylor*,

pour la 1. fig. $y = \alpha \text{ ſin } \frac{\pi x}{a}$

pour la 2. fig. $y = \mathfrak{G} \text{ ſin } \frac{2\pi x}{a}$

pour la 3. fig. $y = \gamma \text{ ſin } \frac{3\pi x}{a}$

pour la 4. fig. $y = \delta \text{ ſin } \frac{4\pi x}{a}$ &c.

En combinant donc toutes ces courbes à l'imitation de la figure ſixième, pour laquelle nous n'avons combiné que les deux premieres figures, nous aurons généralement pour la même abſciſſe x cette équation

$$y = \alpha \text{ ſin } \frac{\pi x}{a} + \mathfrak{G} \text{ ſin } \frac{2\pi x}{a} + \gamma \text{ ſin } \frac{3\pi x}{a} + \delta \text{ ſin } \frac{4\pi x}{a} + \text{ &c.}$$

dans laquelle les quantités α, $\mathfrak{G}$, γ, δ, &c ſont arbitraires affirmatives ou négatives.

XIII. Voilà donc cette infinité de courbes trouvées ſans aucun calcul, & notre équation eſt la même que celle de M. *Euler*; voyez les Mémoires de l'Académie pour l'Année 1748. page 85. Il eſt vrai que M. *Euler*, ne traite pas cette multitude infiniment infinie de générale, & qu'il ne la donne au §. 30. que comme des cas particuliers; mais c'eſt ſur quoi je ne ſuis pas encore aſſez éclairci : s'il y a encore d'autres courbes, je ne comprens pas dans quel ſens on peut les admettre.

XIV. Si dans notre équation on ſuppoſe les coëfficiens des termes alternes, ſavoir $\mathfrak{G}$, δ, &c. $= 0$, il arrivera alors non ſeulement, que

toutes les eſpeces de vibrations finiſſent au même inſtant que finit la vibration fondamentale, mais encore que tous les points de la corde ſe rangent au même inſtant dans la poſition de la ligne droite AB; cela n'eſt qu'un corollaire de notre §. 10. Dans cette ſuppoſition la courbe obtient un diametre qui paſſe par le milieu de la corde AB, & qui partage la courbe en deux branches parfaitement égales & ſemblables. Ce théoreme eſt donc encore le même que celui de M. *Euler* du §. 28.

XV. Si après toutes nos remarques on vouloit encore confondre les vibrations compoſées avec les vibrations ſimples expoſées par M. *Taylor*, je ne m'y oppoſerai pas; mon intention n'a été principalement que d'expoſer ce que les nouvelles vibrations de Mrs. d'*Alembert* & *Euler* ont de phyſique. Si au contraire on trouve que ces nouvelles vibrations ne ſauroient être priſes pour des vibrations ſimples, qui ſeules faiſoient l'objet de M. *Taylor*, & qu'étant décompoſées en vibrations ſimples & uniformes, chaque eſpece ſe fait ſimplement ſuivant la loi de *Taylor*, ces nouvelles courbes ne feront que confirmer la théorie de M. *Taylor*, quand il exclud toutes les autres courbes, & qu'il n'admet que ſa trochoïde prolongée. Mais je n'en admirerai pas moins la profonde ſagacité avec laquelle nos deux illuſtres Géometres ont ſu déterminer analytiquement ces nouvelles courbes. Au reſte je crois que quelque courbure initiale qu'on donne à la corde, elle ne manquera pas de faire ſes vibrations presque auſſitôt ſuivant la ſimple uniformité des mouvemens iſochrones, & conformèment à la nature de la trochoïde prolongée expoſée par M. *Taylor*, quoique Mr. *Euler* ne paroiſſe pas de ce ſentiment au §. 27. Voici comment je conçois la choſe. L'expérience & la raiſon nous apprennent, que de deux cordes également groſſes & également tenduës, la plus longue conſerve plus longtems ſes vibrations que la plus petite; dans les petites cordes pincées le ſon ne dure qu'un inſtant. Ainſi toutes les vibrations partielles, mêlées avec la vibration totale & fondamentale, finiront bien vîte, pendant que la fondamentale dure encore très ſenſiblement; & alors la

corde

corde ne formera plus que la trochoïde prolongée de M. *Taylor*. C'eſt auſſi ce que nous voyons toujours arriver dans les cordes pincées d'un clavecin, dans leſquelles on reconnoit aſſez par les yeux ladite courbe uniforme, qui ne forme qu'un ſeul ventre.

XVI. On peut encore remarquer ſur cette matiere, qu'il n'y a que les cordes uniformement épaiſſes, qui ſoient ſuſceptibles des propriétés que nous venons d'expoſer; la raiſon en eſt, que lorſque les cordes inégalement épaiſſes ſe replient ſuivant les figures 2. 3. 4. 5. &c. les vibrations n'en deviennent pas préciſement 2. 3. 4. 5. &c. fois plus rapides qu'elles ſont par rapport à la première figure, & qu'ainſi dans le mêlange de ces vibrations elles ne finiſſent jamais dans un même inſtant, quoiqu'elles ayent toutes commencé dans un même inſtant. Il n'y a donc à mon avis qu'une ſeule courbe pour les cordes inégalement épaiſſes, pour un nombre d'interſections donné, qui ſatisfaſſe à notre problème; & ſi cela eſt, pourquoi y en auroit-il une infinité pour les cordes uniformement épaiſſes? Enfin, qu'on choiſiſſe le mêlange le plus ſimple, en conſidérant l'équation $y = \alpha \text{ ſin } \frac{\pi x}{a} + \mathfrak{C} \text{ ſin } \frac{2\pi x}{a}$, dans laquelle les coëfficiens α & $\mathfrak{C}$ peuvent être de petites lignes quelconques. Soit la longueur du pendule ſimple iſochrone, avec les vibrations uniformes qui répondent à la ſimple première figure $= l$; la longueur d'un pareil pendule pour la ſeconde figure $= \frac{1}{4} l$; ou ſuivant M^rs. d'*Alembert* & *Euler*, le pendule iſochrone pour la figure exprimée par l'équation $y = \alpha \text{ ſin } \frac{\pi x}{a} + \mathfrak{C} \text{ ſin } \frac{2\pi x}{a}$ a toujours pour longueur la quantité l; cependant cette même longueur eſt manifeſtement $= \frac{1}{4} l$ en faiſant $\alpha = 0$; il y auroit donc là dedans une contradiction, ſi ces Géometres ne prenoient le mot d'iſochroniſme dans un autre ſens, qu'on ne lui attache ordinairement.

XVII.

XVII. De notre ſolution ſynthetique du problème de Mrs. d'*Alembert* & *Euler*, on voit auſſi ſans calcul la maniere de déterminer la courbe abſoluë de la corde à chaque inſtant, de même que la viteſſe de chaque point: car, ſoit la courbe initiale exprimée par

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \epsilon \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \delta \sin \frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

& qu'il ſoit, par exemple, queſtion de déterminer la courbe au moment que le milieu de la corde paſſe par l'axe droit AB: il eſt clair que la courbe ſera exprimée dans cet inſtant par cette équation

$$y = -\epsilon \sin \frac{2\pi x}{a} + \delta \sin \frac{4\pi x}{a} - \&c.$$

dans laquelle les ſignes ſont alternativement négatifs & affirmatifs. Quant aux viteſſes, il eſt de même facile à les déterminer par la ſimple compoſition du mouvement, puiſqu'on détermine dans la Méchanique le rapport des viteſſes de chaque point pour chaque figure à part.

XVIII. J'ai évité juſques ici les calculs, & j'ai fondé tout mon raiſonnement ſur le principe confirmé par l'expérience (§. 6.) qu'il peut ſe faire un mêlange de vibrations dans un ſeul & même corps ſonore, qui ſoient abſolument indépendantes les unes des autres. A bien conſidérer ce principe, il n'eſt pas differant de celui de la compoſition du mouvement; cependant, pour le mettre dans tout ſon jour, j'ai cru devoir ajouter ici les réfléxions méchaniques, & les calculs que cette matiere demande.

XIX. Soit un corps A (fig. 7.) tiré directement vers un point fixe B: ſi l'on demande que le corps arrive au point B dans un tems donné, quelle que ſoit la diſtance initiale AB, on ſait que les gravitations du corps A vers le point fixe B, doivent être dans chaque point proportionelles aux diſtances du corps depuis le point B. On ſait même, qu'il n'y a que cette ſeule loi de gravitation qui ſatisfaſſe à la queſtion;

tion; alors les demi-excurſions deviennent de part & d'autre parfaitement égales. Voilà le vrai iſochroniſme, & le ſeul qu'il faille conſidérer. Suppoſons après cela que, pendant que le corps A eſt pouſſé avec la dite loi vers le point B, les deux points A & B ſouffrent dans chaque inſtant une accéleration égale vers le point C, de ſorte que le ſyſtème A B ſouffre une gravitation commune vers C, qui ſoit encore proportionelle aux diſtances B C; par là on obtiendra un autre iſochroniſme dans les excurſions du ſyſtème A B. Après cela on pourra de nouveau imaginer que les trois points A, B, & C, ſouffrent dans chaque inſtant une accélération égale vers un quatrième point D, & que cette gravitation commune aux trois points A, B, & C, ſoit toujours proportionelle aux diſtances du point C au point D. De cette façon on pourra multiplier à l'infini les gravitations du corps A vers differens points, & ce corps A ſouffrira par là un mêlange de pluſieurs eſpeces de vibrations, qu'il convient d'examiner.

XX. Quelle que ſoit la diſtance initiale, le corps A employera toujours le même tems pour parvenir au point B, & pour faire une demi-vibration; après quoi le corps A fera une autre demi-vibration, du côté oppoſé toujours dans le même tems; il reviendra encore au point B après un troiſième tems, & ainſi de ſuite: en un mot ce mouvement rélatif au point B ſera le même, que ſi ce point demeuroit entiérement en repos. J'appellerai ces mouvemens réciproques, des vibrations iſochrones rélatives; & cette diſtinction des vibrations eſt bien néceſſaire, parce qu'en effet elles ſont bien différentes des vibrations abſoluës du même corps A. Suppoſons que la peſanteur du corps A vers le point B ſoit égale à la peſanteur naturelle, en faiſant ſa diſtance au point B $= a$; dans cette ſuppoſition ces premieres vibrations iſochrones rélatives ſeront iſochrones avec les vibrations abſoluës d'un pendule ſimple de la longueur a.

Après avoir conſidéré ces premieres vibrations rélatives au point B, nous aurons les mêmes réfléxions à faire ſur les vibrations iſochro-

nes du point B, rélatives au point C ; & ces vibrations exiſteront en même tems dans le corps A, ſans troubler en aucune façon les premières vibrations de ce corps. Ces ſecondes vibrations ſeront iſochrones avec celles d'un pendule ſimple de la longueur b, en ſuppoſant que la peſanteur du point B, ou du corps A, vers le point C, devient égale à la peſanteur naturelle, lors qu'on fait $BC = b$.

Si l'on veut ajouter à ces doubles vibrations du corps A une troiſième eſpece, il faudra ſuppoſer une troiſième vibration commune au ſyſtème précedent ABC vers un point D, qu'on fera ſous de pareilles dénominations iſochrones avec celles d'un pendule ſimple de la longueur c. De cette maniere on pourra aller auſſi loin qu'on voudra, & produire dans le corps A tant d'eſpeces de vibrations iſochrones rélatives qu'on ſe ſera propoſé. Mais n'allons pas plus loin, & ſuppoſons cette troiſième vibration abſoluë, en conſidérant le point D comme fixe. De cette façon le ſeul & même corps A aura en même tems trois eſpeces de vibrations indépendantes les unes des autres, dont les centres de force ſont les points B, C, & D, que nous allons conſidérer de plus près.

XXI. Les tems desdites vibrations partielles ſeront en raiſon ſous-doublée des quantités arbitraires a, b, & c ; ſi ces quantités ſont, par exemple, comme 4, 9, & 36, les tems des vibrations ſeront comme 2, 3, & 6 ; ainſi, pendant que le point C fait une vibration entiere rélativement au point fixe D, le point B en fera deux rélativement au point C, & le point A en fera trois rélativement au point B : d'où il eſt clair, que tout le ſyſtème ne ſera remis dans ſon premier état qu'au bout de ſix vibrations rélatives au point B, ou de quatre vibrations rélatives au point C, ou de deux vibrations rélatives au point fixe D. Mais, ſuivant la maniere dont Mrs. d'*Alembert* & *Euler* enviſagent la choſe, tout ce mêlange de vibrations ne feroit jamais que deux vibrations ſimples. Dans cet exemple il n'arrivera point, que les trois points A, B, & C, ſe réüniſſent au point fixe D. Mais ſi l'on ſuppoſe les trois quanti-

quantités arbitraires $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, & $\sqrt{c}$, être en raiſon de 3, 5, & 15, les tems des vibrations ſeront en même raiſon, & les points A, B, & C ſe trouveront réünis au point D au bout de chaque demi-vibration du point C; de cette maniere les excurſions ſeront parfaitement ſemblables & égales de chaque côté du point fixe D: mais à mon avis le point A n'en doit pas moins être cenſé faire cinq demi-vibrations avant que cela arrive, au lieu que dans l'autre ſens il n'eſt cenſé de faire qu'une ſeule demi-vibration. Pour voir la néceſſité d'enviſager ces mouvemens réciproques conformément à notre théorie, il n'y a qu'à ſuppoſer les diſtances arbitraires initiales BC, & CD, extrêmement petites par rapport à AB; il n'y aura alors que les vibrations AB qui ſoyent ſenſibles, & le corps A fera manifeſtement cinq demi-vibrations avant la réünion parfaite des points A, B, & C, au point D. Mais, ſi on conſidéroit les diſtances AB, & BC, comme extrêmement petites par rapport à CD, il n'y aura que les vibrations CD qui ſoyent ſenſibles, & le corps A ne pourroit plus être cenſé que d'avoir fait une ſeule demi-vibration. Il faut donc éviter ici toute équivoque dans les mots de vibration & d'iſochronisme. Si les quantités $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, & $\sqrt{c}$, ſont incommenſurables, il ne pourra jamais arriver, que le ſyſtème reprenne ſon état initial, ni que le corps A revienne au point dont il étoit parti, parce que les points A, B, & C, n'auront jamais leurs plus longues élongations rélatives dans un même inſtant: cependant chaque eſpece de vibration relative à part ſe fera ſuivant la loi des pendules ſimples cycloïdiques. C'eſt la ſource de la raiſon, qui empêche d'étendre la nouvelle théorie de M^rs. d'*Alembert* & *Euler* à toutes ſortes de cordes, quelque loi d'inégalité qu'il puiſſe y avoir dans leur épaiſſeur.

XXII. Dans l'application de ces réfléxions aux cordes vibrantes, il faudra ſuppoſer $b = \frac{1}{4} c$, $a = \frac{1}{9} c$ &c. de ſorte que les nombres des differentes eſpeces de vibrations ſimples ſoyent en raiſon des nombres naturels 1, 2, 3, &c. en commençant par celle du point C rélati-

ve au point fixe D, enſuite celle du point B rélative à ſon centre de force mobile C, & puis celle du point A rélative au centre de force mobile B.

XXIII. Suppoſons à préſent la diſtance initiale A B $= a$, B C $= \mathfrak{b}$, C D $= \gamma$, &c. & qu'au bout d'un tems donné t la diſtance A B ſoit devenuë $= x$, la diſtance B C $= y$, la diſtance C D $= z$ &c. ; ſoit auſſi la viteſſe rélative entre les points A & B $= u'$, celle d'entre les points B & C $= u''$, celle d'entre les points C & D $= u'''$ &c. on aura

$$du' = \frac{x}{a}\,dt \quad \& \quad u' = \sqrt{\frac{aa - xx}{a}},$$

$$du'' = \frac{y}{b}\,dt \quad \& \quad u'' = \sqrt{\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{b} - yy}{b}},$$

$$du''' = \frac{z}{c}\,dt \quad \& \quad u''' = \sqrt{\frac{\gamma\gamma - zz}{c}}, \quad \&c.$$

Outre ces équations la Géometrie nous enſeigne encore des conſtructions & équations entre le tems t & les diſtances x, y, z, &c. Car, ſoit le ſinus total exprimé par l'unité, & qu'on dénote par A. cof F un arc de cercle, dont le rayon eſt un, & dont le coſinus eſt une quantité quelconque F, on pourra exprimer le tems t par chacune des équations ſuivantes

$$t = \sqrt{a} \times \text{A. cof } \frac{x}{a}$$

$$t = \sqrt{b} \times \text{A. cof } \frac{y}{\mathfrak{b}}$$

$$t = \sqrt{c} \times \text{A. cof } \frac{z}{\gamma} \quad \&c.$$

Par le moyen de ces équations on pourra déterminer chacune des diſtances

tances x, y, z, &c. par le même tems t commun, en convertiſſant les ſignes; de cette façon on aura

$$x = \alpha \text{ cof A. } \frac{t}{\sqrt{a}}$$

$$y = \mathfrak{G} \text{ cof A. } \frac{t}{\sqrt{b}}$$

$$z = \gamma \text{ cof A. } \frac{t}{\sqrt{c}} \text{ &c.}$$

Dans ces équations il faut entendre par cof A $\frac{t}{\sqrt{a}}$ le coſinus d'un arc de cercle, qui eſt égal à $\frac{t}{\sqrt{a}}$ & dont le rayon eſt égal à l'unité, & ainſi des autres. Outre cela les quantités $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, &c. marquent les tems, qu'un corps animé par la peſanteur naturelle employe pour tomber librement des hauteurs $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, &c.

Nous avons donc déterminé chacune des quantités x, y, z, &c. par le même tems t, & par conſéquent la diſtance abſoluë du corps au dernier point fixe, laquelle diſtance eſt $= x + y + z +$ &c. Nous avons pareillement déterminé pour chaque inſtant les viteſſes rélatives u', u'', u''', &c. & la viteſſe abſoluë du point A exprimée par $u' + u'' + u''' +$ &c. de même que les élémens de toutes ces viteſſes.

XXIV. On pourra, au lieu des tems exprimés par $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, &c. conſidérer les tems qui répondent à une vibration ſimple rélative du point A par rapport au point B; & puis du point B par rapport au point C, enſuite du point C par rapport au point D. Si nous déſignons donc ces tems par θ', θ'', θ''' &c. & que π ſoit la demi-circonférence d'un cercle qui a l'unité pour rayon, il faudra ſuppoſer dans

les équations du precédent article $V a = \frac{\theta'}{\pi}$, $V b = \frac{\theta''}{\pi}$, $V c = \frac{\theta'''}{\pi}$, après lesquelles ſubſtitutions toutes les quantités deviennent manifeſtement homogenes.

Soit, par exemple, $\theta' = 1''$, $\theta'' = 2''$, $\theta''' = 3''$, & qu'il ſoit queſtion de déterminer toutes les circonſtances du mouvement en faiſant $t =$ un quart de ſeconde; je dis qu'on aura $x = \alpha \cos A \frac{\pi t}{\theta'} = \alpha \cos A \frac{1}{4}\pi = \alpha V\frac{1}{2}$; $y = \mathcal{C} \cos A \frac{\pi t}{\theta''} = \mathcal{C} \cos A \frac{1}{8}\pi = \mathcal{C} \cos 22° 30'$, & $z = \gamma \cos A \frac{\pi}{12} = \gamma \cos 15°$; donc $x + y + z = 0,70710\ \alpha + 0,92387\ \mathcal{C} + 0,96592\gamma$, laquelle quantité marque la diſtance du corps A au point D après un quart de ſeconde de tems. On aura enſuite $u' = V\frac{\alpha\alpha - xx}{a} = \frac{\alpha}{Va} \sin A \frac{1}{4}\pi$; $u'' = V\frac{\mathcal{C}\mathcal{C} - yy}{b} = \frac{\mathcal{C}}{Vb} \sin A \frac{1}{8}\pi = \frac{\mathcal{C}}{2Va} \sin A \frac{1}{8}\pi$, & $u''' = \frac{\gamma}{3Va} \sin A \frac{1}{12}\pi$. De là il réſulte pour notre exemple la viteſſe abſoluë $u' + u'' + u''' = \frac{6\alpha \sin 45° + 4\mathcal{C} \sin 22° 30' + 2\gamma \sin 15°}{6\gamma a}$

XXV. Mais, ſans nous arrêter à cette ſorte de déterminations, qui n'ont pas trop de rapport avec ce que je me ſuis propoſé de principal, examinons plutôt ſous quelles circonſtances la viteſſe abſoluë $u' + u'' + u'''$ peut devenir $= 0$, en nous bornant aux trois eſpeces de vibrations ſimples mêlées enſemble. Il faudra pour cet effet, en vertu du §. 23. faire $V\frac{\alpha\alpha - xx}{a} + V\frac{\mathcal{C}\mathcal{C} - yy}{b} + V\frac{\gamma\gamma - zz}{c} = 0$

ſubſti-

ſubſtituons pour x, y, & z leur valeur en t, & nous aurons $\frac{\alpha}{V a} \text{ ſin A } \frac{t}{V a} + \frac{\mathfrak{C}}{V b} \text{ ſin A } \frac{t}{V b} + \frac{\gamma}{V c} \text{ ſin A } \frac{t}{V c} = 0$. Je me propoſe de déterminer la valeur de t, qui ſatisfaſſe à cette équation dans quelque exemple particulier. Nous ſuppoſerons donc θ''' ou $\pi V c = 2\theta''$ ou $2\pi V b = 3\theta'$ ou $3\pi V a$, c'eſt à dire nous ſuppoſerons, que, pendant que le point C fait une vibration pour le point fixe D, le point B en faſſe deux pour le point C, & le point A en faſſe trois pour le point B, laquelle ſuppoſition demande $V c = 2V b = 3V a$. Là deſſus notre équation donnera

$$3\,\alpha \text{ ſin A } \frac{3t}{V c} + 2\mathfrak{C} \text{ ſin A } \frac{2t}{V c} + \gamma \text{ ſin A } \frac{t}{V c} = 0.$$

Soit à préſent $\text{ſin A } \frac{t}{V c} = q$, & on aura $\text{ſin A } \frac{2t}{V c}$, c'eſt à dire le ſinus de l'arc double $= 2q V(1 - qq)$ & $\text{ſin A } \frac{3t}{V c} = 3q - 4q^3$, & là deſſus nous aurons

$$3\,\alpha\,(3q - 4q^3) + 2\mathfrak{C} \times 2q V(1 - qq) + \gamma q = 0,$$

ou bien

$$9\,\alpha - 12\,\alpha qq + 4\mathfrak{C} V(1 - qq) + \gamma = 0.$$

Par la premiere des ces équations on voit déjà, qu'on peut faire $q = \text{ſin A } \frac{t}{V c} = 0$, ce qui donne $z = \gamma \text{ cof A } \frac{t}{V c} = \pm\gamma$; $y = \mathfrak{C} \text{ cof A } \frac{t}{V b} = \mathfrak{C} \text{ cof A } \frac{2t}{V c} = \mathfrak{C}$, & $x = \pm\alpha$, & par conſéquent $x + y + z = \pm\alpha + \mathfrak{C} \pm \gamma$. C'eſt là le cas qui s'offre de ſoi-même; mais il y en a encore d'autres indiqués par la ſeconde équation, qui peuvent être très réels. Pour abréger le calcul, nous nous bornerons

rons aux cas qui ſont $9\alpha + \gamma = 4\zeta$; & dans ces cas on trouve le ſin A $\frac{t}{Vc}$ ou bien

$$q = \pm \frac{V(6\alpha\zeta - \zeta\zeta)}{3\alpha};$$

& enſuite le coſ A $\frac{t}{Vc}$ ou bien

$$V(1-qq) = \pm \frac{V(9\alpha\alpha - 6\alpha\zeta + \zeta\zeta)}{3\alpha} = \pm\left(1 - \frac{\zeta}{3\alpha}\right).$$

De là on obtient $z = \pm\gamma\left(1 - \frac{\zeta}{3\alpha}\right)$,

cette valeur de z marque déjà la poſition du point C; on trouvera enſuite la valeur de y, & enfin celle de x, & par là on aura déterminé les poſitions des trois points C, B, & A.

On voit donc que notre queſtion eſt le plus ſouvent ſuſceptible de pluſieurs ſolutions très réelles, quoiqu'elles ne le ſoyent pas toujours: car dans le cas préſent il faut que la quantité $\frac{\zeta}{3\alpha}$ ſoit toujours un nombre affirmatif, & que ζ ſoit plus petit que 6α.

Deſcendons ici à un exemple tout particulier: ſuppoſons $\zeta = 4\alpha$ & par conſéquent $\gamma = 7\alpha$. Dans ce cas il faut prendre $V(1-qq)$ négativement, & faire $V(1-qq) = -\frac{1}{3}$, ce qui donne l'arc $\frac{t}{Vc}$ de 109^d, $28'$, dont le coſinus eſt $= -\frac{1}{3}$; l'arc $\frac{2t}{Vc}$ de 218^d, $56'$, dont le coſinus eſt $= -0,77787$; & l'arc $\frac{3t}{Vc}$ de 328^d, $24'$, dont le coſinus eſt $= 0,83172$. Ces valeurs donnent $z = -\frac{1}{3}\gamma = -\frac{7}{3}\alpha$;

$y =$

$y = -0,77787\,\zeta = -3,11148\,\alpha$; & $x = 0,85172\,\alpha$, & par conſéquent $x + y + z = -4,59309\,\alpha$. Ainſi la diſtance initiale du corps A depuis le point D étant exprimée par 12, il y aura encore deux poſitions du corps A, dans leſquelles ſa viteſſe abſoluë ſoit nulle, & ſes diſtances au point D ſeront alors -4 & $-4,59309$.

XXVI. Voici à preſent la nature du mouvement abſolu du corps A par rapport au point fixe D; la figure 8 marque les points capitaux avec la juſte proportion des diſtances. Je dis donc que le corps partant du point A ſera d'abord accéléré & enſuite retardé, après quoi il ſera arrêté pour un moment au point B; il rebrouſſera de là jusques au point C, où il repoſera encore un inſtant; du point C il retournera vers le point B en s'y arrêtant de nouveau pendant un inſtant, & du point B enfin il retournera au point A dont il étoit parti, où ſa viteſſe ſera encore nulle, & alors tout ſera réduit à ſon premier état. Outre cela le tems employé pour faire la premiere vibration A B eſt exprimé par l'arc $109^d.\,28'$, le tems pour faire la ſeconde petite vibration B C par l'arc $70^d.\,32'$; ce ſecond tems ſera encore employé pour faire la troiſième vibration C B, & le premier tems pour faire la quatrième vibration B A. Si on exprime donc tout le tems, que le corps employe avant que de ſe remettre en ſon premier état, par 21600, la premiere vibration employera 6568 de même que la quatrième, pendant que chacune des deux moyennes employera 4232. Comme dans cet exemple la ſeconde & la troiſième excurſion ſont très petites, le mouvement du corps paroitra comme presque en repos pendant preſque la moitié du tems entier. Mais on auroit pu choiſir d'autres exemples, où les excurſions partielles ſeroient devenuës comme égales & comme iſochrones, & alors c'eſt une queſtion, ſi le corps doit être cenſé avoir fait quatre vibrations, ou deux; dans le ſens de Mrs. d'*Alembert* & *Euler*, il faudroit toujours dire, qu'il n'en auroit fait que deux, quoiqu'on put lui faire faire cent allées & venuës toutes preſque égales, & preſque iſochrones, & dont les mouvemens ſe feroient preſque entierement ſelon les loix des mouvemens iſochrones ſimples & ordinaires.

XXVII. Ce que je viens de dire du mouvement du corps A, arrive parfaitement à chaque point dans les nouvelles vibrations des cordes: je me contenterai, pour faire voir cette entiere conformité, d'expliquer le mêlange des deux premieres eſpeces de vibrations les plus ſimples, exprimées par les deux premieres figures. J'ai repréſenté ce mêlange par la figure ſixième, dont j'ai donné la conſtruction au §. 8. Soit dans cette courbe abſoluë A p a q B la plus grande appliquée rélative $p\,m = \varrho$, la plus grande appliquée $a\,r$ de la courbe idéale A m a n B $= \sigma$; & ſoit encore la longueur de la corde entiere A B $= a$; qu'on prenne une abſciſſe quelconque A $b = x$ avec ſon appliquée $b\,d$; là-deſſus on aura en vertu de la Théorie de M. *Taylor* $c\,d = \varrho \text{ ſin } \frac{2\pi x}{a}$ & $b\,c = \sigma \text{ ſin } \frac{\pi x}{a}$, & par conſéquent l'appliquée $b\,d = \varrho \text{ ſin } \frac{2\pi x}{a} + \sigma \text{ ſin } \frac{\pi x}{a}$. Soit $b\,d = y$, on aura, en ſuppoſant dx conſtante, $ddy = \left(\frac{4\pi\pi}{aa}\varrho \text{ ſin } \frac{2\pi x}{a} + \frac{\pi\pi}{aa}\sigma \text{ ſin } \frac{\pi x}{a}\right)dx^2$; or, nommant P le poids qui tend la corde, & p le poids de la corde tenduë & uniforme, on ſait que la force accélératrice abſoluë du point d eſt exprimée par $\frac{P}{p} \cdot \frac{a\,d\,dy}{dx^2}$; cette force accélératrice ſera donc ici $\frac{P}{p}a\left(\frac{4\pi\pi}{aa}\varrho \text{ ſin } \frac{2\pi x}{a} + \frac{\pi\pi}{aa}\sigma \text{ ſin } \frac{\pi x}{a}\right)$ ou bien $=$ $\frac{4P}{p} \cdot \frac{\pi\pi\varrho}{a} \text{ ſin } \frac{2\pi x}{a} + \frac{P}{p} \cdot \frac{\pi\pi\sigma}{a} \text{ ſin } \frac{\pi x}{a}$, ce qui fait la force accélératrice entiere du point $d = \frac{4P}{p} \cdot \frac{\pi\pi}{a} \cdot c\,d + \frac{P}{p} \cdot \frac{\pi\pi}{a} \cdot bc$. Nous voyons donc, que la force accélératrice entiere eſt compoſée de deux parties, dont la premiere eſt proportionelle à la diſtance dc, & qui fait faire au point d des vibrations iſochrones rélatives au point c, qui fait

fait ici un centre de force mobile: la ſeconde partie de la force accélératrice du point d eſt $= \frac{P}{p} \cdot \frac{\pi\pi}{a} \cdot bc$: or, par la nature de la courbe A can B, le point c eſt animé vers le point immobile b avec la même force accélératrice $\frac{P}{p} \cdot \frac{\pi\pi}{a} \cdot bc$; ainſi la ſeconde force produit conſtamment la même accélération aux points d & c, & ne fera que transporter la petite diſtance dc ſans la changer aucunement. Nous ſommes donc entierement dans le même cas que celui des §§. 19. & 20. Pour obtenir une entiere identité il faudra ſuppoſer dans la ſeptième figure C D $= o$, A B $= dc$ & B C $= cb$, ou bien $\alpha = \varrho$ ſin $\frac{2\pi x}{a}$, $\mathfrak{G} = \sigma$ ſin $\frac{\pi x}{a}$ & $\gamma = o$, & dans ces expreſſions la quantité x eſt conſtante par rapport au mouvement du même point d. Ainſi le mouvement de chaque point dans la courbe A daq B, ſera par rapport à la courbe idéale A can B, le même que le mouvement abſolu de la ſeconde figure, & le mouvement abſolu de la courbe idéale A can B ſera le même que celui de la premiere figure; ainſi la vibration ſuivant la figure A daq B n'eſt abſolument qu'un mêlange des vibrations ſuivant la premiere & la ſeconde figure combinées enſemble, dont chaque eſpece ſe fait indépendamment l'une de l'autre. Ce mouvement abſolu du point d renferme réellement deux mouvemens périodiques, l'un par rapport au point c, & l'autre par rapport au point b; le nombre des premiers retours périodiques ſera toujours double de celui des ſeconds. L'eſprit s'apperçoit de l'une & de l'autre eſpece de ces retours périodiques, & remarque par là un double ſon, dont l'un eſt l'octave de l'autre. Comme les petites quantités pm & ar déſignées par ϱ & σ peuvent avoir un rapport quelconque, on ne remarquera que la premiere eſpece de mouvemens périodiques en faiſant pm beaucoup plus grande que ar, pendant qu'on ne ſentira que la ſeconde eſpece en faiſant ar beaucoup plus grande que pm; dans le premier

cas le tems d'une vibration eſt manifeſtement de la moitié plus petit que dans le ſecond, pendant que, ſelon la maniere d'enviſager ces vibrations de Mrs. d'*Alembert* & *Euler*, le tems de chaque période eſt toujours le même, quelque rapport qu'il y ait entre ϱ & σ, ce qui ne me paroit pas conforme au principe de continuité. Car ſi le tems d'une vibration eſt ſelon eux toujours t, quelque rapport qu'il y ait entre ϱ & σ, pourquoi devient-il manifeſtement $\frac{1}{2}\,t$ en faiſant $\sigma = 0$? Pour répondre à cette difficulté, il me ſemble qu'il faut néceſſairement dire, qu'il ſe fait en même tems une double eſpece de vibrations dans la corde, & que le mêlange de ces deux eſpeces forme ce, que ces Géometres appellent vibrations ſimples; que la ſeconde eſpece diminuë à meſure qu'on diminuë la quantité σ, & qu'elle devient nulle en faiſant $\sigma = 0$; & alors il n'y aura aucune diſcontinuité.

XXVIII. J'eſpère que ce que je viens de dire dans ce Mémoire pourra ſervir à répandre plus de jour ſur la nature des nouvelles vibrations des cordes, trouvées avec tant de ſagacité par Mrs. d'*Alembert* & *Euler;* & c'étoit là tout mon but. Si la méthode dont ils ſe ſont ſervis pour réſoudre leurs problèmes eſt beaucoup plus difficile que la mienne, je n'en admire que d'avantage la ſupériorité de leur génie. Quant à la queſtion, ſi les nouvelles vibrations ſont réellement des vibrations ſimples & ſynchrones pour tous les points, ou ſi elles ne ſont pas plutôt un mêlange de pluſieurs différentes vibrations coëxiſtantes dans une mëme corde, & toutes de différente durée, je n'en ai parlé que pour mieux expliquer la nature de ces vibrations, étant bien éloigné de faire une quérelle à d'auſſi grands hommes ſur la ſignification de certains termes.

Je traiterai dans un ſecond Mémoire quelques nouveaux problèmes, dont la ſolution découle aſſez facilement de nos principes, & qui en même tems mettront cette matiere dans un nouveau jour.

SUR

TABLE.

CLASSE
de Philoſophie Expérimentale.

Eſſai *ſur l'origine & la génération des Métaux*, *par* M. ELLER. pag. 3

Examen Chymique *de la nature du Sel volatil de l'Ambre*, *par* M. POTT. 51

Examen Chymique *du bois de Cedre*, *par* M. MARGGRAF. 73

Recherches Anatomiques, 1. *Sur la nature de l'Epiderme*, & *du réſeau qu'on appelle* Malpighien ; 2. *Sur la diverſité de couleur dans la ſubſtance médullaire du cerveau des Négres.* 3. *Deſcription d'une maladie particuliere du Peritoine*, *par* M. MECKEL. 79

Nouvel Eſſai *ſur la meſure des hauteurs par le moyen du Barometre*, *par* M. SULZER. 114

De *l'Envelope des Nerfs*, *par* M. ZINN. 130

CLASSE
de Mathématique.

Réfléxions & Eclairciſſemens *ſur les nouvelles vibrations des Cordes*

Cordes expoſées dans les Mémoires de l'Académie de 1747. & 1748. *par* M. DANIEL BERNOULLI. pag. 147

Sur *le mêlange de pluſieurs eſpeces de vibrations ſimples iſochrones, qui peuvent coëxiſter dans un même Syſtème de corps ; par* M. DANIEL BERNOULLI. 173

Remarques *ſur les Mémoires précédens de* M. Bernoulli, *par* M. EULER. 196

Principes *de la Trigonométrie Sphérique tirés de la Méthode des plus grands & des plus petits, par* M. EULER. 223

Elémens *de la Trigonométrie ſphéroïdique tirés de la Méthode des plus grands & des plus petits ; par* M. EULER. 258

Examen *d'une Controverſe ſur la Loi de réfraction des rayons de différentes Couleurs par rapport à la diverſité des milieux tranſparens par lesquels ils ſont transmis ; par* M. EULER. 294

Examen *des Réfléxions de M. le Chevalier* d'Arci *ſur le Principe de la moindre action ; par* M. BERTRAND. 310

Recherches *ſur la véritable courbe que décrivent les corps jettés dans l'air, ou dans un autre fluide quelconque ; par* M. EULER. 321

CLASSE
de Philoſophie Spéculative.

Des *Ecrits & de la Doctrine d'*Anaxagore ; *par* M. HEINIUS. 355

Examen Philoſophique *de la liaiſon réelle qu'il y a entre les Sciences & les Moeurs ; par* M. FORMEY. 397

Examen *d'une queſtion concernant la Liberté ; par* M. MERIAN. 417

CLASSE

CLASSE
de Belles-Lettres.

Abrégé *de la Vie de* Bogislas X. *Duc de Poméranie, surnommé* le Grand ; *par* M. PELLOUTIER. pag. 433

Des *Devoirs de l'Académicien, par* M. DE MAUPERTUIS. 411

Eloge *de* M. BUDDEUS. - - • 522

Eloge *de* M. DE BEAUSOBRE. - - 525