# Sound & Science: Digital Histories

Newton, Isaac. Philosophiae naturalis principia mathematica. Geneva: Barrillot & Filii, 1739.

https://acoustics.mpiwg-berlin.mpg.de/node/624

Scan licensed under: CC BY-SA 3.0 DE | Max Planck Institute for the History of Science

EX LIBRIS ANTHONY MICHAELIS

*NEWTONI*

# PRINCIPIA PHILOSOPHIÆ,

*CUM COMMENTARIO PERPETUO.*

# PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, Eq. Aurato.

*Perpetuis Commentariis illuſtrata, communi ſtudio*

PP. Thomæ Le Seur & Francisci Jacquier

*Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,*

*Matheſeos Profeſſorum.*

TOMUS PRIMUS.



GENEVÆ,

Typis Barrillot & Filii Bibliop. & Typogr.

MDCCXXXIX.

Rara N 5635 p - 1

Archiv
(531 x)

MAX-PLANCK-INSTITUT
FÜR WISSENSCHAFTSGESCHICHTE
Bibliothek

04-661

# RERUM MATHEMATICARUM STUDIOSIS, *PHILOSOPHIÆ NEWTONIANÆ INTERPRETES.*

QUàm recondita ſint ſimùl & utilia *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica*, norunt ii omnes qui vel ipſum Clariſſimi Authoris nomen audierunt. Tanta eſt rerum dignitas atque ſublimitas, tanta ſermonis pluſquàm Geometrica brevitas, ut præſtantiſſimum illud opus pauciſſimis duntaxat Geometris factum videatur. Eas ob cauſas viris Matheſeos cultioriſque Phyſices ſtudioſis gratiſſimam fore putavimus, eo modo comparatam interpretationem, ut omnes tam utilis Philoſophiæ propoſitiones, corollaria omnia atquè ſcholia inoffenſo pede poſſint decurrere, qui vel ipſis Geometriæ & vulgaris Algebræ ele-

mentis probè imbuti ſunt. Quod ut præſtaremus, Mechanices & Calculi infinitorum principia, quantùm inſtituti noſtri ratio poſtulat, *Newtoni* veſtigiis inſiſtentes demonſtravimus; perbrevem, ſed theorematum fæcunditate plenum noſtris Commentariis inſeruimus tractatum Sectionum Conicarum; Quæ vel minimùm, nimiâ obſcuritate Lectori negotium parere poſſent, ea omnia exponere & in bono Lumine collocare conati ſumus; quæ in ſcholiis, corollariis, propoſitionumque ſerie, prætermiſſâ demonſtratione, pronuntiat *Newtonus*, præmiſſis vel interjectis Lemmatis ſcrupulosè demonſtrata invenient, qui in ſola doctiſſimi Authoris verba jurare nolunt; eximia quæ in *Newtoni* propoſitionibus latent inventa, deteximus atque evolvimus; tandem cùm præſtantiſſima illa ſummi viri principia non ſolùm intelligere, ſed & illam quam ſibi aperuit ad inventionem viam explorare plurimùm delectationis habeat & utilitatis, diſperſa huc & illuc generalia quædam problemata Lector repe-

reperiet. Hæc ſunt quæ facere voluimus, quo exitu, penès benevolum Lectorem eſto judicium. Ex brevi illo commentariorum noſtrorum proſpectu ſatis patet quos nobis lectores poſtulemus; nec præſtantiſſimis Mathematicis nec imperito Philoſophorum vulgo nos ſcribere profitemur; ad hujuſce operis lectionem eos duntaxat admittimus qui ea quæ jam diximus elementa in promptu habent, & tali inſuper pollent mentis acie, ut longioris demonſtrationis vim atque ſeriem ſtudiosè perſequi & animo comprehendere poſſint.

De noſtris Commentariis hæc ſatis dicta ſint. Verùm naturalis æquitas & mathematicus candor poſtulant, ut nos plurimùm debere fateamur Doctiſſimis Viris, DAVIDI GREGORIO, VARIGNONIO, JACOBO HERMANNO, JOANNI KEILLIO, aliiſque multis, qui varias *Newtonianæ Philoſophiæ* partes luculentis ſcriptis illuſtrarunt. Eâdem æquitatis atque ingenuitatis lege à nobis religiosè factum eſt, ut eos omnes quorum ſpoliis aliquandò diteſcimus,

mus, in Commentariorum noſtrorum decurſu honoris causâ nominemus. Publicum quoque grati animi teſtimonium deeſſe nolumus Clariſſ. Dno. J. L. CALANDRINO in Academiâ Genevenſi Profeſſore in rebus Mathematicis verſatiſſimo, qui hanc noſtram *Newtoni* principiorum editionem adornari curavit ad normam elegantiſſimæ illius editionis, quæ additionibus multis locupletata *Londini* prodiit anno 1726. Deindè id ſibi laboris aſſumpſit vir doctiſſimus non ſolum ut ſchemata incidi, ſuis locis diſponi, typographica menda corrigi ſedulò invigilaret, ſed etiam ea quæ jam laudavimus Sectionum Conicarum elementa compoſuit, & quæ à nobis non ſatis perſpicuè videbantur expoſita propriis notis aliquandò illuſtravit.

Hoc noſtro labore fruantur rerum mathematicarum Cultores.

ROMÆ *in Regio Conventu SS^m. Trinitatis*,
*An.* 1739.

ILLUSTRISSIMÆ

# SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

# CAROLO II

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

# GEORGII

FLORENTI

TRCTATUM HUNC D.D.D.

*IS. NEWTON.*

# AUCTORIS PRÆFATIO AD LECTOREM.

CUM *veteres* mechanicam (*uti auctor eſt* Pappus) *in rerum naturalium inveſtigatione maximi fecerint; & recentiores, miſſis formis ſubſtantialibus & qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggreſſi ſint: Viſum eſt in hoc tractatu* matheſim *excolere, quâtenus ea ad* philoſophiam *ſpectat.* Mechanicam *verò duplicem veteres conſtituerunt*: rationalem, *quæ per demonſtrationes accuratè procedit, &* practicam. *Ad practicam ſpectant artes omnes manuales, à quibus utique* mechanica *nomen mutuata eſt. Cum autem artifices parùm accuratè operari ſoleant, fit ut* mechanica *omnis à* geometriâ *ita diſtinguatur, ut quicquid accuratum ſit ad* geometriam *referatur, quicquid minùs accuratum ad* mechanicam. *Attamen errores non ſunt artis, ſed artificum. Qui minùs accuratè operatur, imperfectior eſt mechanicus, & ſi quis accuratiſſimè operari poſſet, hic foret mechanicus omnium perfectiſſimus. Nam & linearum rectarum & circulorum deſcriptiones, in quibus* geometria *fundatur, ad* mechanicam *pertinent. Has lineas deſcribere* geometria *non docet, ſed poſtulat. Poſtulat enim ut tyro eaſdem accuratè deſcribere prius didicerit, quam limen attingat* geometriæ; *dein quomodo per has operationes problemata ſolvantur, docet; rectas & circulos deſcribere problemata ſunt, ſed non geometrica. Ex* mechanica *poſtulatur horum ſolutio, in* geometria *docetur ſolutorum uſus. Ac gloriatur* geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præſtet. Fundatur igitur* geometria *in praxi mechanica, & nihil aliud eſt quam* mechanicæ univerſalis *pars illa, quæ artem menſurandi ac-*

*curatè proponit ac demonſtrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè verſentur, fit ut* geometria *ad magnitudinem*, mechanica *ad motum vulgo referatur. Quo ſenſu* mechanica rationalis *erit ſcientia motuum, qui ex viribus quibuſcunque reſultant, & virium quæ ad motus quoſcunque requiruntur, accuratè propoſita ac demonſtrata. Pars hæc* mechanicæ *à veteribus in* potentiis quinque *ad artes manuales ſpectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cum potentia manualis non ſit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis conſiderarunt. Nos autem non artibus ſed philoſophiæ conſulentes, deque potentiis non manualibus ſed naturalibus ſcribentes, ea maximè tractamus, quæ ad gravitatem, levitatem, vim elaſticam, reſiſtentiam fluidorum & ejuſmodi vires ſeu attractivas ſeu impulſivas ſpectant: Et eâ propter, hæc noſtra tanquam philoſophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philoſophiæ difficultas in eo verſari videtur, ut à phænomenis motuum inveſtigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonſtremus phænomena reliqua. Et huc ſpectant propoſitiones generales, quas libro primo & ſecundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei propoſuimus per explicationem ſyſtematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cœleſtibus, per propoſitiones in libris prioribus mathematicè demonſtratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad ſolem & planetas ſingulos tendunt. Deinde ex his viribus per propoſitiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ & maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil ſuſpicer ea omnia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particulæ per cauſas nondum cognitas vel in ſe mutuò impelluntur & ſecundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, philoſophi hactenus naturam fruſtrà tentarunt. Spero autem quod vel huic philoſophandi modo, vel veriori alicui, principia hîc poſita lucem aliquam præbebunt.*

*In his edendis, vir acutiſſimus & in omni literarum genere eruditiſſimus* Edmundus Halleius *operam navavit, nec ſolum typothetarum ſphalmata correxit & ſchemata incidi curavit ſed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonſtratam a*

*me*

*me figuram orbium cœleſtium impetraverat, rogare non deſtitit, ut eandem cum* Societate Regali *communicarem, quæ deinde hortatibus & benignis ſuis auſpiciis effecit, ut de eâdem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At poſtquam motuum lunarium inæqualitates aggreſſus eſſem, deinde etiam alia tentare cœpiſſem, quæ ad leges & menſuras gravitatis & aliarum virium, & figuras à corporibus ſecundum datas quaſcunque leges attractis deſcribendas, ad motus corporum plurium inter ſe, ad motus corporum in mediis reſiſtentibus, ad vires, denſitates & motus mediorum, ad orbes cometarum & ſimilia ſpectant, editionem in aliud tempus differendam eſſe putavi, ut cætera rimarer & unà in publicum darem. Quæ ad motus lunares ſpectant (imperfecta cum ſint) in corollariis propoſitionis* **LXVI.** *ſimul complexus ſum, ne ſingula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & ſigillatim demonſtrare tenerer, & ſeriem reliquarum propoſitionum interrumpere. Nonnulla ſerò inventa locis minùs idoneis inſerere malui, quam numerum propoſitionum & citationes mutare. Ut omnia candidè legantur & defectus in materiâ tam difficili non tam reprehendatur, quam novis lectorum conatibus inveſtigentur, & benignè ſuppleantur, enixè rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, e Collegio
*S. Trinitatis*, Maii 8. 1686.

*IS. NEWTON.*

# AUCTORIS PRÆFATIO
# IN
# EDITIONEM SECUNDAM.

*IN hâc ſecundâ Principiorum editione multa ſparſim emandantur, & nonnulla adjiciuntur. In libri primi ſectione* II. *inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi poſſint, facilior redditur & amplior. In libri ſecundi ſectione* VII. *theoria reſiſtentiæ fluidorum accuratiùs inveſtigatur, & novis experimentis confirmatur. In libro tertio theoria lunæ & præceſſio æquinoctiorum ex principiis ſuis pleniùs deducuntur, & theoria cometarum pluribus & accuratiùs computatis orbium exemplis confirmatur.*

Dabam *Londini*,
Mar. 28. 1713.

*IS. NEWTON.*

EDI-

# EDITORIS PRÆFATIO
## IN
# EDITIONEM SECUNDAM.

NEWTONIANÆ philoſophiæ novam tibi, lector benevole, diuque deſideratam editionem, plurimùm nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potiſſimum contineantur in hoc opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipſa te ferè docebit auctoris præfatio. Reliquum eſt, ut adjiciantur nonnulla de methodo hujus philoſophiæ.

Qui phyſicam tractandam ſuſceperunt, ad tres ferè claſſes revocari poſſunt. Extiterunt enim, qui ſingulis rerum ſpeciebus qualitates ſpecificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum ſingulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc poſita eſt ſumma doctrinæ ſcholaſticæ, ab *Ariſtotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique ſingulos effectus ex corporum ſingularibus naturis oriri; at unde ſint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti ſint in rerum nominibus, non in ipſis rebus; ſermonem quendam philoſophicum cenſendi ſunt adinveniſſe, philoſophiam tradidiſſe non ſunt cenſendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem conſequi ſperarunt rejecta vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam univerſam homogeneam eſſe, omnem verò formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium ſimpliciſſimis quibuſdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidem progreſſio inſtituitur à ſimplicioribus ad magis compoſita, ſi particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipſa tribuit natura. Verum ubi licentiam ſibi aſſumunt, ponendi quaſcunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertoſque ſitus & motus; quin & fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrimè permeent, omnipotente prædi-

ta

ta ſubtilitate, motibuſque occultis agitata; jam ad ſomnia delabuntur, neglectâ rerum conſtitutione verâ: quæ ſanè fruſtra petenda eſt ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certiſſimas obſervationes inveſtigari poſſit. Qui ſpeculationum ſuarum fundamentum deſumunt ab hypotheſibus; etiamſi deinde ſecundum leges mechanicas accuratiſſimè procedant; fabulam quidem elegantem fortè & venuſtam, fabulam tamen concinnare dicendi ſunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philoſophiam ſcilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex ſimpliciſſimis quibus poſſunt principiis rerum omnium cauſas derivandas eſſe volunt: nihil autem principii loco aſſumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheſes non comminiſcuntur, neque in phyſicam recipiunt, niſi ut quæſtiones de quarum veritate diſputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analyticâ & ſyntheticâ. Naturæ vires legeſque virium ſimpliciores ex ſelectis quibuſdam phænomenis per analyſin deducunt, ex quibus deinde per ſyntheſin reliquorum conſtitutionem tradunt. Hæc illa eſt philoſophandi ratio longè optima, quam præ cæteris meritò amplectendum cenſuit celeberrimus auctor noſter. Hanc ſolam utique dignam judicavit, in quâ excolendâ atque adornandâ operam ſuam collocaret. Hujus igitur illuſtriſſimum dedit exemplum, mundani nempe ſyſtematis explicationem è theoriâ gravitatis feliciſſimè deductam. Gravitatis virtutem univerſis corporibus ineſſe, ſuſpicati ſunt vel finxerunt alii: primus ille & ſolus ex apparentiis demonſtrare potuit, & ſpeculationibus egregiis firmiſſimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibuſdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè aſſentiri potuiſſe, & certis incerta identidem prætuliſſe. Horum famam vellicare non eſt animus: tibi potius, benevole lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipſe judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti ſumatur exordium à ſimpliciſſimis & proximis; diſpiciamus pauliſper qualis ſit in terreſtribus natura gravitatis, ut deinde tutiùs progrediamur ubi ad corpora cæleſtia, longiſſimè à ſedibus noſtris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philoſophos, corpora univerſa circumterreſtria gravitare in terram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia

rientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non eſt vera levitas, ſed apparens ſolummodo; & oritur à præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porrò, ut corpora univerſa gravitent in terram, ita terra viciſſim in corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem, ſic oſtenditur. Diſtinguatur terræ totius moles in binas quaſcunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam ſi pondera partium non eſſent in ſe mutuò æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent rectâ moveri ad infinitum, verſus plagam in quam tendit pondus majus: omninò contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio eſſe conſtituta: hoc eſt, gravitatis actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter à centro terræ diſtantium, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, è quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent eſſe proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam verò corpora univerſa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia ſpatia cadendo deſcribunt, ſublata ſcilicet aëris reſiſtentia: accuratiùs autem comprobatur per experimenta pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in terram & terra viciſſim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, ſeu vis qua corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejuſdem in terram. Hoc autem pondus erit ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque terram attrahit, ſive corporis vis abſoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: ſiquidem aucta vel diminuta mole materiæ, oſtenſum eſt, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus conflari cenſenda erit; atque adeò corpora omnia terreſtria ſe mutuò trahere oportet viribus abſolutis, quæ ſint in ratione materiæ tra-

* * *

hen-

hentis. Hæc eſt natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis ſit in cœlis.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus à viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare; naturæ lex eſt ab omnibus recepta philoſophis. Inde verò ſequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeò de lineis rectis orbitas ſuas tangentibus jugiter abeunt, vi aliqua perpetuò agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus neceſſariò aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indeſinenter à tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum eſt, quod mathematicis rationibus colligitur & certiſſimè demonſtratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano deſcriptâ, quæque radio ducto ad punctum vel quieſcens vel utcumque motum deſcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri à viribus quæ ad idem punctum tendent. Cum igitur in confeſſo ſit apud aſtronomos, planetas primarios circùm ſolem, ſecundarios verò circum ſuos primarios, areas deſcribere temporibus proportionales; conſequens eſt ut vis illa, quâ perpetuò detorquentur à tangentibus rectilineis & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, verſus corpora dirigatur quæ ſita ſunt in orbitarum centris Hæc itaque vis non ineptè vocari poteſt, reſpectu quidem corporis revolventis, centripeta; reſpectu autem corporis centralis, attractiva; à quacunque demùm causâ oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda ſunt, & mathematicè demonſtrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadratura temporum periodicorum ſint ut cubi diſtantiarum à centro communi; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Vel, ſi corpora revolvantur in orbitis quæ ſunt circulis finitimæ, & quieſcant orbitarum apſides; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Obtinere caſum alterutrum in planetis univerſis conſentiunt aſtronomi. Itaque vires centripetæ planetarum omnium ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat planetarum, & lunæ præſertim, apſides non penitùs quieſcere; ſed motu quodam lento ferri in conſequentia: reſponderi

poteſt

poteſt, etiamſi concedamus hunc motum tardiſſimum exinde profectum eſſe quod vis centripetæ proportio aberret aliquantùm à duplicata; aberrationem illam per computum mathematicum inveniri poſſe & planè inſenſibilem eſſe. Ipſa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam ſuperabit; ad hanc vero ſexaginta ferè vicibus propiùs accedet quàm ad triplicatam. Sed varior erit reſponſio, ſi dicamus hanc apſidum progreſſionem, non ex aberratione à duplicatâ proportione, ſed ex aliâ prorſus diversâ causâ oriri, quemadmodum egregiè commonſtratur in hac philoſophia. Reſtat ergo ut vires centripetæ, quibus planetæ primarii tendunt versùs ſolem & ſecundarii versùs primarios ſuos, ſint accuratè ut quadrata diſtantiarum reciprocè.

Ex iis quæ hactenus dicta ſunt, conſtat planetas in orbitis ſuis retineri per vim aliquam in ipſos perpetuò agentem: conſtat vim illam dirigi ſemper versùs orbitarum centra: conſtat hujus efficaciam augeri in acceſſu ad centrum, diminui in receſſu ob eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum diſtantiæ, diminui in eadem proportione quâ diſtantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione inſtitutâ inter planetarum vires centripetas & vim gravitatis, annon ejuſdem fortè ſint generis. Ejuſdem verò generis erunt, ſi deprehendantur hinc & inde leges eædem, eædemque affectiones. Primò itaque lunæ, quæ nobis proxima eſt, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ à corporibus è quiete demiſſis dato tempore ſub ipſo motus initio deſcribuntur, ubi à viribus quibuſcunque urgentur, proportionalia ſunt ipſis viribus: hoc utique conſequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbitâ ſuâ revolventis, ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, ut ſpatium quod tempore quàm minimo deſcriberet luna deſcendendo per vim centripetam versùs terram, ſi circulari omni motu privari fingeretur ad ſpatium quod eodem tempore quàm minimo deſcribit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis ſuæ cadendo. Horum ſpatiorum prius æquale eſt arcûs à luna per idem tempus deſcripti ſinui verſo, quippe qui lunæ tranſlationem de tangente, factam à vi centripeta, metitur; atque adeò computari poteſt ex datis tùm lunæ

tempore periodico, tùm diſtantia ejus a centro terræ. Spatium poſterius invenitur per experimenta pendulorum, quamadmodùm docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, ſpatium prius ad ſpatium poſterius, ſeu vis centripeta lunæ in orbita ſua revolventis ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, erit ut quadratum ſemidiametri terræ ad orbitæ ſemidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ ſuperiùs oſtenduntur, vis centripeta lunæ in orbita ſua revolventis ad vim lunæ centripetam propè terræ ſuperficiem. Vis itaque centripeta propè terræ ſuperficiem æqualis eſt vi gravitatis. Non ergo diverſæ ſunt vires, ſed una atque eadem, ſi enim diverſæ eſſent, corpora viribus conjunctis duplò celeriùs in terram caderent quàm ex vi ſolâ gravitatis. Conſtat igitur vim illam centripetam, quâ luna perpetuò de tangente vel trahitur vel impellitur & in orbita retinetur, ipſam eſſe vim gravitatis terreſtris ad lunam uſque pertingentem. Et rationi quidem conſentaneum eſt ut ad ingentes diſtantias illa ſeſe virtus extendat, cum nullam ejus ſenſibilem imminutionem, vel in altiſſimis montium cacuminibus, obſervare licet. Gravitat itaque luna in terram: quin & actione mutua, terra viciſſim in lunam æqualiter gravitat: id quod abundè quidem confirmatur in hac philoſophiâ, ubi agitur de maris æſtu & æquinoctiorum præceſſione, ab actione tum lunæ tum ſolis in terram oriundus. Hinc & illud tandem edocemur, quâ nimirùm lege vis gravitatis decreſcat in majoribus à tellure diſtantiis. Nam cùm gravitas non diverſa ſit à vi centripeta lunari, hæc verò ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ; diminuetur & gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa ſolem & ſecundariorum circa jovem & ſaturnum ſunt phænomena generis ejuſdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porrò demonſtratum eſt vires centripetas primariorum dirigi versùs centrum ſolis, ſecundariorum versùs centra jovis & ſaturni, quemadmodum lunæ vis centripeta versùs terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centris, quemadmodum vis lunæ eſt ut quadratum diſtantiæ à terra: concludendum erit eandem eſſe naturam univerſis. Itaque ut luna gravitat in terram, & terra viciſſim in lunam; ſic etiam gravitabunt omnes ſecundarii in primarios ſuos, & primarii viciſſim

in

in ſecundarios; ſic & omnes primarii in ſolem, & ſol viciſſim in primarios.

Igitur ſol in planetas univerſos gravitat & univerſi in ſolem. Nam ſecundarii dum primarios ſuos comitantur, revolvuntur intereà circùm ſolem unà cum primariis. Eodem itaque argumento, utriuſque generis planetæ gravitant in ſolem, & ſol in ipſos. Secundarios verò planetas in ſolem gravitare abundè inſuper conſtat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum acuratiſſimam theoriam, admiranda ſagacitate patefactam, in tertio hujus operis libro expoſitam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoverſum propagari ad ingentes uſque diſtantias, & ſeſe diffundere ad ſingulas circumjecti ſpatii partes, apertiſſimè colligi poteſt ex motu cometarum; qui ab immenſis intervallis profecti feruntur in viciniam ſolis, & nonnunquam adeò ad ipſum proximè accedunt ut globum ejus, in periheliis ſuis verſantes, tantùm non contingere videantur. Horum theoriam ab aſtronomis antehac fruſtrà quæſitam, noſtro tandem ſæculo faciliter inventam & per obſervationes certiſſimè demonſtratam, præſtantiſſimo noſtro auctori debemus. Patet igitur cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus moveri, & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere. Ex hiſce verò phænomenis manifeſtum eſt & mathematicè comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis ſuis, reſpicere ſolem & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro. Gravitant itaque cometæ in ſolem: atque adeò ſolis vis attractiva non tantùm ad corpora planetarum in datis diſtantiis & in eodem ferè plano collocata, ſed etiam ad cometas in diverſiſſimis cœlorum regionibus & in diverſiſſimis diſtantiis poſitos pertingit. Hæc igitur eſt natura corporum gravitantium, ut vires ſuas edant ad omnes diſtantias in omnia corpora gravitantia. Inde verò ſequitur, planetas & cometas univerſos ſe mutuò trahere, & in ſe mutuò graves eſſe: quod etiam confirmatur ex perturbatione jovis & ſaturni, aſtronomis non incognita, & ab actionibus horum planetarum in ſe invicem oriunda; quin & ex motu illo lentiſſimo apſidum, qui ſuprà memoratus eſt, quique à causâ conſimili proficiſcitur.

Eo demùm pervenimus ut dicendum ſit, & terram & ſolem & corpora omnia cœleſtia, quæ ſolem comitantur, ſe mutuò attrahere. Sin-

gulorum ergo particulæ, quæque minimæ, vires ſuas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quamadmodum ſuprà de terreſtribus oſtenſum eſt. In diverſis autem diſtantiis, erunt & harum vires in duplicata ratione diſtantiarum reciprocè: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematicè demonſtratur.

Concluſiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod à nullis non recipitur philoſophis; effectuum ſcilicet ejuſdem generis, quorum nempe quæ cognoſcuntur proprietates eædem ſunt, eaſdem eſſe cauſas & eaſdem eſſe proprietates quæ nondùm cognoſcuntur. Quis enim dubitat, ſi gravitas ſit cauſa deſcenſûs lapidis in *Europa*, quin eadem ſit cauſa deſcenſus in *America?* Si gravitas mutua fuerit inter lapidem & terram in *Europa*; quis negabit mutuam eſſe in *America?* Si vis attractiva lapidis & terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit ſimilem eſſe compoſitionem in *America?* Si attractio terræ ad omnia corporum genera & ad omnes diſtantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America?* In hac regula fundatur omnis philoſophia: quippe quâ ſublatâ nihil affirmare poſſimus de univerſis. Conſtitutio rerum ſingularum innoteſcit per obſervationes & experimenta: inde verò non niſi per hanc regulam de rerum univerſarum naturâ judicamus.

Jam cùm gravia ſint omnia corpora, quæ apud terram vel in cœlis reperiuntur, de quibus experimenta vel obſervationes inſtituere licet; omninò dicendum erit, gravitatem corporibus univerſis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non ſint extenſa, mobilia & impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non ſint gravia. Corporum extenſio, mobilitas, & impenetrabilitas non niſi per experimenta, innoteſcunt; eodem planè modo gravitas innoteſcit. Corpora omnia de quibus obſervationes habemus, extenſa ſunt & mobilia & impenetrabilia: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, extenſa eſſe & mobilia & impenetrabilia. Ita corpora omnia ſunt gravia, de quibus obſervationes habemus: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, gravia eſſe. Si quis dicat corpora ſtellarum inerrantium non eſſe gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum eſt obſervata; eodem argumento dicere licebit

cebit neque extensa esse, nec mobilia, nec impenetrabilia, cum hæ fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est verbis? inter primarias qualitates corporum universorum vel gravitas habebit locum; vel extensio, mobilitas, & impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel rectè explicabitur per corporum gravitatem, vel non rectè explicabitur per corporum extensionem, mobilitatem, & impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare conclusionem, & de occultis qualitatibus nescio quid mussitare. Gravitatem scilicet occultum esse quid, perpetuò argutari solent; occultas verò causas procul esse ablegandas à philosophiâ. His autem facilè respondetur; occultas esse causas, non illas quidem quarum existentia per observationes clarissimè demonstratur, sed has solùm quarum occulta est & ficta existentia nondùm verò comprobata. Gravitas ergo non erit occulta causa motuum cœlestium; siquidem ex phænomenis ostensum est, hanc virtutem reverà existere. Hi potius ad occultas confugiunt causas, qui nescio quos vortices, materiæ cujusdam prorsùs fictitiæ & sensibus omninò ignotæ, motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem gravitas occulta causa dicetur, eoque nomine rejicietur è philosophiâ, quod causa ipsius gravitatis occulta est & nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuant absurdi, unde totius tandem philosophiæ fundamenta convellantur. Etenim causæ continuo nexu procedere solent à compositis ad simpliciora: ubi ad causam simplicissimam perveneris, jam non licebit ulteriùs progredi. Causæ igitur simplicissimæ nulla dari potest mechanica explicatio: si daretur enim, causa nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas appellabis occultas, & exulare jubebis? Simul verò exulabunt & ab his proximè pendentes & quæ ab illis porrò pendent, usque dum à causis omnibus vacua fuerit & probè purgata philosophia.

Sunt qui gravitatem præter naturam esse dicunt, & miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cùm in physicâ præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni diluendæ, quæ & ipsa philosophiam subruit universam, vix operæ pretium est immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam esse negabunt: quod tamen dici non potest: vel eo

nomine

nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque ideò ex causis mechanicis originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis sit deinde futura philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota physica cœlestis vel ideò minùs placet, quòd cum *Cartesii* dogmatibus pugnare & vix conciliari posse videatur. His sua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam sibi concedi postulant. NEWTONIANAM itaque philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & causas sequi per phænomena comprobatas, potiùs quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis verè existentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit summus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut à pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex qua verè atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in philosophiâ verâ. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenso pondere vel ab intus concluso elatere oriri potest. Quod si oblatum horologium reverà sit instructum pondere; ridebitur qui finget elaterem, & ex hypothesi sic præproperè confictâ motum indicis explicare suscipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitiùs perscrutari, ut ita motûs propositi principium verum exploratum habere posset. Idem vel non absimile feretur judicium de philosophis illis, qui materiâ quâdam subtilissimâ cœlos esse repletos, hanc autem in vortices indesinenter agi voluerunt. Nam à phænomenis vel accuratissimè satisfacere possent ex hypothesibus suis; veram tamen philosophiam tradidisse, & veras causas motuum cælestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has reverà existere, vel saltem alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum attractionem habere verum locum in rerum naturâ; quinetiam ostensum fuerit, quâ ratione motus omnes cælestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit & meritò deridenda objectio,

objectio, ſi quis dixerit eoſdem motus per vortices explicari debere, etiamſi id fieri poſſe vel maximè conceſſerimus. Non autem concedimus: nequeunt enim illo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore noſtro abundè quidem & clariſſimis rationibus evincitur; ut ſomnis plùs æquò indulgeant oporteat, qui ineptiſſimo figmento reſarciendo, noviſque porrò commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum & cometarum circa ſolem deferantur à vorticibus; oportet corpora delata & vorticum partes proximè ambientes eadem velocitate eademque cursûs determinatione moveri, & eandem habere denſitatem vel eandem vim inertiæ pro mole materiæ. Conſtat verò planetas & cometas, dùm verſantur in iiſdem regionibus cœlorum, velocitatibus variis variâque cursûs determinatione moveri. Neceſſariò itaque ſequitur, ut fluidi cœleſtis partes illæ, quæ ſunt ad eaſdem diſtantias à ſole, revolvantur eodem tempore in plagas diverſas cum diverſis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione & velocitate, ut tranſire poſſint planetæ; aliâ, ut tranſire poſſint cometæ. Quod cùm explicari nequeat; vel fatendum erit, univerſa corpora cœleſtia non deferri à materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos eſſe non ab uno eodemque vortice, ſed à pluribus qui ab invicem diverſi ſint, idemque ſpatium ſoli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem ſpatio contineri, & ſeſe mutuò penetrare motibuſque diverſis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent eſſe conformes delatorum corporum motibus, qui ſunt ſummè regulares, & peraguntur in ſectionibus conicis nunc valdè eccentricis, nunc ad circulorum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri poſſit, ut iidem integri conſerventur nec ab actionibus materiæ occurſantis per tot ſæcula quicquam perturbentur. Sanè ſi motus hi fictitii ſunt magis compoſiti & difficiliùs explicantur, quam veri illi motus planetarum & cometarum; fruſtrà mihi videntur in philoſophiam recipi: omnis enim cauſa debet eſſe effectu ſuo ſimplicior. Conceſſa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes & cometas circumcingi atmoſphæris, ad inſtar telluris noſtræ; quæ quidem hypotheſis rationi magis conſentanea

* * * *

vide-

videbitur quam hypotheſis vorticum. Affirmaverit deinde has atmoſphæras, ex naturâ ſuâ, circa ſolem moveri & ſectiones conicas deſcribere; qui ſanè motus multò faciliùs concipi poteſt, quàm condeſcribere; qui ſanè motus vorticum ſe invicem permeantium. Denique planetas ſimilis motus vorticum ſe invicem permeantium. Denique planetas ipſos & cometas circa ſolem deferri ab atmoſphæris ſuis credendum eſſe ſtatuat, & ob repertas motuum cœleſtium cauſas triumphum agat. Quiſquis autem hanc fabulam rejiciendam eſſe putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non eſt ovo ſimilius, quàm hypotheſis atmoſphærarum hypotheſi vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti & in parabola moti deflectionem à curſu rectilineo oriri à gravitate lapidis in terram, ab occulta ſcilicet qualitate. Fieri tamen poteſt ut alius aliquis, naſi acutioris philoſophus, cauſam aliam comminiſcatur. Finget igitur ille materiam quandam ſubtilem, quæ nec viſu, nec tactu, neque ullo ſenſu percipitur, verſari in regionibus quæ proximè contingunt telluris ſuperficiem. Hanc autem materiam, in diverſas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas parabolicas deſcribere contendet. Deinde vero lapidis deflectionem pulchrè ſic expediet, & vulgi plauſum merebitur. Lapis, inquiet, in fluido illo ſubtili natat & curſui ejus obſequendo, non poteſt non eandem unà ſemitam deſcribere. Fluidum verò movetur in lineis parabolicis; ergo lapidem in parabola moveri neceſſe eſt. Quis nunc non mirabitur acutiſſimum hujuſce philoſophi ingenium, ex cauſis mechanicis, materiâ ſcilicet & motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclarè deducentis? Quis verò non ſubſannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, è philoſophia feliciter excluſas, denuò revocare ſuſtinuerit? Sed pudet nugis diutiùs immorari.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens eſt numerus; motus eorum ſunt ſummè regulares, & eaſdem leges cum planetarum motibus obſervant. Moventur in orbibus conicis, hi orbes ſunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cœlorum partes, & planetarum regiones liberrimè pertranſeunt, & ſæpè contrà ſignorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certiſſimè confirmantur ex obſervationibus aſtronomicis: & per vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus planetarum conſiſtere poſſunt. Co-

metarum

metarum motibus omninò locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus è cœlis amoveatur.

Si enim planetæ circùm solem à vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque planetam, ejusdem densitatis erunt ac planeta; uti suprà dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus densitatem: quæ verò jacet intrà orbem magnum atque orbem saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minùs densæ centrum occupare, magis densæ longiùs à centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica sint in ratione sesquiplicata distantiarum à sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde verò sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant à centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minùs densæ fuerint, necesse est ut cedent vi majori, quâ partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendent minus densæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non absimili omninò dicendum est, densiores vorticis partes majore vi centrifugâ petere supremum locum. Tota igitur illa & multò maxima pars vorticis, quæ jacet extrà telluris orbem, densitatem habebit atque adeò vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quàm densitas & vis inertiæ telluris: inde verò cometis trajectis orietur ingens resistentia, & valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitùs sistere atque absorbere posse meritò videatur. Constat autem ex motu cometarum prorsùs regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimùm sentiri potest; atque adeò neutiquam in materiam ullam incursare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertiæ. Nam resistentia mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel à defectu lubricitatis. Quæ oritur à defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sanè vix observari potest in fluidis vulgò notis, nisi valdè

tenacia fuerint ad inſtar olei & mellis. Reſiſtentia quæ ſentitur in aëre, aqua, hydrargyro, & hujuſmodi fluidis non tenacibus ferè tota eſt prioris generis; & minui non poteſt per ulteriorem quemcunque gradum ſubtilitatis, manente fluidi denſitate vel vi inertiæ, cui ſemper proportionalis eſt hæc reſiſtentia; quamadmodum clariſſimè demonſtratum eſt ab auctore noſtro in peregregia reſiſtentiarum theoriâ, quæ paulò nunc accuratiùs exponitur, hac ſecundâ vice, & per experimenta corporum cadentium pleniùs confirmatur.

Corpora progrediendo motum ſuum fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Eſt itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, eſt ut fluidi denſitas; ergo retardatio ſeu reſiſtentia erit ut eadem fluidi denſitas; neque ullo pacto tolli poteſt, niſi à fluido ad partes corporis poſticas recurrente reſtituatur motus amiſſus. Hoc autem addici non poterit, niſi impreſſio fluidi in corpus ad partes poſticas æqualis fuerit impreſſioni corporis in fluidum ad partes anticas, hoc eſt, niſi velocitas relativa quâ fluidum irruit in corpus à tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in fluidum, id eſt, niſi velocitas abſoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas abſoluta fluidi propulſi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli poteſt fluidorum reſiſtentia, quæ oritur ab eorundem denſitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; fluidi cœleſtis nullam eſſe vim inertiæ, cùm nulla ſit vis reſiſtendi: nullam eſſe vim quâ motus communicetur, cùm nulla ſit vis inertiæ: nullam eſſe vim quâ mutatio quælibet vel corporibus ſingulis vel pluribus inducatur, cùm nulla ſit vis quâ motus communicetur; nullam eſſe omninò efficaciam, cum nulla ſit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypotheſin, quæ fundamento planè deſtituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimùm quidem inſervit, ineptiſſimam vocare liceat & philoſopho prorsùs indignam. Qui cœlos materiâ fluidâ repletos eſſe volunt, hanc verò non inertem eſſe ſtatuunt; hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum hujuſmodi materia fluida ratione nullâ ſecerni poſſit ab inani ſpatio; diſputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod ſi aliqui ſint adeò uſque dediti materiæ, ut ſpatium à corporibus vacuum nullo pacto admittendum

dum credere velint; videamus quo tandem oporteat illo pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni conſtitutionem ex voluntate dei profectam eſſe, propter eum finem, ut operationibus naturæ ſubſidium præſens haberi poſſet ab æthere ſubtiliſſimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non poteſt, ſiquidem jam oſtenſum eſt ex cometarum phænomenis, nullam eſſe hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate dei profectam eſſe, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, ſiquidem diverſa mundi conſtitutio eodem argumento pariter ſtabiliri poſſet: vel denique non dicent ex voluntate dei profectam eſſe, ſed ex neceſſitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces ſordidas gregis impuriſſimi. Hi ſunt qui ſomniant fato univerſa regi, non providentia; materiam ex neceſſitate ſuâ ſemper & ubique extitiſſe, infinitam eſſe & æternam. Quibus poſitis; erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum neceſſitate omninò pugnat. Erit etiam immota: nam ſi neceſſariò moveatur in plagam aliquam determinatam; cum determinata aliqua velocitate; pari neceſſitate movebitur in plagam diverſam cum diverſa velocitate, in plagas autem diverſas, cum diverſis velocitatibus, moveri non poteſt; oportet igitur immotam eſſe. Neutiquam profectò potuit oriri mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate diſtinctus, niſi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis & gubernantis dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa ſanè ſapientiſſimi conſilii, nulla neceſſitatis apparent veſtigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, ſed obſervando atque experiendo addiſcere debemus. Qui verè phyſicæ principia legeſque rerum, ſola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire ſe poſſe confidit; hunc oportet vel ſtatuere mundum ex neceſſitate fuiſſe, legeſque propoſitas ex eadem neceſſitate ſequi; vel ſi per voluntatem dei conſtitutus ſit ordo naturæ, ſe tamen, homuncionem miſellum, quid optimum factu ſit perſpectum habere. Sana omnis & vera Philoſophia fundatur in phænomenis rerum: quæ ſi nos vel invitos & reluctantes ad hujuſmodi principia deducunt, in quibus clariſſimè cernuntur conſilium optimum & dominium ſummum ſapientiſſimi & potentiſſimi entis; non erunt hæc ideò non admittenda principia, quod quibuſdam forſan hominibus minus grata ſunt futura.

tura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ diſplicent: verum nomina malitiosè indita non ſunt ipſis rebus vitio vertenda; niſi illud fateri tandem velint, utique debere philoſophiam in atheiſmo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda philoſophia, ſiquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos judices præſtantiſſima philoſophandi ratio, quæ fundatur in experimentis & obſervationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illuſtriſſimi noſtri auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, & ad ea porrò pertingentis ad quæ nec ſpes erat humanam mentem aſſurgere potuiſſe, meritò admirantur & ſuſpiciunt quicunque paulò profundius in hiſce rebus verſati ſunt. Clauſtris ergò reſeratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum myſteria. Syſtematis mundani compagem elegantiſſimam ita tandem patefecit & penitiùs perſpectandam dedit; ut nec ipſe, ſi nunc reviviſceret, rex *Alphonſus* vel ſimplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea deſideraret. Itaque naturæ majeſtatem propiùs jam licet intueri, & dulciſſima contemplatione frui, conditorem verò ac dominum univerſorum impenſiùs colere & venerari, qui fructus eſt philoſophiæ multò uberrimus. Cæcum eſſe oportet, qui ex optimis & ſapientiſſimis rerum ſtructuris non ſtatim videat fabricatoris omnipotentis infinitam ſapientiam & bonitatem: inſanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium NEWTONI opus adverſus atheorum impetus munitiſſimum præſidium: neque enim alicundè feliciùs, quàm ex hac pharetra, contra impiam catervam tela deprompſeris. Hoc ſenſit pridem, & in peruditis concionibus anglicè latinèque editis, primus egregiè demonſtravit vir in omni literarum genere præclarus idemque bonarum artium fautor eximius RICHARDUS BENTLEIUS, ſeculi ſui & Academiæ noſtræ magnum ornamentum, Collegii noſtri *S. Trinitatis* magiſter digniſſimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obſtrictum fateri debeo: huic & tuas quæ debentur gratias, lector benevole, non denegabis. Is enim, cum à longo tempore celeberrimi auctoris amicitiâ intimâ fruereſtur, (qua etiam apud poſteros cenſeri non minoris æſtimat, quàm propriis ſcriptis, quæ literato orbi in deliciis ſunt inclareſcere) ami-

ci

ci simul famæ & scientiarum incremento consuluit. Itaque cum exemplaria prioris editionis rarissima admodum & immani pretio cœmenda supereſſent; suasit ille crebris efflagitationibus, & tantum non objurgando perpulit denique virum præstantissimum, nec modestiâ minùs quàm eruditione summâ insignem, ut novam hanc operis editionem, per omnia elimatam denuò & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur: mihi verò, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam posset emendatè id fieri curarem.

*Cantabrigiæ*,
Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* socius,
astronomiæ & philosophiæ experimentalis
professor *Plumianus*.

A U C

# AUCTORIS PRÆFATIO
## IN
# EDITIONEM TERTIAM.

*IN editione hacce tertiâ, quam* Henricus Pemberton M. D. *vir harum rerum peritissimus curavit, nonnulla in libro secundo de resistentia mediorum paulò fusiùs explicantur quàm anteà, & adduntur experimenta nova de resistentia gravium quæ cadunt in aëre. In libro tertio argumentum quo lunam in orbe suo per gravitatem retineri probatur, paulò fusiùs exponitur: & novæ adduntur observationes de proportione diametrorum Jovis ad invicem à D.* Poundio *factæ. Adduntur etiam observationes aliquot cometæ illius qui anno* 1680. *apparuit, à D.* Kirk *mense Novembri in* Germania *habitæ, quæ nuper ad manus nostras venerunt, & quarum ope constet quàm propè orbes parabolici motibus cometarum respondent. Et orbita cometæ illius, computante* Halleio, *paulò accuratiùs determinatur quàm anteà, idque in ellipsi. Et ostenditur cometam in hac orbita elliptica, per novem cœlorum signa, non minùs accuratè cursum peregisse, quàm solent planetæ in orbitis ellipticis per astronomiam definitis moveri. Orbis etiam cometæ qui anno* 1723. *apparuit, à D.* Bradleio *astronomiæ apud* Oxonienses *Professore computatus adjicitur.*

*IS. NEWTON.*

Dabam *Londini*
*Jan.* 12. 1725-6

IN

# VIRI PRÆSTANTISSIMI ISAACI NEWTONI OPUS HOCCE MATHEMATICO-PHYSICUM,

## Seculi Gentiſque noſtræ decus egregium.

EN tibi norma poli, & divæ libramina molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens leges violare creator
Noluit, atque operum quæ fundamenta locârit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes.
Sol ſolio reſidens ad ſe jubet omnia prono
Tendere deſcenſu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vaſtum per inane moveri;
Sed rapit immotis, ſe centro, ſingula gyris.
Jam patet horrificis quæ ſit via flexa cometis;
Jam non miramur barbati phænomena aſtri.
Diſcimus hinc tandem quâ causâ argentea Phœbe
Paſſibus haud æquis graditur; cur ſubdita nulli
Hactenus aſtronomo numerorum fræna recuſet:
Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.
Diſcimus & quantis refluum vaga Cynthia pontum
Viribus impellit, feſſis dum fluctibus ulvam
Deſerit, ac nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alternis vicibus ſuprema ad littora pulſans.
Quæ toties animos veterum torſere ſophorum,
Quæque ſcholas fruſtra rauco certamine vexant,

*****

Ob-

Obvia conſpicimus, nubem pellente matheſi.
Jam dubios nullâ caligine prægravat error,
Queis ſuperum penetrare domos atque ardua cæli
Scandere ſublimis genii conceſſit acumen.
  Surgite mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cæligenæ vires dignoſcite mentis,
A pecudum vitâ longè latéque remotæ.
Qui ſcriptis juſſit tabulis compeſcere cædes,
Furta & adulteria, & perjuræ crimina fraudis;
Quive vagis populis circundare mœnibus urbes
Auctor erat; Cereriſve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab uvâ;
Vel qui Niliacâ monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere voces;
Humanam ſortem minus extulit: utpote pauca
Reſpiciens miſeræ tantum ſolamina vitæ.
Jam verò ſuperis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ
Clauſtra patent terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt ſecula mundi.
  Talia monſtrantem mecum celebrate camænis,
Vos ô cælicolum gaudentes nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia veri,
NEWTONUM Muſis charum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit numine mentem:
Nec fas eſt propius mortali attingere divos.

*EDM. HALLEY.*

INDEX

# INDEX CAPITUM
## TOMI PRIMI.

DEFINITIONES. Pag. 1.

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS. 13.

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECT. I. *De methodo rationum primarum & ultimarum.* 62.
SECT. II. *De inventione virium centripetarum.* 89.
SECT. III. *De motu corporum in conicis sectionibus excentricis.* 153.
SECT. IV. *De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.* 175.
SECT. V. *De inventione orbium ubi umbilicus neuter datur.* 188.
SECT. VI. *De inventione motuum in orbibus datis.* 259.
SECT. VII. *De corporum ascensu & descensu rectilineo.* 292.
SECT. VIII. *De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.* 312.
SECT. IX. *De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum.* 334.
SECT. X. *De motu corporum in superficiebus datis, deque funependulorum motu reciproco.* 361.
SECT. XI. *De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium.* 404.
SECT. XII. *De corporum sphæricorum viribus attractivis.* 465.
SECT. XIII. *De corporum non sphæricorum viribus attractivis.* 503.
SECT. XIV. *De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.* 533.

ER-

# ERRATA,

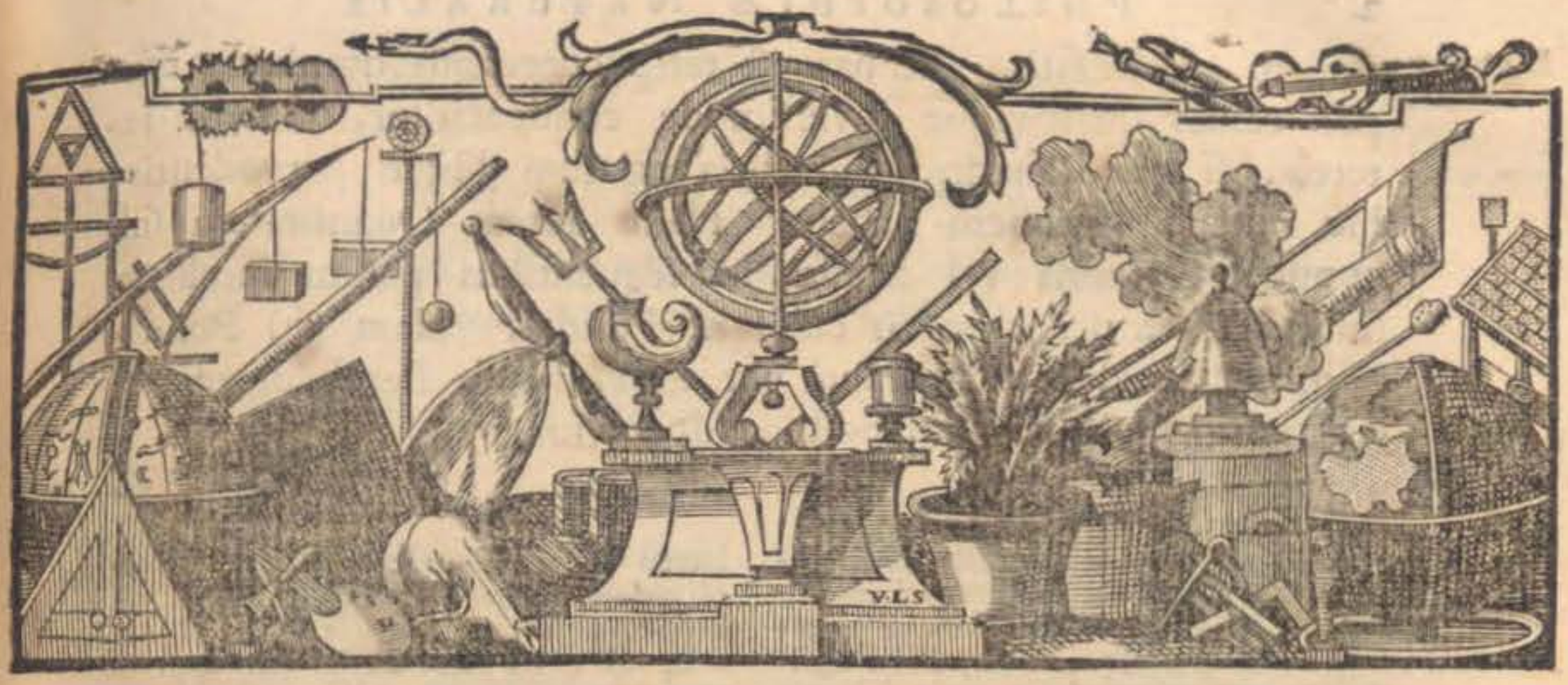
antequam legas corrigenda.

## IN TEXTU.

*Pag.* 75. *lin.* 10. D d, *lege*, D, d. *Pag.* 91. *l.* 2. reciprocæ, *lege*, reciprocè. *Pag.* 107. *in figurâ loco* T *ſcribe* Q, *& loco* Q *ſcribe* T. *Pag.* 377. *in figurâ, ſcribe* R *in interſectione rectæ* AOC, *& cycloidis. Pag.* 423. *lin.* 11. *dele* viribus.

## IN NOTIS.

*Pag.* 23. *lin.* 21. *col.* 1. corporis, *lege*, corporum. *Pag.* 52. *col.* 2. *lin.* 2. $1-3:2b$, *lege*, $1-\frac{3b}{2}$. *Pag.* 72. *lin.* 26. *col.* 2. $G:g=S:TT:s:ss$, *lege* $G:g=\frac{S}{TT}:\frac{s}{ss}$. *Pag.* 75. *col.* 1. *lin.* 28. D d, *lege*, D, d. *Pag.* 86. *lin.* 2. *col.* 1. *deleantur hæc verba:* capiatur PE =PC, & producta PC, tangentem ſecet in T. *Ibid. lin.* 15. *col.* 1. 145, *lege* 146. *Pag.* 87. *lin.* 9. *col.* 2. $zzdz+zzdz$, *lege*, $zzdz+zzdz+zzdz$. *Pag.* 96. *in circulo majori ad alterum diametri extremum, ſcribe* G. *Pag.* 102. *lin.* 26. *col.* 2. emenſus, *lege*, emenſum. *Pag.* 118. *col.* 1. *lin.* 3. EG×GE, *lege*, EG×GF. *Pag.* 123. *col.* 2. *lin.* 18. BO, *lege*, DO. *Pag.* 126. *col.* 2. *in figurâ ad alterum ordinatæ extremum, lege*, G. *Pag.* 127. *lin.* 13. *col.* 1. *delcatur*, tum. *Ibid. lin.* 25. *col.* 1. 2AC, L, *lege* 2AC:L. *Pag.* 129. *lin.* 8. *col.* 2. $PO^2+CE^2=BC^2$, *lege*, $PO^2+KE^2=BC^2$. *Pag.* 220. *col.* 1. *lin.* 8. AD, AB, *lege*, AD, aB, *Pag.* 279. *col.* 1. *lin.* 9., Lemma, *lege*, 374. Lemma. *P.* 287. *lin.* 9. $rr^2-xx^2$, *lege*, $rr-xx$. *Ibid. in fig. col.* 2. *in extremitate ſecantis*, Cc *ſcribatur* a. *P.* 309. *col.* 2. *l.* 16., velocitate, *leg.* velocitas. *P.* 310. *col.* 1. *l.* 3. DLMe, *leg.* DLme. *Ibid.* $\theta:T$, *leg.* $\theta:t$. *P.* 311. *col.* 2. *l.* 4. $EM=\sqrt{2ABGE}$, *leg.* $EM=\frac{1}{\sqrt{2ABGE}}$. *P.* 339. *col.* 1. *l.* 4. corpus P, *leg.* corpus p. *Ibid. l.* 10. ſeu kCP, *leg.* ſeu KCP. *Ibid. col.* 2. *l.* 5. verſus p. *leg.* verſus P. *P.* 344. *col.* 1. *l.* 3. tendente ad focum ellipſeos, *leg.* tendente ad centrum ellipſeos. *P.* 368. *col.* 1. *initio lineæ* 1^a. *ſcribe*: (456). *Ibid. col.* 2. *l.* 16. ex generi, *leg.* ex geneſi. *P.* 400. *col.* 1. *l.* 8. *notæ* 490. DQ, *leg.* DH. *P.* 401. *col.* 1. *l.* 15. $POp=\frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm-kkxx-llpp}}$, *leg.* $POp=\frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm-kkxx-CCpp}}$. *P.* 426. *col.* 2. *l.* 18. NM, *leg.* nm. *P.* 441. *col.* 1. *l.* 21. (505), *leg.* (507). *P.* 442. *col.* 2. *l.* 9., *leg.* arcus PK, $\pi$Pk, Kkca in planis TpP, T$\pi$P, EST. *P.* 443. *col.* 2. *l.* 2. (509), *leg.* (508). *P.* 444. *col.* 1. *l. penultima* (509), *leg.* (510). *P.* 445. *in figurâ, loco* B *ſcribe* N, *& loco* N *ſcribe* B. *P.* 455. *col.* 2. *l.* 2. (513), *leg.* (504). *P.* 473. *col.* 2. *l.* 4. quod ſi ſphæræ, *leg.* quod ſi (ut hic ſupponitur) vires abſolutæ particularum utriuſque ſphæræ. *Ibid. col.* 2. *l.* 7. Si vero &c. *hæc ad finem uſque notæ delenda ſunt.*



# PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

## *DEFINITIONES.*

### DEFINITIO I. (a)

*Quantitas Materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius Denſitate & Magnitudine conjunctim.*

AER, denſitate duplicata, in ſpatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato ſextuplus. Idem intellige de Nive & Pulveribus per compreſſionem vel liquefac-



*Licet primæ definitiones* NEWTONIANÆ *vix aliquam poſtulare videantur explicationem; in ipſo tamen operis noſtri limine, nonnulla levioris momenti præmittenda judicamus, quæ ad majora viam ſternunt. Prima quæ in poſterum ſæpius recurrent Mechanices principia interſerere non abs re erit, tùm ut Lectorum labori parcamus, tùm ut magis continua ſervetur noſtrarum demonſtrationum ſeries.*

(a) 1. Materia eſt ſubſtantia trinâ dimenſione prædita, ſolida ſeu impenetrabilis, mobilis, diviſibilis. Spatium purum eſt illa immenſa, penetrabilis, ſui ubique

DEFINITIONES.

tionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunque diversimodè condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium liberè pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem sub nomine Corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque Pondus. Nam (b) Ponderi proportionalem esse reperi per experimenta Pendulorum accuratissimè instituta, uti posthac docebitur.

DE-

ubique similis, immobilis extensio, in quâ corpora omnia liberrimè moveri intelligimus. In corpore dato materiæ quantitatem seu massam, à corporis magnitudine, aut volumine seu mole distingui oportet. Materiæ quantitas est aggregatum, seu summa omnium materiæ particularum quibus compositum est corpus. Volumen, seu Magnitudo, est tota trina dimensio sub exteriori corporis superficie contenta. Porrò inter solidas seu impenetrabiles corporis particulas sive elementa, plura esse possunt disseminata foramina seu pori, vel omni materiâ vacui, vel quos aliena materia liberè pervadat; sic aër subtilior spongiæ poros permeat, & ad spongiæ materiam non pertinet. Si nulla sint inter solidas corporis partes admixta foramina, Massa & volumen non differunt; at si poris pertusum sit corpus, Massam volumen superat.

2. Densitas est ratio massæ corporis ad illius volumen; adeò ut sub æqualibus voluminibus, densitates sint in ratione directâ massarum; & eadem seu æquali manente in diversis corporibus massâ, densitates sint in ratione voluminum reciprocâ. Itaque si densitas dicatur D; massa M; volumen V; erit D = M : V; seu densitas exponi potest per massam ad volumen applicatam, sive, quod idem est, densitas erit ut massa per volumen divisa. Si itaque D & M : V, per V multiplicentur, erit DV = M, seu massa aut quantitas materiæ est ut densitas in volumen ducta; Massa igitur exponi potest per factum ex densitate in volumen. Quare si DV & M, per D dividantur, erit V = M : D, seu volumen est ut massa ad densitatem applicata, sive volumen est in ratione compositâ ex directâ ratione massæ & inversâ densitatis. Si densitates fuerint æquales, seu si m : v = M : V, patet massas esse inter se ut volumina directè. His positis facilè intelligitur massam aëris, densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato fieri quadruplam, nam ob duplicatam densitatem in eodem spatio dupla est massa; ergò duplicato etiam spatio massa rursus duplicatur & fit quadrupla.

(b) 3. Massam esse ponderi proportionalem, ob frequentissimum hujusce veritatis usum, hic breviter ostendimus. Gravia omnia, ut notissimis constat experimentis, per lineas ad terræ superficiem perpendiculares ac proindè ad sensum parallelas descendunt, & in tubis aëre vacuis plumbum levissimaque pluma eâdem celeritate cadunt, seu æqualia spatia, æqualibus temporibus cadendo percurrunt. Nec successu caret experimentum, etiamsi coarctatis ac deductis poris vel superficiebus, corporis figura mutetur; dummodò eadem remaneat massa, idem semper servatur pondus; ex quo sequitur gravitatem non solùm exterioribus corporis partibus, sed & interioribus æquè inesse; alioquin ejusdem corporis sub diversis superficiebus, idem non remaneret pondus, nec eadem foret sub diversis figuris celeritas; mutatâ enim superficie, partes quæ antè interiores erant, exteriores fiunt & viceversâ; æqualia igitur massæ elementa æquali urgentur vi gravitatis, seu æqualis sunt ponderis; crescit ergò totiùs massæ pondus ut elementorum æqualium numerus, seu crescit pondus ut massa, sive massa est ponderi proportionalis.

DEFINITIONES.

## DEFINITIO II. (c)

*Quantitas Motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiæ conjunctim.*

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; idco-



(c) 4. Locus corporis est pars spatii, quam corpus occupat. Motus est continua loci mutatio. Tria in motu consideranda sunt, corpus quod movetur seu mobile, spatium quod percurritur, & tempus quo percurritur. Spatium percursum est linea quam mobile instar puncti considerandum describere intelligitur. Directio motûs est linea recta quam mobile describit aut describere nititur. Motus conspirantes sunt quorum directiones congruunt, aut saltem sunt parallelæ & ad easdem partes tendunt. Motus contrarii seu directè oppositi dicuntur quorum directiones congruunt quidem, aut saltem sunt parallelæ, sed in oppositas partes vergunt. Motus æquabilis seu uniformis est, quo mobile æqualia spatia æqualibus temporibus percurrit. Motus acceleratus, quo mobile majora continuò spatia æqualibus temporibus describit. Motus retardatus quo mobile per minora continuò spatia æqualibus temporibus fertur.

5. Celeritas seu velocitas, est ea corporis moti affectio quâ aptum redditur, datum spatium dato tempore æquabiliter percurrendi. Est igitur celeritatis mensura in motu æquabili quærenda, seu, ut habeatur quantitas velocitati proportionalis, quærendum est spatium quod corpus dato tempore percurreret, si illius motus constans atque æquabilis permaneret. Porrò manifestum est celeritatem esse duplam, triplam, si temporibus æqualibus duplum, vel triplum percurratur spatium; & contrà celeritatem esse subduplam, subtriplam, si æqualia spatia, duplo, triplo tempore percurrantur; ergò manentibus temporibus, celeritates sunt ut spatia; & manentibus spatiis, celeritates sunt inversè ut tempora; quare variantibus temporibus atque spatiis, celeritates semper erunt in ratione compositâ ex directâ spatiorum & reciprocâ temporum; seu si celeritas dicatur C, spatium S, tempus T; erit C ut S : T, sive C = S : T, seu celeritas exponi potest per spatium ad tempus applicatum, & multiplicando utrinque per T, erit CT = S, seu spatium est ut celeritas in tempus ducta, & dividendo utrinque per C, erit T = S : C, seu tempus est ut spatium ad celeritatem applicatum. Si duorum mobilium celeritates C, c, seu S : T; s : τ, fuerint æquales, id est S : T = s : τ, erit S : s = T : τ, seu spatia sunt ut tempora.

6. Jam verò cum in motu nihil nisi corpus, spatium percursum & tempus considerentur, & ratio spatii ad tempus celeritatem exponat (5), satis evidens est ad totum corporis motum seu quantitatem motûs inveniendam, solius massæ & celeritatis habendam esse rationem. Cum autem motus totius corporis sit æqualis summæ motuum singularum Massæ partium, seu elementorum, patet manente celeritate, motum totius massæ crescere prout crescit numerus elementorum massæ æqualium, seu quantitatem motûs esse proportionalem massæ; manente verò massâ, quantitas motûs est ut velocitas; nam si corpus idem, duplum spatium eodem tempore percurrit, duplus est illius motus, si triplum triplus &c. Siquidem manentibus tempore & massâ, nulla est alia quam spatiorum varietas, & motus sunt ut spatia; sed spatia temporibus æqualibus percursa sunt ut celeritates (5), ergo quantitates motûs sunt etiam ut celeritates. Quare variantibus massis atque celeritatibus, motûs quantitas est semper ut massa in celeritatem ducta, seu in ratione compositâ massæ & celeritatis; si itaque motûs quantitas dicatur Q; Massa M, celeritas C; erit Q ut M C, quod ità exponimus Q = MC, dividendo utrin-

DEFINITIONES.

que in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus est, & duplâ cum velocitate quadruplus.

## DEFINITIO III. (d)

*Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ, fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis Inertiæ dici possit. Exercet verò corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta; estque exercitium illud sub diverso respectu & Resistentia & Impetus: resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficul-

que per M, & deindè per C, erit C = Q : M; & M = Q : C; Seu celeritas est ut quantitas motûs ad massam applicata, & massa viciſſim, ut quantitas motûs per celeritatem divisa. Si quantitates motûs Q, q, seu MC, mc, fuerint æquales, erit MC = mc, & M : m = c : C, seu massæ sunt reciprocè ut celeritates; & viceversâ si M : m = c : C, erit MC = mc, seu si massæ sunt in ratione velocitatum reciprocâ, quantitates motûs sunt æquales. Prætereà cum, (5), sit C = S : T, erit etiam Q = MS : T, seu quantitates motûs sunt in ratione compositâ ex directis rationibus massæ & spatii & inversâ temporis; invenietur etiam QT = MS, M = QT : S; S = QT : M, T = MS : Q.

Pari facilitate demonstrari possunt cætera theoremata quæ de motuum comparatione, apud scriptores mechanicos fusè reperiuntur.

(d) 7. Vis duplex est, activa & passiva; Activa est potentia motum efficiendi; Passiva est potentia motum recipiendi vel amittendi; vis activa subdividi solet in vim vivam quæ cum motu actuali conjuncta est, & in vim mortuam quæ est tantùm conatus seu sollicitatio ad motum & ex quâ motus actualis non producitur, nisi vis mortuæ actio aliquandiù in corpore continuata fuerit. Sic vis gravitatis in globo qui ex filo pendet vel plano horizontali incumbit, est vis mortua, quâ quidem actu non movetur globus, sed conatur moveri filumque tendit, aut planum premit. Si filum abrumpatur, vel planum sustentans auferatur, tùm continuâ gravitatis actione globus motu accelerato cadit. Vis quâ corpus in circuli peripheriâ motum, filum centro alligatum tendit, & quâ proindè conatur à centro recedere est quoque vis mortua.

8. Inest omni materiæ vis insita passiva, seu inertia, ex quâ nullus motus, nullaque tendentia ad motum resultat, sed quæ consistit in renixu quo corpus quodlibet, cuilibet vi externæ mutationem

ficulter cedendo, conatur ſtatum obſtaculi illius mutare. Vulgus reſiſtentiam quieſcentibus & impetum moventibus tribuit: ſed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, reſpectu ſolo diſtinguuntur ab invicem; neque ſemper verè quieſcunt quæ vulgo tanquam quieſcentia ſpectantur. DEFINITIONES.

## DEFINITIO IV. (c)

*Vis impreſſa eſt actio in corpus exercita, ad mutandum ejus ſtatum vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.*

Conſiſtit hæc vis in actione ſola, neque poſt actionem permanet in corpore. Perſeverat enim corpus in ſtatu omni novo per ſolam vim inertiæ. Eſt autem vis impreſſa diverſarum originum, ut ex Ictu, ex Preſſione, ex vi Centripetâ.

## DEFINITIO V.

*Vis Centripeta eſt, qua corpora verſus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.*

Hujus generis eſt Gravitas, qua corpora tendunt ad centrum

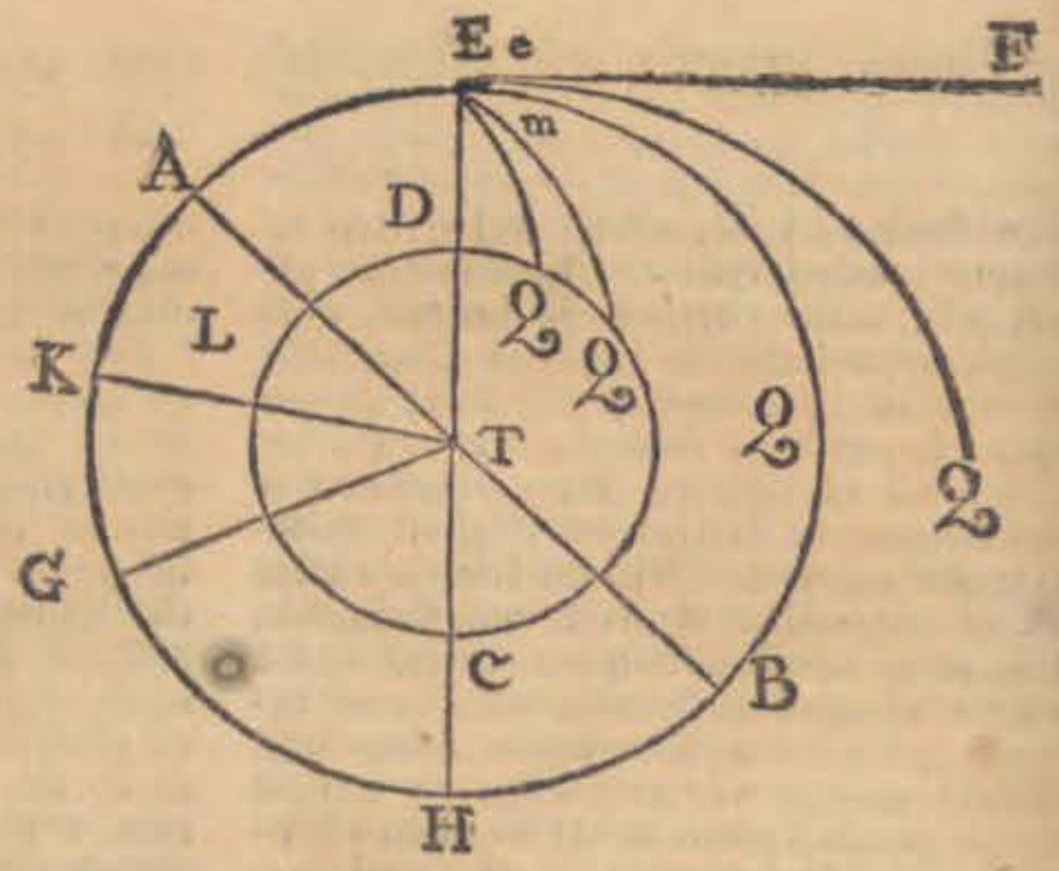


nem ſtatûs, id eſt, motûs vel quietis inducere conanti reſiſtit. Etenim nulla poteſt eſſe actio corporis in corpus, quin luctatio quædam, ut loquitur Clar. *Hermannus* in *Phoronomiâ*, fiat inter corpus agens & patiens, dum alterum alteri reſiſtit; alioquî corpus motum poſſet ſine motûs proprii detrimento, aliud quodcumque movere. Vis illa inertiæ eadem eſt in corporibus motis & quieſcentibus; tam enim reſiſtunt corpora actioni quâ à quiete ad motum concitantur, quam actioni quâ à motu ad quietem reducuntur. Eadem quippè vis requiritur ad motum datum producendum & ad eundem extinguendum. Quia autem vis illa inertiæ eadem in omnibus æqualibus materiæ partibus reperitur, conſequens eſt ut ſit materiæ proportionalis; dupla in maſſâ duplicatâ, tripla in triplicatâ. Majoribus etiam mutationibus corpora magis reſiſtunt quam minoribus, eſtque reſiſtentia actualis magnitudini mutationis proportionalis.

(c) 9. Nihil fit ſine cauſâ; undè omne corpus ut pote iners & paſſivum (8) in ſuo quocumque ſtatu perſeverat, niſi cauſâ aliquâ, ſeu vi externâ, ſtatum ſuum mutare cogatur; cum igitur vis aliqua in corpus actu agit; vis impreſſa ſeu actio mutat quidem corporis ſtatum, ſed ceſſante illius vis actione, corpus in novo ſtatu per illam actionem recepto perſeverat ſolâ vi inertiæ paſſivâ, quâ fit ut ſine novâ vi externâ ſtatum ſuum mutare nullâ ratione poſſit; adeoque ſi ſemel movetur, ſibi relictum, perpetuò atque æquabiliter per lineam rectam movebitur, ſeu ſecundum directionem quâ impulſum fuerit & quâ movebatur, dum actio vis externæ ceſſavit.

DEFINITIONES.

trum terræ; Vis Magnetica, quâ ferrum petit magnetem; & Vis illa, quæcunque ſit, quâ Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circumactus, a circumagente manu abire conatur; & conatu ſuo fundam diſtendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; & quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, quâ funda lapidem in manum perpetuo retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par eſt ratio (f) corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; & niſi adſit vis aliqua conatui iſti contraria, quâ cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, ſi vi Gravitatis deſtitueretur, non deflecteretur in terram, ſed in linea recta abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, ſi modo aeris reſiſtentia tolleretur. Per gravitatem ſuam retrahitur a curſu rectilineo & in terram perpetuo flectitur, idque magis vel minus pro gravitate ſua & velocitate motus. Quo




(f) 10. Cùm linea quævis curva conſiderari poſſit tanquam polygonum, ex infinitis numero, atque infinitè parvis ſeu evaneſcentibus lateribus rectis compoſitum. Si corpus in curvâ E B H K, moveatur, in ſingulis curvæ punctis E fertur juxtà directionem lateris evaneſcentis E e, adeòque ſi ſibi relinqueretur, nec altera vis in extremitate hujus rectæ, E e, illud retraheret, & in lineam, e m, inflecteret, perpetuò atque æquabiliter moveretur per rectam, E e, productam (g) ac proindè cum linea E e producta, ſit ipſa curvæ tangens E F, uniformiter moveretur per tangentem in puncto E, niſi nova vis perpetuò in illud agens, cujus directio eſt versùs curvam, ipſum a motu rectilineo retraheret & in orbitâ ſuâ retineret; quo major eſt vis aut celeritas ſecundùm directionem tangentis vel evaneſcentis lateris, E e, & minor vis illa quâ mobile a tangente in curvæ

DEFINITIONES.

Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ vel major velocitas quâcum projicitur, eo minus deviabit a curſu rectilineo & longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate ſecundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad diſtantiam duorum milliarium, priuſquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quaſi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quaſi decuplo longius: ſi modo aeris reſiſtentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri poſſet pro lubitu diſtantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam deſcriberet, ita ut tandem caderet ad diſtantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret vel denique ut in cœlos abiret & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, quâ Projectile vi gravitatis in orbem flecti poſſet & terram totam circuire, poteſt & Luna vel vi gravitatis, ſi modo gravis ſit, vel aliâ quâcunque vi, quâ in terram urgeatur, retrahi ſemper a curſu rectilineo terram verſus, & in orbem ſuum flecti: & ſine tali vi Luna

curvam retrahitur, eò minùs a tangente deviat corpus, adeoque curva quam motu ſuo deſcribit, ad tangentem ſeu rectam lineam propiùs accedit. Econtrà decreſcente vi aut celeritate ſecundùm directionem tangentis, aut creſcente vi alterâ quæ a tangente deflectit, corpus a motu rectilineo magis retrahitur, & major fit lineæ curvatura. Nam effectus ſunt cauſis ſuis proportionales; eſt autem motus per tangentem rectilineus, effectus vis ſecundùm directionem tangentis, & deviatio a tangente, effectus vis illius quæ a tangente retrahit.

11. Sit terræ circumferentia D Q C, illiuſque centrum T, ex quo vim ad centrum trahentem per totum circumquaque ſpatium propagari fingamus, aut, ſi magis placuerit, ſupponamus eſſe vim per totum ſpatium diffuſam, quâ corpora omnia ſecundùm directionem radiorum, E T, A T, ad centrum T urgeantur, & ex vertice E montis E D projiciatur corpus juxtà directionem rectæ E F ad E T, normalis; corpus illud hâc ſolâ vi impreſſâ æquabiliter per rectam E F moveretur (9); at vi centripetâ ſeu vi tendente ad centrum T ab illâ rectâ perpetuò retrahitur & cogitur incedere in curvâ aliquâ E Q quam tangit in E recta E F (10); augendo vim impreſſam ſecundùm directionem tangentis, E F, curva E Q, ad tangentem E F, propiùs accedit, adeò ut corpus variis & ſucceſſivè creſcentibus celeritatibus projectum, terram tardiùs ſemper attingat; deindè circà eam revolvatur, tandemque in infinitum abeat. Ut igitur corpus per rectam E F, datâ velocitate projectum, curvam datam E Q deſcribat, certa ac determinata vis centripeta requiritur; & viceversâ datâ velocitate ſecundùm rectam E e ſeu E F, & vi centripetâ etiam datâ, corpus nonniſi certam ac determinatam curvam E Q poteſt deſcribere; & mathematicorum eſt ex datis velocitate per tangentem E F & curvâ E Q quam corpus deſcribit, invenire vim centri-

DEFINITIONES.

Luna in orbe ſuo retineri non poteſt. Hæc vis, ſi juſto minor eſſet, non ſatis flecteret Lunam de curſu rectilineo: ſi juſto major, plus ſatis flecteret, ac de orbe ſuo terram verſus deduceret. Requiritur quippe, ut ſit juſtæ magnitudinis: & Mathematicorum eſt invenire Vim, quâ corpus in dato quovis orbe datâ cum velocitate accuratè retineri poſſit; & viciſſim invenire viam curvilineam, in quam corpus é dato quovis loco datâ cum velocitate egreſſum a datâ vi flectatur. Eſt autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Abſoluta, Acceleratrix, & Motrix.

## DEFINITIO VI. (g)

*Vis centripetæ Quantitas Abſoluta eſt menſura ejuſdem major vel minor pro Efficacia cauſæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.*

Ut vis Magnetica pro mole magnetis vel intenſione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFI-

tripetam, quâ a tangente retrahitur & in orbitâ ſuâ retinetur, & reciprocè ex datâ velocitate per tangentem & vi centripetâ, curvam invenire; quæ duo Newtonus mirâ ſagacitate & elegantiâ perfecit.

(g) 12. In centro T exiſtere ſupponatur corpus, ex quo per omne ſpatium diffundatur vis, quæ juxta directionem radiorum A T, E T, H T, versùs centrum, aut a centro versùs ſpatia circumpoſita, juxtà directionem radiorum, T A, T E, T H, agat; in 1°. caſu vis illa centripeta, in 2°. vis centrifuga, in utroque vis centralis dicitur.

Hæc vis in centro conſiderata duplici præſertim ratione variare poteſt; Si enim corpus quod centrum occupat, & cui vis ineſt, in ſua æqualia elementa diviſum intelligatur, & vis ſit ſingulis elementis æqualis ejuſdemque conſtanter intenſionis; vis totius corporis centralis, ſeu vis centralis quantitas abſoluta, erit maſſæ ſeu ſummæ elementorum proportionalis. At ſi manente eâdem corporis centralis maſsâ, vis ſemper manens æqualis in ſingulis elementis æqualibus intenſivè creſcat vel decreſcat, vis tota corporis centralis ſeu vis centralis quantitas abſoluta, erit proportionalis intenſioni vis in ſingulis elementis exiſtentis; quare variantibus maſsâ & vi ſingulorum elementorum, vis centralis quantitas abſoluta erit in ratione compoſitâ maſſæ & intenſionis vis in ſingulis elementis æqualibus.

DEFINITIONES.

## DEFINITIO VII. (h)

*Vis centripetæ Quantitas Acceleratrix eſt ipſius menſura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.*

Uti Virtus magnetis ejuſdem major in minori diſtantia, minor in majori: vel vis Gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut poſthac patebit) in majoribus diſtantiis à globo terræ; in æqualibus autem diſtantiis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) ſublata Aeris reſiſtentia, æqualiter accelerat.



(h) 13. Si vis centralis non ampliùs in centro, ſed in quâcumque à centro diſtantiâ conſideretur, poſſumus in variis illis à centro diſtantiis ſuperficies ſphæricas fingere quarum commune centrum ſit T, & vis centralis in illis diſtantiis ſeu ſuperficiebus ſphæricis conſiderata, dicitur vis acceleratrix. Illius autem quantitas erit proportionalis celeritati quam dato ſeu conſtante tempore in ſingulis materiæ elementis à centro æquidiſtantibus producet; nam ſi ſupponamus vim illam conſtantem in elementa materiæ continuò agere, eo major erit quo major erit velocitas dato tempore genita, ita ut ſi tempore æquali dupla generetur velocitas, dupla quoque ſit vis, cum velocitas illa ſit illius vis effectus plenus. Si conſtans maneat celeritas à vi acceleratrice genita, erit vis in ratione inversâ temporis quo celeritas illa producitur, nam ſi eadem celeritas tempore ſubduplo producatur, vis duplicatur. Quare ſi manente vi conſtante, celeritas & tempus varient, erit vis acceleratrix in ratione compoſitâ ex directâ celeritatis genitæ & reciprocâ temporis. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; celeritas producta C; tempus quo producitur, T, erit $G = C : T$, & $GT = C$, & $T = C : G$. Licet autem variet vis acceleratrix, eadem tamen eſt illius menſura, modò celeritas naſcens ſeu initio motûs tempore quàm minimo producta conſideretur, tunc enim vis agit uniformiter.

14. Si vis aliqua per radios divergentes in medio non reſiſtente diffundatur, vis acceleratrix decreſcit in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro; nam quia vis illa, ex hyp., in medio non reſiſtente propagatur, nullus intercipitur radius, nec vis ſingulorum minuitur, adeóque radii qui in diſtantiâ T L, per hemiſphærium à ſemicirculo D L C deſcriptum diffundebantur, in diſtantiâ, T K per hemiſphærium E K H propagantur; eſt autem vis acceleratrix ut radiorum denſitas, & radiorum denſitas eſt reciprocè ut ſuperficies hemiſphæriorum à ſemicirculis deſcriptorum; nam radiorum denſitas eſt ut ſumma ſeu numerus radiorum per ſuperficiem quam occupant diviſus; hic enim ſumma radiorum eſt ut maſſa, ſuperficies verò cui inſunt ut volumen. Verùm cum per hyp., idem numerus radiorum ſuperficies ſingulorum hemiſphæriorum occupet, erit denſitas radiorum in ratione inversâ illarum ſuperficierum in quâvis à centro diſtantiâ deſcriptarum; illæ autem ſuperficies ſunt in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro; ergò & vis acceleratrix eſt in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro reciprocè. Egregium illud theorema, ut ex demonſtratione patet, omnem excludit medii reſiſtentiam; quare ut in phyſicis valeat, medii reſiſtentia in com-

DEFINITIONES.

## DEFINITIO VIII. (i)

*Vis centripetæ Quantitas Motrix eſt ipſius menſura proportionalis Motui, quem dato tempore generat.*

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc Quantitas eſt corporis totius centripetentia ſeu propenſio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innoteſcit ſemper per vim ipſi contrariam & æqualem, quâ deſcenſus corporis impediri poteſt.

Haſce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & abſolutas; & diſtinctionis gratia referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compoſitum; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca ſingula in circuitu diffuſam, ad movenda corpora quæ in ipſis ſunt; vim autem abſolutam ad Centrum, tanquam cauſa aliqua

computum venire debet. Hæc autem virium ſeu qualitatum e centro emanantium theoria ad majorem univerſalitatem reduci poteſt, ſi vis in ſingulis radiis variè propagari ſupponatur, aut etiam ſi per lineas curvas diffundi fingatur. Sed hæc fuſiùs proſequi præſentis non eſt inſtituti.

(i) 15. Si vis centripeta in corpore ad centrum propulſo conſideretur; ut totus illius corporis in centrum conatus ſeu vis centripetæ quantitas motrix habeatur, ducenda eſt maſſa in vim acceleratricem; nam vis motrix totius corporis componitur ex omnibus viribus, quibus ſingula æqualia elementa urgentur, adeóque ex vi acceleratrice toties ſumptâ quot ſunt in corpore æqualia materiæ elementa, ſive ex vi acceleratrice in maſſam ductâ. Supponimus enim ſingula elementa æqualia, æquali vi acceleratrice urgeri. Sed vis acceleratrix eſt ut celeritas dato tempore genita (13), ergò vis centripetæ quantitas motrix eſt ut maſſa in illam celeritatem ducta, ſeu ut quantitas motûs, dato tempore producta. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; maſſa, M, vis motrix, p, erit p, ut, M G, & M, ut p: G, & G, ut p: M, ſeu maſſa eſt ut vis motrix per vim acceleratricem diviſa, & vis acceleratrix, ut vis motrix per maſſam diviſa. Si duæ fuerint vires motrices P & p, ſeu M G, & m g, æquales, erit M: m = g: G, ſeu maſſæ ſunt ut vires acceleratrices reciprocè; & viceverſâ, ſi M: m = g: G, erit m g = M G, ſeu ſi maſſæ ſunt reciprocè ut vires acceleratrices, vires motrices ſunt æquales. Porrò cum vires acceleratrices ſint ut celeritates dato tempore genitæ (13), in ſuperioribus proportionibus loco virium acceleratricium celeritates illæ ſubſtitui poſſunt.

qua præditum, ſine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; ſive cauſa illa ſit corpus aliquod centrale (quale eſt Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis) ſive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat eſt hic conceptus. Nam virium cauſas & ſedes Phyſicas jam non expendo. DEFINITIONES.

Eſt igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate & ex quantitate materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice & ex quantitate ejuſdem materiæ conjunctim. Nam ſumma actionum vis acceleratricis in ſingulas corporis particulas eſt vis motrix totius. Unde juxta ſuperficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix ſeu vis gravitans in corporibus univerſis eadem eſt, gravitas motrix ſeu pondus eſt ut corpus: at ſi in regiones aſcendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque ſemper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor eſt, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel ſextuplo minus.

Porro attractiones & impulſus eodem ſenſu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulſus, vel Propenſionis cujuſcunque in centrum, indifferenter & pro ſe mutuò promiſcuè uſurpo; has vires non Phyſicè ſed Mathematicè tantùm conſiderando. Unde caveat lector, ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis cauſamve aut rationem Phyſicam alicubi definire, vel centris (quæ ſunt puncta Mathematica) vires verè & Phyſicè tribuere; ſi forte aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.

*Scholium.*

Hactenus voces minus notas, quo ſenſu in ſequentibus accipiendæ ſint, explicare viſum eſt. Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notiſſima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates haſce non aliter quam

DEFINITIONES.

ex relatione ad ſenſibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in abſolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares diſtingui.

(k) I. Tempus Abſolutum, verum, & mathematicum, in ſe & naturâ ſuâ ſine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis Durationis per motum menſura (ſeu accurata ſeu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Menſis, Annus.

II. Spatium Abſolutum, naturâ ſuâ ſine relatione ad externum quodvis, ſemper manet ſimilare & immobile: Relativum eſt ſpatii hujus menſura ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ à ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & à vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aerei vel cœleſtis definita per ſitum ſuum ad Terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine; ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi Terra, verbi gratia, moveatur; ſpatium Aeris noſtri, quod relativè & reſpectu Terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam Aer tranſit, nunc alia pars ejus; & ſic abſolutè mutabitur perpetuò.

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtque pro ratione ſpatii vel Abſolutus vel Relativus. Pars, inquam, ſpatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; Superficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimùm inæquales ſunt; Situs vero propriè loquendo quantitatem non habent, ne-

(k) 16. Quemadmodùm Geometræ lineam fluxu puncti generari fingunt, ita tempus abſolutum mathematicè conſiderare poſſumus, tanquam æquabilem unius inſtantis ſeu puncti temporis fluxum. Quapropter ſi corpus aliquod æquabili celeritate moveretur, illud eodem modo ac temporis punctum fluerer, ſpatiaque ab eo deſcripta forent temporibus proportionalia (5); eo igitur motu tanquam accuratâ durationis menſurâ uti poſſemus. Verùm corporum cæleſtium & horologiorum motus, quos ad temporis menſuram adhibemus, licet vulgò ſupponantur æquabiles, variis tamen ex cauſis accelerantur vel retardantur, ſicque menſuræ illæ vulgares non ſunt tempori abſoluto proportionales.

neque tam ſunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſumma motuum partium, hoc eſt, tranſlatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſumma tranſlationum partium de locis ſuis; ideoque locus totius idem eſt cum ſumma locorum partium, & propterea internus & in corpore toto. DEFINITIONES.

IV. Motus Abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis paſſis fertur, relativus corporis Locus eſt navigii regio illa in quâ corpus verſatur, ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur unà cum navi: & Quies relativa eſt permanſio corporis in eâdem illâ navis regione vel parte cavitatis. At quies vera eſt permanſio corporis in eâdem parte ſpatii illius immoti in quâ navis ipſa unà cum cavitate ſuâ & contentis univerſis movetur. Unde ſi Terra verè quieſcat, corpus quod relativè quieſcit in navi, movebitur verè & abſolutè eâ cum velocitate quâ navis movetur in Terra. Sin Terra etiam moveatur, orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terrâ: & ſi corpus etiam moveatur relativè in navi, orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terrâ, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terrâ. Ut ſi Terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem verſus cum velocitatis parte unâ: movebitur Nauta verè & abſolutè in ſpatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relativè in terrâ occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

(1) Tempus Abſolutum a relativo diſtinguitur in Aſtronomiâ per



(1) 17. Æquatio temporis dicitur differentia quæ inter tempus abſolutum & tempus relativum, (h. e. tempus per ſolis revolutionem menſuratum) intercedit; quæ proindè tempori relativo juncta, vel abeo ſubducta conficit tempus abſolutum & viceverſâ.

DEFINITIONES.

per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro menſura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Aſtronomi, ut ex veriore tempore menſurent motus cœleſtes. Poſſibile eſt, ut nullus ſit motus æquabilis quo Tempus accurate menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus temporis abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum; ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli: proinde hæc a menſuris ſuis ſenſibilibus meritò diſtinguitur, & ex iiſdem colligitur per Æquationem Aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis neceſſitas, tum per experimentum Horologii Oſcillatorii, tum etiam per eclipſes Satellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium Temporis eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæc de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam tempora & ſpatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi Loca. In Tempore quoad ordinem ſucceſſionis; in Spatio quoad ordinem ſitus locantur univerſa. De illorum eſſentia eſt ut ſint Loca: & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur abſoluta Loca; & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt abſoluti Motus.

Verum quoniam hæ Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui; earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum à corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa: deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur, nec incommodè in rebus humanis: in Philoſophicis autem abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri etenim poteſt, ut nullum revera quieſcat corpus, ad quod loca motuſque referantur.

Diſtinguuntur autem Quies & Motus abſoluti & relativi ab invicem per Proprietates ſuas & Cauſas & Effectus. Quietis proprietas eſt, quod corpora verè quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoque cum poſſibile ſit, ut corpus aliquod in regioni-

bus

bus Fixarum, aut longè ultra, quieſcat abſolutè; ſciri autem non poſſit ex ſitu corporum ad invicem in regionibus noſtris, horumne aliquod ad longinquum illum datam poſitionem ſervet necne, quies vera ex horum ſitu inter ſe definiri nequit. DEFINITIONES.

Motus proprietas eſt, quod partes, quæ datas ſervant poſitiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyrantium partes (m) omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium ſingularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quieſcunt. Et propterea motus verus & abſolutus definiri nequit per tranſlationem è viciniâ corporum, quæ tanquam quieſcentia ſpectantur. Debent enim corpora externa non ſolum tanquam quieſcentia ſpectari, ſed etiam verè quieſcere. Alioquin incluſa omnia, præter tranſlationem è viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & ſublatâ illâ tranſlatione non verè quieſcent, ſed tanquam quieſcentia ſolummodo ſpectabuntur. Sunt enim ambientia ad incluſa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, ſine tranſlatione de viciniâ corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis eſt, quod moto Loco movetur unà Locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci ſui motum. (n) Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, ſunt partes ſolummodo motuum integrorum & abſolutorum: & motus omnis integer componitur ex

(m) 18. Gyrantium corporum partes ſingulæ in orbitis curvilineis moventur, adeóque (10) per tangentes orbitarum progredi, atque ita ab axe motûs recedere nituntur; ut ſi trochus vel ſphæra circa axem rotatur, ſingulæ illorum corporum partes circulos deſcribunt, & ab illorum centris per tangentes effugere conantur, cumque omnia illa centra ſint in axe motûs poſita, ſingulæ partes ab axe recedere nituntur.

(n) 19. Si nauta in navi deambulare ſupponatur, motuſque navis & nautæ conſpirent, integra & abſoluta nautæ celeritas componitur ex celeritate nautæ reſpectu loci ſui primi in navi, ex celeritate loci illius, id eſt, navis reſpectu maris, ſeu reſpectu loci ſecundi, & ex celeritate maris reſpectu ſpatii immoti. Si autem motus nautæ, motui navis foret directè oppoſitus, abſoluta nautæ velocitas æqua-

DEFINITIONES.

ex motu corporis de loco ſuo primo, & motu loci hujus de loco ſuo, & ſic deinceps; uſque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ ſupra memorato. Unde motus integri & abſoluti non niſi per loca immota definiri poſſunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia ſupra retuli. Loca autem immota non ſunt, niſi quæ omnia ab infinito in infinitum datas ſervant poſitiones ad invicem; atque adeo ſemper manent immota, ſpatiumque conſtituunt quod Immobile appello.

Cauſæ, quibus motus veri & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt Vires in corpora impreſſæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, niſi per vires in ipſum corpus motum impreſſas: at motus relativus generari & mutari poteſt ſine viribus impreſſis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimatur in alia ſolum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in quâ hujus quies vel motus relativus conſiſtit. Rurſum motus verus à viribus in corpus motum impreſſis ſemper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur neceſſario. Nam ſi eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, ſic imprimantur ut ſitus relativus conſervetur, conſervabitur relatio in quâ motus relativus conſiſtit. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus ubi verus conſervatur, & conſervari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit.

Effectus quibus motus abſoluti & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. (°) Nam in motu circulari nudè relativo hæ vires nullæ ſunt, in vero autem & abſoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si

æqualis foret differentiæ celeritatum navis reſpectu ſpatii immoti & nautæ reſpectu navis. Tandem ſi motus nautæ reſpectu navis foret obliquus, illius directio & velocitas in duas alias directiones & velocitates ita reſolvi debent, ut una directio cum aliorum motuum communi directione conſpiret, alia verò ſit ipſi perpendicularis, tuncque, ex regulis infrà demonſtrandis, facillimè invenietur tùm abſoluta nautæ celeritas, tùm illius vera directio.

(°) 20. In motu circulari nudè relativo, id eſt, in quiete abſolutâ corporis inertis, quod motu duntaxat relativo movetur, vires activæ nullæ ſunt.

Si pendeat ſitula à filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum à contorſione admodum rigeſcat, dein impleatur aquâ, & unâ cum aquâ quieſcat; tum vi aliquâ ſubitanea agatur motu contrario in orbem, & filo ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu; (P) ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis: at poſtquam vas, vi in aquam paulatim impreſſa, effecit ut hæc quoque ſenſibiliter revolvi incipiat; recedet ipſa paulatim à medio, aſcendetque ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe expertus ſum) & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo, quieſcat in eodem relativè. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innoteſcit & menſuratur motus aquæ circularis verus & abſolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Poſtea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relativè. Quare conatus iſte non pendet à tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus circularis



(P) 21. Cum aqua vi inertiæ (8) in eodem quieſcendi ſtatu perſeverare nitatur, in eam nonniſi gradatim & per repetitam laterum ſitulæ frictionem motus circularis tranſire poteſt; adeóque ſub initio motûs ſitulæ, tota aquæ maſſa quieſcit abſolutè, ſive quod idem eſt, maximâ velocitate nudè relativâ in vaſe revolvitur; undè deſtituta omni vi activâ (20) ſicut antè motum ſitulæ, plana & quieta manet. Sed cum iterato laterum vaſis impulſu, motus circularis ad aquam tranſierit, ſingulæ partes aquæ (18) ab axe motûs, ſeu à medio vaſis conantur recedere, cumque minorem ſurſùm in aëre reſiſtentiam inveniant, ad latera ſitulæ accumulantur & aſcendunt, & quò celeriùs aguntur in orbem, eo majori conatu ab axe motûs per tangentes recedere nituntur. (10. 11.) Porrò cum inter vim centrifugam & celeritatem corporis in dato circulo revolventis certa debeat eſſe ac determinata proportio, ex vi centrifugâ ſeu conatu recedendi ab axe cognoſci ac menſurari poteſt velocitas motûs circularis abſoluta, ut deinceps demonſtrabitur.

DEFINITIONES.

cularis verus per tales tranſlationes definiri nequit. Unicus eſt corporis cujuſque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui reſpondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri ſunt; & relationum inſtar, effectibus veris omnino deſtituuntur, niſi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in Syſtemate eorum qui Cœlos noſtros infra Cœlos Fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas ſecum deferre; ſingulæ Cœlorum partes, & Planetæ qui relativè quidem in Cœlis ſuis proximis quieſcunt, moventur verè. Mutant enim poſitiones ſuas ad invicem (ſecus quam fit in verè quieſcentibus) unáque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Quantitates relativæ non ſunt igitur eæ ipſæ quantitates, quarum nomina præ ſe ferunt, ſed ſunt earum menſuræ illæ ſenſibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum menſuratarum utitur. At ſi ex uſu definiendæ ſunt verborum ſignificationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus propriè intelligendæ erunt hæ menſuræ ſenſibiles; & ſermo erit inſolens & purè Mathematicus, ſi quantitates menſuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces haſce de quantitatibus menſuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Matheſin & Philoſophiam, qui quantitates veras cum ipſarum relationibus & vulgaribus menſuris confundunt.

Motus quidem veros corporum ſingulorum cognoſcere, & ab apparentibus actu diſcriminare, difficillimum eſt: propterea quod partes ſpatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in ſenſus. Cauſa tamen non eſt prorſus deſperata. Nam argumenta deſumi poſſunt, partim ex motibus apparentibus qui ſunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ ſunt motuum verorum cauſæ & effectus. Ut ſi globi duo, ad datam ab invicem diſtantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innoteſceret ex tenſione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari poſ-

ſet.

DEFINITIONES.

set. (q) Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex auctâ vel diminutâ fili tensione augmentum vel decrementum motus, & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt Stellæ Fixæ in regionibus Cœlorum (r) sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum, & deprehenderetur tensionem ejus illam ipsam esse quam motus globorum requireret; concludere liceret motum esse globorum, & corpora quiescere; & tum demum ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere; & contra ex motibus seu veris seu apparentibus eorum causas & effectus, docebitur fusius in sequentibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem composui.



(q) 22. Si in alternas, seu è diametro sibi oppositas globorum facies, ad motum circularem augendum vel minuendum, imprimerentur vires quælibet æquales, quæ proindè non perturbarent æquilibrium globorum circà commune gravitatis centrum, id est, circa punctum æquilibrii revolventium, innotesceret ex auctâ vel diminutâ fili tensione augmentum vel decrementum motûs &c.

(r) 23. Spectator in globo moto, vel etiam in stellâ fixâ positus, solo oculorum auxilio, seu ex motibus apparentibus discernere non posset, an globus, an stella vere moveretur; quemadmodùm telluris incolæ ex apparenti stellarum motu determinare non possunt, an stellæ verè moveantur; sive enim cum terrâ moveamur, & stellæ quiescant absolutè, sive e contrà moveantur stellæ & terra quiescat, eædem omnino sunt apparentiæ, iidem motus relativi; quod quidem notissimo illustratur exemplo navis æquabiliter motæ, cujus motus ab iis qui navi vehuntur oculis non percipitur, dum littora urbesque fugere videntur. Ex optices principiis horum phænomenôn petenda est ratio; ea enim corpora quiescere videntur quæ, dum nos ipsi nullam actualem voluntatem nosmet movendi exercemus, eandem respectu oculi positionem constanter servant, ita ut eorum imago quæ in fundo oculi pingitur, eandem semper retinæ partem occupet; ea verò objecta moveri videntur quæ respectu oculi situm suum continuò mutant, seu quorum imagines diversas retinæ partes successivè occupant.

Axioma-ta, sive

# AXIOMATA,
## SIVE
# LEGES MOTUS.

### LEX I.

(f) *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quâtenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

PRojectilia perseverant in motibus suis, nisi quâtenus à resistentiâ aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt sese à motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quâtenus ab aere retardatur. Maiora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

### LEX

(f) 24. Ex hâc primâ lege quam (9) demonstravimus, sequitur omnem motum esse naturâ suâ æquabilem & rectilineum, adeóque nec illius velocitatem retardari, nec directionem mutari, nisi aliquod obstaculum mobili offeratur; Undè cum projectilia motum suum sensim amittant, quærenda est aliqua hujusce retardationis causa. Cum autem corpora projecta vel per medium resistens deferantur, vel etiam super aliorum corporum superficies scabras incedant, & vi gravitatis deorsùm semper urgeantur, necesse est ut eam amittant motûs sui partem quam in hisce obstaculis superandis continuò absumunt, ac proindè quo major vel minor erit medii resistentia, eò majus vel minus decrementum accipiet corporis projecti velocitas. Ex his igitur patet majora planetarum & cometarum corpora nullam sensibilem in spatiis cœlestibus experiri resistentiam, cùm motus suos diutissimè conservent.

## LEX II.



(*) *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundùm lineam rectam quâ vis illa imprimitur.*

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successivè impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, & cum eo secundùm utriusque determinationem componitur.



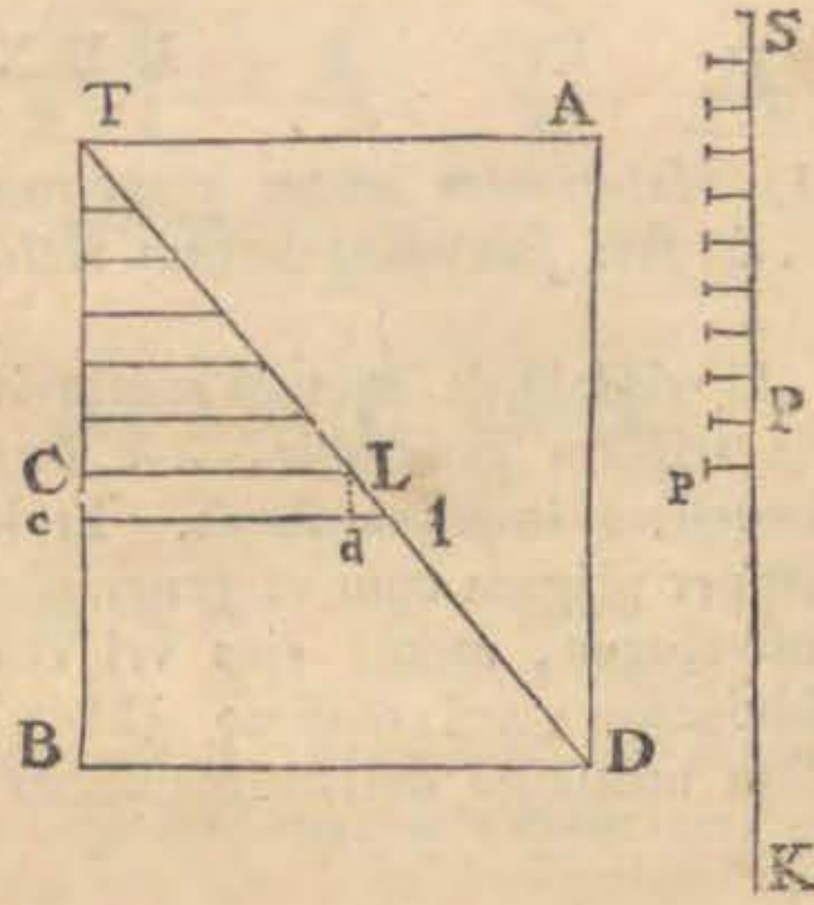
(*) 25. Si corpus vi activâ qualis est vis gravitatis secundùm eandem aut parallelam directionem continuò urgeatur, motus illius continuò acceleratur; nam per leg. 1., manet celeritas acquisita, & per leg. 2. nova conspiranti continuò additur. Si verò aliqua vis in corpus jam motum contrariâ directione perpetuò agat, motus illius continuò retardatur, per leg. 2. Si vis conspirans continuò ac uniformiter agat, id est, si constans sit, corpus eâ vi impulsum, æqualibus temporibus æqualia accipit celeritatis incrementa, seu motu uniformiter accelerato fertur, & celeritates vi illâ acquisitæ sunt ut tempora quibus generantur. At si vis constans contrariâ directione in corpus motum continuò agat, æqualibus temporibus æqualia fient celeritatis decrementa, & corpus motu uniformiter retardato movebitur. Generaliter tandem, si corpus quiescens quâlibet vi sive constanti sive variabili continuò urgeatur, & deindè eâ celeritate quam vis illius actione continuâ acquisivit, contrà directionem vis illius reagentis projiciatur, ut vestigia sua relegat, corpus illud in itu & reditu suo eandem habebit celeritatem, ubi ad eadem viæ suæ puncta, eundo & redeundo pervenerit; adeóque motum redeundo non amittet, nisi cùm pervenerit ad punctum ex quo cœpit eundo moveri; nam eadem vis in itu & reditu corporis, æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus generat & extinguit (8).

26. Corpora gravia in terræ viciniis, sublatâ medii resistentiâ motu uniformiter acceleraro descendunt, & motu uniformiter retardato ascendunt . . . . . Dem . . . . Sublatâ medii resistentiâ idem est ejusdem corporis pondus, sive eadem illius in subjectum planum pressio, tùm in vertice, tum in radice montis; est autem pondus, seu vis motrix (15) ut massa in vim gravitatis acceleratricem ducta; ergò cum ejusdem corporis massa eadem in vertice & in radice montis permaneat, manebit etiam eadem vis acceleratrix gravitatis. Insuper corpora gravia in radice & vertice montis æqualia spatia æqualibus temporibus percurrunt, sublatâ aëris resistentia, ut accuratissimis notum est experimentis (13) constans est igitur vis acceleratrix, & per lineas ad horizontem perpendiculares (3) uniformiter agit; gravia ergò motu uniformiter accelerato descendunt, & uniformiter retardato ascendunt (25) Q. e. D.

27. Subla-

AXIOMATA, SIVE

27. Sublatâ medii reſiſtentiâ in terræ viciniis, ſpatia quæ corpus è quiete cadendo percurrit ſunt ut quadrata temporum quibus percurruntur .... Dem .... recta S K, repræſentet ſpatium quod grave cadendo percurrit T C, T c, T B, exponant tempora quibus deſcribuntur ſpatia S P, S p, S K; & C L, c l, B D, ad T B, normales, exhibeant celeritates temporibus T C, T c, T B, per ſpatia S P, S p, S K, acquiſitas; quia in motu uniformiter accelerato, celeritates ſunt ut tempora, (25), erit T C: T c = C L: c l; & T C: T B = C L: B D, adeóque recta, T D, tranſit per puncta L, & l, & triangula T C L, T c l, T B D, ſimilia ſunt. Jam fingamus lineam, c l, motu ſibi ſemper parallelo ità accedere ad lineam C L, ut tandem cum ipsâ coincidat; evaneſcente tempuſculo C c, celeritas, c l, non differet à celeritate C L, adeóque per tempuſculum infinitè parvum ſeu evaneſcens C c, celeritas C L, uniformis cenſeri poteſt. Porrò ſpatia motu æquabili deſcripta ſunt ut celeritas in tempus ducta (5), ergò ſpatium P p, quod tempuſculo, C c, percurri ſupponimus eſt ut rectangulum, C L, x C c = C d; quare ſi totum tempus, T C, in tempuſcula innumera ut C c, diviſum concipiatur, & ſimiliter ſpatium, S P, tempore T C, percurſum in totidem ſpatiola evaneſcentia, ſingulis tempuſculis correſpondentibus percurſa dividatur, erit ſumma rectangulorum C d, hoc eſt area trianguli T C L, ut ſumma ſpatiolorum P p, id eſt ut S P; & eodem modo demonſtratur aream trianguli T B D, eſſe ut ſpatium S K, tempore T C, percurſum. Eſt igitur triangulum T C L: T B D = S P: S K. Sed triangulorum ſimilium areæ T C L, T B D, ſunt ut quadrata laterum homologorum, ergò S P, ad S K, ut quadratum temporis T C, ad quadratum temporis T B. Q. e. D.




28. Coroll. 1 .... Cum velocitates acquiſitæ ſint ut tempora (25) erunt etiam ſpatia percurſa ut quadrata velocitatum, & tam velocitates quam tempora erunt inter ſe in ratione ſubduplicatâ ſpatiorum.

29. Coroll. 2 .... Si grave è quiete cadens, dato tempore percurrat ſpatium, 1, duplo tempore percurret ſpatium, 4, triplo ſpatium, 9, &c. hoc eſt, ſi tempora ab initio motûs computata ſumantur in progreſſione numerorum naturalium, 1, 2, 3, 4, 5. ſpatia his temporibus deſcripta erunt ut termini progreſſionis numerorum quadratorum. 1, 4, 9, 16, 25 &c. ſpatia verò ſingulis temporibus ſeorſim ſumptis percurſa erunt ut termini progreſſionis numerorum imparium. 1, 3, 5, 7, 9 &c. nam cum ſpatium 1°. tempore percurſum ſit, 1, duplo tempore ſit, 4; ſpatium ſecundo tempore ſeorſim ſumpto deſcriptum erit 4—1 ſeu 3, & ità de cæteris. Undè ſpatia motu uniformiter retardato deſcripta temporibus æqualibus ſecundùm numeros impares retrogrado ordine decreſcunt. (25)

30. Coroll. 3 .... ſpatium S K, quod grave è quiete cadendo, tempore T B, percurrit, eſt ſubduplum ſpatii quod eodem tempore uniformiter percurri poteſt, cum velocitate B D, tempore T B, per ſpatium S K, acquiſitâ. Nam compleatur rectangulum T B D A, & ſpatium quod uniformi celeritate B D, tempore T B, deſcribitur, erit ut rectangulum T B D A (25). Cum ergò (27) ſpatium S K, ſit ut triangulum T B D, ſubduplum rectanguli T B D A, erit ſpatium S K, dimidium ſpatii quod uniformi celeritate B D, tempore T B, percurritur.

31. Co-

## (a) LEX III.

LEGES MOTUS.

*Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.*

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum; tantumque impediet progreſſum unius quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunque mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, ſed motuum; ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutatio-

31. Coroll. 4. . . . celeritas B D, motu uniformiter accelerato acquiſita eſt ſemper (5) ut duplum ſpatium percurſum 2 S K, applicatum ad tempus T B, quo percurritur, ſeu ut 2 S K: T B. Quare ſi vis acceleratrix conſtans dicatur G; ſpatium percurſum S; tempus quo percurritur T; erit G T = 2 S: T (13) adeóque G T² = 2 S, ſeu vis acceleratrix conſtans in quadratum temporis ducta, eſt ut duplum ſpatium eodem tempore vis illius actione deſcriptum.

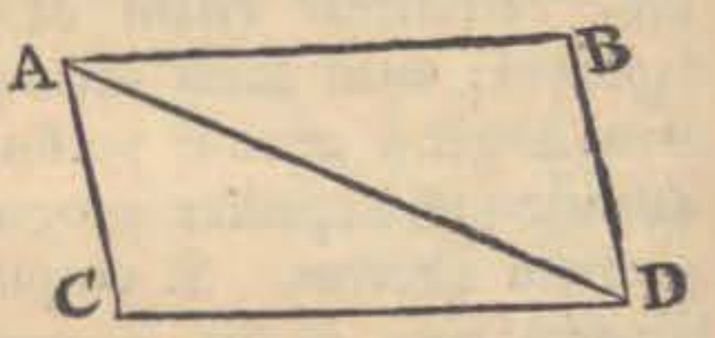
(a) 32. Hæc notiſſima naturæ Lex innumeris confirmata experimentis, ex ipsâ materiæ inertiâ clarè ſequitur. Ut autem omnis tollatur ambiguitas, nihil aliud per hanc legem intellectum volumus, niſi æquales fieri in corpore agente & patiente ſtatûs mutationes; cum enim nulla poſſit eſſe actio corporis in aliud corpus, quin mutua fiat horumce corporis collisio (8); mutatio ſtatûs æqualiter in utroque corpore recipi debet; undè licet actioni æqualis ſemper ſit & contraria reactio, non idcircò tamen inter corpus agens & patiens fieri debet æquilibrium, idque Newtoniano exemplo manifeſtum eſt; ſi equi lapidem trahentis conatus ſeu vis activa major ſit vi quâ lapis per gravitatem ſuam, plani ſcabritiem, mediique reſiſtentiam, equo trahenti reluctatur, equus lapidem trahet cum eâ totius ſuæ vis parte, quæ poſt ſuperatam lapidis gravitatem, plani ſcabritiem, mediique reſiſtentiam, ipſi reſidua eſt; ſi autem totus trahentis equi conatus hiſce tribus reſiſtentiis minor ſit, vel ſi ipſis ſit æqualis, equus lapidem non movebit. Quare totus ac integer lapidis renixus qui componitur ex ipſius gravitate, plani ſcabritie, reſiſtentiâ medii & inertiâ quæ lapidi etiam omnibus aliis viribus deſtituto ineſt, actioni equi lapidem trahentis eſt ſemper æqualis.

AXIOMATA, SIVE

tiones enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciprocè proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

## COROLLARIUM I.

*Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.*




Si corpus dato tempore, vi solâ M in loco *A* impressâ, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; & vi solâ N in eodem loco impressâ, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *A B D C*, & vi utráque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Nam ([b]) quoniam vis N agit secundum lineam *A C* ipsi *B D* parallelam, hæc vis per Legem 11. nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *B D* à vi alterâ genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *B D*, sive vis N imprimatur, sive non; ([c]) atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in lineâ illâ *B D*. Eodem argu-

([b]) 33. Quoniam vis *N*, agit secundùm lineam A C, ipsi B D, parallelam, hæc vis, (per leg. 2) nihil nisi velocitatem secundùm lineam ipsi B D, parallelam producet, ac proindè non mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam B D, à vi alterâ genitam; cum corpus iners duabus hisce viribus ac directionibus simul obsequi possit, & (per leg. 1.), debeat, atque hic supponatur vires *M*, & *N*, in mobile eodem modo simul agere ac si singulæ seorsim in illud quiescens imprimerentur.

([c]) 34. Idcircò cum in fine ejusdem temporis, corpus quod hic tanquam punctum consideratur simul esse debeat in utráque lineâ C D, & B D, in utriúsque lineæ concursu D, reperiatur necesse est; quia autem initio & fine temporis dati corpus reperitur in rectâ A D, nempè primùm in A, & deindè in D, toto tempore dato motum fuit per lineam A D, nam ex duobus punctis A, & D, datis, recta, A D, positione data est; & corpus quibuslibet viribus impulsum, cessante virium actione, movetur uniformiter in directum secundùm ultimam directionem ex viribus impressis resultantem, (per Leg. 1, & 9).

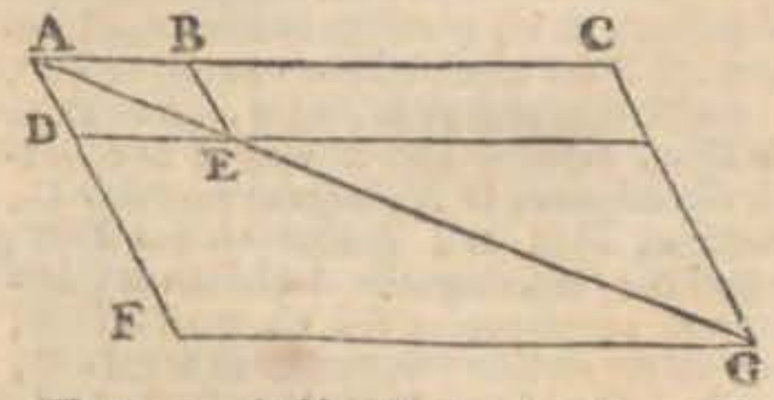
35. Motus compositus per diagonalem A D, motibus per latera A B, A C, disjunctis non est æqualis, sed tantùm æquipollet. Nam cum eadem sit corporis massa, motûs quantitates per diagonalem & per latera sunt ut velocitates uniformes (6) seu ut spatia A D, A B, A C, eodem tempore percursa (5); est autem sum-

ſumma laterum A B + A C, major diagonali A D; ergo ſumma quantitatum motûs per latera, major eſt quantitate motûs per diagonalem. Verùm quia idem eſt motus, ſive mobile per diagonalem A D, celeritate æquabili ut A D, ex vi unicâ impreſsâ feratur, ſive viribus conjunctis per latera A B, A C, impellatur, liquet motum per diagonalem, motibus per latera disjunctis æquivalere.

Si mobile à pluribus quàm duabus viribus in loco A, ſimul impreſſis impellatur, inveniri ſemper poterit unica directio & velocitas ex omnibus ſeparatis compoſita ipſiſque æquipollens, quæ media directio dicitur; duarum enim virium media directio reperiatur (per coroll. 1. Newt.); deinde diagonalis illa tanquam ſpatium vi unicâ percurſum conſideretur, & cum ſpatio tertiâ vi deſcripto pari ratione componatur, ſicque vires omnes ad unicam reducentur.

37. Motus omnis in quotcumque alios laterales ipſi æquipollentes reſolvi poteſt; nam motus per A D, æquabilis, facto triangulo quocumque A B D, reſolvitur in motus per latera A B, A C, motui per diagonalem A D, æquipollentes (35). Eâdem ratione motus per A B, in duos quoſcumque alios, deſcripto circâ latus A B, triangulo reſolvitur, idemque de motu per A C, & de aliis quibuſcumque motibus dici debet.

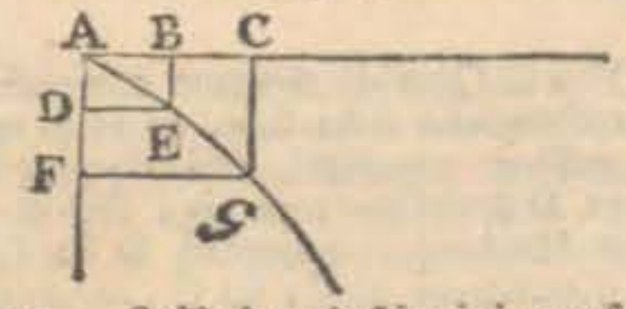
38. Si corpus aliquod A, duplici vi per A C, & per A F, ità urgeatur, ut motus in eâdem ratione acceleretur vel retardetur, ſive quod idem eſt, ſi ſpatia A B, & A D, A C, & A F, iiſdem temporibus percurſa, ſemper ſint in conſtanti ratione, motu compoſito parallelogrammi diagonalem A G, deſcribet....




Dem... ductis D E ad A B, & B E ad A D, parallelis, corpus conjunctis viribus motum, reperiri debet ſimul in utrâque lineâ D E, & E B, (34) adeóque in earum interſectione E; ſimiliter ductis F G, ad A C, & C G, ad A F, parallelis, patet corpus motu compoſito eodem tempore reperiri in G, quo motibus disjunctis attingeret puncta C, & F; cum igitur (ex hyp.) ſit A D, ad A B, ſeu D E, ut A F, ad A C, ſeu F G, recta A E, producta tranſit per punctum G; ergò corpus per diagonalem rectam A G, incedet. Q. e. D.

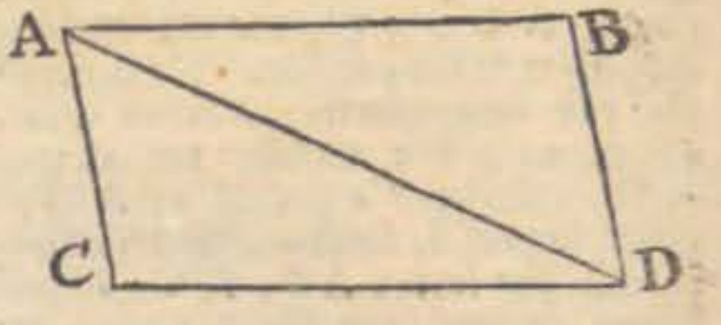
39. Si ſpatia ſecundùm unam directionem percurſa non ſint ſemper in eâdem ratione cum ſpatiis juxtà alteram directionem iiſdem temporibus deſcriptis, mobile per eandem diagonalem rectam progredi non poteſt; ſi autem ratio ſpatiorum viribus ſeparatis iiſdem temporibus deſcriptorum continuò mutetur, mobile per curvam incedet, ut ſi motus uniformis cum motu continuè accelerato vel retardato componatur.

40. Corpus grave ſecundùm quamlibet directionem A C, quæ non ſit ad horizontem normalis projectum, in terræ viciniis, ſublatâ medii reſiſtentiâ, parabolam A E G, deſcribit, cujus diameter A F, eſt ad horizontem perpendicularis, & tangens A C, directio projectionis....




Dem... Solâ vi projectionis impreſsâ, grave uniformiter moveatur per rectam A C, (per leg. 1.), ſolâ vi gravitatis motu uniformiter accelerato per rectam A F, aut ipſi parallelam deſcendit (26); quoniam verò motus per A C, æquabilis eſt, ſpatia A B, A C, ſunt ut tempora quibus percurruntur (5). Spatia A D, A F, motu uniformiter accelerato iiſdem temporibus deſcripta ſunt ut quadrata temporum quibus deſcribuntur (27), ſeu ut quadrata rectarum A B, A C, aut ipſis parallelarum & æqualium D E, F G; cum igitur grave motu compoſito latum in fine temporum A B, A C, reperiatur in punctis E, & G, (34) evidens eſt quadrata ordinatarum D E, F G, curvæ A E G, (39) eſſe inter ſe in ratione abſciſſarum A D, A F, adeóque curvam A E G, eſſe parabolam, (per 20^am. lib. 1. conic. Apollon.) cujus diameter A F, & tangens A C ordinatis D E, F G (32. prop. lib. 1. conic. Apollon.) Q. e. D.

AXIOMATA SIVE argumento in fine temporis ejuſdem reperietur alicubi in lineâ *C D*, & idcirco in utriuſque lineæ concurſu *D* reperiri neceſſe eſt. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per Legem 1.



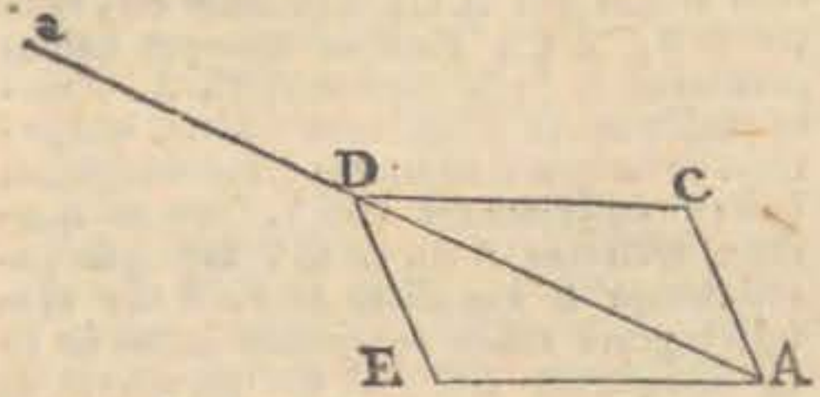

## COROLLARIUM II.

*Et hinc patet* (d) *compoſitio vis directæ* AD *ex viribus quibuſvis obliquis* AC *&* CD, *& viciſſim reſolutio vis cujuſvis directæ* AD *in obliquas quaſcunque* AC *&* CD. *Quæ quidem compoſitio & reſolutio abundè confirmatur ex Mechanicâ.*

Ut ſi de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *O M*, *O N* filis *M A*, *N P* ſuſtineant pondera *A* & *P*, &

quæ

(d) 41. Quæ de motuum compoſitione & reſolutione dicta ſunt, ad vires mortuas poſſunt transferri. Si corpus ſeu punctum D, viribus mortuis, ſeu ut loquuntur Mechanici, potentiis D E, D C, juxta directiones D E, D C, agentibus trahatur vel impellatur & completo parallelogrammo E C, ducatur diagonalis D A, vires D C, D E, vi mediæ, ut D A, juxtà directionem D A, agenti æquivalent. . . .



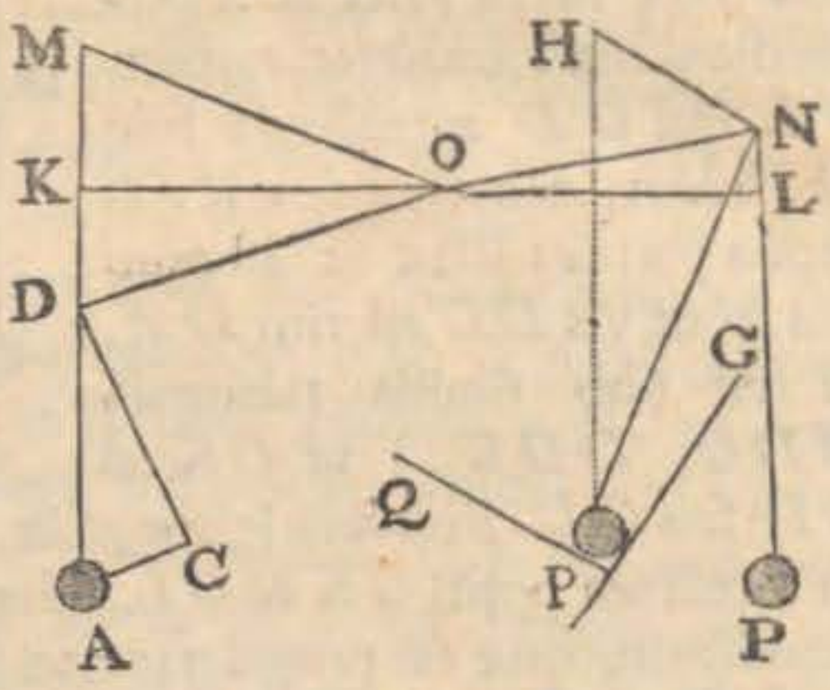

Dem . . . vis ſeparata D C, conſiderari poteſt tanquam vis acceleratrix quæ in corpus D, juxtà directionem D C, continuò & uniformiter agit, & vis illa eſt ut celeritas quam dato tempore generat aut generare poteſt (13), adeòque illa celeritas per rectam D C, exponetur, cum ea recta ſit ut vis ipſa D C, (per hyp.) ſimili argumento liquet rectam E D, eſſe ut celeritatem vi agente per D E eodem tempore dato generandam. Cum igitur celeritates D E, D C, in mediam, D A, æquipollentem componantur (per coroll. 2. Newt.) manifeſtum eſt vires quoque laterales D E, D C, in mediam æquipollentem D A, (35) componi, atque adeò vim ut D A, in laterales D E, D C, æquivalentes reſolvi poſſe. Quare (35. 36) vires quotcumque laterales in unam æquivalentem componi poſſunt, & vis quælibet in alias quaſcumque ipſi ſimul æquipollentes poteſt reſolvi.

42. Producatur A D, ad a, ità ut D A, & D a, æquales ſint & vis, ut D a, juxtà directionem D A, urgeat punctum D, punctum illud D, duabus viribus D A, æqualibus & contrariis ſollicitatum, immotum permanebit; ſed vis media D A, æquivalet viribus ſeparatis D E, D C, (41), ergò ſi punctum D, ſublatâ vi, D A, tribus viribus D a, D E, D C, urgeatur, non movebitur, ſed erit inter vires æquilibrium.

43. Si punctum D, tribus viribus D a, D E, D C, in æquilibrio conſtitutis urgeatur, com-

quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum *O* agatur recta *K O L* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroque *O* & intervallorum *O K*, *O L* majore *O L* describatur circulus occurrens filo *M A* in *D*: & actæ rectæ *O D* parallela sit *A C*, & perpendicularis *D C*. (e) Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta, *K*, *L*, *D* affixa sint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac si suspenderentur à punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis (f) autem *A* exponatur vis tota per lineam *A D*, & hæc resolvetur in vires *A C*, *C D*, quarum *A C* trahendo radium *O D* directè à centro

LEGES MOTUS.




completo parallelogrammo E C, recta a D, producta, per angulum A, transit, estque D A = D a, parallelogrammi diagonalis, & vires sunt ut latera trianguli D A C, nempè ut D A, A C, seu E D, D C.... Dem.... Ductâ diagonali D A, parallelogrammi E C, vis media ut D A, æquipollet viribus per latera D E, D C, (41); si virium directiones D A, D a, non eandem efficiant lineam rectam, aliquem angulum in D, continent, ac proindè punctum D, à viribus sibi invicem directè non oppositis impulsum moveri debet (contrà hyp.); si verò potentiæ illæ D A, D a, non sint æquales, major minorem superat, motusque oritur (etiam contrà hyp.). Ergò recta A D, producta, per angulum A, transit, estque D A = D a, parallelogrammi diagonalis & quia A C = D E, vires sunt ut latera trianguli D A C. Q. e. D.

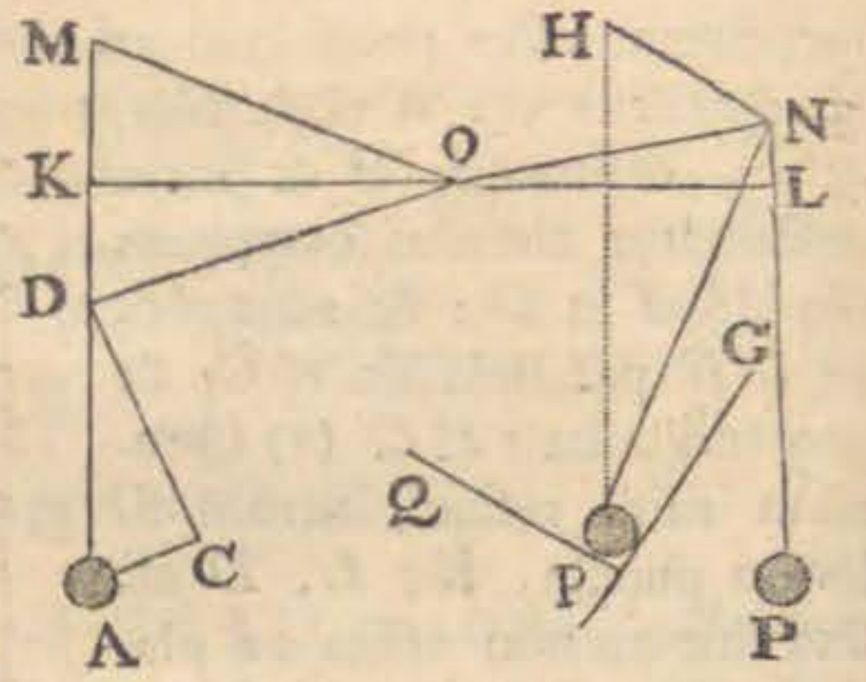
44. Cùm latera trianguli sint ut sinus angulorum oppositorum, erit vis D a, seu D A, ad vim D C, ut sinus anguli A C D, seu complementi illius E D C, ad sinum anguli D A C, seu A D E, seu complementi illius E D a; similiter demonstratur esse a D, ad E D, ut sinus anguli E D C, ad sinum anguli a D C. Si igitur tres potentiæ in æquilibrio circà punctum quodvis D, consistentes, dicantur ut libet 1ª, 2ª, 3ª, erit 1ª, ad 2ªm, ut sinus anguli quem 2ª & 3ª potentiarum directiones comprehendunt, ad sinum anguli quem 1ª & 3ª directiones formant. Omnes illas de virium & motuum compositione & resolutione demonstrationes accuratissimis confirmavit experimentis Clariss. Gravesandius in Elementis Physices.

(e) 45. Planum rotæ gravitatis expers & circà centrum fixum O, (fig. Newt.), mobile supponitur, fila quoque gravitate destituta finguntur; cumque eadem sit in variis à terrâ distantiis corporis gravitas (26) eademque proindè fili longioris vel brevioris quo pondus idem suspenditur tensio, evidens est planum rotæ iisdem semper viribus trahi, sive fila punctis M, & N, sive aliis quibusvis K, D, aut L, in filis M A, N P, sumptis affixa sint. Pondera igitur à punctis M, & N, suspensa idem valebunt ac si suspenderentur à punctis K & L, vel D & L.

(f) 46. Ponderis A, quo punctum D, trahitur, vis tota D A, resolvi potest (41) in vires laterales & æquipollentes

AXIOMATA, SIVE

tro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera $DC$, trahendo radium $DO$ perpendiculariter, idem valet ac si perpendiculariter traheret radium $OL$ ipsi $OD$ æqualem; hoc est, idem atque pondus $P$, si modo pondus illud sit ad pondus $A$ ut vis $DC$ ad vim $DA$, id est (ob similia triangula $ADC$, $DOK$,) ut $OK$ ad $OD$ seu $OL$. Pondera igitur $A$ & $P$, quæ sunt reciprocè ut radii in directum positi $OK$ & $OL$, idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio: quæ est proprietas notissima (g) Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major. Quod




AC, & DC, ità ut punctum D, urgeatur simul vi ut DC, secundùm directionem DC, & vi ut CA, secundùm directionem rectæ OD, productæ; quia verò centrum O, rotæ fixum supponitur, vis ut AC, trahendo punctum O, juxtà directionem radii OD, nullum motum creat, nihilque valet ad rotam circà centrum O, movendam; vis autem altera DC, trahendo radium DO perpendiculariter, idem valet ad rotam circà centrum O, volvendam, ac si perpendiculariter traheret alterum radium OL, ipsi OD, æqualem; vires enim æquales æqualibus radiis pariter applicatæ eodem modo rotam movere debent; si itaque pondus aliquod P, è puncto L, suspensum sit vi DC, æquale, seu, quod idem est, si pondus P, sit ad pondus A, ut recta DC, ad rectam DA, quæ exponit vim absolutam ponderis A, rota his duabus viribus A, & P, in partes contrarias æqualiter tracta non movebitur. Verùm in triangulis ADC, DOK, anguli DAC, & KDO, ob parallelas AC, DO, & præterea anguli ad K & C recti, æquales sunt, adeòque triangula illa sunt similia & DC: DA = OK: DO, seu OL; pondera igitur A, & P, quæ sunt reciproce ut radii in directum positi OK, & OL, seu quæ sunt reciprocè ut perpendiculares OK, & OL, ex centro O, in eorum directiones ductæ idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio.

(g) 47. Sit KL, recta inflexilis & gravitatis expers circà punctum fixum seu fulcrum O, volubilis, hæc vectem & libram exhibet, atque etiam peritrochium circa xaem volubile potest exponere, seu rotam cujus est radius longior OL, & centrum O, circà quod rota & cylindrus cujus est radius brevior OK, revolvi possunt; ex demonstratis autem (46) patet esse in his tribus machinis æquilibrium, cum potentiæ seu pondera A, & P, sunt inter se reciprocè, ut rectæ à centro O, ad eorum directiones normaliter ductæ. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tantò major; nam, manente distantiâ OL, vis ponderis P, ad movendam rotam est ut pondus P absolutum, & manente pondere P, crescit vis illius ad movendam rotam in ratione distantiæ directionis ponderis à centro; duplicatâ enim vel triplicatâ illâ distantiâ, pondus idem P, est in æquilibrio cum duplo vel triplo pondere, cujus distantia directionis à centro est subdupla vel subtripla (46). Ergò in his tribus machinis vis potentiæ seu pon-

Quòd ſi pondus $p$ ponderi $P$ æquale partim ſuſpendatur filo $Np$, partim incumbat plano obliquo $pG$: agantur $pH$, $NH$, prior horizonti, poſterior plano $pG$ perpendicularis: & ſi vis ponderis $p$ deorſum tendens, exponatur per lineam $pH$, reſolvi poteſt hæc in vires $pN$, $HN$. Si filo $pN$ perpendiculare eſſet planum aliquod $pQ$, ſecans planum alterum $pG$ in linea ad horizontem parallela; & pondus $p$ his planis $pQ$, $pG$ ſolummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus $pN$, $HN$ perpendiculariter, nimirum planum $pQ$ vi $pN$, & planum $pG$ vi $HN$. Ideoque ſi tollatur planum $pQ$, ut pondus tendat filum; quoniam filum ſuſtinendo pondus jam vicem præſtat plani ſublati, tendetur illud eâdem vi $pN$, quâ planum antea urgebatur. Unde tenſio fili hujus obliqui erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis $PN$, ut $pN$ ad $pH$. (h) Ideoque ſi pondus $p$ ſit ad pondus $A$ in ratione quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum diſtantiarum filorum ſuorum $pN$, $AM$ à centro rotæ, & ratione directâ $pH$ ad $pN$; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideò ſe mutuò ſuſtinebunt, ut quilibet experiri poteſt. LEGES MOTUS.

Pondus autem $p$, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fiſſi facies internas: & inde vires cunei & mallei innoteſcunt: utpote cum vis quâ pondus $p$ urget planum $pQ$ ſit ad vim, quâ idem vel gravitate ſuâ vel ictu mallei impellitur ſecundum lineam $pH$ in plana, ut $pN$ ad $pH$; atque ad vim, quâ urget planum alterum $pG$, ut $pN$ ad $NH$. Sed & vis Cochleæ per ſimilem virium diviſio-

ponderis ad movendam machinam circâ centrum motûs eſt ſemper in ratione compoſitâ ponderis abſoluti ſeu intenſitatis potentiæ, & diſtantiæ directionis illius à centro motûs. Vim autem illam ponderis aut potentiæ ad machinam movendam momentum potentiæ aut ponderis vocant Mechanici.

(h) 48. Vis quâ pondus p, tendit filum obliquum pN, dicatur $\pi$, & normalis ex centro O, in filum pN, ducta dicatur n, & erit ex demonſtratis $\pi$: P, ſeu p, = pN: pH. Præterea ſi vis $\pi$, in æquilibrio cum pondere A, conſiſtat, erit etiam (47) A: $\pi$ = n: KO; undè per compoſitionem rationum erit A × $\pi$: p × $\pi$ = n × pN: KO × pH, ſeu A: p = n × pN: KO × pH; & p: A = KO × pH: n × pN; ideóque ſi pondus p, ſit ad pondus A, in ratione quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum diſtantiarum, n, & KO, filorum ſuorum pN, AM à centro rotæ, & ratione directâ pH, ad pN, erit æquilibrium.

AXIOMATA, SIVE

visionem colligitur; quippe quæ cuneus est à vecte impulsus. (i) Usus igitur Corollarii hujus latissimè patet, & latè patendo veritatem ejus evincit; cùm pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diversimode demonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tensis & ponderibus directè vel obliquè ascendentibus, cæterisque potentiis Mechanicis componi solent, ut & vires Tendinum ad animalium ossa movenda.

## COROLLARIUM III.

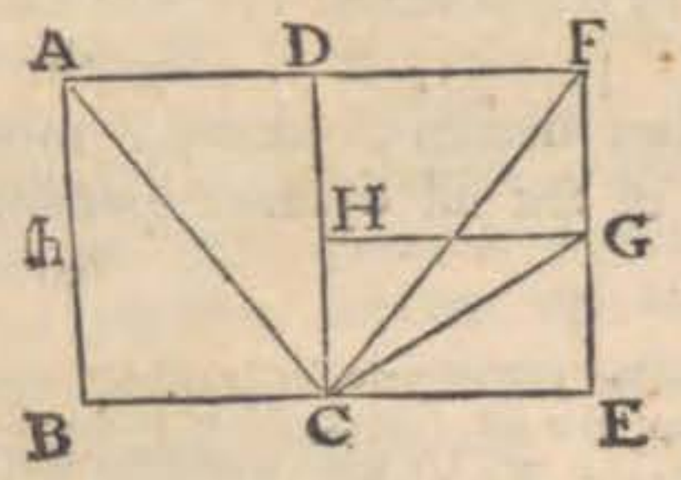
*Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.*

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per Legem III, adeoque per Legem II æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ priùs. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem. (k) Ut

(i) 49. Cunei & cochleæ vires totamque ferè mechanicam hisce theorematibus demonstravit Clarisl. Varignonius. Quam latè pateat eorum usus manifestum est ex præclaro opere Joannis Alphonsi Borelli de motibus animalium, & ex variis, inter quas Bernouillianæ eminent, de musculorum motu dissertationibus; sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti; in proximo scholio machinarum vires generali mechanicæ principio determinare satis erit; ut autem ea quæ nobis illustranda occurrent in meliori lumine collocentur; generales motuum leges, ne omissis quidem definitionibus, præmittendas esse judicavimus.

(k) 50. Corpus perfectè elasticum dicitur cujus partes ex ictu flectuntur, seu introcedunt, & deindè eâdem vi quâ flexæ sunt, sese in priorem statum contrariâ directione restituunt. Corpus imperfectè elasticum est cujus partes ex ictu flexæ in priorem quidem statum redire nituntur, sed minori vi eâ quâ flexæ sunt. Corpus non elasticum vocatur cujus partes ictu percussæ nullâ vi sese restituere conantur. Corpus unum in alterum directè impingere dicitur, si secundùm rectam ad contactum perpendicularem impingat; obliquè verò si secundùm rectam ad contactum obliquam. Cùm corpora in se mutuò non agant, nisi per massam & velocitatem, tanquam axioma ex legibus 2ª & 3ª notissimum innumerisque confirmatum experimentis supponimus quantitates motûs æquales & contrarias in conflictu sibi mutuò æquipollere.

51. Si




51. Si globus A, in planum immobile BE, incurrat, quæritur illius motus post impactum.... 1°. Globus ille in planum directe impingat per AB; si globus & planum omni elasticitate destituantur, globi motus post impactum in B, omninò extinguitur, cùm nulla vis globum repellat; si autem planum & globus perfecto elatere donentur, globus per BA, post impactum resiliet eâdem quâ advenit celeritate BA; nam in corporibus perfecte elasticis (50) vis restitutiva æqualis est vi compressivæ, unde si imperfecta fuerit vis elastica, globus minori velocitate Bh, resiliet.... 2°. Globus A, in planum BE, velocitate & directione AC, oblique impingat, illius motus resolvatur in motus laterales quorum unus AD, sit plano BE, parallelus, alter autem AB, eidem plano perpendicularis (37), globus A, motu secundùm AD, ad planum non accedit, sed tantùm motu secundùm perpendicularem AB, vel DC; velocitas globi respectu plani BE, est tantùm ut perpendicularis AB; at verò si AC, foret perpendicularis ad planum BE, velocitas quâ ad planum accederet, foret ut AC; ergò cùm impetus ejusdem corporis in planum, sint ut velocitates quibus ad planum accedit, ictus obliquus est ad perpendicularem, ut AB, ad AC; seu sumptâ AC, tanquam radio, ut sinus anguli incidentiæ ACB, ad sinum totum..... 3°. Si nulla sit in corporibus A, & BE, elasticitas, globus A, per AC, incurrens movebitur per CE, celeritate ut CE = AD; nam motus perpendicularis AB, vel DC, ex demonstratis, extinguitur, remanetque tantùm motus CE, cui planum ut potè parallelum non opponitur; si verò perfectum fuerit elaterium, resiliet globus per CF, celeritate CF = AC, & angulus resexionis FCE, æqualis erit angulo incidentiæ ACB; nam per vim restitutivam elateris resilit per normalem CD, celeritate CD, seu BA, & præterea motu ad planum parallelo progreditur per CE, celeritate ut CE = AD; ergò motu composito (coroll. 1. Newt.), percurret diagonalem CF; & cum in parallelogrammis DB, DE, omnia sint paria, erit FC = AC, & angulus FCE = ACB. Tandem si corpora imperfecte fuerint elastica, manebit quidem post impactum velocitas AD, seu CE, plano parallela, sed velocitas perpendicularis CH, minor erit velocitate DC, seu AB, & completo parallelogrammo HE, globus per diagonalem CG, resiliet. LEGES MOTUS.

52. Si globi non elastici in se mutuò directè impingant, quæritur illorum motus post conflictum.... 1°. Globi in eandem plagam ferantur, subsequens fugientem impellet, donec ambo simul tanquam unum corpus eâdem directione ac velocitate incedant, eritque (coroll. 3. Newt.), summa quantitatum motûs eadem antè & post conflictum; communis ergò post conflictum velocitas invenitur, summâ quantitatum motûs antè conflictum per summam massarum divisâ (6).... 2°. Globi contrariis directionibus sibi mutuò occurrant, si æqualis in utroque fuerit motûs quantitas, post conflictum ambo quiescunt (50). Si verò inæquales sint motûs quantitates, per conflictum extinguitur in singulis quantitas motûs globi debiliùs moti (50), & ambo simul post impactum communi velocitate ac directione quasi unicum corpus progrediuntur, estque quantitas motûs in utroque simul residua, differentiæ quantitatum motûs antè conflictum æqualis (coroll. 3. Newt.). Hinc communis post conflictum velocitas habetur, si differentia illa quantitatum motûs ante conflictum ad summam massarum applicetur (6). In hoc utroque casu communis post conflictum velocitas in globi cujusque massam ducta, est illius quantitas motûs post impactum (6), ex quâ & quantitate motûs ejusdem globi ante conflictum, per subtractionem invenitur quantitas motûs in conflictu acquisita vel amissa; quia verò in omni globorum non elasticorum conflictu directo, vel motus omnis cessat, vel globi post impactum communi celeritate feruntur, manifestum est

AXIOMATA, SIVE

(1) Ut ſi corpus ſphæricum *A* ſit triplo majus corpore ſphærico *B*, habeatque duas velocitatis partes; & *B* ſequatur in eâdem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipſius *A* ſit ad motum ipſius *B*, ut ſex ad decem: ponantur motus

eſt reſpectivam globorum velocitatem per conflictum extingui.

53. Globi elaſtici in ſe invicem directè incurrant, quæritur eorum motus poſt conflictum . . . . . 1°. Mutatio quæ ex mutuo corporum perfectè elaſticorum conflictu in utriúſque corporis motu naſcitur, dupla eſt mutationis quam ictus idem in iiſdem corporibus omni elaterio deſtitutis produceret,) in corporibus imperfectè tantùm elaſticis mutatio major eſt quàm in non elaſticis, ſed duplâ minor.) Nam partes in utroque corpore æquali vi ex ictu comprimuntur (Leg. 3.). Si corpora omni elatere deſtituerentur, poſt conflictum vel quieſcerent, vel in eandem plagam velocitate communi progrederentur (52) nec partes flexæ reſtituerentur; ſi autem accedat vis elaſtica partes flexæ ſeſe reſtituent vi & directione (50) quæ ſemper contraria erit vi compreſſivæ, & in corporibus perfectè elaſticis huic æqualis, in aliis minor; actio igitur corporum in ſe mutuò ex elateris reſtitutione orta, actioni ex impactu naſcenti æqualis eſt in corporibus perfectè elaſticis, minor in aliis, ex quibus & Lege 2ª conſtat quod erat primò propoſitum . . . . 2°. Corpora perfectè elaſtica eâdem velocitate reſpectivâ poſt conflictum recedunt, quâ antè conflictum ad ſe invicem accedebant; in corporibus verò imperfectè tantùm elaſticis, velocitas reſpectiva quâ poſt ictum diſcedunt eſt ad velocitatem quâ antè ictum ad ſe mutuò accedebant, in ratione vis reſtitutivæ ad vim compreſſivam; nam cum in conflictu corporum non elaſticorum omnis velocitas reſpectiva, quâ ad ſe mutuò accedebant, deſtruatur ex ictu (52), ſitque vis reſtituva elateris perfecti vi compreſſivæ æqualis & contraria, manifeſtum eſt in corporum perfectè elaſticorum conflictu, velocitatem reſpectivam ex ſolo impactu amiſſam, contrariâ directione reſtitui; in corporibus verò imperfectè elaſticis eam tantùm reſtitui velocitatis reſpectivæ partem quæ eſt vi reſtitutivæ proportionalis . . . . 3°. Ut igitur corporum perfectè elaſticorum motus poſt conflictum directum inveniatur, conſiderentur corpora tanquam omni elatere deſtituta & in eâ hypotheſi, quæratur (52) quantitas motûs ex conflictu in unoquoque corpore acquiſita vel amiſſa ſecundùm eam directionem quâ corpus antè conflictum movebatur; eadem motûs quantitas duplicata, erit quantitas motûs in corpore perfectè elaſtico acquiſita vel amiſſa, quæ proindè quantitati motûs corporis ante conflictum addita vel dempta, dat quantitatem motûs illius corporis poſt conflictum . . . . . 4°. Corporum imperfectè elaſticorum motus poſt conflictum invenitur, ſi data ſit ratio vis reſtitutivæ elateris ad vim compreſſivam, ſive, quod ex demonſtratis idem eſt, ratio velocitatis reſpectivæ poſt impactum ad velocitatem reſpectivam antè impactum, quam rationem in iiſdem corporibus conſtantem eſſe experimentis probavit Newtonus, niſi tamen partes corporum ex congreſſu lædantur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiantur. Corpora omni elaterio deſtituta ſupponantur, & in eâ hypotheſi quæratur quantitas motûs in unoquoque corpore ex ictu acquiſita vel amiſſa, cui motûs quantitati ſi addatur quantitas motûs vi elaſticæ proportionalis, ſumma erit vera quantitas motûs ex conflictu corporum imperfectè elaſticorum in unoquoque acquiſita vel amiſſa, ex quâ datâ & ex quantitate motûs corporis cujuſque antè conflictum, reperitur, ut ſuprà, omnis quantitas motûs illius poſt conflictum. Exemplo lux affulgebit.

(1) 54. Globus A, ſit triplo major globo B, habeatque duos velocitatis gradus, illius motus quantitas (6) erit ut $3 \times 2$, ſeu 6. B, ſequatur in eâdem rectâ cum velocitatis gradibus, 10, eritque quantitas motûs globi B, $1 \times 10$, ſeu, 10, . . . . 1°. Si globi elaſtici non

ſunt,

motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem, adeoque perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus septem vel sex vel quinque, existente semper summâ partium sexdecim ut prius. Si corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septemdecim vel octodecim, corpus *B*, amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel cum unâ parte progredietur amissis partibus novem, vel quiesceet amisso motu suo progressivo partium decem, vel cum unâ parte regredietur amisso motu suo & (ut ita dicam) unâ parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium $15 + 1$ vel $16 + 0$, & differentiæ contrariorum $17 - 1$ & $18 - 2$ semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum & reflexionem. (m) Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad mo-

sunt, velocitas communis post conflictum (52) erit 16: 4, seu 4; quare quantitas motûs ipsius A, post conflictum erit $3 \times 4$, seu 12. B, verò quantitas motûs erit $1 \times 4$, seu 4. Itaque quantitas motûs à corpore B, amissa est, 6, & corpori A, acquisita est etiam, 6 . . . . . 2°. Si globi sunt perfectè elastici, quantitates illæ duplicari debent (53), erunt igitur 12 & 12. Si quantitati motûs, 6, globi A, antè conflictum jungas, 12, summa erit, 18, quantitas motûs illius post conflictum; si verò ex quantitate motûs, 10, ipsius B, antè conflictum subduxeris, 12, quantitatem motûs per conflictum amissam, residuum est $-2$, quod signum $-$, ut notum est, contrariam positionem significat, seu corpus B, post ictum in contrariam plagam resilit cum hâc motûs quantitate 2 . . . .

3°. Si globi A & B, sint imperfectè elastici, sitque v. gr., eorum vis restitutiva subdupla vis compressivæ, erit vis compressiva ad vim restitutivam (seu 2, ad 1) ut quantitas motûs, 6, ex ictu acquisita vel amissa ad quantitatem motûs, 3, solâ vi restitutivâ acquisitam vel amissam; quare hæc quantitas, 3, addatur quantitati, 6, ex ictu acquisitæ in corpore A, & amissæ in corpore B, summa, 9, erit quantitas motûs integra tam ex ictu quàm ex elatere acquisita vel amissa; unde quantitas motûs globi A, post conflictum est, $6 + 9$, seu, 15, globi B, $10 - 9$, seu 1, quarum summa est, 16.

(m) 55. Cognitis quantitatibus motuum quibuscum corpora post conflictum pergent, invenietur cujusque velocitas dividendo quantitatem motûs cujusque corpo-

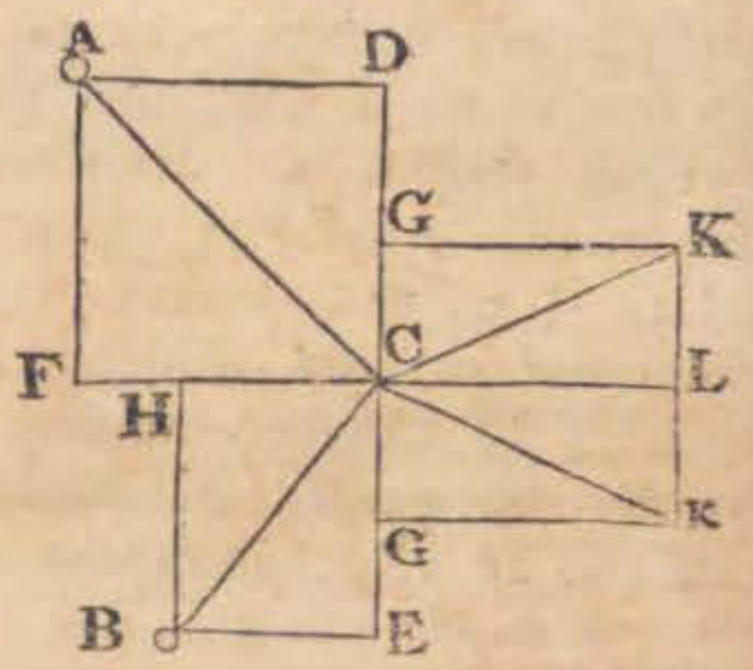
AXIOMATA, SIVE

motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex ante reflexionem & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motûs partes sex ante reflexionem ad motûs partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

(n) Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo obliquè, & requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani à quo cor-

ris per illius massam (6), aut etiam quia ejusdem corporis diversæ quantitates motûs sunt ut velocitates (6), dicendo, ut quantitas motûs antè conflictum ad quantitatem motûs post conflictum, ità velocitas corporis antè conflictum ad illius velocitatem post conflictum.

(n) 56. Si corpora quæcumque A & B, diversis in rectis A C, B C, moventia, incidant in se mutuò obliquè in C, & requirantur eorum motus post impactum. Cognoscendus est situs plani F L, à quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursûs C; deindè corporis utriusque motus A C, B C, (per coroll. 2.) distinguendus est in duos A D, & A F, B E & B H, unum nempè A F seu D C, & B H seu E C, huic plano F L perpendicularem, alterum A D, B E, eidem parallelum. Quia verò corpora secundùm parallelas A D, B E, ad se mutuò non accedunt, sed tantùm secundùm perpendiculares D C, E C, in se invicem agunt, motus paralleli A D, B E, per impactum non mutantur, adeòque retinendi sunt iidem post conflictum qui erant ante conflictum; & motibus perpendicularibus D C, E C, mutationes æquales in partes contrarias C D, C E, tribuendæ sunt sic ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem antè & post conflictum (coroll. 3. Newt.) Ut itaque corporum A & B, in se mutuò obliquè incidentium motus post ictum inveniantur, mota duntaxat supponantur per lineas D C & E C, velocitatibus D C & E C, atque

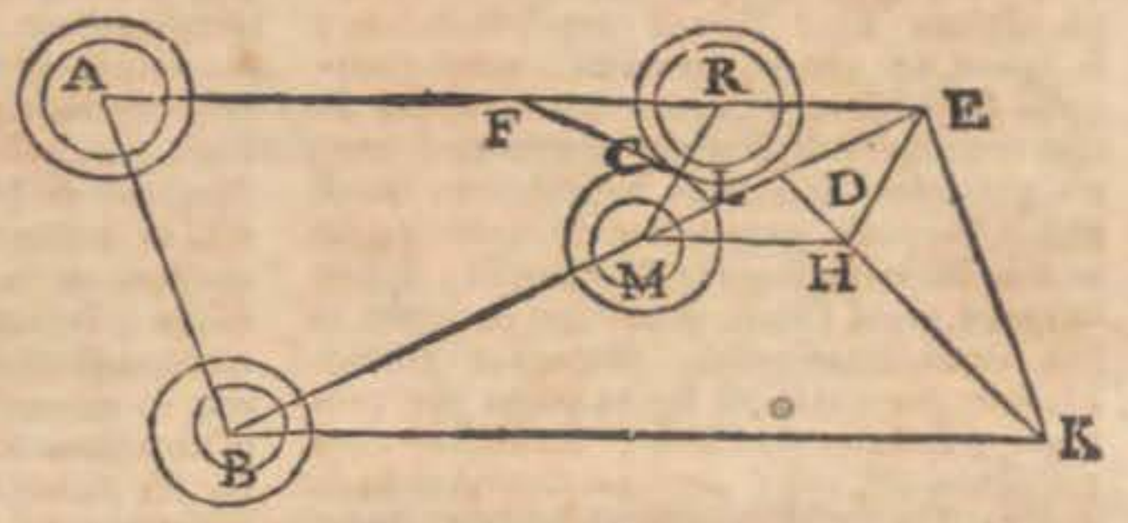



in eâ hypothesi quærantur (52, si fuerint elastica, 53, si non fuerint elastica) eorum velocitas post conflictum in lineâ C D, vel C E, ex quâ datâ, & ex velocitate parallelâ plano F L, etiam datâ, compositus corporis motus (per coroll. 1. Newt.) facilè reperietur. Sit exempli causâ C G, velocitas corporis A, post impactum per D E, in C; sumptâ C I, æquali & parallelâ velocitati secundùm A D, quæ eadem post conflictum remanet, compleatur parallelogrammum G L & A, movebitur per illius diagonalem C K, velocitate ut C K, (per coroll. 1. Newt.) Si corpora angulosa sibi per angulos occurrant, orientur motus circulares, dum pars corporis ex vi insitâ in unam plagam movetur, altera verò ex conflictu fertur in alteram plagam circà corporis centrum.

57. Da-

corpora concurrentia tanguntur in puncto concursûs: dein corporis utriusque motus (per Corol. 11.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

## COR.




57. Datis duorum globorum A & B, directionibus, celeritatibus & diametris, unà cum eorum situ antè conflictum, facile est determinare punctum concursûs C, & situm plani F L, utrumque globum in puncto C, contingentis. Globus A, feratur per lineam A E, & celeritate ut A E, globus B verò secundùm directionem B E, celeritate ut B D, moveatur. Junctis A & B globorum centris per lineam A B, compleatur parallelogrammum A B K E. Jungantur puncta D & K, & recta D K, ex centro E, intersecetur arcu qui describitur radio E H, summæ semidiametrorum globorum A & B, æquali. Ex puncto intersectionis H, ducatur recta H M, ipsi E A parallela, erunt M & R, loca in quibus globorum centra constituentur, ubi secum invicem concurrent, & sumptâ lineâ R C, æquali radio globi A, recta F L, ad R C perpendicularis, in puncto C, situm plani designabit .... Dem ... Quoniam recta H M, est lineæ B K parallela (per const.) erit D M: D B = M H: B K = R E: E A, ob R E = M H, & E A = B K; ergò dividendo B M: B D = A R: A E, & alternando B M: A R = B D: A E. Cum igitur sit B M ad A R, ut celeritas globi B, ad celeritatem globi A; globus A in R, & B in M, eodem tempore pervenient (6); Cumque sit M R = E H, globi in puncto C, se mutuò contingent, & planum E L, ad radium R C, in puncto C, perpendiculariter ductum utrumque globum continget. Q. e. D.

AXIOMATA, SIVE

## COROLLARIUM IV.

*Commune gravitatis Centrum* (°), *corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter ſe non mutat ſtatum ſuum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in ſe mutuo agentium (excluſis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.*

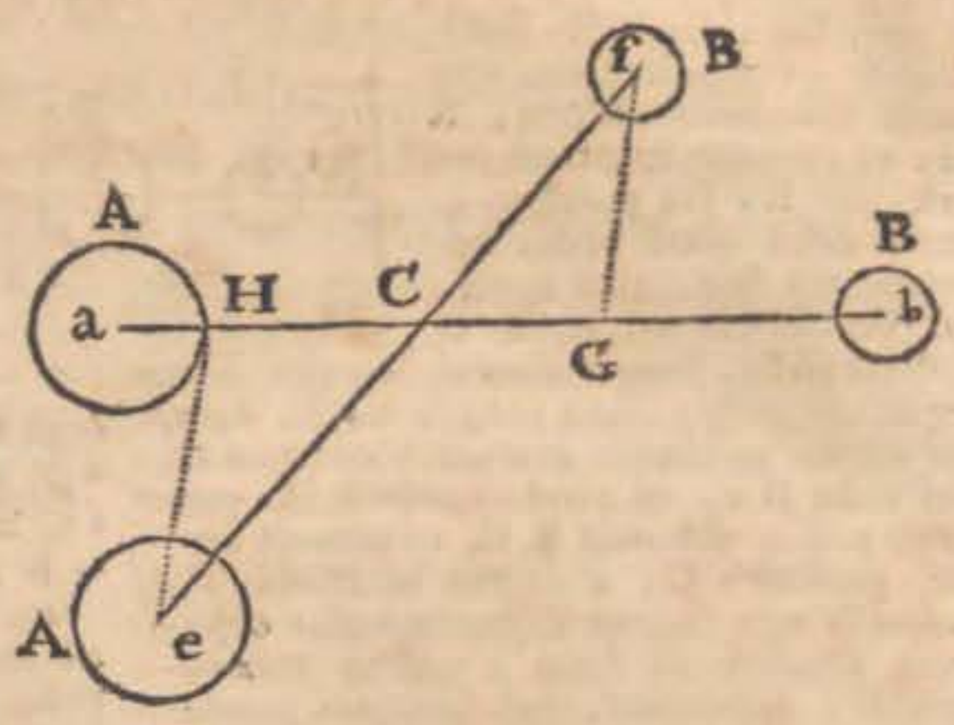
Nam

(°) 58. Centrum gravitatis corporis cujuſque, eſt punctum intrà vel extrà corpus poſitum, circà quod undique partes in æquilibrio conſiſtunt, ità ut ſi per hoc punctum ducatur planum figuram utcumque ſecans, corporis ſegmenta quæ utrinque ſunt circà planum illud librata æquiponderent; ſi igitur ex centro gravitatis corpus aliquod ſuſpendatur, datum quemcumque ſitum retinebit, & ſemper quieſcet, ſi centri gravitatis deſcenſus impediatur; undè totam corporis gravitatem in centro gravitatis locatam fingunt Mechanici, & pro corpore gravi ſolum gravitatis centrum in ſuis demonſtrationibus ſurrogare ſolent. Planum gravitatis eſt figura plana per centrum gravitatis tranſiens; Diameter verò gravitatis eſt recta per centrum gravitatis ducta; Quare planorum gravitatis, communis interſectio diametrum gravitatis efficit, & in diametrorum gravitatis concurſu centrum gravitatis poſitum eſt. Centrum magnitudinis vocatur punctum illud, per quod diviſa magnitudo relinquit duas partes utrinque æquales; ut in circulo & ellipſi, ductis utcumque per centrum lineis rectis, lineæ illæ totaque figura in partes æquales dividuntur; ac proindè ſi gravia homogenea, id eſt, quorum gravitates ſunt voluminibus proportionales, ſecundum longitudinem in partes ſimiles & æquales ſecari poſſint, centrum gravitatis à centro magnitudinis non differt.

59. Ex hiſce definitionibus facilè colligitur, omnium circulorum, ellipſium, ſphærarum & figurarum quarumvis regularium, centrum gravitatis idem eſſe cum centro magnitudinis, modò tamen gravia ſupponantur homogenea. In figuris autem irregularibus, communi duorum gravitatis diametrorum interſectione determinari poteſt centrum gravitatis (58). Sic in quolibet parallelogrammo, centrum illud in duarum diagonalium concurſu poſitum eſt; in triangulo reperitur in interſectione duarum rectarum quæ à duobus angulis ductæ, latera angulis illis oppoſita, totumque proindè triangulum bifariam, adeoque in partes æquiponderantes ſecant, in priſmatibus & cylindris, centrum gravitatis eſt punctum medium rectæ baſium oppoſitarum centra conjungentis; & generaliter in omnibus corporibus quantumvis difformibus centrum gravitatis mechanicè invenitur, ſi corpus ab aliquâ ſui parte liberè ſuſpendatur, & ab eâdem parte à quâ pendet, demittatur perpendiculum ità ut in corpore linea quam fecerit perpendiculi filum notetur; deindè ab aliâ parte corpus idem liberè ſuſpendatur ut priùs, noteturque iterùm linea perpendiculi ab hâc parte ſuper corpus demiſſi; concurſus enim duorum filorum perpendiculi (quæ ſunt diametri gravitatis) erit centrum gravitatis corporis dati.

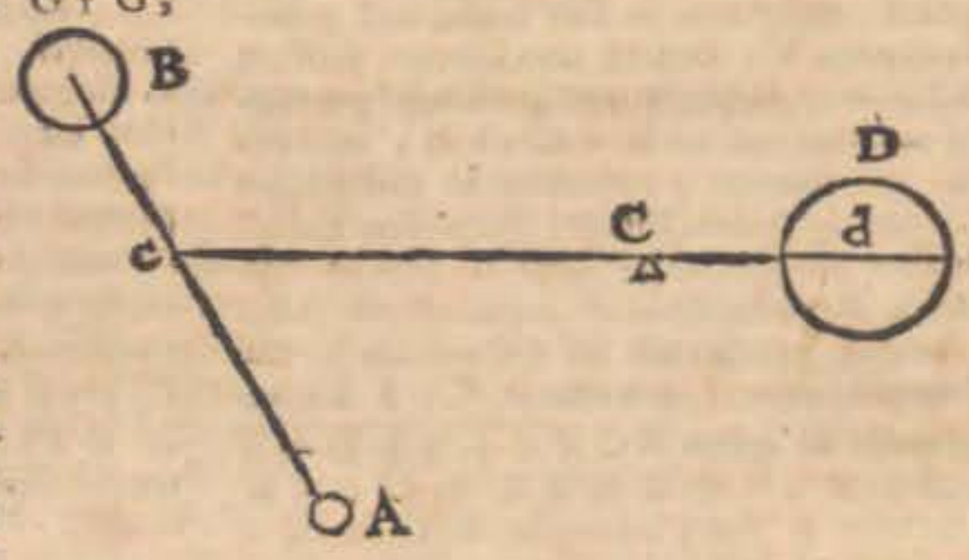
60. Cen

60. Centra gravitatis a & b, corporum A & B, rectâ seu vecte inflexibili & gravitatis experte, a b jungantur, & ità dividatur a b, in C, ut sit pondus A, ad pondus B, ut C b, ad C a, punctum C, erit centrum gravitatis commune duorum corporum A & B.... Dem... punctum C, fixum maneat, sitque 1°. a b, horizonti parallela, & quia a b, est vectis cujus fulcrum C, ponderis B momentum seu conatus ad vectem circà C, movendum, erit ut B × C b, & ponderis A momentum ut A × C a (47); verùm (per hyp.) A: B = C b: C a, adeóque A × C a = B × C b; ergò momenta ponderum A & B, æqualia sunt, & proinde in æquilibrio circà punctum C, consistunt.... 2°. vectis, a b, circà punctum C fixum, rotetur, & situm e f, inclinatum ad horizontem a b, obtineat, ductis F G, E H, rectis horizonti a b, perpendicularibus, quæ sunt gravium directiones, ponderum A & B, momenta erunt ut A × C H & B × C G, (47); sed ob triangula H C e, G f G,

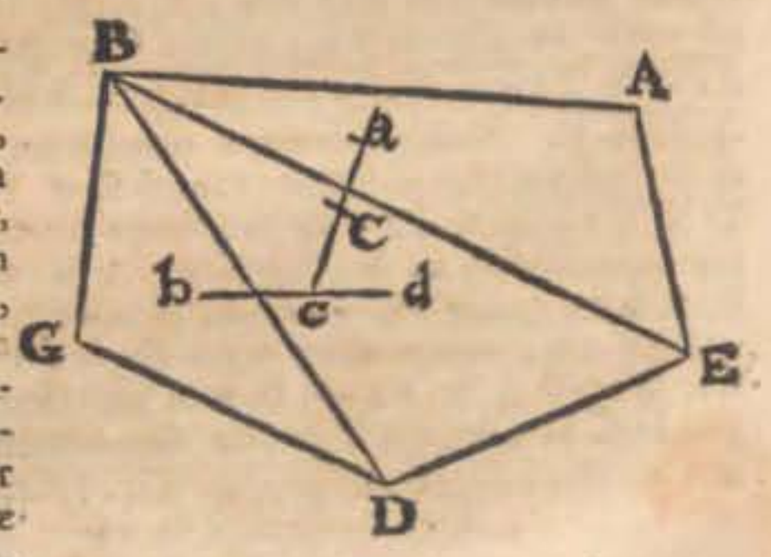



similia G C: H C = C f, seu C b: C e, sive C a = A: B, adeóque G C: H C = A: B & A × C H = B × C G; momenta igitur ponderum A & B, in situ quocumque dato æqualia sunt & semper æquilibrantur. Quare (58) punctum C, est commune gravitatis centrum duorum corporum A & B. Q. e. D.

61. Coroll. 1.... Duorum corporum A & B, commune gravitatis centrum sit c, & tertii corporis D, centrum gravitatis proprium sit d; jungatur recta c d, quæ ità dividatur in C, ut sit summa ponderum A + B ad pondus D, sicut C d, ad C c, trium corporum A, B, D, centrum gravitatis commune erit in C; nam duo corpora A & B, (58) considerari possunt tanquam in suo communi gravitatis centro c, coacta, adeóque si fuerit A+B: D = C d: C c, erit C, centrum gravitatis commune trium corporum A, B, D, (60). Eâdem ratione quatuor, pluriumve, prout quisque voluerit, corporum commune gravitatis centrum reperietur.

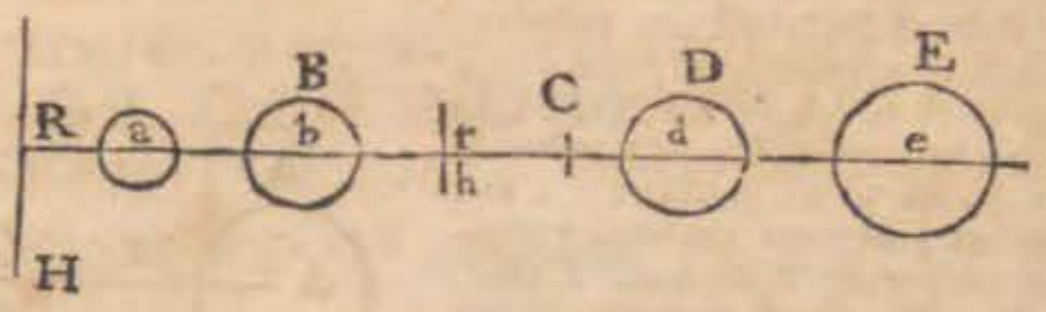



62. Coroll. 2.... figuræ cujusvis planæ & rectilineæ centrum gravitatis hoc modo inveniri potest. Figura data, A B G D E in sua triangula dividatur, duorumque triangulorum, B G D, B D E, centra gravitatis b & d, rectâ jungantur, & ità dividatur, b d, in c, ut area trianguli B G D, sit ad aream trianguli B D E, sicut c d, a d, b c, eritque, c, centrum gravitatis commune duorum triangulorum B G D, B D E, (60). Centrum gravitatis, a, trianguli B A C, & centrum, c, figuræ B G D E, mox inventum jungantur rectâ c a, quæ ità dividatur in C, ut area trianguli B A E, sit ad aream figuræ B G D E, sicut C c, ad C a & C, erit centrum gravitatis totius figuræ datæ A B G D E, (61). Hæc omnia clarè intelliguntur, si figurarum area quævis, instar ponderis centro gravitatis appensi consideretur.



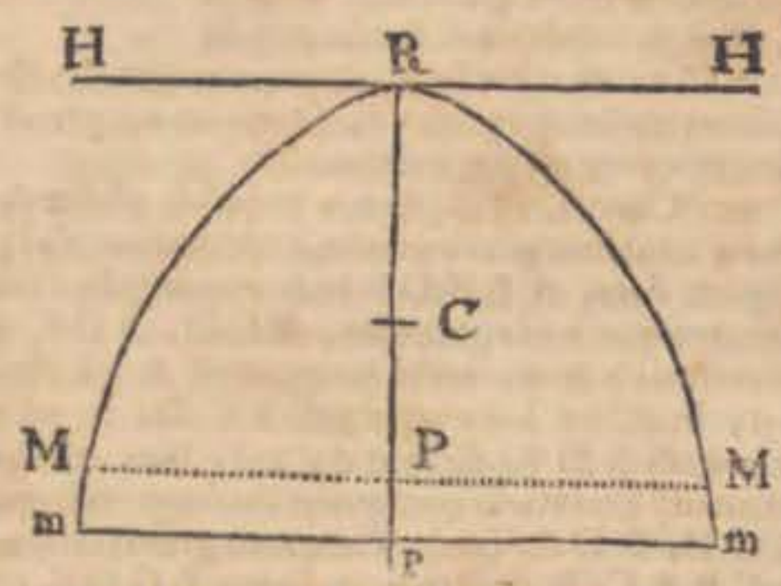
AXIOMATA, SIVE

63. Sit recta R H, horizonti perpendicularis quæ axis rotationis dicatur, & in eâ ſumatur centrum rotationis R, ſeu punctum fixum circà quod vectis horizontalis R e, cum appenſis ponderibus A, B, D, E, rotari poſſit, ſintque corporum centra gravitatis propria a, b, d, e, & eorum commune gravitatis centrum C, in vecte R e, ad eandem axis R H, partem poſita; diſtantia R C, communis centri gravitatis C, à centro rotationis R, æqualis erit ſummæ factorum unius cujuſque ponderis in ſuam à centro rotationis R, diſtantiam, per ſummam ponderum diviſæ ..... Dem.... Momentum cujuſque ponderis ad vectem circà centrum R, movendum, eſt ut factum ex illo pondere in ſuam ab eodem centro R, diſtantiam (47), & omnium momentorum ſumma, ſeu totus omnium ponderum ad vectem circà centrum R, movendum conatus, ut illorum factorum ſumma; verùm quia pondera omnia per vectem R e, diſperſa, tanquam in ſuo communi gravitatis centro C, coacta conſiderari poſſunt (58), erit etiam totus omnium ponderum conatus ad vectem circà R, movendum, ut ſumma ponderum in diſtantiam R C ducta; quare ſumma factorum uniuſcujuſque ponderis in ſuam à centro rotationis R diſtantiam, æqualis eſt facto ex ſummâ ponderum in diſtantiam R C, communis centri gravitatis C, à centro rotationis R; igitur $RC \times \overline{A+B+D+E}$ &c. $= A \times aR + B \times bR + D \times dR + E \times eR$ &c., adeóque $RC = \overline{A \times aR + B \times bR + D \times dR + E \times eR}$ &c. : $\overline{A+B+D+E}$ &c. Q. e. D.




64. Si pondera ad eandem axis rotationis partem ſita non ſint, ſi v. gr. fuerit axis rotationis r h, erit $rC = \overline{D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br : A+B+D+E}$. Nam momenta ponderum D & E, ad vectem circà r movendum ſunt $D \times dr$, $E \times er$, & momenta contraria ponderum A & B, ſunt $A \times ar$, $B \times br$; quare vis omnium ponderum ad vectem r e, movendum erit, $D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br$; ſed ſi pondera in centro C, coacta ſupponantur, erit vis illa eadem, $rC \times \overline{A+B+D+E}$, ergò $rC \times \overline{A+B+D+E} = D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br$; ac proinde $rC = \overline{D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br : A+B+D+E}$. Q. e. D.

65. Quapropter ſi omnia pondera ſint ad eandem axis rotationis R H, partem poſita, & quodlibet pondus vocetur p, ſumma verò omnium ponderum S p; præterea ſi diſtantia à centro rotationis dicatur x, ac proinde factum cujuſque ponderis in ſuam à centro rotationis diſtantiam ſit x p, & omnium factorum ſumma ſ x p; diſtantia communis centri gravitatis omnium ponderum à centro rotationis erit generaliter $S x p : S p$. Si verò pondera fuerint ad diverſas axis rotationis r h, partes poſita, & diſtantia cujuſlibet ponderis à centro rotationis r, vocetur x, ſingula verò pondera quæ ſunt ad partem r e, poſita, dicantur p, eorumque ſumma ſit S p; inſuper ſingula pondera ad partem R r, ſita dicantur q, & eorum ſumma ſit S q, diſtantia communis centri gravitatis omnium ponderum à centro rotationis r, erit $\overline{ſ x p - ſ x q : ſ p + ſ q}$, vel $ſ x q - ſ x p : ſ p + ſ q$; unde ſi $S x p = S x q$, manifeſtum eſt centrum rotationis idem eſſe cum centro gravitatis.

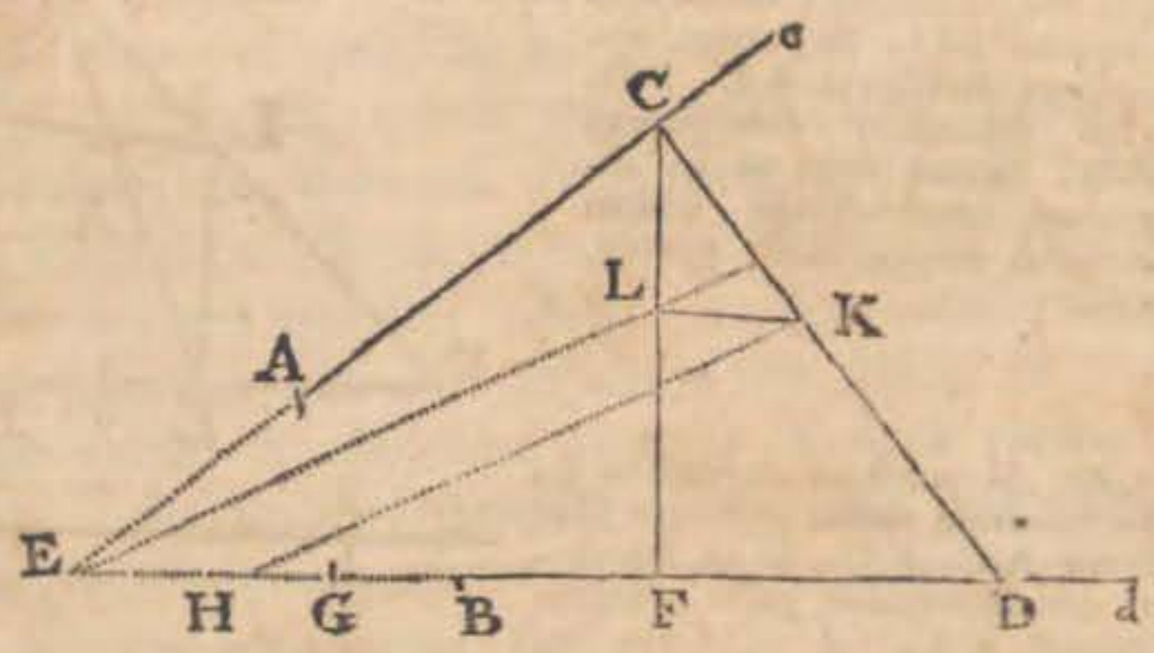



66. Harumce formularum auxilio, centra gravitatis figurarum curvarum reperiun-

(P) Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione datâ, punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in li- LEGES MOTUS.

runtur; Nam si curvæ M R M, axis R P, quo ordinatæ M M m m, bifariam dividuntur, ut vectis habeatur, vertexque R, ut centrum rotationis & singula elementa qualia sunt M M m m, ut pondera vecti appensa considerentur, distantia centri gravitatis C, à centro rotationis seu vertice R, erit (per primam formulam) æqualis summæ factorum ex singulis elementis M M m m, in suam à vertice R', distantiam per summam eorumdem elementorum divisæ.

(9) 67. Duo corpora C & D, æquabiliter moveantur in lineis rectis A C, B D, positione datis, jungaturque recta C D, & ità dividatur in K, ut sit D K, ad C K, ut corpus C, ad corpus D; punctum K, quod est centrum gravitatis corporum C & D, (60) vel quiescet vel movebitur uniformiter in lineâ rectâ positione datâ .... Dem... concurrant lineæ A C & B D, in E. 1°. Corpora C & D, ex punctis fixis A & B, in eandem plagam proficiscantur & iisdem temporibus ad puncta C & D, perveniant, ac proinde spatia A C & B D, erunt in ratione datâ velocitatum (5). In B E, capiatur B G, ad A E, in ratione datâ B D, ad A C, & cum data sit A E, dabitur quoque linea B G; sit F D, semper æqualis datæ E G, erit E F = G D, & quia B G: A E = B D: A C, (per const.) erit B G + B D, seu G D: A E + A C, seu E C = B D: A C, adeóque A C: B D = E C: G D, seu E F; est igitur E C ad E F; in ratione datâ, & propterea ex datis angulo C E F, & laterum E C, E F, ratione, dabitur specie triangulum E F C, id est dantur tres anguli. Deindè secetur C F, in L, ut sit C L, ad C F, in ratione datâ C K, ad C D, id est in ratione corporis D, ad summam corporum C + D; & quia in triangulo E F C, specie dato datur ratio laterum E F, F C, dataque est ratio C F, ad F L, dabitur quoque ratio ex his duabus composita E F, ad F L, adeóque ob angulum E F C, etiam datum dabitur specie triangulum E F L; Quare dum progrediuntur corpora C & D, punctum L, semper locabitur in rectâ E L, positione datâ, utpote quæ est basis trianguli E F L,

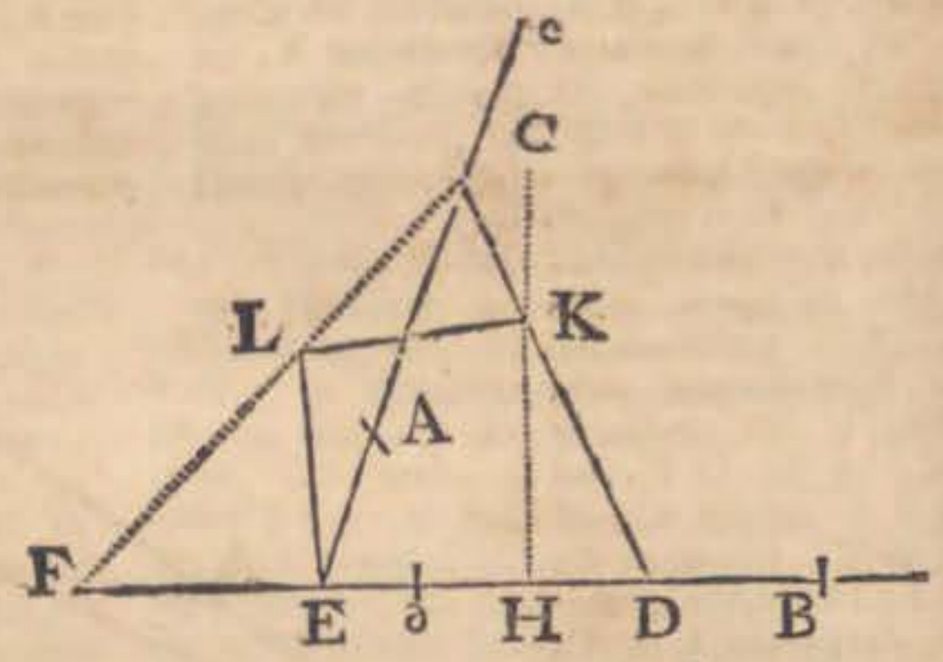



in quo angulus F, idem constanter manet, & latus E F, positione datum ad latus F L, datam habet rationem. Junge L K, & quia C L: C F = C K: C D (per const.), similia erunt triangula C L K, C F D, & ob datam F D = E G, & datam rationem F D, ad L K, seu C D, ad C K; dabitur L K, magnitudine; lineæ L K, æqualis capiatur E H, & ductâ H K, erit semper E L K H, parallelogrammum, ob L K, æqualem & parallelam ipsi L H, locabitur ergò punctum K, in parallelogrammi illius latere H K, quod positione datum est; nam latus E L, positione, latus verò E H, positione & magnitudine datur. Quare punctum K, seu centrum gravitatis in lineâ rectâ positione datâ progreditur. Quoniam verò, ex demonstratis, triangula C E F, L E F, specie, & tria latera E C, E L, E F, positione data sunt, manifestum est rationem rectæ E L, seu lineæ æqualis H K, ad E C, datam esse. Verùm quia punctum C, uniformiter movetur (per hyp.) uniformiter crescit recta E C, ergò pariter recta H K, uniformiter augetur, adeoque punctum K, æquabiliter progreditur in lineâ rectâ H K, positione datâ. Q. e. 1°. demonstrandum . . . .

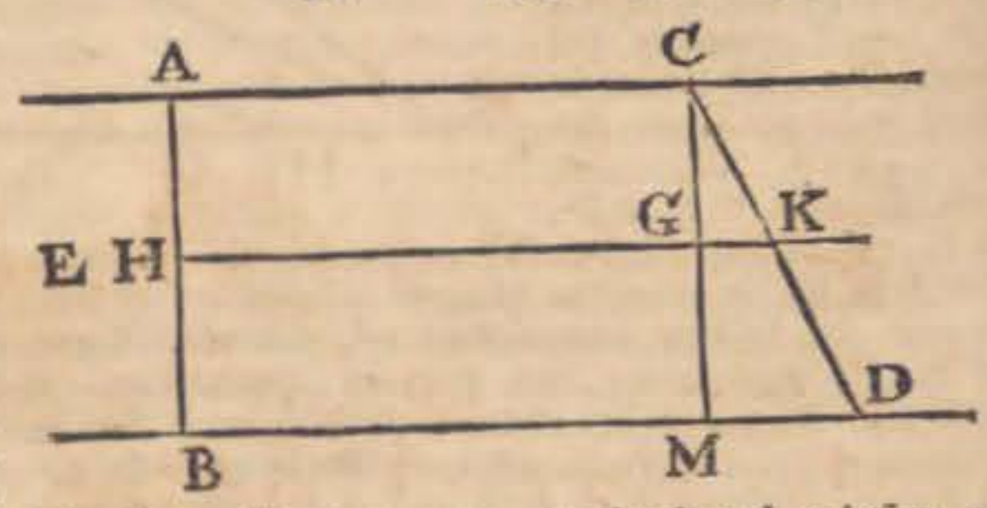
2°. Cor-

AXIOMATA, SIVE neâ rectâ. Hoc poſtea in Lemmate XXIII. ejuſque Corollario demonſtratur, ſi punctorum motus fiant in eodem plano; & (q) eâdem

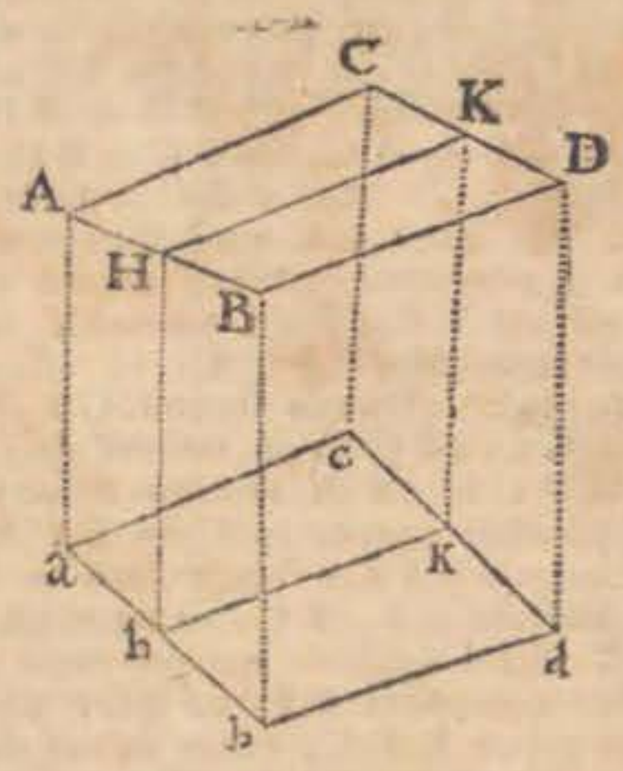
2°. Corpora ex punctis fixis A & B, in diverſas plagas progrediantur, ſemperque capiatur B G, in partem oppoſitam directioni B D, F D, verò ſecundùm directionem B D, cætera fiant ut in ſuperiori conſtructione eadem manebit demonſtratio pro 2°. caſu.




68. Si punctum concurſus E, in infinitum abeat, parallelæ fient lineæ A C, B D, & ex ſuperiori demonſtratione patet centrum gravitatis K, vel quieſcere vel uniformiter moveri, in lineâ H K, poſitione datâ, lineis A C, B D, parallelâ; ſi autem lineæ parallelæ A C & B D, ad ſe mutuò accedant tandemque coincidant, eadem ſemper valet demonſtratio, ac proindè ſi corpora in eâdem rectâ moveantur, in hâc eâdem lineâ centrum gravitatis vel quieſcet vel movebitur uniformiter.




(q) 69. Si rectæ A C & B D, non in uno, ſed in diverſis planis poſitæ fuerint, ex ſingulis eorum punctis A & B, C & D, in quibus eodem tempore reperiuntur, in planum quodvis a b d c, pro lubitu aſſumptum demittantur perpendicula A a, B b, C c, D d; & ex centris gravitatis H & K, perpendicula H h, K k, excitentur, ob motum uniformem punctorum A & B, in lineis A C, B D, evidens eſt puncta a & b, uniformiter moveri in lineis a c, b d; & quia A a, B b, H h, parallelæ ſunt; lineæ A B, a b, in eâdem ratione datâ in H, & h, dividuntur, idemque dicendum de punctis K, & k, in lineis C D, & c d; Quare, ex demonſtratis (67), punctum h, uniformiter progrediatur in recta h k, adeóque centrum gravitatis H, ſemper movetur in plano H h k K k, ad planum a b d c,

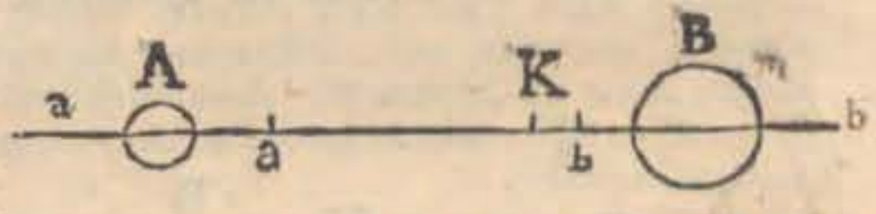



normali; ſi loco plani, a b d c, aliud quodvis ad arbitrium aſſumeretur, eodem modo

dem ratione demonſtrari poteſt, ſi motus illi non fiant in eodem plano. Ergo ſi corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione datâ. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur diſtantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in datâ ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur diſtantia inter centrum commune trium & centrum quarti in datâ ratione, & ſic in infinitum. Igitur in ſyſtemate corporum quæ actionibus in ſe invicem aliiſque omnibus in ſe extrinſecus impreſſis omnino vacant, ideoque moventur ſingula uniformiter in rectis ſingulis, commune omnium centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum. LEGES MOTUS.

(r) Porro in ſyſtemate duorum corporum in ſe invicem agentium cum diſtantiæ centrorum utriuſque à communi gravitatis centro ſint reciprocè ut corpora; erunt motus relativi cor-

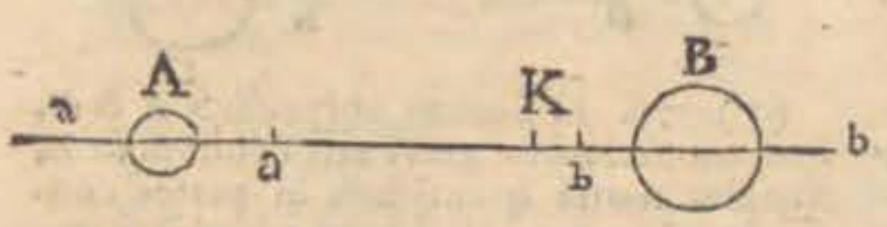
modo demonſtrari poſſet centrum gravitatis H, moveri in plano ad aſſumptum perpendiculari; neceſſe igitur eſt ut centrum illud H, moveatur in communi illorum planorum ad alia pro lubitu aſſumpta perpendicularium interſectione, quæ cum ſit linea recta H K, poſitione data, & punctum h, per rectam h k, uniformiter progrediatur, punctum H, æquabiliter fertur in lineâ H K. In omni igitur caſu centrum commune gravitatis duorum corporum quæ motu uniformi per lineas rectas poſitione datas progrediuntur, ſemper quieſcit vel movetur uniformiter in rectâ poſitione datâ.




(r) 70. Si duobus corporibus A & B, quorum commune gravitatis centrum ſit K, æquales motûs quantitates in partes contrarias de novo imprimantur, quibus eodem tempore percurrunt ſpatia A a, B b, centri gravitatis ſtatus non mutatur; Cum enim K, ſit commune centrum gravitatis corporum A & B, (per hyp.) erit A : B = K B : K A (60) & quia impreſſæ quantitates motûs (6) A × A a, B × B b æqua-

AXIOMATA, SIVE

corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter ſe. Proinde centrum illud à motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem. In ſyſtemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in ſe mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat ſtatum ſuum; & reliquorum, quibuſcum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur à communi corporum omnium centro in partes ſummis totalibus corporum quorum ſunt centra reciprocè proportionales, ideoque centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum: manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter ſe nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ; & propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi à viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de

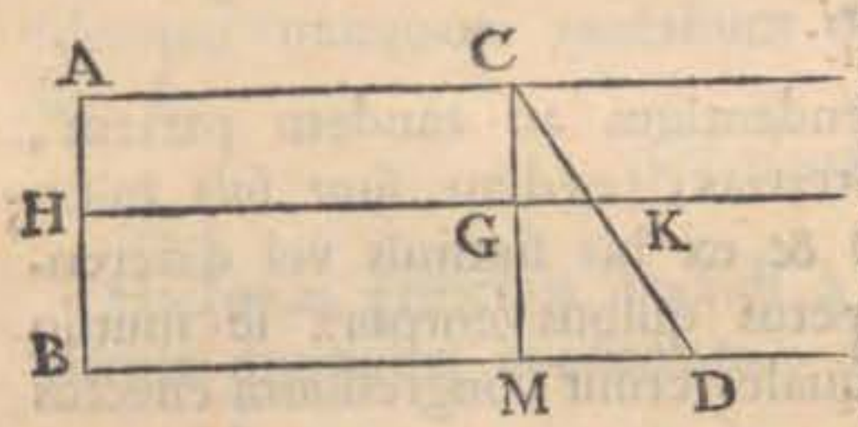



æquales ſunt (per hyp.), erit etiam A : B = B b : A a, adeoque K B : K A = B b : A a, & componendo vel dividendo K b : K a = B b : A a = A : B; dum igitur corpora A & B, ad puncta a & b, motibus impreſſis perveniunt, centrum K, immotum remanſit (60), ac proindè ab æqualibus motuum mutationibus in contrarias partes factis non mutat ſtatum ſuum motûs vel quieti. Quapropter cum mutua corporum actio (per leg. 2. 3.) æquales mutationes in utroque corpore versùs partes contrarias producat, commune gravitatis centrum duorum corporum ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem.

71. Mo-

de hoc ſtatu. (f) Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu

LEGES MOTUS.




(f) 71. Motus progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis ſemper æſtimari debet.... Dem.... 1°. Corpora duo A & B, in lineis A C & B D, parallelis progrediantur cum velocitatibus, ut A C, B D, eorumque commune gravitatis centrum H, per rectam H K, lineis A C & B D, parallelam feratur, ducatur C M, rectæ A B parallela. Quoniam B : A = A H : B H (60) erit B : B + A = A H : A B, & ob parallelas A B, & C M; G K & M D, erit A H : A B = C G : C M = G K : M D, adeóque G K : M D = B : A + B, & B × M D = A + B × G K; verum quia A C = H G = B M, erit H K = A C + G K, & B D = A C + M D; quare $\overline{A+B}$ × H K = $\overline{A+B}$ × A C + $\overline{A+B}$ × G K = A × A C + B × A C + B × M D, ob $\overline{A+B}$ × G K = B × M D, ergò $\overline{A+B}$ × H K = A × A C + B × B D, ſeu ſumma corporum A & B, in velocitatem centri gravitatis H K, ducta, æqualis eſt ſummæ factorum in ſingulis corporibus A & B, in ſuam velocitatem A C, B D.... 2°. Si corpora contrariis directionibus C A & B D, moveantur, negativa erit quantitas motûs corporis A, propter contrariam directionem C A, adeóque differentia quantitatum motûs corporum, in plagas oppoſitas tendentium, ſeu quod idem eſt, quantitas motûs in eandem plagam, æqualis erit facto ex ſummâ corporum, in velocitatem centri gravitatis.... 3°. Si parallelæ A C, B D, ad ſe mutuò accedant tandemque coincidant, eadem ſemper manet demonſtratio, quæ proindè etiam obtinet, dum corpora in eâdem rectâ feruntur.... 4°. Si corpora non moveantur in lineis parallelis nec in eodem plano, uniuſcujuſque ponderis directio ac velocitas in duas alias reſolvatur, quarum una ſit viæ centri gravitatis parallela, altera verò ipſi perpendicularis, & ex demonſtratis liquet ſummam quantitatum motûs corporum in plagam versûs quam movetur centrum gravitatis eſſe æqualem facto ex ſummâ corporum in velocitatem centri gravitatis.... 5°. Si æquabilis non ſit corporum motus, ſed quâcumque ratione acceleretur vel retardetur, temporibus infinitè parvis tanquam æquabilis ſpectari poteſt, iiſque temporculis ſumma quantitatum motûs corporum æqualis eſt facto ex ſummâ corporum in velocitatem centri gravitatis; undè quovis tempore quantitas motûs ſingulorum corporum æqualis eſt quantitati motûs quam habuiſſent omnia corpora, ſi communi velocitate centri gravitatis ſimul lata fuiſſent.... 6°. Si trium corporum ſyſtema moveatur, duo ex hiſce corporibus in ſuo gravitatis centro coacta fingi poſſunt (ex Dem) ac proindè trium pluriumve corporum aut etiam ejuſdem corporis partium ſyſtema ad duorum duntaxat corporum ſyſtema reducitur; ergò quantitas motûs progreſſivi ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum, ex motu centri gravitatis æſtimari debet. Q. e. D.

72. Coroll. 1.... Si differentiæ quantitatum motûs versûs partes contrarias in ſyſtemate corporum ſit nihilo æqualis, commune centrum gravitatis quieſcit; ſi inæqualis eſt progreditur in eam partem versûs quam prævalet motus.

73. Coroll. 2.... Motus ſyſtematis corporum in plagam datam habetur, ſi centri gravitatis motus in duos motus reſolvatur, quorum unus in plagam datam dirigatur, alter verò ſit ipſi perpendicularis; nam ſumma corporum ducta in velo-

AXIOMATA, SIVE

seu systematis corporum ex motu centri gravitatis æstimari semper debet.

## COROLLARIUM V.

(t) *Corporum dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum sine motu circulari.*

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & summæ tendentium ad contrarias, eædem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus quibus corpora se mutuo feriunt. Ergo per Legem 11. æquales erunt congressuum effectus in utroque casu; & propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in Navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

## COROLLARIUM VI.

*Si corpora moveantur quomodocunque inter se, & à viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; per-*

locitatem centri gravitatis versus datam directionem exponit quantitatem motûs totius systematis in eandem partem progredientis.

(t) 74. Si navi quiescenti in quâ continentur corpora variis motibus agitata, motus in directum æquabilis imprimatur, omnia hæc corpora navis velocitatem æquè participant (leg. 1. 2.), adeóque singulis corporibus additur in eandem plagam æqualis velocitas, ac proindè motus navi impressus respectivas corporum velocitates non mutat; quare differentiæ velocitatum in corporibus quæ ad eandem partem tendunt, & summæ velocitatum in corporibus quæ ad partes contrarias tendunt, eædem manent antè & post motum navi impressum; sed ex his summis vel differentiis quæ sunt respectivæ corporum velocitates, oriuntur congressus & ictûs magnitudines quibus corpora se mutuò feriunt; nam si corpus aliquod M, velocitate C, in corpus quiescens m, incurrat, eadem est ictus magnitudo ac si utrique corpori nova velocitas c, in eandem partem accederet, & corpus M, cum velocitate C + c, in corpus m, velocitate c, motum impingeret; corpus enim M, in m, non agit per velocitatem c, utrique corpori communem, sed per solam velocitatum differentiam C + c − c, seu C; hæc autem differentia est ipsamet velocitas quâ corpus M, in aliud m, quiescens agit. Iidem ergò erunt congressus ac proindè æquales congressuum effectus in utroque casu (per leg. 2.), & propterea manebunt motus respectivi in uno casu æquales motibus respectivis corporum in altero; si autem motus circularis navi imprimeretur, corpora, propter vim centrifugam (18) in varias partes cum variâ velocitate propellerentur.

75. Vis

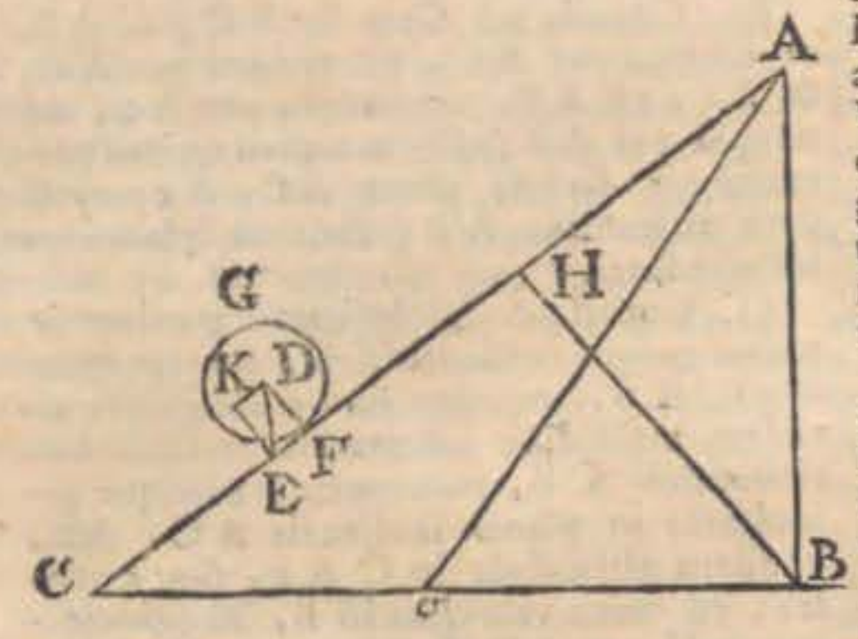
*pergent omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata.* LEGES MOTUS.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem II. ideoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

## *Scholium.* (a)

Hactenus principia tradidi à mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria

(a) 75. Vis acceleratrix gravitatis, quâ corpus in plano ad horizontem inclinato juxtà plani directionem urgetur, est ad vim gravitatis acceleratricem quâ secundum directionem horizonti perpendicularem sollicitatur, ut altitudo plani ad ipsius longitudinem .... Dem....




Globus G, plano A C, ad horizontem C B, inclinato incumbat; ex A, ad horizontem C B, demittatur perpendiculum A B, & ex centro D, globi ad planum A C, ducatur recta D E, perpendiculo A B, parallela quæ exponat vim gravitatis acceleratricem quâ globus secundum directionem D E, horizonti perpendicularem urgetur; vis illa, D E, in duas vires resolvatur (41), quarum altera D F, sit ad planum A C, normalis quæ proindè tota plano sustinetur, altera verò D K, seu F E, plano parallela quâ solâ globus ad motum secundum directionem plani A C, sollicitatur, & erit vis acceleratrix juxtà plani inclinati directionem agens, ad vim acceleratricem perpendiculariter sollicitantem, ut E F, ad D E; sed quoniam triangula E F D, A B C, ob parallelas D E, A B, & angulos rectos F & B, æquales, similia sunt, est F E : D E = A B : A C. Vis igitur acceleratrix gravitatis secundum directionem plani inclinati A C, est ad vim gravitatis acceleratricem secundum directionem horizonti perpendicularem, ut plani inclinati altitudo A B, ad ipsius longitudinem A C. Q. e. D.

76. Coroll. 1.... Quoniam vis acceleratrix gravitatis juxtà directionem D E, horizonti perpendiculatem constans est (26), & vis acceleratrix F E, secundum directionem plani inclinati A C, est ad vim D E, in ratione datâ A B, ad A C; vis acceleratrix F E, constans quoque erit; ea igitur omnia quæ de motibus vi acceleratrice constanti genitis demonstrata sunt, transferre licet ad motus vi gravitatis acceleratrice in plano inclinato productos; nempe. 1°. Grave per planum inclinatum motu uniformiter accelerato descendit, & motu uniformiter retardato ascendit (25). 2°. Velocitates sunt ut tempora quibus acquiruntur (25), spatia e quiete cadendo descripta sunt in ratione duplicatâ temporum quibus percurruntur, itemque

AXIOMATA, SIVE

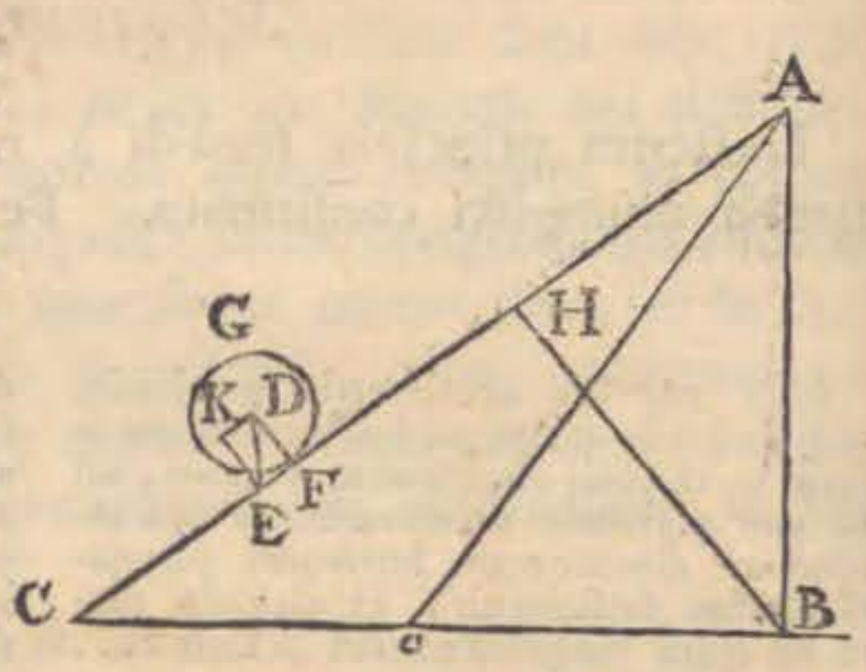
laria duo prima *Galilæus* invenit deſcenſum gravium eſſe in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in parabola; conſpirante experientia, niſi quatenus motus illi per aëris reſiſtentiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente gravitas uniformis, ſingulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo imprimit vires æquales in corpus illud, & velocita-

que velocitatum quæ his temporibus acquiruntur; tempora verò itemque velocitates ſunt in ratione ſubduplicatâ ſpatiorum (27, 28). 3°. Spatium à gravi in plano inclinato percurſum ab initio motûs computatum, dimidium eſt illius quod eodem tempore ab eodem mobili uniformiter percurri poteſt cum velocitate ultimò acquiſitâ (29).

77. Coroll. 2. Quia vires acceleratrices conſtantes ſunt inter ſe in ratione velocitatum, quas eodem tempore producunt (13), velocitas lapſu perpendiculari per A B, acquiſita erit ad velocitatem eodem tempore in plano inclinato acquiſitam, ut longitudo plani, A C, ad ipſius altitudinem A B (75).

78. Coroll. 3. Si ex puncto B, perpendiculi A B, ad planum inclinatum agatur perpendicularis B H; ſpatium A H, in plano inclinato eodem tempore percurritur, quo lapſu perpendiculari deſcribitur A B; nam ob ſimilitudinem triangulorum A H B, A B C; A H : A B = A B : A C, adeóque A H, eſt ad A B, ut velocitas in plano inclinato acquiſita ad velocitatem, eodem tempore in perpendiculo A B, acquiſitam (77). Sed velocitates motu uniformiter accelerato acquiſitæ, ſunt ut dupla ſpatia, ſeu, quod idem eſt, ut ſpatia eodem tempore percurſa (76); ergò A H, A B, ſunt ſpatia eodem tempore percurſa.

79. Coroll. 4. Tempus quo planum A C percurritur, eſt ad tempus quo percurritur ipſius altitudo A B, ut longitudo plani A C, ad ejus altitudinem A B; tempus enim per A C, eſt ad tempus per A H, in ratione ſubduplicatâ A C, ad A H (76). Sed ob continuam rectarum A C, A B, A H, analogiam A C, eſt ad A B, in ratione ſubduplicatâ A C, ad A H; tempus igitur per A C, eſt ad tempus per A H, hoc eſt (78), ad tempus per A B, ut A C, ad A B.




80. Coroll. 5. Cum ſit A C, ad A B, ut tempus per A C, ad tempus per A B; & A c, ad A B, ut tempus per A c, ad tempus per A B (79), tempora quibus percurruntur diverſa plana A C, A c, ejuſdem altitudinis A B, ſunt ut planorum longitudines.

81. Coroll. 6. Celeritates gravium in plano quovis inclinato A C, & in perpendiculo A B, æquales ſunt, ubi gravia ex eádem altitudine ad eandem rectam horizontalem C B, pervenerint, adeóque velocitates in planis inclinatis A C, A c, ejuſdem altitudinis in C & c, ſunt æquales; eſt enim velocitas in B, ad velocitatem in H, ut A B ad A H (ea enim ſpatia eodem tempore deſcripta ſunt) & ob ſimilitudinem triangulorum A H B, A B C, ſicut A C ad A B: velocitas autem in C, eſt ad velocitatem in H, in ratione ſubduplicatâ A C, ad A H, hoc eſt, ob continuam analogiam rectarum A C, A B, A H, in ratione A C, ad A B; quare velocitas in B, eſt ad velocitatem in H, ut velocitas in C, ad eandem velocitatem in H, adeóque velocitas in C, æqualis eſt velocitati in B.

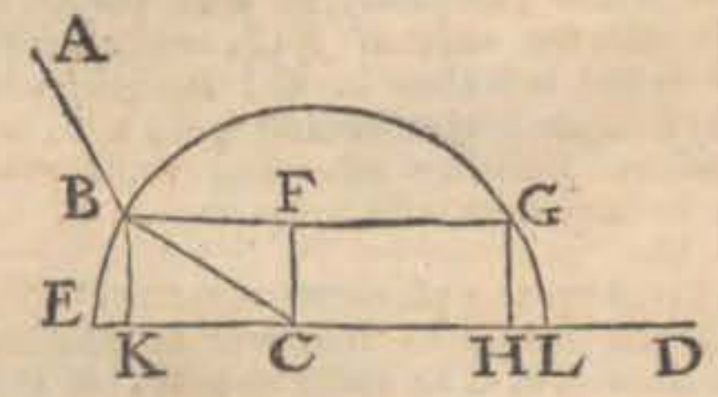
82. Co-

citates æquales generat: & tempore toto vim totam imprimit & velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et ſpatia temporibus proportionalibus deſcripta, ſunt ut velocitates

82. Coroll. 7. Tempus deſcensûs per chordas quaſlibet A H, H B, circuli cujus diameter, A B, eſt ad horizontem perpendicularis, æquale eſt tempori deſcensûs per totam diametrum A B, ac proindè tempora deſcensûs per omnes chordas ſunt æqualia; Cum enim angulus A H B, in ſemicirculo rectus ſit, tempus deſcensûs per A H, æquale eſt tempori deſcensûs per A B, (78), & ductâ H C, diametro A B, æquali & parallelâ junctâque C B, erit ob, angulum H B C, rectum, tempus per H B, æquale tempori per H C, ſeu per A B.




83. Si corpus in curvâ immotâ incedit, vis quâ ſingula curvæ puncta premit, cum vi finitâ quâ movetur corpus comparata, major non eſt quantitate infinitesimâ primi ordinis; vis ſeu celeritas quam in ſingulis curvæ punctis amittit, major non eſt quantitate infinitesimâ ſecundi ordinis; tandem vis ſeu celeritas per finitum curvæ arcum amiſſa major non eſt quantitate infinitesimâ primi ordinis, adeóque corpus in curvâ progreditur eâdem celeritate finitâ ac ſi nihil omninò virium amitteret....

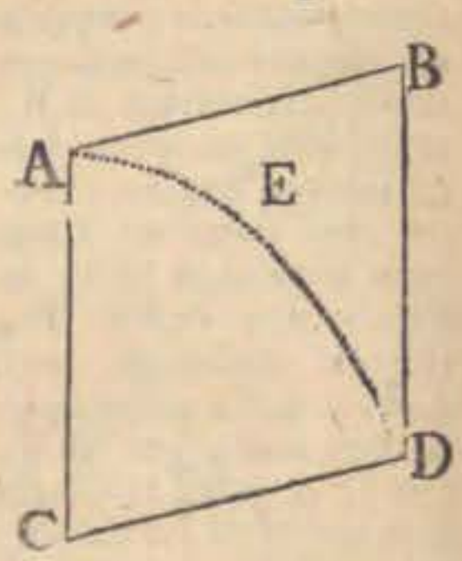


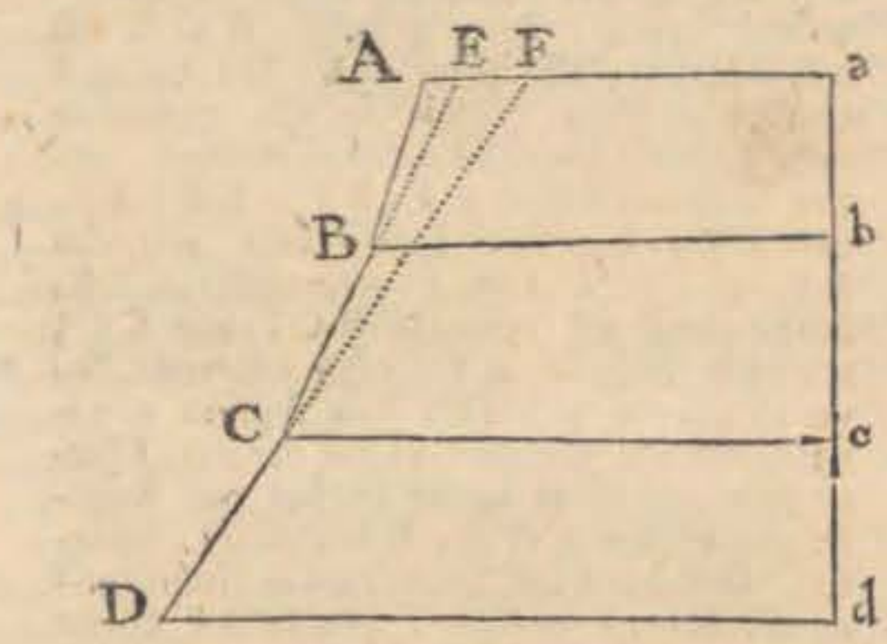

Dem.... Curva quælibet, ut notum eſt, conſiderari poteſt tanquam polygonum A B C D, ex innumeris atque infinitesimis lateribus rectis A B, B C, C D, compoſitum, quorum duo quævis B C, C D, angulum comprehendunt à duobus angulis rectis, nonniſi quantitate infinitesimâ deficientem, ità ut producto latere C D, in E, angulus externus B C E, ſit infinitesimus. Centro C, & radio C B, deſcribatur ſemicirculus E B G L, ex puncto B verò demittatur in rectam E D, perpendicularis B K, & completo rectangulo K F, motus corporis latere B C, expoſitus, in binos B K, B F, ſeu K C, reſolvitur (coroll. 1. Newt.). His poſitis manifeſtum eſt (51) vim ſeu celeritatem quâ corpus in latus C D, incurrit, illudque premit ſeu percutit, perpendiculari F C, ſive B K, repræſentari; celeritatem poſt ictum, (ſupponendo corpora eſſe elaterio deſtituta) rectâ K C, ſeu C H, exhiberi, & celeritatem ex impactu in C, amiſſam rectâ E K, exponi, cum E K, ſit differentia rectarum B C, K C; hoc eſt, celeritatum ante & poſt impactum. Jam ſi angulus B C K, finitæ quantitatis eſſet, recta B K, finitam haberet ad rectas B C, K C, rationem, quæ decreſcente angulo B C K, ſemper minuitur adeóque infinitesima evadit, dum angulus B C K eſt infinitesimus; eſt igitur B K, ſeu vis quâ corpus curvam premit in C, quantitas non major infinitesimâ primi ordinis; verùm quia in circulo E K : B K = B K : K L, erit E K, quantitas infinitesima reſpectu B K, quemadmodum, ex demonſtratis B K, infinitesima eſt reſpectu B C, aut K C, adeóque reſpectu K L; ergò celeritas ſeu vis in puncto C amiſſa non ſuperat quantitatem infinitesimam ſecundi ordinis. Quarè cùm velocitas quam corpus per ſingula curvæ latera A B, B C, C D, amittit, non excedat quantitatem infinitesimam ſecundi ordinis, per latera curvæ numero infinita, hoc eſt, per arcum curvæ finitum, non poteſt celeritatem amittere majorem quantitate infinitesimâ primi ordinis quæ eſt ſumma quantitatum infinitesimarum ſecundi ordinis; eâ igitur quantitate neglectâ, corpus eodem modo motum ſuum in curvâ continuat ac ſi nihil virium amiſiſſet. Q. e. D.

84. Si

AXIOMATA, SIVE

tes & tempora conjunctim; id est in duplicata ratione temporum. Et corpore sursum projecto gravitas uniformis vires imprimit & velocitates aufert temporibus proportionales; ac tempora ascendendi ad altitudines summas sunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ sunt ut velocitates ac tempora conjunctim: seu in duplicata ratione velocitatum. Et corporis secundum rectam quamvis projecti motus à projectione oriundus cum motu à gravitate oriundo componitur. Ut si corpus *A* motu solo projectionis dato tempore describere posset rectam *AB* & motu solo cadendi eodem tempore describere posset altitudinem *AC*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & corpus illud motu composito reperietur in fine temporis in loco *D*; & curva linea *AED*, quam corpus illud describet, erit parabola quam recta *AB* tangit in *A*, & cujus ordinata *BD* est ut *ABq*. Ab iisdem legibus & corollariis pendent demonstrata de



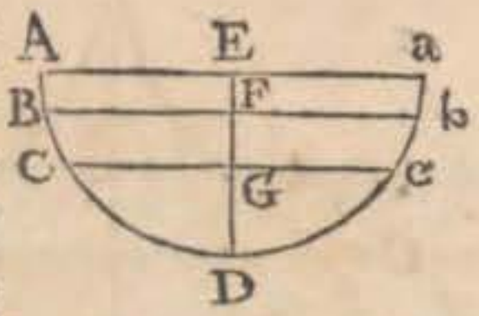

84. Si grave ex quiete in A, per plana contigua A B, B C, C D, descendat, & flexus seu anguli B, C, motui non officiant, velocitas gravis per plana inclinata descendentis, æqualis est velocitati quam lapsu perpendiculari haberet in pari ab horizonte distantiâ .... Dem.... Ductis rectis A a, B b, C c, D d, horizonti parallelis & perpendiculo, a d, demisso, producantur C B, D C, donec occurrant rectæ A a, in E & F; velocitas lapsu per A B, acquisita æqualis est velocitati quæ acquireretur lapsu per E B, aut etiam per A B, (81), adeóque cum flexus B, motui non officiat (per hyp.) grave motum suum per planum B C, eodem modo continuat, ac si ex puncto E, per planum unicum E C, descendisset; est igitur velocitas in C, æqualis velocitati lapsu perpendiculari per, a c, acquisitæ. Similiter ostenditur velocitatem in D æqualem esse velocitati in d. Q. e. D.

85. Augeatur planorum numerus, & singulorum longitudo minuatur in infinitum ut linea A B C D curva evadat, & quia anguli B, C, D, velocitati corporis non officiunt (83), manifestum est gravis per curvam descendentis velocitatem in singulis curvæ punctis B, C, D, æqualem esse velocitati lapsu perpendiculari acquisitæ in punctis correspondentibus b, c, d.

86. Si

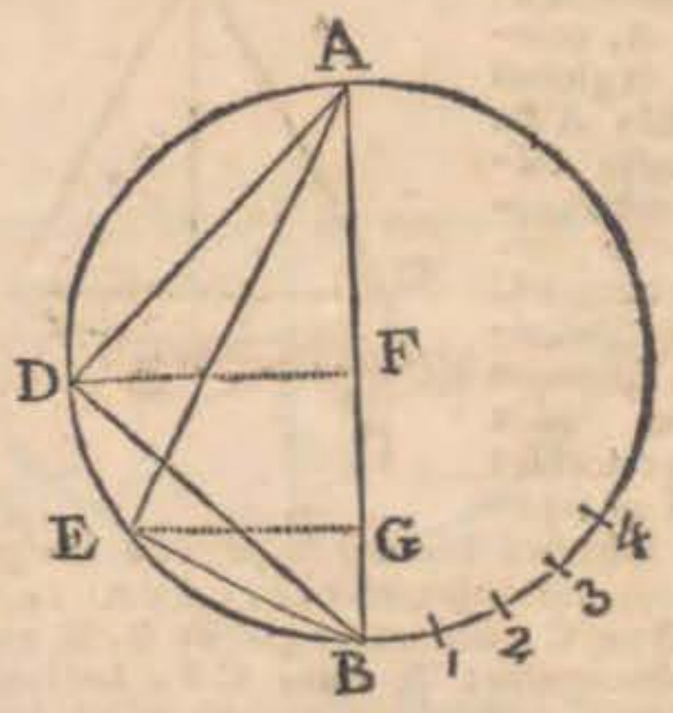
de temporibus oſcillantium pendulorum, ſuffragante horologiorum experientiâ quotidianâ: Ex his iiſdem & lege tertiâ *Chriſtophorus Wrennus* Eques auratus, *Johannes Walliſius S. T. D.* & *Chriſtianus Hugenius*, ætatis ſuperioris geometrarum facile principes, regulas congreſſuum & reflexionum durorum corporum ſeorſim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regiâ* communicarunt, inter ſe (quoad has leges) omnino conſpirantes: & primus quidem *Walliſius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata eſt à *Wrenno* coram *Regiâ Societate* per experimentum pendulorum: quod etiam

LEGES MOTUS.




86. Si grave deſcendat per curvam quamlibet A B C D, ductis lineis A a, B b, C c, horizonti parallelis, & ex puncto curvæ infimo D, rectâ D E, ad horizontem normali, patet (85) gravis per arcum A D, vel a D, deſcendentis eandem eſſe velocitatem in punctis æquè altis B & b, C & c. Quarè cum ex A, pervenit ad punctum infimum D, ex impetu per lapſum acquiſito aſcendit per arcum D a, ad punctum a, æquè altum, in quo omnis velocitas extinguitur, & in punctis correſpondentibus B & b, C & c, eandem tam in aſcenſu quam in deſcenſu habet velocitatem (26). Si verò arcus D a, arcui D A, ſimilis & æqualis fuerit, ſinguli arcus æquè alti C D & D c, B D & D b, A D & D a, æqualibus reſpectivè temporibus percurruntur (26).

87. Velocitas gravis per quemvis circuli arcum E B, deſcendentis in puncto infimo B, eſt ad velocitatem quam lapſu perpendiculari per totam diametrum A B acquireret, ut chorda E B, ad diametrum A B . . . . . Dem . . . Ductâ E G, horizonti parallelâ adeóque ad diametrum A B, perpendiculari, velocitas per arcum E B, acquiſita, æqualis eſt velocitati acquiſitæ per G B (85). Eſt ergò ad velocitatem per A B, acquiſitam in ratione ſubduplicatâ G B, ad A B (28). Sed

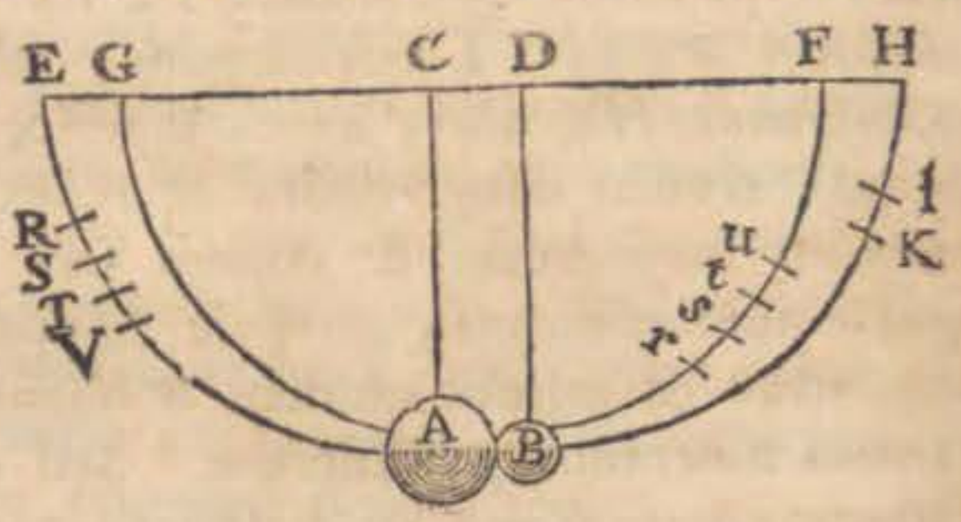



propter triangula rectangula ſimilia A E B, B G E, G B : E B = E B : A B, adeóque E B, ad A B, in ratione ſubduplicatâ G B ad A B; velocitas igitur per arcum E B, acquiſita in B, eſt ad velocitatem per A B, acquiſitam ut chorda E B, ad diametrum A B. Q. e. D.

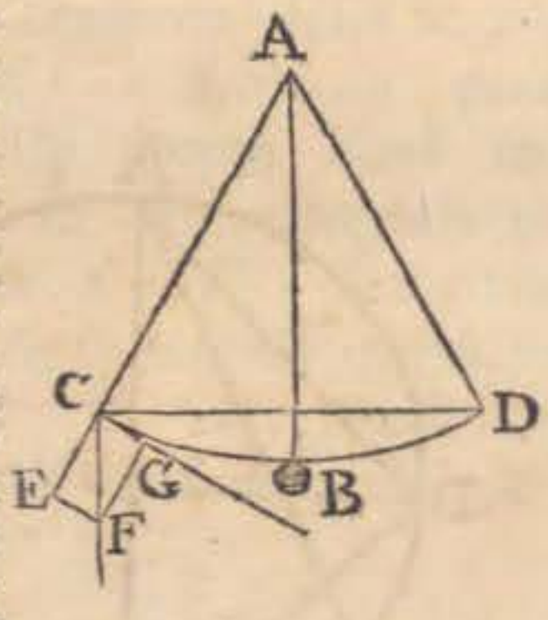
88. Coroll. Ductâ quâvis alterâ chordâ D B, erit etiam velocitas per arcum D B, acquiſita in B, ad velocitatem per diametrum A B, ut D B, ad A B, ac proindè velocitates per arcus D B, E B, acquiſitæ in puncto infimo B, ſunt inter ſe ut horum arcuum chordæ; undè ſi capiantur arcus B 1, B 2, B 3, B 4, quorum chordæ ſint reſpectivè ut 1. 2. 3. 4. velocitas gravis per arcus illos deſcendentis in puncto B, erunt ut 1. 2. 3. 4.

AXIOMATA, SIVE

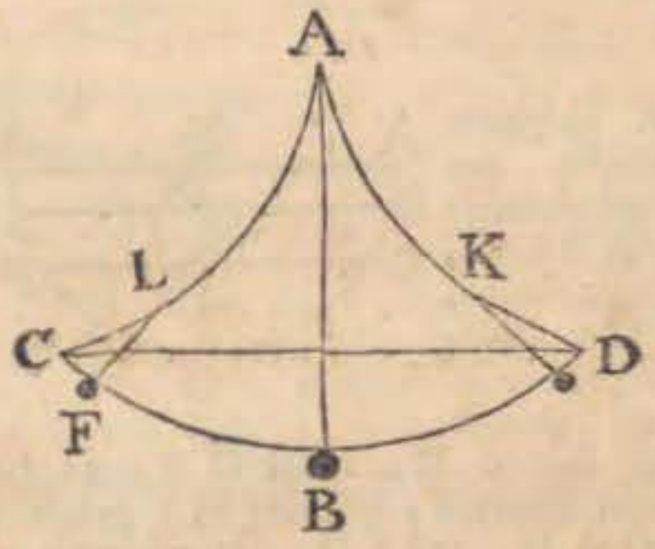
etiam *Clariſſimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus eſt. Verùm, ut hoc experimentum cum theoriis ad amuſſim congruat, habenda eſt ratio, cùm reſiſtentiæ aëris, tum etiam vis elaſticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora ſphærica *A*, *B* filis parallelis & æqualibus *A C*, *B D*, à centris *C*, *D*. His centris &




inter-




89. Si pendulum B, circà punctum fixum A, rotetur, & globus B, filo A B, appenſus inſtar puncti conſideretur, arcum circuli C B D, deſcribet, idemque globo huic motus accidet ac ſi in ſuperficie ſphæricâ immotâ & perfectè lævigatâ ſublato filo volveretur .... Dem ... Ad punctum C, adducatur globus B, & exindè demittatur; & recta C F, horizonti perpendicularis vim gravitatis acceleratricem in perpendiculo exponat; ea vis reſolvatur in duas vires, quarum una exhibeatur rectâ C E, ad arcum ſeu tangentem in C, perpendiculari; altera verò tangente C G; vis C E, quâ filum A C, directè trahitur ad globi motum nihil confert & ſolâ vi ut C G, urgetur; arcus verò C B D, conſiderari poteſt ut polygonum cujus latus unum in C, poſitionem habet tangentis C G, & ſi globus per planum C G, vi gravitatis urgeatur, ſublato filo vis C E, plano C G, tota ſuſtinetur, & globus ſolâ vi C G, ad motum in plano C G, ſollicitatur. Cum igitur idem in omnibus punctis arcûs C B D, eodem modo demonſtrari poſſit, patet filum A C, ſuperficiei C B D, vices ſubire, & in utroque caſu motum globi per arcum C B D, eâdem ratione perfici. Q. e. D.




90. Coroll. 1. Pendulum A B, inter duas laminas curvas A L C, A K D, immotas & ſeſe contingentes in A, ità oſcilletur ut filum A B, in ſitu ad horizontem perpendiculari utramque laminam tangat in A; dum verò oſcillatur pendulum, curvis laminis filum circumplicetur eaſque perpetuò tangat ut in L & K; per hanc fili ad laminas applicationem continuò impeditur motus penduli in circulo, aliamque curvam C B D, deſcribere cogitur; & eodem quo uſi ſumus ratiocinio (89), demonſtratur pendulum in hæc curvâ eodem modo moveri ac ſi grave B, libere & abſque filo per curvam immotam & perfectè lævigatam C B D, incederet.

91. Coroll. 2. Quapropter omnia quæ de motu gravium in curvis ſuperficiebus demonſtrata fuere, motui penduli per eaſdem curvas oſcillantis conveniunt. Nempe 1°. Penduli velocitas ſemper æqualis eſt velocitati quam acquireret cadendo per altitudinem perpendicularem arcui percurſo correſpondentem (85). 2°. Pendulum ex C demiſſum, vi gravitatis urgen-

intervallis describantur semicirculi $EAF$, $GBH$ radiis $CA$, $DB$ bisecti. (b) Trahatur corpus $A$ ad arcûs $EAF$ punctum quodvis $R$, & (subducto corpore $B$) demittatur inde, redeatque post unam oscillationem ad punctum $V$. Est $RV$ retardatio ex resistentia aeris. Hujus $RV$ fiat $ST$ pars quarta sita in medio, ita scilicet ut $RS$ & $TV$ æquentur, sitque $RS$ ad $ST$ ut 3 ad 2. Et ista $ST$ exhibebit retardationem in descensu ab $S$ ad $A$ quam proximè. Restituatur corpus $B$ in locum suum. Cadat corpus $A$ de puncto $S$, & velocitas ejus in loco reflexionis $A$ sine errore sensibili tanta erit, ac si in vacuo cecidisset de loco $T$. Exponatur igitur

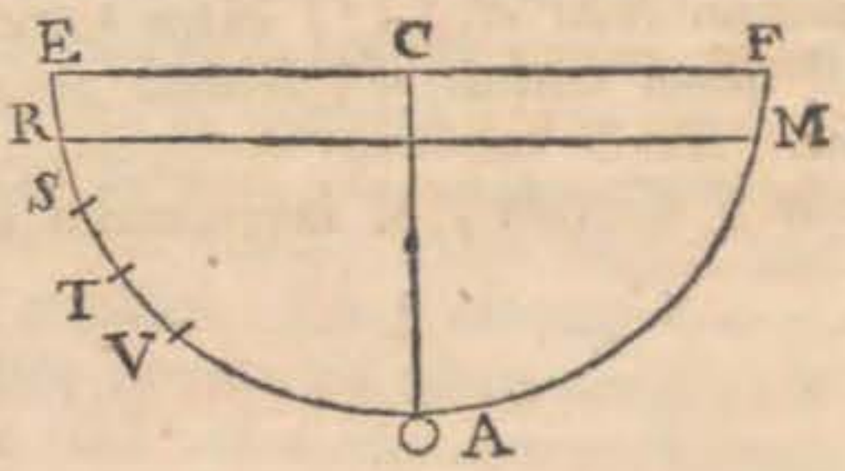
LEGES MOTUS.

te ad punctum infimum B, descendet, & ex impetu concepto, per arcum B D, ascendet ad eandem altitudinem D, ibique omni velocitate amissâ, vi gravitatis impellente ad punctum infimum B, relabetur, amissamque recuperans velocitatem redibit ad punctum C, atque ità continuas oscillationes itu & reditu in curvâ C B D, perficiet (86).

92. Coroll. 3. Si nulla foret medii resistentia, nullaque circà laminas incurvatas aut centrum rotationis frictio, æquales & perpetuæ forent pendulorum oscillationes; verùm has ob causas singulis vibrationibus, licet insensibiliter, minuitur penduli velocitas, arcusque continuò breviores describit ac tandem omninò quiescit.

93. Coroll. 4. Velocitates ejusdem penduli in circuli peripheriam excurrentis, sunt in puncto infimo ut arcuum descriptorum chordæ (88).

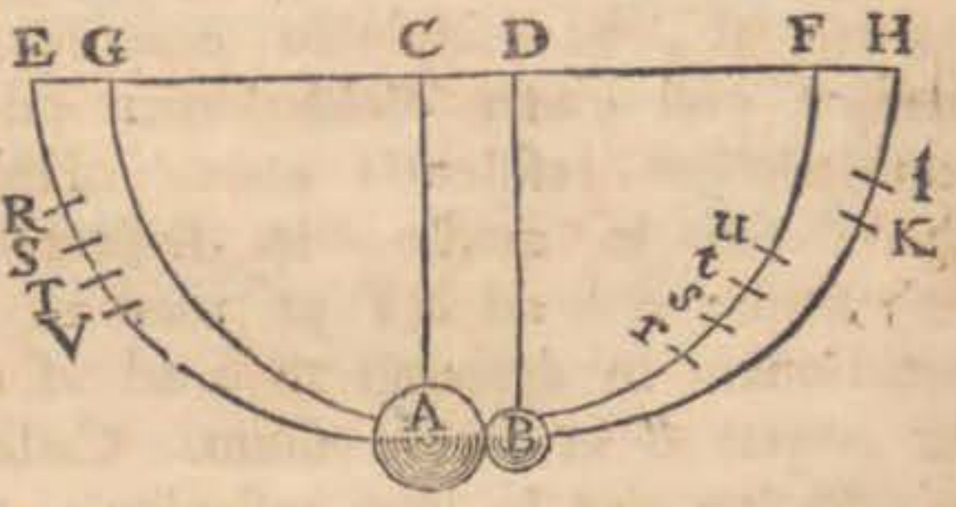
(b) 94. Trahatur corpus A, ad arcûs E A F, punctum quodvis R, & demittatur indè, sublatâ medii resistentiâ ad eandem altitudinem M, ascendere & rursùs ad punctum R, redire debet (92). Cum autem post unam oscillationem ex itu & reditu compositam perveniat (ex hyp.) ad punctum V, arcus R V exponet medii retardationem in duplici ascensu & descensu; quarè ut habeatur medii retardatio in uno tantum descensu sumenda est quarta pars totius retardationis id est quarta pars arcus R V, dummodo illo des-

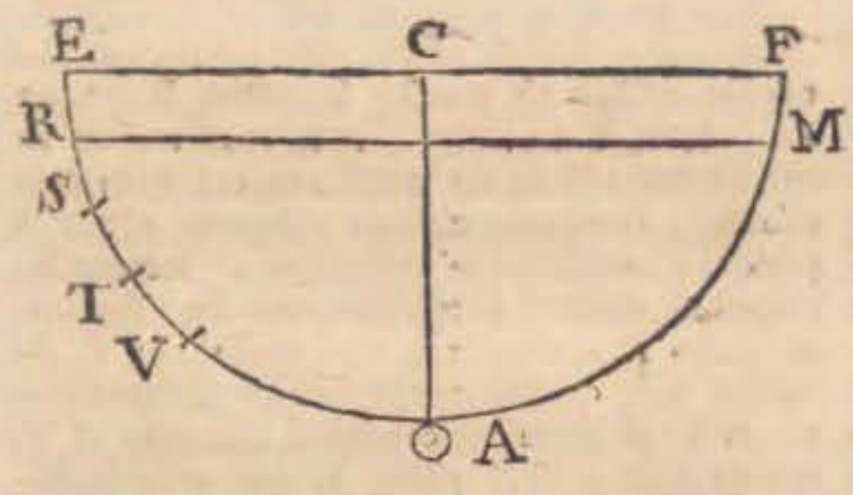



census neque ex puncto supremo R neque ex infimo V ordiatur, nam cum major sit medii retardatio in arcu majori quam in minori, semperque fiant minores arcus à pendulo oscillante descripti, inæquales quoque erunt retardationes in singulis arcubus, & retardatio descensus per R A, major erit quartâ parte totius retardationis R V ut retardatio ultimi ascensus A V, minor erit quartâ parte totius retardationis R V. Hoc autem aut simili calculo determinavit Newtonus punctum S tale ut retardatio in descensu per S A sit quarta pars totius retardationis R V. Dicatur arcus R A, 1, arcus R V, 4 $b$, arcus quæsitus S A $x$; sintque retardationes arcubus descriptis proportionales, erit arcus S A ($x$) ad arcum R A (1) ut retardatio arcus S A quæ statuitur esse $b$, seu quarta pars totius R V, ad retardationem primi arcus R A quæ erit $b:x$. Quærantur succes-

AXIOMATA, SIVE

tur hæc velocitas per chordam arcus *T A*. Nam velocitatem penduli in puncto infimo esse ut chordam arcûs, quem cadendo descripsit, propositio est geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*; â quo si corpus *A* demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum *r*, sit *s t* pars quarta ipsius *r v* sita in medio, ita videlicet ut *r s* & *t v* æquentur; & per chordam arcus *t A* exponatur velocitas, quam corpus *A* proxime post reflexionem habuit in loco *A*. (c) Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus *A*, sublatâ aeris resistentiâ, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* ascendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud ascen-




sivè retardationes secundi, tertii, quartive arcus eâdem ratione; arcus autem secundus est æqualis primo R A, dempta ejus retardatione *b* : *x*. Tertius arcus æqualis secundo demptâ ejus retardatione, & sic deinceps, omnes verò illæ retardationes simul sumptæ æquabuntur toti retardationi R V seu 4 *b*; unde fit æquatio ex quâ valor arcus S A, seu *x*, obtinebitur, per approximationem autem invenietur æqualis 1—3 : 2. *b*, sumatur itaque R S æqualis quartæ parti cum ejus semisse totius retardationis R V, retardatio per arcum S A erit æqualis S T quartæ parti totius retardationis R V, ideòque cadat corpus ex puncto S, ejus celeritas in A eadem est sine errore sensibili, ac si in vacuo decidisset ex T.

(c) 95. t, (fig. Newt.), erit locus verus & correctus ad quem corpus A, sublatâ aëris resistentiâ ascendere debuisset; nam corpus A, ex t, in medio non resistente descendens, in puncto infimo A, eam haberet velocitatem quâ posset arcum A t, ascendendo describere (91), & quâ ob aëris resistentiam, nonnisi arcum A s, (94) percurreret, ergò cum post reflexionem ascendat ad s, eam habet in A velocitatem, quâ in medio non resistente ad punctum t ascenderet.

ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus *A* (ut ita dicam) in chordam arcûs *TA*, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco *A* proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcus *t A*, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime post reflexionem. Et sic corpus *B* ducendum erit in chordam arcûs *B l*, ut habeatur motus ejus proximè post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, putà pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo directè occurrebant, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem semper esse æquales. Ut si corpus *A* incidebat in corpus *B* quiescens cum novem partibus motûs, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus *B* resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant, *A* cum duodecim partibus & *B* cum sex, & redibat *A* cum duabus; redibat *B* cum octo, factâ detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius *A* subducantur partes duodecim & restabit nihil: subducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & sic de motu corporis *B* partium sex subducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & post reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta translatione partium novem de *A* in *B*. Et sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex summâ motuum con-

LEGES MOTUS.

AXIOMATA, SIVE

ſpirantium & differentiâ contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accuratè. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo *A B*; tum loca *s*, *k* notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis corporibus pendulis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.

Porro nequis objiciat regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolutè dura eſſe, vel ſaltem perfectè elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; (d) addo quod experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum à conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi regula illa in corporibus non perfectè duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certâ proportione pro quantitate vis elaſticæ. In theoriâ *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolutè dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus. (e) Certius id affirmabitur de perfectè elaſticis. (f) In imperfectè elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi elaſticâ; propterea quod vis illa, (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub

(d) 96. Experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus & non elaſticis æquè ac in duris & elaſticis, ut potè non à conditione duritiei & elaſticitatis, ſed tantum ab actionis & reactionis æqualitate & oppoſitione pendentia; nam ſi regula illa in corporibus non perfectè elaſticis tentanda eſt, ut ex ipſorum motibus antè conflictum inveniantur motus poſt conflictum, debebit ſolum modò reflexio minui in certâ proportione, pro quantitate vis elaſticæ (52).

(e) 97. Certius id affirmabitur de perfectè elaſticis; corpora enim perfectè dura ſeu quorum partes nullâ vi finitâ ſeparari aut flecti poſſunt, nullâ quoque vi reſtitutivâ aut repulſivâ pollere videntur; adeóque cum nihil ſinè causâ fiat, corporum perfectè durorum concurrentium nulla videtur eſſe poſſe reflexio.

(f) 98. In imperfectè elaſticis, velocitas reditûs minuenda eſt cum vi elaſticâ, propterea quod vis illa, licet imperfecta, certa tamen ac determinata eſt, in iiſdem corporibus, niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur; dum enim corporis elaſtici fibræ ex ictu flectuntur, ſi aliqua abrumpatur fibra, ea non ſeſe reſtituit, adeóque vis corporis reſtitutiva minuitur; ſi verò fibræ extendantur, ut ferri lamina repetitis mallei ictibus in longum diducitur, pars ictûs huic fibrarum extenſioni adhibita, vi reſtitutivæ detrahitur. His cauſis addi poteſt inteſtinus partium corporis percuſſi motus

ſono

ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativâ, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in datâ ratione. Id in pilis ex lanâ arctè conglomeratâ & fortiter conſtrictâ ſic tentavi. Primum demittendo pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativâ, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia quoad ictus & reflexiones per theoriam comprobata eſt, quæ cum experientiâ plane congruit.

In

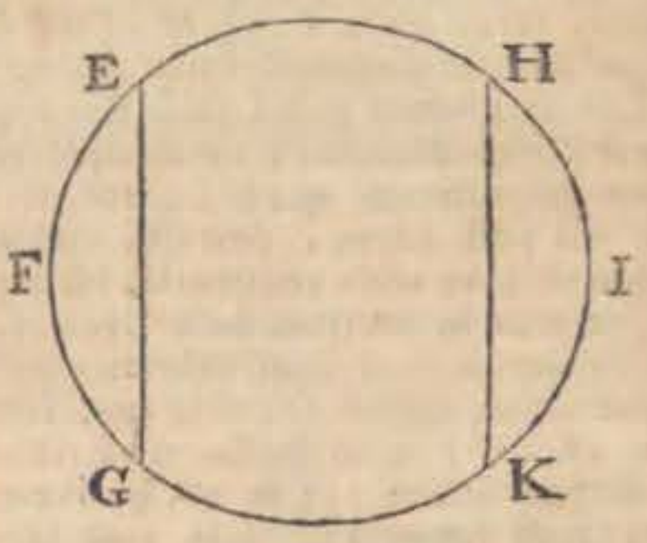
ſono ipſo ſatis indicatus, qui in reflexionem non impenditur. Hæc materia variis Rizzeti experimentis illuſtratur in Commentariis inſtituti Bononienſis. Tria globulorum vitreorum paria ſibi paravit Rizzetus; globuli primi paris diametrum habebant trium unciarum, ſecundi duarum, tertii unius, ità ut eſſent diverſorum parium diametri inter ſe, ut 3. 2. 1. fecit ut globuli primi paris filo appenſi ſimul congrederentur, notavitque velocitatem reſpectivam quam habuerunt vel antè vel poſt ictum, detractâ tamen more Newtoniano aëris reſiſtentiâ; idemque tentavit tum in 2°. tum in 3°. pari. In 1°. globulorum pari cum velocitas reſpectiva antè ictum fuiſſet 11, fuit poſt ictum 10; in 2°. pari cum fuiſſet antè ictum 16, fuit poſt ictum 15; in 3°. pari cum fuiſſet antè ictum 31; fuit poſt ictum 30. Undè velocitatis reſpectivæ defectus erat in primo pari 1:11. in 2°. pari 1:16. in 3°. pari 1:31; illi autem defectus ſunt fere diametris 3, 2, 1. proportionales. Aliud experimentum tentavit Rizzetus. Chordam calybeam duos pedes longam horizontaliter poſitam variis modis tendebat, donec tandem repererit tres chordæ tenſiones, quæ efficerent ut tempora quibus chorda pulſa ſeſe reſtituebat, forent ut 3. 2. 1. Eas autem tenſiones ſe aſſecutum eſſe ex graviori vel acutiori chordarum ſono intelligebat; in ſingulis tenſionibus globum eburneum cujus diameter erat duarum unciarum, filo decem pedes longo appenſum & in medio tantiſper complanatum in chordam demittebat, & detractâ aëris reſiſtentiâ, velocitatem reſpectivam antè & poſt ictum notabat. Obſervavit autem velocitatem antè ictum eſſe ad velocitatem poſt ictum, ut 11, ad 10, in 1ª tenſione, cum chorda pulſa reſtitueretur tempore 3; ut 16 ad 15 in 2ª tenſione, cum chorda reſtitueretur tempore 2; tandem ut 31, ad 30, in 3ª tenſione, cum chorda reſtitueretur tempore 1; undè concludit defectus ſingulos velocitatis poſt ictum, temporibus reſtitutionum eſſe proportionales. Manente igitur corporum homogeneorum magnitudine & figurâ, conſtans obſervatur ratio velocitatis reſpectivæ poſt ictum ad velocitatem reſpectivam antè ictum; ſed mutatâ magnitudine, experimenta Rizzeti oſtendunt defectus velocitatis reſpectivæ poſt ictum in globis homogeneis eſſe in ratione diametrorum, aut etiam in ratione temporum quibus globi compreſſi reſtituuntur.

39. Si

AXIOMATA, SIVE

In attractionibus rem ſic breviter oſtendo. Corporibus duobus quibuſvis *A*, *B*, ſe mutuo trahentibus, concipe obſtaculum quodvis interponi, quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur verſus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis *A* quam preſſione corporis *B*; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietque ut ſyſtema corporum duorum & obſtaculi moveatur in directum in partes verſus *B*, motuque in ſpatiis liberis ſemper accelerato abeat in infinitum. Quod eſt abſurdum & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. (g) Tentavi hoc in magnete & ferro. Si hæc in vaſculis propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aquâ ſtagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinque ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent.

Sic etiam gravitas inter terram & ejus partes mutua eſt. Secetur terra *F I* plano quovis *E G* in partes duas *E G F* & *E G I*: & æqualia erunt harum pondera in ſe mutuo. Nam ſi plano alio *H K* quod priori *E G* parallelum ſit, pars major *E G I* ſecetur in partes duas *E G K H* & *H K I*, quarum *H K I* æqualis ſit parti prius abſciſſæ *E F G*: manifeſtum eſt quod pars media *E G K H* pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, ſed




(g) 99. Si magnes ſuberis fruſto, ſimiliterque ferrum alio ſuberis fruſto imponantur, ut tam magnes quam ferrum in aquâ liberè ſtagnent, æquali motûs quantitate ſibi mutuo obviam eunt, ità ut eorum celeritates ſint in ratione ponderum reciprocâ; dum verò ad contactum pervenerunt, in æquilibrio conſiſtunt. Quarè hoc experimento manifeſtum eſt æqualem eſſe ferri in magnetem & magnetis in ferrum actionem. Similiter ſi quis in cymbâ aquis innatante poſitus, cymbam alte-

ſed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, ſuſpendetur, & quieſcet. Pars autem extrema *HKI* toto ſuo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis quâ partium *HKI* & *EGKH* ſumma *EGI* tendit verſus partem tertiam *EGF*, æqualis eſt ponderi partis *HKI*, id eſt ponderi partis tertiæ *EGF*. Et propterea pondera partium duarum *EGI*, *EGF* in ſe mutuo ſunt æqualia, uti volui oſtendere. Et niſi pondera illa æqualia eſſent, terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum.

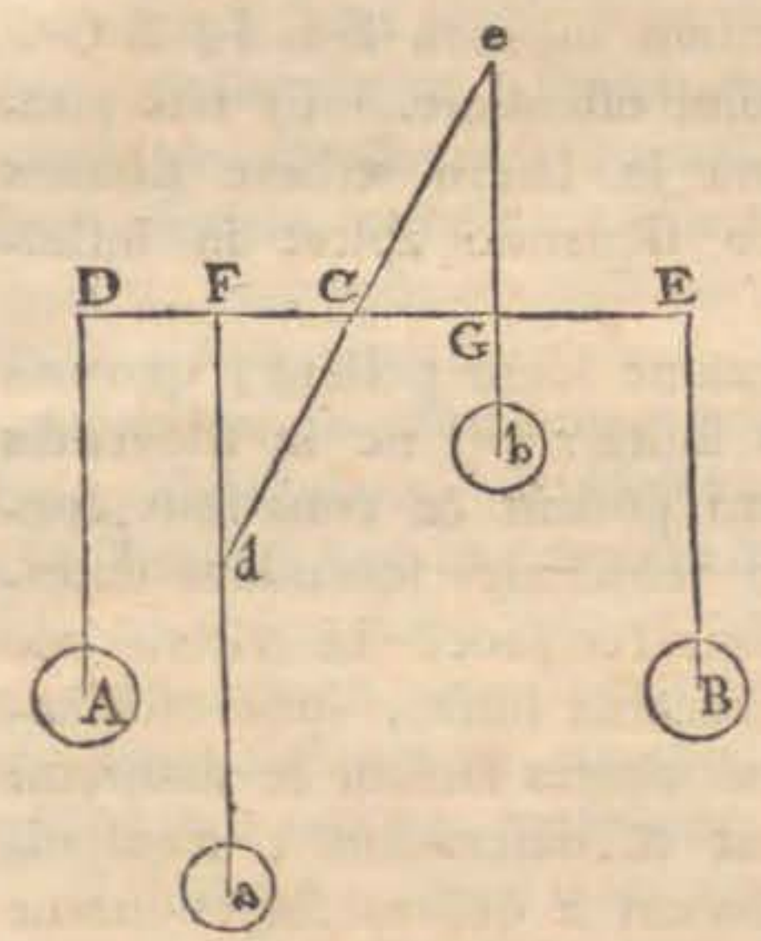
Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciprocè ut vires inſitæ: ([h]) ſic in movendis inſtrumentis mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundum determinationem virium æſtimatæ, ſunt reciprocè ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia libræ, quæ oſcillante librâ ſunt reciprocè ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt pondera, ſi rectà aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt reciprocè ut punctorum à quibus ſuſpenduntur diſtantiæ ab axe libræ; ſin planis obliquis aliiſve admotis obſtaculis impedita aſcendunt vel deſcendunt obliquè, æquipollent, quæ ſunt reciprocè ut aſcenſus & deſcenſus, quâtenus facti ſecundum perpendiculum: idque ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in trochlea ſeu polyſpaſto vis manûs funem directè trahentis, quæ ſit ad pondus vel directè vel obliquè aſcendens ut velocitas aſcenſus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum

alteram liberè fluitantem ope funis trahat, vel conto aliove inſtrumento repellat, cymbæ in partes contrarias cum æquali motûs quantitate ferentur, ità ut earum velocitates ſint in ratione reciprocâ ponderum.

([h]) 100. In movendis inſtrumentis mechanicis, agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundum directionem virium æſtimatæ ſunt reciprocè ut vires abſolutæ.... Dem.....

AXIOMATA, SIVE

dum & impediendum, ſi ſunt reciprocè ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, ſuſtinebunt ſe mutuò. (i) Vis cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi à




Duæ potentiæ, ſeu, quod idem eſt, duo pondera ope machinæ cujuſvis datæ in ſe mutuò ità agant, ut pondus unum ſecundum propriam directionem moveri nequeat, quin pondus alterum contrà propriam illius directionem rapiat; ſi loco machinæ datæ ſubſtituatur vectis cujus longitudo & hypomoclion talia ſint, ut duo pondera data, vectis extremitatibus appenſa, eâdem celeritate ac in machinâ datâ ſeſe mutuò moveant, iidem erunt in vecte & in machinâ datâ conatus ponderum in ſe mutuò, eadem ipſorum momenta; vis enim eadem requiritur ad eandem velocitatem ſecundùm eandem directionem in iiſdem corporibus producendam. Itaque vectis D E, horizontalis, cum appenſis ponderibus A & B, ro etur circa hypomoclion C, ut ſitum d e, obtineat, & producatur filum a d, uſque ad F; pondus A, ſecundum propriam directionem percurrit ſpatium F d; & pondus B, contrà propriam directionem eodem tempore percurrit ſpatium G e; adeóque horum ponderum velocitates ſunt ſemper ut ſpatia F d, G e, eodem tempore percurſa. Momentum ponderis a, eſt ut a × F C; momentum ponderis b, eſt ut b × C G (47). Sed ob ſimilitudinem triangulorum F C D, e C G; F C : C G = F d : G e. Ergò momenta ponderum a & b, ſunt inter ſe ut a × F d, & b × G e; ſeu ſunt ut facta ex ponderibus in ſua reſpective ſpatia eodem tempore percurſa, adeóque etiam ut facta ex ponderibus in ſuas reſpectivè velocitates; quare ſi facta illa æqualia ſint, aut quod idem eſt, ſi pondera ſeu vires ſint reciprocè ut velocitates ſecundùm directiones virium æſtimatæ, erit æquilibrium. Q. e. D.

101. Coroll. Cum ex demonſtratis, momenta virium ſint ſemper ut facta ex vi quâlibet in ſuam velocitatem, ſeu in ſpatium quod dato tempore ſecundùm propriam directionem ex diſpoſitione machinæ percurrere debet, omnium machinarum vires metiri licet.

(i) 102. Vis cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi à manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam cochleæ verſus corpus preſſum. Nam ſi reſiſtentia corporis comprimendi ut pondus movendum conſideretur, erit (101) momentum vis manubrium circumagentis, ut factum ex vi illâ in ſuam velocitatem, & momentum reſiſtentiæ ut factum ex reſiſtentiâ in ſuam quoque velocitatem; ut ergò ſit æquilibrium, debet eſſe reſiſtentia ad vim manûs, ut circularis velocitas manûs ad velocitatem reſiſtentiæ, ſive ad velocitatem progreſſivam cochleæ; aut quia manus deſcribit circulum cujus radius eſt manubrii longitudo, è centro cochleæ uſque ad manum ſumpta, dum interea cochlea per altitudinem ſeu diſtantiam duarum helicum progreditur, vis cochleæ ad premendum corpus erit ad vim manûs manubrium

à manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam cochleæ verſus corpus preſſum. (k) Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fiſſi ſunt ad vim mallei in cuneum, ut progreſſus cunei ſecundum determinationem vis à malleo in ipſum impreſſæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, ſecundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par eſt ratio machinarum omnium.

Harum efficacia & uſus in eo ſolo conſiſtit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde ſolvitur in omni aptorum inſtrumentorum genere problema, *Datum pondus datâ vi movendi*, aliamve datam reſiſtentiam vi datâ ſuperandi. Nam ſi machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & reſiſtentis ſint reciprocè ut vires; agens reſiſtentiam ſuſtinebit: & majori cum velocitatum diſparitate (l) eandem vincet. Certè ſi tanta ſit velocitatum diſparitas, ut vincatur etiam reſiſtentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter ſe labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem ſeparandorum cohæſione & elevandorum ponderibus oriri ſolet; ſuperatâ omni eâ reſiſtentiâ, vis redundans accelerationem motus ſibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore reſiſtente producet. Cæterum mechanicam tractare

nubrium circumagentis ut peripheria circuli prædicto radio deſcripti ad diſtantiam duarum helicum.

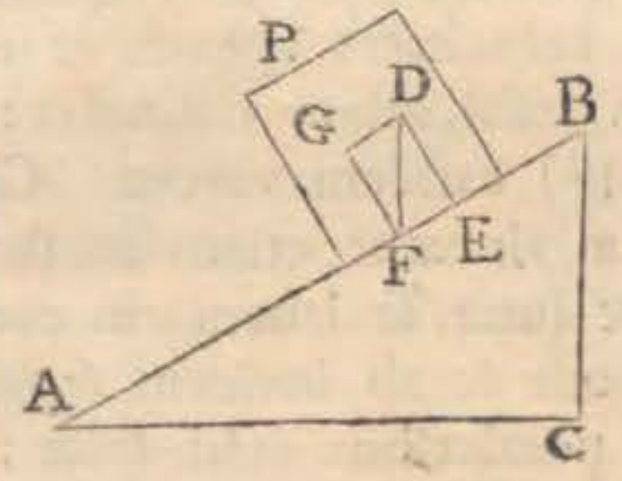
(k) 103. Momentum cunei eſt ut factum (101), ex vi impreſſâ à malleo in cunei velocitatem, ſeu in ſpatium quod dato tempore percurrit cuneus ſecundùm directionem vis à malleo impreſſæ; momentum verò reſiſtentiæ ligni cuneo findendi eſt ut factum ex illâ reſiſtentiâ in velocitatem, quâ partes ligni cedunt cuneo ſecundùm lineas faciebus cunei perpendiculares, juxtà quarum directionem partes ligni à cuneo moventur; eſt etiam momentum reſiſtentiæ ut factum ex reſiſtentiâ ligni in ſpatium quod partes ligni dato tempore deſcribunt, ſecundùm lineas faciebus cunei perpendiculares. Quoniam ägitur cuneus agens ſecundùm lineam baſi ipſius perpendicularem, totam ſuam altitudinem percurrit, dum partes ligni totâ baſis cunei latitudine à ſe invicem removentur, erit (in caſu æquilibrii) vis cunei ad ligni reſiſtentiam, ut cunei altitudo ad latitudinem ipſius baſis.

(l) 104. Attritionem ſeu frictionem, aliaſque reſiſtentias ex craſſitie rigiditate & funium flexione ortas in machinis conſiderare neceſſum eſt, graves alioquin in praxi errores naſcerentur.

Hanc difficilem materiam Sturmius, Leibnitius, Amontonius, Parentius, La-Hirius & alii tractarunt. Bulfingerus Tom. 2°. Comment. Acad. Petropol. ad tentandam experimentis frictionum menſuram duo proponit theoremata quæ ob eorum facilitatem & uſum hic exſcribere non abs re erit.

AXIOMATA, SIVE

re non eſt hujus inſtituti. Hiſce volui tantùm oſtendere, quàm latè pateat quàmque certa ſit lex tertia motûs. Nam ſi æſtimetur agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & ſimiliter reſiſtentis reactio æſtimetur conjunctim ex ejus partium ſingularum velocitatibus & viribus reſiſtendi ab earum attritione, cohæſione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni inſtrumentorum uſu, ſibi invicem ſemper




Suprà horizontem A C, experimento ſæpius inſtituto, elevetur planum A B, ad angulum B A C, ita ut ſi corpus plano A B, ad hunc angulum elevato imponatur, tantùm non deſcendat; deſcendat autem ſi angulus nonnihil augeatur; & hæreat cum aliquâ adverſus deſcenſum renitentiâ, ſi angulus minuatur. Hic angulus dicitur angulus quietis, eoque invento ſic inferatur.

Uti ſinus totus ad ſinum rectum anguli quietis, ità pondus abſolutum P, ad frictionem ejus ſuper plano ad prædictum angulum inclinato. Atque iterùm.

Uti Radius ad tangentem anguli quietis, ità pondus abſolutum P, ad frictionem ejus ſuper plano horizontali, cùm trahitur in directione ad horizontem parallelâ .... Dem ... Linea D F, horizonti perpendicularis, pondus abſolutum P, ſeu vim totam quâ corpus in perpendiculo deſcendere nititur, exponat; & ductâ D E, ad planum A B, normali; vis D F, in binas vires nempè D E, plano perpendicularem, & E F, ſeu D G, plano parallelam reſolvitur (41); vis D E, à plano A B, etiam perfectè lævigato tota ſuſtinetur, & ſolâ vi D G, ſeu E F, pondus P, nititur juxtà plani directionem deſcendere; Cùm igitur ob frictionem in plano aſpero A B, tantùm non deſcendat, erit frictio æqualis vi E F; eſt itaque pondus abſolutum P, ad frictionem ejus ſuper plano inclinato A B, ut D F, ad F E, hoc eſt, ob angulum E rectum & angulum F D E æqualem angulo quietis B A C, ut ſinus totus ad ſinum anguli quietis. Q. erat 1^um.

Jam ut idem transferatur ad planum horizontale, debet vis D E, plano perpendicularis, conſiderari ut pondus abſolutum, & ità planum A B, ſe habebit ut planum horizontale reſpectu ponderis D E; vis autem F E, ſeu frictio conſideranda eſt tanquam vis in æquilibrio conſtituta cum vi æquali trahente pondus D E, ſecundùm directionem plano A B, parallelam; & ob triangulorum F D E, B A C, ſimilitudinem, manifeſtum eſt pondus D E, eſſe ad frictionem F F, ſeu pondus abſolutum in plano horizontali horizontaliter tractum, eſſe ad frictionem ejus, ut Radius ad tangentem anguli quietis. Q. erat 2^um.

105. Coroll. In his duobus caſibus, frictiones, cæteris omnibus paribus, ſunt preſſionibus proportionales; nam frictio in plano inclinato dicatur f; in plano horizontali F, & erit per 1^um. theor. P : f = A B : B C; & per 2^um. theorema P : F = A C; B C. ſeu F : P = B C : A C; adeóque per compoſitionem rationum P. F : P. f = A B × B C : B C × A C, ac proindè F : f = A B : A C = F D : D E; hoc eſt, frictio in plano horizontali

per æquales. Et quatenus actio propagatur per inſtrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne reſiſtens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis ſemper erit contraria. LEGES MOTUS.

tali eſt ad frictionem in plano ad angulum quietis inclinato, ut preſſio in plano horizontali ad preſſionem in plano inclinato.

De Motu Corporum.

# DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

## SECTIO I.

### *De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.*

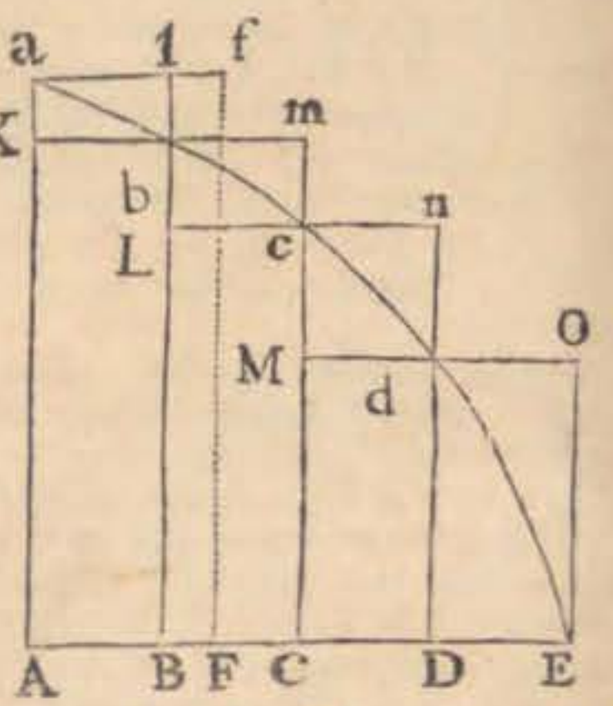
### LEMMA I.

*Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propiùs ad invicem accedunt quàm pro datâ quavis differentiâ, fiunt ultimò æquales.*

SI negas; fiant ultimò inæquales, & sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propiùs ad æqualitatem accedere quam pro datâ differentiâ *D*: contra hypothesin.

### LEMMA II.

*Si in figurâ quâvis* A a c E, *rectis* A a, A E *& curvâ* a c E *comprehensâ, inscribantur parallelogramma quotcunque* A b, B c, C d, &c. *sub basibus* A B, B C, C D, &c. *æqualibus, & lateribus* B b, C c, D d, &c. *figuræ lateri* A a *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* a K b l, b L c m, c M d n, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta* A K b L c M d D, *circumscripta* A a l b m c n d o E, *& curvilinea* A a b c d E, *sunt rationes æqualitatis.*




Nam

Nam figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ differentia eſt ſumma parallelogrammorum $Kl$, $Lm$, $Mn$, $Do$, hoc eſt (ob æquales omnium baſes) rectangulum ſub unius baſi $Kb$ & altitudinum (m) ſumma $Aa$, id eſt, rectangulum $ABla$. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus $AB$ in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per lemma 1) figura inſcripta & circumſcripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimò æquales. *Q. E. D.*

## LEMMA III.

*Eædem rationes ultimæ ſunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines* AB, BC, CD, &c. *ſunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim $AF$ æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum $AFfa$, & ſint latera $Ff$, $Aa$ producta ad $G$ & $g$, ut ſit $FG$ æqualis $Ff$, & $Ag$ æqualis $Aa$. Et ſint $AB$, $BC$, $CD$, &c. latitudines inæquales, & omnes minuantur in infinitum. Et ſint $Bb$, $Cc$, $Dd$, &c. lineæ parallelæ ad $Aa$ terminatæ in curva linea $abcd$. Et ſint $Kb$, $Lc$, $Md$, &c. lineæ parallelæ ad $AB$ terminatæ in $Aa$ & $Ff$. Et ſint $Ka$, $Lb$, $Mc$, $Dd$, lineæ parallelæ ad $Aa$ terminatæ in $Ff$ & $Gg$. Et ſint $Kl$, $Lm$, $Mn$, $Do$, lineæ parallelæ ad $Ff$ terminatæ in $Gg$. Et ſint $Ka$, $Lb$, $Mc$, $Dd$, lineæ parallelæ ad $Aa$ terminatæ in $Ff$ & $Gg$. Et ſint $Kl$, $Lm$, $Mn$, $Do$, lineæ parallelæ ad $Ff$ terminatæ in $Gg$.

(m) 106. Si fuerint quotcunque & cujuſvis generis quantitates decreſcentes, $Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$, erunt omnium differentiæ ſimul ſumptæ æquales exceſſui maximæ ſuprà minimam. Nam perſpicuum eſt $Aa - Bb + Bb - Cc + Cc - Dd = Aa - Dd$: unde ſi ultima ſeriei quantitas ſit 0, ut in ſerie $Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$, 0, ſumma differentiarum $Ka + Lb + Mc + Dd$, æqualis erit quantitati maximæ $Aa$.

107. Linea $Bb$, motu ſibi ſemper parallelo accedat ad lineam $Aa$, & interim punctum $b$, ita moveatur in linea $Bb$, ut ſemper reperiatur in arcu $ba$; decreſcente linearum $Aa$, $Bb$, diſtantiâ $AB$, decreſcit quoque earum differentia $Ka$, ac tandem evaneſcente $AB$, evaneſcit $Ka$, & $Bb$, ſeu $AK$, fit ultimò æqualis lineæ $Aa$; evaneſcunt autem $AB$ & $Ka$, cum lineæ $Aa$, $Bb$, neque diſtantes, neque prorſus congruentes dici poſſunt, ſed ſimul, ut ita dicam, conjungi incipiunt. In illo ſtatu evaneſcentiæ, linearum $Aa$, $Bb$, differentia $Ka$, minor eſt quâvis lineâ datâ, ſeu infinite parva eſt, aut inaſſignabilis reſpectu $AK$ & $Bb$; quantitas autem evaneſcens, ſeu infinitè parva, eſt ad quantitatem finitam ut finitum ad infinitum; quare cum notum ſit infinitum ex finiti additione vel ſubtractione non mutari, aut tanquam immutatum haberi poſſe, liquet lineas $Bb$ ſeu $AK$ & $Aa$, ſeu $AK + Ka$, pro æqualibus poſſe uſurpari. Similiter, quia evaneſcente $Ka$, trianguli $Kab$, & parallelogrammi $Kl$, areæ infiniteſimæ ſunt reſpectu parallelogrammi evaneſcentis $Ab$, parallelogrammum iſtud $Ab$, uſurpari poteſt pro parallelogrammo $Al$, aut etiam pro figurâ $ABba$, hoc eſt, pro differentia arearum curvilinearum $AEca$, $BEcb$.

108. Ex his ſequitur diverſos eſſe infiniteſimorum ordines; nam oſtenſum eſt (107) parallelogrammum $Kl$, infiniteſimum eſſe reſpectu parallelogrammi $Ab$, hoc verò parallelogrammum infiniteſimum eſſe reſpectu areæ curvilineæ $AEca$.

109. Figura $AEca$, circa axem ſuum $AE$, revolvatur, & quælibet ordinata $Aa$, $Bb$, deſcribet circulum, cujus eſt ordinata ipſa radius, quodlibet rectangulum evaneſcens ut $KB$, $aB$, deſcribet cylindrum evaneſcentem, & rectangula, $Kl$, $Im$, $Mn$, $Do$, ſingula deſcribent annulos ſolidos, quorum ſumma æqualis erit

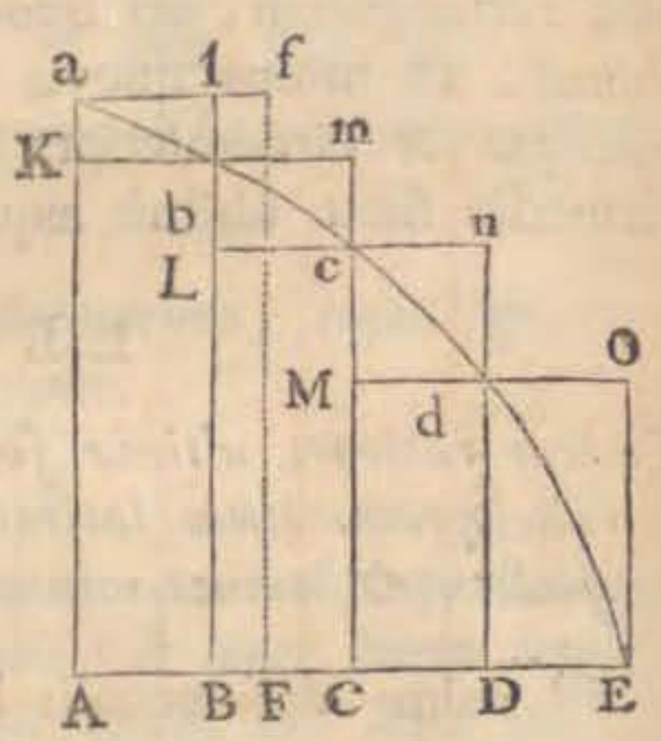
DE MOTU CORPORUM.

rallelogrammum *F A a f*. (n) Hoc erit majus quàm differentia figuræ inſcriptæ & figuræ circumſcriptæ; at latitudine ſuâ *A F* in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

*Corol.* 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium arcuum *a b*, *b c*, *c d*, &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figurâ curvilineâ.

*Corol.* 3. Ut & figura rectilinea circumſcripta quæ tangentibus eorumdem arcuum comprehenditur.




*Corol.* 4. (o) Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *a c E*,) non ſunt rectilineæ, ſed rectilinearum limites curvilinei.

## LEMMA IV.

*Si in duabus figuris* A a c E, P p r T, *inſcribantur* (*ut ſupra*) *duæ parallelogrammorum ſeries, ſitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ*

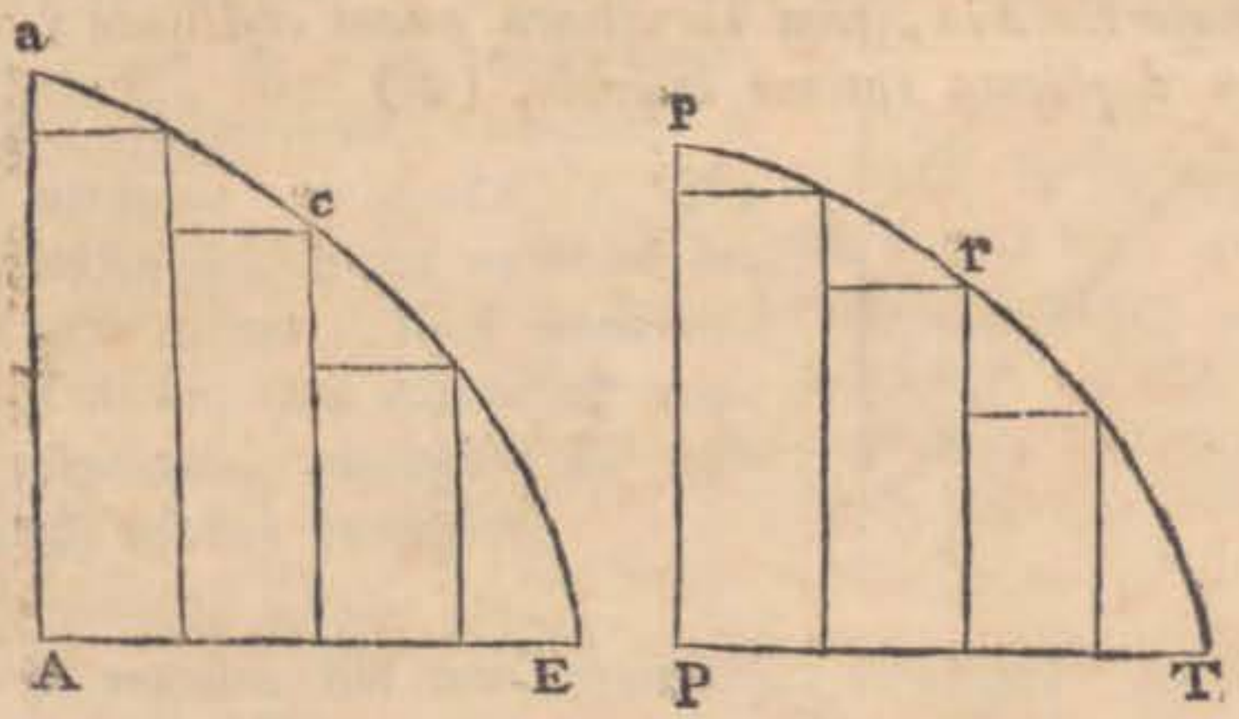
erit cylindro ex rotatione rectanguli A I deſcripto. Quare cum hic cylindrus ſit infinitesimus, patet (per lemma 1) ultimam rationem ſolidi ex cylindris omnibus compoſiti ad ſolidum ex rotatione figuræ curvilineæ A E c a, genitum eſſe rationem æqualitatis.

(n) 110. Nam ſi ſingulorum parallelogrammorum latitudo æqualis eſſet lineæ A F, figuræ inſcriptæ & figuræ circumſcriptæ differentia foret parallelogrammum A f, (lem. 11); cùm igitur ſingulorum parallelogrammorum latitudo minor ſit latitudine A F, (ex hyp.) prædicta figurarum differentia minor quoque eſt parallelogrammo A f.

(o) 111. Propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros a c E) non ſunt rectilineæ, ſeu non ſunt ex lateribus rectis quocumque numero finito compoſitæ, ſed ſunt figurarum rectilinearum quarum latera numero augentur & longitudine minuuntur in infinitum, limites curvilinei. Dum enim ordinatarum A a, B b, ac proinde chordarum a b, b c, numerus in infinitum augetur, & diſtantiæ A B, B C, in infinitum minuuntur, puncta a, b, K, l, & b, c, L, m, &c. coeunt & curvam a c E formant.

112. De-

*timæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, ſingulorum ad ſingula, ſint eædem; dico quod figuræ duæ* AacE, PprT, *ſunt ad invicem in eâdem illâ ratione.*



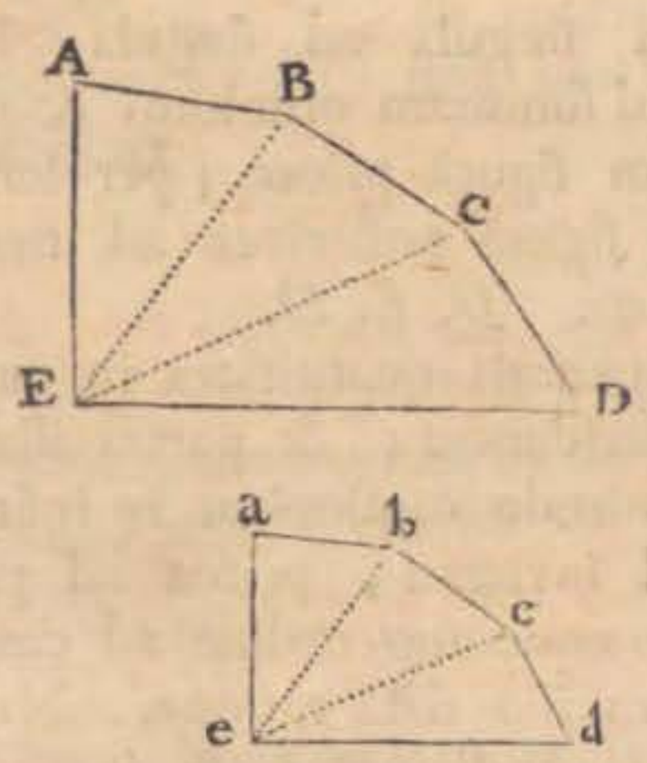

Etenim ut ſunt parallelogramma ſingula ad ſingula, ita (componendo) fit ſumma omnium ad ſummam omnium, & ita figura ad figuram; exiſtente nimirum figurâ priore (per lemma III) ad ſummam priorem, & figurâ poſteriore ad ſummam poſteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

*Corol.* Hinc ſi duæ cujuſcunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, cæteræque ſuo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam ſi in lemmatis hujus figuris ſumantur parallelogramma inter ſe ut partes, ſummæ partium ſemper erunt ut ſummæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id eſt (per hypotheſin) in ultimâ ratione partis ad partem.

DE MOTU CORPORUM.

## LEMMA V.

*Similium figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuo reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ ſunt in duplicata ratione laterum.* (P)




(P) 112. Demonſtr.... Duæ figuræ, A D E, a d e, ſimiles dicuntur, quarum latera omnia ſibi mutuò reſpondentia, ut A B, a b, B C, b c, proportionalia ſunt, & angulos æquales, ut A B C, a b c, continent; undè jam paret ſummas laterum utriuſque figuræ eſſe inter ſe ut duo quævis latera correſpondentia A B, a b. Ductis ex E, & e, ad omnes angulos lineis E B, E C, e b, e c, figuræ in ſua

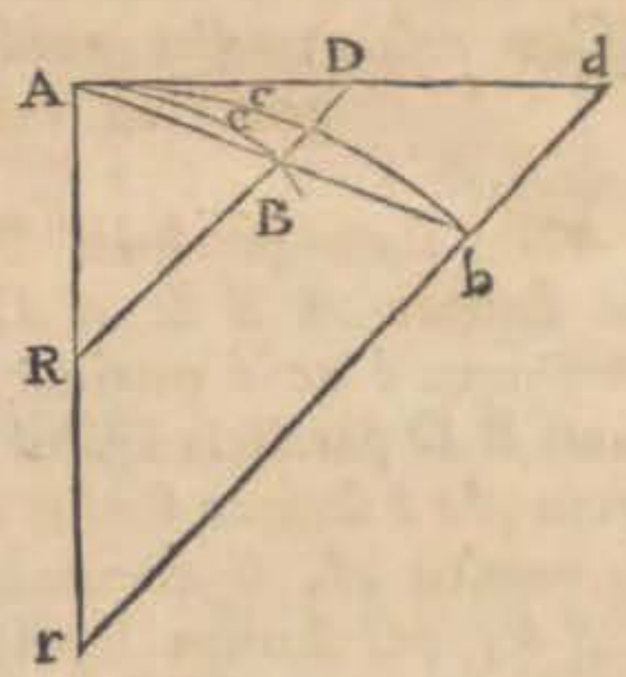
LEM.

triangula dividantur; & quòniam anguli D & d, æquales ſunt, lateraque E D, e d, D c, d c, proportionalia, (per definit.), duo triangula E C D, e c d, erunt ſimilia, adeóque anguli E C D, e c d, æquales, & latera E C, e c, lateribus C D, c d proportionalia; quare cum anguli B C D, b c d ſint etiam æquales (per definit.), æquantur quoque anguli, E C B, e c b, & quia B C : b c = C D : c d = E C : e c, triangula duo E B C, e b c ſimilia erunt. Idem eâdem ratione de aliis triangulis E B A, e b a demonſtratur. Verùm areæ ſingulorum triangulorum ſimilium, quæ in duabus figuris ſibi mutuò reſpondent, ſunt inter ſe in duplicatâ ratione laterum homologorum, ac proindè in datâ ratione; ergò ſummæ triangulorum, in utráque figurâ, hoc eſt, figurarum areæ rationem habent laterum homologorum duplicatam. Jam numerus laterum A B, B C, &c. a b, b c, &c. augeatur & eorum longitudo minuatur in infinitum, & (per Cor. 4. Lem. III.) figuræ A B C D, a b c d, fiunt curvilineæ; ſimilium igitur figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuò reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areæ ſunt in duplicatâ ratione laterum. Q. E. D.

113. Cur-

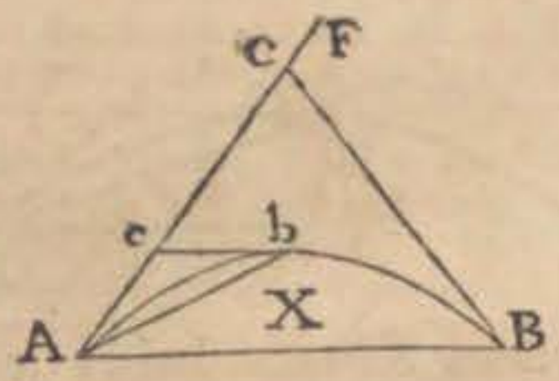
## LEMMA VI.

*Si arcus quilibet positione datus* ACB *subtendatur chordâ* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ* (q) *continuæ, tangatur à rectâ utrinque productâ* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus* BAD, *sub chordâ & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimò evanescet.*




Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus *ACB* cum tangente *AD* angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum *A* non erit continua, contra hypothesin.

LEM-



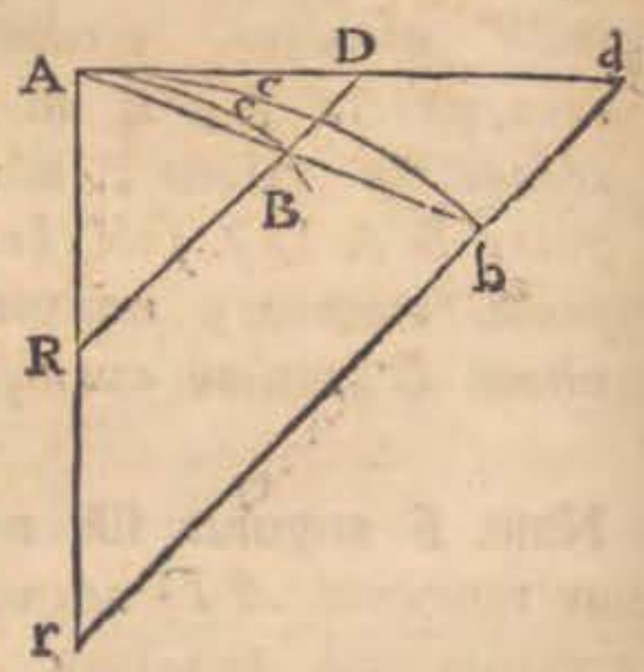

(q) 113. Curva continua BA, considerari potest tanquam descripta motu puncti B continuò mutantis directionem suam quâ per rectam tangentem BC, progredi nititur. Unde si arcus AB, sit ubique versus eamdem partem X, cavus, semperque ducantur tangentes AF, BC, sese intersecantes in C, accedente puncto B, ad A, anguli BCF, BAC, CBA, quos tangentes & chordæ complectuntur, continuò, non verò per saltum, decrescunt, & evanescente chordâ Ab, evanescunt, atque nulli fiunt, dum punctum b, idem omninò est cum puncto A. Necesse igitur est ob continuitatem decrementorum, ut angulus CAb, per omnes magnitudinis gradus inter angulum CAB, & 0, seu nihilum medios transeat priusquam nullus omnino sit; quod generatim statuendum est de omnibus quantitatibus, quæ nascuntur & continuò crescunt, vel quæ continuò decrescunt & tandem evanescunt; non possunt enim continuò crescere vel decrescere, nec ab uno extremo ad alterum pervenire, quin per omnes gradus magnitudinis inter duo extrema medios transeant. Itaque inter tangentem AF, & chordam infinitesimam Ab, nulla duci potest linea recta, quæ angulum finitum cum chordâ vel tangente efficiat; ideoque inter arcum AB, & tangentem AF, nulla duci potest linea recta quæ arcum non secet.

DE MOTU CORPORUM.

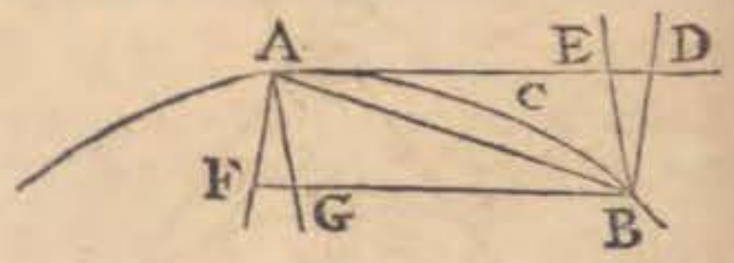
## LEMMA VII.

*Iisdem positis; dico quod ultima ratio arcûs, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *A B* & *A D* ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & (r) secanti *B D* parallela agatur *b d*. Sitque arcus *A c b* semper similis arcui *A C B*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *d A b*, per lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ *A b*, *A d*, & arcus intermedius *A c b* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ *A B*, *A D*, & arcus intermedius *A C B* evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*




*Corol.* 1. Undè si per *B* ducatur tangenti parallela *B F*, rectam quamvis *A F* per *A* transeuntem perpetuo secans in *F*, hæc *B F* ultimo ad arcum evanescentem *A C B* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *A F B D* rationem semper habet æqualitatis ad *A D*.




*Corol.*

(r) 114. Secans R D, supponitur semper efficere cum rangente A D & chordâ A B, angulos finitos, aut angulos ad quos angulus evanescens B A D, rationem habet infinitesimam; nam si anguli A B D, B A D, essent ejusdem ordinis infinitesimi, trianguli A B D latera finitam haberent inter se rationem. Angulus enim externus B D d, æqualis duobus internis oppositis D A B, D B A, esset ejusdem ordinis cum illis angulis; & quoniam in omni triangulo latera sunt ut sinus angulorum oppositorum, latera A B, B D, A D, finitam rationem haberent sinuum angulorum ejusdem ordinis B D d, D A B, A B D; cùm autem anguli A & B, supponuntur infinitesimi, angulus A D B est obtusus, adeóque chorda A B, majori angulo oppositæ, ad rangentem A D, datam habebit majoris inæqualitatis rationem.

*Corol.* 2. Et ſi per *B* & *A* ducantur plures rectæ *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, ſecantes tangentem *AD* & ipſius parallelam *BF*; ratio ultima abſciſſarum omnium *AD*, *AE*, *BF*, *BG*, chordæque & arcus *AB* ad invicem erit ratio æqualitatis.

*Corol.* 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

## LEMMA VIII.

*Si rectæ datæ* AR, BR *cum arcu* ACB, *chordâ* AB *& tangente* AD, *triangula tria* RAB, RACB, RAD *conſtituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evaneſcentium eſt ſimilitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur ſemper *AB*, *AD*, *AR* ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipſique *RD* parallela agi *r b d*, & arcui *ACB* ſimilis ſemper ſit arcus *A c b*. Et coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *b A d* evaneſcet, & propterea triangula tria ſemper finita *r A b*, *r A c b*, *r A d* coincident, ſuntque eo nomine ſimilia & æqualia. Unde & hiſce ſemper ſimilia & proportionalia *RAB*, *RACB*, *RAD* fient ultimo ſibi invicem ſimilia & æqualia. *Q. E. D.*

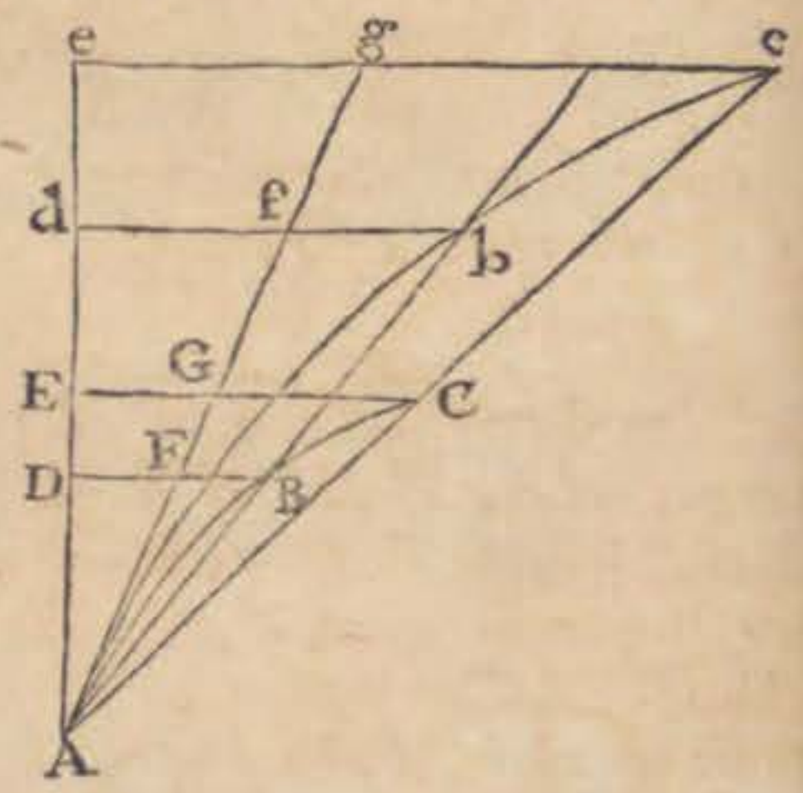
*Corol.* Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

De Motu Corporum.

## LEMMA IX.

*Si recta* A E *& curva* A B C *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* B D, C E, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C, *simul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* A B D, A C E *erunt ultimo ad invicem in duplicatâ ratione laterum.*

Etenim dum puncta *B*, *C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur semper *A D* produci ad puncta longinqua *d* & *e*, ut sint *A d*, *A e* ipsis *A D*, *A E* proportionales, & erigantur ordinatæ *d b*, *e c* ordinatis *D B*, *E C* parallelæ quæ occurrant ipsis *A B*, *A C* productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva *A b c* ipsi *A B C* similis, tum recta *A g*, quæ tangat curvam utramque in *A*, & secet ordinatim applicatas *D B*, *E C*, *d b*, *e c* in *F*, *G*, *f*, *g*. (f) Tum manente longitudine *A e* coeant puncta *B*, *C* cum puncto *A*; & angulo *c A g* evanescente, coincident areæ curvilineæ *A b d*, *A c e* cum rectilineis *A f d*, *A g e*; ideoque (per lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum *A d*, *A e*: Sed his areis proportionales semper sunt areæ *A B D*, *A C E*, & his lateribus latera *A D*, *A E*. Ergo & areæ *A B D*, *A C E* sunt ultimo in duplicatâ ratione laterum *A D*, *A E*. *Q. E. D.*




L E M-

(f) 115. Tum manente longitudine finitâ A e, & mutatâ, si necessum fuerit, longitudine A d, ut sit semper A d : A e = A D : A E, coeant puncta B, C, cum puncto A, &c.

116. Spa-

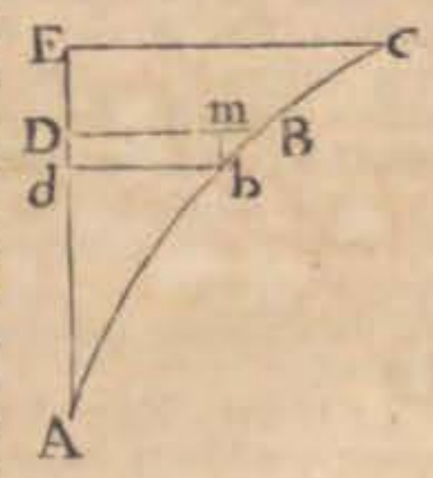
## LEMMA X.

*Spatia quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ describit, sive vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuò augeatur vel continuò diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicatâ ratione temporum.*

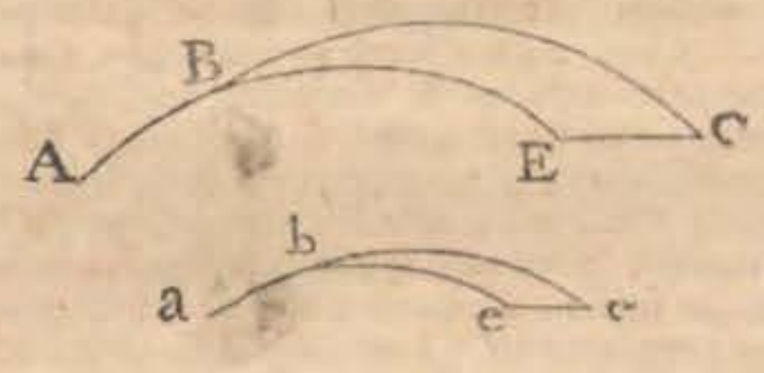
Exponantur tempora per lineas $AD$, $AE$, & velocitates genitæ per ordinatas $DB$, $EC$; (t) & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ $ABD$, $ACE$ his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per lemma IX) in duplicatâ ratione temporum $AD$, $AE$. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. (u) Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus descri-

(t) 116. Spatia his velocitatibus descripta erunt ut areæ A B D, A C E, his ordinatis descriptæ. Nam ductâ d b, ipsi D B, infinitè propinqua, ita ut D d, sit infinitesima seu evanescens respectu A D, A E, lineæ D B, d b, & rectangulum d m, ac figura D d b B, pro æqualibus respective usurpari possunt (107), adeò ut per tempusculum infinitesimum, D d, velocitas D B, tanquam uniformis haberi possit; spatium autem æquabili velocitate d b, percursum, est ut factum ex velocitate d b, & tempusculo D d, (5), hoc est, ut rectangulum D d × d b, seu ut area D B b d; si igitur areæ A C E, A D B, in infinita numero atque infinitesima rectangula, ut d m, divisæ concipiantur, erunt summæ spatiorum percursorum, seu spatia temporibus A E, A D, percursa, ut summæ horum rectangulorum, hoc est, ut areæ ipsæ A C E, A B D, (Lem. III).




117. Cor. Vis acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio considerari potest, tanquam vis determinata & immutabilis. Spatia enim, quæ corpus urgente vi acceleratrice constante describit, sunt semper in duplicatâ temporum ratione (27); & contra, si spatia percursa duplicatam habeant temporum rationem, vis acceleratrix constans est; nam si mutabilis esset vis, illa quoque temporum & spatiorum proportio mutaretur. Ergò (Lem. X) vis quælibet acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio tanquam immutabilis spectari potest.




(u) 118. Corpora duo A & a, curvas similes A B E, a b e, illarumque partes similes A B, a b, B E, b e, temporibus proportionalibus describant; duobus hisce corporibus, cum ad puncta B & b, pervenerint, accedunt novæ vires acceleratrices inter se æquales & similiter applicatæ, quæ prioribus viribus additæ corpora deferant per arcus B C, b c. Jungan-

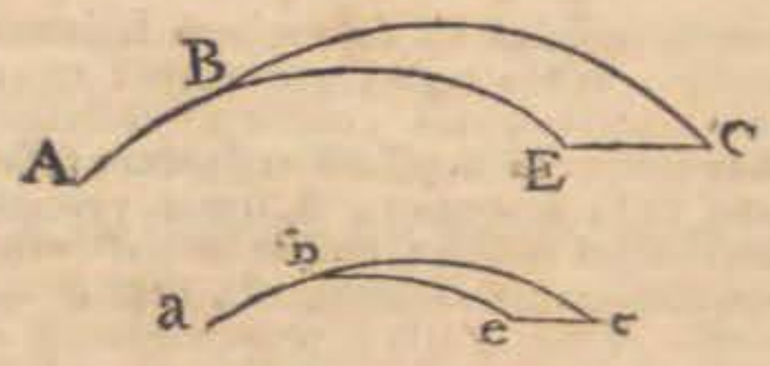
DE MOTU CORPORUM.

describentium errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur per distantias corporum à figurarum similium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus sine viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proximè.

*Corol.* 2. (x) Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

*Corol.* 3. (y) Idem intelligendum est de spatiis quibusvis quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

*Corol.* 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, descripta directè & quadrata temporum inversè. *Corol.*




gantur rectæ E C, e c, quæ errores solâ virium perturbantium actione genitos exponent; Lineæ enim illæ sunt spatia solâ virium perturbantium actione descripta. Cum autem vires perturbantes supponantur æquales & similiter applicatæ, idem contingere debet ac si corpus aliquod eâdem vi acceleratrice sollicitatum spatia E C, e c, diversis temporibus describeret, adeoque spatia illa sunt, ipso motus initio, ut quadrata temporum quibus percurruntur (Lem. X) B C, b c, & quibus absque virium perturbantium actione percurrerentur arcus similes B E, b e; si igitur vires illæ perturbantes supponantur constantes, spatia E C, e c, non solùm motus initio, sed & tempore finito descripta, erunt ut prædictorum temporum quadrata (27). Undè si admodum exigua sit virium perturbantium variatio, spatia seu errores erunt quam proximè ut quadrata temporum.

(x) 119. Errores autem qui viribus proportionalibus, seu viribus in datâ ratione existentibus, ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim. Nam si tempora sunt eadem, errores sunt in data ratione virium; si vires sunt eædem, errores sunt in duplicata ratione temporum quibus generantur; cum igitur vires & tempora variant, errores sunt in ratione compositâ ex datâ virium ratione & duplicatâ temporum.

(y) 120. Nam vires motus initio tanquam constantes haberi possunt (117); dupla autem spatia, adeóque simplicia spatia, quæ corpora urgentibus viribus constantibus describunt, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim (30); ergo spatia quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt, sunt, ipso motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim. Si itaque vires acceleratrices, motus initio, sint G, g, spatia S, s, tempora T, t, erit S : s = G T T : g t t, ideoque G : g = S : T T : s : t t, & T T : t t = S : G : s : g, hoc est, vires sunt ut spatia motus initio descripta directè & quadrata temporum inversè; Temporum verò quadrata sunt ut descripta spatia directè & vires inversè.

121. Cir-

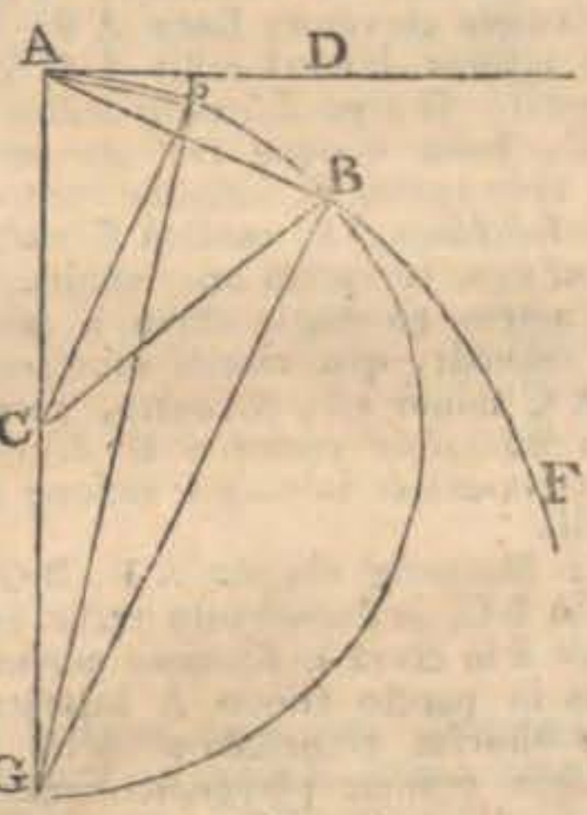
*Corol.* 5. Et quadrata temporum ſunt ut deſcripta ſpatia directè & vires inversè.

## *Scholium.*

Si quantitates indeterminatæ diverſorum generum conferantur inter ſe, & earum aliqua dicatur eſſe ut eſt alia quævis directè vel inversè: ſenſus eſt, quòd prior augetur vel diminuitur in eâdem ratione cum poſteriore, vel cum ejus reciprocâ. Et ſi earum aliqua dicatur eſſe ut ſunt aliæ duæ vel plures directè aut inversè: ſenſus eſt, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut ſi A dicatur eſſe ut B directè & C directè & D inversè: ſenſus eſt, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$ hoc eſt, quod A & $\frac{BC}{D}$ ſunt ad invicem in ratione datâ.

## LEMMA XI.

*Subtenſa evaneſcens anguli contactus, in curvis omnibus* (z) *curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, eſt ultimo in ratione duplicatâ ſubtenſæ arcus contermini.* Caſ.

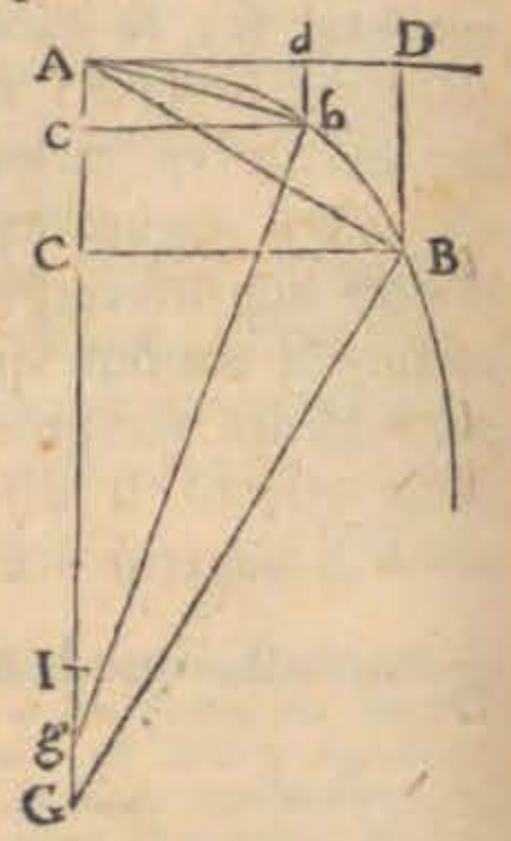



(z) 121. Circuli curvatura eſt in omnibus circumferentiæ punctis eadem, ſeu uniformis; in variis autem circulis eo major eſt, quo minor eſt circuli radius, adeò ut circuli curvatura ſit ſemper in ratione inversâ radii. Aliarum linearum curvatura in ſingulis punctis determinatur per curvaturam arcus circularis qui cum arcu infinitesimo curvæ in puncto dato congruit, ſeu, quod idem eſt, qui curvam in puncto dato oſculatur. Eſt igitur lineæ cujuſvis in puncto dato curvatura inversè ut radius circuli curvam lineam in dato puncto oſculantis.

Sumantur duo curvæ A F, puncta A & B, ducanturque rectæ A C, B C, ad curvam perpendiculares, & ex puncto interſectionis C, tanquam centro, radiis C A, C B, duo deſcribantur circuli, quorum unus radio C A, deſcriptus tanget curvam in A, alter autem radio C B, deſcriptus tanget eam in B. Si ad ſe mutuò accedant puncta A & B, donec arcus A B evaneſcat, duæ perpendiculares A C, B C, pro æqualibus uſurpari poterunt (Lem. I),

DE MOTU CORPORUM.

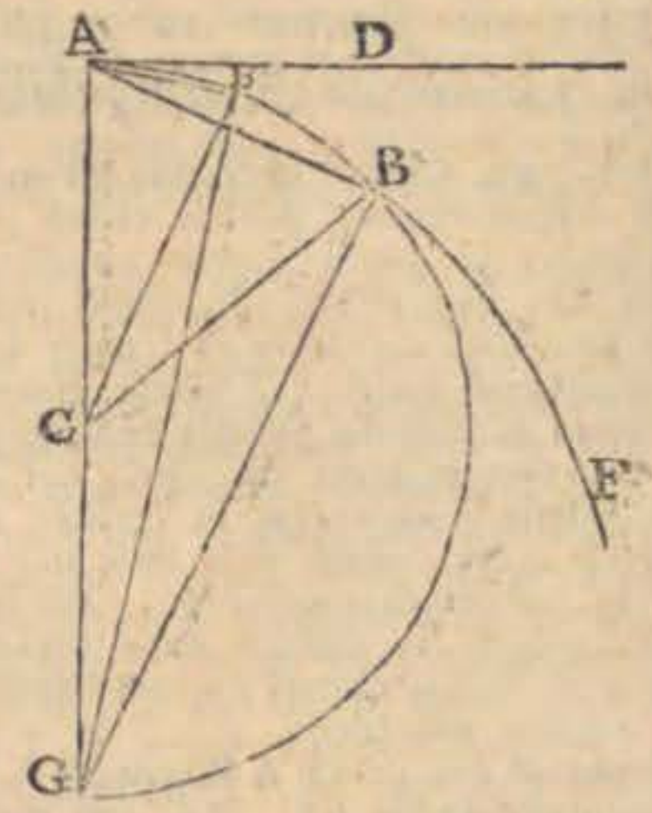
*Caſ.* 1. Sit arcus ille *A B*, tangens ejus *A D*, ſubtenſa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *B D*, ſubtenſa arcus *A B*. Huic ſubtenſæ *A B* & tangenti *A D* perpendiculares erigantur *A G*, *B G*, concurrentes in *G*; dein accedant puncta *D*, *B*, *G*, ad puncta *d*, *b*, *g*, ſitque *J* interſectio linearum *B G*, *A G* ultimo facta (a) ubi puncta *D*, *B* accedunt uſque ad *A*. Manifeſtum eſt quod diſtantia *G J* minor eſſe poteſt quam aſſignata quævis. Eſt autem (ex natura circulorum per puncta *A B G*, *A b g* tranſeuntium) *A B quad.* æquale *A G* × *B D*, & *A b quad.* æquale *A g* × *b d*; ideoque ratio *A B quad.* ad *A b quad.* componitur ex rationibus *A G* ad *A g* & *B D* ad *b d*. Sed quoniam *G J* aſſumi poteſt minor longitudine quâvis aſſignatâ, fieri poteſt ut ratio *A G* ad *A g* minùs differat à ratione æqualitatis quam pro differentiâ




quâvis

conjungentur duo puncta contactus A & B, duoque circuli tangentes abibunt in unum A B G, qui curvam oſculabitur in A, vel B, adeoque curvatura lineæ A F, in A, eſt in ratione inversâ radii A C circuli oſculantis. Si ergo finitus ſit radius oſculi A C, finita quoque erit curvatura in A; ſi vero radius ſit infinitus, curvatura erit infinitesima; ac tandem ſi radius ſit infinitesimus, curvatura erit infinita. Quoniam autem eo magis curva à tangente A D deflectit, quo circuli oſculantis radius A C minor eſt, & contra, patet angulum contactûs creſcere & decreſcere cum curvaturâ & in eâdem ratione inversâ radii.

122. Ducantur chordæ A B, B G; angulus A B G, in ſemicirculo rectus eſt; ac proindè ſi in curvâ quâcumque curvaturam finitam in puncto aliquo A habente ducantur chordæ evaneſcentes A b, A B, ad eaſque agantur perpendiculares B G, b G, hæ lineæ convenient in puncto G, junctiſque punctis A & G, recta A G ad tangentem A d perpendicularis erit, & finitam habebit magnitudinem, ut pote quæ æqualis eſt duplo radio finito A C, circuli curvam oſculantis in A.

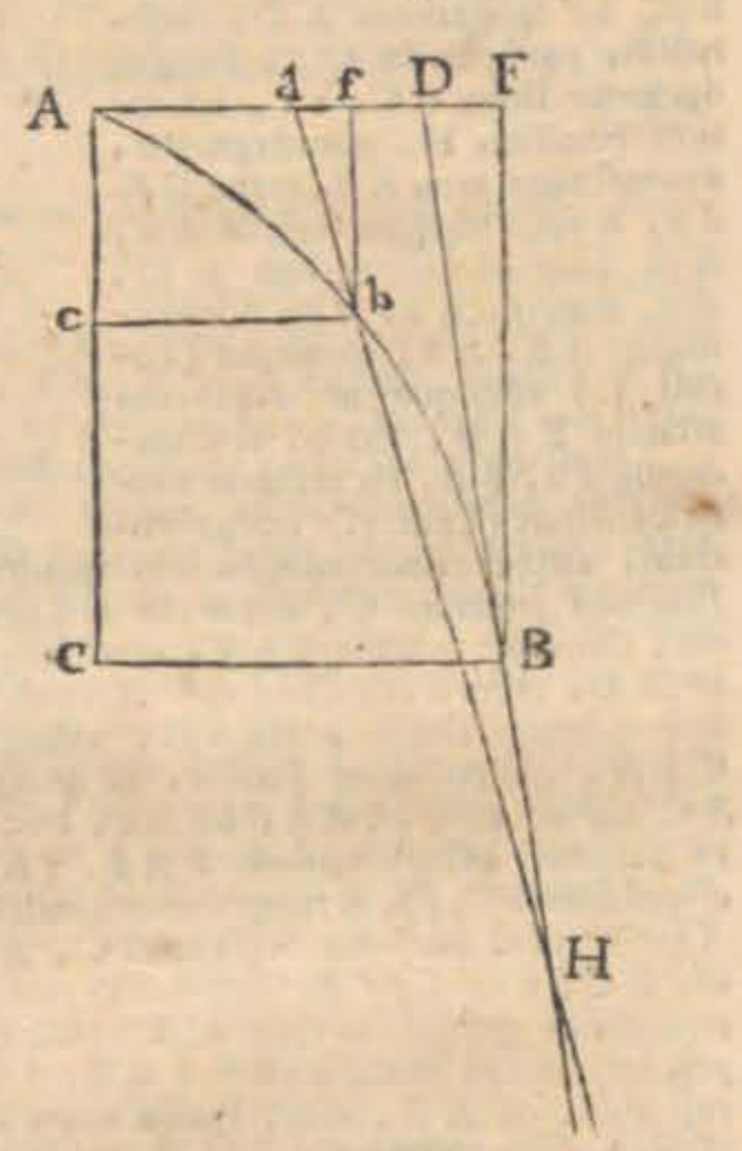



(a) 123. Ubi puncta D, B, accedunt uſque ad A, linea A J (122) eſt diameter circuli curvam A b B oſculantis in

quâvis assignatâ, ideoque ut ratio *A B quad.* ad *A b quad.* minùs differat à ratione *B D* ad *b d*, quàm pro differentiâ quâvis assignatâ. Est ergo, per lemma 1, ratio ultima *A B quad.* ad *A b quad.* eadem cum ratione ultimâ *B D* ad *b d*. *Q. E. D.*

*Cas.* 2. (b) Inclinetur jam *B D* ad *A D* in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima *B D* ad *b d*, quæ priùs, ideoque eadem ac *A B quad.* ad *A b quad.* *Q. E. D.*

*Cas.* 3. (c) Et quamvis angulus *D* non detur, sed recta *B D* ad datum punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege constituatur; tamen anguli *D d* communi lege constituti ad æqualitatem semper vergent & propiùs accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis assignatâ, ideoque ultimo æquales erunt, per lem. 1, & propterea lineæ *B D*, *b d* sunt in eâdem ratione ad invicem ac priùs. *Q. E. D.* *Co-*




in A, & quoniam accedente puncto B, ad A, accedit punctum G, ad J, atque evanescente arcu A B, evanescit quoque distantia G J, manifestum est quod distantia G J minor esse potest quam assignata quævis; quia verò anguli A b g, A B G, recti sunt (per hyp.) circuli duo diametris A g, A G, descripti per puncta b, B, transeunt, adeóque horum circulorum chordæ A b, A B, sunt mediæ proportionales inter suas respectivè abscissas A c, A C, seu æquales d b, D B, & diametros A g, A G, ac proindè $A B^2 = A G \times B D$ & $A b^2 = A g \times b d$ &c.

(b) 124. Inclinentur jam B D, b d, ad A D, in angulo quovis dato B D F, b d f, eadem semper erit ratio ultima B D, ad, b d, quæ priùs. Ductis enim B F, b f, ad A C, parallelis, erit ob triangula æquiangula B F D, b f d, B D : b d = B F : b f; sed (123) B F : b f = $A B^2 : A b^2$; est igitur B D : b d = $A B^2 : A b^2$.

(c) 125. Et quamvis angulus D, non detur, sed rectæ, D B, d b, ad datum punctum H, convergant, vel aliâ quâcumque communi lege constituantur, tamen anguli D d, communi lege constituti (punctis b & B ad A & ad se mutuò accedentibus) ad æqualitatem semper vergent, & evanescente arcu B b, adeóque coincidentibus lineis H D, H d, propiùs accedent ad invicem quam pro differentiâ quâvis assignatâ ac proindè ultimò æquales erunt (per Lem. I), & propterea lineæ B D, b d, sunt ultimò parallelæ & in eâdem ratione ad invicem ac priùs (124).

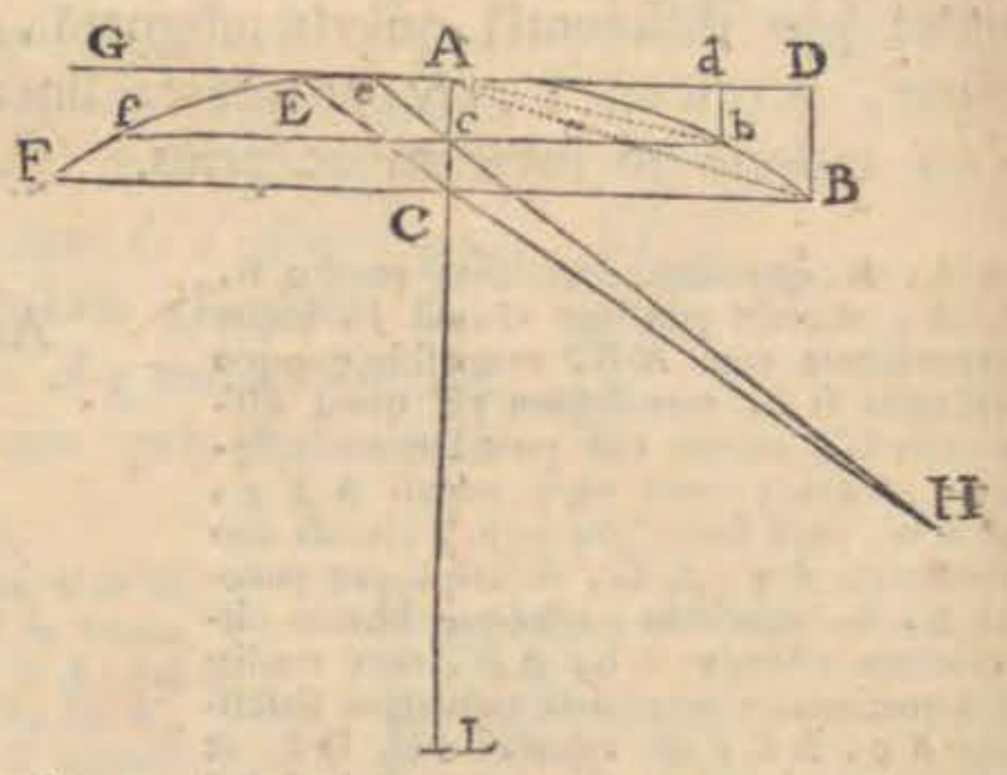
DE MOTU CORPORUM.

*Corol.* 1. Unde cum tangentes $AD$, $Ad$, arcus $AB$, $Ab$, & eorum ſinus $BC$, $bc$ fiant ultimo chordis $AB$, $Ab$ æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut ſubtenſæ $BD$, $bd$.

*Corol.* 2. (d) Eorundem quadrata ſunt etiam ultimo ut ſunt arcuum ſagittæ, quæ chordas biſecant & ad datum punctum convergunt. Nam ſagittæ illæ ſunt ut ſubtenſæ $BD$, $bd$.

*Corol.* 3. (e) Ideoque ſagitta eſt in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate deſcribit arcum.

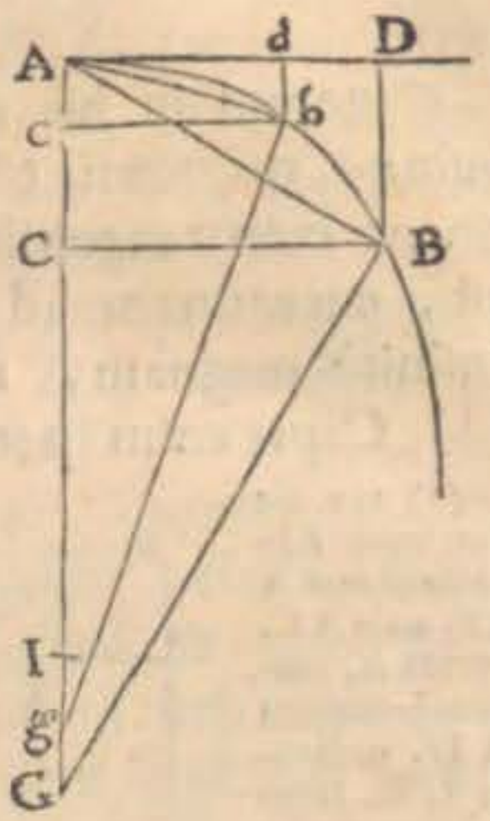
*Corol.* 4. (f) Triangula rectilinea $ADB$, $Adb$ ſunt ultimo in triplicatâ ratione laterum $AD$, $Ad$, inque ſeſquiplicata




(d) 126. Sit $FAB$, arcus circuli curvam datam oſculantis in $A$, tangens $AD$, radius oſculi $AL$, chordæ $FB$, $fb$, ad radium $AL$, & rectæ $BD$, $bd$, ad tangentem $AD$, normales, per puncta $Cc$, ſemper ducantur lineæ $EC$, $ec$, ad datum punctum $H$, convergentes, evaneſcente arcu $AB$, rectæ $DB$, $db$, & ipſis æquales ſagittæ $AC$, $Ac$, ſunt ut tangentium $AD$, $Ad$, arcuum $AB$, $Ab$, & chordarum $AB$, $Ab$, quadrata (coroll. 1.) adeóque ut duplorum arcuum $FAB$, $fAb$, & chordarum $fb$, $FB$, iis arcubus evaneſcentibus (Lem. 7.) congruentium, atque etiam tangentium quadrata. Jam ubi punctum $C$, uſque ad $A$, accedit, chorda evaneſcens $AE$, cum tangente $AG$, coincidit (Lem. 6.) & coeuntibus quoque lineis $EH$, $eH$, triangula $CEA$, $ceA$, fiunt ſimilia, ac proinde $EC$ eſt ad $ec$, ut $AC$, ad $Ac$, hoc eſt ut arcuum evaneſcentium $FAB$, $fAb$, chordarum $FB$, $fb$, & tangentium quadrata.

(e) 127. Ideóque ſagittæ $AC$, $Ac$, vel $EC$, $ec$, ſunt in duplicatâ ratione temporum quibus corpus datâ velocitate percurrit arcus evaneſcentes $FAB$, $fAb$, vel dimidios $AB$, $Ab$; ſpatia enim datâ velocitate percurſa ſunt ut tempora (5), adeóque pro temporibus ſubſtitui poſſunt arcus $FAB$, $fAb$, ſed ſagittæ ſunt in ratione duplicatâ eorum arcuum, (126), ergò & temporum.

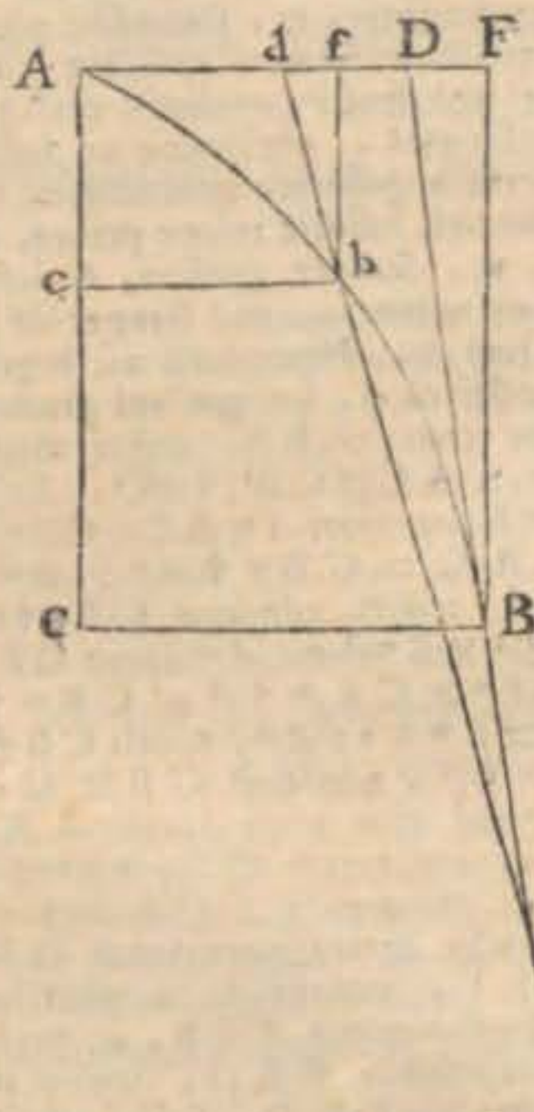
(f) 128. Triangula rectilinea $ABD$, $Abd$, ſunt ultimò in triplicatâ ratione laterum $AD$, $Ad$, inque ſeſquiplicatâ laterum $BD$, $bd$; ductis enim $BF$, $bf$, ad tangentem $AB$, perpendicularibus, erit ob triangulorum $BDF$, $bdf$, ſimilitudinem $BD : bd = BF : bf$, & propterea areæ triangulorum $ABD$, $Abd$, ſunt in ratione compoſitâ laterum $AD$, ad $Ad$, & $BD$, ad $bd$; ſed (124. 125. cor. 1.) $BD : bd = AD^2 : Ad^2$, adeóque $\sqrt{BD} : \sqrt{bd} = AD : Ad$; ergò triangula $ABD$, $Abd$, ſunt in ratione compoſitâ $AD$, ad $Ad$, & $AD^2$, ad $Ad^2$, hoc eſt, in ratione triplicatâ laterum $AD$, $Ad$; ſunt etiam in ratione compoſitâ $BD$, ad $bd$, & $\sqrt{BD}$, ad $\sqrt{bd}$, hoc eſt, in ratione $BD \times \sqrt{BD}$ ad $bd \times \sqrt{bd}$.




catâ laterum $DB$, $db$; utpote in compositâ ratione laterum $AD$ & $DB$, $Ad$ & $db$ exiſtentia. Sic & triangula $ABC$, $Abc$ ſunt ultimo in triplicatâ ratione laterum $BC$, $bc$. Rationem verò ſeſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempè ex ſimplici & ſubduplicatâ componitur.

*Corol.* 5. Et quoniam $DB$, $db$ ſunt ultimo parallelæ & in duplicatâ ratione ipſarum $AD$, $Ad$: erunt areæ ultimæ curvilineæ $ADB$, $Adb$ ([g] ex naturâ parabolæ) (h) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum $ADB$, $Adb$; & ſegmenta $AB$, $Ab$ partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc ſegmenta erunt in triplicatâ ratione tum tangentium $AD$, $Ad$; tum chordarum & arcuum $AB$, $Ab$.

*Scho-*




(g) 129. Arcus evaneſcens $AB$, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactûs $A$, habentibus, pro arcu parabolæ uſurpari poteſt. Ductâ enim $AC$, lineis $BI$, $bf$, parallelâ, completiſque parallelogrammis $AB$, $Ab$, erunt, ex demonſtratis, rectæ $FB$, $fb$, & ipſis æquales abſciſſæ $AC$, $Ac$, ut ordinatarum $CB$, $cb$, quadrata, quæ eſt notiſſima parabolæ proprietas.

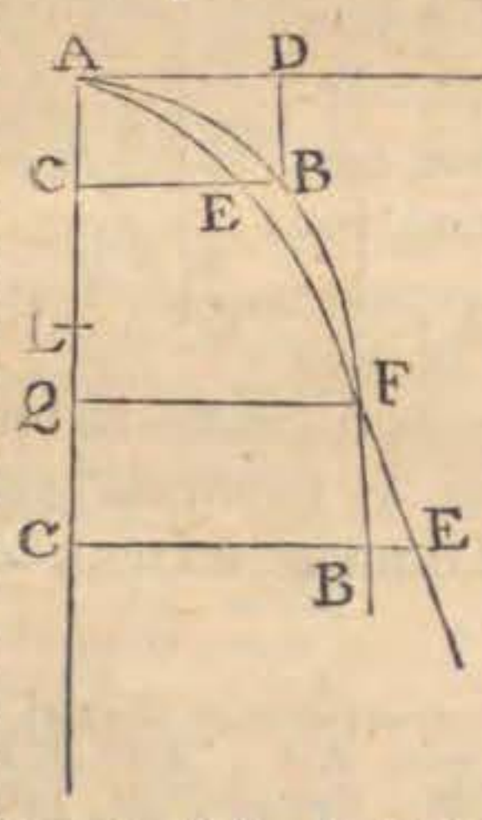
130. Quare arcus evaneſcens ſpectari poteſt tanquam arcus parabolæ cujus latus rectum eſt æquale diametro circuli oſculantis. Nam in arcu circulari $AB$, (vid. fig. textûs) ordinata $CB$, ad diametrum perpendicularis, eſt media proportionalis inter abſciſſam $AC$, & reliquam diametri partem, ſeu totam diametrum, cum $AC$, evaneſcit (Lem. 1.), adeóque quadratum ordinatæ $CB$, æquale eſt rectangulo ex abſciſſâ evaneſcente $AC$, & diametro circuli, quæ eſt proprietas parabolæ cujus latus rectum æquale eſt prædictæ diametro.

(h) 131. Parabolæ ſegmentum $AbB$, eſt tertia pars trianguli rectilinei $ACB$, vel æqualis $ADB$, adeóque area curvilinea $ADBbA$, æqualis eſt duabus tertiis partibus ejuſdem trianguli rectilinei $ADB$. Vid. Gregor. à S. Vincentio cor. 1. Prop. 232. Lib. V. quadraturæ circuli, aut Archimed. Prop. 17. quadrat. Parabolæ.

DE MOTU CORPORUM.

## *Scholium.*

Cæterum in his omnibus ſupponimus angulum contactus nec infinitè majorem eſſe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinitè minorem; hoc eſt, curvaturam ad punctum *A*, nec infinitè parvam eſſe, nec infinitè magnam, ſeu intervallum *A J* finitæ eſſe magnitudinis. (i) Capi enim poteſt *D B* ut *A D*³: quo in caſu circulus




(i) 132. Sit parabolæ Appollonianæ A E F, axis A C, vertex A, tangens in vertice A D, ordinata C E, latus rectum A L, circulus diametro A L, deſcriptus parabolam oſculatur in A, (130.) eundemque ac parabola contactûs angulum efficit in A. Ad eundem axem A C, & verticem A, deſcribatur ſuperioris generis parabola cujus ordinatæ C B ſint ſemper in ſubtriplicatâ abſciſſarum A C, vel parallelarum & æqualium D B, ratione; & erit angulus contactûs B A D, angulo contactûs E A D, infinitè minor ..... Dem... Parabolæ A F E, latus rectum A L, dicatur *A*; parabolæ A B B, latus rectum ſit *B*, & erit ex harum curvarum naturâ $A \times AC = CE^2$ & $B^2 \times AC = CB^3$, adeóque $AC = CE^2 : A = CB^3 : B^2$, undè reperitur $CB^3 = CE^2 \times B^2 : A$, & $CB$ ad $B^2 : A = CE^2$ ad $CB^2$ ergo cum erit $CB = B^2 : A$, tunc erit $CE^2 = CB^2$, atque adeò parabolæ A E E, A B B, ordinatam habebunt communem quæ dicatur Q F, & ſeſe interſecabunt in puncto F; jam verò ſi fuerit C B minor quam $B^2 : A$, erit quoque $CE^2$ minor quàm $CB^2$, adeóque C E minor quàm C B; ſed omnes ordinatæ inter verticem A, & ordinatam communem Q F, (quæ eſt $= B^2 : A$) minores ſunt eâ, ergo omnes C E inter A & F comprehenſæ ſunt minores ordinatis correſpondentibus C B; tota igitur parabolæ Appollonianæ portio A E F, quâ ordinatæ C E terminantur, cadit intrà portionem A B F, alterius parabolæ, ac proindè angulus contactûs B A D, ſemper minor eſt angulo contactûs E A D, cum ergò angulus E A D, aucto in infinitum latere recto A L, poſſit ſine fine minui, manifeſtum eſt angulum contactûs B A D, quovis angulo dato E A D, infinitè minorem eſſe. Q. e. D.

133. Ad eundem axem A C, & verticem A, ſucceſſivè deſcribantur curvæ A E E, ejus naturæ, ut abſciſſarum A C, & ordinatarum C E, relatio exprimatur æquatione generali $A^m \text{ A C} = CE^{m+1}$. Si loco exponentis, m, ſucceſſivè ponantur in æquatione numeri quilibet poſitivi, integri vel fracti continuò creſcentes vel decreſcentes, obtinebuntur infinitæ ſeries diverſæ angulorum contactuum, quorum quilibet eſt infinitè minor priore, dum numerus, m, ſemper creſcit, & infinitè major dum numerus, m, ſemper decreſcit ... Dem... Numerus, m, augeatur numero poſitivo, n, integro vel fracto, & deſcribatur curva A B B, cujus æquatio ſit $B^{m+n} \times AC = CB^{m+n+1}$. Ex hac æquatione & ſuperiori $A^m \text{ A C} = CE^{m+1}$, reperitur $AC = CB^{m+n+1} : B^{m+n} = CE^{m+1} : A^m$, adeóque $CB^{m+n+1} = CE^{m+1} \times B^{m+n} : A^m$ atque $CB^n$ ad $B^{m+n} : A^m = CE^{m+1}$ ad $CB^{m+1}$; ſit $CB^n = B^{m+n} : A^m$, & erit $CB^{m+1} = CE^{m+1}$, adeóque C B = C E = Q F. Quarè cum inter verticem A, & communem ordinatam Q F, omnes ordinatæ ſint minores ipſâ Q F, patet ut ſuprà (132), totam portionem A E F, curvæ A E E, cadere intrà portionem A B F, alterius curvæ A B B, ac proindè angulum contactûs B A D, quovis dato angulo contactûs E A D infinitè minorem eſſe, & reciprocè angulum E A D, eſſe angulo B A D infinitè majorem. Q. e. D.

nullus per punctum $A$ inter tangentem $AD$ & curvam $AB$ duci potest, proindeque angulus contactus erit infinitè minor circularibus. (k) Et simili argumento si fiat $DB$ successivè ut $AD^{+}$, $AD^{5}$, $AD^{6}$, $AD^{7}$, &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore. Et si fiat $DB$ successivè ut $AD^{2}$, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinitè major, & quilibet posterior infinitè major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinitè major minorve priore. Ut si inter terminos $AD^{2}$, & $AD^{3}$, inseratur series $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

(l) Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facilè applicantur ad solidorum superficies cur-

(k) 134. In æquatione $A^{m} \times AC = CE^{m+1}$, loco exponentis m, successivè ponantur numeri 1, 2, 3, 4, 5 &c., & erit AC successivè, ut $CE^{2}$, $CE^{3}$, $CE^{4}$, $CE^{5}$ &c., & habebitur (133) series angulorum contactûs pergens in infinitum quorum quilibet posterior est infinitè minor priore. Loco m substituantur successivè numeri decrescentes, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. erit AC, successivè ut $CE^{2}$, $CE^{\frac{3}{2}}$, $CE^{\frac{4}{3}}$, $CE^{\frac{5}{4}}$, &c., & habebitur alia series infinita angulorum contactûs, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus (132), secundus infinitè major, & quilibet posterior infinitè major priore (133). Loco m, substituantur numeri 1, $1+\frac{1}{6}$, $1+\frac{1}{5}$ $1+\frac{1}{4}$, $1+\frac{1}{3}$, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{2}{3}$, $1+\frac{3}{4}$ $1+\frac{4}{5}$, $1+\frac{5}{6}$ &c., erit AC, successivè ut $CE^{2}$, $CE^{\frac{13}{6}}$, $CE^{\frac{11}{5}}$, $CE^{\frac{9}{4}}$ &c., & habebitur series infinita angulorum contactûs, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore (133), & inter binos quosvis angulos hujus alteriusve seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium; ut enim ea series inveniatur, sufficit inter duos numeros datos, v. G. 1, $1+\frac{1}{6}$, seriem invenire numerorum crescentium vel decrescentium, quorum quilibet major sit altero ex numeris datis, minor altero, quod facillimum est.

(l) 135. Id exemplo facili illustrare satis erit. Pyramidis & coni sit idem vertex eademque altitudo, & basis pyramidis sit polygonum inscriptum circulo qui basis est coni, numerus laterum polygoni augeatur, & eorum longitudo minuatur in infi-

DE MOTU CORPORUM.

curvas & contenta. (m) Præmiſi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonſtrationes, more veterum geometrarum, ad abſurdum. Contractiores enim redduntur demonſtrationes per methodum indiviſibilium. Sed quoniam durior eſt indiviſibilium hypotheſis, & propterea methodus illa minus geometrica cenſetur; (n) malui demonſtra-

infinitum, & polygoni ac circuli ultima ratio (Lem. 7.) erit ratio æqualitatis, ac proindè ultima ratio pyramidis illiuſque ſuperficiei ad conum & illius ſuperficiem curvam erit quoque ratio æqualitatis; undè curva ſuperficies coni æqualis eſt ſummæ ultimæ triangulorum evaneſcentium, quorum communis vertex eſt vertex coni, baſes verò latera evaneſcentia polygoni circulo inſcripti.

(m) 136. Quam magnos progreſſus geometria fecerit hinc cognoſcere licet. Veteres geometræ in iis quæſtionibus quæ infiniti conſiderationem involvunt, ſuas demonſtrationes ad abſurdum revocabant & ex falſis ſuppoſitionibus verum eruebant. Ut inter duas quantitates quæ ad æqualitatem conſtanter vergunt, & tandem propiùs ad invicem accedunt quàm pro datâ quâvis differentiâ rationem æqualitatis intercedere demonſtrarent, prius ſuppone-bant inter eas quantitates eſſe vel majoris vel minoris inæqualitatis rationem, deindè utrumque falſum demonſtrabant, & ex hâc reductione quam ad abſurdum vocant, inter illas quantitates perfectam æqualitatem eſſe concludebant. Quam autem perplexus ſit & tædioſus hic demonſtrandi modus nemo non videt. Verùm licèt imperfecta admodùm fuerit veterum geometria, non iis tamen omninò ignota fuerunt methodi infiniteſimalis principia. Quantitates infinitè parvas ſeu evaneſcentes pro nihilo habendas eſſe in multis demonſtrationibus tanquam axioma poſuerunt Euclides & Archimedes; in exemplum afferemus unicum vulgaris Geometriæ theorema. Ut demonſtrarent circulos eſſe inter ſe ut quadrata diametrorum, fingebant iis circulis inſcripta eſſe vel circumſcripta polygona ſimilia quorum latera numero augerentur & longitudine minuerentur in infinitum, ità ut polygonorum inſcriptorum vel circumſcriptorum à circulo differentia foret quâvis datâ magnitudine minor; quia verò hæc polygona ſunt ut quadrata diametrorum circulorum quibus inſcribuntur vel circumſcribuntur, circulos pariter eſſe ut quadrata diametrorum concludebant. Varios infinitorum ordines ſupponit illud idem theorema licèt non adverterent veteres. Nam conſiderabant polygona circulis inſcripta tanquam compoſita ex infinitis numero atque infinitè parvis ſeu evaneſcentibus lateribus; manifeſtum autem eſt differentiam polygoni inſcripti à circulo quâvis datâ minorem componi ex infinitis numero atque infinitè parvis ſeu evaneſcentibus circuli ſegmentis quorum latera polygoni ſunt chordæ; hæc verò ſegmenta ſunt minimæ quantitates illæ quas ſecundi ordinis infiniteſimas dicunt Recentiores. Hic pedem fixerant veteres, primuſque longiùs progredi auſus eſt celeberrimus Geometra Bonaventura Cavalerius qui anno 1635. indiviſibilium methodum in geometriam introduxit. Hoc primum poſuit ſuæ methodi decretum, lineas nempè ex infinitis punctis conſtare, ſuperficies ex infinitis lineis, & ſolida ex infinitis ſuperficiebus; Deindè indiviſibilia illa elementa totamque eorum ſummam comparat in unâ magnitudine cum ſingulis elementis eorumque ſummâ in aliâ magnitudine, & ſic duarum magnitudinum rationem determinat. Hæc autem quantitatum indiviſibilium hypotheſis durior minuſque geometrica Newtono viſa eſt.

(n) 137. Newtonus ut indirectas & perplexas vitaret veterum demonſtrationes, earum tamen certitudinem & evidentiam conſervaret, veterum principium Lemmate primo generaliter expreſſit, illudque in Lemmatis ſequentibus ad curvas generatim applicavit, & indè directas perbreveſque

trationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites (°) ſummarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonſtrationes quâ potui brevitate præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum indiviſibilium; & principiis demonſtratis jam tutiùs utemur. Proinde in ſequentibus, ſi quando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium (P) determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quod quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima, ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æque contendi poſſet nullam eſſe corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis (9) velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam, ubi attingit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: Per velo-

veſque demonſtrationes in toto operis decurſu deduxit. Ut autem methodi indiviſibilium brevitatem aſſequeretur, tutius tamen & accuratius procederet, loco indiviſibilium evaneſcentia diviſibilia ſubſtituit, & quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis conſtantes, ſed ut motu continuo deſcriptas conſiderat; ſupponit nimirum lineas deſcribi ac deſcribendo generari non per appoſitionem partium, ſed per motum continuum punctorum, ſuperficies per motum linearum, & ſolida per motum ſuperficierum, angulos per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum & ſic in cæteris.

(°) 138. Ubi area curvilinea in parallelogramma rectilinea dividitur, & eorum numerus augetur atque latitudo minuitur in infinitum, horum parallelogrammorum ſumma (Lem. 2.), nunquam poteſt eſſe major aream curvilineâ, ſed hæc area eſt terminus ad quem parallelogrammorum decreſcentium ſumma ſemper accedit & quem tandem attingit, ubi parallelogramma evaneſcunt aut naſcuntur. Idem dicendum de evaneſcentibus curvarum chordis reſpectu perimetri curvilineæ.

(P) 139. Quantitates evaneſcentes concipi non debent velut determinatæ aut determinabiles quædam portiones quantitatum quæ certam & definitam parvitatem obtineant. Quaſcumque enim portiunculas linearum, ſuperficierum aut corporum acceperimus aut deſignaverimus, hæ ſemper reipſâ finitæ erunt, non evaneſcentes; itaque non ſunt intrà certos terminos quantumvis proximos coarctandæ, undè hæ quantitates ſemper ut decreſcentes ac perpetuò diminuendæ accipi debent.

(9) 140. Exempli cauſâ, gravis ſurſùm projecti & ad altiſſimum locum pervenientis.

DE MOTU CORPORUM.

velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cum attingit; id eſt, illam ipſam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum & quâcum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum, non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quâcum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quâcum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quâcum eſſe (vel augeri aut minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere poteſt, non autem tranſgredi. Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cumque hic limes ſit certus & definitus, problema eſt verè geometricum eundem determinare. Geometrica verò omnia in aliis geometricis determinandis ac demonſtrandis legitimè uſurpantur.

Euclid refuted against Carnaleen.

Contendi etiam poteſt, quod ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & ſic quantitas omnis conſtabit ex indiviſibilibus, contra quam *Euclides* de incommenſurabilibus, in libro decimo elementorum, demonſtravit. Verum hæc objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ rationes illæ quibuſcum quantitates evaneſcunt, revera non ſunt rationes quantitatum ([r]) ultimarum, ſed limites ad quos quantitatum ſine limite decreſcentium rationes ſemper appropinquant; & quas propius aſſequi poſſunt quam pro datâ quâ-

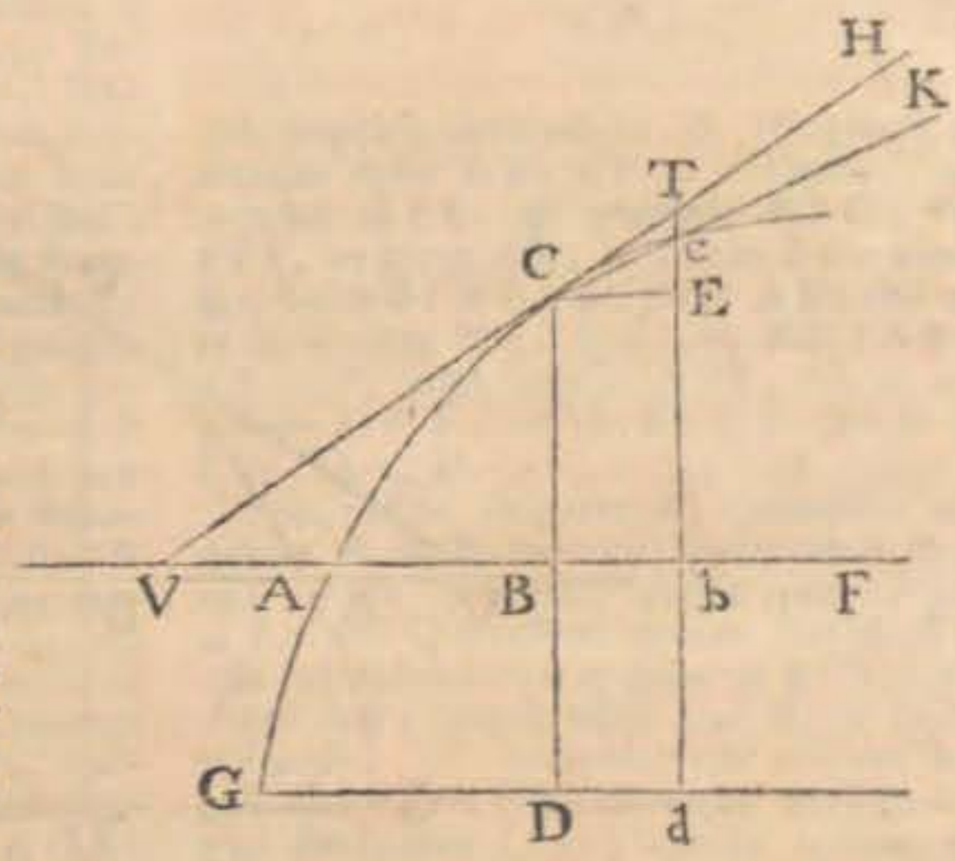
([r]) 141. Seu, quantitatum determinatarum & indiviſibilium, ſed &c.

142. Ut quantitatum evaneſcentium aut naſcentium relationes atque proprietates inveniantur, conſiderantur quantitates finitæ, harum inveſtigantur relationes & proprietates & lex quâ continuò creſcunt vel decreſcunt; quibus cognitis facilè intelligitur quænam proprietates quantitatibus illis creſcentibus ac decreſcentibus ſemper conveniant, adeóque & cum in infinitum minuuntur & evaneſcunt vel cum naſcuntur. Imò verò ex Lemmate primo aliiſque ſequentibus invenitur quænam ſint proprietates quæ licèt quantitatibus finitis non conveniant, evaneſcentibus tamen & naſcentibus competunt, cum nempè quantitates finitæ decreſcentes ad illas proprietates, ut ità dicam perpetuò accedunt, & ad eas tempore dato accedunt magis quàm pro differentiâ quâvis datâ.

Ex præcedentibus Lemmatis facilè deducitur ac demonſtratur Newtoniana fluxionum methodus cujus generalia principia ut poté nobis in poſterum profutura breviter explicabimus.

143.

quâvis differentiâ, nunquam verò transgredi, neque priùs attingere quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideò dabuntur quan-




143. Quantitates indeterminatæ quæ continuò crescunt vel decrescunt, variabiles aut fluentes dicuntur; constantes verò aut determinatæ vocantur, quæ aliis continuò crescentibus vel decrescentibus, eædem manent. Ordinatæ B C, B D, super basi A F, motu sibi semper parallelo ità progrediantur, ut ordinatâ B D, eâdem semper manente, punctum D, rectam G D d describat, & interim continuò crescente vel decrescente ordinatâ B C, punctum C describat curvam A C c; abscissa A B, ordinata B C, curvæ arcûs A c, areæ A C B, A G D B, sunt quantitates indeterminatæ seu fluentes; recta verò B D, est quantitas constans.

144. Quantitates fluentes, ut A B, B C, æqualibus temporibus crescentes & crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ crescunt, ac generantur, evadunt majores vel minores; Si enim punctum B, velociùs semper progrediatur quam punctum C, in lineâ B C, incrementa B b, fluentis A B, majora erunt incrementis E c, fluentis B C, eodem tempore genitis. Velocitates quibus illa incrementa ut B b, E c, eodem tempore genita, primò nascuntur, dum nempe b c, coincidit cum B C, dicuntur *fluxiones*, & methodus ex fluentibus inveniendi fluxiones, methodus fluxionum directa vocatur; methodus verò ex fluxionibus inveniendi fluentes, methodus fluxionum inversa appellatur.

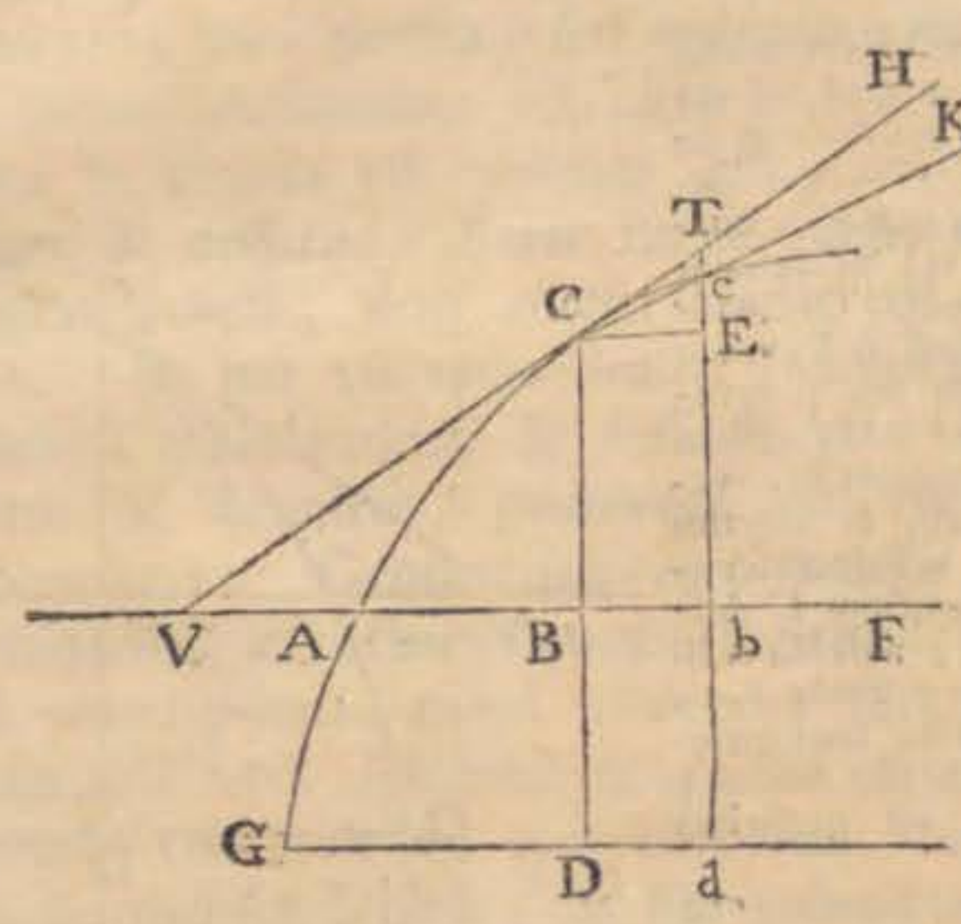
145. Velocitates quibus fluentium quantitatum incrementa eodem tempore genita, primò nascuntur, sunt uniformes... Dem... Cum curva A C c, motu puncti C, velocitate quâvis finitâ progredientis describi possit, si illius puncti velocitas secundùm directionem C E, lineæ A B parallelam, supponatur uniformis, velocitas ejusdem secundùm directionem E c, pro variâ curvæ A C c naturâ, varia quidem erit in diversis curvæ punctis v. gr. in C, & c; sed quò magis punctum c, ad C, accedet, eò minor erit velocitatis secundùm directionem E c, variatio in punctis C, & c, adeò ut dum punctum c, coincidit cum puncto C, omnis velocitatis per E c, variatio expiret. Quare (Lem. 1.) velocitates quibus fluentium incrementa eodem tempore genita primò nascuntur, sunt uniformes. Q. e. D.

146. Cum ergò velocitates uniformes sint spatiis eodem tempore percurrendis proportionales (5), manifestum est fluxiones (143) esse in ratione incrementorum eodem tempore genitorum, dum primò nascuntur vel ultimò evanescunt; adeòque ut fluxionum relatio inveniatur sumere oportet incrementa fluentium eodem tempore genita, & primam eorum incre-

DE MOTU CORPORUM.

quantitates ultimæ ſeu maximæ quarum iſta eſt ratio. In ſequentibus igitur, ſi quando facili rerum conceptui conſulens dixero quantitates quàm minimas, vel evaneſcentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.

SEC.




mentorum naſcentium, vel ultimam evaneſcentium rationem conſiderare tanquam relationem fluxionum.

147. Hinc ſumma fluxionum eſt ut ſumma incrementorum naſcentium vel evaneſcentium, ſumma verò incrementorum omnium naſcentium eſt ipſa quantitas fluens; nam ſi tota area A c b diviſa intelligatur in parallelogramma ut B E, eorumque numerus augeatur & latitudo B b minuatur in infinitum, ſumma omnium incrementorum naſcentium B b, ab A uſque ad b, erit ipſa fluens A b, ſumma omnium incrementorum E c, ab A, uſque ad c, erit fluens b c, ſumma omnium C c, erit arcus fluens A c, & ſumma omnium parallelogrammorum B E, erit area A c b fluens (106. 107.); ergò ſumma fluxionum eſt ut ipſa quantitas fluens.

148. Quoniam in figurâ ſuperiori fluxio aliqua, vel abſciſſæ A B, vel ordinatæ C B, aut arcûs A C, ad arbitrium tanquam uniformis ſpectari poſſit, (Ex dictis 145.) patet ex pluribus fluxionibus unam tanquam conſtantem poſſe conſiderari & quantitate finitâ conſtanti exponi, dum aliæ fluxiones variâ ratione mutari & quantitatibus variabilibus exponi poſſunt.

149. Quare cum quantitates variabiles ſuas habeant fluxiones quæ rursùs poſſunt eſſe variabiles, liquet dari fluxiones fluxionum, ſeu varios imò infinitos fluxionum ordines. Fluentium finitarum fluxiones dicuntur fluxiones primæ; harum fluxiones primæ dicuntur fluentium finitarum fluxiones ſecundæ, & ità porrò in infinitum.

150. Ductâ rectâ V T H, quæ curvam tangat in C, ipſiſque b c & B A productis occurrat in T & V; linea b c in locum ſuum priorem B C redeat, & ultima forma triangulorum evaneſcentium C E c, C E c, C E T, eſt ſimilitudinis & ultima ratio æqualitatis (Lem. VIII.) ideóque fluxiones primæ ipſarum A B, B C,

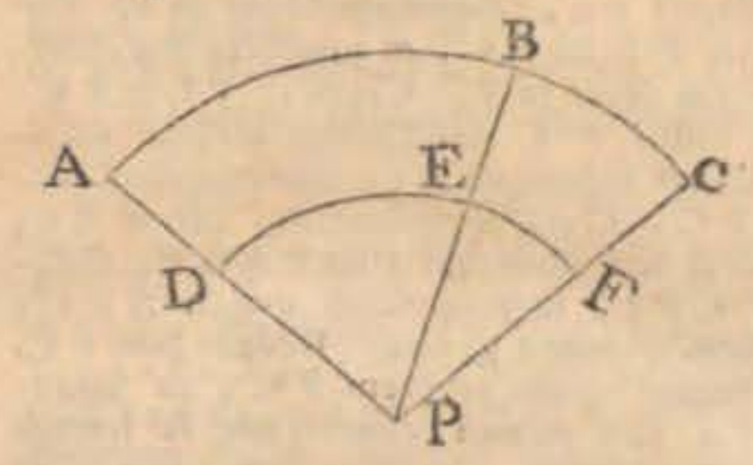
A C,

AC, ſunt (146.) ut trianguli CET, latera CE, ET, & CT, & per eadem latera exponi poſſunt, vel quod perindè eſt, per latera VB, CB, & VC, trianguli VBC, ſimilis triangulo CET.

151. Quoniam areæ BbcC, BbdD, eodem tempore deſcribuntur communi ordinatarum BC, BD motu, erunt areæ illæ naſcentes vel evaneſcentes ut fluxiones arearum ACB, ABDG, (146); ſed area naſcens BbcC, non differt à parallelogrammo BE, (107); ergò fluxiones arearum ACB, ABDG, ſunt in ratione primâ parallelogrammorum BE, Bd naſcentium, ſeu ob commune latus Bb, in ratione ordinatarum CB, Bd.

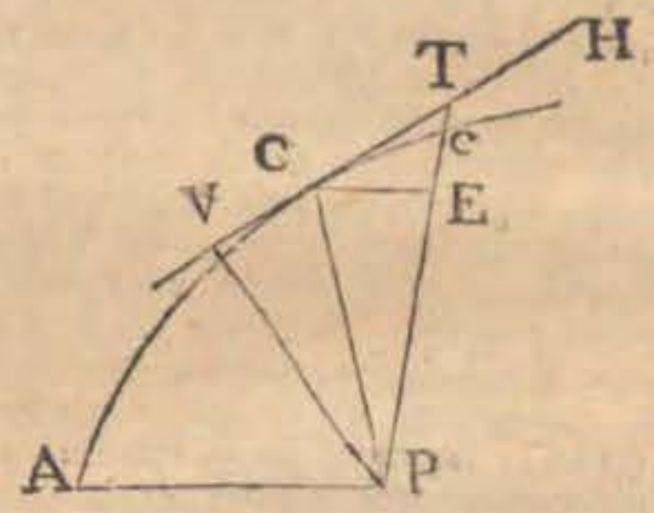
152. Si circulus centro B, radio fluente BC, deſcriptus per longitudinem abſciſſæ AB, ad angulos rectos progrediatur, deſcribet ſolidum idem quod ex rotatione figuræ ACB, circà axem AB generaretur, & fluxio ſolidi geniti erit ut factum ex areâ circuli illius in incrementum naſcens Bb, abſciſſæ AB, & fluxio ſuperficiei ſolidi geniti erit ut factum ex perimetro ejuſdem circuli in arcum Cc, vel tangentem CT, naſcentem... Dem.... Rectangulum naſcens BE, non differt à figurâ BbcC naſcente (107), adeòque incrementum naſcens ſolidi ex rotatione figuræ ACB, geniti æquale eſt ſolido ex rotatione rectanguli BE, circà latus Bb, genito; hoc autem ſolidum eſt cylindrus æqualis facto ex areâ circuli radio CB deſcripti in altitudinem Bb; ſolidi igitur motu circuli CB per axem AB geniti incrementum naſcens adeóque & ipſius fluxio (146) eſt ut factum ex areâ circuli in incrementum naſcens Bb, abſciſſæ AB. Similiter cum arcus naſcens Cc, cum tangente CT coincidat, (Lem. 7.) ſuperficies naſcens ex rotatione figuræ BbcC, genita æqualis eſt ſuperficiei coni truncati, adeóque æqualis facto ex ſemiſummâ peripheriarum, quarum ſunt radii BC, bc, in latus CT, ſeu ob bc=BC (107) æqualis facto ex peripheriâ circuli, cujus radius BC, in latus CT, vel arcum ct, naſcentem; ergò factum iſtud eſt incrementum naſcens ſuperficiei curvæ ex rotatione AC deſcriptæ, adeóque eſt ut illius ſuperficiei fluxio (146) Q. e. D.

153. Anguli rectilinei APB, EPF, ſunt inter ſe directe ut arcus AB, EF,




qui angulos ſubtendunt & reciprocè ut arcuum radii AP, EP... Dem... eſt angulus APB, ad angulum BPC, ſeu EPF, ut arcus AB, ad arcum BC, adeóque ut AB: AP, ad BC: AP; ſed ob arcus ſimiles BC, EF, eſt BC: AP = EF: EP; ergò angulus APB, eſt ad angulum EPF, ut AB: AP, ad EF: EP. Q. e. D.

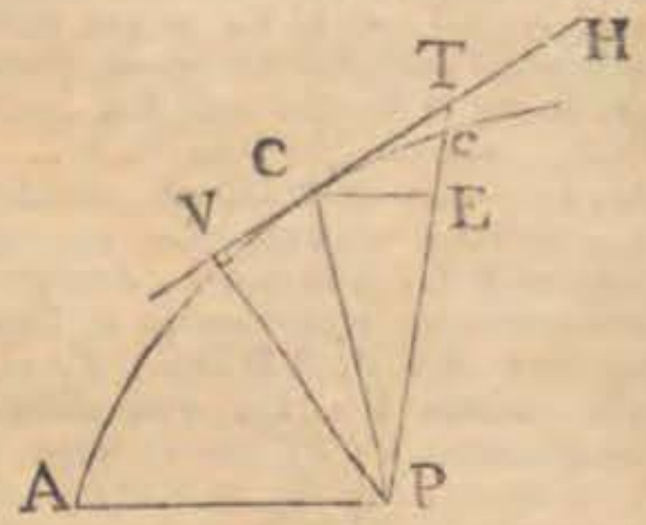
154. Hinc ſequitur 1°. quemlibet angulum APB exprimi poſſe arcu AB qui ipſum ſubtendit diviſo per radium AP. 2°. Quemlibet arcum circuli AB, eſſe ut factum ex angulo APB in radium AP, atque adeò hoc facto exprimi poſſe. 3°. Incrementum naſcens anguli fluentis APB, adeóque & illius anguli fluxionem (146) eſſe in ratione directâ arcûs circularis naſcentis & inversâ radii illius.




155. Recta PC fluens circà datum polum P revolvatur, & punctum illius extremum C, curvam ACc, deſcribat quam tangit in C recta VCH in quam ex polo P, demiſſa ſit perpendicularis PV. Sit A punctum in curvâ ACc fixum, progrediaturque recta PC de lo-

DE MOTU CORPORUM.

co ſuo P C, in locum novum P c, & producta P c, tangentem ſecet in T. Capiatur P E = P C, & producta P c, tangentem ſecet in T. Capiatur P E = P C, ſeu radio P C deſcribatur circuli arcus C E, ut habeantur E c, incrementum rectæ P C, C c, incrementum curvæ A c, P C c, incrementum areæ P A C P, angulus C P c, incrementum anguli A P C, eodem tempore genita. Redeat jam P C, in locum ſuum priorem P C, ut incrementa illa omnia evaneſcant & horum incrementorum evaneſcentium ratio ultima erit ratio fluxionum quantitatum fluentium quarum ſunt incrementa (145).




156. Quoniam autem perveniente P c, in locum P C, triangula C E c, C E T, evaneſcentia ſunt ultimò ſimilia & æqualia (Lem. 8.) circuli arcus C E, cum chordâ ipſius coincidit, ipſique æqualis eſt (Lem. 7), & præterea evaneſcente angulo C P E, anguli P C E, P E C, ſunt inter ſe & duobus rectis æquales, adeóque C E, ad P T, normalis. Manifeſtum eſt..... 1°. Triangulum T V P eſſe triangulo T E C, adeóque & triangulo evaneſcenti c E C, ſimile, ac proinde fluxiones arcûs A C, & rectæ P C, eſſe inter ſe ut duo latera V T, T P, ſeu V C, P C... 2°. Fluxionem anguli A P C, eſſe ut C E : P C (154)... 3°. Fluxionem areæ A C P, eſſe ut factum ex rectâ C P, in normalem C E evaneſcentem; nam area trianguli P C T, æqualis dimidio rectangulo P T × C E, ſeu ob evaneſcentem E T, dimidio rectangulo P C × C E (Lem. 1.).

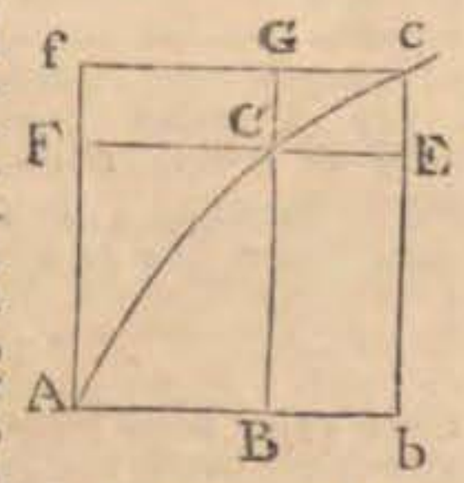
157. Similibus argumentis ex fluentibus calculo expreſſis fluxiones inveniri poſſunt, in quantitatibus finitis analyſim inſtituendo, & finitarum naſcentium vel evaneſcentium rationes primas vel ultimas inveſtigando. Hæc autem ſunt calculi fluxionum principia. Nimirùm ... 1°. Cum fluxiones ſint in primâ ratione incrementorum naſcentium & ultimâ evaneſcentium (146), fluxiones iis incrementis primò naſcentibus vel ultimò evaneſcentibus poſſunt exprimi... 2°.... Quantitates quæ nonniſi ſuo incremento naſcente aut evaneſcente differunt ſunt æquales (Lem. 1.)... 3°.... Quantitatum conſtantium nullæ ſunt fluxiones, nulla incrementa vel decrementa.... 4°. Si inter quantitates indeterminatas aliquæ decreſcant, dum aliæ creſcunt, decreſcentium fluxiones ſunt negativæ, ſunt enim ut incrementa negativa, ſeu ut decrementa.

158. Quantitates fluentes deſignantur ultimis alphabeti litteris $z, y, x, v$; conſtantes indicantur aliis $a, b, c$ &c. fluentium fluxiones primas aut ipſis proportionalia incrementa naſcentia vel evaneſcentia Newtonus notat iiſdem litteris quibus fluentes exponuntur, ſed iis punctuatis ſic $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$; Leibnitius litteram d, incrementi naſcentis vel evaneſcentis notam characteriſticam fluentibus præponit ſic $dz, dy, dx, dv$. Fluxiones ſecundæ deſignantur ſic $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, vel ſic $ddz, ddy, ddx, ddv$; fluxiones tertiæ ſic $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$, vel ſic $dddz, dddy, dddx, dddv$, vel ſic $d^3z, d^3y, d^3x, d^3v$, & ità deinceps in infinitum.

159. Fluxio quantitatis ex pluribus terminis per additionem vel ſubtractionem compoſitæ, æqualis eſt omnibus ſingulorum terminorum fluxionibus per eadem ſigna + vel − junctis; ità fluxio quantitatis compoſitæ $a + z - y$, erit $dz - dy$... Dem... Totius quantitatis $a + z - y$, incrementum tempore dato genitum æquale eſt differentiæ incrementorum ipſarum $z$ & $y$, cum nullum ſit conſtantis $a$, incrementum (156) adeóque incrementum naſcens vel evaneſcens quantitatis $a + z - y$, æquale eſt differentiæ incrementorum naſcentium vel evaneſcentium ipſarum $z$ & $y$, ſed fluxiones ſunt in primâ ratione incrementorum naſcentium (145), ergò fluxio totius quantitatis $a + z - y$, eſt $dz - dy$. Q. e. D. Si creſcente quantitate $z$, decreſceret $y$, ipſius $y$, fluxio foret negativa nempe $-dy$ (157) adeóque fluxio

$dz-dy$, fieret $dz+dy$. Quod in ſequentibus ſemper eſt obſervandum.

160. Fluxio quantitatis fluentis ex pluribus variabilibus per multiplicationem compoſitæ, æqualis eſt ſummæ factorum ex ſingularum variabilium componentium fluxionibus in aliarum variabilium facta ductis, hoc eſt fluxio quantitatis $zy$, eſt $zdy+ydz$, fluxio quantitatis $az$ eſt $adz$, fluxio quantitatis $zyx$ eſt $yxdz+zxdy+zydx$... Dem... Recta CB, fluens ſuper rectâ AB cui normalis eſt, progrediatur, illiuſque punctum extremum C, deſcribat curvam AC c, perveniat BC in locum bc, & compleantur rectangula BF, bf, BE, cf, EG; AB, dicatur $z$, BC dicatur $y$, adeóque rectangulum BF erit $zy$. Dum BC, pervenit in bc, incrementum rectanguli BF ſeu $zy$, æquale eſt ſummæ rectangulorum BE, EG, Cf; eſt autem rectangulum EG, ad rectangulum EB, ut Ec ad BC, & ad rectangulum Cf ut CE, vel Bb, ad FC, ſeu AB; quare redeunte bc, in locum ſuum priorem BC, & decreſcentibus continuò Ec, & EC atque tandem ultimò evaneſcentibus, decreſcit quoque & tandem evaneſcit, ſeu fit inaſſignabilis ratio rectanguli EG, ad rectangula EB & cf; adeóque (Lem. 1.) ſumma duorum rectangulorum BE, cf, fit ultimò æqualis ſummæ trium rectangulorum BE, EG, Cf; ergò incrementum naſcens rectanguli BF, ſeu $zy$, æquale eſt ſummæ duorum rectangulorum BE, Cf, naſcentium, ſeu ſummæ factorum ex $z$, in incrementum naſcens ipſius $y$, & ex $y$, in incrementum naſcens ipſius $z$, adeóque fluxio facti $xy$ (146) eſt $zdy+ydz$. Undè etiam fluxio $az$, eſt $adz$, quia $a$, conſtans nullam habet fluxionem. Q. e. D.




Jam in facto $zyx$ ponatur $zy=v$, & erit $zyx=vx$, adeóque fluxio facti $zyx$ æqualis fluxioni facti $vx$; fluxio autem facti $vx$, eſt $xdv+vdx$, & fluxio facti $zy=v$, eſt $zdy+ydz=dv$, id eſt ſi in fluxione $xdv+vdx$, pro $v$ & $dv$ ſcribantur $zy$, & $zdy+ydz$, fluxio facti $zyx$, nempè $xdv+vdx$, erit $xzdy+yxdz+zydx$; & par eſt ratio aliorum factorum quorumcumque Q. e. D.

161. Cor 1... Ponantur ſingulæ fluentes $z$, $y$, $x$, &c. ſibi mutuò ſemper æquales & ipſius $zz$, fluxio erit $zdz+zdz=2zdz$: fluxio cubi $z^3$ erit $zzdz+zzdz=3zzdz=3z^{3-1}dz$: fluxio potentiæ $z^4$ erit $4z^3dz=4z^{4-1}dz$: & eodem argumento fluxio potentiæ cujuſcumque $z^m$ erit $mz^{m-1}dz$.

162. Cor. 2.... Fluxio quantitatis $z^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}-1}dz=\frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}}$ nam ponatur $z^{\frac{1}{2}}=y$ & erit $z=yy$, $dz=2ydy$ (161) $dy=d.(z^{\frac{1}{2}})=dz:2y=dz:2z^{\frac{1}{2}}$ & generaliter fluxio quantitatis $z^{m:n}$ eſt $\frac{m}{n}z^{\frac{m}{n}-1}dz=\frac{m}{n}z^{\overline{m-n}:n}dz$.

163. Cor. 3... Fluxio fractionis $z:y$ ſeu $zy^{-1}$ eſt $\overline{ydz-zdy}:yy$. Nam fiat $z:y=x$, erit $z=yx$, $dz=ydx+xdy$ & $dx=\overline{dz:y-xdy}:y=dz:y-zdy:yy=\overline{ydz-zdy}:yy$: fluxio quantitatis $az^my^n$ eſt $amy^nz^{m-1}dz+anz^my^{n-1}dy$ (160).

164. Fluxiones ſecundæ ex primis fluxionibus, tertiæ ex ſecundis, iiſdem regulis colliguntur quibus primæ fluxiones ex fluentibus finitis eruuntur. Ubi tamen ſic pergitur ad fluxiones ſecundas, tertias & ſequentes, convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem conſiderare, & pro ejus fluxione primâ unitatem ſcribere, pro ſecundâ verò & ſequentibus nihil (148). Exemplum unicum afferemus; ſit quærenda fluxio fluxionis $ydy:dx$, ſupponendo quantitatem $x$ uniformiter fluere, adeóque $dx$ conſtantem ſeu $=1$, invenitur fluxio $yddy+dy^2:dx$.

165. Ex fluxionibus fluentes inveniuntur operationes inſtituendo iis contrarias quibus ex fluentibus reperiuntur fluxiones; quarè, litterâ S, ſignificante fluentem fluxionis cui præponitur ſeu ſummam primam incrementorum naſcentium, vel ultimam evaneſcentium (147) methodi fluxionum inverſæ fundamentales formulæ erunt.

DE MOTU CORPORUM.

1. S. $dz = z$. & S. $a\,dz = az$. S. $dz : a = z : a$.

2. S. $m z^{m-1} dz = z^m$,
& S. $m\,a z^{m-1} dz = a z^m$,
& S. $\frac{m}{n} z^{m-n:n} dz = z^{m:n}$.

3. S. $(dz \overline{+} dy) = z \overline{+} y$.

4. S. $(z\,dy + y\,dz) = yz$.

& S. $(a^m y^n z^{m-1} dz + anz^m y^{n-1} dy) = a z^m y^n$.

5. S. $(y\,dz - z\,dy) : yy = z : y$.

166. Si fluxio cujus fluens quæritur nulli harum formularum similis fuerit, per novarum variabilium substitutionem aliasque artes quas hic tractare nobis non licet, ad illas sæpe reduci potest. Sit in exemplum fluxio $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} \times dx$, ponatur $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} = z$ & erit $cb + cx = zz$, & $c\,dx = 2z\,dz$, & $dx = \frac{2z\,dz}{c}$ adeóque $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} \times dx = 2z\,z\,dz : c$. Hæc autem fluxio similis est formulæ $m\,a z^{m-1} dz$, estque $z^2 = z^{m-1}$, adeóque $m = 3$, $ma = 3a = 2 : c$, & $a = 2 : 3c$, adeóque S. $m\,a z^{m-1} dz = az^m = 2z^3 : 3c$ loco $z$, scribatur ipsius valor $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}}$, & invenietur S. $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} \times dx = \frac{2}{3c}(cb+cx) \times \overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(b+x) \times \overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}}$.

167. Superiorum formularum auxilio ex fluxionibus secundis primæ, ex tertiis secundæ &c. inveniuntur. Exempla sint S. $d\,dx = dx$. S. $dx.\,dd\,x = \frac{1}{2} dx\,dx = \frac{1}{2} dx^2$. Nam ponatur $d\,x = y$, & erit $d\,dx = dy$, & $dx\,dd\,x = y\,dy$, & per formulam secundam invenitur S : $y\,dy = \frac{1}{2} y\,y$, & si loco $y$ substituatur ipsius valor, $dx$, erit S. $y\,dy$ = S. $dx\,dd\,x = \frac{1}{2} dx^2$. Similiter. S. $(dy^2 + y\,dd\,y) : dx = y\,dy : dx$, supponendo $dx$ constantem, nam fiat $d\,dy = dv$, adeóque $dy = v$, & fluxio proposita evadet, $\overline{v\,dy + ydv} : dx$, cujus fluens (per formulam 4^am) est $vy : dx$, ob $dx$ constantem. Cum autem sit $v = dy$, erit $vy : dx = y\,dy : dx$.

168. Postquam fluentes ex fluxionibus collectæ sunt, si de veritate conclusionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum vicissim colligendæ sunt, & cum fluxionibus sub initio propositis comparandæ. Nam si prodeunt æquales, conclusio recte se habet; sin minus, corrigendæ sunt fluentes sic, ut earum fluxiones fluxionibus sub initio propositis æquentur. Nam & fluens pro lubitu assumi potest, & assumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis assumptæ æqualem fluxioni propositæ, & terminos homologos inter se comparando.

169. Quoniam constantis quantitatis nulla est fluxio, & eadem proinde fluxio $dz$ ex fluentibus $z$, & $z \overline{+} a$, colligitur fluens omnis quæ ex fluxione prima colligitur, augeri potest vel minui quantitate aliquâ constante; quæ ex fluxione secundâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio secunda nulla est; quæ ex fluxione tertia colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio tertia nulla est. Et sic deinceps in infinitum.

170. Cum fluens composita, quæ ex propositâ fluxione collecta est, unicam variabilem includit, ut fluens $\frac{2}{3}(b+x) \times \overline{bc+cx}^{\frac{1}{2}}$, quæ (166) deducta est ex fluxione $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} \times dx$, ita determinari solet constans adjungenda vel detrahenda: in fluente inventâ loco variabilis $x$, ponitur o; tum si fluens ipsa sit etiam o, completa est. Si quid verò residuum fuerit, ut hic remanet $+\frac{2}{3} b \surd bc$, hoc residuum cum signo contrario fluenti primò inventæ adjicitur, ut habeatur fluens completa, $\frac{2}{3}(b+x) \times \overline{bc+cx}^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} b \surd bc$. Hujus regulæ ratio est, quod fluens inventa supponi possit exhibere aream curvæ alicujus, cujus sit abscissa variabilis $x$, adeo ut dum $x = o$, area, fluente expressâ, sit etiam o; undè si in fluente primò inventâ loco $x$, substituatur o, sitque aliquod residuum, illud ex fluente detrahi debet. Generaliter, quantitas constans adjicienda vel subducenda ex naturâ quæstionis determinatur, aut arbitraria est.

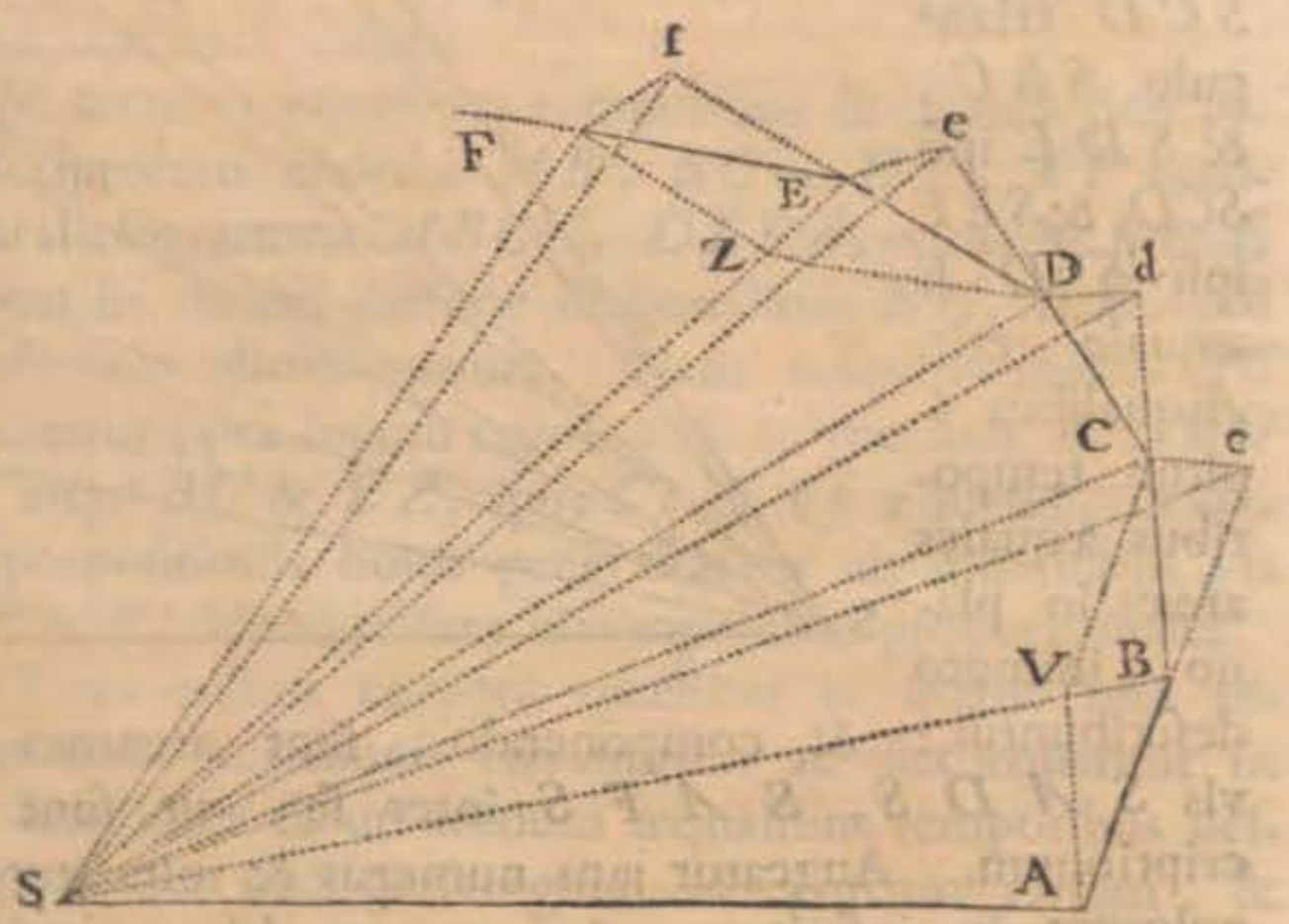
SEC-

# SECTIO II.

## *De inventione virium centripetarum.*

### PROPOSITIO I. THEOREMA I.

*Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.*

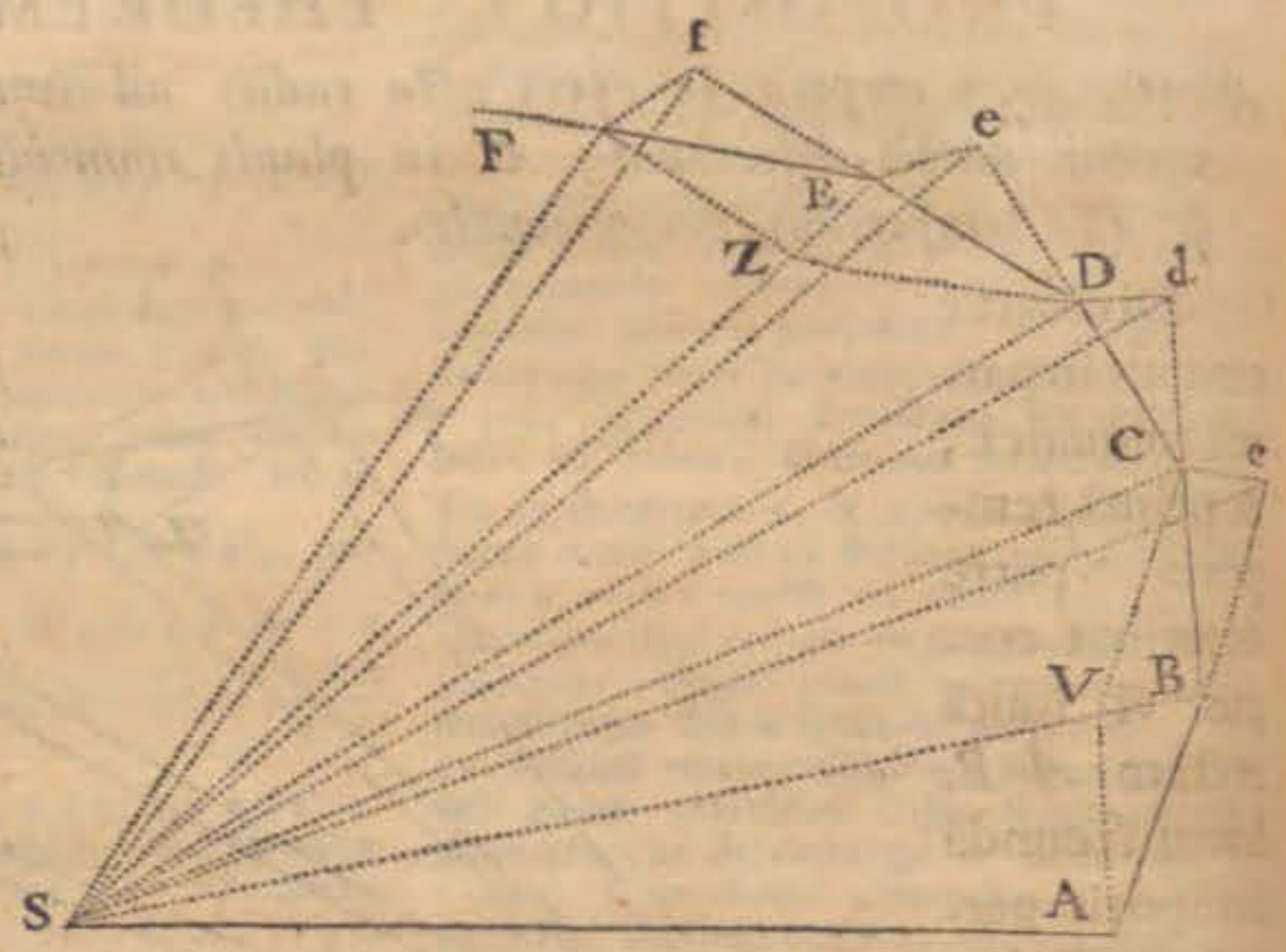



Dividatur tempus in partes æquales, & primâ temporis parte describat corpus vi insitâ rectam *A B*. Idem secundâ temporis parte, si nil impediret, rectà pergeret ad *c*, (per leg. 1.) describens lineam *B c* æqualem ipsi *A B*; adeò ut radiis *A S*, *B S*, *c S* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *A S B*, *B S c*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta *B c* declinet & pergat in rectâ *B C*. Ipsi *B S* parallela agatur *c C*, occurrens *B C* in *C*; & completâ secundâ temporis parte, corpus (per legum corol. 1.) reperietur in *C*, in eodem (a) plano cum triangulo *A S B*. Junge *S C*; & triangulum *S B C*, ob parallelas *S B*, *C c*, æquale erit triangulo *S B c*, atque ideo etiam

(a) 171. Reperitur in C, in eodem plano cum triangulo A S B; nam diagonalis B C, quam viribus conjunctis mobile describit est in plano parallelogrammi V B C c, cujus latera B V, B c, viribus separatis describenda, sunt in plano trianguli A S B.

DE MOTU CORPORUM.

etiam triangulo *S A B*. Simili argumento si vis centripeta successivè agat in *C*, *D*, *E*, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas *CD*, *DE*, *EF*, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum *S C D* triangulo *S B C*, & *S D E* ipsi *SCD*, & *SEF* ipsi *S D E* æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis *S A D S*, *S A F S* inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter *A D F*, (per corollarium quartum lemmatis tertii) erit linea curva: ideóque vis centripeta, quâ corpus à tangente hujus curvæ perpetuò retrahitur, aget indesinenter; areæ verò quævis descriptæ *S A D S*, *S A F S* temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*




*Corol.* 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistentibus reciprocè ut perpendiculum à centro illo in orbis tangentem rectilineam demissum. (b) Est enim velocitas in locis illis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, ut sunt bases æ-

(b) 172. Est enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut sunt bases æqualium triangulorum A B, B C, C D, D E, E F, æqualibus temporibus uniformi motu descriptæ (5); æqualium autem triangulorum bases sunt reciprocè ut eorum altitudines, hoc est, reciprocè ut perpendicula ex centro virium S, in bases demissa.

qualium triangulorum $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EF$; & hæ baſes ſunt reciprocæ ut perpendicula in ipſas demiſſa.

*Corol.* 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in ſpatiis non reſiſtentibus ab eodem corpore ſucceſſivè deſcriptorum chordæ $AB$, $BC$ compleantur in parallelogrammum $ABCU$, & hujus diagonalis $BU$ in eâ poſitione quam ultimò habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; (c) tranſibit eadem per centrum virium.

*Corol.* 3. Si arcuum æqualibus temporibus in ſpatiis non reſiſtentibus deſcriptorum chordæ $AB$, $BC$ ac $DE$, $EF$ compleantur in parallelogramma $ABCU$, $DEFZ$; vires in $B$ & $E$ ſunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium $BU$, $EZ$, ubi arcus iſti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus $BC$ & $EF$ componuntur (per legum corol. 1.) ex motibus $Bc$, $BU$ & $Ef$, $EZ$: atqui $BU$ & $EZ$, ipſis $Cc$ & $Ff$ æquales, in demonſtratione propoſitionis hujus generabantur ab impulſibus vis centripetæ in $B$ & $E$, ideóque ſunt his impulſibus proportionales.

*Corol.* 4. Vires quibus corpora quælibet in ſpatiis non reſiſtentibus à motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos, ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus deſcriptorum ſagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas biſecant ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. (d) Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio.

*Corol.*

ſa. Cum igitur evaneſcentibus triangulis ASB, BSC &c. ultima perimeter ABCDEF, ſit linea curva quam (113) rectæ Ac, Bd, Ce, Df, tangunt in punctis A, B, C, D, E, manifeſtum eſt velocitates in illis punctis eſſe reciprocè ut perpendicula à centro S, in tangentes demiſſa.

(c) 173. Tranſibit eadem per centrum virium. Nam ex demonſtratione propoſitionis hujus, ſumptâ $BV=Cc$, erit $VC$, æqualis & parallela lineæ $Bc$, ſeu $AB$, adeóque $VA$, $BC$, erunt etiam æquales & parallelæ, & $BV$, quæ producta tranſit per centrum S, erit diagonalis parallelogrammi $ABCV$.

174. Si ducantur per puncta quævis B, & D, perimetri curvæ vel diverſarum curvarum tangentes Bc, De, & demittantur angulorum contactuum ſubtenſæ Cc, Ee, radiis SB, SD, ad centrum virium convergentibus parallelæ, ſintque arcus BC, DE, æqualibus temporibus deſcripti, patet ex corollario 3. vires centripetas in B & D, eſſe ad invicem in ultimâ ratione ſubtenſarum Cc, Ee.

(d) 175. Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium BV, EZ, diagonales enim AC, DF, quæ ſunt chordæ arcuum evaneſcentium ABC, DEF, alias diagonales BV, EZ, biſecant.

DE MOTU CORPORUM.

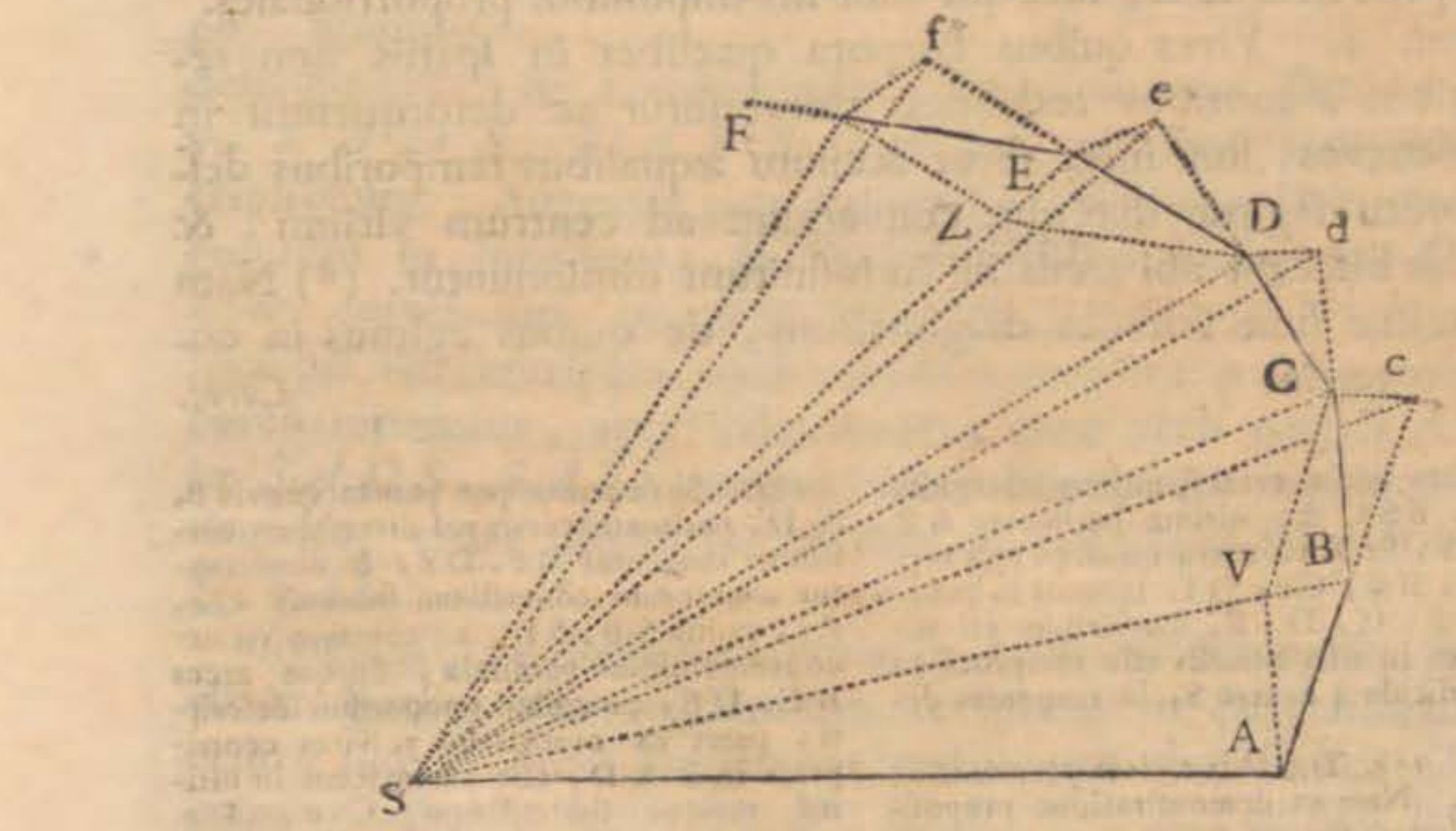
*Corol.* 5. Ideoque vires eædem ſunt ad (c) vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas horizonti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

*Corol.* 6. Eadem omnia obtinent per legum corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, unà cum centris virium, quæ in ipſis ſita ſunt, non quieſcunt, ſed moventur uniformiter in directum.

## PROPOSITIO II. THEOREMA II.

*Corpus omne, quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano deſcriptâ, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripetâ tendente ad idem punctum.*

Caſ.




(c) 176. Vis enim gravitatis per lineas parallelas ad horizontem perpendiculares agit & gravia oblique projecta parabolas deſcribunt (40); quod etiam in figurâ ſuperiori contingeret, ſi centrum virium S, in infinitum abiret, & vis centripeta in omnibus punctis A, B, C, D, eadem maneret.

177.

*Caſ.* 1. Nam corpus omne, quod movetur in lineâ curvâ, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem (per leg. 1.) Et vis illa, quâ corpus de curſu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima $SAB$, $SBC$, $SCD$, &c. circa punctum immobile $S$ temporibus æqualibus æqualia deſcribere, (f) agit in loco $B$ ſecundum lineam parallelam ipſi $cC$ (per prop. XL. lib. 1. elem. & leg 11.) hoc eſt, ſecundum lineam $BS$; & in loco $C$ ſecundum lineam ipſi $dD$ parallelam, hoc eſt, ſecundum lineam $SC$, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile $S$. *Q. E. D.*

*Caſ.* 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde eſt, ſive quieſcat ſuperficies, in quâ corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem unà cum corpore, figurâ deſcriptâ, & puncto ſuo $S$ uniformiter in directum.

*Corol.* 1. In ſpatiis vel mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum; (g) ſed indè declinant in conſequentia, ſeu verſus plagam in quam fit motus, ſi modo arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia.

*Corol.*

(f) 177. Agit in loco B, ſecundùm lineam parallelam ipſi C c, hoc eſt, ſecundùm lineam B S; nam ſolâ vi inſitâ in A. corpus uniformi cum motu progrederetur per rectam A B c, & æqualibus temporibus æquales lineas A B, B c, deſcriberet; verùm per vim centripetam in B, detorquetur à rectâ B c, ut aliam rectam B C, eodem tempore deſcribat quo deſcripſiſſet B c; adeóque junctâ C c, vis centripeta agit in B, ſecundùm directionem parallelam ipſi C c (per coroll. 1. leg.), ſed ob A B = B c, & ob triangulum S B C, æquale triangulo S A B, (per hyp.), erit triangulum S A B = triang. S b c = triang. S B C, adeóque per prop. 40. vel 39. lib. 1. Elem. communis triangulorum S B C, S B c æqualium baſis B S, parallela eſt rectæ C c, quæ illorum triangulorum vertices jungit; cum igitur, per demonſtrata, vis centripeta in B, agat ſecundùm directionem parallelam lineæ C c, neceſſum eſt ut agat ſecundùm directionem rectæ B S, hoc eſt, ut tendat ad centrum S.

(g) 178. Sed indè declinant in conſequentia, ſi modò arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia. Nam ſi triangulum S B C, æquale non eſt triangulo S A B, ſeu S B c, eodem tempore deſcripto, recta C c, non erit parallela lineæ B S, ſed producta cum lineâ S B, ità converget ut tendat in plagam motûs, ſi triangulum S B C, triangulo S B c, majus eſt, & tendat in plagam contrariam ſi triangulum S B C, triangulo S B c, minus. Quarè vis centripeta in B, agens ſecundùm directionem parallelam lineæ C c, in primo caſu declinat in conſequentia, in ſecundo caſu declinat in antecedentia.

DE MOTU CORPORUM.

*Corol.* 2. ([h]) In mediis etiam reſiſtentibus, ſi arearum deſcriptio acceleratur, virium directiones declinant à concurſu radiorum verſus plagam, in quam fit motus.

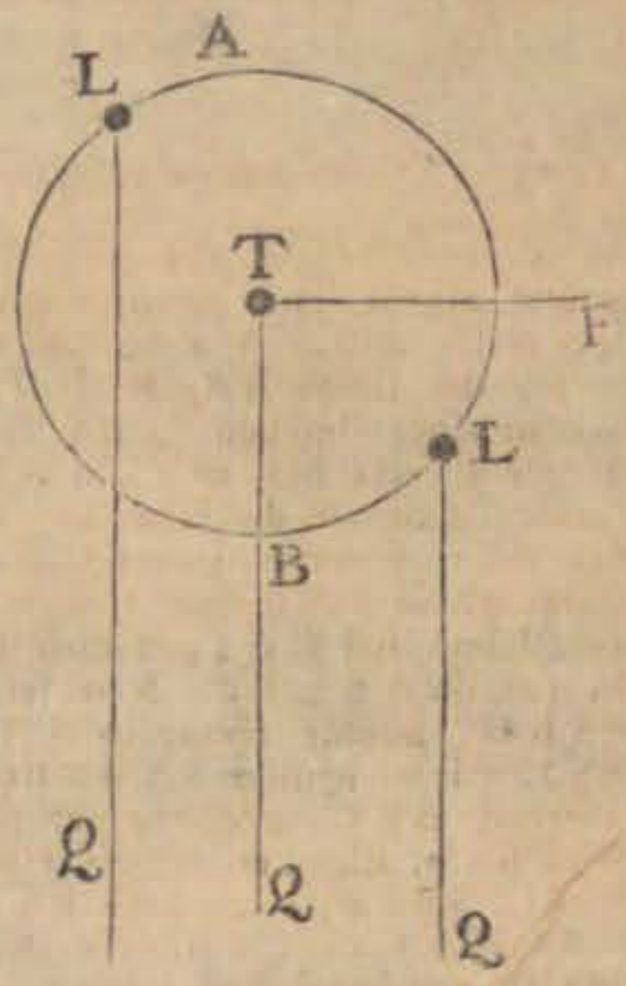
## *Scholium.*

Urgeri poteſt corpus à vi centripetâ compoſitâ ex pluribus viribus. In hoc caſu ſenſus propoſitionis eſt, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. ([i]) Porro ſi vis aliqua agat perpetuò ſecundum lineam ſuperficiei deſcriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur à plano ſui motus: ſed quantitatem ſuperficiei deſcriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compoſitione virium negligenda eſt.

## PROPOSITIO III. THEOREMA III.

*Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto deſcribit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compoſitâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.*

([k]) Sit corpus primum *L*, & corpus alterum *T*: & (per




ſecundùm directionem T Q urgetur, ur-

gea-

([h]) 179. Cum enim medium reſiſtat accelerationi deſcriptionis arearum, liquet arearum deſcriptionem etiam ſublatâ mediireſiſtentiâ accelerari oportere, ac proindè per Coroll. 1. virium directiones declinare à concurſu radiorum, in S, versùs plagam in quam fit motus.

([i]) 180. Porrò ſi vis illa perpetuò ſecundùm lineam ſuperficiei deſcriptæ perpendicularem agat, planum ſubjectum duntaxat premit, & corpus in illo plano motum in neutram partem impellit, ac proindè nec ſuperficiei deſcriptæ quantitatem auget nec minuit, & propereà in compoſitione virium in plano agentium negligenda eſt.

([k]) 181. Corpus L, circà alterum T, in curvâ A L B, ità revolvatur, ut circà illius centrum T, ſemper deſcribat areas temporibus proportionales, dùm interim corpus T, urgetur vi acceleratrice ſecundùm directionem T Q, & per Leg. Coroll. 6. ſi vi novâ acceleratrice quæ æqualis & contraria ſit illi quâ corpus T

legum corol. VI.) si vi novâ, quæ æqualis & contraria sit illi, quâ corpus alterum $T$ urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum $L$ describere circa corpus alterum $T$ areas easdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum $T$ urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea (per leg. I.) corpus illud alterum $T$ sibimet ipsi jam relictum vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum $L$ urgente differentiâ virium, id est, urgente vi reliquâ perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum $T$ describere. Tendit igitur (per theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum $T$ ut centrum. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc si corpus unum $L$ radio ad alterum $T$ ducto describit areas temporibus proportionales; atque de vi totâ (sive simplici, sive ex viribus pluribus juxta legum corollarium secundum compositâ) quâ corpus prius $L$ urgetur, subducatur (per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, quâ corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum $T$ ut centrum.

*Corol.* 2. Et, si areæ illæ sunt temporibus quamproximè proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum $T$ quamproximè.

*Corol.* 3. Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproximè ad corpus alterum $T$, erunt areæ illæ temporibus quamproximè proportionales.

*Corol.* 4. Si corpus $L$ radio ad alterum corpus $T$ ducto describit areas, quæ cum temporibus collatæ sunt valde inæquales; & corpus illud alterum $T$ vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum; nimirum quiescet, si nullâ aliâ vi præter acceleratricem secundùm directionem $TQ$, antè urgebatur; movebitur verò æquabiliter per rectam aliquam $TF$, si præter vim acceleratricem per $TQ$, agentem, aliâ vi non acceleratrice ferebatur juxtà directionem $TF$, &c.

DE MOTU CORPORUM.

formiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum *T* tendentis vel nulla eſt, vel miſcetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: viſque tota ex omnibus, ſi plures ſunt vires, compoſita ad aliud (ſive immobile ſive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; ſi modo vis centripeta ſumatur, quæ reſtat poſt ſubductionem vis totius in corpus illud alterum *T* agentis.

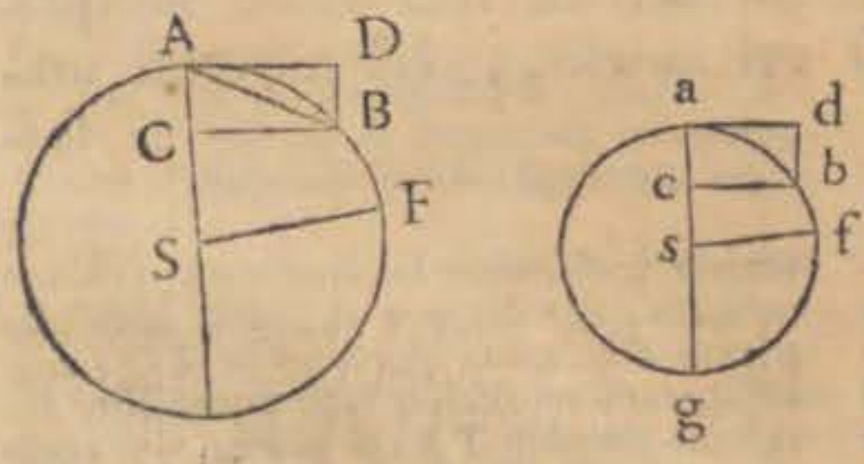
## *Scholium.*

Quoniam æquabilis arearum deſcriptio index eſt centri, quod vis illa reſpicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur à motu rectilineo, & in orbita ſua retinetur; quidni uſurpemus in ſequentibus æquabilem arearum deſcriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in ſpatiis liberis peragitur?

## PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

*Corporum, quæ diverſos circulos æquabili motu deſcribunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & eſſe inter ſe, ut ſunt arcuum ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.*

(1) Tendunt hæ vires ad centra circulorum per prop. 11. & corol. 2. prop. 1. & ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus




(1) 182. Corpora duo A & a, circulos A B G A, a b g a, æquabili motu deſcribant, & areæ ſeu ſectores A S F, F S G, & a s f, f s g, erunt in ſingulis circulis ut arcus A F, F G, & a f, f g; hoc eſt (5) ut tempora quibus deſcribuntur, ac proindè vires quibus corpora A & a, in peripheriis A B G A, a b g a retinentur tendunt ad centra S & s. Sint arcus A B, a b, æqualibus temporibus quam minimis deſcripti, & ductis tangentibus A D, a d, & ad eas perpendicularibus B D, b d, completiſque parallelogrammis C D, c d, vires centripetæ in A & a, erunt inter ſe ut rectæ D b, d b, ſeu ut ſinus verſi A C, a c, (174). Verum

poribus quàm minimis descriptorum sinus versi per corol. 4. prop. 1. hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per lem. VII. & propterea, cum hi arcus sint ut arcus temporibus quibusvis æqualibus descripti, & diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum directè, & ratione simplici radiorum inversè. (m)

*Corol.* 2. (n) Et, cum tempora periodica sint in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, & ratione velocitatum inversè; (o) vires centripetæ sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, & ratione duplicatâ temporum periodicorum inversè.

*Corol.* 3. (p) Unde si tempora periodica æquentur, & prop-

rùm ductis chordis A B, a b, est A C : A B = A B : A G, & a c : a b = a b : a g, undè $AC = \frac{AB^2}{AG}$ & $ac = \frac{ab^2}{ag}$; cum igitur chordæ & arcus nascentes æquales sint (per Lem. VII.) erit A C : a c, hoc est, vis centripeta in A, ad vim centripetam in a, ut quadratum arcûs evanescentis A B diametro A G divisum, ad quadratum arcus evanescentis, a b, diametro a g, divisum & propterea cum hi arcus &c.

(m) 183. Vis centripeta quâ corpus in peripheriâ circuli uniformiter incedens retinetur, est in omnibus peripheriæ punctis eadem, ut pote semper proportionalis constantis velocitatis quadrato ad radium constantem applicato.

(n) 184. Tempora periodica, hoc est, tempora quibus integræ peripheriæ describuntur sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè & ratione velocitatum inversè. Nam (5) velocitates sunt ut peripheriæ ad tempora periodica applicatæ, sed peripheriæ sunt ut radii, ergo velocitates sunt ut radii ad tempora periodica applicati, ac proindè tempora periodica sunt ut radii directè & velocitates inversè. Si corporum A & a, tempora periodica dicantur $T$ & $t$, celeritates $C$ & $c$, radii A S, a s, dicantur $R$ & $r$, erit $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ ideóque $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$.

(o) 185. Vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; nam vires centripetæ corporum A & a, dicantur $V$ & $v$, erit (per coroll. 1.) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, sed quoniam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, adeóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$, erit $\frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, ergò $V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$.

(p) 186. Undè si tempora periodica æquentur & propterea (184) velocitates sint ut radii, erunt etiam vires centripetæ ut radii, nam cum sit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, si $T^2 = t^2$, erit $V : v = R : r$.

DE MOTU CORPORUM.

propterea velocitates ſint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

*Corol.* 4. (q) Si & tempora periodica, & velocitates ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum; (r) æquales erunt vires centripetæ inter ſe: & contra.

*Corol.* 5. (s) Si tempora periodica ſint ut radii, & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciprocè ut radii: & contra.

*Corol.* 6. (t) Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum, & propterea velocitates reciprocè in radiorum ratione ſubduplicatâ; (u) vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum: & contra.

Et contrà ſi vires centripetæ ſint ut radii, tempora periodica æquantur. Cum enim ſit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, ſi ponatur $V : v = R : r$, erit $R : r = t^2 R : T^2 r$, undè $r t^2 R = R T^2 r$, adeóque $t^2 = T^2$, & $t = T$.

(q) 187. Si tempora periodica ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum, velocitates erunt in eâdem ratione. Nam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ adeóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$.

Undè ſi fuerit $T : t = R^{\frac{1}{2}} : r^{\frac{1}{2}}$ ac proindè $T^2 : t^2 = R : r$, erit $C^2 : c^2 = R : r$.

Et contrà ſi fuerit $C^2 : c^2 = R : r$, erit $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = R : r$, adeóque $\frac{R}{T^2} = \frac{r}{t^2}$, & $R t^2 = r T^2$, undè $T^2 : t^2 = R : r$.

(r) 188. Si & tempora periodica ac proindè velocitates (187) ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum, æquales erunt vires centripetæ inter ſe. Cum ſit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, ſi ponatur $T^2 : t^2 = R : r$, erit $t^2 R = T^2 r$, undè $V = v$.

Et contrà ſi $V = v$, cum ſit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, erit $t^2 R = T^2 r$, & proindè $T^2 : t^2 = R : r$.

(s) 189. Si tempora periodica ſunt ut radii & propterea (184) velocitates æquales, vires centripetæ erunt reciprocè ut radii. Quoniam enim (per coroll. 1.) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, ſi $C^2 = c^2$, erit $V : v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$.

Et contrà ſi fuerit $V : v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$, cum ſit (coroll. 1.) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$ erit $\frac{1}{R} : \frac{1}{r} = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, adeóque $C^2 = c^2$, & $C = c$.

(t) 190. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum, erunt velocitates reciprocè in ratione radiorum ſubduplicatâ; nam quoniam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, adeóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$ ſi fuerit $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$, erit $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{R^3} : \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{R} : \frac{1}{r} = r : R$.

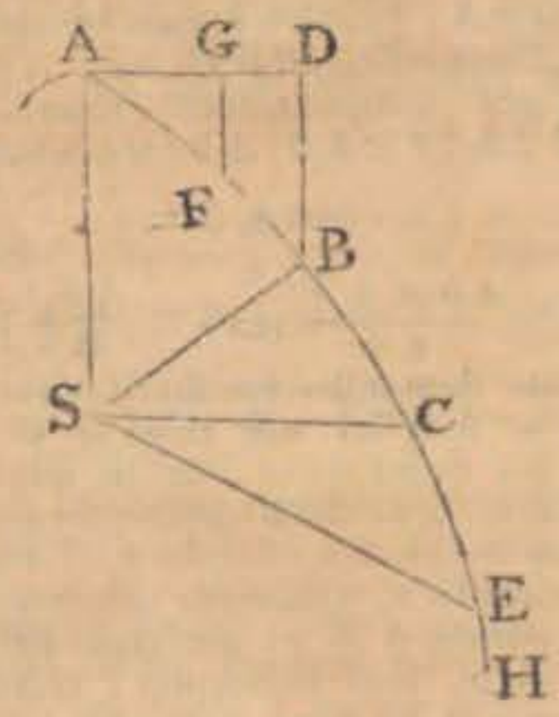
Et contrà ſi fuerit $C^2 : c^2 = r : R$, erit $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = r : R$, adeóque $\frac{R^3}{T^2} = \frac{r^1}{t^2}$ & $R^1 : r^3 = T^2 : t^2$.

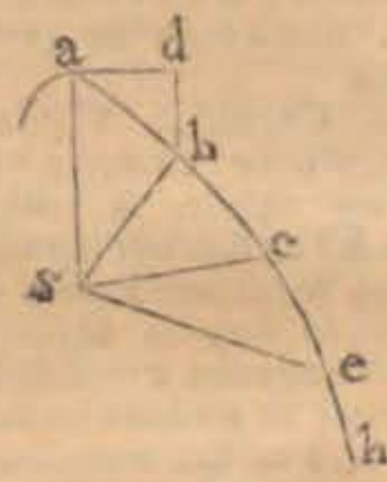
(u) 191. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum & propterea (190) velocitates reciprocè in radiorum ratione ſubduplicatâ, vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum. Nam cum ſit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$; ſi fuerit $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$, erit $V : v = r^3 R : R^3 r = r^2 : R^2$.

Et contrà ſi $V : v = r^2 : R^2$, erit (185) $r^2 : R^2 = t^2 R : T^2 r$ ac proindè $t^2 R^3 = T^2 r^3$, & $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$.

*Corol.* 7. Et univerſaliter, ſi (x) tempus periodicum ſit ut radii $R$ poteſtas quælibet $R^n$, & propterea velocitas reciprocè ut radii poteſtas $R^{n-1}$; (y) erit vis centripeta reciprocè ut radii poteſtas $R^{2n-1}$: & contra.

*Corol.* 8. (z) Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunque ſimilium, centraque in figuris illis ſimiliter poſita habentium, par-




(x) 192. Si tempora periodica ſint ut radiorum poteſtates quælibet $R^n$, $r^n$, velocitates erunt reciprocè ut radiorum poteſtates $R^{n-1}$, $r^{n-1}$. Nam ponatur $T : t = R^n : r^n$, & quoniam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, erit $C : c = \frac{R}{R^n} : \frac{r}{r^n} = \frac{1}{R^{n-1}} : \frac{1}{r^{n-1}} = r^{n-1} : R^{n-1}$.

Et contrà ſi fuerit $C : c = r^{n-1}, R^{n-1}$, erit $\frac{R}{T} : \frac{r}{t} = r^{n-1} : R^{n-1}$, adeóque $\frac{R^n}{T} = \frac{r^n}{t}$, undè $R^n : r^n = T : t$.

(y) 193. Et univerſaliter ſi tempora periodica ſint ut radiorum poteſtates quælibet $R^n$, $r^n$, & propterea (192) velocitates reciprocè ut radiorum poteſtates $R^{n-1}$, $r^{n-1}$, erunt vires centripetæ reciprocè ut radiorum poteſtates $R^{2n-1}$, $r^{2n-1}$. Nam ponatur $T : t = R^n : r^n$, adeóque $T^2 : t^2 = R^{2n} : r^{2n}$: & cum ſit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, erit $V : v = R r^{2n} : r R^{2n} = r^{2n-1} : R^{2n-1}$.

Et contrà ſi fuerit $V : v = r^{2n-1} : R^{2n-1}$; cum ſit $V : v = t^2 R : T^2 r$, erit $r^{2n-1} : R^{2n-1} = t^2 R : T^2 r$, adeóque $t^2 R^{2n} = T^2 r^{2n}$, undè $T^2 : t^2 = R^{2n} : r^{2n}$ & $T : t = R^n : r^n$.

(z) 194. Corpora A & a, figurarum ſimilium A B H, a b h, centra S, s, in figuris illis ſimiliter poſita habentium, parzes ſimiles A B E, a b e, ità deſcribant ut areæ A S B, A S C &c. a s b, a s c &c. circà centra S, s, in ſingulis figuris deſcriptæ temporibus quibus deſcribuntur ſint reſpectivè proportionales, & per prop. 11. vires centripetæ ad centra S, s, tendent. Per puncta A & a, in curvis ſimiliter poſita agantur tangentes A D, a d, ſintque arcus minimi, A F, a b, eodem tempore in utráque curvâ deſcripti, & ductis rectis F G, b d, radiis vectoribus A S, a s, parallelis, vis centripeta in A, eſt ad vim centripetam in a, ut F G, ad b d, (174). Sumatur autem

DE MOTU CORPORUM.

partes deſcribunt, conſequuntur ex demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicatâ. Applicatur autem ſubſtituendo æquabilem arearum deſcriptionem pro æquabili motu, & diſtantias corporum à centris pro radiis uſurpando.

Co-

arcus A B ſimilis a b, (ita ut ſit a s: A S = a b : A B, ac proinde ſit A B = $\frac{a b \times A S}{a s}$) ducaturque B D radio A S parallela, erit per coroll. 1. Lem. XI. F G: B D = A F²: AB², & quia figuræ ABD & a b d, ſunt ſimiles, eſt B D: b d = A B: a b, itaque per compoſitionem rationis eſt F G: b d = A F² × A B: A B² × a b = A F²: A B × a b (& quia A B = $\frac{a b \times A S}{a s}$) = A F²: $\frac{a b \times A S}{a s}$ × a b = $\frac{A F^2}{A S}$: $\frac{a b^2}{a s}$.

Cum igitur demonſtratum fuerit vires centripetas in A & a, eſſe inter ſe ut ſunt G F, b d, erunt vires illæ ut quadrata arcuum A F, a b, ſimul deſcriptorum applicata ad radios homologos A S, a s.

195. Coroll. 1. Quoniam velocitates finitæ corporum A & a, per arcus naſcentes A F, a b, ſunt uniformes, erunt illæ ut arcus A F, a b, æqualibus temporibus deſcripti (5). Unde vires centripetæ in A, & a, erunt ut velocitatum in A & a, quadrata, ad radios A S, a s applicata.

196. Corol. 2. Figuræ ſimiles A S E, a s e, diviſæ concipiantur in innumeros ſectores æquales A S B, B S C &c., & a s b, b s c, &c. ſibi mutuò in duabus figuris ſimiles, & ob æquabilem arearum ſeu ſectorum in ſingulis figuris deſcriptionem, ſectores æquales æqualibus temporibus deſcribentur ac proindè arcus A B, B C, & arcus a b, b c, &c. æqualibus reſpectivè temporibus percurrentur, erit igitur tempus per A B, ad tempus per a b, ut tempus per A E, ad tempus per a e, hoc eſt, tempora quibus deſcribuntur arcus ſimiles A B, a b, ſunt ut tempora quibus deſcribuntur alii quicumque ſimiles arcus, A E, a e, adeóque ut tempora periodica. Cum igitur (195) velocitates in A & a, ſint inter ſe ut arcus A B, a b, ad ſua reſpectivè tempora applicati, erunt quoque velocitates illæ inter ſe ut arcus A B, a b, ſeu ob figurarum ſimilitudinem, ut radii A S, a s, ad tempora periodica applicati, id eſt, celeritates in punctis correſpondentibus A & a, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione radiorum homologorum directè & ratione temporum periodicorum inversè, adeóque tempora periodica ſunt ut radii directè & velocitates inversè.

197. Coroll. 3. Celeritates in A & a, dicam-

*Corol.* 9. (a) Ex eâdem demonſtratione conſequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo tempore quovis deſcribit, medius eſt proportionalis inter arcum ſimilem & diametrum circuli. Et tempora periodica corporum in circulis æqualibus ſunt in ratione ſeſquiplicata arcuum ſimilium & diametrorum homologarum. Et tempora periodica corporum in circulis quibuſcunque ſunt in ratione ſeſquiplicata radiorum homologorum. Et velocitates in principiis motus æqualium arcuum ſunt reciprocè ut radii. Et vires centripetæ in principiis motus ſunt reciprocè ut quadrata radiorum. Et vires centripetæ quibus corpora æqualia in circulis inæqualibus æqualiter revolvuntur, ſunt reciprocè ut radii. Celeritates in principiis motus corporum æqualium, quæ circulos æqualiter deſcribunt, ſunt reciprocè ut radii. Celeritates in principiis motus quibus corpora ſimilia ſimilium figurarum homologas deſcribunt, ſunt reciprocè ut radii homologi. Celeritates in principiis motus quibus corpora ſimilia ſimilium figurarum quarumcunque ſimilium homologas deſcribunt, ſunt in ratione ſubduplicata homologorum laterum. Et tempora periodica corporum ſimilium ſimilium figurarum quarumcunque ſimilium homologas deſcribunt, ſunt in ratione ſubduplicata laterum homologorum. Et tempora periodica corporum ſimilium circa centra homologa in figuris ſimilibus revolventium ſunt in ratione ſubduplicata laterum homologorum. Celeritates in principiis motus

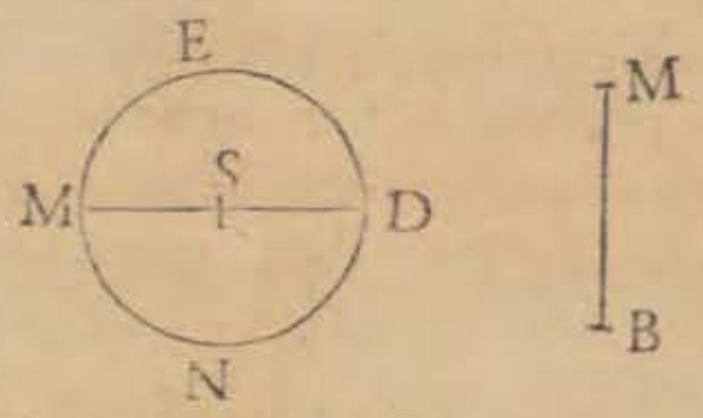
DE MOTU CORPORUM.

portionalis inter diametrum circuli, & descensum corporis eâdem datâ vi eodemque tempore cadendo confectum.

*Scho.*

(199) describit. Ergo cum spatia eâdem velocitate uniformi percursa, sint ut tempora (5) patet propositum.

201. Coroll. 3. Hinc datâ vi centripetâ quâlibet in datâ à centro distantiâ, facile est reperire velocitatem quâ corpus projici debet ut circà prædictum centrum in datâ distantiâ circulum uniformiter describat; velocitas enim illa æqualis est velocitati quam corpus acquireret cadendo per dimidiam distantiam à centro, si datâ vi centripetâ continuò urgeretur (199). Dato autem circuli radio, datur peripheria, & datâ æquabili in circulo velocitate cum peripheriâ, invenitur tempus periodicum, & arcus dato quovis tempore descriptus habetur.




202. Coroll. 4. Datis circuli radio & velocitate corporis in eo revolventis, facilè colligitur proportio vis centripetæ in eo circulo ad vim quamlibet notam qualis est vis gravitatis. Primum enim inveniatur tempus revolutionis unius in eo circulo peractæ (5), mox invenietur tempus quo corpus vi illâ centripetâ continuò sollicitatum per dimidium radium caderet (200). Ex datâ autem vi gravitatis seu ex dato spatio quod grave liberè cadendo, dato quodam tempore percurrit, invenitur (27) spatium ab eodem gravi percursum eo tempore quo corpus vi centripetâ sollicitatum per dimidium radium cadit, sed vires acceleratrices constantes, rationem habent spatiorum quæ dato tempore percurrere faciunt (30) est ergo vis ea centripeta ad vim gravitatis, ut dimidius circuli radius ad spatium id quod grave percurreret eo tempore quo corpus vi centripeta sollicitatum dimidium illum radium percurrit.

Exempli causâ. Corpus M, ope fili MS clavo in S alligati, circà centrum S uniformiter describat circulum MNDE, in plano horizontali positum, eaque sit corporis revolventis celeritas quæ acquiritur à gravi per altitudinem M B cadente, quæritur ratio vis centripetæ in circulo ad vim gravitatis. Tempus quo grave cadit per altitudinem M B, dicatur T, & velocitas in B acquisita, quâ (ex hyp.) corpus M circuli peripheriam uniformiter describit, erit $\frac{2\,M\,B}{T}$ (30), peripheria circuli dicatur p, & cum tempus periodicum in circulo sit æquale peripheriæ ad velocitatem $\frac{2\,M\,B}{T}$ applicatæ (5) erit id Tempus Periodicum $\frac{p \times T}{2\,M\,B}$; jam verò est peripheria ad radium (200) ut tempus Periodicum ad tempus quo corpus M, solâ vi centripetâ constante sollicitatum, dimidium radium M S percurrit, sive $p : M\,S = \frac{p \times T}{2\,M\,B}$ ad tempus per dimidium radium quod est ideo $\frac{T \times M\,S}{2\,M\,B}$. Cum autem grave tempore T altitudinem MB sit emensus & in motu uniformiter accelerato spatia percursa sint ut quadrata temporum quibus percurruntur (27) erit $T^2$ ad $\frac{T^2 \times M\,S^2}{4\,M\,B^2}$, seu $4\,M\,B^2$ ad $M\,S^2$ ut spatium M B tempore T percursum ad spatium percursum tempore $\frac{T \times M\,S}{2\,M\,B}$, quo corpus M, vi centripetâ percurrit dimidium radium, quod erit $\frac{M\,S^2 \times M\,B}{4\,M\,B^2} = \frac{M\,S^2}{4\,M\,B}$ est igitur (13) vis centripeta in circulo ad vim gravitatis ut $\frac{MS}{2}$, ad $\frac{M\,S^2}{4\,M\,B}$, sivè ut 2 M B ad M S.

203.

## *Scholium.*

(b) Casus corollarii sexti obtinet in corporibus cœlestibus, (ut seorsum collegerunt etiam nostrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decrescentem in duplicatâ ratione distantiarum à centris, decrevi fusiùs in sequentibus exponere.

Porro præcedentis propositionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea gravitatis. Nam si corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem ex descensu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus corol. IX. Et (c) hujusmodi propositionibus *Hugenius* in eximio suo tractatu *de Horologio Oscillatorio* vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

(d) Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur polygonum laterum quotcunque. Et si corpus in polygoni lateribus datâ cum velocitate

(b) 203. Ex observationibus colligunt astronomi planetas secundarios, ut sunt Jovis vel Saturni Satellites, radiis ad suum planetam primarium ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro planetæ primarii; planetas verò primarios radiis ad solem ductis, areas describere temporibus proportionales eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiplicatâ radiorum. Quare casus corollarii VI. in corporibus cœlestibus obtinet, id est, planetarum velocitates sunt reciprocè in ratione subduplicatâ radiorum & vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata radiorum.

(c) 204. Hugenius ad calcem tractatûs de horologio oscillatorio, de viribus centrifugis in circulo earumque cum vi gravitatis proportione 13. theoremata sine demonstratione proposuit. Eorum aliqua in corollariis propos. hujusce IV. demonstravit Newtonus, viamque aperuit cui insistendo cætera omnia facili negotio absolvi possunt, quod posteà perfecerunt multi insignes Mathematici.

(d) 205. Duo intelligantur polygona similia & regularia circulis duobus inscripta, quorum latera numero crescant & longitudine minuantur in infinitum, & corpora duo in polygonorum lateribus æquabili velocitate ferantur, atque ad singulos angulos à circulo reflectantur. Manifestum est corporum in polygonis revolventium vires centrifugas non esse mensurandas ex solâ velocitate quâ in singulis angulis incurrunt in circulum & quâ ab illo reflectuntur, sed insuper habendam esse rationem frequentiæ impactuum

aut

DE MOTU CORPORUM.

tate movendo ad ejus angulos ſingulos à circulo reflectatur; vis, quâ ſingulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque ſumma virium in dato tempore erit ut velocitas illa, & numerus reflexionum conjunctim: hoc eſt (ſi polygonum detur ſpecie) ut longitudo dato illo tempore deſcripta, & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejuſdem ad circuli prædicti radium; id eſt, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, ſi polygonum lateribus infinitè diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore deſcripti applicatum ad radium. Hæc eſt vis centrifuga, quâ corpus urget circulum; & huic æqualis eſt vis contraria, quâ circulus continuo repellit corpus centrum verſus.

PRO-

aut reflexionum, ità ut ſi eadem fuerit duorum corporum revolventium celeritas, vires centrifugæ ſint ut numeri impactuum aut reflexionum tempore dato peractarum; nam quò plures ſunt tempore dato impactus & reflexiones, eò magis corpus circulum urget ut à centro recedat & viceversâ eò magis ad centrum urgetur per circuli reactionem æqualem & contrariam actioni. Quarè ſi varia fuerit corporum in polygonis revolventium celeritas æquabilis, vires centrifugæ erunt ut velocitates & numeri impactuum ſeu reflexionum tempore dato peractarum conjunctim. Eſt autem numerus reflexionum tempore dato ut numerus laterum polygoni eo tempore deſcriptorum. Porrò ſi eadem ſupponatur in utroque polygono velocitas, numeri laterum eodem tempore deſcriptorum erunt reciprocè ut latera ſingula; quo enim majora ſunt latera, eo minor eorum numerus dato tempore datâque velocitate percurritur; quarè manente eâdem in utroque polygono velocitate, numeri reflexionum ſunt inversè ut latera, ſive ob polygonorum ſimilitudinem, inversè ut radii circulorum. Si verò ponatur idem circulorum radius, & varia in utroque polygono velocitas uniformis, erunt numeri laterum in utroque polygono dato tempore percurſorum, directè ut velocitates æquabiles, ſeu, ut longitudines dato tempore deſcriptæ (5). Quarè variantibus polygoni velocitate & radio, numerus reflexionum eſt ut velocitas, ſeu ut longitudo tempore dato deſcripta applicata ad radium. Cum igitur ſuprà oſtenſum ſit vim centrifugam in circulo, aut vim centripetam ipſi æqualem & contrariam, eſſe in ratione compoſitâ velocitatis & numeri reflexionum dato tempore peractarum, liquet eandem vim centrifugam eſſe quoque ut quadratum velocitatis radio diviſum, & etiam ut quadratum longitudinis ſeu arcûs dato tempore deſcripti applicatum ad radium.

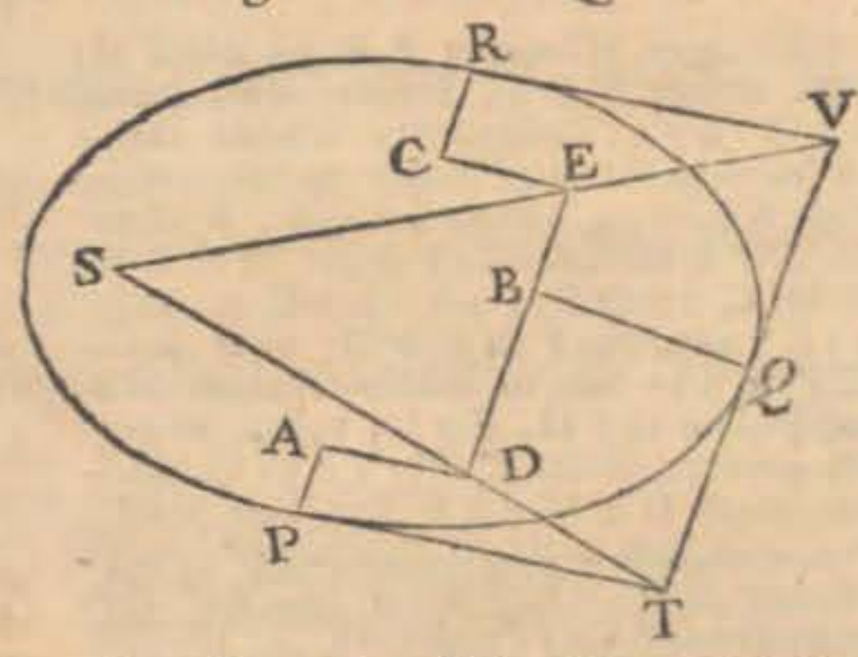
206.

## PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

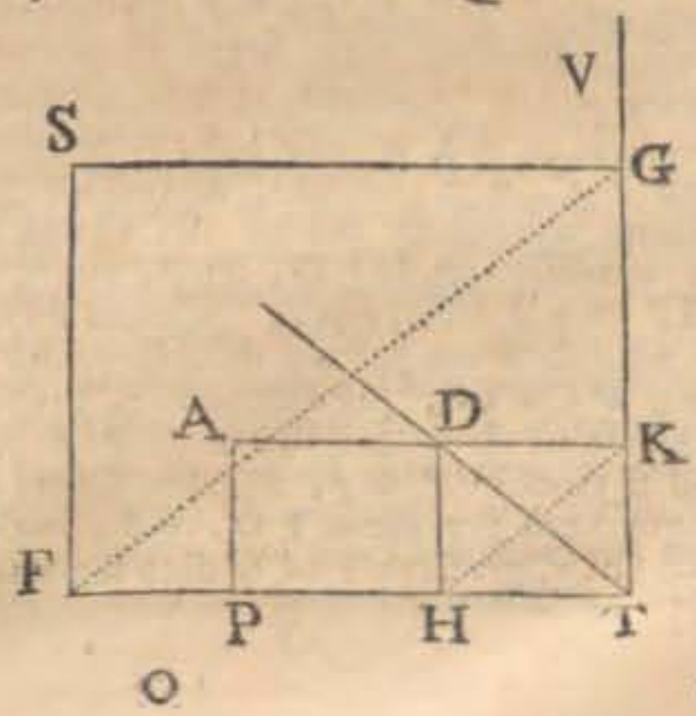
*Datâ quibuſcunque in locis velocitate, quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus deſcribit, centrum illud invenire.*

Figuram deſcriptam tangant rectæ tres *PT*, *TQV*, *VR* in punctis totidem *P*, *Q*, *R*, concurrentes in *T* & *V*. Ad tangentes erigantur perpendicula *PA*, *QB*, *RC* velocitatibus corporis in punctis illis *P*, *Q*, *R*, à quibus eriguntur, reciprocè proportionalia; id eſt, ita ut ſit *PA* ad *QB* ut velocitas in *Q* ad velocitatem in *P*, & *QB* ad *RC* ut velocitas in *R* ad velocitatem in *Q*. Per perpendiculorum terminos *A*, *B*, *C* ad angulos rectos ducantur *AD*, *DBE*, *EC* concurrentes in *D* & *E*: Et actæ *TD*, *VE* concurrent in centro quæſito *S*.

Nam perpendicula à centro *S* in tangentes *PT*, *QT* demiſſa (per corol 1. prop. 1.) ſunt reciprocè ut velocitates corporis in punctis *P* & *Q*; ideoque per conſtructionem ut perpendicula *AP*, *BQ* directè, id eſt ut perpendicula à puncto *D* in tangentes demiſſa. (e) Unde facile colligitur quod puncta *S*, *D*, *T* ſunt in unâ rectâ. Et ſimili argumento puncta *S*, *E*, *V* ſunt etiam in unâ rectâ; & propterea centrum *S* in concurſu rectarum *TD*, *VE* verſatur. *Q. E. D.*




(e) 206. Puncta S, D, T, ſunt in unâ rectâ. Demiſſis enim ex centro S, in tangentes T V, T F, perpendiculis S G, S F, & ex puncto D, perpendiculis D K, D H, patet angulos F S G, H D K, lineis parallelis contentos eſſe æquales & propter laterum S F, S G, D H, D K, analogiam, triangula F G S, H K D, eſſe ſimilia, adeóque angulos S F G, D H K, æquari, ac proinde lineas F G, H K, eſſe parallelas, & triangula F T G, H T K, ſimilia, erit ergò T H : T F = H K : F G = D H : S F, & T K : T G = H K : F G = D K : S G. Quare linea T D, producta tranſibit per centrum S.

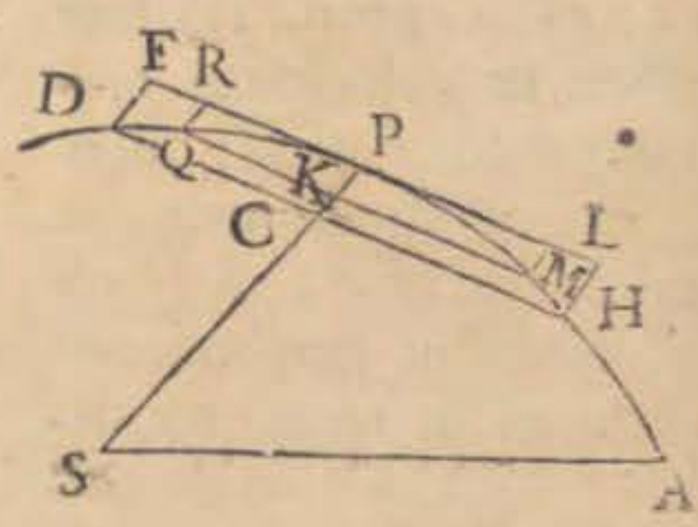


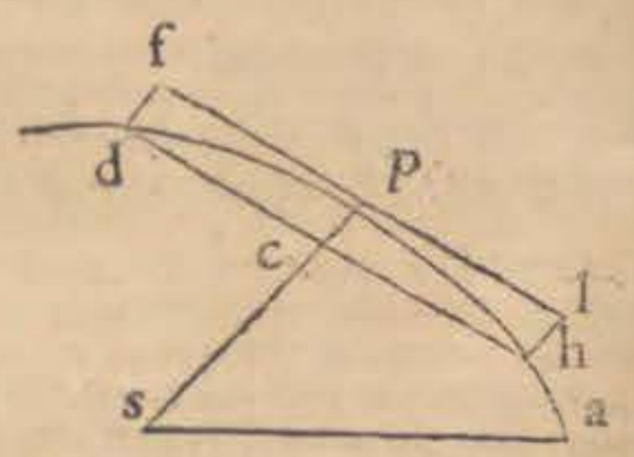
DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

*Si corpus in ſpatio non reſiſtente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam naſcentem tempore quam minimo deſcribat, & ſagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam biſecet, & producta tranſeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut ſagitta directè & tempus bis inversè.*

(f) Nam ſagitta dato tempore eſt ut vis (per corol. 4. prop. 1.) & augendo tempus in ratione quâvis, ob auctum arcum in eâdem ratione ſagitta augetur in ratione illâ duplicatâ (per corol.



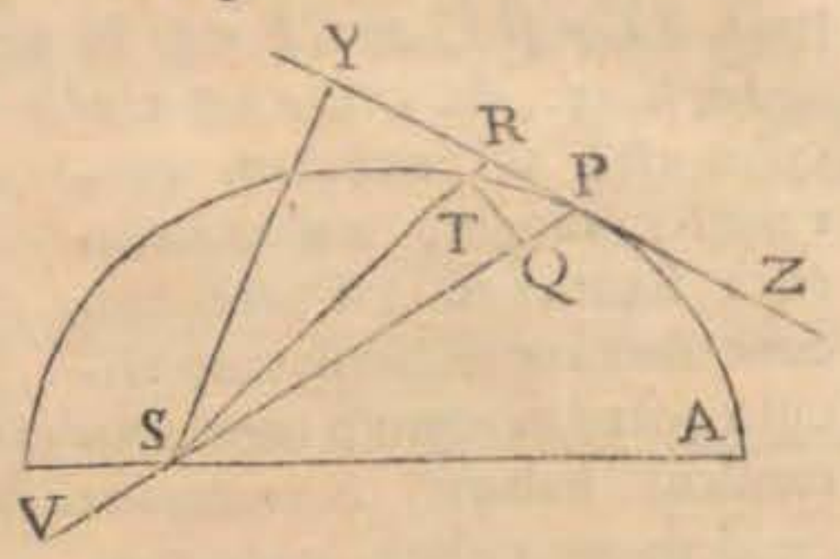




(f) 207. Corpora P & p, circà virium centra S & s, revolvendo, curvas A P Q, a p q, deſcribant, ſintque chordæ minimæ D H, d h, radiis vectoribus S P, s p, bifariam diviſæ, & chordis illis evaneſcentibus, erit C H = P H, & D C = D P (per coroll. 2. Lem. VII.) adeóque P H = P D; undè puncta P & p, ſunt in medio arcuum evaneſcentium D P H, d p h, poſita. Præterea quoniam punctis C & P, c & p, coeuntibus, puncta D & H, d & h, ſimul cum punctis P, p, coincidunt, ultima chordarum evaneſcentium D H, d h, poſitio congruit cum tangentium F L, f l poſitione, ac proindè chordæ evaneſcentes D H, d h, tangentibus F L, f l, æquidiſtant, adeóque rectæ D F, d f, radiis S P, s p, parallelæ ſagittis P C, p c, evaneſcentibus æquales ſint. His ad clariorem eorum quæ Newtonus ſupponit intelligentiam poſitis, demonſtrandum eſt vires centriperas in P & p, eſſe inter ſe ut ſunt ſagittæ P C, p c, directe, & inversè ut quadrata temporum quibus deſcribuntur arcus evaneſcentes H P D, h p d, aut dimidii P D, p d. . . . Dem. . . . Si arcus P D, p d, æqualibus temporibus deſcriberentur, ſagittæ P C, p c, (per coroll. 1. Prop. 1.) eſſent ut vires centripetæ in P & p. Quòd ſi vires in P & p, æquales forent, tempora verò per arcus P D, p d, inæqualia, ſint v. gr. ſicut T ad t, dico ſagittas P C, p c, fore ut horum temporum quadrata directe; ſive ut $T^2$ ad $t^2$. Sit enim arcus P Q, deſcriptus eodem tempore t quo arcus p d, poſitis viribus in P & p, æqualibus, ſpatia Q R, f d, ſeu P K, p c, virium illarum actione eodem tempore deſcripta erunt æqualia; Verùm (per cor.

rol. 2 & 3, lem. XI.) ideoque est ut vis semel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut sagitta directè & tempus bis inversè. *Q. E. D.*

(g) Idem facile demonstratur etiam per corol. 4. lem. x.

*Corol.* 1. Si corpus *P* revolvendo circa centrum *S* describat lineam curvam *A P Q*; tangat vero recta *Z P R* curvam illam in puncto quovis *P*, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto *Q* agatur *Q R* distantiæ *S P* parallela, ac demittatur *Q T* perpendicularis ad distantiam illam *S P*: vis centripeta erit reciprocè ut solidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$; si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta *P* & *Q*. (h) Nam *Q R* æqualis est sagittæ dupli arcus *Q P*, in cujus medio est *P*, & duplum trianguli *S Q P* sive *S P* × *Q T*, tempori, quo arcus iste duplus describitur, proportionale est; ideoque pro temporis exponente scribi potest. *Co-*




11. & 111. Lem. x1.) P D ² : P Q ² = D F : Q R sive f d, & ob motum per arcus evanescentes uniformem, sunt arcus P D, P Q ut tempora quibus describuntur hoc est ut T ad t, ideoque P D ² : P Q ² = T ² : t ² = D F : Q R sive f d, & quia D F = P C & d f = p c ergo T ² : t ² = P C : p c itaque si vires in P & p sint æquales erunt sagittæ P C, p c, ut quadrata temporum quibus arcus P D, p d, describuntur. Quoniam igitur manentibus temporibus sagittæ sunt ut vires, & manentibus viribus, sagittæ sunt ut temporum quadrata, necessum est ut variantibus viribus atque temporibus sagittæ sint ut vires & quadrata temporum conjunctim. Quamobrem si vires in P & p, dicantur V, v, erit P C : p c = V × T ² : v × t ², & dividendo antecedentes per T ², & consequentes per t ², erit V : v = $\frac{PC}{T^2}$ : $\frac{pc}{t^2}$ Q. e. D.

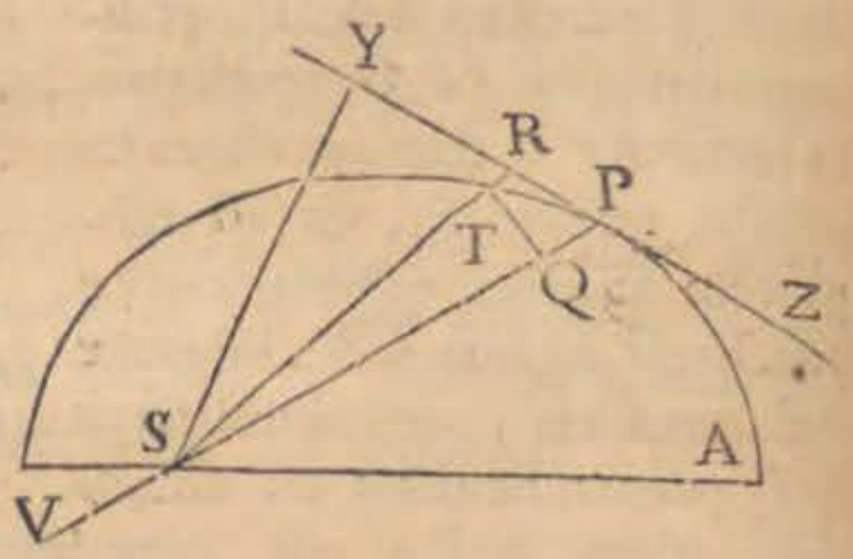
(g) 208. Idem facilè demonstratur etiam per coroll. IV. Lem. x. quo statuitur vires esse ut spatia, ipso motus initio, descripta directè & quadrata temporum inversè: Cum enim F D, f d, seu sagittæ P C, p c, sint spatia ex virium centripetarum actione descripta iisdem temporibus quibus percurruntur arcus evanescentes P D, p d, patet per suprà dictum coroll. vires centripetas esse inter se in ratione compositâ ex directâ ratione sagittarum P C, p d, & reciprocâ quadratorum temporum quibus describuntur arcus evanescentes P D, p d, seu H D, h d.

(h) 209. Nam Q R æqualis est sagittæ dupli arcus Q P, in cujus medio est P, (207), duplum verò trianguli evanescentis S Q P, (quod per Lem. VIII., tanquam rectilineum considerari potest) æquale est facto ex perpendiculo Q T, in basim

DE MOTU CORPORUM.

*Corol.* 2. Eodem argumento vis centripeta eſt reciprocè ut ſolidum $\frac{SYq \times QPq}{QR}$, ſi modo $SY$ perpendiculum ſit à centro virium in orbis tangentem $PR$ demiſſum. (i) Nam rectangula $SY \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur.

*Corol.* 3. Si orbis vel circulus eſt, vel circulum concentricè tangit, aut concentricè ſecat, id eſt angulum contactus aut ſectionis cum circulo quam minimum continet; eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum $P$; & ſi $PV$ chorda ſit circuli hujus à corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciprocè ut ſolidum $SYq \times PV$. (k) Nam $PV$ eſt $\frac{QPq}{QR}$.

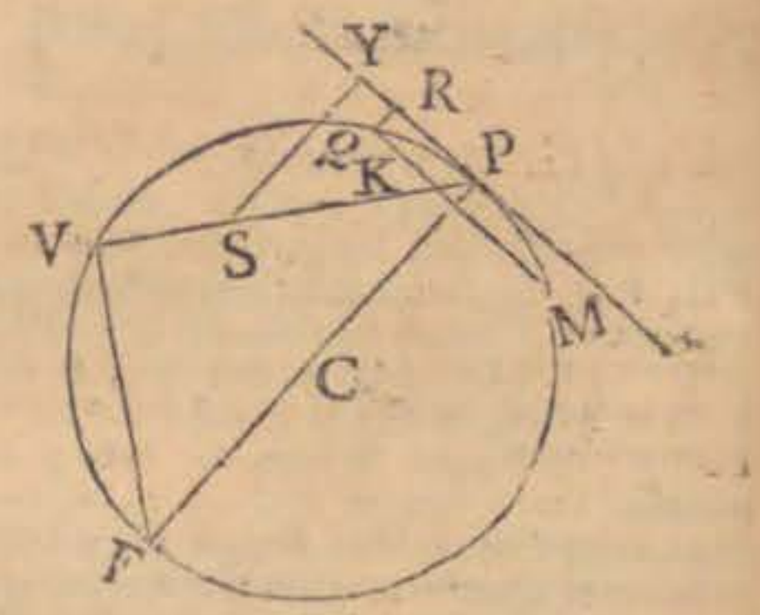



Cor.

fim SP; cum igitur in eâdem curvâ APQ, areæ ſint proportionales temporibus quibus deſcribuntur, ac proindè rectangulum $QT \times SP$, ſcribi poſſit loco temporis quo duplus arcus QP, ſeu duplum triangulum SQP, deſcribitur, erit vis centripeta in P, directè ut $\frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$ & inverſè ut $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$.

(i) 210. Rectangula $SY \times QP$, & $SP \times QT$, æquantur; nam tangens PR, cum arcu evaneſcente QP, congruit (per Lem. VII) & propterea tangens illa conſiderari poteſt tanquam trianguli SPQ, baſis PQ, producta, & SY, tanquam perpendicularis ad illam baſim productam, quarè area dupli trianguli SPQ, eſt $SY \times QP = SP \times QT$.

(k) 211. PV eſt $\frac{QP^2}{QR}$. Sit enim circulus oſculator PQVF, & ductâ chordâ QM, quam alia chorda PV, per virium




centrum S acta, biſecat in K, erit (per prop. 35. lib. 3. Elem.) $QK^2 = VK \times PK$; ſed evaneſcente PK, $VK = VP$, & (207) $QR = PK$, ac (per coroll. 1. Lem. VII) $QK = QP$, ergò $QP^2 = PV \times QR$, & $PV = \frac{QP^2}{QR}$.

211.

*Corol.* 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directè, & chorda illa inversè. Nam velocitas est reciprocè ut perpendiculum $SY$ per corol. 1. prop. 1.

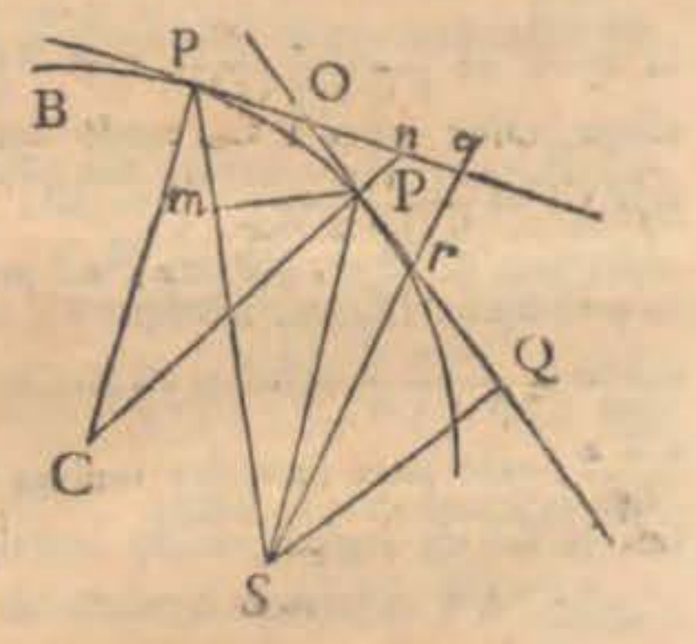
*Corol.* 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea $APQ$, & in ea detur etiam punctum $S$, ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, quâ corpus quodvis $P$ à cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel solidum $SYq \times PV$ huic vi reciprocè proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

PRO-

212. Iisdem positis sit PC, radius osculi $= R$, & erit vis centripeta in P, reciprocè ut solidum $\frac{SY^3 \times R}{SP}$: quoniam enim rectæ SY, & FCP, ad tangentem PY, perpendiculares æquidistant, erit angulus VPF = PSY; cumque sit præterea angulus FVP, in semicirculo æqualis recto SYP, duo triangula PVF, SYP, similia sunt ac proinde SP : SY = PF seu $2R$ : PV, adeóque $PV = \frac{SY \times 2R}{SP}$ & $SY^2 \times PV = \frac{SY^3 \times 2R}{SP}$; hoc est dividendo per numerum constantem 2, ut $\frac{SY^3 \times R}{SP}$. Hæc est expressio vis centripetæ quam Joannes Bernoullius, Abrahamus de Moivre & Guido Grandus invenerunt.

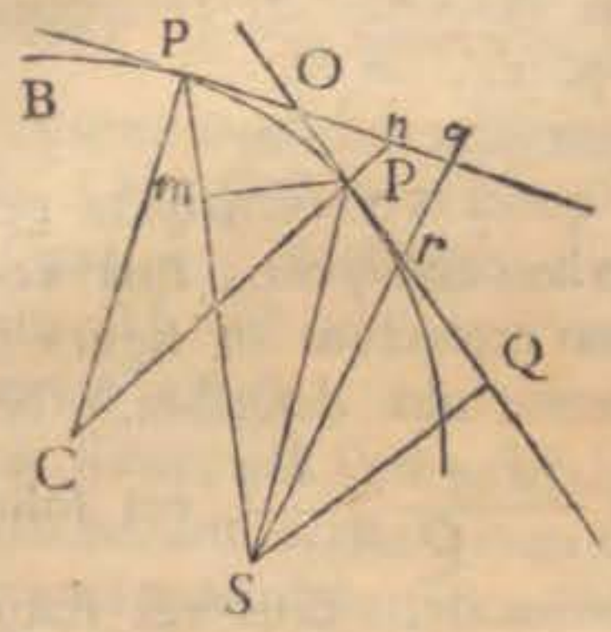
*SCHOLION.*

213. Newtonus generalem virium centralium theoriam in superioribus propositionibus aperuit, earumque elegantes formulas in propositionis VI^æ corollariis tradidit. Plurimas per analysim methodumque fluxionum posteà exquisierunt alii qui primum inter Geometras locum tenebant. Hos inter eminet Varignonius qui in Commentariis Parisiensibus an. 1700, 1701, 1706, virium centralium formulas suâ varietate & universalitate eximias dedit; præclaras quoque addidit Joannes Bernoullius in iisdem Commentariis an. 1710. Duas proposuit Jacobus Hermannus in scholio ad propositionem 22^am Lib. 1. Phoronomiæ quas ut pote multum expeditas, nobisque in posterum profuturas & ex superioribus Newtoni formulis facillimè deducendas, hic exscribemus ac demonstrabimus.




214. Itaque corpus P, circà centrum virium S revolvendo describat curvam B p P, & centro C radio CP descriptus intelligatur arcus infinitesimus Pp circuli curvam B p P osculantis in P, ac centro S radio SP, arculus Pm, & denique SQ, Sq,

DE MOTU CORPORUM.




ad tangentes P Q, p q, perpendiculares. Duo Triangula q O r, n C p, seu P C p similia sunt, nam æquales sunt anguli r q O, C p n, sunt enim ambo recti, & anguli r O q, P C p, qui cum angulo P O p duos rectos efficiunt. Similia quoque sunt Triangula p m P, p q f, seu P Q s, ob Angulos ad q & m rectos & angulum m p P communem dum coeunt puncta P, p, quare p P : r q = P C : O q, seu p q, seu P Q; & m p : P p = P Q : S P unde ex æquo m p : r q = P C ad S P & P C $= \frac{SP \times mp}{rq}$. Porrò (212) vis centripeta in P est ut $\frac{SP}{PC \times SQ^3}$; ergò si substituatur valor ipsius P C, modò inventus eris vis ut $\frac{rq}{SQ^3 \times mp}$, hoc est, si vis centripeta sit $= v$, $SP = z$, ac proindè $mp = dz$, $SQ = p$, adeóque $rq = dp$, erit $v = \frac{dp}{p^3 dz}$, & radius oculi $CP = r = \frac{z\,dz}{dp}$, quas duas formulas tradunt Keillius in suâ de legibus virium centripetarum epistolâ ad Halleium directâ & Hermannus loco suprà citato.

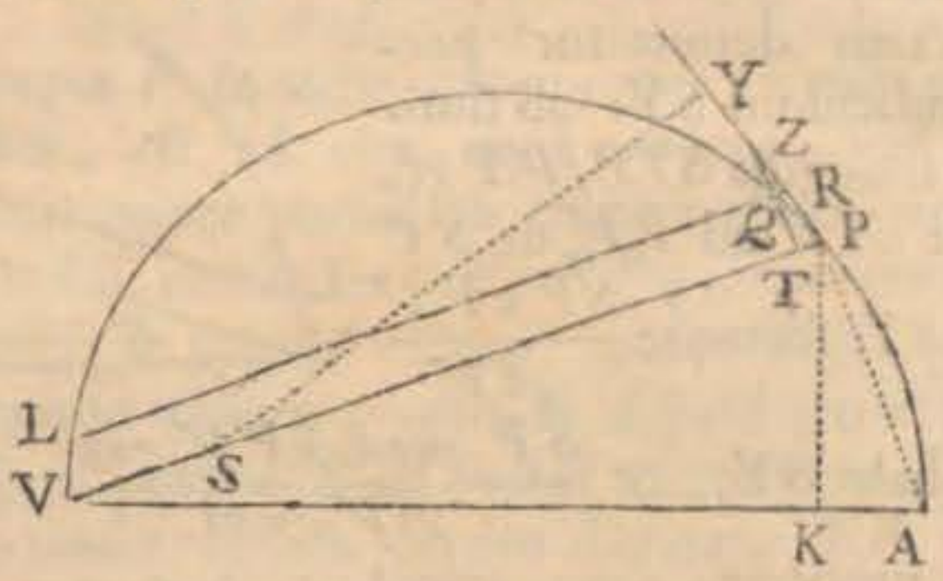
215. Sit $Pp = ds$, & $Pm = dy$, & ob triangula similia p P m, P S Q, erit $ds : dy = z : p$, adeóque $p = \frac{z\,dy}{ds}$, & sumptis utrinque fluxionibus nullâ constante usurpatâ, invenietur (163) $dp = \frac{dz\,dy\,ds + z\,ds\,ddy - z\,dy\,dds}{ds^2}$; quarè $v = \frac{dp}{p^3 dz} = \frac{dp\,ds^3}{z^3 dy^3 dz}$ ob $p = \frac{z\,dy}{ds}$ & $p^3 = \frac{z^3 dy^3}{ds^3}$, adeòque $v = \frac{dz\,dy\,ds^2 + z\,ds^2\,ddy - z\,dy\,ds\,dds}{z^3\,dy^3\,dz}$ quæ formula nonnisi nominibus differt à formulis quas Varignonius dedit in Commentariis Parisiensibus, 1701. 1706.

216. Hinc radiorum osculi formula admodum generalis & expedita facilè reperitur. Nam invenimus (214) $r = \frac{z\,dz}{dp} = (215) \frac{z\,dz\,ds^2}{dz\,dy\,ds + z\,ds\,ddy - z\,dy\,ddz}$ cum in hâc formulâ nulla fluxio constans assumpta sit, in alias infinitas transformari potest, sumptis pro arbitrio constantibus. Si centrum S, in infinitum abeat, ut rectæ S P, evadant parallelæ, erit $dz\,dy\,ds$, quantitas infinitè parva respectu $z\,ds\,ddy$ & $z\,dy\,dds$; nam cum z finita est $dz\,dy\,ds$, est ejusdem generis cum $z\,ds\,ddy$; ubi igitur z, evadit infinita $z\,ds\,ddy$, fit etiam infinita respectu $dz\,dy\,ds$; undè si in formulâ radii osculatoris modò inventâ deleatur membrum $dz\,dy\,ds$, habebitur $r = \frac{ds^2 dz}{ds\,ddy - dy\,dds}$ formula generalis radii osculi in curvis quarum ordinatæ S P parallelæ axique perpendiculares sunt, & in quibus $dz$, sunt elementa abscissarum.

PRO-

## PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

*Gyretur corpus in circumferentiâ circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.*



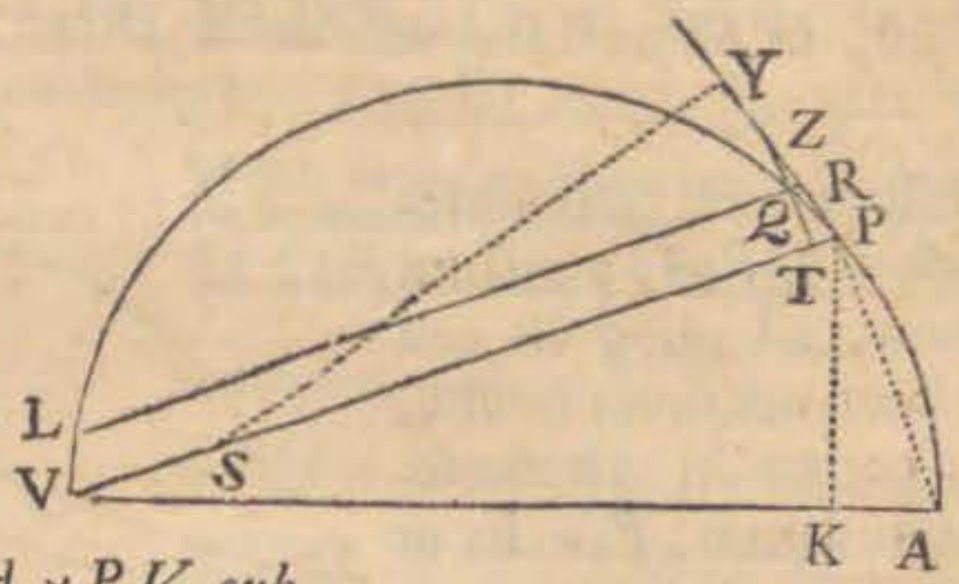

Esto circuli circumferentia $VQPA$; punctum datum, ad quod vis ceu ad centrum suum tendit, $S$; corpus in circumferentiâ latum $P$; locus proximus, in quem movebitur $Q$; & circuli tangens ad locum priorem $PRZ$. Per punctum $S$ ducatur chorda $PV$; & actâ circuli diametro $VA$, jungatur $AP$; & ad $SP$ demittatur perpendiculum $QT$, quod productum occurrat tangenti $PR$ in $Z$, ac denique per punctum $Q$ agatur $LR$, quæ ipsi $SP$ parallella sit, & occurrat tum circulo in $L$, tum tangenti $PZ$ in $R$. Et (1) ob similia triangula $ZQR$, $ZTP$, $VPA$; erit $RP$ *quad.* hoc est $QRL$ ad $QT$ *quad.* ut $AV$ *quad.* ad $PV$ *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV\ quad.}{AV\ quad.}$ æquatur $QT$ *quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\ quad.}{QR}$, & punctis $P$ & $Q$ coeuntibus scribatur $PV$ pro $RL$. Sic fiet $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $\frac{SP\ quad \times QT\ quad.}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SP\ q \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$; id est (ob datum $AV$ *quad.*) reciprocè ut quadratum distantiæ seu altitudinis $SP$ & cubus chordæ $PV$ conjunctim. *Q E I.*

*Idem*

(1) 217. Triangula ZQR, ZTP, similia sunt ob QR, parallelam TP, per constructionem, & triangula ZTP, VPA, sunt etiam similia ob angulos rectos ZTP, VPA, & æquales VPZ, VAP, quorum communis est mensura dimidius arcus VL, QP; quarè RP:QT = ZP:ZT = AV:PV. Est autem $RP^2$ = QR × RL, per prop. 36. lib. 3. Elem.

DE MOTU CORPORUM.

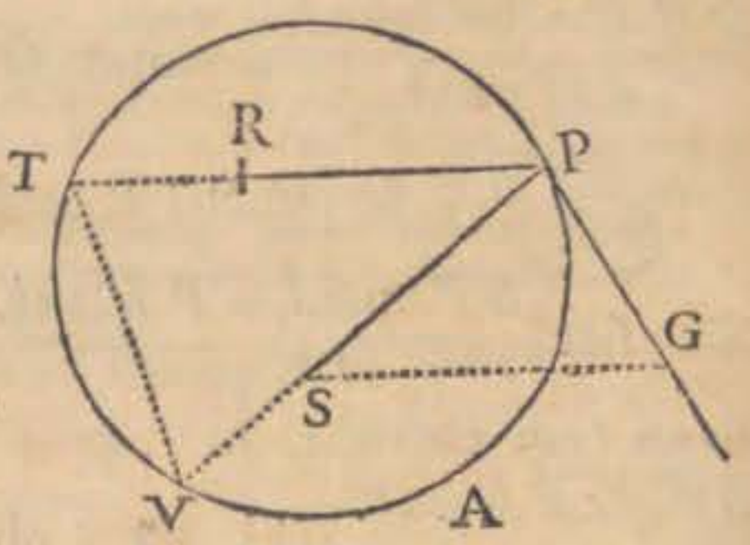
## *Idem aliter.*




Ad tangentem $PR$ productam demittatur perpendiculum $SY$: ob similia triangula $SYP$, $VPA$; erit $AV$ ad $PV$ ut $SP$ ad $SY$: ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale $SY$, & $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $SY\ quad. \times PV$. Et propterea (per. corol. 3. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AVq}$, hoc est, ob datam $AV$ reciprocè ut $SPq \times PV\ cub.$ *Q. E. I.*

*Corol.* 1. Hinc si punctum datum $S$, ad quod vis centripeta semper tendit, locetur in circumferentiâ hujus circuli, puta ad $V$; erit vis centripeta reciprocè ut quadrato-cubus altitudinis $SP$.

*Corol.* 2. Vis, quâ corpus $P$ in circulo $APTV$ circum virium centrum $S$ revolvitur, est ad vim, qua corpus idem $P$ in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum $R$ revolvi potest, ut $RP\ quad. \times SP$ ad cubum rectæ $SG$, quæ à primo virium centro $S$ ad orbis tangentem $PG$ ducitur, & distantiæ corporis à secundo virium centro parallela est.




Nam

218. Idem aliter, cum sit $\frac{SP \times PV}{AV} = \frac{SY^3 \times R}{SP}$ & propterea (212) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SP^2 \times PV^3 \times R}{AV^3}$ = SY erit $\frac{SP^3 \times PV^3}{AV^3} = SY^3$ & $\frac{SP^3 \times PV^3 \times R}{AV^3 \times SP} = \frac{SP^2 \times PV^3 \times R}{AV^3}$ seu ob $R = \frac{1}{2} AV$, & AV, constantem erit reciprocè ut $SP^2 \times PV^3$.

(m) Nam per conſtructionem hujus propoſitionis vis prior eſt ad vim poſteriorem ut $RP\,q \times PT\,cub.$ ad $SP\,q \times PV\,cub.$ id eſt, ut $SP \times RP\,q$ ad $\frac{SP\,cub. \times PV\,cub.}{PT\,cub.}$, ſive ([n] ob ſimilia triangula $PSG$, $TPV$) ad $SG\,cub.$ LIBER PRIMUS.

*Corol.* 3. Vis, quâ corpus $P$ in orbe quocunque circum virium centrum $S$ revolvitur, eſt ad vim, quâ corpus idem $P$ in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum $R$ revolvi poteſt, ut $SP \times RP\,q$, contentum utique ſub diſtantiâ corporis à primo virium centro $S$ & quadrato diſtantiæ ejus à ſecundo virium centro $R$, ad cubum rectæ $SG$, quæ à primo virium centro $S$ ad orbis tangentem $PG$ ducitur, & corporis à ſecundo virium centro diſtantiæ $RP$ parallela eſt. (o) Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis $P$ eædem ſunt ac in circulo ejuſdem curvaturæ. PRO-

(m) 219. *Nam per conſtructionem hujus propoſ. vis prior eſt ad vim poſteriorem,* (hoc eſt vis circà S, ad vim circà R) *ut* $RP^2 \times PT^3$ *ad* $SP^2 \times PV^3$. Scilicet in demonſtratione hujus propoſitionis (vid. fig. Prop.) inventum erat $\frac{QR\,L \times PV^2}{AV^2} = QT^2$, & punctis P & Q coëuntibus ſcribatur PV pro RL, & uterque terminus multiplicetur per $SP^2 \times AV^2$ erit $QR \times PV^3 \times SP^2 = QT^2 \times SP^2 \times AV^2$, eſt verò $QT \times SP$ area cujus arcus eſt QP, & QR, eſt ejus ſagitta, itaque ſagitta per cubum chordæ, & quadratum diſtantiæ multiplicata, æqualis eſt quadrato areæ cui reſpondet, multiplicato per quadratum Diametri. Quod utique verum erit ſive agatur de vi ad S, ſive de vi ad R tendente (vid fig. Cor.) Quod ſi ſumi intelligantur arcus æquali tempore deſcripti circa utramque vim, ſagittæ eorum arcuum expriment rationem earum virium centripetarum; & areæ illis temporibus æqualibus circa utramque vim deſcriptæ æquales erunt, nam per Prop. 1. tempus Periodicum eſt ad integram ſuperficiem deſcriptam, ut tempus quodvis ad aream ipſi reſpondentem, ut ergo eodem tempore Periodico idem circulus circa utramque vim abſolvitur, quæriturque area eidem tempori correſpondens, illa area eadem erit utriuſque vis reſpectu, ideoque productum quadrati areæ per quadratum Diametri idem erit tam reſpectu vis S, quam reſpectu vis R, ergo ſagitta pertinens ad vim S multiplicata per cubum ejus chordæ PV, & quadratum ejus diſtantiæ SP æqualis erit ſagittæ pertinenti ad vim R, multiplicatæ per cubum ejus chordæ PT & per quadratum ejus diſtantiæ RP, ea enim facta, quadrato areæ in quadratum Diametri ducto æqualia ſunt, ideo Sagittæ illæ, ſive vires in S & R erunt reciprocè ut illæ quantitates quæ eas multiplicant, hoc eſt Sagitta in S eſt ad Sagittam in R ſicut $RP^2 \times PT^3 : SP^2 \times PV^3$. Q. E. D.

(n) 220. Triangula PSG, TPV, ſimilia ſunt, ob angulos PSG, SPT æquales quia ſunt alterni inter parallelas SG, TP, & angulos VPG, VTP, æquales per 32. lib. 3. Elem. undè $TP : PV = SP : SG = \frac{SP \times PV}{TP}$ & $SG^3 = \frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$.

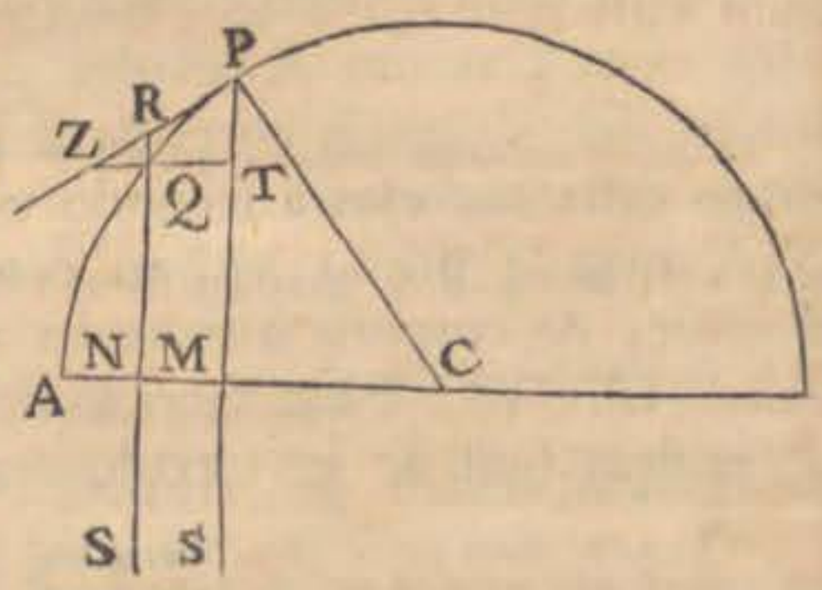
(o) 221. Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P, eædem ſunt ac in circulo orbitam oſculante in P, vis enim illa in P, eſt ſemper eadem ac ſi corpus in arcu evaneſcente circuli oſculatoris moveretur, cum arcus ille circuli pro arcu orbitæ evaneſcente uſurpari poſſit.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

*Moveatur corpus in ſemicirculo* PQA: *ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.*

A ſemicirculi centro *C* agatur ſemidiameter *CA* parallelas iſtas perpendiculariter ſecans in *M* & *N*, & jungatur *CP*. Ob (P) ſimilia triangula *CPM*, *PZT* & *RZQ* eſt *CPq* ad *PMq* ut *PRq* ad *QTq*, & ex naturâ circuli *PRq* æquale eſt rectangulo $QR \times \overline{RN+QN}$, ſive coeuntibus punctis *P* & *Q* rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo eſt *CPq* ad *PM quad.* ut $QR \times 2PM$ ad *QT quad.* ideoque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\ PM\ cub.}{CP\ quad.}$, & $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\ PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$ Eſt ergo (per corollarium 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2\ PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$, hoc eſt (neglectâ ratione determinatâ $\frac{2\ SP\ quad.}{CP\ quad.}$) reciprocè ut *PM cub.* *Q. E. I.*




(9) Idem facilè colligitur etiam ex propoſitione præcedente. *Scho-*

(P) 222. Similia ſunt triangula CPM, PZT, anguli enim ad M & T recti æquales ſunt, & quoniam anguli ZPT + MPC, & anguli MPC + MCP, recto æquantur, erit etiam MCP = ZPT; & $PR^2 = QR \times RN + QN$ (per Prop. 36. lib. 3. Elem.) Cum autem CP ſit radius circuli & SP ſit linea infinita adeòque SM = SP, erunt CP, SP, $\frac{2SP^2}{CP^2}$, quantitates conſtantes.

(9) 223. *Idem facilè colligitur ex propoſitione præcedente* quâ conſtat vim centripetam eſſe reciproce ut $SP^2 \times PV^3$. Nam centro virium S in infinitum abeunte, omnes SP ſunt æquales adeóque conſtantes, & propterea vis reciproce ut $PV^3$.

224.

## *Scholium.*

(r) Et argumento haud multum diſſimili corpus invenietur moveri in ellipſi, vel etiam in hyperbolâ vel parabolâ, vi centripetâ, quæ ſit reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

(r) 224. Ut multa de ſectionibus Conicis mox erunt dicenda, viſum eſt eas præmittere ex Conicis propoſitiones quæ ſæpius occurrent, ne memoriæ vitio aut faſtidio ad alios Autores recurrendi demonſtrationum vis Lectores fugiat.

Def. 1ª. Si Planum quodpiam ſecet conum, ſed per ejus Verticem non tranſeat, interſectio Coni & iſtius Plani dicitur *Sectio Conica.*

2ª. Si ducatur planum per Verticem Coni, parallelum plano ſecanti, conum ipſum vel ſecabit, vel tanget, vel totum erit extra eum; Hinc diſtinguuntur ſectionum Conicarum ſpecies, dicentur primo caſu *Hyperbolæ*, 2º. *Parabolæ*, 3º. *Ellipſes.*

3ª. Si ſint duo Coni ſimiles ſibi per Verticem oppoſiti, illud planum verticale quod unum è Conis ſecat, alterum etiam ſecabit, ideo, planum ſectionis ipſi Parallelum utrumque etiam Conum ſecabit, & ex utriuſque Coni ſectione formabuntur in eo Plano duæ *Hyperbolæ oppoſitæ.*

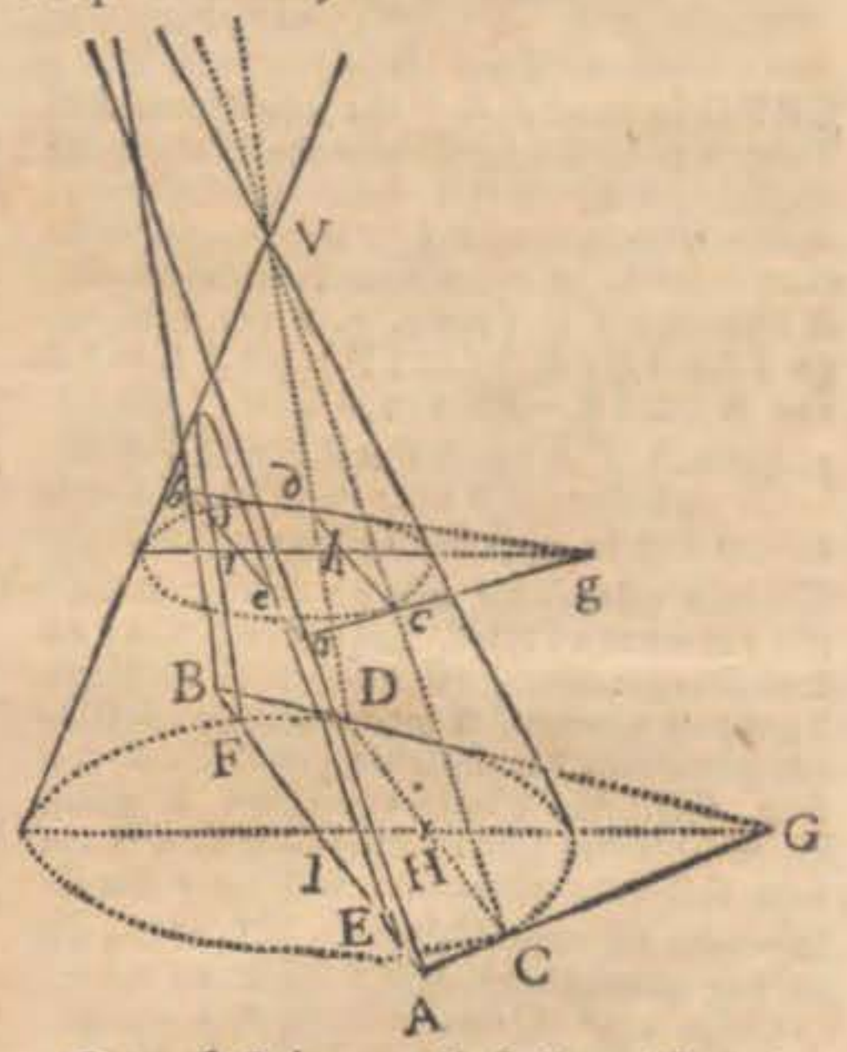
4ª. Si ſecundùm lineas rectas in quibus planum per Verticem Coni ductum ſecat Coni ſuperficiem, applicentur duo plana Conum tangentia, eorum cum plano Hyperbolarum interſectiones, dicuntur Hyperbolarum *Aſymptoti*; nam ut ea plana ſuperficiem Coni jam tetigerunt, nullibi eam ſuperficiem iterum attingent, non ergo attingent Hyperbolam quæ terminatur in ſuperficie Coni & quæ eſt in plano lineis quas tangunt parallelo.

Lemma I. Sit linea ab unâ Aſymptoto ad alteram ducta, quæ per Hyperbolam ſecetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam & Aſymptotum utrinque contentæ ſunt æquales.

Et ſi lineæ, inter ſe Parallelæ, ab unâ Aſymptoto ad alteram ducantur, æqualia erunt facta partium utriuſque Parallelæ per Hyperbolam ſectæ.

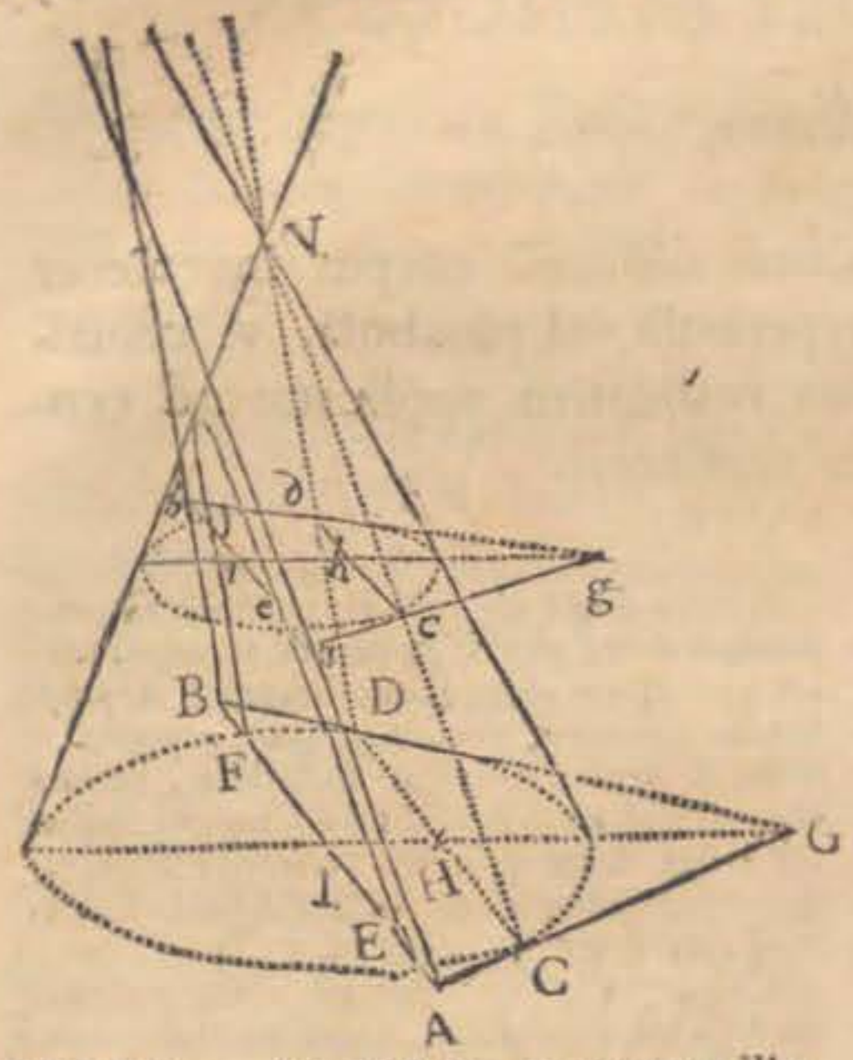
Si verò lineâ ab unâ Hyperbolâ ad oppoſitam ductâ per Aſymptotos ſecetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam & Aſymptotum utrinque contentæ ſunt æquales.

Ex ſi lineæ, inter ſe Parallelæ, ab unâ Hyperbolâ ad oppoſitam ducantur, æqualia erunt facta partium utriuſque Parallelæ per Aſymptotum ſectæ (Apoll. lib. 2. Prop. 8. & 16.)




*Demonſt.* Primum talis ſit linea AB ut planum per eam lineam duci poſſit baſi coni parallelum, cujus ſectio cum cono erit circulus CEFD, ducatur planum VCD per verticem Coni VCD plano Hyperbolarum parallelum & ſecundum lineas V C, V D applicentur plana Conum tangentia, in quibus erunt Hyperbolæ Aſymptoti & Tangentes circuli

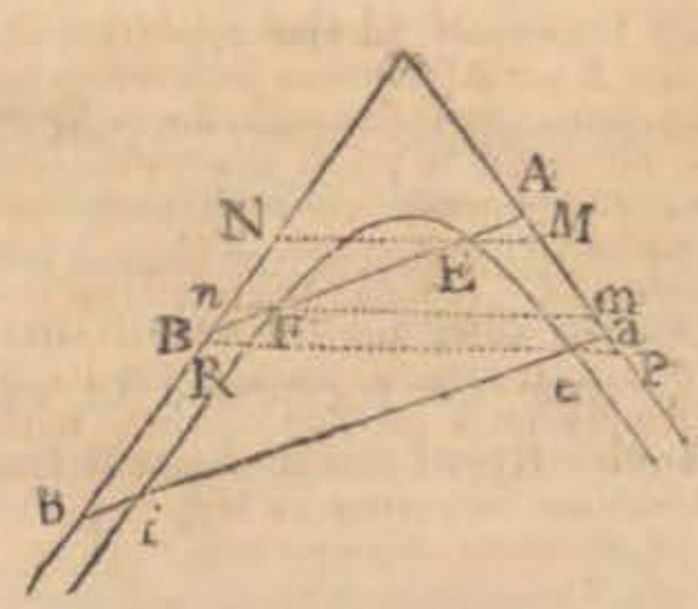
DE MOTU CORPORUM.




CEFD in punctis C & D: concurrant illæ Tangentes in G; ex G per centrum circuli ducatur linea GHI quæ erit perpendicularis in chordam CD eamque bifariam secabit, ut etiam ejus Parallelam AB, & chordam EF (per 3. 3. Elem.) est ergo IA=IB, & IE=IF unde IA−IE sive AE=IB−IF sive BF & (per 36. 3. Elem.) $\overline{CA}^2$=AF×AE=AF×BF.

Sit verò linea a b huic Parallela, sive in eâdem sive in oppositâ sectione; simili ratiocinio ostendetur esse ae=bf; & $\overline{ca}^2$ =af×ae=af×bf. Sed figura ACac est Parallelogramma, est enim tota in plano Tangente Conum, & terminatur per sectiones planorum Parallelorum, nam Cc & Aa sunt sectiones plani Verticalis & plani Hyperbolarum ipsi Paralleli, & CA & ca sunt sectiones planorum basi coni Parallelorum; est ergo CA=ca & $\overline{CA}^2=\overline{ca}^2$; ac per consequens AF×BF=af×bf.

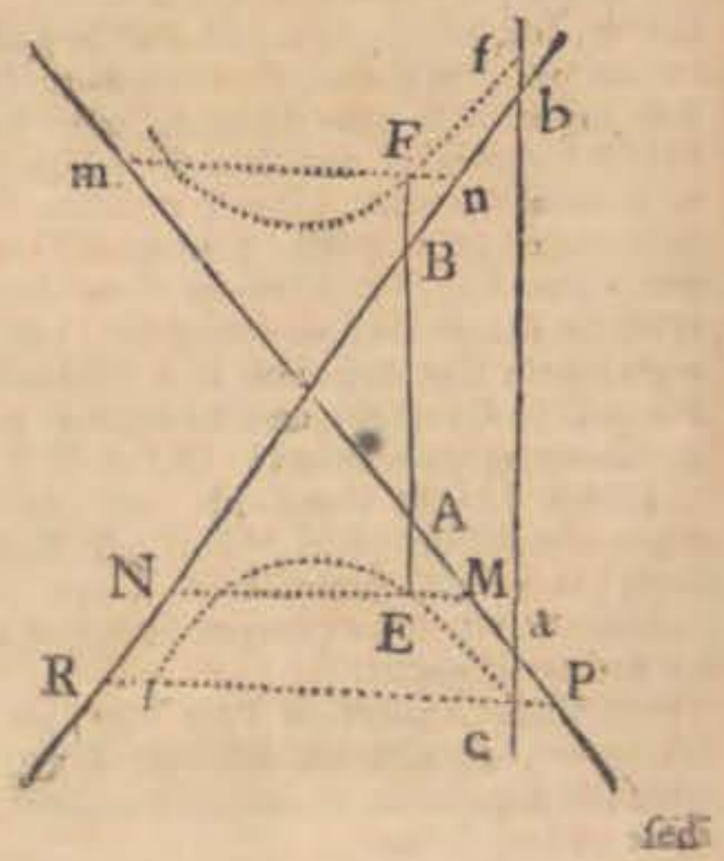
Casus 2^dus. Quod si linea AB utcumque sit ducta inter Asymptotos, & Hyperbolam secet in E & F erit AE=BF; nam per E & F ducantur lineæ MEN, mFn, tales ut plana per eas ducta sint basi Coni parallela Triangula AEM & AFm, BFn & BEN erunt similia propter Parallelas, est ergo AE:AF=EM:Fm
& BE:BF=NE:nF; est




ergo per compositionem rationis.. AE×BE:AF×BF=EM×NE:Fm×nF, sed per demonstrationem primi casus est EM×NE=Fm×nF, ergo AE×BE=AF×BF, unde (per Prop. 16. 6. Elem.) AF:AE=BE:BF & dividendo AF−AE sive EF:AE=BE−BF sive EF:BF, cum ergo sit EF:AE=EF:BF est AE=BF.

Ducatur verò linea quævis a b, priori AB parallela, & per punctum e ducatur linea PeR lineæ MEN parallela, similia erunt Triangula AEM & aeP, BEN & beR ob parallelas
est ergo AE:ae=EM:eP
& BE:be=EN:eR, est ergo per compositionem rationis... AE×BE:ae×be=EM×EN:EP×eR, sed per casum primum est EM×EN=eP×eR, ergo AE×BE=ae×be.

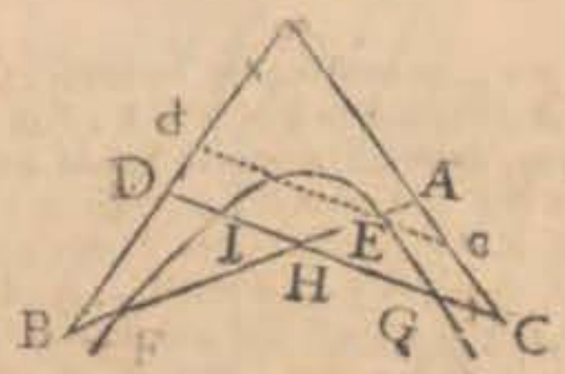
Casus 3^tius. Si lineæ de quibus agitur,




sed

ab unâ Hyperbolâ ad ejus oppositam ducerentur & per Asymptotas secarentur, eadem prorsus foret demonstratio ac in 2°. casu, nisi quod in primâ demonstrationis parte, componendo concluderetur, non dividendo.

Lemma II. Sint duæ lineæ in Hyperbolarum plano ductæ quæ in quodam puncto sibi occurrant; facta partium singulæ lineæ sumptarum à puncto concursus usque ad punctum Hyperbolæ, sunt inter se sicut facta partium sumptarum ab Hyperbolâ usque ad utramque Asymptotum.




Lineæ AB, DC sibi mutuo occurrant in H, est EH×FH:GH×IH=AE×BE:CG×DG.

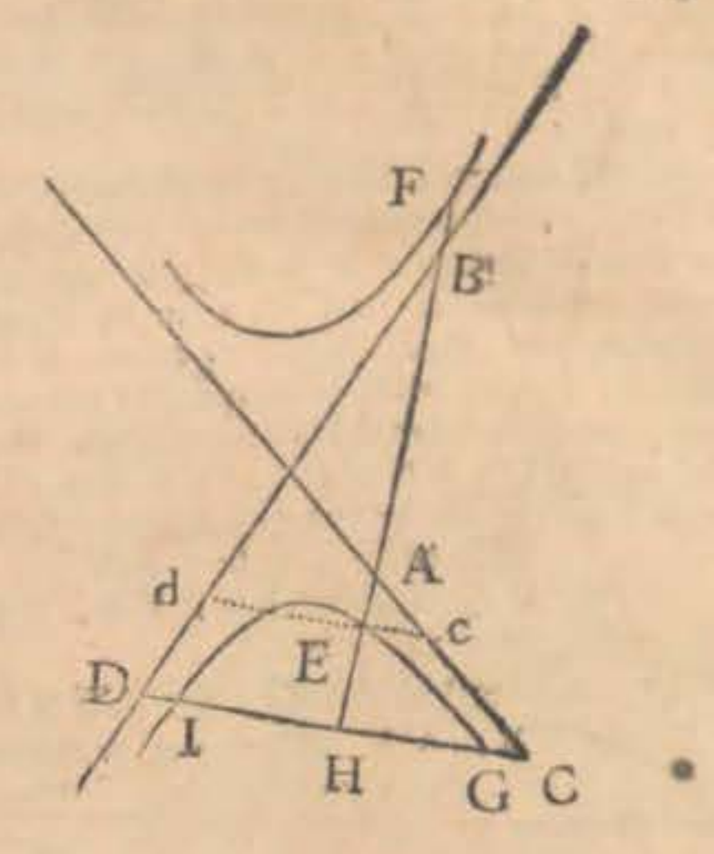
Demonst... Ducatur per punctum E Hyperbolæ, in quo secatur per lineam AB productam si necesse sit, linea cEd, alteri lineæ datæ CHD Parallela: similia erunt Triangula AHC & AEc, BHD & BED: unde habebuntur hæ proportiones

AH sive AE+EH:AE=HC sive CG+GH:cE

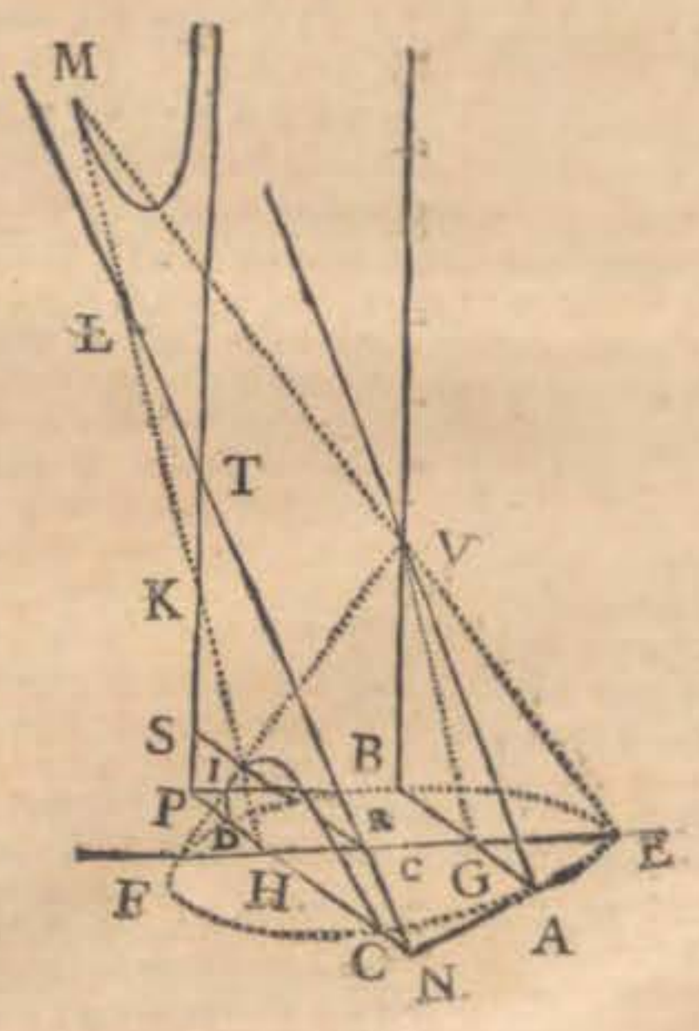
& BH sive BF+FH:BE=HD sive DI+IH:dE, & per compositionem rationis AE×BF+AE×FH+EH×BF (sive AE per Lem. I.)+EH×FH:AE×BE=CG×DI+CG×IH+GH×DI (sive CG per Lem. I.)+GH×IH:cE×dE (sive CG×DG per Lem. I.) est verò BF+FH+HE=BE, & DI+IH+HG=DG ergo est AE×BE+EH×FH:AE×BE=DG×CG+GH×IH:CG×DG. & dividendo: EH×FH:AE×BE=GH×IH:CG×DG

ergo alternando EH×FH:GH×JH=AE×BE:CG×DG.

Eadem est demonstratio sive lineæ sint in eadem Hyperbola, sive, una sit in unâ Hyperbolâ altera inter oppositas, sive ambæ inter oppositas ducantur. Ergo facta partium &c.




Lemma III. Sint duæ Parallelæ in sectione Conicâ ductæ quæ secentur per lineam quamvis, facta partium uniuscujusque Parallelæ sumptarum à curvâ ad punctum ejus intersectionis, sunt inter se ut facta partium lineæ secantis sumptarum à curvâ ad punctum intersectionis cum Parallelâ.



DE MOTU CORPORUM.

Sint A B, C D, parallelæ ſectæ per lineam E F in punctis G & H, eſt A G × G B : C H × H D = E G × G E : E H × H F.

Sit V, vertex coni, ex eo ducantur V E, V F ad extremitates lineæ E F; ducatur in B A, planum V A B, per verticem coni tranſiens & in C D planum Hyperbolarum ipſi Parallelum, in plano V B A ducatur V G, & in H, H M ipſi V G parallela quæ jacebit in plano Hyperbolarum: erunt Triangula V G E & M H E, V G F & I H F ergo ſimilia unde habentur hæ proportiones

V G : M H = E G : E H

& V G : I H = F G, F H, & per compoſitionem rationis

$\overline{VG}^2 : MH \times IH = EG \times GF : EH \times FH$.

Lineæ V E, V F ductæ per verticem coni & punctum in ejus ſuperficie ſumptum ſunt ſemper in ſuperficie coni, ergo earum interſectiones I & M cum lineâ H M in planô Hyperbolarum ductâ ſunt in ipsâ curvâ Hyperbolicâ cujus Aſymptoti ſint T N, T P parallelæ lineis V A, V B; per punctum I in quo linea H M occurrit Hyperbolæ ducatur S I R lineis D C & A B parallela, ſimilia erunt Triangula V A G & L R I, V B G & K S I lineis enim parallelis terminantur, erit ergo

V G : A G = L I : R I

& V G : G B = K I : S I & per compoſitionem rationis

$\overline{VG}^2 : AG \times GB = LI \times KI : RI \times SI$ (= P D × D N per Lem. I.) Sed per Lemma II. eſt

L I × K I : P D × D N = M H × I H : C H × D H

eſt ergo

$\overline{VG}^2 : AG \times GB = MH \times IH : CH \times DH$

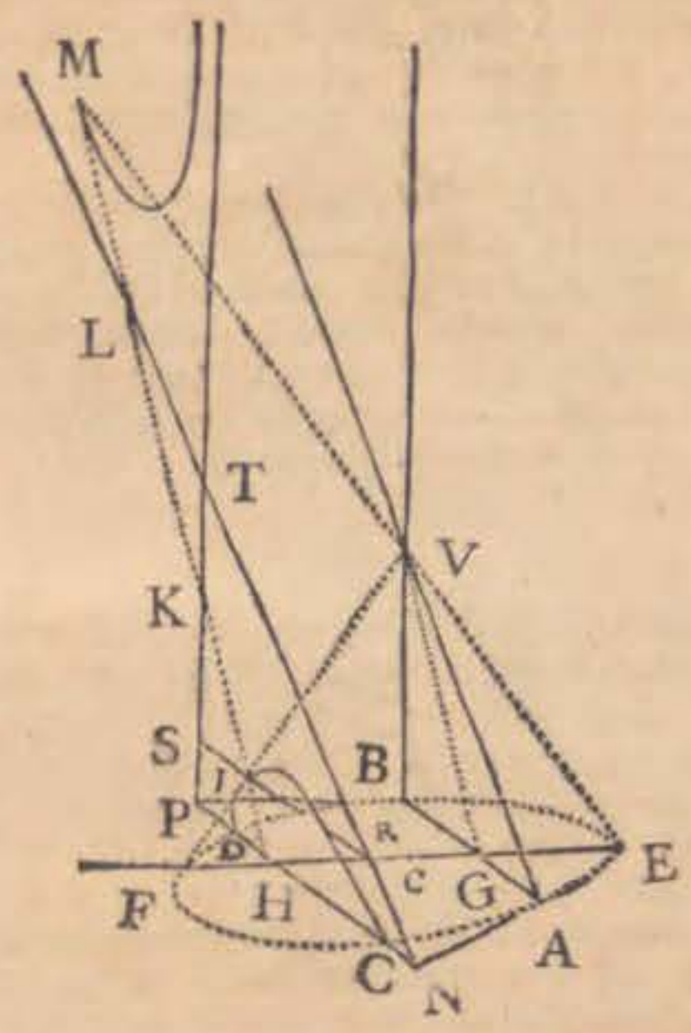
& alternando

$\overline{VG}^2 : MH \times IH = AG \times GB : CH \times DH$.

Erat autem $\overline{VG}^2 : MH \times IH = EG \times FG : EH \times FH$, ex primâ demonſtrationis parte, eſt ergo A G × G B : C H × D H = E G × F G : E H × F H. Q. E. D.

Caſ. 2. Si punctum F infinitè diſtaret à puncto E, linea F G æqualis cenſenda foret lineæ F H, ideoque E G × F G : E H × F H = E G : E H = A G × G B : C H × D H, hoc eſt ipſæ partes ſecantis forent inter ſe ſicut facta partium parallelarum quas ſecat.

Caſ. 3. Si punctum F non foret in eâdem ſectione in qua eſt punctum E ſed in oppoſita, eadem foret demonſtratio niſi




quod puncta M & I, in eadem Hyperbola forent.

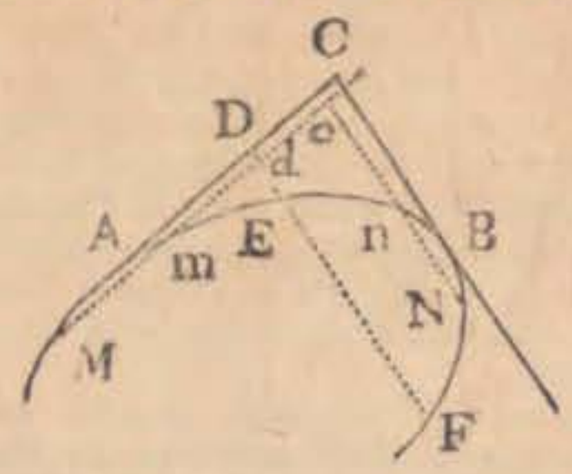
Caſ. 4. Eadem etiam fiet demonſtratio ſive puncta G & H ſint intra extremitates Parallelarum A B, C D, aut intra vertices E & F lineæ ſecantis, ſive ſint extra.

Corol. 1. Sumatur medium lineæ ſecantis puncta E & F ſitque c, ſi interſectio ejus lineæ per Parallelam ſit intra vertices, erit factum partium ejus æquale quadrato ejus dimidii dempto quadrato ejus portionis à Centro ad interſectionem ſumptæ, v. gr. erit E G × G F = $\overline{cE}^2 - \overline{cG}^2$ ut liquet per 5. 2. Elem. Si interſectio ejus lineæ ſit extra vertices, erit factum ejus partium æquale quadrato portionis ejus à Centro ad interſectionem ſumptæ demptо quadrato dimidiæ lineæ, v. gr. foret E G × G F = $\overline{cG}^2 - \overline{cE}^2$, ut liquet per 6. 2. Elem.

Corollar. 2. Ex puncto quovis ductæ ſint duæ Tangentes ad ſectionem Conicam, & ex quodam puncto unius ex illis Tangentibus, ducatur linea trans ſectionem Conicam alteri Tangenti parallela. Quadratum prioris Tangentis eſt ad quadratum alterius Tangentis ut quadratum par-

tis

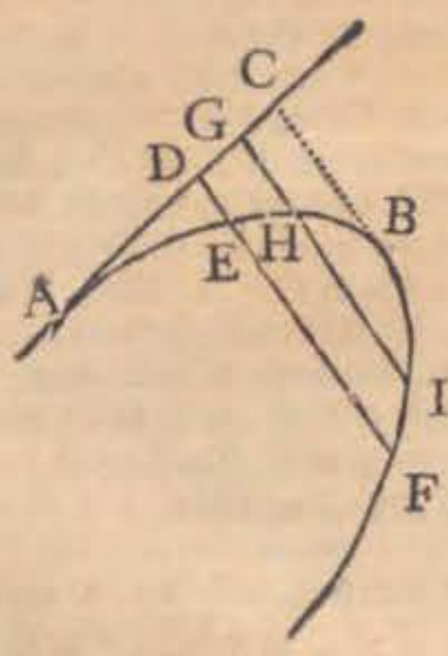
tis in primâ Tangente assumptæ ad factum lineæ Parallelæ alteri tangenti per ejus Partem inter Tangentem & curvam comprehensam (Apol. lib. 3. Prop. 16.)



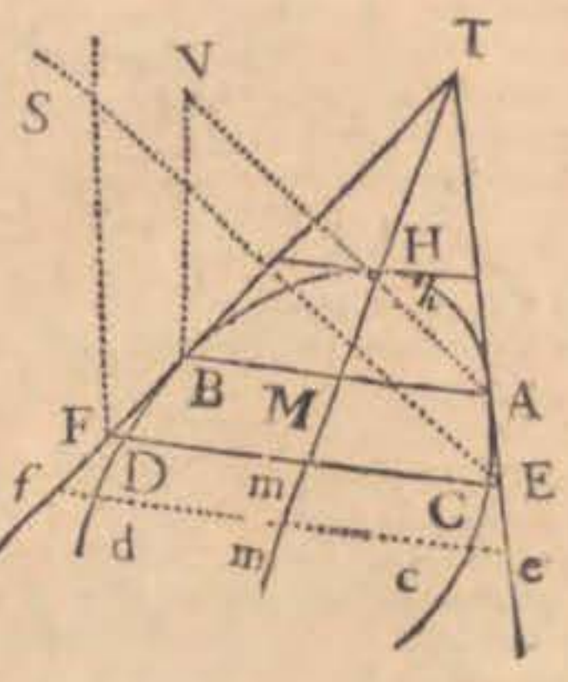

Sint A C, C B Tangentes sectionis Conicæ A B F, ex D ducatur D E F parallela C B, erit $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$.

Ducatur M m c parallela Tangenti A B, & N n c parallela Tangenti C B, & M m c lineam D E F secet in d, erit per Lem. sup. $cn \times cN : dF \times dE = Mc \times mc : Md \times md$, est enim M c linea secans parallelas c N, d F; evanescant arcus M m, & N n, coincident lineæ M m c cum A C & N n c cum B C, eritque $cn = CN = CB$, $dF = DF$, $dE = DE$, $Mc = mc = AC$, $Md = md = AD$, ergo erit $\overline{CB}^2 : DF \times DE = \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2$ & permutando & alternando $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$. Q. D. E.

Coroll 3. Si ex variis punctis Tangentis ducantur lineæ Parallelæ trans sectionem Conicam, Quadrata partium Tangentis sunt inter se ut facta Parallelarum per earum partem inter Tangentem & curvam interceptam. Sit A C Tangens ex ejus punctis D & G ducantur Parallelæ D E F, G H I, erit $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = DF \times DE : GI \times GH$,




nam supponatur in B ea Tangens quæ his lineis sit Parallela secetque priorem in C erit per Corollarium superius $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE = \overline{AG}^2 : GI \times GH$ ergo alternando, $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = DF \times DE : GI \times GH$. Q. D. E.




Lemma IV. Dicatur sectionis Conicæ Diameter ea linea quæ Parallelas in curva terminatas bifariam dividit: sit ejus Diametri vertex punctum in quo curvæ occurrit; illæ Parallelæ quas bisecat ipsi ordinatim applicatæ dicantur, & earum alterutra pars dicatur ordinata illius Diametri; portio Diametri ab ejus vertice ad Ordinatam usque, dicetur ejus abscissa: & denique ea Diameter quæ Parallelas bisecando simul est illis perpendicularis dicatur Axis.

His positis 1°. Linea quæ duas Parallelas bisecabit erit Diameter curvæ: id est cæteras omnes lineas hisce Parallelas etiam bisecabit. (Apol. lib. 2. Prop. 28.)

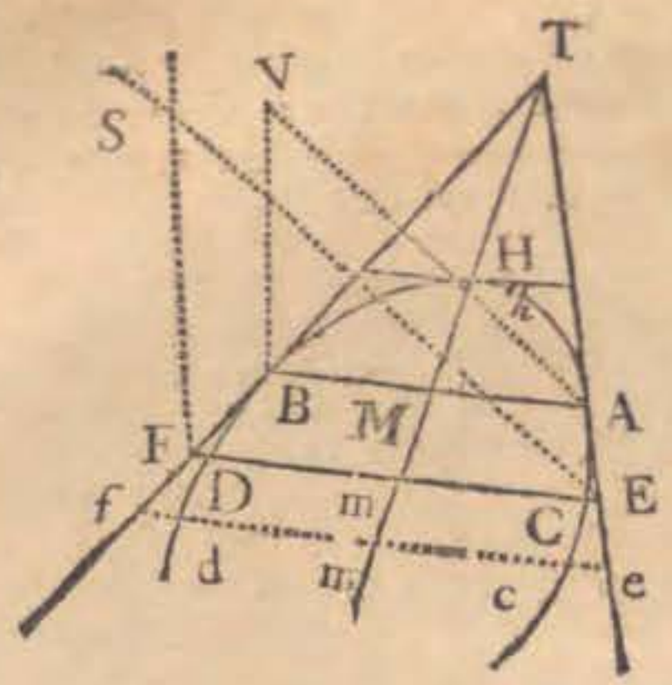
2°. Linea in Vertice Diametri ducta & Ordinatis Parallela, erit Tangens curvæ in eo Vertice (Apol. Lib. 1. Prop. 17.) & vice versâ ea linea erit Diameter quæ bisecabit lineam quæ erit Parallela Tangenti per ejus verticem ductæ: (Apol. Lib. 2. Prop. 7.)

Denique; Quadrata ordinatarum erunt inter se ut facta partium quas secant in Diametro.

Demonst. In extremitatibus lineæ A B ducantur Tangentes quæ concurrant in T,

per

DE MOTU CORPORUM.




per medium M, lineæ A B ducatur T M m ſitque linea D C parallela lineæ B A hinc inde producta donec Tangentibus T B, T A productis ſi neceſſe ſit in E & F occurrat: Per A B & Verticem coni V ducatur planum V A B, & per E F planum ipſi Parallelum quod Hyperbolam in Cono formabit, erit ergo D C linea ad Hyperbolam pertinens, & propter Tangentes B F A E, puncta F & E ad Aſymptotos pertinebunt, ergo (per Lem. I.) eſt E C = F D, ſed ob parallelas A B, E F & quia bifariam dividitur A B in M per lineam T M m erit m E = m F, itaque m E − E C (ſive m C) = m F − F D (ſive m D) ergo linea T M, lineam C D lineæ A B parallelam bifariam dividit, idem verò de quâvis linea c d parallelâ lineæ A B demonſtrabitur ergo linea M m per medium linearum A B, C D, tranſiens omnes earum Parallelas in curva terminatas bifariam dividit. Eſt ergo Diameter curvæ.

2°. Linea per Verticem Diametri H ducta, & ordinatis Parallela eſt tangens curvæ, pone enim illam lineam ſectioni iterum occurrere in h, linea T M quæ dividit bifariam omnes Parallelas lineæ A B in curva terminatas, deberet bifariam dividere lineam H h, ſed illud abſurdum, ſiquidem illam attingit in ejus extremo H, ergo linea per verticem Diametri ducta ordinatis parallela curvam iterum non attingit, eſt ergo Tangens in puncto H. Vice versâ ſit Tangens lineæ A B parallela, & ex medio M lineæ A B per H punctum contactus ducatur linea, ea erit Diameter; ſi enim Diameter quæ tranſit per M ad h non verò ad H pertingeret, ducatur per h linea Parallela lineæ A ß, ea erit Tangens in h; eritque Parallela Tangenti in H, ſed illud eſt abſurdum, ergo linea M H eſt Diameter.

Denique cum Diameter ſecet Parallelas ſunt (juxta Lem. III.) facta partium Parallelarum, ut facta partium quas ſecant in Diametro, ſed partes ſingulæ Parallelæ à Diametro ſectæ ſunt utrinque æquales & ordinatæ dicuntur, ergo quadrata Ordinatarum ſunt ut facta partium quas ſecant in Diametro.

Lemma V. E quovis puncto Sectionis Conicæ ducatur ordinata ad Diametrum, & Tangens quæ illi Diametro occurrat in quodam puncto: diſtantiæ hujus puncti ab utroque vertice Diametri erunt inter ſe ſicut abſciſſæ ab utroque vertice Diametri ſumptæ (Apollon. l. 1. prop. 34.)

E puncto P curvæ ducatur ordinata P O ad Diametrum A D, & in eâ ſumatur punctum M tale ut ſit A M : D M = A O : D O, ducaturque linea P M, illa in nullo alio puncto F curvæ occurret, hoc eſt, erit Tangens in P.

Demonſt... Ex eo puncto ſuppoſito F ducatur ordinata F H, erit M O : M H = P O : P H & $\overline{MO}^2 : \overline{MH}^2 = \overline{PO}^2 : \overline{FH}^2$, ſed ſi F pertineat ad curvam eſt (per Lem. IV.) A O × O D : A H × H D = $\overline{PO}^2 : \overline{FH}^2$ ergo A O × O D : A H × H D = $\overline{MO}^2 : \overline{MH}^2$ & alternando A O × O D : $\overline{MO}^2$ = A H × H D : $\overline{MH}^2$. Ducantur autem per A & D lineæ A X D K parallelæ P M quæ ſecent P O ejuſque productionem in E & K, & per P & H ducatur linea quæ parallelas A X & D K in I & S, ſecet, ſimilia erunt Triangula A O E, M O P, D O K ob parallelas, unde habentur hæ proportiones A O : M O = A E : M P.

& O D : M O = D K : M P & per compoſitionem rationis erit

A O × O D : $\overline{MO}^2$ = A E × D K : $\overline{MP}^2$.

Pariter ſimilia ſunt Triangula A H I, M H P, D H S, unde eſt: A H : M H = A I : M P

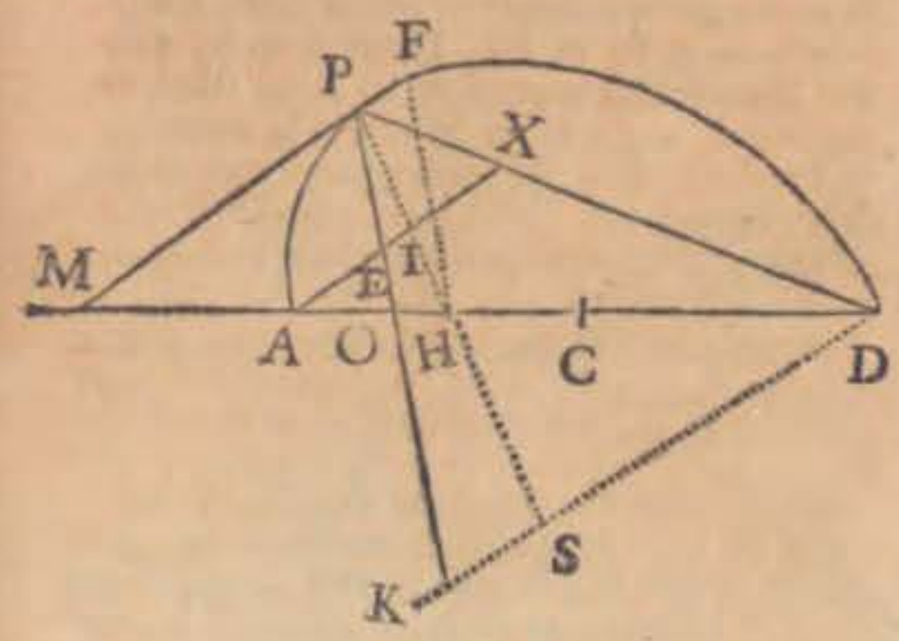
& D H : M H = D S : M P.

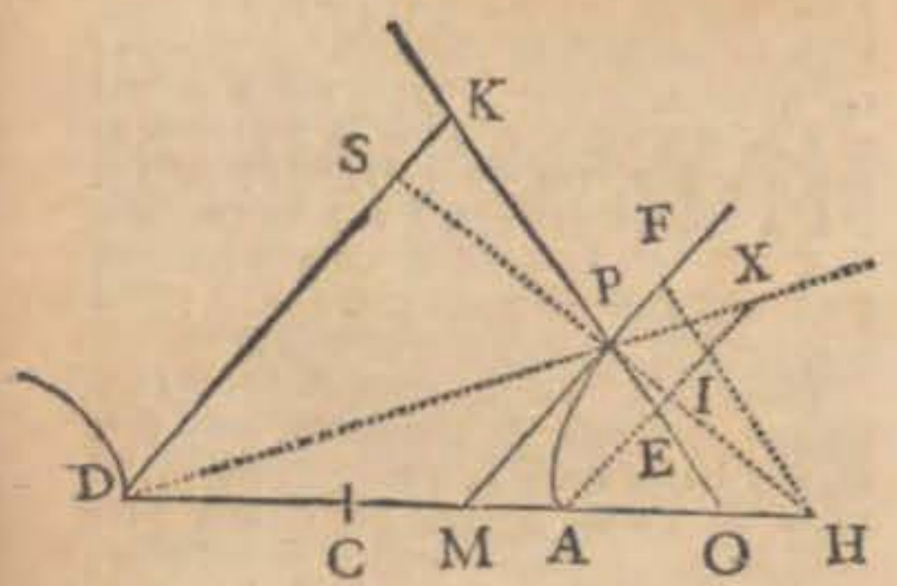
& per compoſitionem rationis erit

A H × D H : $\overline{MH}^2$ = A I × D S : $\overline{MP}^2$.

Sed ſi F pertinet ad curvam invenitur A O × O D : $\overline{MO}^2$ = A H × D H : $\overline{MH}^2$, foret ergo A E × D K : $\overline{MP}^2$ = A I × D S : $\overline{MP}^2$,

ſive




five $AE \times DK = AI \times DS$ & $AE : AI = DS : DK$, quod absurdum esse in datâ Hypothesi sic evincitur.

Ex P ad Diametri extremitatem D, ducatur P D, quæ lineam A E I (productam si necesse fit) secet in X; ob parallelas P M, X A est $AM : DM = PX : DP$
& $PX : DP = XE : DK$,
& ob Triangula similia A O E, D O K est $AO : DO = AE : DK$, & quia per Hypothesim est $AM : DM = AO : DO$, erit $XE : DK = AE : DK$ ideoque in datâ Hypothesi $XE = AE$ & cum sit $XI : XE = DS : DK$ ob parallelas, erit $XI : AE = DS : DK$ erat verò ex suppositione quod F est in curva, $AE : AI = DS : DK$, foret ergo $XI : AE = AE : AI$, & $AE^2 = XI \times AI$. Sed $AE^2$ quadratum dimidii lineæ A X est semper majus Rectangulo ejus partium $XI \times AI$ (per 5. 2. Elem.), absurdum ergo est ea esse æqualia quod tamen sequitur supposito punctum F ad curvam pertinere, ideoque, M P curvam tangit in P. Sed ad idem cujusvis curvæ punctum duas Tangentes rectas duci non posse ex naturâ curvarum liquet, ergo Tangens in P, ita occurrit Diametro ut sit
$AM : DM = AO, DO$. Q. E. D.

Cor. 1. Si Diameter A D sit infinita hoc est punctum D ad infinitum removeatur, D M & D O æqualia censenda sunt, cum ergo sit $DM : AM = DO : AO$ erit $AM = AO$; sive distantia puncti concursus Tangentis cum Diametro, ab ejus vertice, æqualis erit abscissæ ab eodem vertice sumptæ (Ap. lib. 1. 35.)

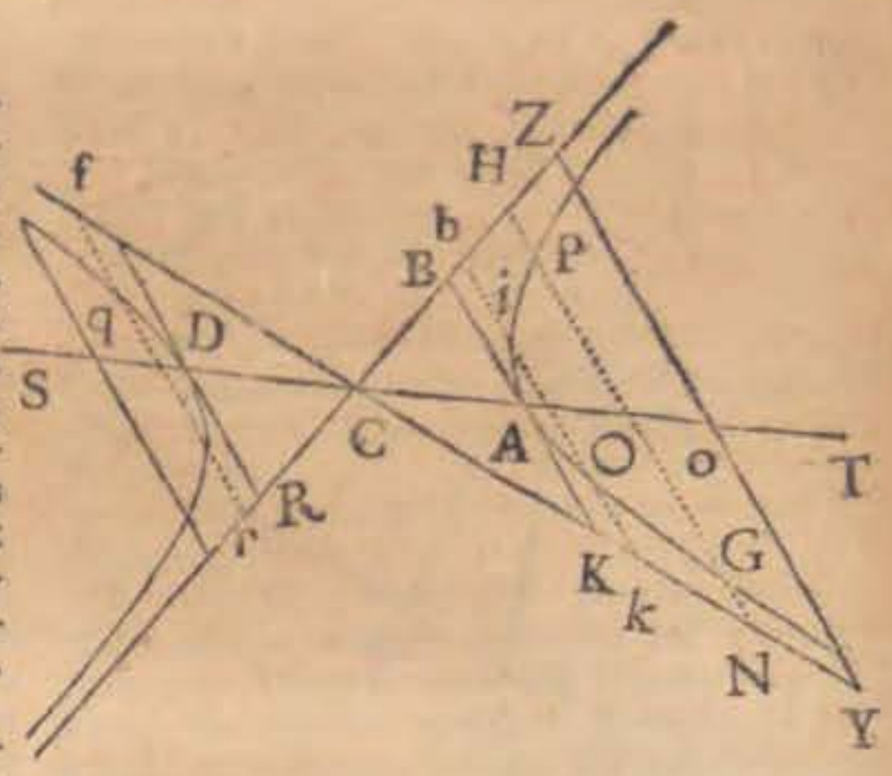
Cor. 2. Si Diameter A P sit terminata, ejusque medium sit C sitque P O ordinata fiatque C M, $CA = CA : CO$, erit P M tangens in puncto O; Etenim sumendo summam & differentiam terminorum harum rationum est,
$CM + CA : CA + CO = CM - CA : CA - CO$
sive in primâ ratione ponendo DC pro CA, est $DM : DO = AM : AO$ aut alternando $DM : AM = DO : AO$, ergo (per Lemma) MP erit Tangens in P, est ergo semidiameter media proportionalis inter abscissam à centro sumptam, & partem Diametri à centro ad concursum Tangentis comprehensam. (Apol. Lib. 1. 37.)

Cor. 3. In Puncto P Sectionis Conicæ ducatur Tangens, quæ secet Diametrum in M, & ducatur ordinata P O quæ secet Diametrum in O factum partium Diametri $AO \times DO$ est æquale facto $CO \times OM$ ex partibus lineæ à Centro ad Tangentem sumptæ & per ordinatam in O sectæ. Cum enim sit $CM : CA = CA : CO$ tollendo terminos secundæ rationis à terminis primæ erit $MA : AO = CA$ (sive DC) : CO, unde componendo erit $MO : AO = DO : CO$, ideoque $AO \times DO = CO \times MO$: & (per 5. vel 6. 2. Elem.) prout O est inter A & D vel ultra, erit $CO \times MO = AC^2 - CO^2$ vel $CO^2 - AC^2$, unde deducitur $MO = \frac{AC^2 - CO^2}{CO}$ vel $\frac{CO^2 - AC^2}{CO}$.

DE MOTU CORPO-RUM.

*De Hyperbolâ.*

Theor. I. Lineæ omnes ab Interſectione Aſymptotorum in eorum Angulo ductæ & utrinque productæ, ſunt Hyperbolæ utriuſque Diametri, & earum portio inter utramque Hyperbolam comprehenſa, dicitur Diameter tranſverſa, & biſariam dividitur in Interſectione Aſymptotorum quæ ideo centrum Hyperbolarum vocatur. Tangentes verò in utroque vertice ejuſdem Diametri ductæ & inter Aſymptotos comprehenſæ ſunt inter ſe Parallelæ & æquales, & biſariam dividuntur ab ea Diametro dicunturque ejus Diametri conjugatæ. (Apol. lib. 1. Prop. 30. lib. 2. Prop. 3. & 19.)




*Demonſt.* Ducta enim quomodocunque linea S C T in Angulo Aſymptotorum ZCY per earum interſectionem C, ſi crura CZ & CY ſumantur reciprocè proportionalia ſinubus Angulorum adjacentium, ducaturque linea ZY illa per lineam SCT biſariam dividetur; nam in Triangulo C Z Y eſt C Z : C Y = Sin. Y : Sin. Z = Sin. Y C o : Sin. Z C o (per conſt.) & alternando, Sin. Y : Sin. Y C o = Sin. Z : Sin. Z C o. Sed in Triangulo C o Y eſt

Sin. Y : Sin. Y C o = C o : Y o,

& in Triangulo C M Z eſt

Sin. Z Sin. Z C o = C o : Z o,

ergo cum duæ priores rationes ſint æquales, eſt C o : Y o = C o : Z o, ideoque Y o = Z o.

Omnis autem linea H N lineæ Z Y parallela ſimiliter biſariam dividetur in O per lineam S T, partes autem ejus inter Hyperbolam & Aſymptotum utrinque contentæ ſunt æquales, per Lem. I. cum ergo ſit ſemper H O = O N, & H P = G N eſt H O − H P = N O − N G ſive O F = O G. Ergo linea S T, lineas omnes lineæ Z Y parallelas, in Hyperbola contentas biſariam ſecat, eſt ergo ejus Diameter per Lemma V.

Sint verò A & D puncta in quibus linea S T occurrit Hyperbolis, per ea ducantur B A K, F D R parallelæ lineæ Z Y inter Aſymptotos contentæ, ergo biſecantur in A & D, cum verò ſint parallelæ ordinatis Diametro S T ſunt Tangentes in verticibus A & D (per Lemma IV.) & inter ſe Parallelæ.

Dico præterea eas eſſe æquales, ducantur enim Parallelæ ipſis proximæ b i K, f q r: erit f q × q r = b i × K i (per Lem. I.) accedentibuſque ordinatis ad Tangentes fit tandem f q = F D, q r = R D; b i = B A, & K i = K A eſt ergo F D × R D = B A × K A, ſed eſt F D = D R & B A = K A ergo F D² = B A² & F D = B A = K A. Unde tandem cum Triangula C A K & C D F ſint ſimilia, & ſit C A : C D = K A : F D eſt etiam C A = C D.

Theor. II. Tertia proportionalis Diametro tranſverſæ & Diametro conjugatæ dicatur Latus Rectum; Eſt Diameter tranſverſa ad Latus Rectum ut factum Abſciſſarum ab utroque vertice ſumptarum, ad quadratum Ordinatæ; Hinc iſta curva ὑπέρβολε ſive excedens dicitur, quia quadratum ordinatæ majus eſt facto lateris Recti per abſciſſam à proximo vertice (Apol. lib. I. Prop. 21.) Coincidit verò hæc propoſitio cum iſta, eſt quadratum Diametri Tranſverſæ ad quad. Diametri conjugatæ ut factum abſciſſarum ad quadratum ordinatæ.

*Demonſt.* Sit ut prius Diameter tranſverſa D A T, conjugata B A K & ordinata inter Aſymptotas contenta HPOGN: ſunt (per Lem. II.) facta partium ſumptarum in lineis D O, H N à puncto Hyperbolæ ad utramque Aſymptotum, ſicut facta partium earundem linearum à puncto concuſſus O, uſque ad Hyperbolam ſumptarum; hoc eſt A C × A C : G N × G H = A O × D O : P O × G O. Sed G N × G H æqualis eſt quadrato ſemi Tangentis B A, ſive ſemidiametri conjugatæ; nam (per Lem. I.) eſt G N × G H = b i × K i & per præced. dem. b i × K i = B A²) & eſt P O = G O ideo pro-

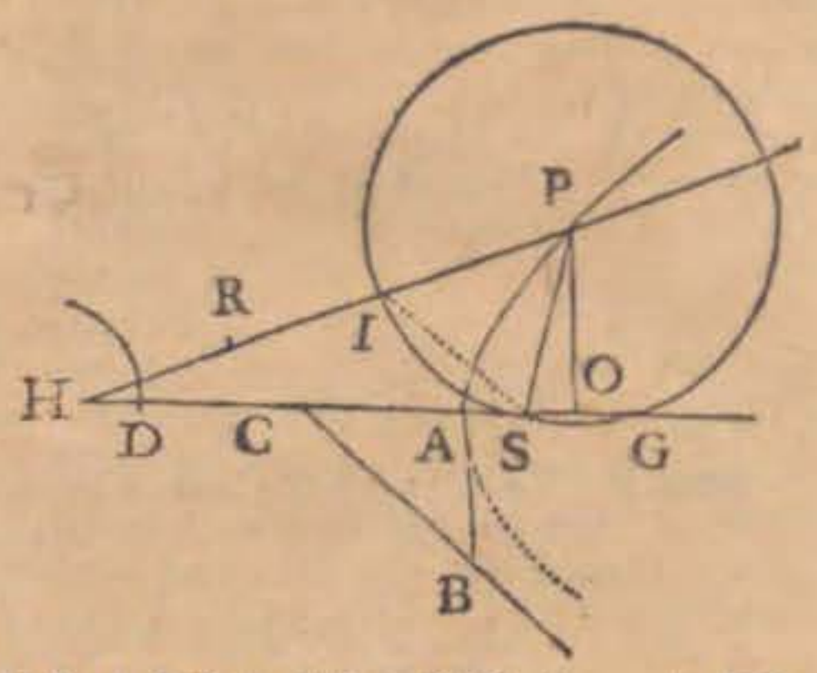
por-

portio ſuperior huc redit, $AC^2 : BA^2 = AO \times DO : PO^2$. Sit verò $L$ latus rectum, eſt per ejus definitionem $2AC : 2BA = 2BA : L$, ergo eſt $2AC : L = 4AC^2 : 4BA^2 = AC^2 : BA^2$ ideoque $2AC.L = AO \times DO : PO^2$.

Hinc deducitur quod $PO^2 = \frac{L \times AO \times DO}{2AC} = \frac{DO}{AD} \times L \times AO$ ut ergo DO eſt ſemper major quàm AD, eſt etiam $PO^2$ ſemper major quàm $L \times AO$. Q. E D.

Theor. III. Diameter illa quæ Aſymptotorum Angulum bifariam dividit eſt perpendicularis ſuis ordinatis (ut liquet ex Elem.), ideoque eſt Axis Hyperbolæ & ejus Diameter Conjugata Axis conjugatus: ſi à Centro feratur utrinque in Axem longitudo Aſymptoti à centro ad extremum Axis conjugati ſumptæ, puncta notata in Axi dicuntur foci Hyperbolæ, & ſi à focis ad quodvis Hyperbolæ punctum ducantur lineæ, earum differentia eſt ſemper Axi tranſverſo æqualis. Latus Rectum axis dicitur Latus rectum Principale, & tota linea ordinatim Axi applicata in foco eſt æqualis illi lateri recto Principali, quod erit majus quadruplo diſtantiæ verticis à foco, ſi denique bifariam dividatur Angulus quem faciunt lineæ ab utroque foco ad idem curvæ punctum ductæ, linea eum angulum biſecans, erit Tangens curvæ in eo puncto. (Apol. lib. 3. 51.)

*Demonſt.* Ducatur quævis linea ex foco H, ſumatur $HI = DA$, & ducta IS ad alterum focum S, fiat $ISP = PIS$ erit $PI = PS$, ideoque differentia linearum HP, SP erit $HI = DA$ ſeu axi tranſverſo, dico hoc poſito, P ad Hyperbolam pertinere. Centro P, radio PS, deſcribatur circulus ISGN habebitur hæc proportio, $HI : HS = HG : HN$ ſumatur dimidium harum linearum manebit proportio, fit autem $\frac{1}{2} HI = HR$, $\frac{1}{2} HS = CS$ $\frac{1}{2} HG = \frac{1}{2} HS + \frac{1}{2} SG$ & demiſſa PO perpendiculari in SG eſt $\frac{1}{2} SG = SO$, ergo $\frac{1}{2} HG = CS + SO = CO$, Denique $\frac{1}{2} HN = \frac{1}{2} HI + \frac{1}{2} IN = RI + IP = RP$ eſt ergo $HR : CS = CO : RP$: componendo primum habetur $HR : CS + HR = CO : RP + CO$ & prioris rationis terminos terminis ſecundæ jungendo habetur $HR : CS + HR = CO + HR :$




$HR + RP + CS + CO$, ſive quia $HR = AC = DC$, & $CS = CH$ eſt $AC : CS + AC = DO : HP + HO$.

At operationibus contrariis in eandem proportionem $HR : CS = CO : RP$ factis, hoc eſt, dividendo & poſtea prioris rationis terminos e terminis ſecundæ detrahendo, ſubſtitutionibus factis erit

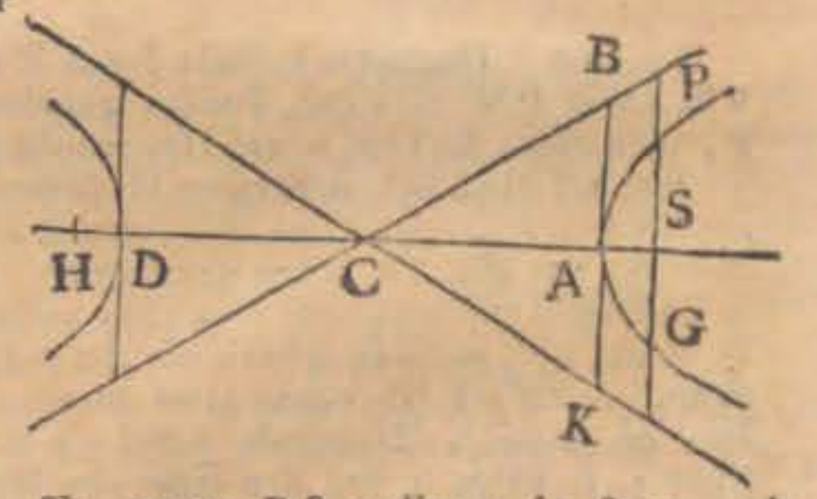
$AC : CS - AC = AO : HP - HO$,

multiplicatis ergo terminis utriuſque proportionis erit

$AC^2 : CS^2 - AC^2 = AO \times DO : HP^2 - HO^2$

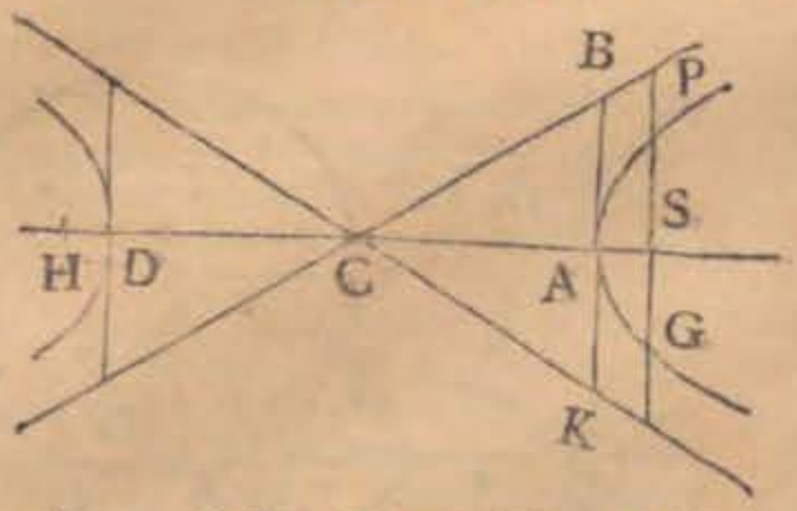
ſit autem perpendicularis AB erecta ab A uſque ad Aſymptotam CB, eſt $CB = CS$, & $CS^2 - AC^2 = AB^2$; eſt etiam $HP^2 - HO^2 = PO^2$, eſt ergo

$AC^2 : AB^2 = AO \times DO : PO^2$, ſed eſt $AC^2 : AB^2 = BO \times AO$ ad quadratum ordinatæ in O, (per Thor. II.) ergo PO eſt ipſa illa ordinata & punctum P ad Hyperbolam pertinet.

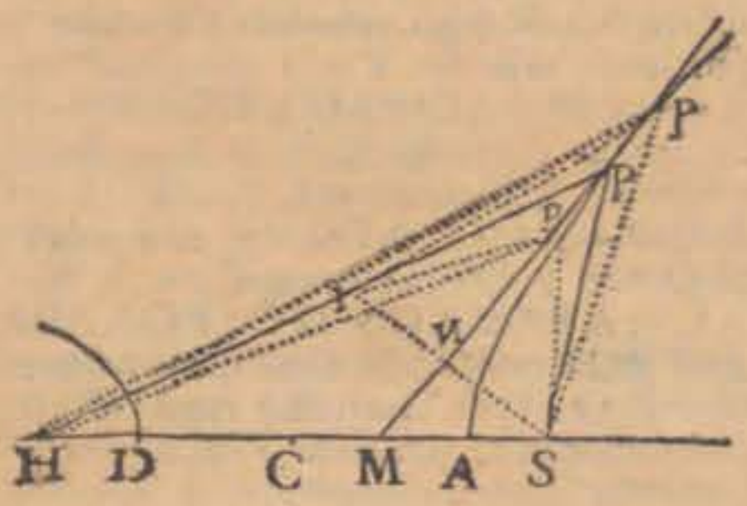



Sit autem PS ordinata in foco, erit $AC^2 : AB^2 = AS \times DS : PS^2$ eſt verò $DS = CS + AC$ & $AS = CS - AC$, ergo $BS \times AS = CS^2 - AC^2 = AB^2$, ergo $AC^2 : AB^2 = AB^2 : PS^2$, & $AC : AB = AB : PS$, & duplicando omnes

DE MOTU CORPO-RUM.

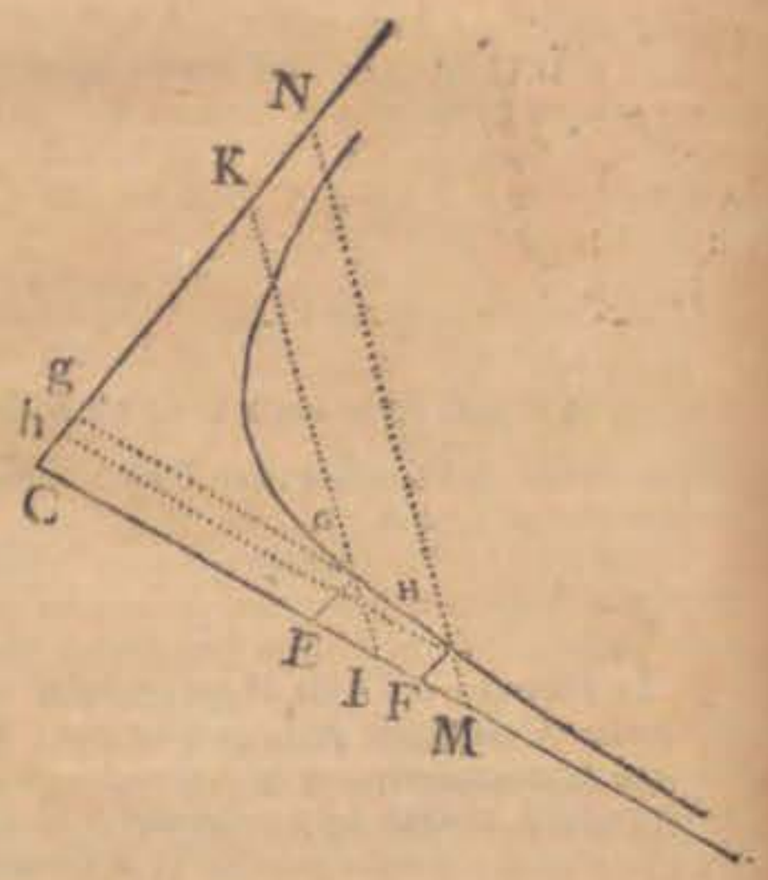



terminos 2 A C : 2 A B = 2 A B : 2 P S sive P G. Sed est per naturam lateris recti 2 A C : 2 A B = 2 A B : L, ergo L = P G: & $\frac{1}{2}$ L = P S, sed cum per Theor. II. sit $PO^2 = \frac{DO}{AB} \times L \times AO$ erit ergo $PS^2$ sive $\frac{1}{4} L^2 = \frac{DS}{AB} \times L \times AS$ & $\frac{1}{4} L = \frac{DS}{AB} \times AS$, ut itaque D S est major A B, erit $\frac{1}{4}$ L, major A S.




Denique. Ducantur à focis lineæ H P, S P, linea P M bifariam dividat angulum P, dico eam esse Tangentem Hyperbolæ in P; hoc est illam non occurrere Hyperbolæ in alio quovis puncto p; ex H P tollatur H I = D A, erit P I = P S (per hoc Theor.) & ducta I S erit P M perpendicularis in medium N lineæ I S, ex alio quovis puncto p ducantur rectæ p I p S erunt inter se æquales, ob æqualia Triangula p N I, p N S (per 4. 1. Elem.) sed si p esset in Hyperbola, esset H p = H I + p S sive quia p I = p S esset H p = H I + I p, quod absurdum (per 20. 1. Elem.)

Theor. IV. Si sumantur pro abscissis portiones quævis Asymptoti ab Hyperbo-




læ centro, & Ordinatæ sint Parallelæ alteri Asymptoto, Ordinatæ erunt suis Abscissis reciprocè proportionales; Et area inter Asymptotum, Hyperbolam, ordinatam Vertici axis occurrentem & ordinatam quamvis comprehensa erit abscissæ hujus ordinatæ Logarithmus.

*Demonst.* Sit C centrum Hyperbolæ, C E C F abscissæ, E G F H ordinatæ Asymptoto C N parallelæ dico quod est C E : C F = F H : E G; Ductis enim per G & H lineis G g, H h parallelis Asymptoto C F, & I G K, M H N inter se parallelis trans Hyperbolam, erunt similia Triangula I G E & M H F, G K g & H N h propter Parallelas, ideoque est

I G : M H = G E : H F

& G K : H N = G g (sive C E) : H h (sive F C) compositis rationibus est

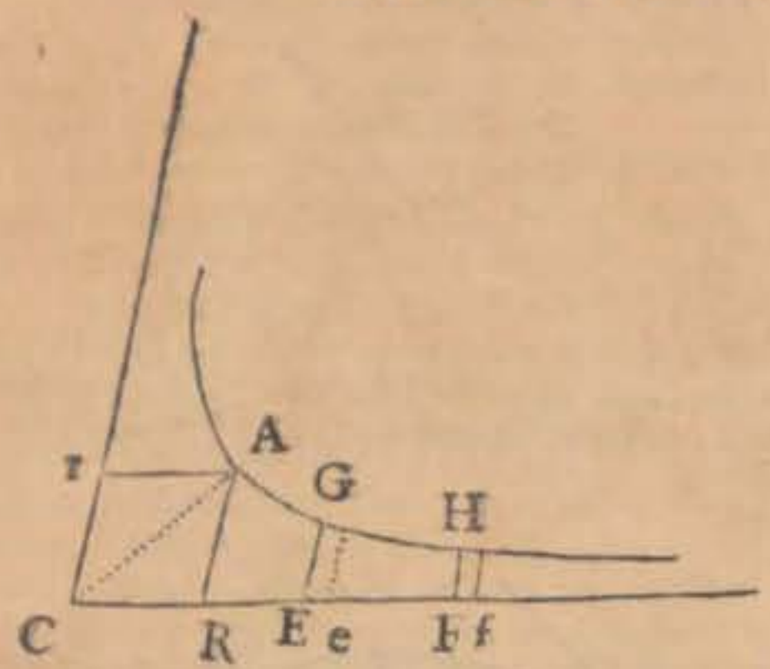
I G × G K : M H × H N = G E × C E : H F × F C.

Sed, (per Lem. I.) est I G × G K = M H × H N, ergo G E × C E = H F × C F est ergo C E : C F = H F : G E,

cum autem Parallelogrammata C G, C H, sint æquiangula & ea lateribus reciprocis contineri sit demonstratum, sunt æqualia.

Dico denique areas Hyperbolæ esse abscissarum Logarithmos; ex centro C ducatur axis C A, & ex vertice A ducantur lineæ A R A r Asymptotis Parallelæ, ob Angulum C bifariam divisum & parallelas, erit C R = A R sit A R = 1; & fingantur duæ ordinatæ quæ ita moveantur ut abscissæ unius sint

semi-

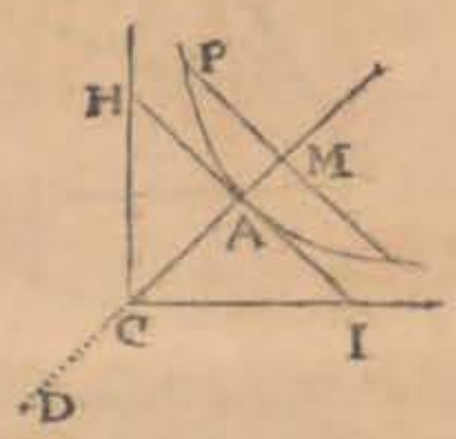


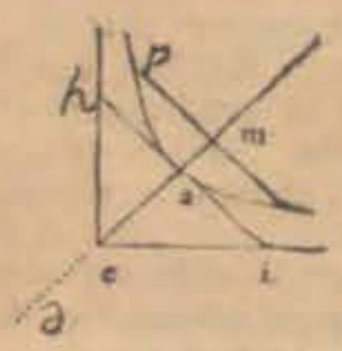

semper potentia eadem n alterius; coincident quidem in R, nam quævis potentia unitatis est semper 1, sed procedendo sit $CE = x$ debebit esse $CF = x^n$, erunt ergo $GE \frac{1}{x}$ & $HF \frac{1}{x^n}$ est enim $CE : CR = AR : GE$ sive $x : 1 = 1 : \frac{1}{x}$ & $CF : CR = AR : FH$ sive $x^n : 1 = 1 : \frac{1}{x^n}$, fluxio autem lineæ CE erit $dx = Ee$, & lineæ CF erit $nx^{n-1}dx = Ff$, ideo areæ RG fluxio erit $dx \times \frac{1}{x} = \frac{dx}{x}$ & areæ RH, $nx^{n-1}dx \times \frac{1}{x^n} = \frac{ndx}{x}$ sed $\frac{dx}{x} : \frac{ndx}{x} = 1 : n$, sunt ergo fluxiones earum arearum in Ratione constanti 1 ad n, ideoque & areæ integræ RG, RH quæ sunt earum summæ, sunt in eâdem ratione 1 ad n, sunt autem 1 & n Exponentes potentiarum abscissarum CE, CF, sunt ergo areæ sicut illi exponentes, sed Logarithmi sunt semper ut Exponentes potentiarum quantitatum quarum sunt Logarithmi, ergo illæ areæ RG, RH, sunt Logarithmi abscissarum CE, CF.

In puncto R ubi abscissa est unitas areæ est 0, ut Logarithmis convenit, sitque negativa retrocedendo ab R versus C, simulque cum sint abscissæ minores unitate CR fiunt fractiones.

Theor. V. Si Angulus Asymptotarum sit Rectus, Hyperbola dicitur æquilatera, æqualesque sunt Axes conjugati, ideoque latus RectumAxi transverso est æquale, ac (per Theor. II.) facta abscissarum quadrato ordinatarum æqualia sunt, sicut in circulo: Diversæ Hyperbolæ eodem Asymptotorum angulo descriptæ sunt similes: Si vero idem sit Hyperbolarum axis sed diversus Angulus erunt ordinatæ ad idem axeos punctum sicut Radices quadratæ Laterum Rectorum Principalium, & in ea erunt ratione portiones earum Hyperbolarum per Ordinatas terminatarum quarum æquales sunt abscissæ. LIB II. PRIMUS.

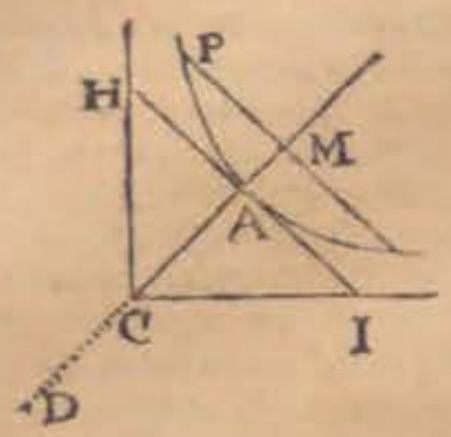
*Demonst.* Axis transversus est perpendicularis conjugato, dividitque bifariam angulum Asymptotorum; si ergo is angulus sit 90°. ejusque dimidium 45°. Triangulum CAH erit Isosceles & $CA = AH$, cætera ex his facile deducuntur.




Si in duabus Hyperbolis anguli Asymptotorum sint æquales, ut bifariam dividuntur per axem, similia erunt Triangula CAH, cah: ideoque $CA^2 : AH^2 = Ca^2 : ah^2$ sumantur abscissæ AM, am in ratione AD ad ad erit etiam DM : dm in eadem ratione cum sit ergo $AM : am = AD : ad$ & $DM : dm = AD : ad$. est $AM \times DM : am \times dm = AD^2 : ad^2$ sed est $CA^2 : AH^2 = ca^2 : ah^2 = AM \times DM : MP^2 = am \times dm : mp^2$, & altern. $AM \times DM : am \times dm = MP^2 : mp^2$ est ergo $AD^2 : ad^2 = MP^2 : mp^2$ unde est $MP : mp = AD : ad$, omnes ergo ordinatæ ac omnia puncta Hyperbolæ determinantur per rationem AD ad ad.

DE MOTU CORPORUM.

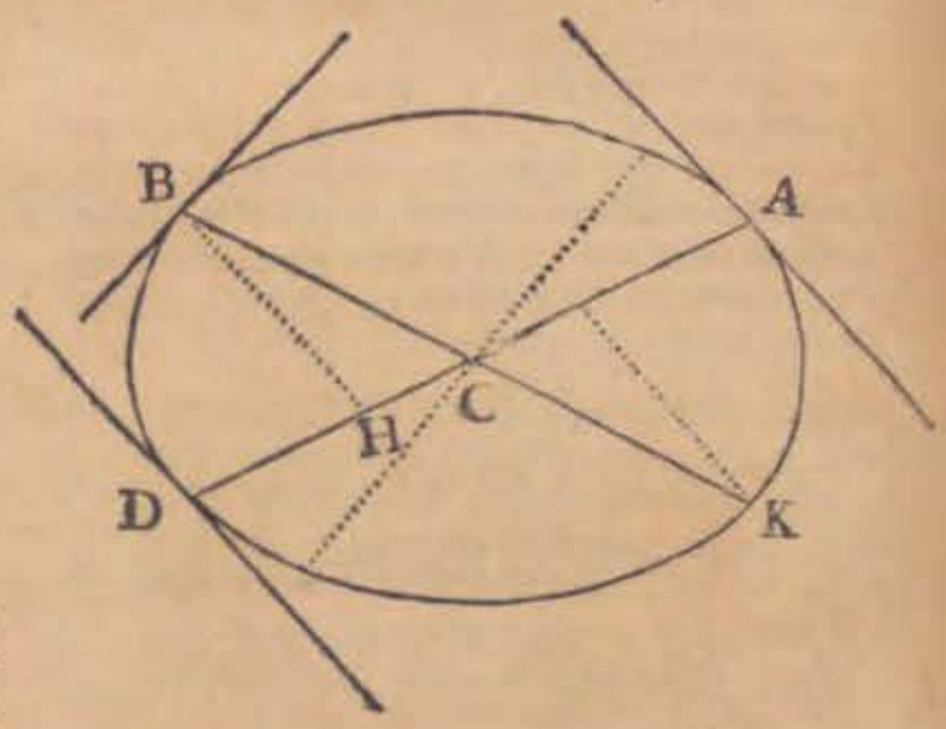





Sint denique in duabus Hyperbolis æquales axes transversi sed diversi Asymptotorum Anguli; diversa erunt Latera Recta, sumantur ergo æquales abscissæ, & quoniam Axis est ad latus Rectum sicut factum partium abscissæ ad quadratum ordinatæ, Axis verò & factum partium abscissæ æqualia sunt utrinque, eadem erit utrinque ratio Lateris recti principalis ad quadratum ordinatæ, erunt ergo ordinatæ quæ ad æquales abscissas pertinebunt, ut Radices quadratæ Laterum rectorum principalium, quæ ratio est constans, sit ergo utraque abscissa in portiones infinitè parvas & utrinque, æquales divisa singula Parallelogramma quam minima super æquales abscissæ portiones formata erunt in eadem ratione ac ordinatæ, ergo areæ Hyperbolarum, quæ sunt eorum Parallelogrammorum summæ, in eâdem erunt ratione, nempe ut Radices quadratæ laterum Principalium.

*De Ellipsi.*

Theor. I. Omnes Ellipsis Diametri sese bifariam secant in eodem puncto quod dicitur centrum Ellipsis, eaque Diametri ordinata quæ per centrum transit est ipsa Diameter, quæ respectu Diametri cujus est ordinata conjugata dicitur: (Apol. l. 1. Prop. 30.)




*Demonst.* Si per medium C, Diametri Ellipsis AD, ducatur linea quævis BK, & per puncta B & K ducantur BH, KG ordinatæ Diametro AB, erit per Lemma V. $AG \times GD : AH \times HD = GK^2 : BH^2$ & propter Triangula similia GKC, CBH est $GK\ BH = CG : CH = BC : CK$, est ergo $AG \times GD : AH \times HD = CG^2 : CH^2$, est autem (per 5. 2. Elem.) $AG \times GB = AC^2 - CG^2$ & $AH \times HB = AC^2 - CH$, est ergo

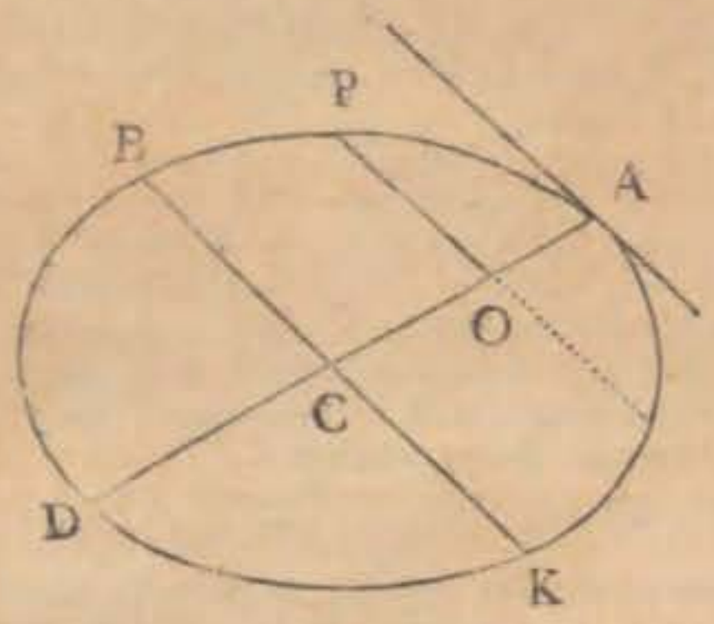
$AC^2 - CG^2 : AC^2 - CH^2 = CG^2 : CH^2$.

& jungendo terminos secundæ rationis terminis prioris, est $AC^2 : AC^2 = CG^2 : CH^2$, ideo $CG = CH$, ac per consequens $BC = CK$. Omnes ergo lineæ per punctum C transeuntes illic bifariam secantur. Sunt autem singulæ Diametri Ellipsis, nam in vertice B ducatur Tangens, & per Centrum C linea illi parallela, ea dividetur bifariam, cum itaque BK bisecet lineam Parallelam Tangenti per ejus verticem ductæ, est Diameter, per Lemma V.

Denique solæ lineæ per Centrum transeun-

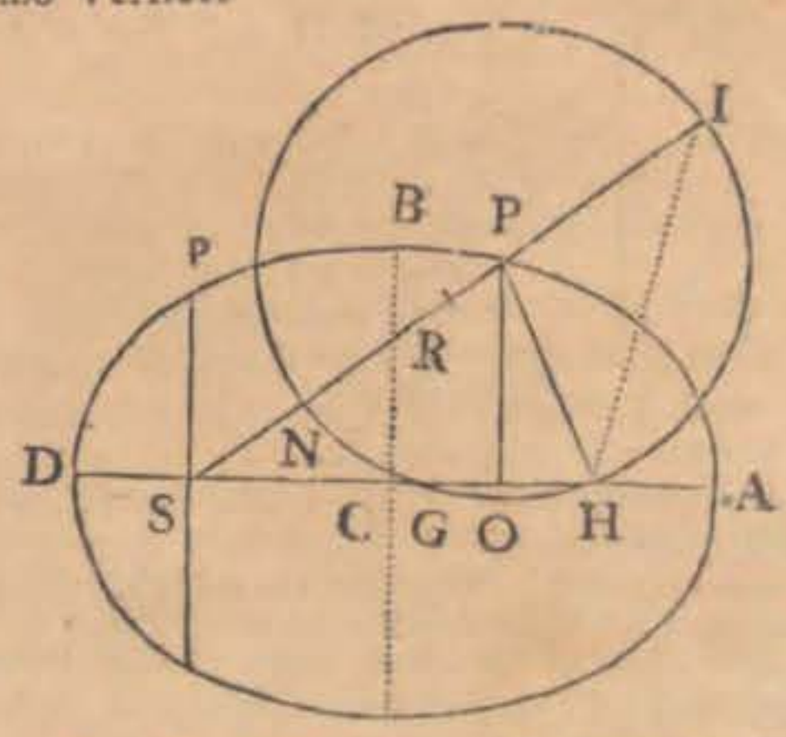
euntes ſunt Diametri; ſingatur enim Diameter per centrum non tranſiens, ducatur Tangens in ejus Vertice, & illi Tangenti ducatur Parallela per Centrum C, bifariam dividetur in centro, ergo bifariam non dividetur à Diametro ſuppoſitâ quæ per centrum non tranſit, ergo male ſupponitur eam eſſe Diametrum: Omnes ergo Diametri Ellipſis per centrum tranſeunt, illicque biſecantur.

Theor. II. Tertia proportionalis Diametro tranſverſæ ejuſque conjugatæ dicatur Latus Rectum, erit Diameter tranſverſa ad Latus Rectum, vel quod idem eſt quadratum diametri tranſverſæ ad quadratum tum ejus conjugatæ, ut factum abſciſſarum ſumptarum ab utroque Vertice Diametri ad quadratum ordinatæ, inde quadratum Ordinatæ ſemper minus deprehenditur facto Lateris recti per utramlibet abſciſſam, undè hæc curva dicitur Ellipſis; (Apoll. lib. 1. Prop. 21.)




*Demonſt.* Sit Ellipſis Diameter ACD, ejus conjuga a BCK eſt per Lemma IV, $AC \times CD$ ſive $AC^2 : AO \times DO = BC^2 : PO^2$ & alternando $AC^2 : BC^2 = AO \times DO : PO^2$, ſed eſt $2AC : 2CB = 2CB : L$. ergo $4AC^2 : 4CB^2 = AC^2 : CB^2 = 2AC$, $L = AO \times DO : PO^2$, ergo eſt $PO^2 = \frac{L \times AO \times DO}{2AC} = \frac{DO}{2AC} \times L \times AO$ ſed ut $4DO$ eſt ſemper minus quam $2AC$, eſt $PO^2$ ſemper minus facto Lateris recti per alterutram abſciſſam.

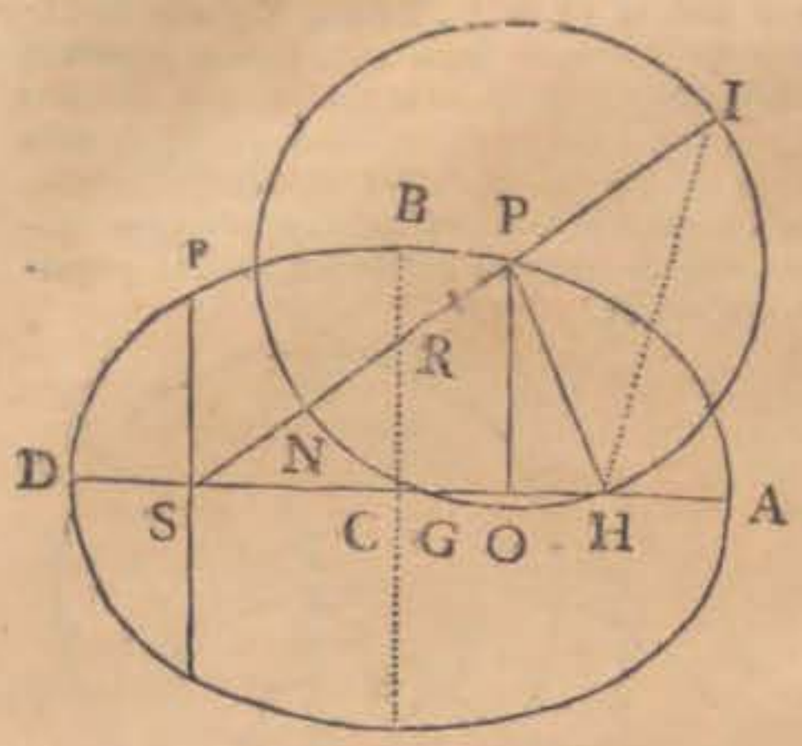
Theor. III. Sit AD axis major, à centro feratur utrinque CH, CS, æquales & tales ut quadratum $CH^2$ ſive $CS^2$ cum quadrato ſemiaxis conjugati $CB^2$ ſit æquale quadrato ſemiaxis majoris $CA^2$, dicanturque puncta H & S, Foci, ſumma linearum ab utroque foco ad quodvis punctum Ellipſeos ductarum erit ſemper æqualis Axi majori, (Apol. Lib. 3. Prop. 52.); & tota linea ordinatim applicata in foco erit æqualis Lateri Recto Principali, quod ergo minus erit quadruplo diſtantiæ foci à proximo Vertice.




*Demonſt.* Ducatur quævis linea ex foco S, in eâ ſumatur $SI = DA$ & ducta IH ad alterum focum, fiat $IHP = I$ erit $IP = PH$, ideoque $SP + PH = SP + PI = SI = DA$ ſive axi majori: quo poſito dico punctum P ad Ellipſim pertinere. Centro P radio PH deſcribatur circulus IHGN habebitur hæc Proportio $SI : SH = SG : SN$, ſumendo dimidium harum linearum manebit proportio; ſit autem $\frac{1}{2}SI = SR$; $\frac{1}{2}SH = CH$; $\frac{1}{2}SG = \frac{1}{2}SH - \frac{1}{2}GH$ & demiſſa PO perpendiculari in GH eſt $\frac{1}{2}GH = HO$ ergo $\frac{1}{2}SG = CH - HO = CO$. Denique $\frac{1}{2}SN = \frac{1}{2}SI - \frac{1}{2}NI = RI - PI = RP$ eſt ergo

$SR : CH = CO : RP$ & componendo habetur $SR : SR + CH = CO : CO + RP$, tum prioris rationis terminos jungendo terminis ſecundæ, eſt: $SR, SR + CH = CO + SR : CO + RP + SR + CH$ ſive quia $SR = AC = DC$ & $CH = CS$, eſt $AC : AC + CH = DO : SP + SO$. At operationibus contrariis factis in eandem proportionem $SR : CH = CO : RP$, hoc eſt, dividendo & poſtea prioris rationis terminos

De Motu Corporum.




minos è terminis secundæ detrahendo substitutionibusque factis erit

$AC : AC - CH = AO : SP - SO$

multiplicatis autem terminis utriusque proportionis est

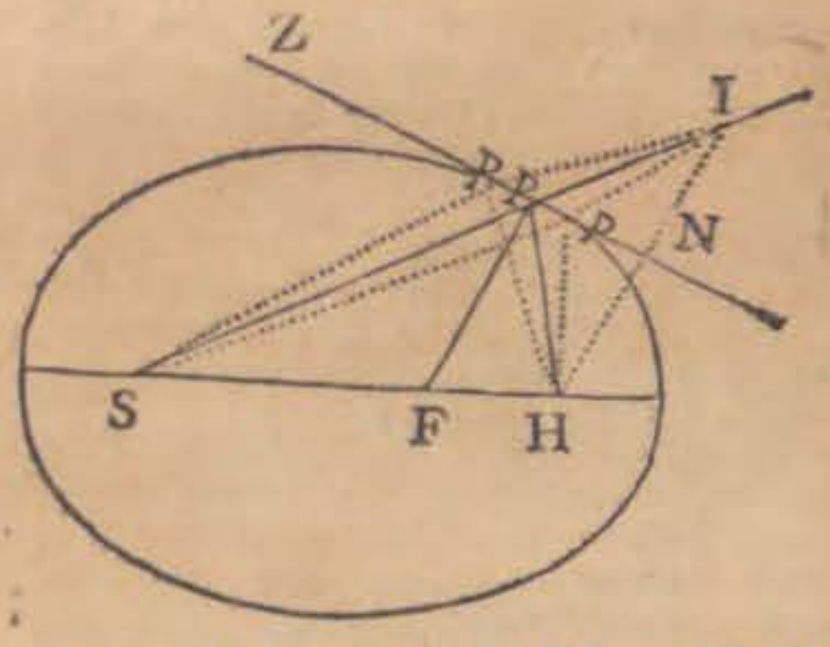
$AC^2 : AC^2 - CH^2$ (sive $BC^2$) $= AO \times DO, SP^2 - SO^2$,

est autem (per 47. 1. Elem.) $SP^2 - SO^2 = OP^2$, sed est $AC^2 : BC^2 = AO \times DO$ ad quadratum ordinatæ in O, est ergo PO ipsa illa ordinata, & punctum P ad Ellipsim pertinet.

Sit autem S p ordinata in foco erit $AC^2 : BC^2 = AS \times SD : Sp^2$, est autem (per 5. 2. Elem.) $AS \times SD = AC^2 - CS^2 = BC^2$, est ergo $AC^2 : BC^2 = BC^2 : Sp^2$ sive, $AC : BC = BC : Sp$, & duplicando omnes terminos: $2AC : 2BC = 2BC : 2Sp$, sed est $2AC : 2BC = 2BC : L$ ergo $L = 2Sp$, & $\frac{1}{2} L = Sp$.

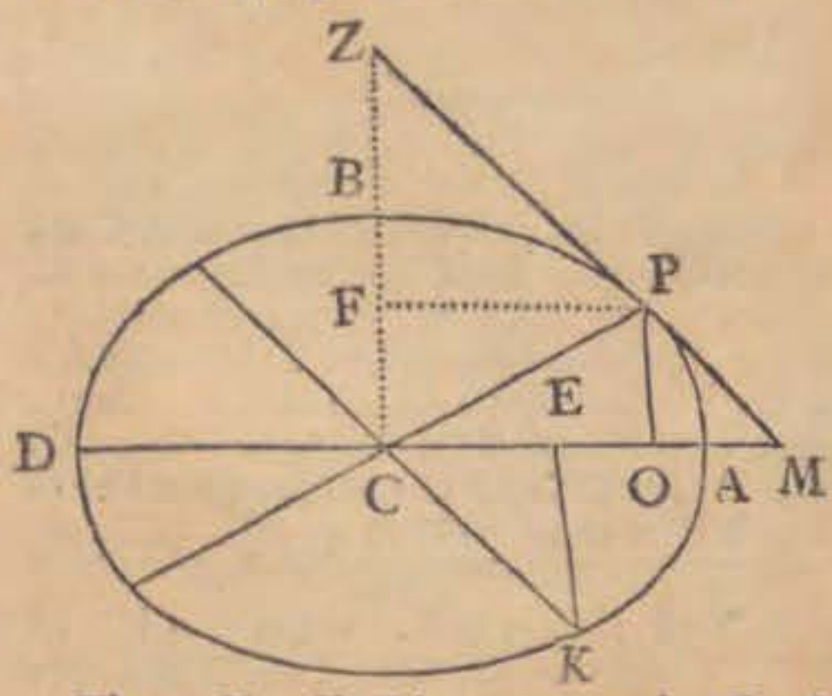
Est autem (per Theorema 2.) $Sp^2$, sive $\frac{1}{4} L^2 = \frac{AS}{2AC} \times L \times DS$ & $\frac{1}{4} L = \frac{AS}{2AC} \times DS$ ut ergo est AS minor 2AC erit $\frac{1}{4}$ L minor DS, hoc est latus rectum minus est quadruplo distantiæ foci à proximo Vertice.

Theor. IV. Tangens Ellipsis bifariam dividit Angulum qui fit inter unam è lineis à foco ductam & productionem alterius: & lineæ ab utroque foco ductæ, æquales faciunt angulos cum Tangente, & si bifariam dividatur angulus quem faciunt lineæ à foco ductæ, linea bisecans erit curvæ perpendicularis. (Apol. 48. ~~3. 4.~~)




*Demonst.* Ducantur à focis lineæ SP HP productaque SP in I, dividatur bifariam angulus SPH, dico lineam ZPN non occurrere Ellipsi in ullo alio puncto p, sit PI = PH & ductâ IH, erit PN perpendicularis in ejus medium, ex alio quovis puncto p, ducantur pI, pH, quæ erunt æquales ob æqualia Triangula pNI, pNH (per 4. 1. Elem.) sed si p foret in Ellipsi esset Sp + pH. sive Sp + pI = SI quod absurdum (per 20. 1. Elem.)

Est autem ZPS = IPN (per 15. 1. El.) est IPN = NPH, per const. ergo ZPS = NPH, Si ergo FPS = FPH est ZPS + FPS = NPH + FPH, sunt autem omnes simul æquales duobus rectis, ergo ZPS + FPS est Recto æqualis & PF angulum SPH bisecans est in Tangentem ideoque in curvam perpendicularis.




Theor. V. Sit Diameter quævis AD, & ducantur utlibet duæ aliæ Diametri inter se conjugatæ CP, CK, ex utriusque vertice ducantur ordinatæ KE, PO in priorem AD, factum abscissarum à curvâ sumptarum, unius ver-

vertici respondentium erit æquale quadrato abscissæ à centro sumptæ respondenti Vertici alterius Diametri: Unde quadrata ambarum abscissarum à Centro sumptarum erunt simul æqualia quadrato $\frac{1}{2}$ Diametri in quam sumuntur, & quadrata ordinatarum erunt æqualia quadrato ejus $\frac{1}{2}$ Diametri conjugatæ. Hinc deducitur summam quadratorum duarum Diametrorum conjugatarum quarumvis esse semper eamdem: eas verò Diametros conjugatas esse inter se æquales quarum vertices determinantur per ordinatam erectam in Axem majorem cujus abscissa à centro sumpta sit æqualis radici dimidii quadrati semi Axis majoris.

*Demonst.* ... Sint CP CK Diametri conjugatæ, PO KE ordinatæ ex earum verticibus in Diametrum AD ductæ; PM Tangens Parallela Diametro CK: Triangula POM, KEC erunt similia & PO:KE = MO:CE, vel $PO^2:KE^2=MO^2:CE^2$ sive quia (per Cor. 3. Lem. V.) est $MO = \frac{CA^2-CO^2}{CO:}$ est $PO^2:KE^2 = \frac{CA^2-CO^2}{CO^2}:CE^2$, sed per Lemma IV. est $PO^2:KE^2 = AO\times DO:AE\times DE$ sive (per 5. 2. Elem.) $= CA^2-CO^2:CA^2-CE^2$ est ergo, $CA^2-CO^2:CA^2-CE^2 = \frac{CA^2-CO^2}{CO^2}:CE^2$, dividendo primum & tertium terminum per $\frac{CA^2-CO^2}{CO^2}$ est $CO^2:CA^2-CE^2 = CA^2-CO^2:CE^2$ & addendo terminos secundæ rationis terminis primæ est $CA^2:CA^2 = CA^2-CO^2:CE^2$, ergo $CE^2 = CA^2-CO^2 = AO\times DO$: Pari modo addendo terminos primæ rationis terminis secundæ erit $CO^2:CA^2-CE^2 = CA^2:CA^2$: ergo $CO^2 = CA^2-CE = AE\times DE$. Quod erat primum.

Junctis ergo quadratis abscissarum $CO^2$, $CE^2$ summa est æqualis $CA^2$; nam est $CE^2 = CA^2-CO^2$ ergo $CE^2+CO^2 = CA^2-CO^2+CO^2 = CA^2$.

Sit BC diameter conjugata diametri AC, est $PO^2 = \frac{BC^2}{AC^2}\times CA^2-CO^2$ & $KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2}\times AC^2-CE^2 = \frac{BC^2}{AC^2}\times AC^2-AC^2+CO^2 = \frac{BC^2}{AC^2}CO^2$, ergo $PO^2+KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2}\times AC^2-CO^2+CO^2 = BC^2$.

Sit autem Diameter AC axis, ordinatæ erunt perpendiculares, ergo $PO^2+CO^2 = PC^2$, & $CE^2+KE^2 = CK^2$ (per 47. 1. El.) ergo $PO^2+CO^2+CE^2+KE^2 = PC^2+CK^2$, sed $PO^2+CE^2 = BC^2$, $CO^2+KE^2 = AC^2$ Ergo $PC^2+CK^2 = AC^2+BC^2$. Quarumvis Diametrorum conjugatarum quadrata æqualem summam facient ac quadrata axium.

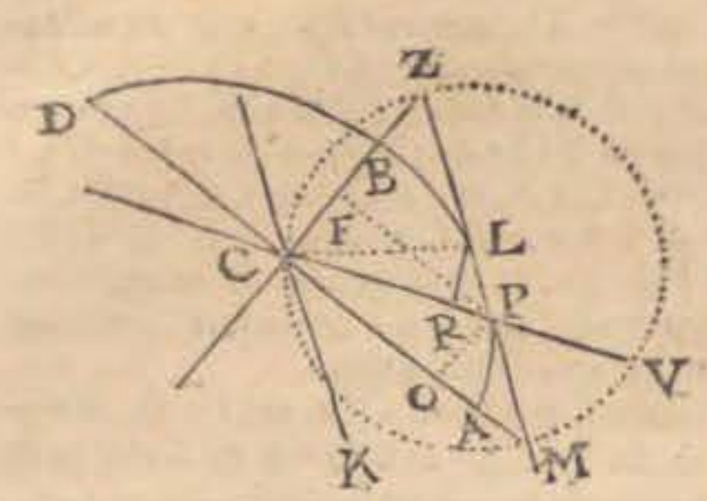
Denique si punctum O in axi ita sit sumptum ut sit $\frac{1}{2}CA^2 = CO^2$ & sit ducta in O ejus ordinata & per ejus verticem P ducatur Diameter ejusque conjugata, quadratum abscissæ quæ respondebit vertici Diametri conjugatæ erit æquale $AO\times DO$ sive $AC^2-CO^2$ sed $CO^2 = \frac{1}{2}CA^2$ per hypothesim, ergo hoc quadratum erit etiam æquale $\frac{1}{2}AC^2$, eadem ergo abscissa ac proinde æquales ordinatæ verticibus utriusque Diametri respondebunt, æquales ergo erunt illæ Diametri conjugatæ siquidem sunt Hypothenusæ æqualium abcissarum & Ordinatarum.

Cor. I. Si à vertice Diametri PC, producatur Tangens terminata utrinque in M & Z, ad Diametros conjugatas CA, CB productas, erit semiDiameter CK prioris conjugata media proportionalis inter partes Tangentis PM PZ: Ductis enim ordinatis PF PO, ob similia Triangula CKE, ZFP, POM,
est CK:CE = ZP:FP (sive CO)
& CK:CE = PM:MO unde compositis rationibus est
$CK^2:CE^2 = ZP\times PM:CO\times MO$, sed $CO\times MO = AO\times DO$ (per Cor. 3. Lem. V.) & $AO\times DO = CE^2$ per præsens Theorema, ergo $CK^2:CE^2 = ZP\times PM:CE^2$ & $CK^2 = ZP\times PM$ sive ZP:CK = CK:PM. Q. E. D.

Et conversa per se liquet, nempe quod si duæ Diametri occurrant Tangenti ductæ in Vertice alterius Diametri, ita ut hujus $\frac{1}{2}$ Diameter conjugata sit media proportionalis inter partes tangentis, duæ illæ priores Diametri erunt inter se conjugatæ.

DE MOTU CORPORUM.

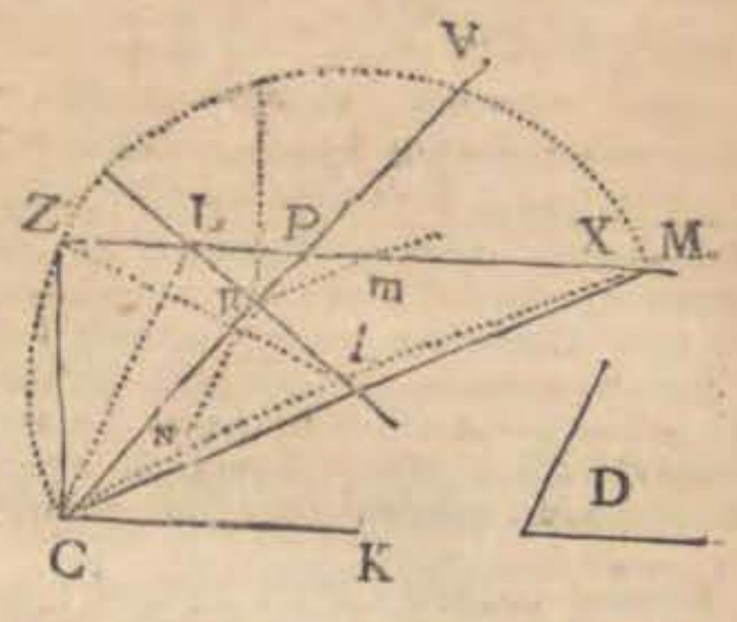
**Problema.** Datis tàm positione quam magnitudine Ellipseos alicujus non descriptæ duabus Diametris conjugatis invenire positionem & magnitudinem duarum aliarum Diametrorum conjugatarum, quæ faciant inter se angulum quemvis datum.




Primus Casus: Angulus qui datur sit rectus, h. e. Diametri quæsitæ sint Axes conjugati. Sint verò semi-Diametri datæ CP CK, per verticem P unius ducatur linea alteri CK parallela, quæ ideo erit Ellipsis Tangens in eo puncto. (per Lem. IV.) producatur CP in V ita ut sit CP: CK = CK: PV, in medium R lineæ CV erigatur perpendicularis tangentem secans in L, & ex L velut Centro radio LC qui æqualis est LV; describatur circulus transiens per puncta C & V, & Tangentem secans in punctis Z & M, dico lineas ZC MC, esse in axium positione.

*Demonst.*... Angulus enim ZCM est rectus quia est in semi-circulo per constructionem, præterea quia chordæ CV ZM sese secant in P est CP × PV = ZP × PM (per 35. 3. Elem.) sed CP × PV = CK² per constructionem, ergo CK² = ZP × PM ideoque, per Corollarii præcedentis conversam, lineæ CZ, CM, caduat secundum Diametros conjugatas.

Sec. Casus. Si angulus datus D rectus non sit, centrum circuli describendi non erit in L sed in alio puncto l ejusdem lineæ RL in medio R lineæ CV perpendicularis, sic verò invenitur, ducatur ex R perpendicularis in Tangentem fiatque cum eâ angulus æqualis dato, & linea eum formans secet Tangentem in m, ducatur LC, & per R linea RN ipsi Parallela, ex C ut centro, radioque æquali Rm secetur RN in N, ductæque CN quæ secet LR in l erit l centrum circuli ex quo si radio lC circulus describatur is transibit per C & etiam per V (per const. & 1. 3. Elem.) secabit verò Tangentem in punctis Z & M, é quibus ductis CZ, CM habetur Diametrorum quæsitarum positio.

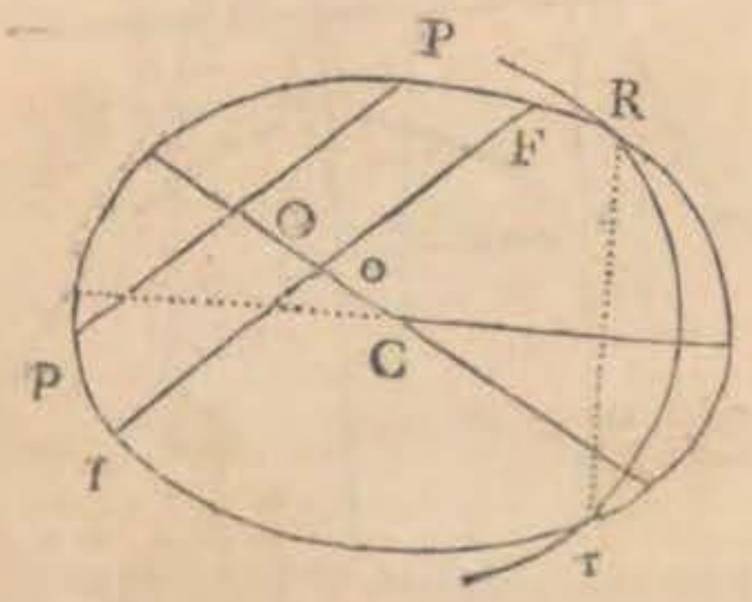



*Demonst.* Evidens est, sicut in priore hujus demonstrationis parte, lineas CZ CM, cadere secundum Diametros conjugatas, quæstio est utrum faciant in C angulum datum, ex centro l ducatur linea parallela lineæ Rm, dico illam occurrere Tangenti in puncto M, hoc est illam fore æqualem radio lM sive lC, occurrat enim Tangenti in X erit ob Parallelas LR : Rm = Ll : lX; sed propter Parallelas RN & LC triangula NlR ClL, sunt similia, estque lR : lN = Ll : lC, & sumptis vel differentiis vel summis terminorum utriusque rationis est LR : CN = Ll, lC est verò per constructionem CN = Rm ergo LR : Rm = Ll : lC ergo Ll : lX = Ll : LC, scilicet est lX = lC, hoc est X cadit in M; radius ergo lM cum sit Parallelus lineæ Rm, faciet cum perpendiculari quæ in lineam ZM duceretur eumdem angulum quem format linea Rm cum perpendiculari in eamdem lineam ductâ, angulum nempe quæsitum: & angulus ZlM ejus erit duplum; sed angulus ZCM est anguli ZlM dimidium, ergo est æqualis angulo quæsito.

Determinatur autem Diametrorum magnitudo, ductis ex P in utramq. Diametrum ordinatis PO, PF lineis CZ, CM, Parallelis; ½ Diametri enim erunt mediæ proportionales inter abscissas à centro, & lineas à centro ad Tangentem sumptas, hoc est, erit CO : CA = CA : CM, & CF : CB = CB : CZ; undè cum cognoscantur CO & CM, CF & CZ determinantur CA & CB.

Cor. I. Datis axibus foci inveniuntur si ex-

ex vertice axis minoris, ut centro, cum radio æquali semi axi majori ipse major axis secetur, & datis focis & axi majori puncta quotlibet ad Ellipsim pertinentia inveniri possunt, si ab uno foco ducatur ut libet linea æqualis axi majori & ab ejus extremitate ducatur linea ad alterum focum, fiat in hoc foco super hanc lineam angulus æqualis angulo qui sit inter lineas à focis ductas, secabitur prima linea in puncto ad Ellipsim pertinente.

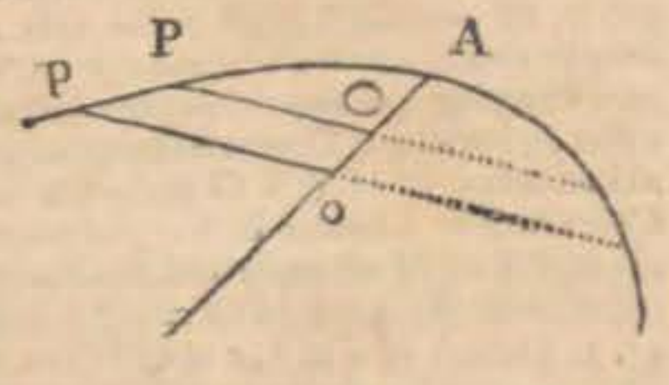



Cor. II. Si Ellipsis sit data, sic inveniuntur centrum & Axes: ducantur ut lubet duæ Parallelæ P p, F f, per earum medium O: o, ducatur linea, erit Diameter, ejus medium C erit Centrum ex quo describatur circulus qui secet curvam in duobus punctis R r ducatur per centrum linea perpendicularis in lineam R r quæ eam bifariam dividet (per 3. 3. Elem.) erit ergo Axis, alter axis habetur erigendo lineam huic perpendicularem in Centro ad curvam usque.

### *I X. De Parabola.*

I. Theor. Omnes Diametri Parabolæ sunt infinitæ & inter se Parallelæ: quadrata ordinatarum sunt inter se ut Abscissæ Diametrorum, & cum tertia proportionalis abscissæ & ordinatæ dicatur Latus Rectum, factum lateris Recti per abscissam est æquale quadrato ordinatæ, hincque derivatur nomen hujus curvæ. (Apol. lib. 1. Prop. 20.)

*Dem.* Ducatur in basi coni chorda parallela plano Parabolæ, & infinitè parva, per verticem coni & eam chordam ducatur Planum & aliud illi parallelum per unam é lineis Parabolæ in hoc plano formabitur Hyperbola, sed quam proxima Parabolæ, & cujus centrum tanto magis à Vertice coni removetur quo minor est chorda per quam transit planum per Verticem coni ductum, evanescat hæc chorda, centrum ejus Hyperbolæ in infinitum abibit, & ut Planum verticale fiet tangens cono, coincidet hæc Hyperbola cum Parabolâ, sed omnes ejus Diametri à puncto infinitè remoto divergentes erunt Parallelæ & infinitæ, tales ergo etiam erunt Diametri Parabolæ. Præterea ex casu 2^do^. Lem. III. constat quod si secans infinita plures lineas Parallelas in Sectione Conicâ secet, abscissæ erunt inter se ut facta partium linearum Parallelarum, sed hæ bifariam dividuntur à Diametro, sunt ergo Diametri abscissæ sicut quadrata ordinatarum.

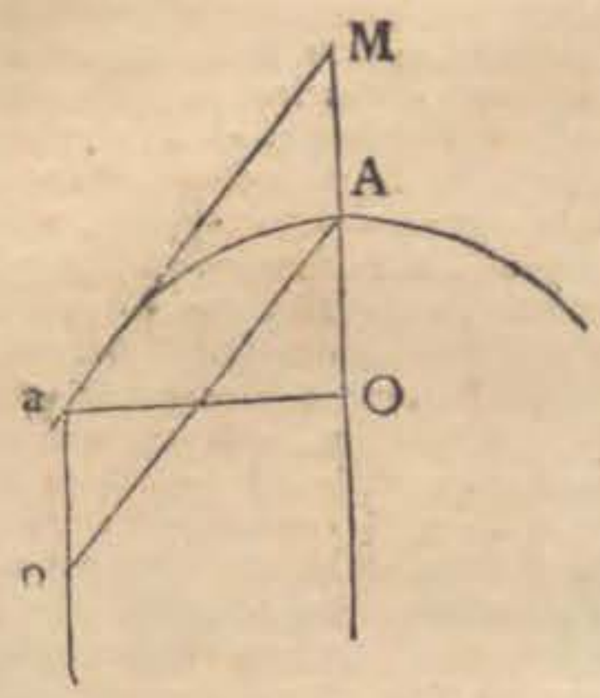



Fiat $AO$, $OP = OP$: $L$ erit $OP^2 = AO \times L$; esto verò quævis alia abscissa $Ao$ & ordinata $op$ erit $AO : Ao = OP^2 : op^2$, & multiplicando primam rationem per $L$ erit $L \times AO : L \times Ao = OP^2 : op^2$, sed per Hypothesim $AO \times L = OP^2$ ergo etiam $L \times Ao = op^2$ hoc est factum Lateris recti per quamvis abscissam æquale est quadrato ordinatæ ipsi respondenti.

Cor. I. Si in Diametrum productam sumatur à Vertice longitudo æqualis lateri Recto, & ab ejus extremo ad extremum abscissæ describatur semi circulus, & in vertice diametri Parabolæ erigatur Perpendicularis ad circulum usque, erit hæc perpendicularis æqualis ordinatæ ad eam abscissam pertinenti.

Cor. II. Si in Diametro quâvis sumatur à vertice quarta pars ejus Lateris recti, ordinatim applicata illi puncto erit æqualis lateri recto. Sit enim $Ao = \frac{1}{4}L$ est $\frac{1}{4}LL = op^2$: ergo $LL = 4op^2$ & $L = 2op$, sive toti ordinatim applicatæ in $o$.

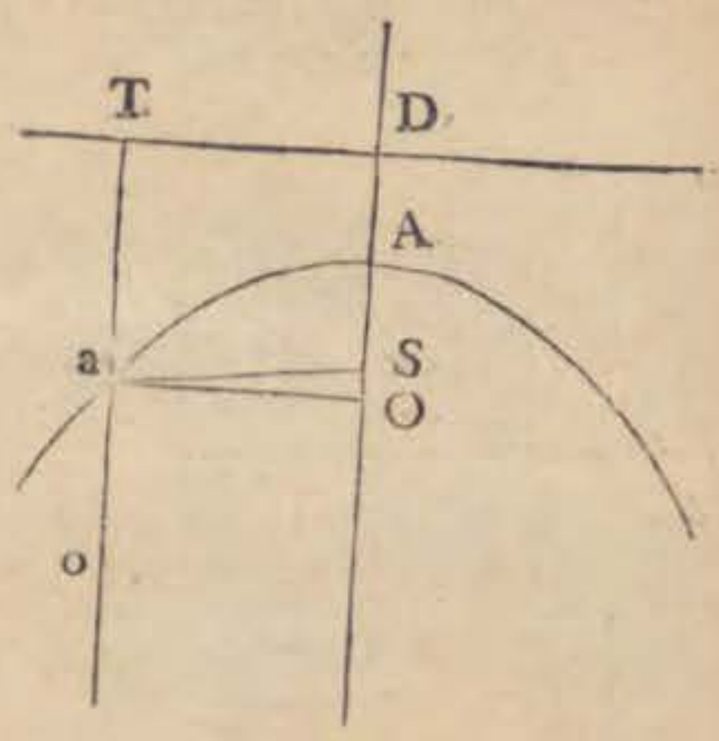
DE MOTU CORPORUM.




Cor. III. Latus Rectum Diametri cujusvis est æquale Lateri recto axis & quadruplo abscissæ axis determinatæ per ordinatam è vertice Diametri in axem ductam, Ducatur ex vertice a Diametri tangens a M quæ axi occurrat in M & a O ordinata axi, per Corollarium Lemmatis V. distantia verticis axis A ad M est æqualis distantiæ ejusdem verticis ab O, ergo $MO = 2AO$, & (per 47. 1. Elem.) est $aM^2 = MO^2$ (sive $4AO^2$) $+ aO^2$ (sive $L \times AO$) $= \overline{4AO + L} \times AO$; à vertice A axis ducatur ordinata A o ad Diametrum propositam, evidens est ob parallelas a o, A O, & Tangentem ordinatæ parallelam, esse $ao = AM$ sive $AO$ & $oA = aM$; sit verò $l$ latus Rectum Diametri a o, erit $oA^2$, sive $aM^2 = l \times ao = l \times AO$ sed erat $aM^2 = \overline{4AO + L} \times AO$ ergo $l \times AO = 4AO + L \times AO$, unde $l = L + 4AO$. Q. E. D.

Theor. II. Si in axe sumatur à vertice quarta pars ejus lateris recti, id punctum vocatur Parabolæ focus, si verò ultrâ verticem eadem feratur longitudo & per punctum in quo cadit ducatur linea axi perpendicularis, dicetur Directrix Parabolæ: Si autem producatur quævis Diameter ad Directricem, portio ejus inter verticem & Directricem comprehensa est quarta pars lateris Recti ejus Diametri, & est æqualis distantiæ ejus verticis à foco.

*Demonst.* Ut enim Diameter & axis sunt paralleli, ducta perpendiculari a T à vertice diametri ad directricem erit $aT = OD =$ $DA + AO$, est verò DA, quarta pars lateris recti principalis & AO abscissa axis quæ respondet ordinatæ aO à vertice Diametri ductæ, est verò (per Corol. 2. Theor. præced.) latus rectum diametri æquale quadruplo lateris recti & quadruplo AO, hoc est $= 4DA + 4AO$ ergo $aT = DA + AO$ est quarta pars lateris Recti Diametri a o.

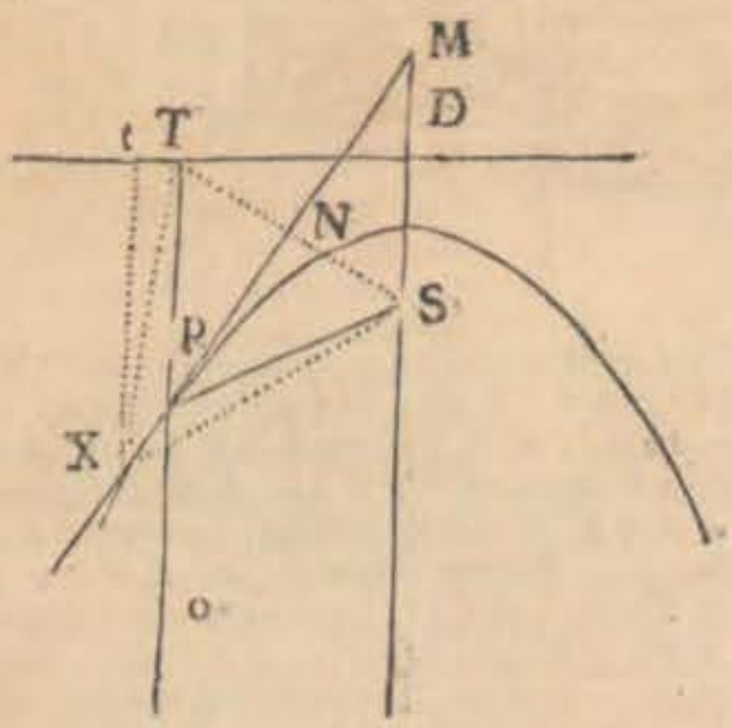


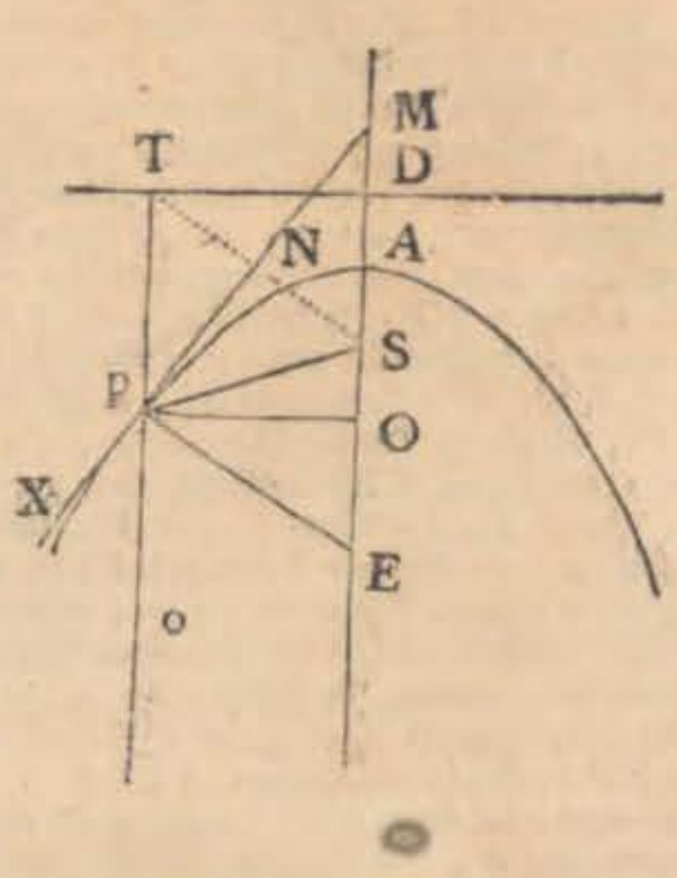

Secundò, E foco Parabolæ S, ad verticem Diametri ducatur S a, sitque ducta aO ordinata axi, (per 47. 1. Ele.) est $Sa^2 = SO^2 + aO^2$ & $aO^2 = 4DA \times AO$: ergo $Sa^2 = SO^2 + 4DA \times AO$, sed est $DO^2$ (per 8. 2. El.) $= SO^2 + 4DA \times AO$, ergo $DO^2 = Sa^2$ & $Sa = DO = aT$.

Theor. III. Si à puncto Parabolæ ducatur perpendicularis ad Directricem, & linea ad focum, bifariamque dividatur Angulus quem faciunt, linea eum dividens erit Tangens in eo puncto, quæ si producatur donec secet axem, portio axis à foco ad occursum Tangentis contenta erit æqualis lineæ à foco ad punctum Parabolæ ductæ: Angulus Diametri cum Tangente erit æqualis angulo lineæ à foco ductæ cum eâ Tangente, ideo ea quæ secundum Diametros ad Parabolam adpellunt ad focum reflectentur, & Angulus Diametri cum lineâ à foco ductâ bifariam dividitur per perpendicularem ad curvam: Si ea perpendicularis secet axem, pars axis inter eam & ordinatam axi ex Vertice Diametri ductam, est æqualis dimidio lateris recti principalis, & pars axis inter eam & Tangentem comprehensa, est dimidium lateris Recti Diametri, ipsa verò per-

perpendicularis eſt media Proportionalis inter ea ſemilatera recta.






*Demonſt.* Sit T D directrix, à puncto P linea P T perpendicularis in Directricem ducatur, ducatur etiam ad focum linea P S & denique ducatur linea P N bifariam dividens angulum S P T; illa linea perpendiculariter & bifariam dividet lineam S T à foco ad punctum T ductam. Ex quovis puncto X lineæ P N ducantur lineæ X T, X S, erunt inter ſe æquales (per 4. 1. Elem.), erit verò X T directrici obliqua ideoque perpendicularis ab X in Directricem demiſſa erit brevior quam X T ac per conſequens brevior quam X S, ergo id punctum X vicinius erit Directrici quam foco, erit ergo extra Parabolam, ideoque linea P N erit Tangens, cum in unico puncto P Parabolæ occurrat.

Anguli autem T P N, N M S ſunt æquales ob Parallelas T P, M S, & per conſt. T P N = N P S, ergo N M S = N P S, eſt ergo Triangulum M S P Iſoſceles, & M S = S P.

Anguli autem X P o, T P N, per verticem ſunt oppoſiti, ergo ſunt æquales, ſed T P N = N P S per conſtr. ergo X P o = N P S.

Dividatur bifariam angulus S P o per lineam P E ita ut ſit o P E = E P S; erit X P o + o P E = N P S + E P S hi quatuor valent duos rectos, ergo X P o + o P E valent rectum & eſt P E perpendicularis in Tangentem.

Eſt ergo in Triangulo Rectangulo M P E (ductâ perpendiculari P O); M O : P O = P O : O E = $\frac{PO^2}{MO}$, eſt verò $PO^2 = L \times AO$ & $MO = 2AO$ ergo $OE = \frac{L \times AO}{2AO} = \frac{L}{2}$.

Ergo etiam E M eſt æqualis dimidio lateris Recti Diametri P o, eſt enim ejus Latus Rectum æquale lateri Recto principali & quadruplo abſciſſæ A O, eſt verò O E dimidium lateris Recti Principalis & M O = 2 A O, ſive dimidium quadrupli A O, ergo E M = $\frac{1}{2}$ l.

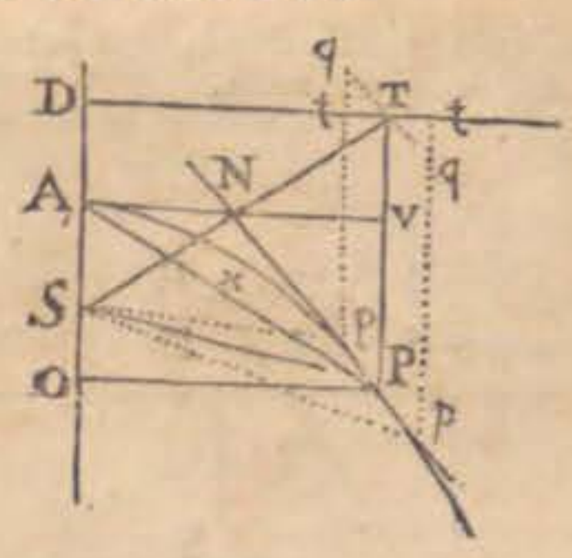
Eſt etiam ob Triangulum Rectangulum M P E, E M : P E = P E : O E; ergo eſt P E hoc eſt perpendicularis in curvam, media proportionalis inter ſemilatus rectum Diametri & ſemilatus rectum Axis.

Theor. IV. Superficies Parabolica inter curvam, abſciſſam axis & ejus ordinatam comprehenſa, eſt ad factum abſciſſæ per Ordinatam ut duo ad tres, ſegmentum verò Parabolicum inter curvam & chordam à Vertice ductam terminatum eſt ejuſdem facti ſexta pars.

DE MOTU CORPORUM.

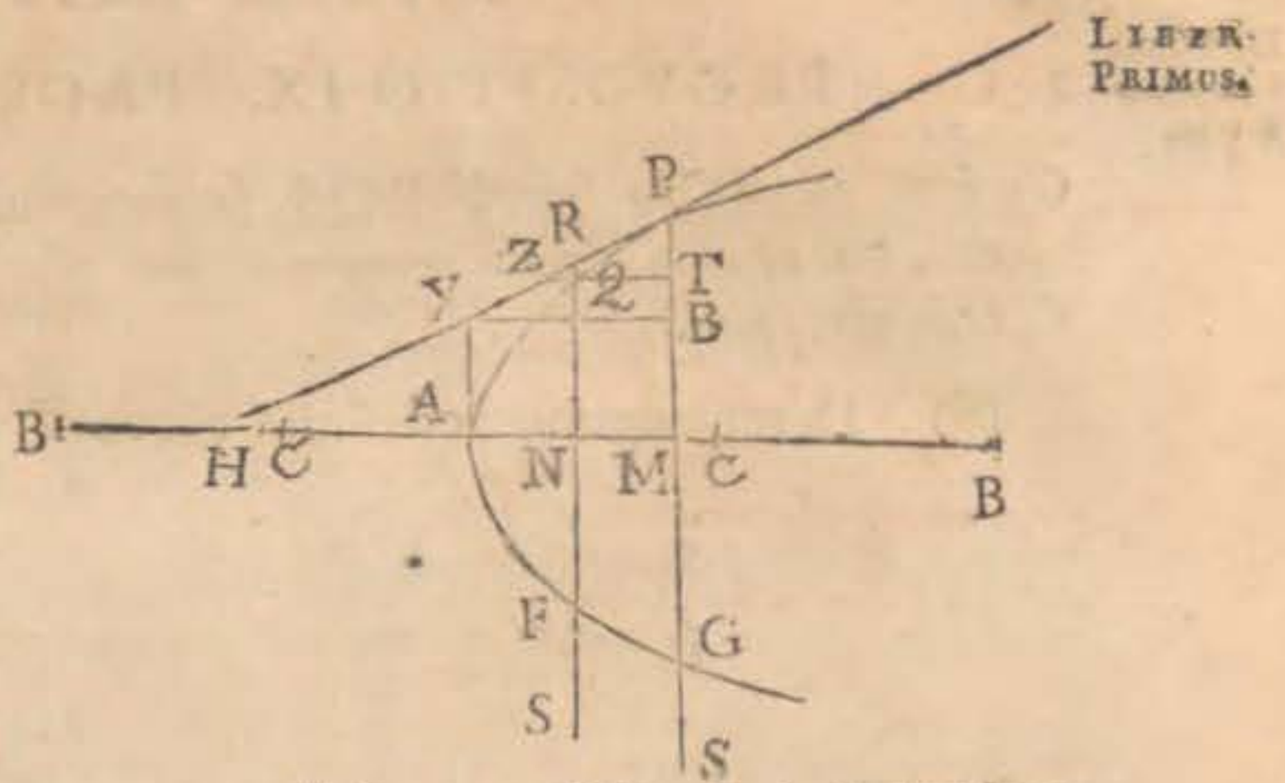
*Demonſt.* Ex foco S ducatur S P ad quodvis Parabolæ punctum P & ex P ducatur P T ad directricem perpendicularis, ducatur Tangens in puncto P, & in ea ſumantur puncta p, p puncto P proxima & utrinque à puncto P æqualiter diſſita, ab iis ducantur ad focum lineæ S p S p, & p q, p q lineæ P T parallelæ & æquales; ducaturque q T q, habebitur Parallelogrammum p q q p, cujus baſis p p eſt eadem cum baſi Trianguli S p p; ſi verò ducatur S T, quam Tangens P N, bifariam & perpendiculariter dividit in N, erit S N altitudo Trianguli S p p, & N T = S N, altitudo Parallelogrammi p q q p, cum ergo baſes & altitudines ſint æquales, (per 41. 1. Elem.) erit Parallelogramma p q q p duplum Trianguli S p p, ſed eſt p q q p æquale Trapezio t p p t, cum ergo tota ſuperficies D A X P T talibus Trapeziis t p p t conſtet, & ſuperficies A S P X, talibus Triangulis S p p, erit ſuperficies D A X P T dupla ſuperficiei A S P X.

Si verò ducatur A V Tangens in A & chorda A P, erit Parallelogrammum D A V T, duplum Trianguli A S P, baſes enim A D, A S ſunt æquales, altitudo verò




Trianguli eſt P O, parallelogrammi A V & P O = A V: ſi ergo D A V T ex D A X P T detrahatur, & A S P ex A S P X, reſiduum primæ figuræ A X P V erit duplum ſegmenti A P X in altera reſidui, hæc verò ſimul ſumpta faciunt Triangulum A V P, vel A O P, quod eſt ergo triplum ſegmenti A P X, & tota figura A O P V ejus ſextuplum, & area Parabolica A o P X, ejus quadruplum, eſt ergo area Parabolica ad Parallelogrammum A O P V ut 4. ad 6. ſive ut 2. ad 3. Q. E. D.

HIS verò circa Conicas Sectiones ad mentem revocatis, sine quibus sequentia intelligi nequeunt, probabitur, *vim centripetam quâ corpus tendens ad punctum remotissimum Sectionem Conicam describit, esse reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium tendentis*: Corpus P moveatur in Sectione conicâ PAF, & vis centripeta agat juxtà directionem parallelarum P S, R S, axi A B applicatarum. Linea P H, Sectionem tangat in P, sintque Z T, X B, axi parallelæ, & X A ipsa Tangens in A, & ob similia triangula X P B, Z T P, Z Q R, erit




$PX : BX$ (seu $AM$) $= PR : QT$ & $PX^2 : AM^2 = PR^2 : QT^2$, & (per Prop. 16. lib. 3. Conic. Appoll. quæ est Cor. 2. Lem. III. de Conicis) $PR^2 : QR \times FR = PX^2 : AX^2$, adeòque $PR^2 = \frac{PX^2 \times QR \times FR}{AX^2}$, ergò $PX^2 : AM^2 = \frac{PX^2 \times QR \times FR}{AX^2} : QT^2$; & $AX^2 : AM^2 = QR \times FR : QT^2$; undè $QT^2 = \frac{AM^2 \times FR}{AX^2} = \frac{AM^2 \times 2PM}{AX^2}$ ubi puncta P, Q, coeunt, & $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{AM^2 \times 2PM \times SP^2}{AX^2}$. Est ergo (per coroll. I. & V. prop. VI^æ.) in omnibus sectionibus conicis vis centripeta reciprocè ut $\frac{AM^2 \times PM \times 2SP^2}{AX^2}$, hoc est, deleto $2SP^2$, constante, reciprocè ut $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2}$.

Porrò ob similitudinem triangulorum HAX, HMP, est $HM : PM = HA : AX = \frac{PM \times HA}{HM}$ & $AX^2 = \frac{PM^2 \times HA^2}{HM^2}$ & $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2} = \frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$, vis igitur est etiam in omni sectione conicâ reciprocè ut $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$.

In Parabolâ (per prop. 35. lib. 1. conic. appoll. sive cor. 1. Lem. V. de Conicis) $HA = AM$, & $HM = 2AM$, & (per prop. 20. lib. 1. conic. Appoll. quæ est Theor. I. de Parabola) AM, adeòque & HM est semper ut $PM^2$. Ergò vis centripeta in parabolâ erit reciprocè ut $\frac{4AM^4}{PM \times AM^2}$ sive ut $\frac{AM^2}{PM}$, hoc est, ut $\frac{PM^4}{PM} = PM^3$, hoc est, reciprocè ut cubus ordinatæ PM.

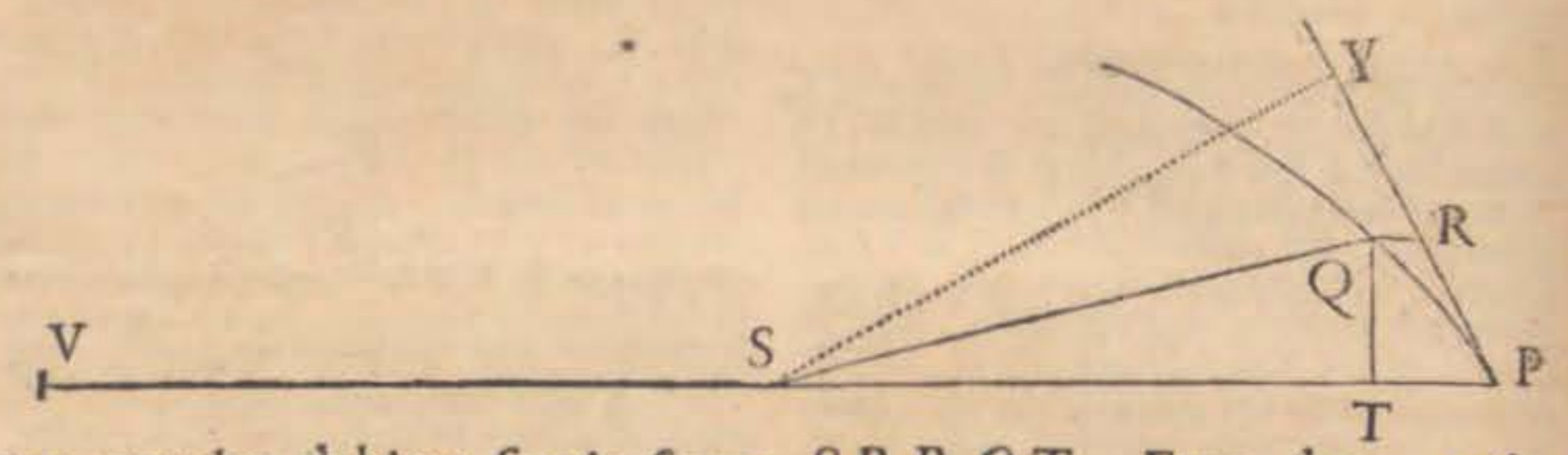
In Ellipsi & Hyperbolâ, si latus rectum axis AB, dicatur L, erit (ex prop. 21. lib. 1. conic. appoll. sive Theor. II. de Ellip.) $PM^2 : AM \times MB = L : AB$ ac proindè $AM = \frac{PM^2 \times AB}{L \times MB}$, & $AM^2 = \frac{PM^4 \times AB^2}{L^2 \times MB^2}$, & $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2} = \frac{PM^3 \times AB^2 \times HM^2}{L^2 \times MB^2 \times HA^2}$, undè deletâ rationе constanti $\frac{AB^2}{L^2}$, erit vis centripeta reciprocè ut $\frac{PM^3 \times HM^2}{MB^2 \times HA^2}$; verùm (per prop. 37. lib. 1. conic. Appoll. sup. cor. 2. Lem. V.) posito centro sectionis C, est $CM : CA = CA : CH$, adeóque dividendo vel componendo $CM : AM = CA : HA$, ac proindè addendo vel detrahendo terminos secundæ rationis è terminis prioris $MB : HM = CA : HA$ & $\frac{HM}{MB \times HA} = \frac{1}{CA}$ & $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2} = \frac{1}{CA^2}$ quæ est quantitas constans. Erit igitur etiam in hyperbolâ & Ellipsi adeóque in omni sectione conicâ vis centripeta reciprocè ut $PM^3$, seu reciprocè ut cubus ordinatæ PM; deletâ nimirum, in expressione vis centripetæ suprà inventâ, quantitate $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2}$, constante.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

*Gyretur corpus in ſpirali* PQS *ſecante radios omnes* SP, SQ, *&c. in angulo dato: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ſpiralis.*

(r) Detur angulus indefinite parvus $PSQ$, & ob datos om-




nes angulos dabitur ſpecie figura $SPRQT$. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut $QT$, hoc eſt (ob datam ſpecie figuram illam) ut $SP$. Mutetur jam utcunque angulus $PSQ$, & recta $QR$ angulum contactus $QPR$ ſubtendens mutabitur (per lemma XI.) in duplicatâ ratione ipſius $PR$ vel $QT$. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc eſt ut $SP$. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ eſt ut $SP\ cub.$ ideoque (per corol. I. & 5. prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut cubus diſtantiæ $SP$. *Q. E. I.*

(r) 225. Ob omnes angulos datos, dabitur ſpecie figurâ SPQRT, & ipſius latera omnia erunt inter ſe in datâ ſeu conſtanti ratione, ergò datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque proindè $\frac{QT}{QR} \times QT$, ut $QT$ hoc eſt, ob datam rationem QT, ad SP, erit $\frac{QT^2}{QR}$ ut SP, mutetur jam utcumque angulus PSQ, & manebit $\frac{QT^2}{QR}$, ut SP. Nam QR, ubi angulus PSR conſtans eſt dicatur a, & QT dicatur b; ubi verò angulus PSR utcumque mutatur, QR dicatur x, & QT dicatur y, & erit per Lem. XI. $a : x = b^2 : y^2$, adeóque $\frac{b^2}{a} = \frac{y^2}{x}$ hoc eſt $\frac{y^2}{x}$ ſeu $\frac{QT^2}{QR}$ eadem manet quæ priùs nimirùm ut SP. Quoniam autem evaneſcente angulo PSR, ſive coeuntibus punctis Q, P, recta SR, rectæ SP parallela evadit, erit per coroll. 1. & v. prop. VI^æ. vis centripeta reciprocè ut $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$, ac proindè ſubſtituendo SP, loco $\frac{QT^2}{QR}$, vis centripeta erit reciprocè ut $SP^3$.

## *Idem aliter.*

(t) Perpendiculum $SY$ in tangentem demiſſum, & circuli ſpiralem concentricè ſecantis chorda $PV$ ſunt ad altitudinem $SP$ in datis rationibus; ideoque $SP$ *cub.* eſt ut $SY q \times PV$, hoc eſt (per corol. 3. & 5. prop. VI.) reciprocè ut vis centripeta.

## LEMMA XII.

*Parallelogramma omnia circa datæ ellipſeos vel hyperbolæ diametros quaſvis conjugatas deſcripta eſſe inter ſe æqualia.*

Conſtat ex conicis. (y)

## PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

*Gyretur corpus in ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipſeos.* (z)

(t) 226. Sit circuli ſpiralem oſculantis in P chorda per centrum virium S ducta P V, demiſſumque in tangentem perpendiculum S Y, & ob angulum S Y P, rectum, & S P Y, datum, dabitur ſpecie triangulum S P Y. Ergò datur ratio S Y ad S P, & in virium centripetarum formulis S P ſcribi poteſt pro S Y. Præterea datur ratio P V ad S P, nam (210) $SY \times QP = SP \times QT$, adeóque $QP = \frac{SP \times QT}{SY}$; undè ob rationem $\frac{SP}{SY}$ datam, Q P ſcribi poteſt pro Q T. Verùm (211) $PV = \frac{QP^2}{QR}$, ergò P V, eſt ut $\frac{QT^2}{QR}$. Cum igitur ex demonſtratis in Prop. IX. $\frac{QT^2}{QR}$ ſit ut S P, erit etiam P V, ut S P, & propterea S P, loco P V, ſubſtitui poteſt in formulis.

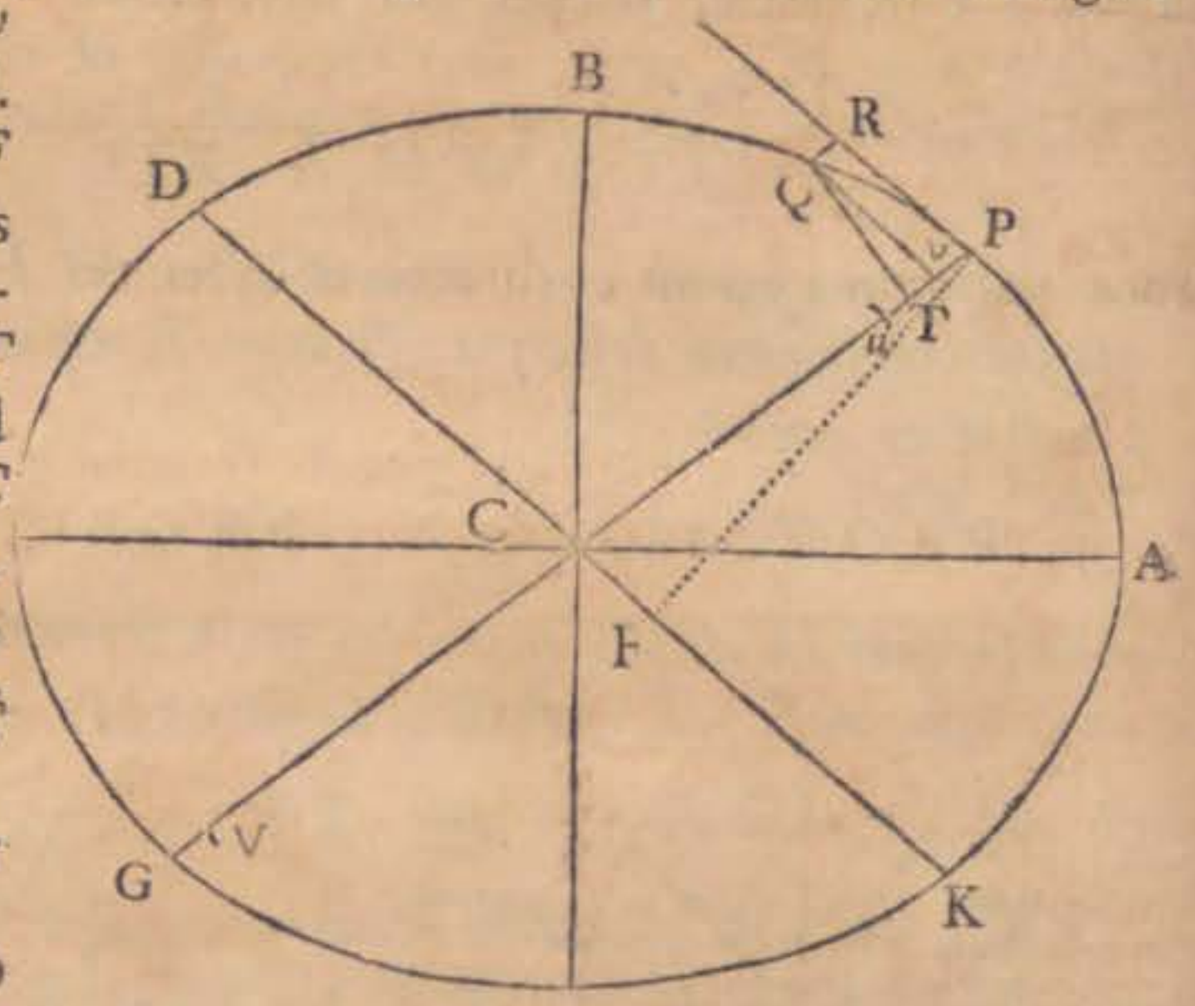
227. Scholion. Propoſitio IX. facilè demonſtratur etiam per formulam Hermanni (214), $v = dp : p^3 dz$; eſt enim in hoc caſu $SP = z$, $SY = p$; & ſi ratio $\frac{SY}{SP}$ data dicatur $\frac{a}{b}$, erit $\frac{a}{b} = \frac{p}{z}$ ergo $az = bp$, & (160) $a\,dz = b\,dp$, & $\frac{dp}{dz} = \frac{a}{b}$; undè $v = \frac{a}{b\,p^3}$; hoc eſt, ob datam $\frac{a}{b}$ vis centripeta v, eſt directè ut $\frac{1}{p^3}$, hoc eſt reciprocè ut $p^3$, aut quia $p = \frac{z\,a}{b}$, v erit ut $\frac{1}{z^3}$ directè, reciprocè autem ut $z^3$, deletis nimirùm conſtantibus.

(y) Demonſtratio hujus Lemmatis inferius tradetur ubi nempe Newtonus eo Lemmate ad ſolutionem proximi Problematis utetur.

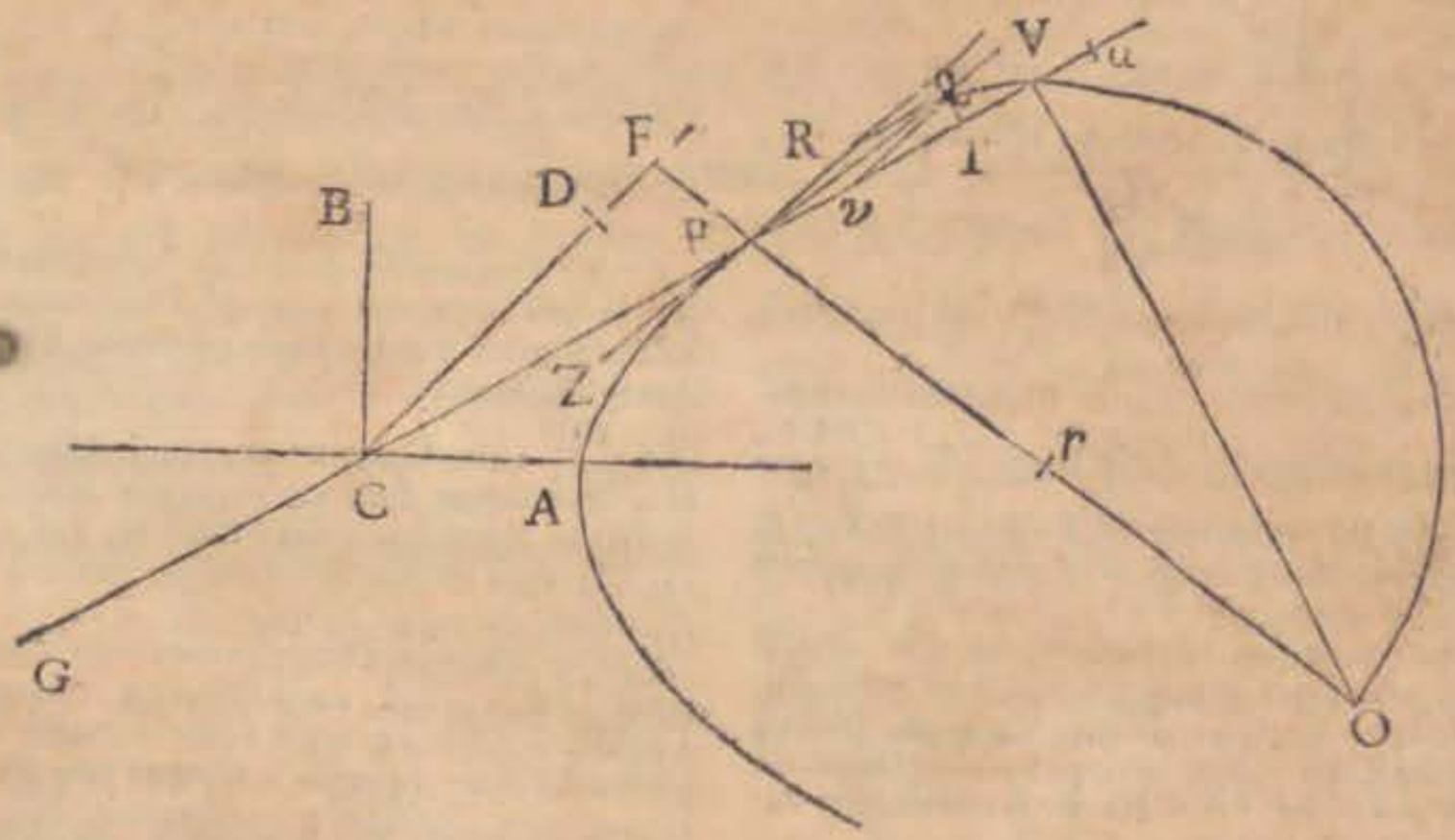
(z) 228. Gyretur corpus in Hyperbolâ, invenietur Lex vis centralis ſpectantis centrum Hyperbolæ ſimili modo, niſi quod vis illa ejus centri reſpectu ſit centrifuga, quoniam centrum Hyperbolæ non eſt intra Hyperbolam conſtitutum, ſed Hyperbola verſus illud convexitatem obvertit; Legatur ſi lubet utraque ſolutio hujus Problematis & ad figuram infrà poſitam in quâ Hyperbola deſcripta eſt referatur, liquebit verè dici de Hyperbolâ ea quæ Newtonus de Ellipſi ſtatuit.

DE MOTU CORPORUM.

Sunto $CA$, $CB$ semiaxes ellipseos; $GP$, $DK$ diametri aliæ conjugatæ; $PF$, $QT$ perpendicula ad diametros; $Qv$ ordinatim applicata ad diametrum $GP$; & si compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit ((a) ex conicis) rectangulum $PvG$ ad $Qv$ *quad.* ut $PC$ *quad.* ad $CD$ *quad.* & (ob similia triangula $QvT$, $PCF$) $Qv$ *quad.* est ad $QT$ *quad.* ut $PC$ *quad.* ad $PF$ *quad.* & conjunctis rationibus, rectangulum $PvG$ ad $QT$ *quad.* ut $PC$ *quad.* ad $CD$ *quad.* & $PC$ *quad.* ad $PF$ *quad.* id est, $vG$ ad $\frac{QT\ quad.}{Pv}$ ut $PC$ *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq.}{PCq}$




Scribe $QR$ pro $Pv$, & (per lemma XII (b)) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$




(a) *Ex Conicis*, per 21. 1. lib. Apoll. Vide Sup. Lemma IV. de Conicis.

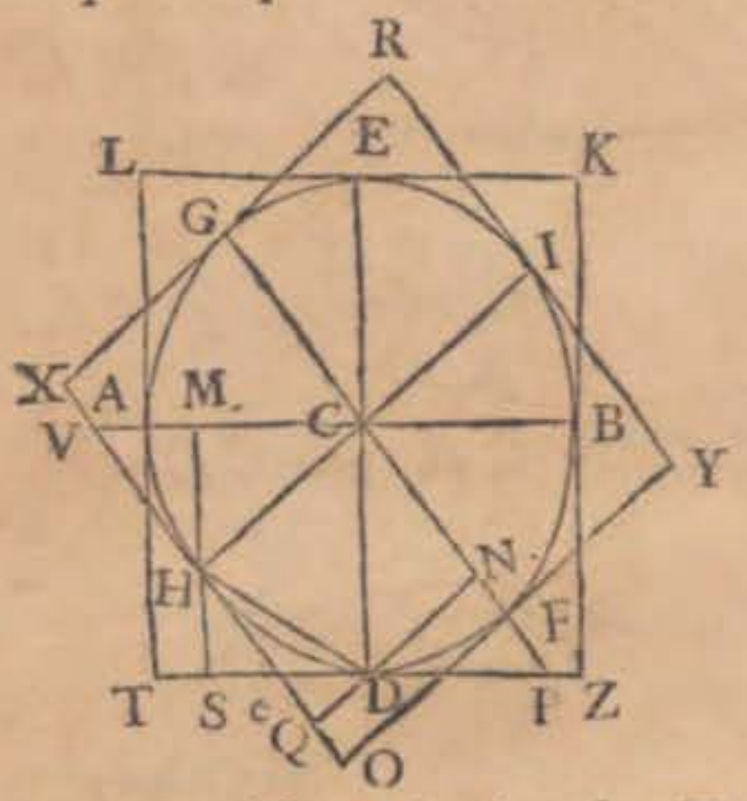
(b) 229. *Parallelogramma omnia circa datæ Ellipseos vel Hyperbolæ Diametros quas-*

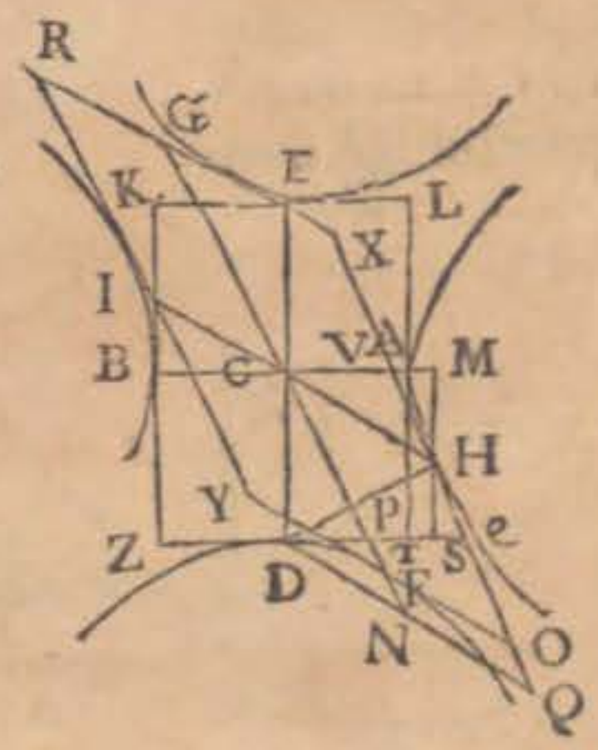
*vis*

nec non (punctis $P$ & $Q$ coeuntibus) $2PC$ pro $vG$, & ductis extremis & mediis in se mutuo fiet $\frac{QT\,quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (per corol. 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id est (ob datum $2BCq \times CAq$) reciprocè ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directè ut distantia $PC$. $Q.E.I.$

*Idem aliter.*

In rectâ $PG$ ab alterâ parte puncti $T$ sumatur punctum $u$ ut $Tu$ sit æqualis ipsi $Tv$; deinde cape $uV$, quæ sit ad $vG$ ut est



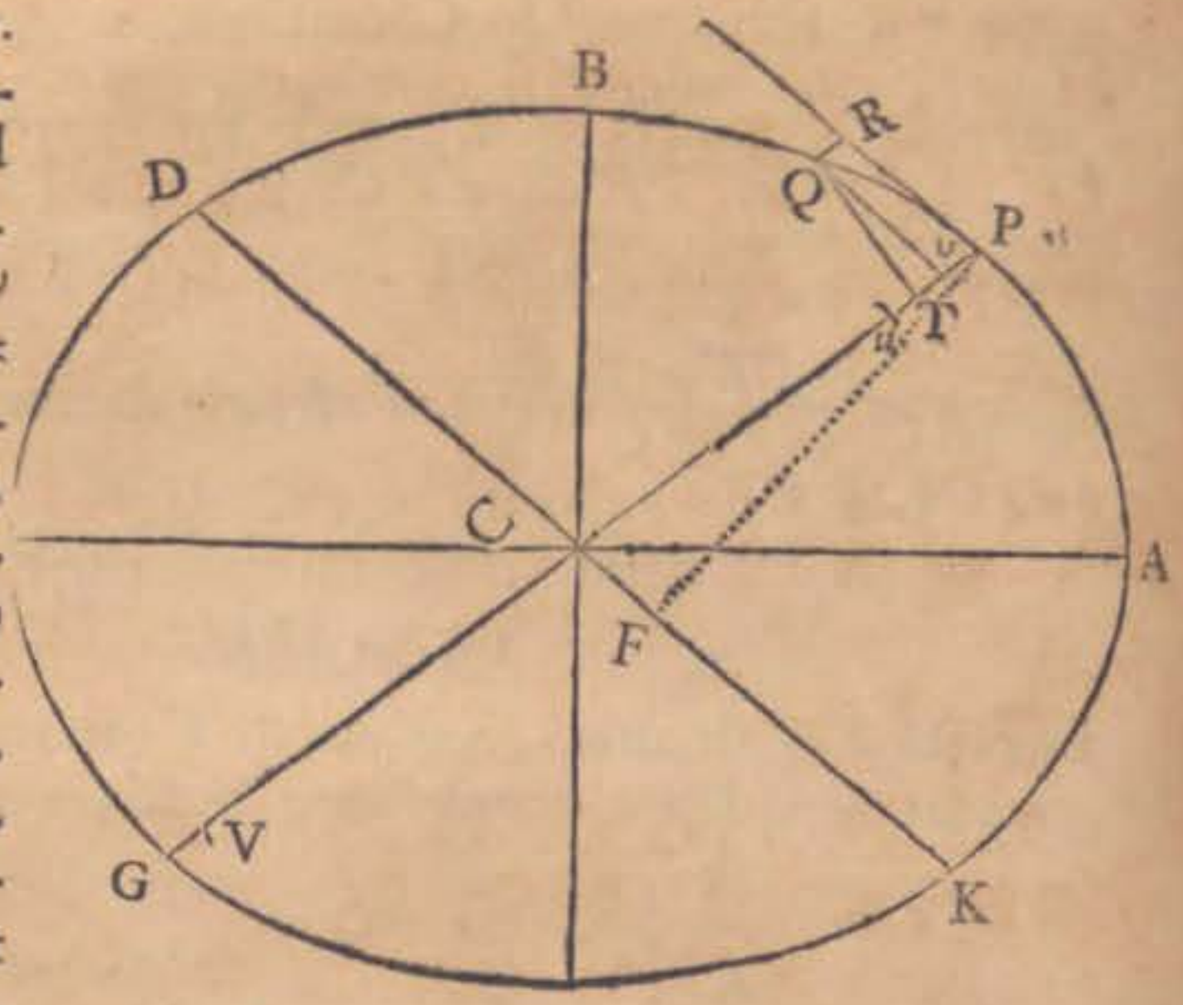



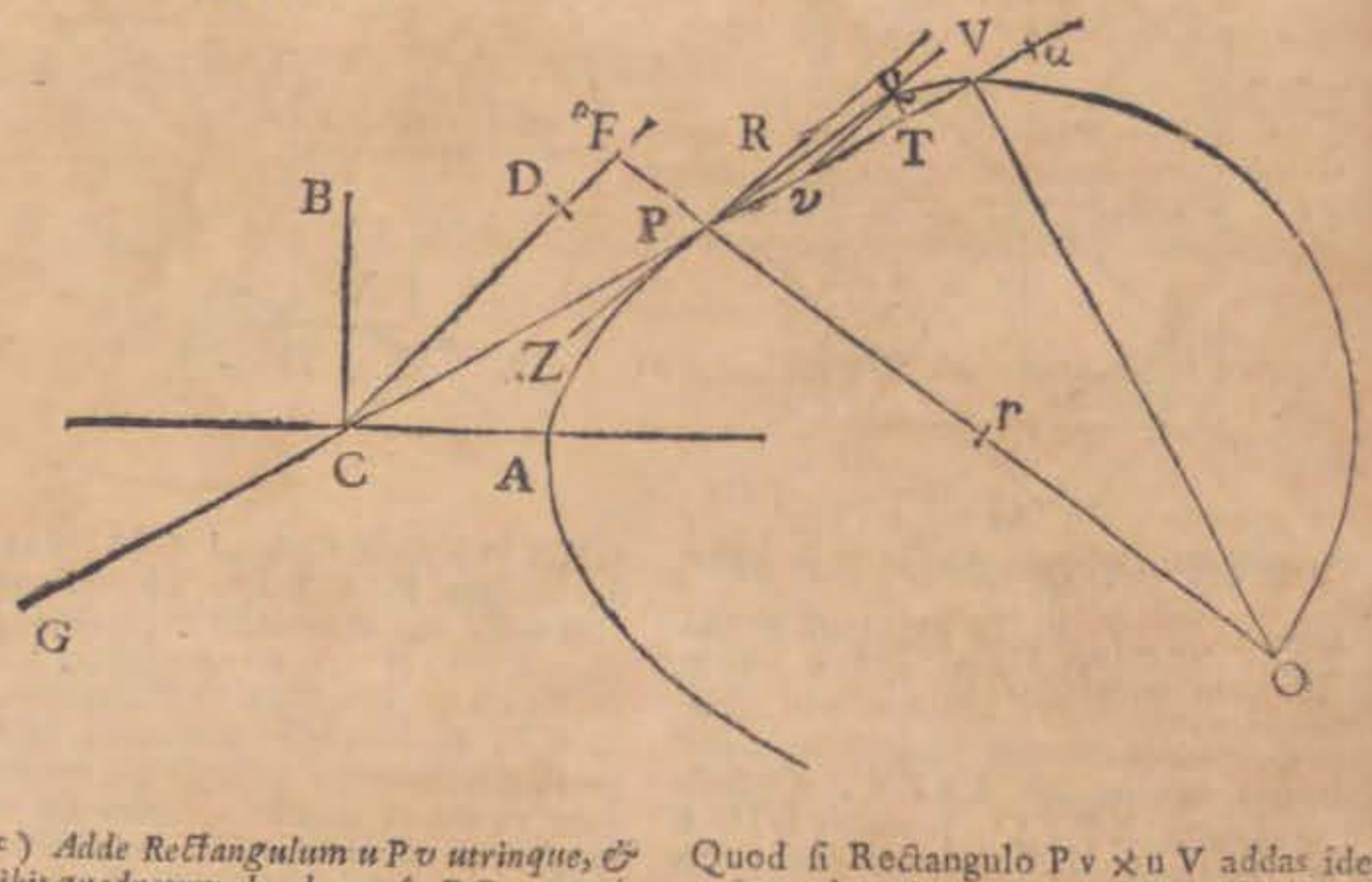

*vis conjugatas descripta sunt inter se æqualia.*

Dem . . . . . Sunto Ellipseos & hyperbolæ axes $ED$, $AB$, & $GF$, $HI$, diametri conjugatæ, ductisque per axium & diametrorum extrema tangentibus, describantur rectangulum $LKZT$, & parallelogrammum $XRYO$; jungatur $DH$, & $DN$ ordinatim applicetur ad diametrum $GF$, erit (per prop. 37. lib. 1. conic. Apoll. sup. Cor. 2. Lem. V. de Conicis) $PC$ ad $CF$, (hoc est, parallelogrammum $PCVe$, ad parallelogrammum æquè altum $CHOF$) sicut $CF$, ad $CN$, hoc est, sicut idem parallelogrammum $CHOF$, ad parallelogrammum $CHQN$; & similiter $VC$, erit ad $CA$, (hoc est, parallelogrammum $PCVe$, ad æquè altum, $CATD$) sicut $CA$ ad $CM$, hoc est, sicut idem $CATD$, ad rectangulum $CMSD$, seu ad prædictum parallelogrammum $CHQN$; nam rectangulum $CMSD$, duplum est trianguli $CHD$, ejusdem basis $CD$ ejusdemque altitudinis $MC$, & parallelogrammum $CHQN$ est etiam ejusdem trianguli duplum, cum sit utriusque basis communis $HC$ & eadem altitudo ob parallelas $HC$, $QN$; ac proindè $CMSD = CHQN$. Cum igitur sit $PCVe : CHOF = CHOF : CHQN$, & $PCVe : CATD = CATD : CHQN$, necesse est ut sit $CATD = CHOF$, quarè rectangulum $LKZT$, quadruplum rectanguli $CATD$, æquale est parallelogrammo $XRYO$, etiam quadruplo parallelogrammi $CHOF$. Q.E.D.

DE MOTU CORPORUM.

*DC quad.* ad *PC qu.* Et quoniam ex conicis eſt *Qv quad.* ad *PvG* ut *DC quad.* ad *PC quad.* erit *Qv quad.* æquale *Pv* × *uV*. Adde rectangulum *uPv* utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs (c) *PQ* æquale rectangulo *VPv*; (d) ideoque circulus, qui tangit ſectionem conicam in *P* & tranſit per punctum *Q*, tran-




(c) *Adde Rectangulum uPv utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs PQ, æquale rectangulo VP* × *Pv*. Nam (per conſtruct.) eſt quadratum chordæ arcus $PQ = QT^2 + PT^2$, ſed eſt $QT^2 = Qv^2 - Tv^2$ ſive quia $Tv = Tu$ eſt $QT^2 = Qv^2 - Tu^2$, ideo quadratum chordæ arcus $PQ = Qv^2 - Tu^2 + PT^2$, eſt verò $PT^2 - Tu^2 = PT + Tu \times PT - Tu$ ſive $PT - Tv = Pu \times Pv$, ergo quadratum chordæ arcus $PQ = Qv^2 + Pv \times Pu$. Quod ſi Rectangulo $Pv \times uV$ addas idem rectangulum $Pv \times Pu$, eſt $Pv \times Vu + Pv \times uP = Pv \times VP$, erat verò $Qv^2 = Pv \times uV$, ergo $Qv^2 + Pv \times Pu$ *ſive quadratum chordæ arcus PQ erit æquale Rectangulo* $Pv \times VP$, *ſive* $VPv$.

(d) *Ideòque circulus qui tangit ſectionem in P, & tranſit per punctum Q, tranſibit etiam per punctum V*; nam ductis circuli illius chordis QP, QY, angu-

lus

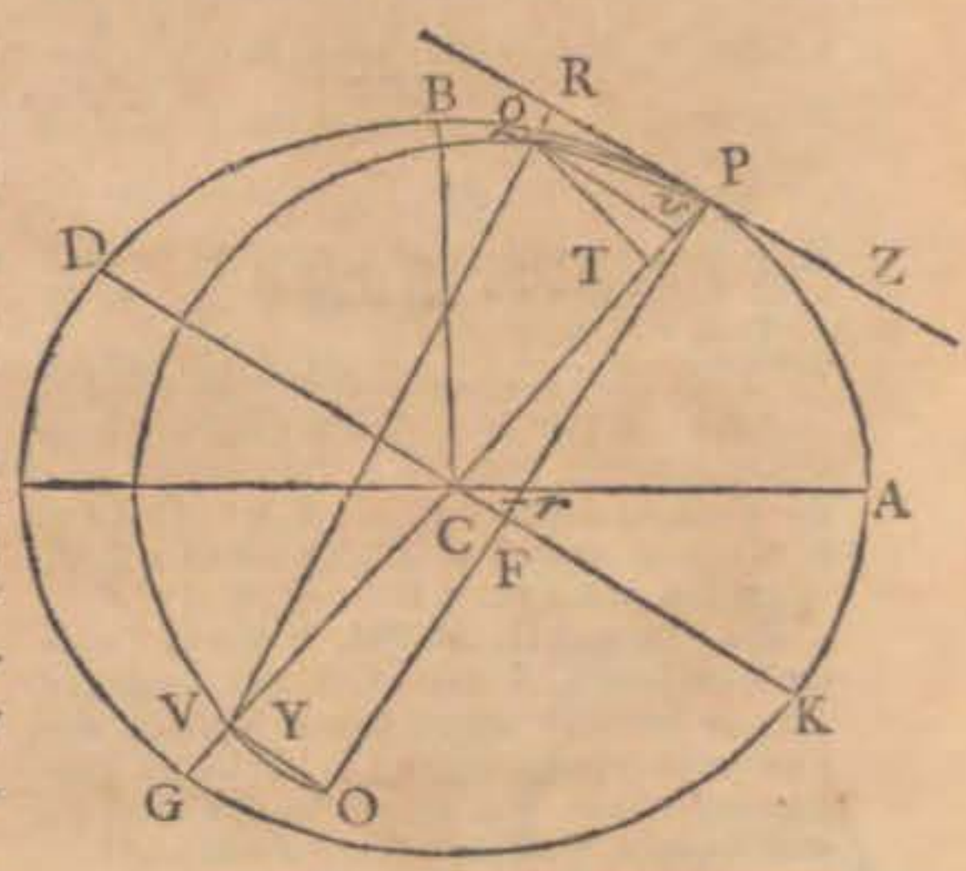
etiam per punctum $V$. Coeant puncta $P$ & $Q$, & ratio $uV$ ad $vG$, quæ eadem est cum ratione $DCq$ ad $PCq$, fiet ratio $PV$ ad $PG$ seu $PV$ ad $2PC$; ideoque $PV$ æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$ Proinde vis, quâ corpus $P$ in ellipsi revolvitur, erit reciprocè ut $\frac{2DCq}{PC}$ in $PFq$ (per corol. 3. prop. VI.) hoc est (ob datum $2DCq$ in $PFq$) directè ut $PC$. $Q.E.I.$

*Corol.* 1. Est igitur vis ut distantia corporis à centro ellipseos: (e) & vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in el-

lus $PQv = QPR$, (ob parallelas $Qv$, $PR$) $= QYP$ (per 32. 3. Elem.) ac proindè duo triangula $PQv$, $PYQ$, quæ communem habent angulum, $QPY$, & æquales $PQv$, $PYQ$, similia sunt, & $Pv : QP = QP : PY$. Undè $PY = \frac{QP^2}{Pv}$; quarè cum sit $Pv \times PV = QP^2$, ideoque $PV = \frac{QP^2}{Pv}$ erit $PV = PY$.

230. Coroll. 1 . . . Ducantur circuli sectionem conicam osculantis diameter $PO$, & chorda $VO$, & ob similitudinem triangulorum $PFC$, $PVO$, erit $PF : PC = PV : PO = \frac{PC \times PV}{PF}$, sed per secundam demonstrationem Newtonianam $PV = \frac{2DC^2}{PC}$, ergò $PO = \frac{2DC^2}{PF}$, ac proindè radius osculi $Pr = \frac{1}{2} PO = \frac{DC^2}{PF}$, & $PF : DC = DC : Pr$. Quarè datis diametris conjugatis eorumque angulo $PCD$, facilè invenitur radius circuli sectionem conicam osculantis in diametri cujusvis extremo.

231. Coroll. 2 . . . Datis radio osculi $Pr$, semidiametro sectionis conicæ $PC$, & positione tangentis $PR$, seu angulo $PCD$, diametrorum conjugatarum, datur altera semidiameter conjugata $DC$, & describi potest sectio. His enim quæ diximus datis, datur quoque perpendicularis $PF$, ac proindè $DC$, media proportionalis inter $Pr$, & $PF$, (230) datas. Datis autem diametris conjugatis earumque angulo, sectio conica describi potest; ut notum est ex sectionum conicarum elementis.




232. Coroll. 3. Hinc etiam problema V. aliter solvitur. Cum enim sit vis centralis (212) ut $\frac{CP}{Pr \times PF^3}$, sitque $PF = \frac{BC \times CA}{CD}$, (per Lem. XII.) & $Pr = \frac{DC^2}{PF}$ (230). His valoribus in formulâ $\frac{CP}{Pr \times PF^3}$, substitutis, ea fit $\frac{CP}{BC^2 \times CA^2}$ hoc est, ob constantem quantitatem $BC^2 \times CA^2$, vis est directè ut $PC$.

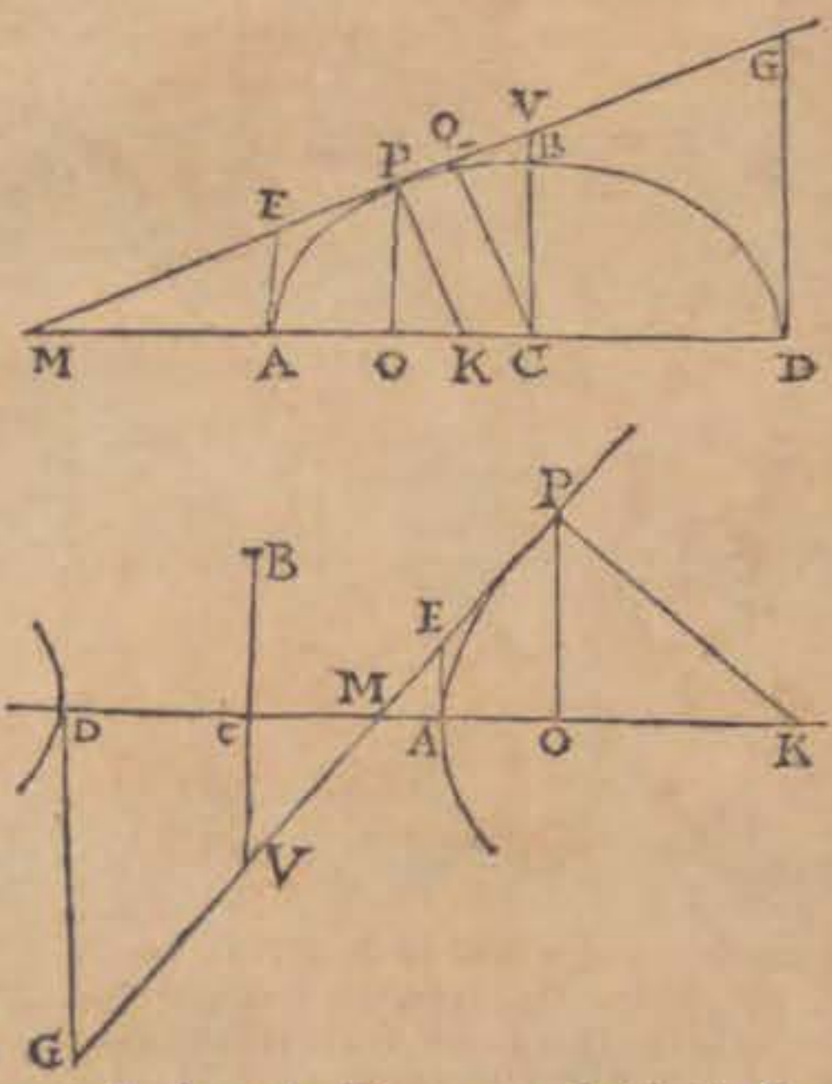
(e) *Et vicissim si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in Centro Virium &c.*, ut hæc conversa demonstretur sequentia sunt præmittenda.

DE MOTU CORPORUM.

lipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique ellipsis migrare potest.

233. Lemma I. Ducatur in puncto contactus perpendicularis in Tangentem, ad axem terminatam, & à Centro ducatur ipsi Parallela ad Tangentem usque, harum linearum factum erit æquale quadrato semi-Axis.

Ex P ducatur perpendicularis in Tangentem PK, ducatur ordinata PO perpendicularis in axem, & in C, ducatur CQ, Parallela P, & CV, parallela PO, triangula POK CQV, erunt similia, ergo erit PO:PK =CQ:CV, ergo PK×CQ=PO×CV similia etiam sunt Triangula CMV, OMP, erit ergo CM:MO=CV:PO; sed (per Cor. 2. Lem. V. de Conicis). est $CM = \frac{CA^2}{CO}$ & (per Cor. 3. ejusdem Lem.) $MO = \frac{AO \times DO}{CO}$ & (per Theor. II. tam de Hyp. quam de Ellip.) est $CA^2 : AO \times DO = CB^2 : PO^2$ ergo est $CM : MO = \frac{CA^2}{CO} : \frac{AO \times DO}{CO} = CA^2 : AO \times DO = CB^2 : PO^2 = CV : PO$, ideoque $CB^2 \times PO = PO^2 \times CV$ utrumque vero dividendo per PO est $CB^2 = PO \times CV$, erat verò $PK \times CQ = PO \times CV$. Ergo $PK \times CQ = CB^2$. Q. E. D.




234. Lemma II. Sit PM, Sectionis Conicæ Tangens, CA axis, CB ejus conjugatus, in utroque axeos primæ Vertice erigantur perpendiculares AE, DG, ad Tangentem usque, factum earum AE×DG, erit æquale quadrato semi-Axis.

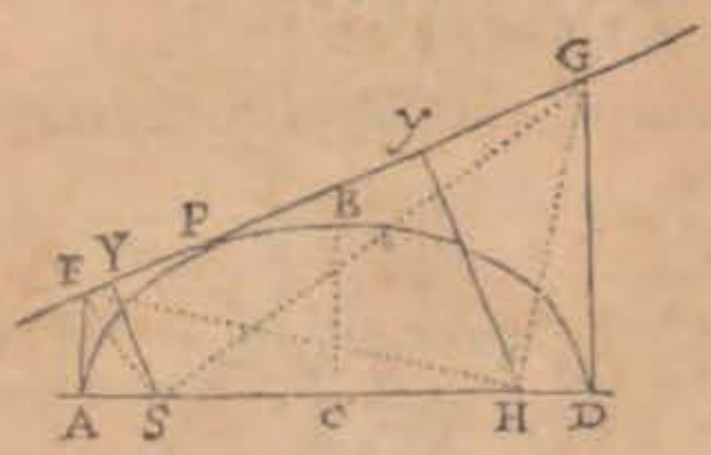
*Demonst.*... Ducta PO ordinata ad axem & CV ad Tangentem usque ipsi Parallela, erit (per Cor. 2. Lemm. V. De Conicis) CO:CA=CA:CM. Dividendo verò, est CA—CO vel CO—CA, sive AO ad CA sive CD, sicut CM—CA vel CA—CM, sive MA ad CM, hoc est AO:CD=MA:MC, jungendo terminos primæ rationis terminis secundæ hæc non mutatur, estque MA: MC=MA+AO (sive MO):MC+DC, (sive MD) hoc est alternando MA:MO =MC:MD sed ob parallelas est MA: MO=AE:PO & MC:MD=CV:DG ergo est AE:PO=CV:DG & est AE× DG=PO×CV sed per Lemma præcedens est PO×CV=CB². Ergo est AE×DG=CB². Q. E. D.

235. Lemma III. Ducantur à focis perpendiculares in Tangentem Sectionis Conicæ, earum factum erit æquale quadrato semiAxis.

*Demonst.*... Sint illæ perpendiculares SY, Hy, ducantur in utroque vertice axeos transversæ lineæ AE, DG, perpendiculares axi usque ad Tangentem, & ducantur à focis S & H, ad earum extremitates lineæ SE SG & HG HE.

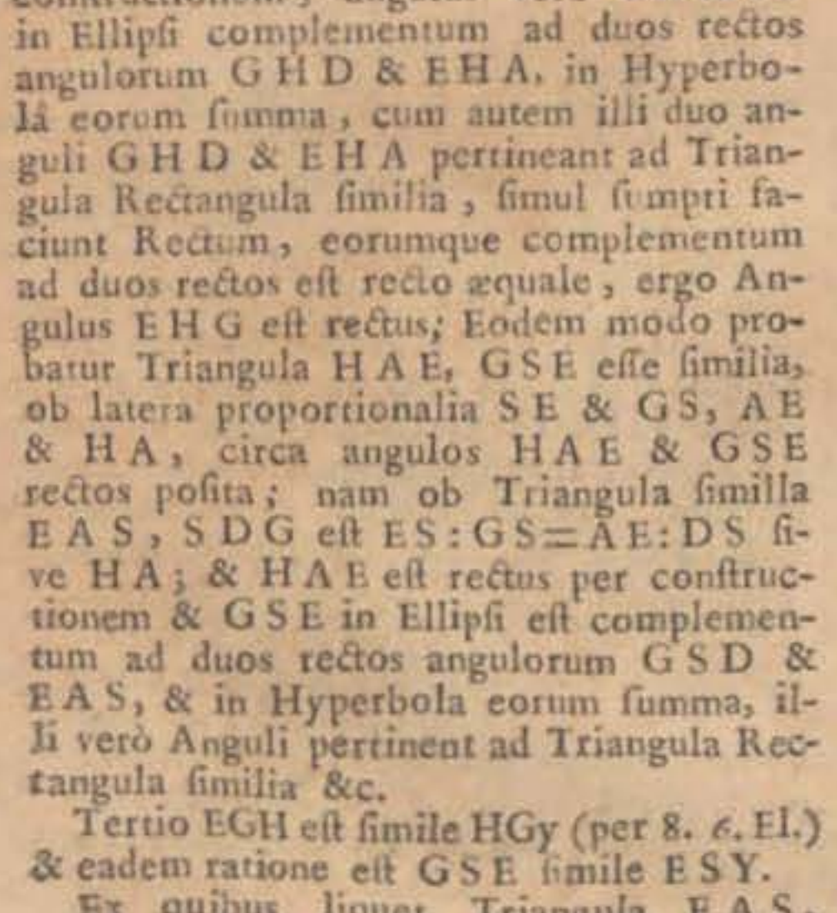
Triangula EAS, SDG, EHG, GHy similia inter se, ut & Triangula GDH, HAE, GSE, ESY: Primò, similia sunt Triangula EAS, SDG quia latera EA & AS, SD & DG circa angulos rectos A & D posita proportionalia sunt, nam (per Lemma præced.) est EA×DG=CB², & per naturam focorum (& per 5. vel 6. 2. Elem.) est AS×SD=CB² ergo est EA×DG=AS×SD ideoque EA:AS =SD:DG; Eâdem ratione probatur Triangula GDH, HAE esse similia, ob latera proportionalia GD & DH, HA & AE circa angulos rectos A & D posita, est enim ut prius EA×DG=CB²=DH× HA ideoque DG:DH=HA:EA.

Secundò Triangula SDG, EGH sunt similia, latera enim GH & HE, GD & DS




GHy esse similia ut & Triangula GSE, ESY; ex similitudine Triangulorum EAS, GHy est ES: GH = EA: Hy, & ex similitudine Triangulorum GDH & ESY est ES: GH = SY: GD ergo est EA: Hy = SY: GD & EA × GD = Hy × SY sed EA × GD = CB² per Lemma præcedens, ergo etiam Hy × SY = CB². Q. E. D.

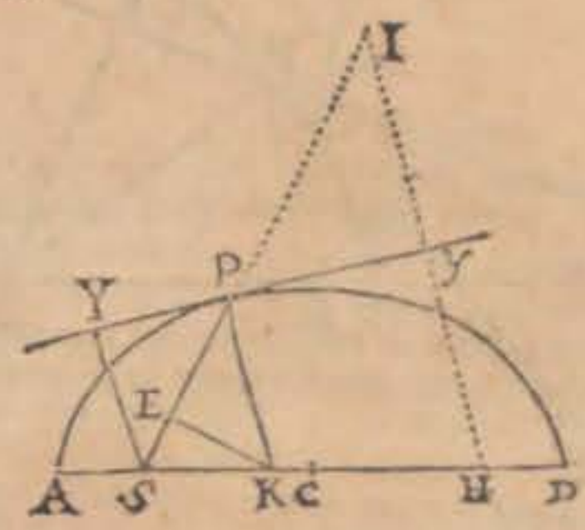
236. Lem. IV. Ducatur à foco S linea SP ad punctum contactûs & ex puncto P contactus ducatur perpendicularis in Tangentem quæ secet axem in K, & ex puncto K ducatur in lineam SP perpendicularis KE, pars PE lineæ PS erit æqualis semilateri recto.

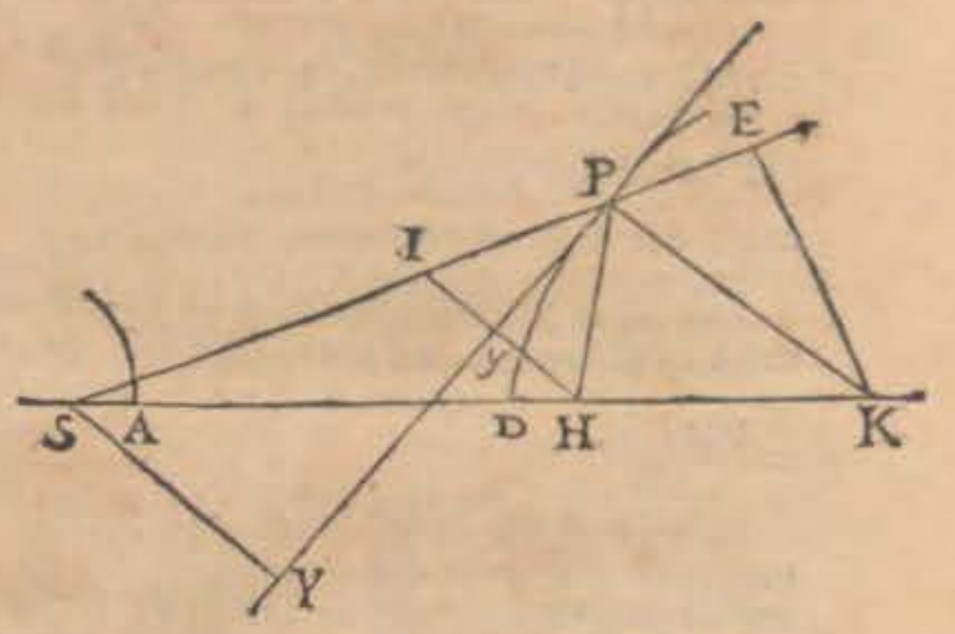



DS circà angulos SDG & EHG posita sunt proportionalia, nam ob triangula similia GDH, HAE, est GH: HE = GD: HA, sed HA = DS, ergo est GH: HE = GD: DS; Præterea anguli SDG & EHG sunt ambo recti, SDG quidem per constructionem, angulus verò EHG est in Ellipsi complementum ad duos rectos angulorum GHD & EHA, in Hyperbolâ eorum summa, cum autem illi duo anguli GHD & EHA pertineant ad Triangula Rectangula similia, simul sumpti faciunt Rectum, eorumque complementum ad duos rectos est recto æquale, ergo Angulus EHG est rectus; Eodem modo probatur Triangula HAE, GSE esse similia, ob latera proportionalia SE & GS, AE & HA, circa angulos HAE & GSE rectos posita; nam ob Triangula simillia EAS, SDG est ES: GS = AE: DS sive HA; & HAE est rectus per constructionem & GSE in Ellipsi est complementum ad duos rectos angulorum GSD & EAS, & in Hyperbola eorum summa, illi verò Anguli pertinent ad Triangula Rectangula similia &c.

Tertio EGH est simile HGy (per 8. 6. El.) & eadem ratione est GSE simile ESY.

Ex quibus liquet Triangula EAS,

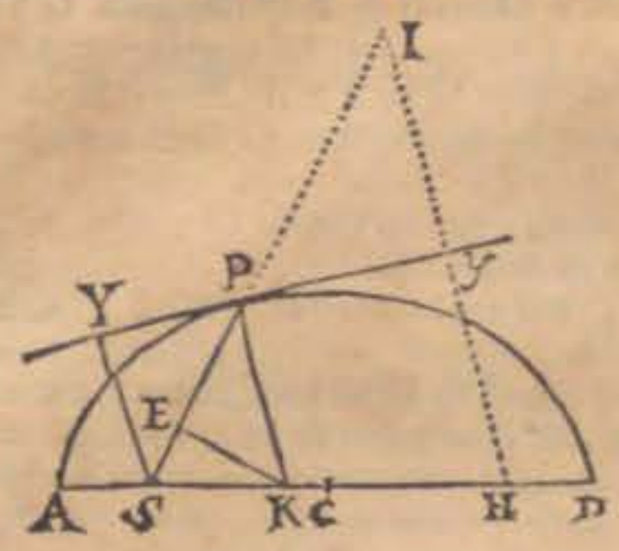


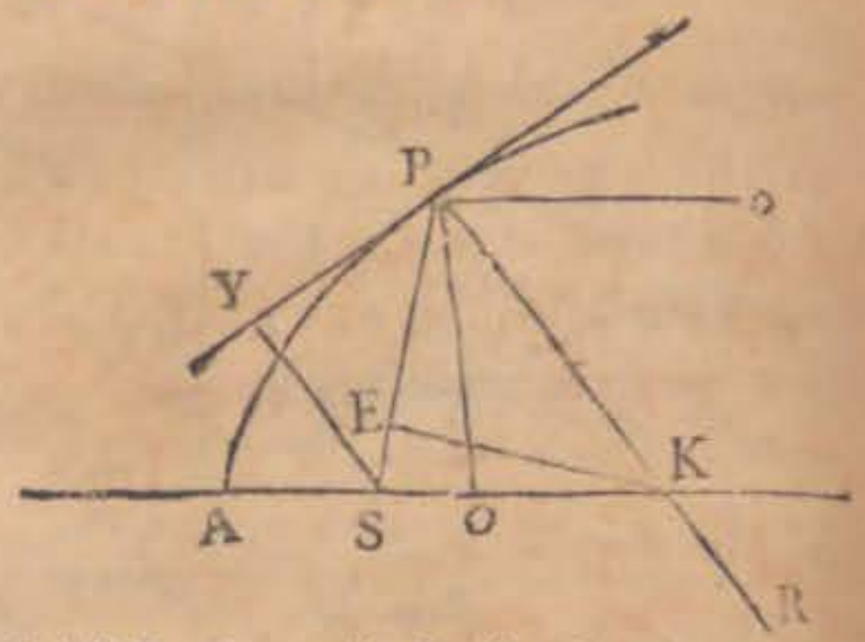



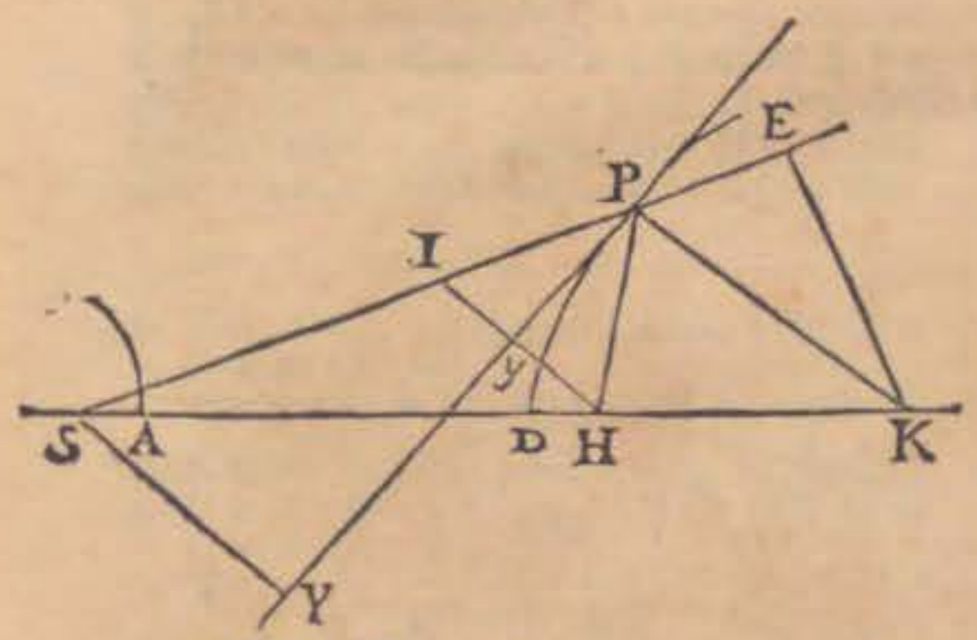

Producatur vel secetur SP in I ut sit SI = AD sive Axi, ducaturque ex altero foco linea HI quæ dividitur bifariam & perpendiculariter per Tangentem in y (per Theor. III. de Hyp. & IV. de Ellip.) ergo HI = 2 Hy & est HI parallela PK, ergo Triangula PSK ISH sunt similia, estque PS: PK = SI: IH sive 2 Hy, sed ob Parallelas SY, PK, & angulos rectos Y & E similia sunt Triangula PSY, PKE, ergo est PS: PK = SY: PE, est ideo SI: 2 Hy = SY: PE & PE

2 Hy

DE MOTU CORPORUM.



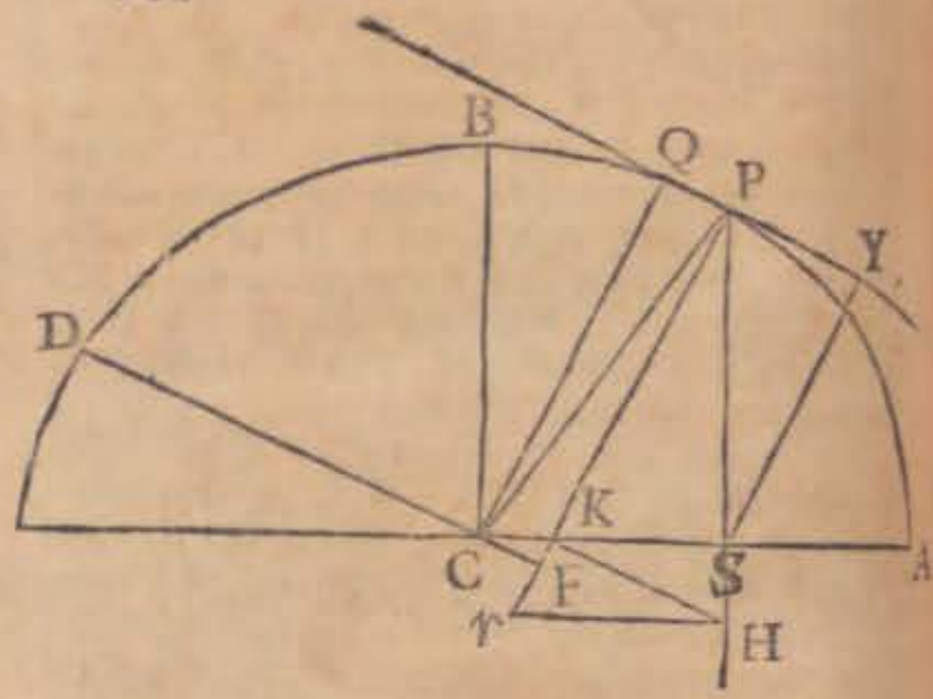




$= \frac{2Hy \times SY}{SI}$ sed $Hy \times SY = CB^2$ & $SI = 2AC$, ergo $PE = \frac{2CB^2}{2AC}$ & $2PE = \frac{4CB^2}{2AC}$ sed Latus Rectum $L$ est $\frac{4CB^2}{2AC}$, ergo $2PE = L$, sive PE est dimidium lateris Recti.

237. 1. Coroll. Ex eo quod est $PS : PK = SY : PE$ sive $\frac{1}{2}L$, est $SY = \frac{L \times PS}{2PK}$ & $PK = \frac{L \times PS}{2SY}$

238. 2. Cor. Hoc Lemma cum suo Corollario de Parabola etiam verum est, sed aliter demonstratur, ducta ordinata PO Triangula PKO, PKE sunt æqualia, propter Angulos rectos in O & E; latus PK commune, & angulum PKO angulo KPE æqualem, ducto enim Diametro Po, erit OPK æqualis PKO ob Parallelas AK & Po sed oPK est etiam æqualis angulo KPE quia perpendicularis dividit bifariam angulum SPo (per Theor. III. de Parab.) ergo angulus PKO = KPE, & (per 26. 1. Elem.) Triangulum PKO est æquale Triangulo PKE ideoque PE = KO, sed KO est æqualis semilateri recto (per Theor. III. de parab.) ergo & PE.

239. Lemma V. In omni sectione conicâ cujus focus S, PY, tangens in P, SY & PK, tangenti perpendiculares, L, latus rectum, est radius osculi $Pr = \frac{4PK^2}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^2}$ ...




Dem. ... Sit APB ellipsis cujus semiaxes AC, BC, semidiametri conjugatæ PC, DC, ac proindè DF, tangenti PY parallela, atque adeò PF, QC, tangenti perpendiculares æquales sunt. Est (per Lem. XII. Newt.) $CD : BC = AC : PF$, & $CD^2 : BC^2 = AC^2 : PF^2$, ideoque est $CD^2 = \frac{BC^2 \times AC^2}{PF^2}$ Et quia $BC^2 = CQ \times PK$ sive $PF \times PK$ (233.) est $CD^2 = \frac{PF \times PK}{PF^2} \times AC^2 = \frac{PK \times AC^2}{PF}$; sed est $Pr = \frac{CD^2}{PF}$ (230.) ergo

ergo est $Pr = \frac{PK \times AC^2}{PF^2}$; est autem $AC : BC = BC : \frac{1}{2}L$, ergo $BC^2 = \frac{1}{2}L \times AC$ ideoque $PF \times PK = \frac{1}{2}L \times AC$, ergò $PF = \frac{L \times AC}{2PK}$ & $PF^2 = \frac{L^2 \times AC^2}{4PK^2}$ idque substituatur in valore Pr mox reperto erit $Pr = \frac{4PK^3}{L^2}$, & quia $PK = \frac{L \times SP}{2SY}$ (237.) erit $\frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^3} = Pr$. Q. e. 1um.

Idem eodem prorsùs modo demonstratur in hyperbolâ. Q. e. 2um.

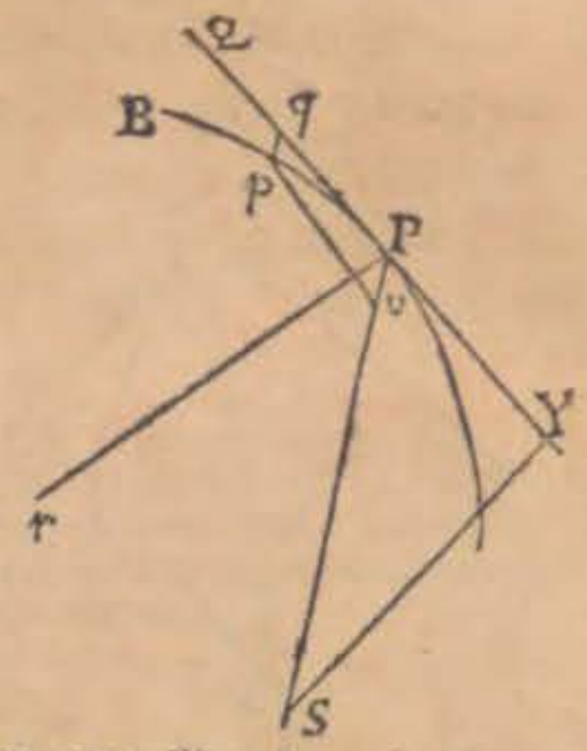
In Ellipsi crescente focorum distantiâ manet $Pr = \frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$, adeóque idem etiam verum est cum focorum distantia infinita evadit, seu cum Ellipsis in Parabolam mutatur. Q. e. 3um.

240. Coroll. 1... Ex his facillima oritur constructio pro determinando radio curvaturæ in quâvis sectione conicâ. Ex K, enim super PK, erigatur perpendicularis KH, cum PS concurrens in H; ex H erigatur super PH perpendicularis Hr, erit Pr, radius curvaturæ. Nam ob angulos rectos PKH, PHr, & lineas PK, SY, parallelas est $SP : SY = Pr : PH = PH : PK$, atque indè $SY^2 : SP^2 = PK : Pr$; adeóque $Pr = \frac{PK \times SP^2}{SY^2}$ — sed $SY = \frac{L \times SP}{2PK}$ (237), ergò $Pr = \frac{4PK^3}{L^2}$, ac proindè Pr est radius osculi (239.).

241. Coroll. 2... Quoniam in verticibus sectionum conicarum principalibus $SP = SY$, erit ibi $Pr = \frac{L \times SP^3}{2SY^3} = \frac{L}{2}$, seu radius osculi æqualis dimidio lateris recti principalis.

242. Theor. Datis in puncto P, vis centripetæ quâ corpus curvam PpB describit quantitate absolutâ, vis illius directione PS, velocitate corporis, & positione tangentis PQ, datur curvæ PpB curvatura in P, seu radius osculi Pr.

Dem.. Sit curvæ PpB, & circuli osculatoris arcus infinitesimus Pp, & quoniam velocitas corporis P revolventis finita supponitur, vis centripeta constans est, & illius directio sibi parallela per arcum Pp,

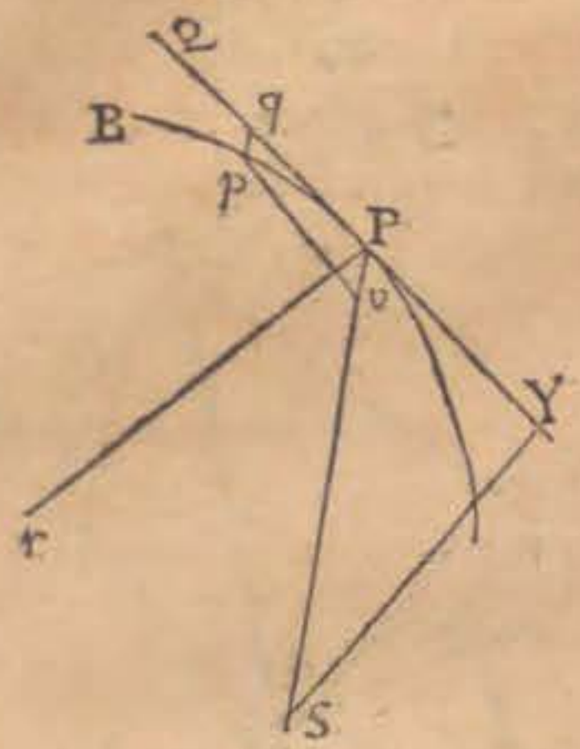



adeòque arcus ille est portio parabolæ cujus tangens PQ, & diameter PS (ex notâ 40ª.) Quoniam autem vis centripetæ quantitas absoluta in P, data est, datumque proindè spatium quod corpus vi illâ constante, dato tempore percurreret, & præterea corporis P velocitas, ac tangentis PQ positio data sunt, data est ratio qp sive Pv ad Pq sive pv, data ergo est parabola quam corpus P describeret, si vis centripeta eadem maneret & directionem haberet lineæ PS perpetuò parallelam. Cum igitur datus sit radius circuli parabolam datam in dato puncto osculantis (239.) datur Pr, radius osculi in puncto P. Q. e. d.

243. Coroll. Hinc datis in puncto P, curvaturâ seu radio osculi Pr, positione tangentis PQ, velocitate corporis, & vis centripetæ directione PS, datur vis illius quantitas absoluta in P; nam propter datas positionem Tangentis, & vis directionem, datur ratio SP ad SY & $SP^3$ ad $SY^3$, sive $\frac{SP^3}{SY^3}$ & propter datum $Pr = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ datur $\frac{L}{2}$ sive L Latus rectum principale Parabolæ cujus arcus Pp est portio. PS Diameter & PQ Tangens unde datur tota Parabola & Latus rectum Diametri PS; Denique cum data sit velocitas corporis in P datur lineola Pq, vel pv dato tempore descripta, datur ergo abscissa Pv sive qp quæ est vis centripetæ quantitas absoluta.

Datis verò in P, vis centripetæ quantitate absolutâ, vis illius directione PS, positione tangentis PQ, radio osculi Pr, sive datâ curvaturâ, datur velocitas corporis in P;

DE MOTU CORPORUM.

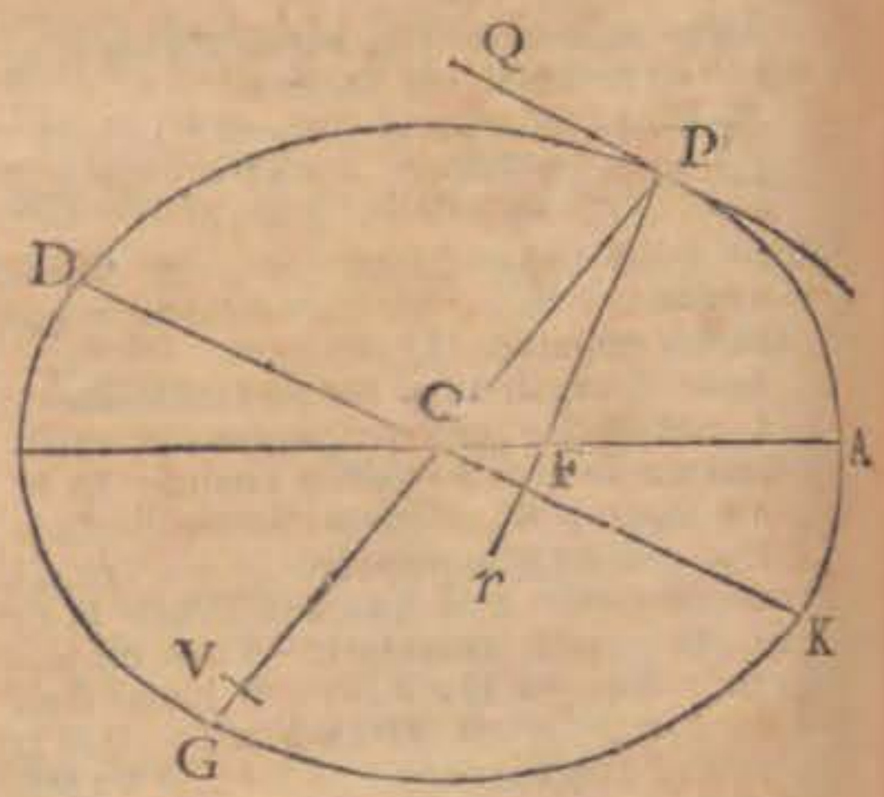



& generatim si ex his quinque, nimirum, vis centripetæ quantitate absolutâ, illius directione, velocitate corporis, positione tangentis & curvaturâ, quatuor data fuerint, quintum determinatum est.

244. Theor. Corpus P, circà centrum virium S datum revolvendo, curvam P p B describat, sintque data, vis centripetæ quantitas absoluta in puncto P, data lex secundum quam in variis à centro S distantiis vis centripeta agit, positio tangentis P Q, & curvatura in P, determinata ac unica est curva P p B, quam corpus P, circà centrum virium S, potest describere.... Dem... Quoniam datur centrum virium S & punctum P, datur quoque positio rectæ P S, hoc est, directio vis centripetæ, ac proindè ex cæteris etiam datis (243.) datur velocitas quâ corpus in puncto P movetur; sed datis in puncto P, vis centripetæ quantitate absolutâ, positione tangentis seu rectæ secundùm quam projicitur corpus, velocitate projectionis determinatur proximum punctum p, tangentis in eo puncto p positio, corporis P in eo velocitas, ut & novâ distantiâ à centro p S, sed datâ lege vis centripetæ in variis à Centro distantiis, datur iterum in puncto novo p, vis centripeta, unde proximum punctum etiam determinabitur, ex his ergo datis omnia puncta curvæ P p B, successivè determinantur; ergo data ac unica est curva quam corpus P, his datis describere potest. Q. e. D.

Coroll. Iisdem manentibus, si describatur nova curva quæ curvam P p B quam corpus P describit osculetur in P, quæque proindè eandem habet tangentem P Q, ut potè radio oculi P R, perpendicularem, impossibile est ut datis iis quæ numero 244. posuimus, corpus P, hanc novam curvam a priori diversam describat, hoc est, verba Newtoni ferè usurpando, orbes duo se mutuò osculantes eâdem vi centripetâ describi non possunt.

245. Hisce positis tandem probabimus quòd si vis centripeta sit ut distantia à centro, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut fortè in circulo in quem Ellipsis migrat focis coeuntibus.

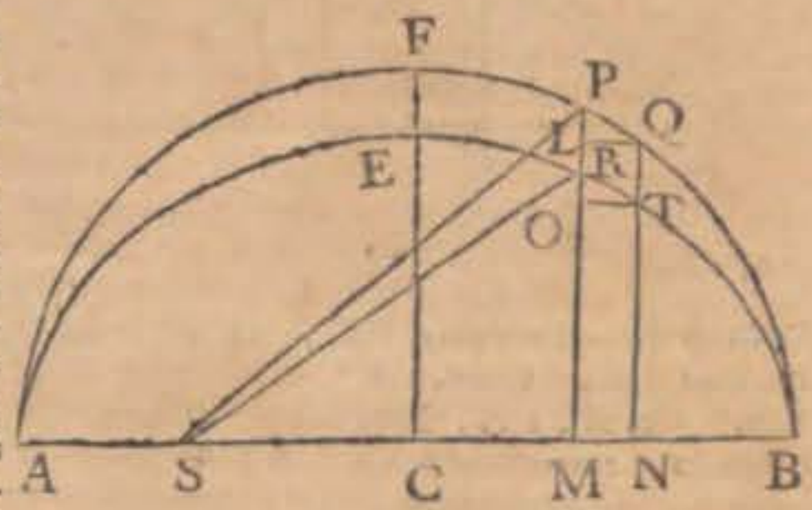



Data sint centrum virium C, & vis centripetæ quantitas absoluta, data à centro distantia C P, & corpus datâ cum velocitate secundùm directionem datam rectæ P Q projiciatur, erit P Q tangens curvæ describendæ. Si fuerit C P ad tangentem P Q normalis, & velocitas quâ corpus P, projicitur æqualis velocitati quam idem corpus solâ vi centripetâ, ut est in P, constante sollicitatum acquireret, cadendo per dimidium radium P C, curva describenda erit circulus cujus centrum C, & radius C P (201.) si verò talis non fuerit velocitas projectionis, corpus P, aliam curvam describet, in quâ tangens P Q, non semper erit ad radium vectorem C P perpendicularis, cum hæc sit solius circuli proprietas, ut notum est. Sit ergò P Q ad radium vectorem C P obliqua, per centrum C ducatur recta C K, ipsi P Q paral-

*Corol.* 2. (d) Et æqualia erunt revolutionum in ellipſibus univerſis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in ellipſibus ſimilibus æqualia ſunt (per corol. 3. & 8. prop. IV.) in ellipſibus autem communem habentibus axem majorem ſunt ad invicem ut ellipſeon areæ totæ directè, & arearum particulæ ſimul deſcriptæ inversè; id eſt, ut axes minores direc-

parallela, & radio oſculi P r dato (242) deſcribatur circulus rectam P C interſecans in V; tùm ſumatur C K, media proportionalis inter C P, & ½ P V, & ſemidiametris conjugatis C P, C K, deſcribatur ellipſis P D G A, ea erit orbita quam corpus *P*, deſcribet... Dem... Ellipſis P D G A, deſcribi poteſt per corpus aliquod *A* ſollicitatum vi aliquâ centripetâ ad centrum C tendente, quæque fit ſemper ut diſtantia ab illo centro C P, (prop. X.) ponamus velocitatem corporis *A*, eandem eſſe ac velocitatem projectionis corporis *P*, & ex datâ velocitate corporis illius *A*, directione tangentis P Q directione vis C P, & curvaturâ Ellipſis in P, datur vis centripetæ quantitas abſoluta (242.) quâ corpus *A*, in Ellipſi motum retinetur in puncto P, ſed eadem eſt ellipſis illius, & orbitæ quam corpus P deſcribit, curvatura; nam P r eſt radius circuli Ellipſim P D G A oſculantis in P, (per conſt. & ſecun. demonſt. Newt. Prop. X.) eſt quoque radius circuli curvam quam corpus *P* deſcribit oſculantis in eodem puncto P, (per conſtr.) adeóque Ellipſis P D G A, & orbita quam corpus *P* deſcribit eandem habent curvaturam in puncto P, præterea recta P Q, orbitæ tangens cum ſit diametro C K parallela ellipſim tangit in P, idem eſt orbitæ & ellipſis centrum C, idem punctum P, eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ ac proindè eadem vis illius quantitas abſoluta in puncto P, tam in ellipſi quam in orbitâ à corpore *P* deſcribendâ; cum igitur iis datis corpus *P* unicam curvam deſcribere poſſit & reverâ ellipſim P D G A, poſſit deſcribere, ſi vis centripeta ſit ut diſtantiâ à centro (nec circulus deſcribatur) corpus movebitur in Ellipſi centrum habente in centro virium. Q. E. D.

246. Si vis centrifuga ſit ut diſtantia à centro, eodem modo demonſtratur corpus moveri in hyperbolâ centrum habente in centro virium.



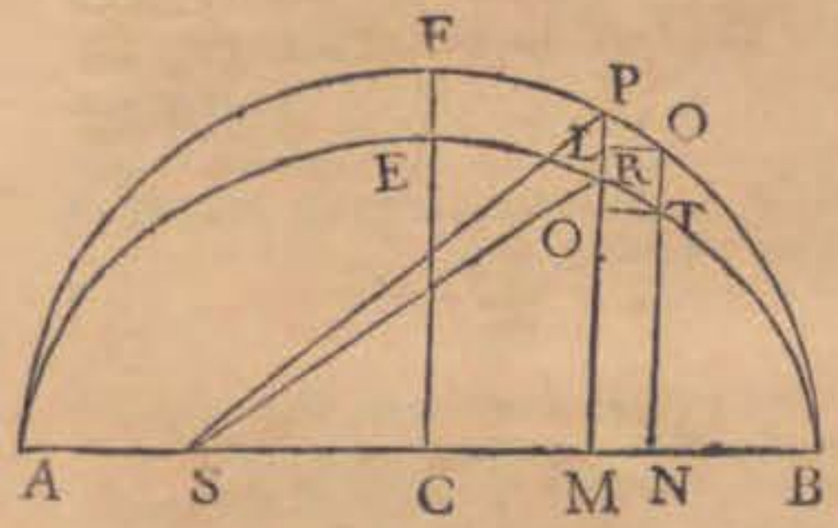

(d) 247. Ut demonſtretur *æqualia eſſe revolutionum circa idem centrum factarum periodica tempora in Ellipſibus univerſis iſta ex Conicis ſunt repetenda.*

Lemma..... Area circuli A F B, cujus radius F C æquatur ſemiaxi A C ellipſis A E B, eſt ad hujus Ellipſeos aream ut ſemiaxis A C, ſeu F C, ad alterum ſemiaxem E C... Dem... Axis A B, diviſus intelligatur in particulas innumeras æquales lineolæ M N, & per ſingula diviſionum puncta erigantur rectæ P M, Q N, axi perpendiculares. Quoniam ex circuli & Ellypſis naturâ, $FC^2 : QN^2 = AC \times CB : AN \times NB = EC^2 : TN^2$, erit FC: QN = EC: TN, & FC: EC = QN: TN; verùm ejuſdem baſis rectangula NL, NO, ſunt ut altitudines NQ, NT, ac proindè NL: NO = FC: EC, ergò ultima ſumma rectangulorum evaneſcentium ut NL, ad ſummam rectangulorum evaneſcentium ut NO, hoc eſt, area circuli ad aream Ellipſis (per Lem. IV.) ra-

DE MOTU CORPORUM.

directè, & corporum velocitates in verticibus principalibus inversè; hoc est, ut axes illi minores directè, & ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inversè; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

*Scho-*




est diameter communis A B, aream M R B, esse ad aream correspondentem M P B, ut est E C, ad F C, seu ut R M ad P M; sed ductis ex quocumque diametri puncto S, rectis S P, S R, est etiam triangulum S M R, ad triangulum S M P, ut M R ad M P, ob communem utriusque trianguli altitudinem M S; ergò sector S B R, est ad sectorem S B P, in ratione datâ E C, ad F C.

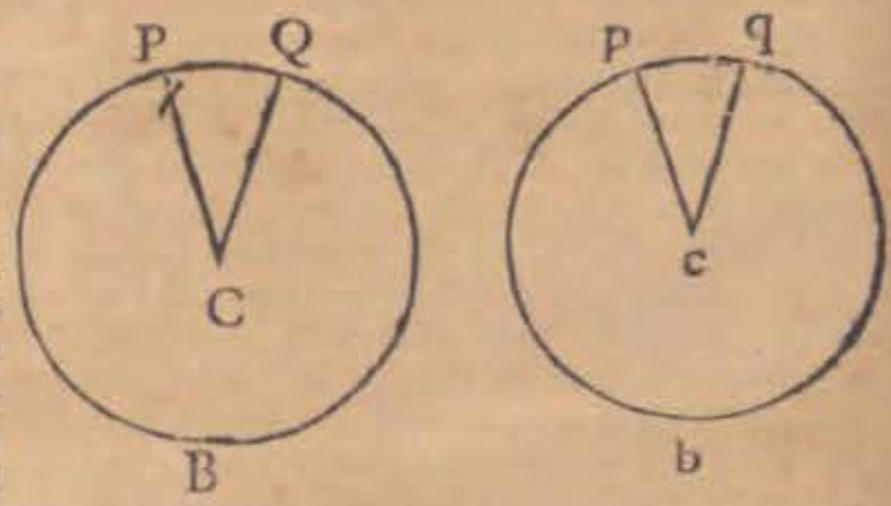
tionem habet semiaxis F C, ad alterum semiaxem E C. Q. e. D.

248. Coroll. 1 ... Idem eodem prorsùs modo demonstratur, si A F B fuerit Ellipsis communem axem A B, habens cum Ellipsi A E B. Et generatim duæ quævis figuræ A F B, A E B, quarum semiordinatæ Q N, T N, sunt in datâ ratione & quarum est communis diameter A B, sunt inter se in ratione datâ ordinatarum Q N, T N.

249. Coroll. 2. Area circuli cujus diameter est medius proportionalis inter duos Ellipsis axes æqualis est areæ Ellipsis. Nam sit E C : R = R : F C, & radio R, describatur circulus, illius circuli area, erit ad aream circuli A F B, ut $R^2$ ad $FC^2$, adeóque ut E C ad F C; Quarè cum Ellipsis A E B, eandem habeat rationem ad circulum A F B (247), manifestum est aream circuli radio R, descripti æqualem esse areæ Ellipsis A E B.

250. Coroll. 3 ... Quoniam $R^2 = FC \times EC$, & areæ circulorum sunt ut radiorum quadrata, erunt areæ Ellipsium ut axium rectangula.

251. Coroll. 4 ... Patet etiam in Ellipsibus vel ellipsi & circulo aut etiam in quibuslibet curvis quarum ordinatæ Q N, T N, datam habent rationem, & quarum

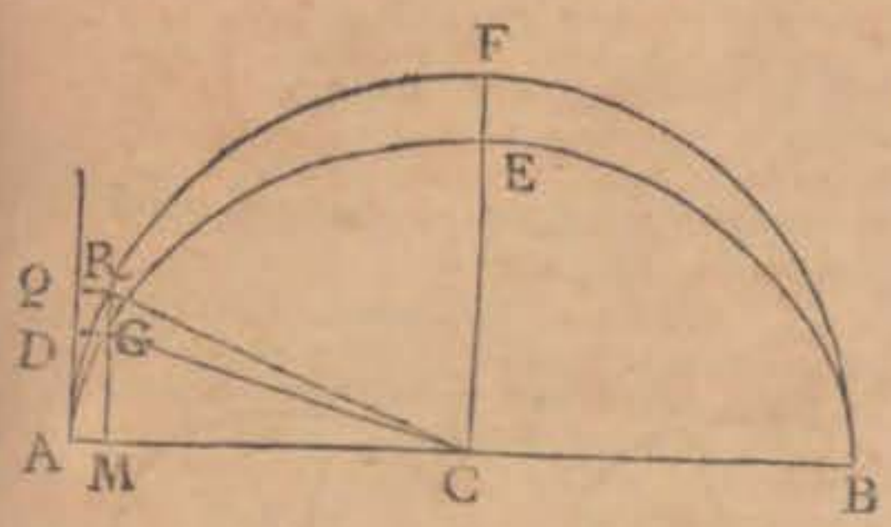



252. Theor. Corpora duo P, p, circa virium centra C, c, revolvendo, orbitas P Q B, p q b, describant; tempus periodicum in orbitâ P Q B, est ad tempus periodicum in alterâ orbitâ p q b, ut area P Q B P, ad aream p q b p, directe & sectores P C Q, p c q, simul descripti inverse .... Dem. .... ob æquabilem arearum circà centra C, c, descriptionem (prop. I.) tempus periodicum T, in orbe P Q B, est ad tempus t, quo describitur sector P C Q, ut area P Q B P, ad sectorem P C Q, & similiter tempus t, quo describitur sector p q c, est ad tempus periodicum $\theta$, in orbe p q b, ut sector p c q, ad aream p q b p, hoc est T : t = P Q B P area : P C Q, & t : $\theta$ = p c q : p q b p area, undè per compositionem rationum & ex æquo T : $\theta$ = P Q B P × p c q : p q b p × P C Q. Q. e. D.

253.

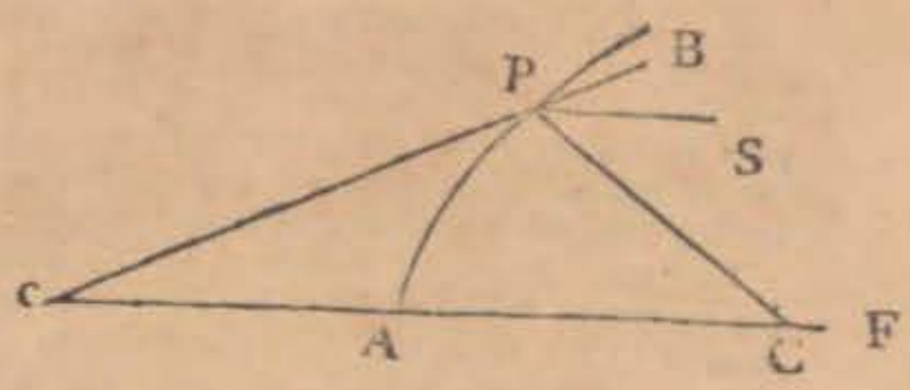
## *Scholium.*

Si ellipſis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; & vis ad centrum infinitè diſtans jam tendens evadet æquabilis. Hoc eſt theorema *Galilæi.* (e) Et ſi coni ſectio parabolica (inclinatione plani ad conum ſectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus




253. Si corpora duo Ellipſes A E B, A F B, quarum eſt axis communis A B, deſcribant, viribus ad centrum Ellipſium C tendentibus, tempora periodica erunt æqualia ... Dem ... Sint arcus A R, A G, infiniteſimi eodem tempore deſcripti, A Q tangens ad verticem A, Q R, D G, axi A B, parallelæ, & quoniam vires centrales ſunt ut Q R, D G (prop. VI.) & ob communem diſtantiam à centro A C, æquales ſunt vires, ſeu eadem vis (prop. X.) erit Q R = D G, ſectores verò A C G, A C R, ſunt ut G M, R M, ſeu E C, F C, (251), & areæ Ellypſium A E B, A F B, ſunt etiam ut E C, F C, (247. 248.) quarè cum tempora periodica in illis Ellipſibus ſint ut areæ A E B A F B directè & ſectores A C G, A C R, inversè (252) erunt eædem ut E C ad F C directè, & E C ad F C inverse, hoc eſt, ut E C × F C ad F C × E C, ac proindè in ratione æqualitatis. Q. e. D.

254. His poſitis facilè *demonſtratur æqualia eſſe revolutionum in Ellipſibus univerſis circum centrum idem factarum periodica tempora.* Nam duæ quævis ellipſes circà idem centrum deſcriptæ dicantur A, & B, deſcribatur tertia Ellipſis C, ſimilis Ellipſi A, & axem unum communem habens cum Ellipſi B, tempora periodica in Ellipſibus ſimilibus A & C, ſunt æqualia (per corol. 3. & 8. prop. IV. Newt.) & tempora periodica in ellipſibus C, & B, axem alterum communem habentibus ſunt etiam æqualia (253.) tempora igitur periodica in Ellipſibus quibusvis A & B ſunt æqualia. Q. e. D.




(e) 255. *Et ſi coni ſectio parabolica (inclinatione plani ad conum ſectum mutata), vertatur in hyperbolam movebitur corpus in hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam verſâ.* Cum enim Ellypſis centrum C, à vertice A, in plagam F abit, vis centripetæ directio eſt per lineas P C, P F, à puncto P, ad centrum, & ubi infinita evadit diſtantia P C, atque P S, ad centrum ducta axi parallela fit, Ellipſi in parabolam mutatâ, directio eſt à puncto P, ad S, ſecundum lineam P S; mutatâ in Hyperbolam parabolâ, & centro ad alteram verticis A partem tranſlato in c, vis centralis directio eſt ſecundùm lineam P B, à P ad B, hoc eſt, à centro C, ad P c, adeòque in centrifugam verſa (228.)

DE MOTU CORPORUM.

hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam versâ. Et quemadmodum in circulo vel ellipsi si vires tendunt ad centrum figuræ in abscisâ positum, hæ vires augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quâcunque datâ, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinatarum ad abscissam, semper augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum á centro, si modo tempora periodica maneant æqualia; (f) sic etiam in figuris universis si ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quâcunque datâ, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore pe-

256. Ex quibus sequitur hæc generalis Lex; Si corpus revolvatur in sectione conicâ, & vis centralis tendat ad sectionis centrum, aut à centro, vis illa erit directè ut distantia à centro, & contrà si vis fuerit ut distantia à centro, corpus movetur in sectione conicâ. (245. 246.)

(f) 257. *In figuris universis, si ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione datâ vel angulus ordinationis mutetur, manente tempore Periodico, vires augentur vel minuuntur in ratione distantiarum a Centro.* Hujus veritas sequentium Lemmatum ope patebit.

Lemma. In figurâ quâvis AQD, cujus diameter AD, ad hanc diametrum ordinatæ QE, NG, augeantur vel minuantur in ratione datâ QE, ad PE, vel ad angulum quemvis datum PED, inclinentur, novaque describatur curva APD, per novarum ordinatarum extrema transiens, sitque centrum virium C, in diametro positum utrique curvæ commune, rectæ PH, Qh, quæ curvas in punctis correspondentibus Q, P, tangunt, ad idem diametri punctum H convergunt.... Dem... Ductis rectis Pt, Qv, diametro AD parallelis, erit Qv=GE, =Pt, & (per hypothesim) nv:mt=EQ:EP, unde & alternando nv:EQ=mt:EP, & coeuntibus punctis n & Q, m & P, erit propter similitudinem triangulorum nvQ & QEh mtP & PEH

nv:EQ=Qv (GE):Eh
mt:EP=Pt (GE):EH

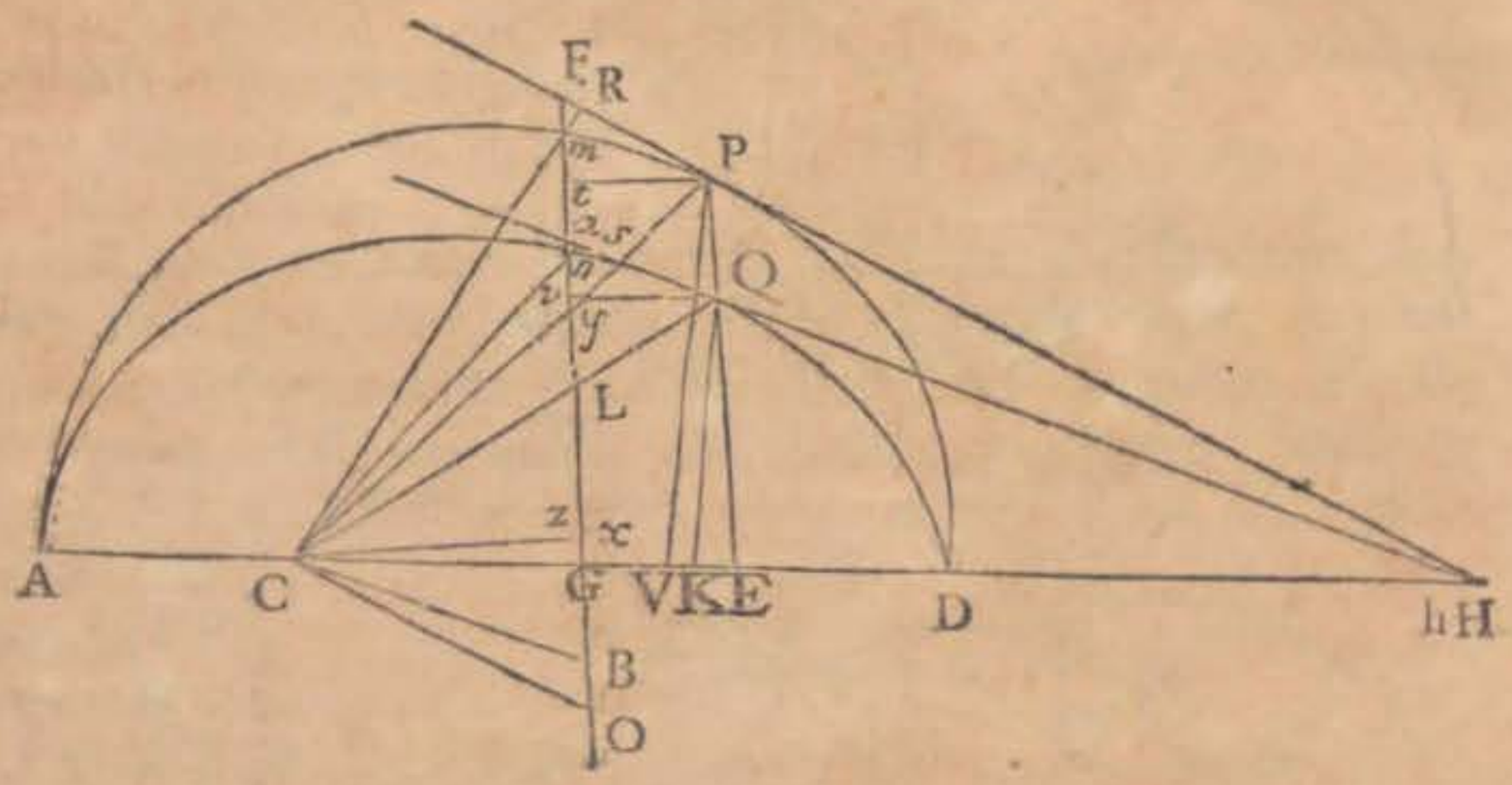
Cum ergo sit nv:EQ=mt:EP, erit GE:Eh=GE:EH, ideoque EH=Eh, ac proindè tangentes ad idem diametri punctum H convergunt. Q. e. D.

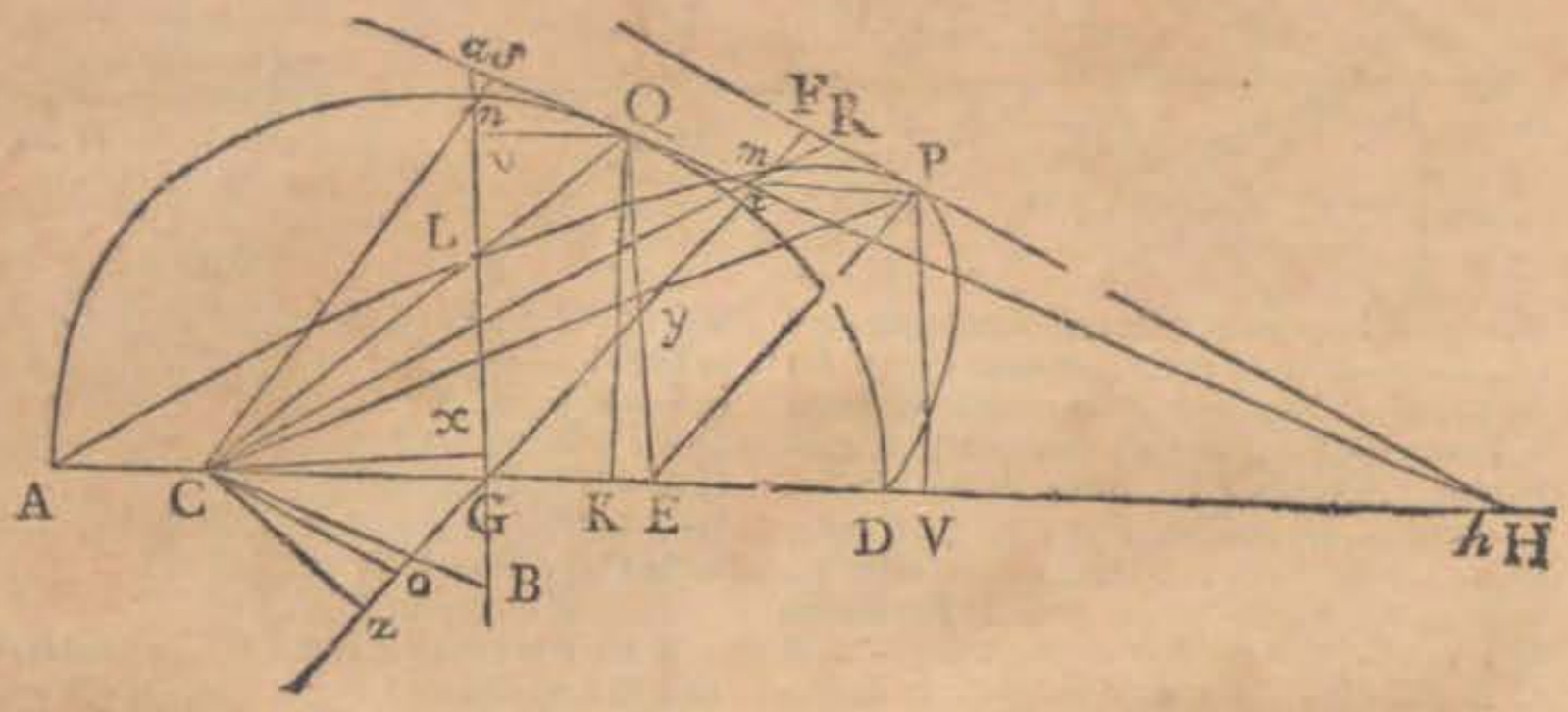
258. Lemma. Iisdem manentibus sector evanescens, CQn, est ad sectorem CPm, in alterâ curvâ correspondentem ut area AQD, ad aream APD... Dem. ob parallelas Gm & EP, Gn, & EQ, est Gy: CG=EP:CE & CG:GL=CE:EQ unde ex æquo Gy:GL=EP:EQ=Gm:Gn (per const.) & hinc Gm−Gy:Gn−GL =ym:Ln=Gm:Gn=EP:QE. Ex puncto C, demittantur in Gm, & Gn, perpendiculares Cz, Cx; & ex punctis P & Q, in diametrum AD, perpendiculares PV, QK, & erit triangulum Cym: triang. CLn=ym×Cz:Ln×Cx=Gm×Cz: Gn×Cx. Verum ob similia triangula CzG, & PVE, CxG & QKE, est Cz: CG=PV:PE, & CG:Cx=QE:QK: atquè adeò per compositionem rationum Cz:Cx=PV×QE:QK×PE=PV×Gn: QK×Gm (per constr.) cum ergo sit triangulum Cym: triang. CLn=Gm×Cz: Gn×Cx=Gm×PV×Gn:Gn×QK× Gm=PV:QK, & PV sit ad QK, ut parallelogrammum GEPm, ad parallelogrammum GEQn, hoc est, (per Lem. IV.) & per constr. ut area APD, ad aream AQD; ergò triangula Cym, CLn, sunt in ratione arearum APD, AQD; at punctis m & P, n & Q coeuntibus, sector CPm, æquatur triangulo Cym, & sector CQn triangulo CLn; sunt igitur sectores illi evanescentes ut areæ APD, AQD, directè. Q. e. d.

259. Theor. Iisdem manentibus, si tempora

periodico; vires ad centrum quodcunque in abſciſsâ poſitum tendentes in ſingulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro. LIBER PRIMUS.

SEC-



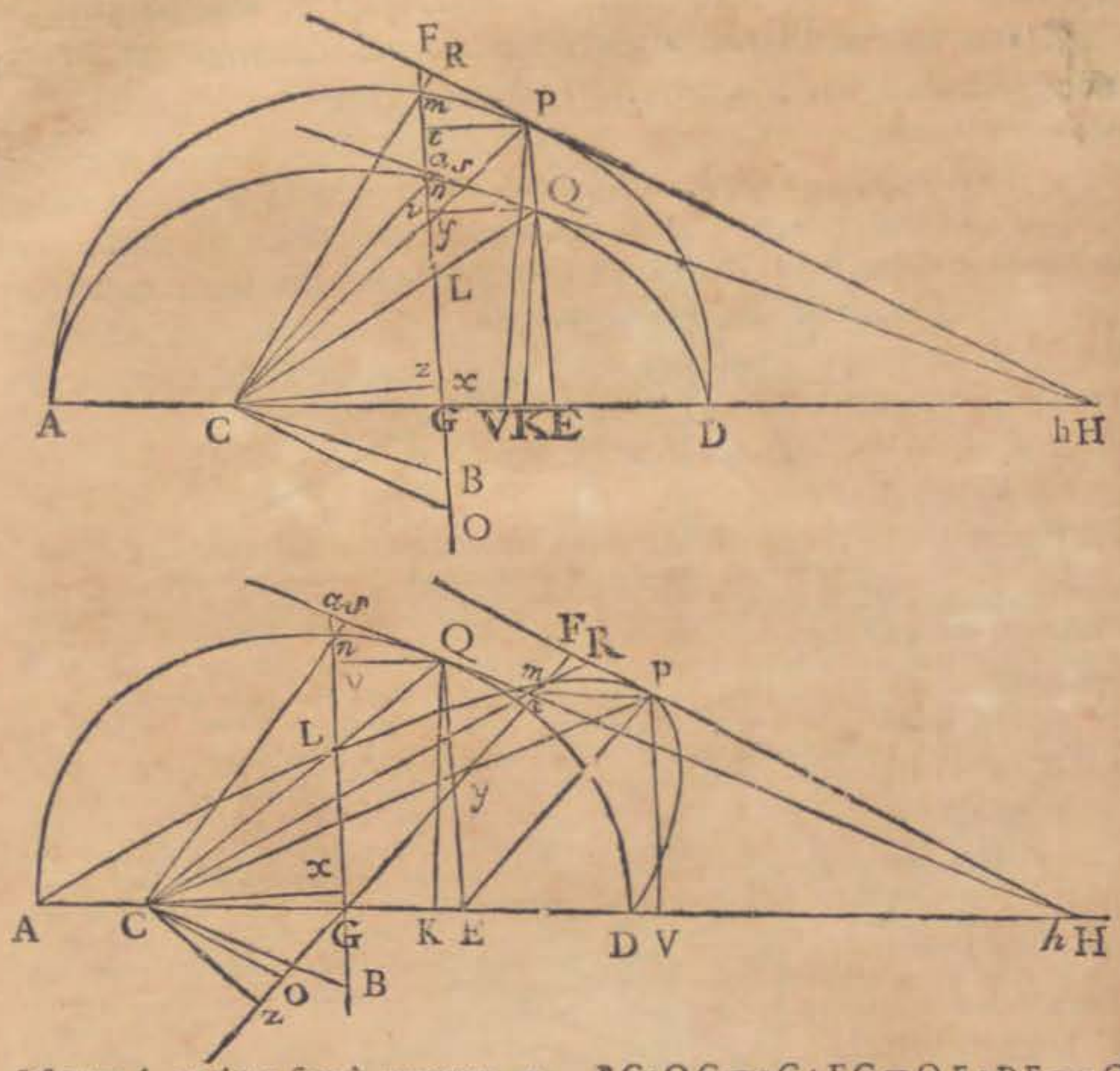




pora periodica in curvis APD, AQD fuerint æqualia, vires centripetæ in punctis correſpondentibus P & Q erunt inter ſe ut diſtantiæ à centro CP, CQ.

*Demonſt.* Figura AQD rectis ex centro C ductis in ſectores innumeros inter ſe æquales, ut CQn, & figura APd, in totidem ſectores correſpondentes, ac proindè etiam inter ſe æquales (258), ut CPm diviſæ intelligantur; & ob eumdem

ſecto-

DE MOTU CORPORUM.




sectorum in utrâque figurâ numerum, æquabilem illorum descriptionem (prop. I.) & æqualia tempora periodica, sectores C P m, C Q n, æquali tempore describentur. Quare (per prop. VI). Vires centripetæ in punctis P & Q, sunt inter se ut rectæ m R, n S, punctis m & P, n & Q coeuntibus; verùm propter Parallelas Q E, a G & P E, F G, est, a G : F G = Q E : P E, (257) & quia n G & m G in eadem sunt ratione, iis ex a G & F G subductis manent a n ad F m sicut Q E ad P E; ductis autem ex C, Parallelis C B C O ad tangentes a H F H, Triangula B C G & O G C sunt similia triangulis a G H, F G H unde est

B G : a G = G C : G H
& O G : F G = G C : G H ideoque
B G : O G = a G : F G = Q E : P E = n G : m G & jungendo terminos primæ & secundæ rationis terminis ultimæ est B n : O m = Q E : P E = a n : F m. Denique quia ob C B, C O, Tangentibus a H F H Parallelas, similia etiam sunt Triangula, a n S & n C B, F m R & m C O, est

B n : n a = C n : S n

& est F m : m O = R m : m C, & Compositis Rationibus est B n × F m : n a × m O = C n × R m : S n × m C, sed quia B n : O m = a n : F m, est B n × F m = a n × O m, ergo etiam C n × R m = S n × m C, ideoque C n : C m = R m : S n; sive distantiæ à Centro in eâdem sunt ratione ac vires Centrales.

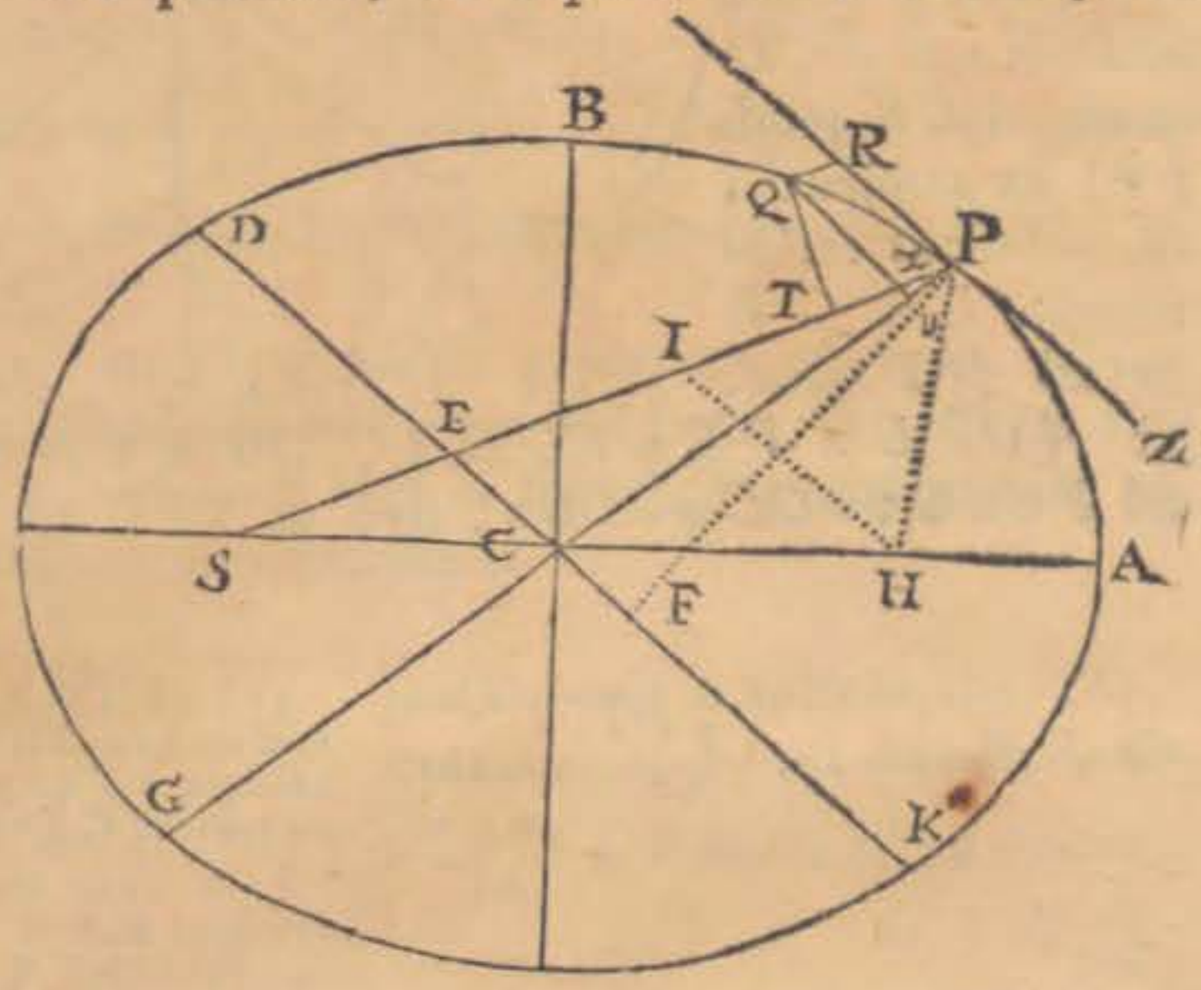
## SECTIO III.

*De motu corporum in conicis ſectionibus excentricis.*

### PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

*Revolvatur corpus in ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipſeos.*

Eſto ellipſeos umbilicus *S*. Agatur *SP* ſecans ellipſeos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QxPR*. Patet *EP* æqualem eſſe ſemiaxi majori *AC*, eo quod, actâ ab altero ellipſeos umbilico *H* lineâ *HI* ipſi *EC* parallelâ, ob æquales *CS*, *CH* æquentur *ES*, *EI*, (g) adeo ut *EP* ſemiſumma ſit ipſarum *PS*, *PI*, id eſt (ob parallelas *HI*, *PR*, & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipſarum *PS*, *PH*, quæ conjunctim axem totum 2*AC* adæquant. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*, & ellipſeos latere recto

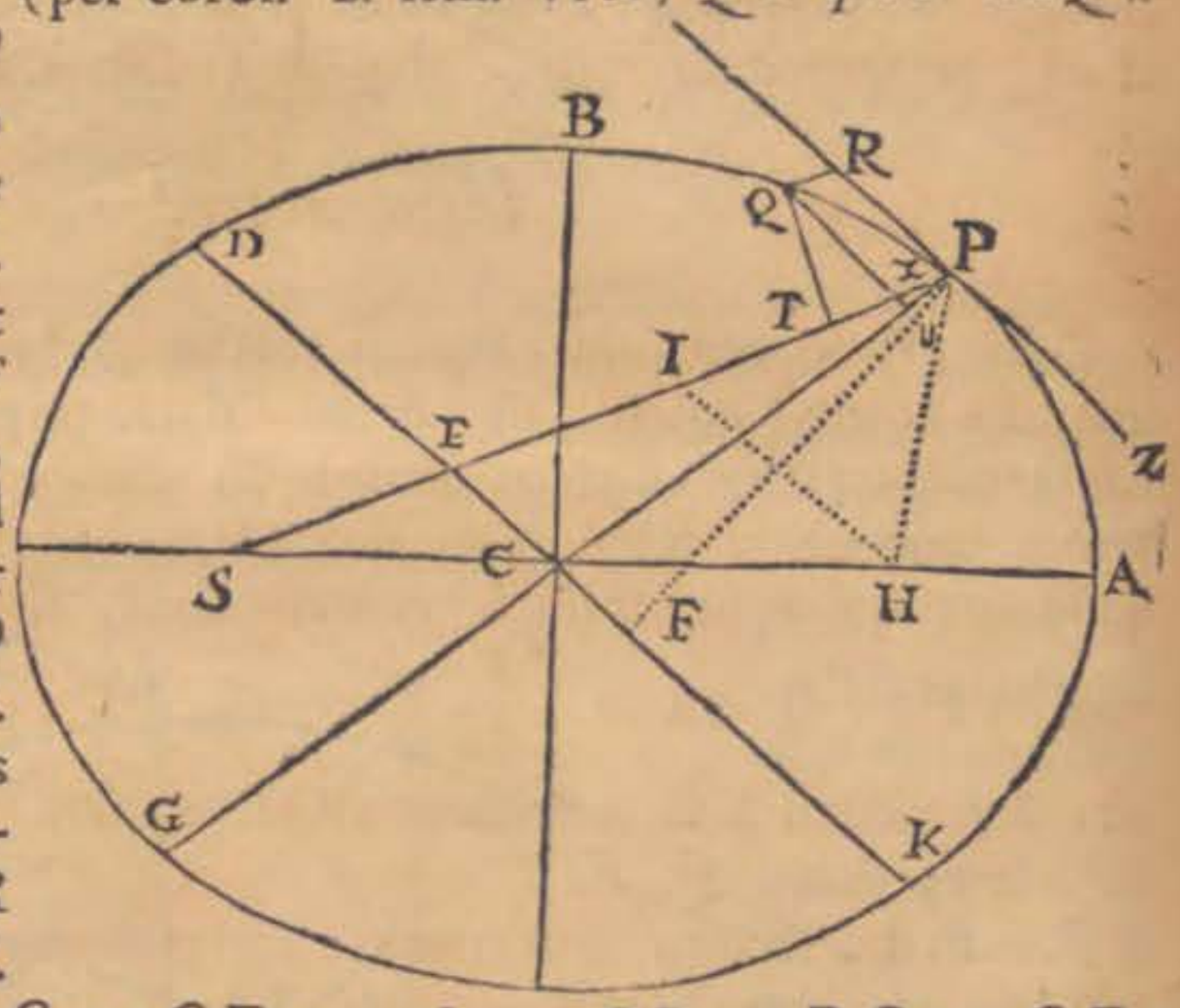



prin-

(g) 260. Quia (per prop. 48. lib. 3. conic. Apoll. ſup. Theor. IV. de Ellipſi) æquales ſunt anguli quos rectæ PH, PS, conſtituunt cum tangente PR, & ob parallelas HI, PR, æquales quoque ſunt anguli alterni PIH, PHI, æquales erunt rectæ PI, PH, adeóque $EP = \frac{PS + PH}{2} = AC$, (prop. 52. lib. 3. conic. apoll. ſuperius Theor. III. de Ellip.).

DE MOTU CORPORUM.

principali (seu (h) $\frac{2\,BC\ quad.}{AC}$) dicto $L$, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut $QR$ ad $Pv$ (i) id est, ut $PE$ seu $AC$ ad $PC$; & $L \times Pv$ ad $GvP$ ut $L$ ad $Gv$; & (k) $GvP$ ad $Qv$ *quad.* ut $PC$ *quad.* ad $CD$ *quad.* & (per corol. 2. lem. VII.) $Qv$ *quad.* ad $Qx$ *quad.* punctis $Q$ & $P$ coeuntibus est ratio æqualitatis; & $Qx$ *quad.* seu $Qv$ *quad.* est ad $QT$ *quad.* ut $EP$ *quad.* ad $PF$ *quad.* (l) id est, ut $CA$ *quad.* ad $PF$ *quad.* sive (per lem. XII.) ut $CD$ *quad.* ad $CB$ *quad.* (m) Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad $QT$ *quad.* ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, seu $2\,CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, sive ut $2\,PC$ ad $Gv$. Sed punctis




(h) 261. In Ellipsi & hyperbolâ latus rectum principale $L = \frac{2\,BC^2}{AC}$ nam $2AC : 2BC = 2BC : L$, undè $L = \frac{4\,BC^2}{2\,AC} = \frac{2\,BC^2}{AC}$.

(i) Per constructionem $QR = Px$, sed propter Triangula similia $Pxv$, $PEC$ $Px : Pv = PE(AC) : PC$, ergò $QR : Pv = AC : PC$.

(k) Per naturam Conicorum, facta partium Diametri sunt ad quadrata Ordinatarum ut Diametri transversæ quadratum ad quadratum ejus conjugatæ (Vide superius de Conicis Theor. II. de Ellipsi & de Hyperbolâ).

(l) Est $CA^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2$; nam per Lem. XII. $PF \times CD = AC \times BC$, adeóque $PF^2 \times CD^2 = CA^2 \times BC^2$, ac proindè $CA^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2$.

(m) 262. Scriptis seorsim analogiis res clara fit.

$L \times QR : L \times Pv = AC : PC$
$L \times Pv : Gv\,P = L : Gv$
$Gv\,P : Qv^2 = PC^2 : CD^2$
$Qv^2 : QT^2 = CD^2 : CB^2$.

Undè conjunctis his omnibus rationibus; $L \times QR : QT^2 = AC \times L \times PC^2 \times CD^2 : PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, hoc est, ob $AC \times L = 2\,BC^2$, $L \times QR : QT^2 = 2\,PC : Gv$, & ob $2\,PC = Gv$, $L \times QR = QT^2$, & $L = \frac{QT^2}{QR}$.

Nam

tis $Q$ & $P$ coeuntibus æquantur $2PC$ & $Gv$. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & $QT$ *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè est ut $L \times SPq$, id est, reciprocè in ratione duplicata distantiæ $SP$. *Q. E. I.* LIBER PRIMUS.

## *Idem aliter.*

Cum vis ad centrum ellipseos tendens, quâ corpus $P$ in ellipsi illâ revolvi potest, sit (per corol. 1. prop. X.) ut $CP$ distantia corporis ab ellipseos centro $C$; ducatur $CE$ parallela ellipseos tangenti $PR$; & vis, quâ corpus idem $P$ circum aliud quodvis ellipseos punctum $S$ revolvi potest, si $CE$ & $PS$ concurrant in $E$, (n) erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (per corol. 3. prop. VII.) hoc est, si punctum $S$ sit umbilicus ellipseos, ideoque $PE$ detur, ut $SPq$ reciprocè. *Q. E. I.*

Eâdem brevitate, quâ traduximus problema quintum ad parabolam, & hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, & usum ejus in sequentibus non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

PRO-

(n) Nam (per Coroll. III. Prop. VII.) vis tendens ad centrum C, quam exponat recta CP, est ad vim tendentem ad aliud punctum S, quam exponat recta $A$, ut $CP \times SP^2$ ad cubum rectæ quæ à centro C ad Tangentem RPZ duceretur parallela ad lineam SP à secundo virium centro ad punctum P curvæ ductam, quæ quidem recta æqualis foret PE, quoniam ipsi esset Parallela & inter easdem Parallelas DC RPZ, adeóque $CP \times SP^2 : PE^3 = CP : A = \frac{PE^3}{SP^2}$; hoc est, si punctum S sit umbilicus Ellipseos, adeóque $PE = AC$ (260) detur, erit vis ut $SP^2$ reciprocè; hic autem supponitur talem esse vim ad centrum C tendentem ut tempora periodica circà centra C, & S, æqualia sint, quod supponi potest.

DE MOTU CORPORUM.

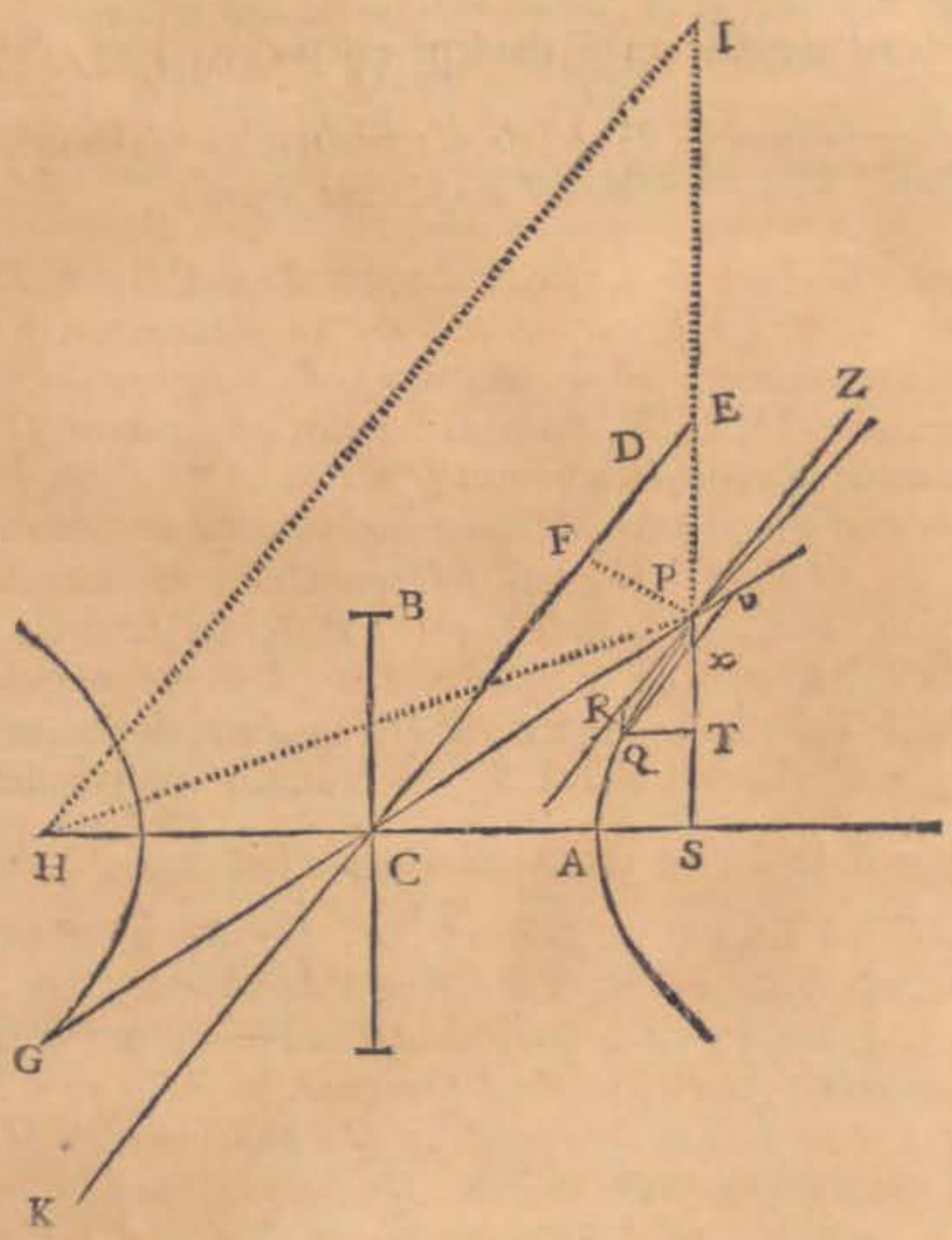
## PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

*Moveatur corpus in hyperbolâ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.*

Sunto $CA$, $CB$ ſemiaxes hyperbolæ; $PG$, $KD$, diametri aliæ conjugatæ; $PF$ perpendiculum ad diametrum $KD$; & $Qv$ ordinatim applicata ad diametrum $GP$. Agatur $SP$ ſecans cum diametrum $DK$ in $E$, tum ordinatim applicatam $Qv$ in $x$, & compleatur parallelogrammum $QRPx$. (°) Patet $EP$ æqualem eſſe ſemiaxi tranſverſo $AC$, eo quod, actâ ab altero hyperbolæ umbilico $H$ lineâ $HI$, ipſi $EC$ parallelâ, ob æquales $CS$, $CH$ æquentur $ES$, $EI$; adeo ut $EP$ ſemidifferentia ſit ipſarum $PS$, $PI$, id eſt (ob parallelas $IH$, $PR$ & angulos æquales $IPR$, $HPZ$) ipſarum $PS$, $PH$, quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad $SP$ demittatur perpendicularis $QT$.

Et hyperbolæ latere recto principali (ſeu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto $L$, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut $QR$ ad $Pv$, ſeu $Px$ ad $Pv$, id eſt (ob ſimilia triangula $Pxv$, $PEC$) ut $PE$ ad $PC$, ſeu $AC$ ad $PC$. Erit etiam $L \times Pv$ ad $Gv \times Pv$ ut $L$ ad $Gv$; & (ex naturâ conicorum) rectangulum $GvP$ ad $Qv$ *quad.* ut $PCq$ ad $CDq$; & (per corol. 2. lem. VII.) $Qv$ *quad.* ad $Qx$ *quad.* punctis $Q$ & $P$ coeuntibus fit ratio æqualitatis; & $Qx$ *quad.* ſeu $Qv$ *quad.* eſt ad $QTq$ ut $EPq$ ad $PFq$, id eſt, ut $CAq$ ad $PFq$, ſive (per lem. XII.) ut $CDq$ ad $CBq$: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad $QTq$ ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, ſeu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, ſive ut $2PC$ ad $Gv$. Sed punctis $P$ & $Q$ coeuntibus æquantur $2PC$ & $Gv$. Ergo & his pro-

(°) 263. Eſt $SE = SP + PE$ & ob æquales $ES$, $EI$, eſt $PI = EI + PE = ES + PE = SP + 2PE$, ac proinde $PI - SP = 2PE$, ac $PE$ eſt ſemidifferentia ipſarum $PS$, $PI$; ſed angulus $HPR = RPS$, angulus enim interceptus inter lineas à focis ad punctum Hyperbolæ ductas bifariam dividitur per Tangentem (per prop. 48. lib. 3. Conic. Apoll. vide Theor. V. de Hyp.) & $RPS = EPZ$ (per 15. 1. Elem.) adeóque $IPR = HPZ$, & ob parallelas $IH$, $PR$, angulus $PHI = HPR = IPZ = HIP$, unde $HP = PI$, adeóque $EP$, eſt ſemidifferentia ipſarum $PS$, $PH$, & quia differentia rectarum $PS$, $PH$, axem totum $2AC$, adæquat (per prop. 51. lib. 3. conic. Apoll. Vide ſup. Theor. IV. de Hyperb.); eſt $EP = AC$,




portionalia $L \times QR$ & $QTq$ (P) æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè est ut $L \times SPq$, id est, reciprocè in ratione duplicatâ distantiæ $SP$. *Q. E. I.*

## *Idem aliter.*

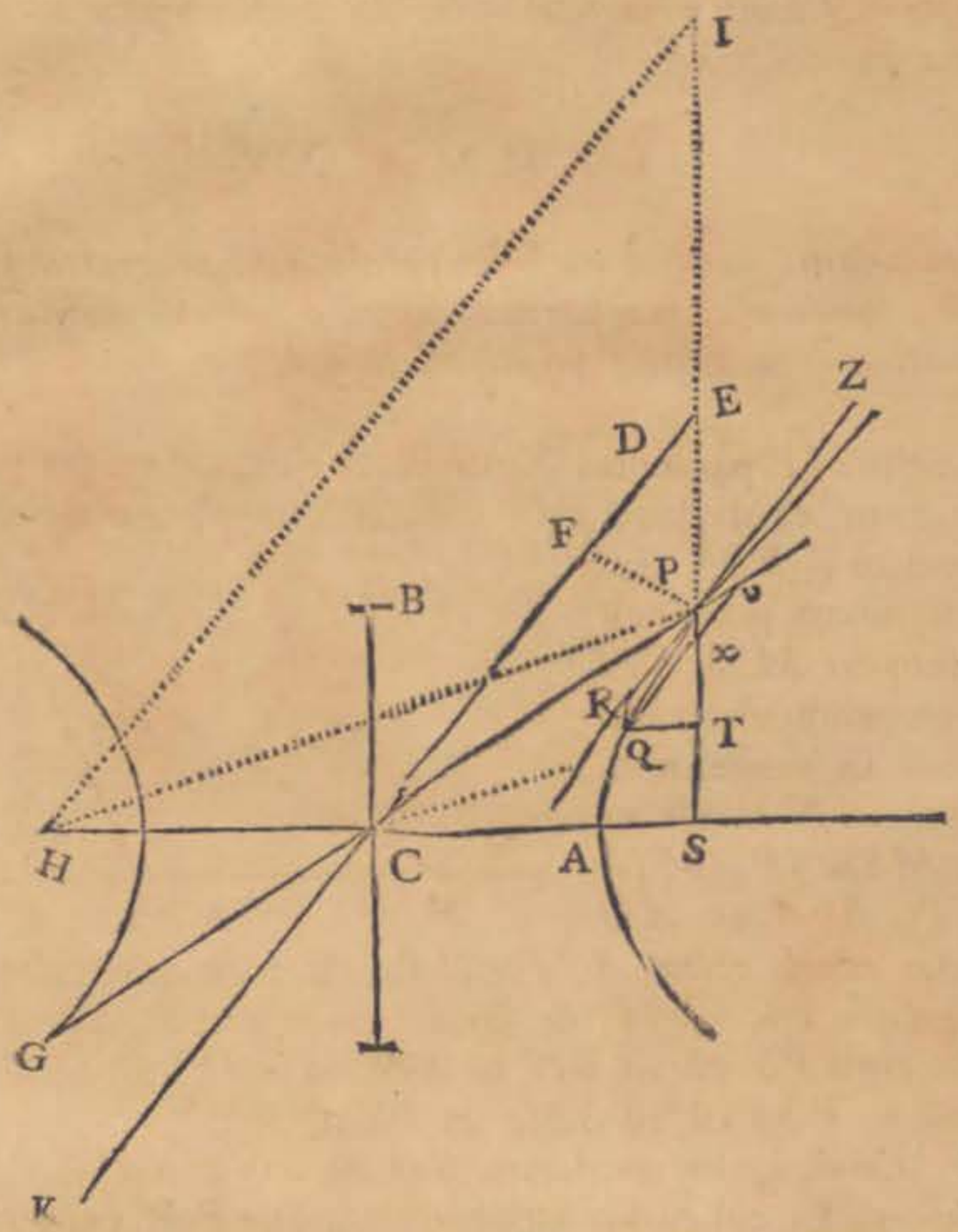
Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro *C*. Prodibit hæc distantiæ *CP* proportionalis. Inde vero (per. corol. 3. prop.

(P) 264. Notandum est quod in hyperbolâ sicut in Ellipsi, (ut liquet ex demonstratione Prop. X. & XI.) latus rectum principale sive $L = \frac{QT^2}{QR}$.

DE MOTU CORPORUM

VII.) vis ad umbilicum $S$ tendens erit ut $\frac{PE\,cub.}{SPq}$, hoc eſt, ob datam $PE$ reciprocè ut $SPq$. *Q. E. I.*

Eodem modo demonſtratur, quod corpus (9) hac vi cen-




(9) 265. Nam ex centro C, in tangentem PR productam ducta intelligatur recta ipſi HP parallela, & ea æqualis erit lineæ PE; Etenim ob parallelas PR, CE, & HI, angulus quem linea ipſi HP, parallela efficit cum CE, æqualis erit angulo $PHI = HIP = CEP$; lineæ autem intrà duas parallelas æqualiter inclinatæ ſunt æquales. Eſt igitur, (per coroll. 3. prop. VII.), vis centrifuga à centro C, tendens quâ corpus P, hyperbolam AQP, deſcribit ad vim centrifugam à foco H tendentem quâ eandem hyperbolam percurrit ut $CP \times HP^2$ ad $PE^3$. Vim à centro C, tendentem quæ eſt ut CP, exponat recta CP, & alteram vim à foco H directam exponat recta A, & erit $CP \times HP^2 : PE^3 = CP : A = \frac{PE^3}{HP^2}$, hoc eſt, ob PE æqualem datæ AC, vis à foco H tendens eſt reciprocè ut $HP^2$. 266.

tripetâ in centrifugam versâ movebitur in hyperbolâ oppositâ. LIBER PRIMUS.

## LEMMA XIII.

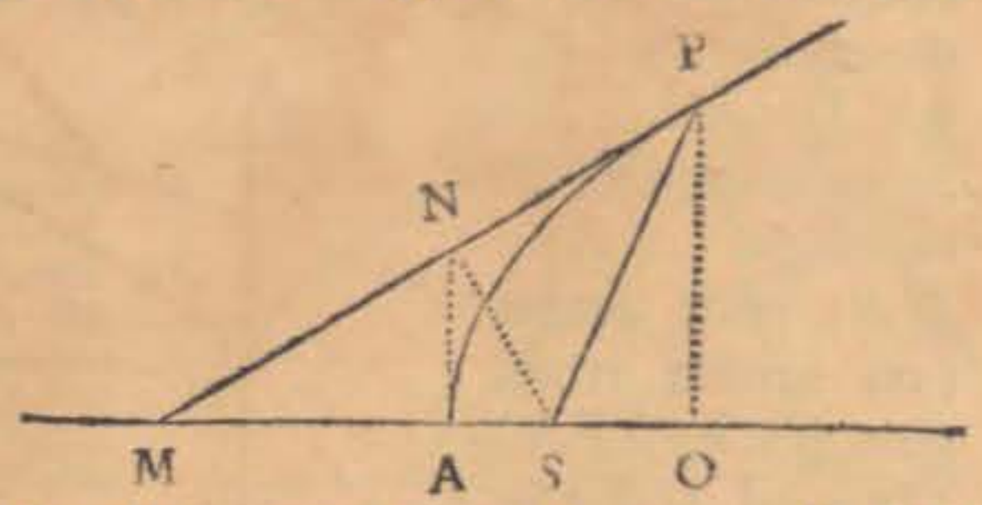
(r) *Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens est quadruplum distantiæ verticis illius ab umbilico figuræ.*

Patet ex conicis.

## LEMMA XIV.

*Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici à puncto contactus & à vertice principali figuræ.*

Sit enim $AP$ parabola, $S$ umbilicus ejus, $A$ vertex principalis, $P$ punctum contactus, $PO$ ordinatim applicata ad diametrum principalem, $PM$ tangens diametro principali occurrens in $M$, & $SN$ linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur $AN$ & ob æquales $MS$ & $SP$, $MN$, & $NP$, $MA$ & $AO$ parallelæ erunt rectæ $AN$ & $OP$; & inde triangulum $SAN$ rectangulum erit ad $A$, & simile triangulis æqualibus $SNM$, $SNP$: ergo $PS$ est ad $SN$ ut $SN$ ad $SA$. *Q. D. E.*




*Corol.* 1. $PSq$ est ad $SNq$ ut $PS$ ad $SA$.

(s) *Corol.* 2. Et ob datam $SA$ est $SNq$ ut $PS$.

*Corol.* 3. Et concursus tangentis cujusvis $PM$ cum recta $SN$, quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam $AN$ quæ parabolam tangit in vertice principali. PRO-

(r) 266. Dem.... Illius demonstrationem jam superius in Compendio de Conicis, Theor. IV. de Parabolâ dedimus.

(s) Cum fit (per coroll. 1.) $SA \times PS^2 = SN^2 \times PS$, adeóque $SA \times PS = SN^2$; erit ob datam $SA$, $SN^2$ ut $PS$, id est, variationes quadrati $SN^2$, in eâdem parabolâ erunt ut variationes rectæ $SP$ sive ut distantiæ à foco.

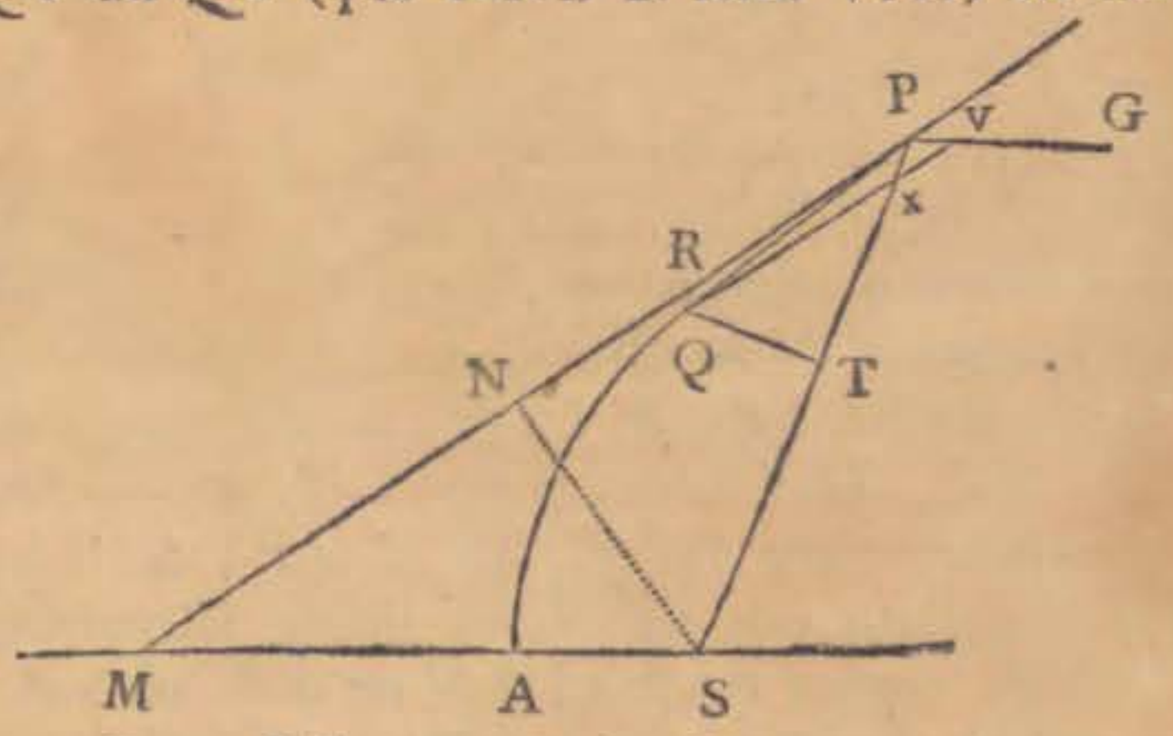
Nam

DE MOTU CORPORUM

## PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VIII.

*Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.*

Maneat conſtructio lemmatis, ſitque $P$ corpus in perimetro parabolæ, & à loco $Q$, in quem corpus proxime movetur, age ipſi $SP$ parallelam $QR$ & perpendicularem $QT$, necnon $Qv$ tangenti parallelam, & occurrentem tum diametro $PG$ in $v$, tum diſtantiæ $SP$ in $x$. Jam ob ſimilia triangula (t) $Pxv$, $SPM$, & æqualia unius latera $SM$, $SP$, æqualia ſunt alterius latera $Px$ ſeu $QR$ & $Pv$. Sed ex conicis quadratum ordinatæ $Qv$ æquale eſt rectangulo ſub latere recto & ſegmento diametri $Pv$, id eſt (per lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, ſeu $4PS \times QR$; & punctis $P$ & $Q$ coeuntibus, ratio $Qv$ ad $Qx$ (per corol. 2. lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo $Qx$ *quad.* eo in caſu æquale eſt rectangulo $4PS \times QR$. Eſt autem (ob ſimilia triangula $QxT$, $SPN$) $Qxq$ ad $QTq$ ut $PSq$ ad $SNq$, hoc eſt (per corol. 1. lem. XIV.) ut $PS$ ad $SA$, id eſt, ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per prop. IX. lib. V. elem.) (u) $QTq$ & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ æquale $SP$



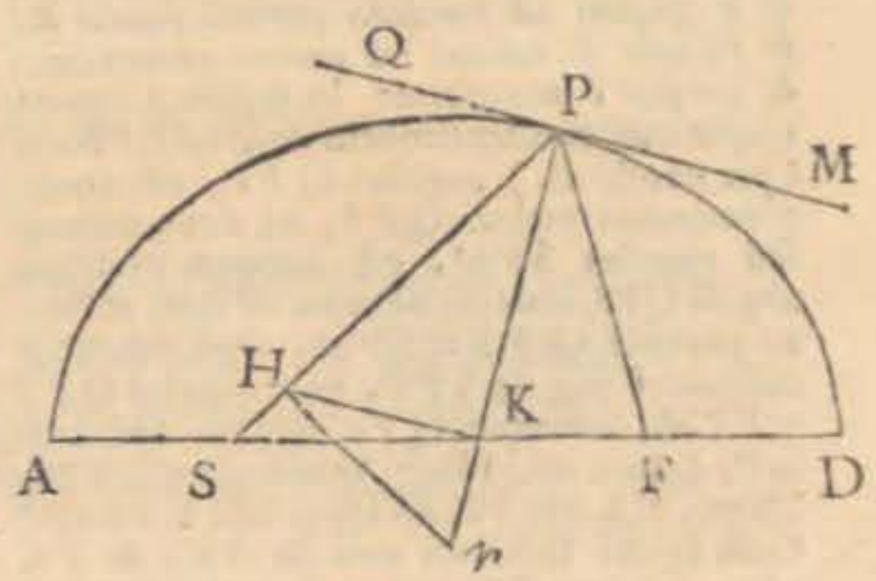

(t) * Nam ob parallelas MP & Qv, MS & PG, eſt angulus vPx = PSM & Pxv = Qxt = MPS.

(u) 267. Quoniam latus rectum principale $L = 4AS$, & eſt $4AS \times QR = QT^2$, erit etiam in parabolâ ut in cæteris Sectionibus conicis (264), latus rectum principale $L = \frac{QT^2}{QR}$.

$SPq \times 4SA$: & propterea (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut $SPq \times 4SA$, id eſt, ob datam $4SA$ reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ $SP$. *Q. E. I.*

*Corol.* 1. (*) Ex tribus noviſſimis propoſitionibus conſequens eſt, quod ſi corpus quodvis $P$ ſecundum lineam quamvis rectam $PR$ quâcunque cum velocitate exeat de loco $P$, & vi centripetâ, quæ ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliquâ ſectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico, & puncto contactus, & poſitione tangentis, deſcribi poteſt ſectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex datâ vi centripetâ, & velocitate corporis: & orbes duo ſe mutuo tangentes eâdem vi centripetâ eâdemque velocitate deſcribi non poſſunt.

*Co-*




(*) 268. Si corpus moveatur in aliquâ ſectionum conicarum umbilicum habente in centro virium, vis centripeta erit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum ab umbilico, & contrà ſi vis centripeta fuerit quadrato diſtantiæ à centro virium reciprocè proportionalis, corpus movebitur in aliquâ ſectionum conicarum... Dem... Prima pars propoſitionis à Newtono eleganter demonſtrata, poteſt adhuc aliter & generatim demonſtrari. Vis centripeta ut $\frac{SP}{SY^3 \times R}$ (212.) ſed in omni ſectione conicâ $R = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ (239.) Ergò $\frac{SP}{SY^3 \times R} = \frac{2SY^3 \times SP}{SY^3 \times L \times SP^3} = \frac{2}{L \times SP^2}$ hoc eſt, ob datam $\frac{2}{L}$, vis eſt ut $\frac{1}{SP^2}$. Q. e. 1^um.

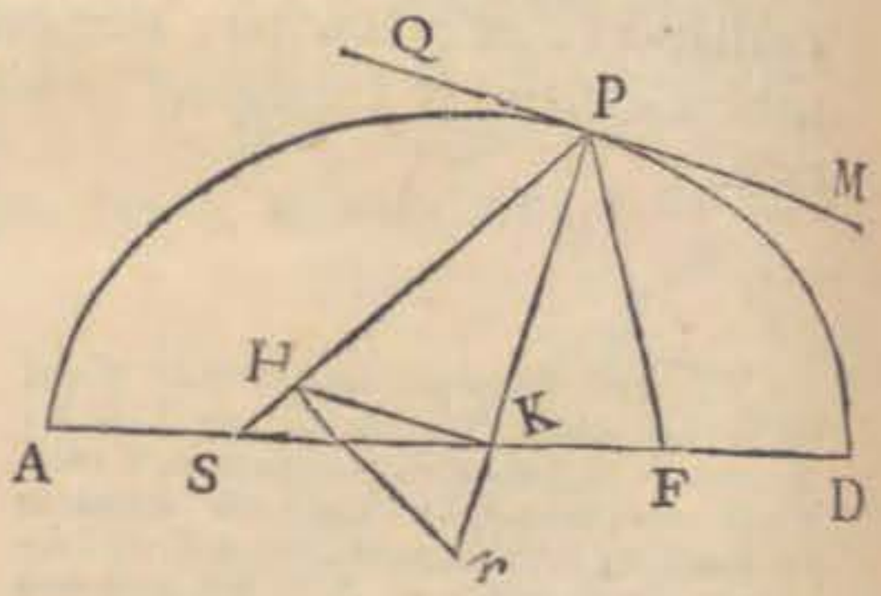
Corpus $P$, datâ cum velocitate ſecundum directionem datam PQ projiciatur, ſitque vis centripetæ ad punctum S tendentis quantitas abſoluta data in puncto dato P, in variis à centro diſtantiis ea vis ſit ſemper in ratione inversâ quadrati diſtantiæ à centro S, ſi ea fuerit corporis $P$ velocitas quam vi centripetâ ut eſt in P uniformiter urgente acquireret cadendo per $\frac{1}{2}$ SP & prætered PS ſit ad PQ perpendicularis, corpus $P$ circulum deſcribet cujus centrum S & radius PS (201.) Si verò alia fuerit velocitas, aut PS ad PQ obliquâ, corpus $P$ aliam deſcribet orbitam in quâ tangens PQ, non ſemper erit ad radium vectorem SP perpendicularis. Sit igitur PQ ad SP obliqua, datur Pr, radius circuli orbitam à corpore $P$ deſcribendam oſculantis in P; ex r in PS demittatur perpendicularis r H, & ex H in P r perpendicularis H K, jungaturque SK;

DE MOTU CORPORUM.

*Corol.* 2. Si velocitas, quâcum corpus exit de loco ſuo $P$, ea ſit, quâ lineola $PR$ in minimâ aliquâ temporis particulâ deſcribi poſſit; & vis centripeta potis ſit eodem tempore corpus idem movere per ſpatium $QR$: movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ ſectione; cujus latus rectum principale eſt quantitas illa (γ) $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi lineolæ $PR$, $QR$ in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad ellipſin; & caſum excipio, ubi corpus rectà deſcendit ad centrum.

PRO.

SK; Deindè fiat angulus QPF complementum ad duos rectos anguli QPS, & ſi fuerit PF parallela ipſi SK, deſcribatur parabola cujus umbilicus S, axis SK, & punctum perimetri P, data ſunt. Si verò PF ipſi SK occurrat in puncto aliquo F, tunc focis S, & F, & perimetri puncto P datis deſcribatur Hyperbola ſi puncta S & F cadant ad eandem partem puncti K, & Ellipſis ſi cadant ad partes contrarias, & corpus *P* movebitur in ſectione conicâ per eam conſtructionem deſcriptâ. Nam (per conſtruct.) angulus QPF, eſt complementum anguli QPS, ad duos rectos; ſed angulus SPM, eſt quoque ejuſdem anguli QPS, complementum ad duos rectos, ac proindè QPF=SPM, ergò ſubducto communi angulo SPF, erit angulus QPS =FPM, adeòque QP, tangens ſectionis in P, (prop. 48. Lib. 3. conic. Apoll. & per Theor. III. aut IV. de Hyp. Ell. & Parab.) Cum igitur ſectionis axis ſit SK, & PK ad tangentem PQ normalis (per conſtr.) erit P r radius curvaturæ ſectionis in puncto P, (239.) eadem igitur eſt ſectionis conicæ & orbitæ quam corpus *P* deſcribit tangens atque curvatura in puncto P, porrò ſectio conica DPA deſcribi poteſt vi aliquâ centripetâ ad umbilicum S tendente quæ ſit ſemper reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ ab illo puncto S (per ſuperius demonſtrata) & ex datis corporis alicujus *A* ſectionem deſcribentis, velocitate in puncto P, directione tangentis PQ, directione vis PS, & curvaturâ ſectionis conicæ in P, datur vis centripetæ quantitas abſoluta in puncto P, (242.) quâ corpus *A* in ſectione conicâ retinetur in P, ponamus velocitatem corporis *A* eandem cum velocitate projectionis corporis *P* orbitam ſuam deſcribentis, tùm eadem erit ejus orbitæ & Sectionis Conicæ curvatura in P, idem virium centrum S, idem punctum P, eadem tangens PQ, eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ, ac proindè eadem illius quantitas abſoluta in puncto P, tam in ſectione conicâ quàm in orbitâ à corpore *P* deſcribendâ. Cùm igitur corpus P, iis poſitis unicam curvam deſcribere poſſit & quidem ſectionem conicam DPA poſſit deſcribere, eam reverâ deſcribet (244.) Q. e. 2^um.



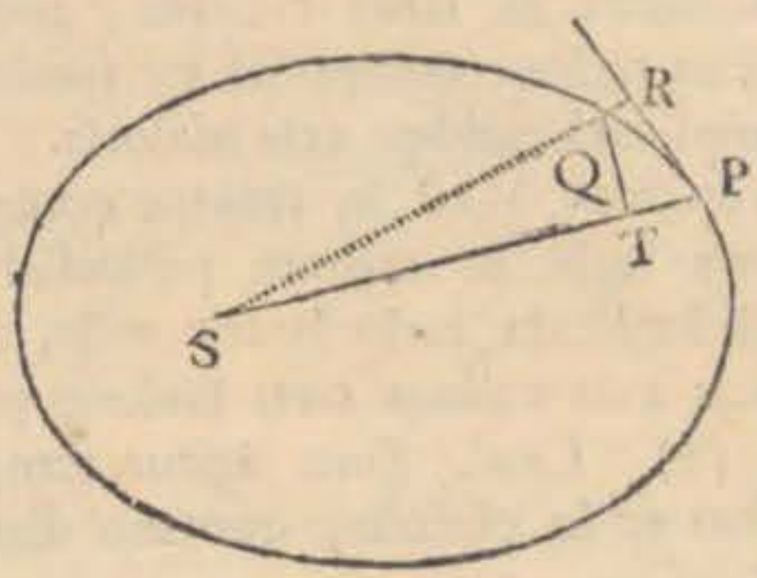

2^um. hujuſce propoſitionis partem formulis analyticis invenerunt Hermannus & Bernoullius in monumentis Academiæ Pariſienſis, an. 1710.

(γ) * Patet ex notâ 267.

## PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

*Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta ſit reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ locorum à centro; dico quod orbium latera recta principalia ſunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore deſcribunt.*

(z) Nam (per corol 2. prop. XIII.) latus rectum $L$ æquale eſt quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi cocunt puncta $P$ & $Q$. Sed linea minima $QR$ dato tempore eſt ut vis centripeta generans, hoc eſt (per hypotheſin) reciprocè ut $SPq$. Ergo $\frac{QTq}{QR}$ eſt ut $QTq \times SPq$, hoc eſt, latus rectum $L$ in duplicatâ ratione areæ $QT \times SP$. *Q. E. D.*




*Corol.* (a) Hinc ellipſeos area tota, eique proportionale rectangulum ſub axibus eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota eſt ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore deſcribitur, ducta in tempus periodicum. PRO-

(z) 269. Sint in Hypotheſi propoſitionis XIV. duarum ſectionum conicarum arcus quam minimi PQ, pq, ſimul deſcripti, $L$, $l$, earumdem latera recta, (& per prop. VI. & Hyp.) $QR : qr = Sp^2 : SP^2$. Sed (267.) $\frac{QT^2}{QR} : \frac{qt^2}{qr} = L : l = \frac{QT^2}{Sp^2} : \frac{qt^2}{Sp^2} = QT^2 \times Sp^2 : qt^2 \times Sp^2$.




Sunt autem $QT \times SP$, $qt \times Sp$, ut ſectores evaneſcentes SQP, Sqp, ergo latera recta $L$, $l$, ſunt in duplicatâ ratione arearum ſimul deſcriptarum; nam areæ quævis ſimul deſcriptæ ſunt ſemper ut ſectores SQP, Sqp, ſimul deſcripti, ob æquabilem circà centrum virium S arearum deſcriptionem in utrâque ſectione conicâ. Hinc in analogiis loco quadrati areæ dato tempore deſcriptæ ſubſtitui poteſt ſectionis latus rectum & contrà, dummodo id fiat in Hypotheſi propoſitionis.

(a) 270. *Hinc Ellipſeos area tota eique proportionale rectangulum ſub axibus* (250.) *eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione lateris recti & ratione temporis periodici.*

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

*Iisdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsibus sunt in ratione sesquiplicatâ majorum axium.*

(b) Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque ideo rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & sesquiplicatâ ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per corol. prop. XIV.) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquiplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis *Q. E. D.*

(c) *Coroll.* Sunt igitur tempora periodica in ellipsibus eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipseon.

PRO-

*dici.* Namque tempus periodicum (252.) est ut area tota directe & area tempore dato descripta inversè, adeòque area tota est ut area QT×SP quæ dato tempore describitur (hoc est, (269.) ut radix quadrata lateris recti) ducta in tempus periodicum.

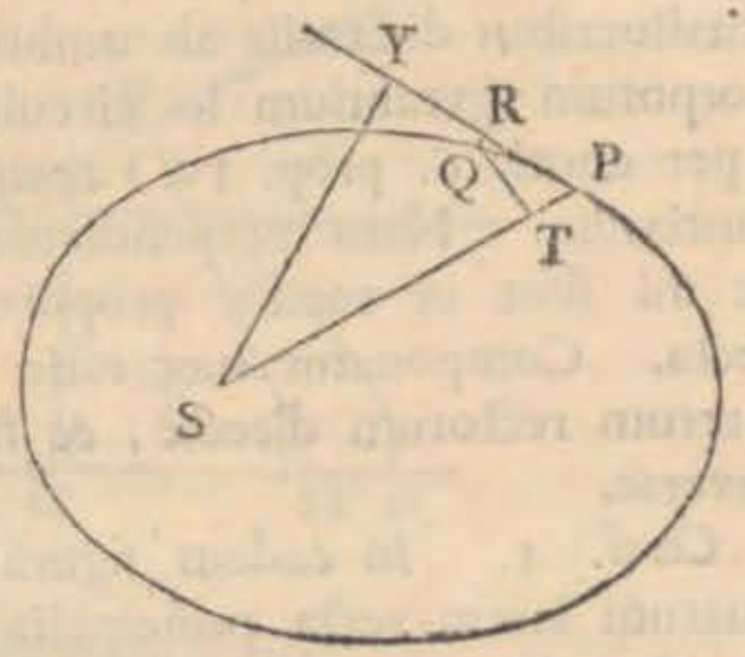
(b) 271. Sit Ellipsis axis major A, minor B, Latus rectum L, tempus periodicum T; & quoniam A:B=B:L, erit $B^2 = A \times L$, $B = A^{\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$, $A \times B = A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$, sed rectangulum A×B, (270.) est ut $T \times L^{\frac{1}{2}}$, ergò $A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ est ut $T \times L^{\frac{1}{2}}$, & dividendo utrumque terminum per $L^{\frac{1}{2}}$ erit $A^{\frac{3}{2}}$ ut T.

(c) 272. Circulus est species ellipsis cujus foci cum centro coincidunt & Latus rectum cum diametro; sed tempora periodica in Ellipsibus quæ axem majorem æqualem habent sunt æqualia (271.) ergò in Ellipsi & circulo cujus diameter seu axis æquatur axi majori ellipsis, tempora periodica æquantur.

Ve-

## PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

*Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione compositâ ex ratione perpendiculorum inversè, & subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.*




Ab umbilico $S$ ad tangentem $PR$ demitte perpendiculum $SY$, & velocitas corporis $P$ erit reciprocè in subduplicatâ ratione quantitatis $\frac{SYq}{L}$.

Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus $PQ$ in datâ temporis particulâ descriptus, hoc est (per lem. VII.) ut tangens ([d]) $PR$, id est, ob proportionales $PR$ ad $QT$ & $SP$ ad $SY$, ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, sive ut $SY$ reciprocè & $SP \times QT$ directè; estque $SP \times QT$ ut area dato tempore descripta, id est (per prop. XIV.) in subduplicatâ ratione lateris recti. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. ([e]) Latera recta principalia sunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum, & duplicatâ ratione velocitatum.

*Corol.* 2. Velocitates corporum, in ([f]) maximis & minimis ab umbilico communi distantiis, sunt in ratione compositâ ex ratione

([d]) * Velocitas est ut tangens PR, sed ob angulos ad T & Y rectos & angulos QPT, YPS, punctis P, Q, coeuntibus æquales, triangulum evanescens QPT, simile erit triangulo PSY, adeòque QP (PR): QT = SP: SY, & $PR = \frac{SP \times QT}{SY}$.

([e]) * Velocitatis quadratum $c^2$, est directè ut $\frac{L}{SY^2}$ (prop. XVI.) ergò L est ut $c^2 \times SY^2$.

([f]) * Maximæ & minimæ distantiæ sunt axis partes ab umbilico ad vertices principales contentæ, adeoque cùm illic axis sit perpen-



ne

DE MOTU CORPORUM.

ne distantiarum inversè, & subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè. Nam perpendicula jam sunt ipsæ distantiæ.

*Corol.* 3. (g) Ideoque velocitas in conicâ sectione, in maximâ vel minimâ ab umbilico distantiâ, est ad velocitatem in circulo in eadem à centro distantia in subduplicatâ ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam.

*Corol.* 4. (h) Corporum in ellipsibus gyrantium velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi sunt eædem, quæ corporum gyrantium in circulis ad easdem distantias; hoc est (per corol. 6. prop. IV.) reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum. Nam perpendicula jam sunt semi-axes minores, & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inversè cum subduplicatâ ratione laterum rectorum directè, & fiet ratio subduplicata distantiarum inversè.

*Corol.* 5. In eadem figurâ, vel etiam in figuris diversis, quarum latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est reciprocè ut perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem.

*Corol.* 6. (i) In parabolâ velocitas est reciprocè in subduplicatâ ratione distantiæ corporis ab umbilico figuræ; in ellipsi ma-

pendicularis tangenti, ipsa perpendicula ad tangentem in maximis & minimis distantiis sunt ipsæ distantiæ; mediocres distantiæ sunt distantiæ ab umbilico ad vertices axis minoris Ellipseos, adeòque semiaxi majori æquantur.

(g) * Nam circulus ille (272.) est ellipsis cujus latus rectum est ipsa diameter, ideoque est ipsa dupla distantia ab umbilico seu centro, quare cum eadem ponatur distantia tam in conicâ sectione quàm in circulo, velocitates sunt in subduplicatâ ratione laterum rectorum, hoc est in subduplicatâ ratione lateris recti sectionis conicæ, ad duplam illam distantiam quæ est latus rectum circuli.

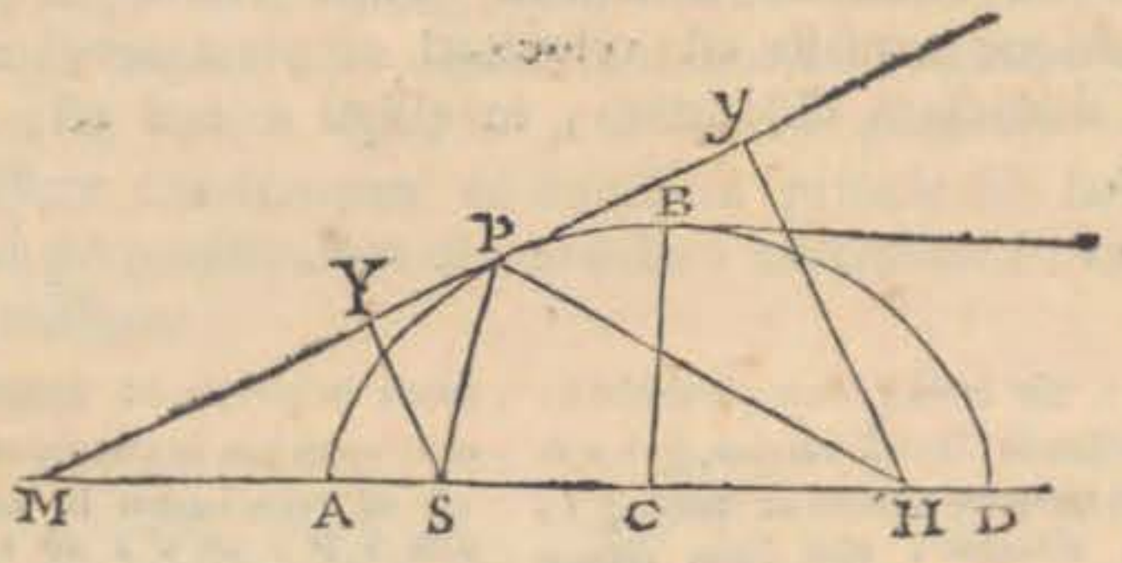
(h) * Sit $A$ corporis in Ellipsi gyrantis mediocris distentia ab umbilico, sit etiam circuli radius $A$; semiaxis minor, seu perpendicularis demissa ex umbilico in tangentem axi majori parallellam sit $B$, latus rectum $L$, & circuli latus rectum (272.) erit $2A$, velocitas in Ellipsi sit $C$, in circulo $c$, & erit (per prop. XVI.) $C^2 : c^2 = \frac{L}{B^2} : \frac{2A}{A^2} = L \times A : 2B^2$; sed ex Conicis distantiâ à foco ad extremitatem semi axis minoris (quæ est mediocris distantia) est æqualis semiaxi majori, est ergo distantia $A$ semiaxis major, ideoque cum ex conicis sit $A : B = 2B : L$, est $2B^2 = A \times L$, ergò $C^2 = c^2$, & $C = c$.

(i) *In Parabolâ velocitas est reciprocè in subduplicatâ ratione distantiæ corporis ab umbilico figuræ*, cum enim velocitas sit reciprocè ut perpendiculum demissum ab umbili-

magis variatur, in hyperbolâ minus quàm in hac ratione. Nam (per corol. 2. lem. XIV.) perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem parabolæ est in subduplicatâ ratione distantiæ. In hyperbolâ perpendiculum minus variatur, in ellipsi magis.

LIBER PRIMUS.

Co-




bilico ad Tangentem, per præced. Coroll., & (per Cor. 2. Lem. XIV.) quadratum ejus perpendiculi sit semper in Parabolâ ut distantia à foco, erit velocitas reciprocè ut radix quadrata illius distantiæ à foco, sive in *subduplicatâ ratione distantiæ* &c.

276. Lemma. Sit Ellipsis A P B, cujus axis major A D, foci S & H, semiaxis minor B C; M y tangens in P, S Y & H y in tangentem perpendiculares; ob angulos Y P S, H P y, æquales (prop. 48. lib. 3. conic. Apoll. sup. Theor. IV. de Ellip.) similia sunt triangula S P Y, H P y, undè $SP : SY :: HP : Hy$ $= \frac{SY \times HP}{SP}$, ac proindè $SY \times Hy = \frac{SY^2 \times HP}{SP}$ $= BC^2$ (ex conicis. Vid. sup. n. 236.) sed $HP + SP = AD$ (prop. 52. lib. 3. conic. Apoll. sup. Theor. III. de Ellipsi) unde est $HP = AD - SP$ ergò $\frac{SY^2 \times AD - SP}{SP}$ $= BC^2$; & $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$. Ergò in Ellipsi, $SY^2$ variatur in ratione $\frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$ sive ob quantitatem $BC^2$, constantem in ratione $\frac{SP}{AD - SP}$.

Crescat distantia SP, minor fiet AD−SP, si non mutaretur denominator fractionis $\frac{SP}{AD - SP} = SY^2$, cresceret $SY^2$ sicut SP, cum autem minuatur denominator S p crescente, eo ipso major fit valor fractionis $\frac{SP}{AD - SP}$ ergo crescente S P, $SY^2$ magis crescit quam in solâ ratione S P, *ergo perpendiculum in ellipsi magis variatur quam in subduplicatâ ratione distantiæ* S P.

In Hyperbolâ verò, quoniam $HP - SP = AD$ (prop. 51. lib. 3. conic. Apoll. Theor. III. de Hyp.) & $HP = AD + SP$, eodem modo reperitur $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD + PS}$ & crescente SP, crescit etiam $AD + SP$, si idem maneret denominator crescerent $SY^2$ sicut SP, denominatore aucto, fractio $\frac{SP}{AD + SP}$ fit minor quam eo manente, sed ea exprimit valorem quadrati perpendiculi S Y, ergo S $Y^2$ minus crescit quàm S P sive *perpendiculum in Hyperbolâ minus variatur quam in subduplicatâ ratione distantiæ* S P.

277.

DE MOTU CORPORUM.

*Corol.* 7. (k) In parabolâ velocitas corporis ad quamvis ab umbilico diſtantiam eſt ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro diſtantiam in ſubduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem; (l) in ellipſi minor eſt, in hyperbolâ major quàm in hac ratione. Nam per hujus corollarium ſecundum velocitas in vertice parabolæ eſt in hac ratione, & per corollaria ſexta hujus & propoſitionis quartæ ſervatur eadem proportio in omnibus diſtantiis. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis eſt velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam diſtantiam, in ellipſi minor eſt, in hyperbolâ major.

*Co-*

(k) 277. Sit latus rectum parabolæ $L$, adeóque diſtantia foci à vertice $\frac{1}{4} L$, & ex umbilico tanquam centro ac radio $\frac{1}{4} L$, deſcribatur circulus, ejus latus rectum ſeu diameter erit $\frac{1}{2} L$; undè velocitas corporis in vertice parabolæ erit ad velocitatem corporis in illo circulo revolventis ut $\sqrt{L}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2} L}$, hoc eſt, ut $\sqrt{2}$ ad 1. (corol. 2. hujuſce Prop.) ſed per coroll. 6. velocitas in vertice parabolæ eſt ad velocitatem in aliâ quâvis ab umbilico diſtantiâ SP, ut $\sqrt{SP}$ ad $\sqrt{\frac{1}{4} L}$, & (per corol. 6. prop. IV.) velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{4} L$, eſt etiam ad velocitatem in alio circulo cujus radius SP, ut $\sqrt{SP}$, ad $\sqrt{\frac{1}{4} L}$; quarè velocitas in vertice parabolæ eſt ad velocitatem in eâdem parabolâ ad diſtantiam SP, ut velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{4} L$, ad velocitatem in circulo cujus radius eſt SP, ac proindè alternando velocitas in vertice parabolæ eſt ad velocitatem in circulo radio $\frac{1}{4} L$ deſcripto, hoc eſt, $\sqrt{2}$ ad 1, ut velocitas in parabolâ in diſtantiâ SP, ad velocitatem in circulo ad eandem à centro ſeu umbilico diſtantiam deſcripto.

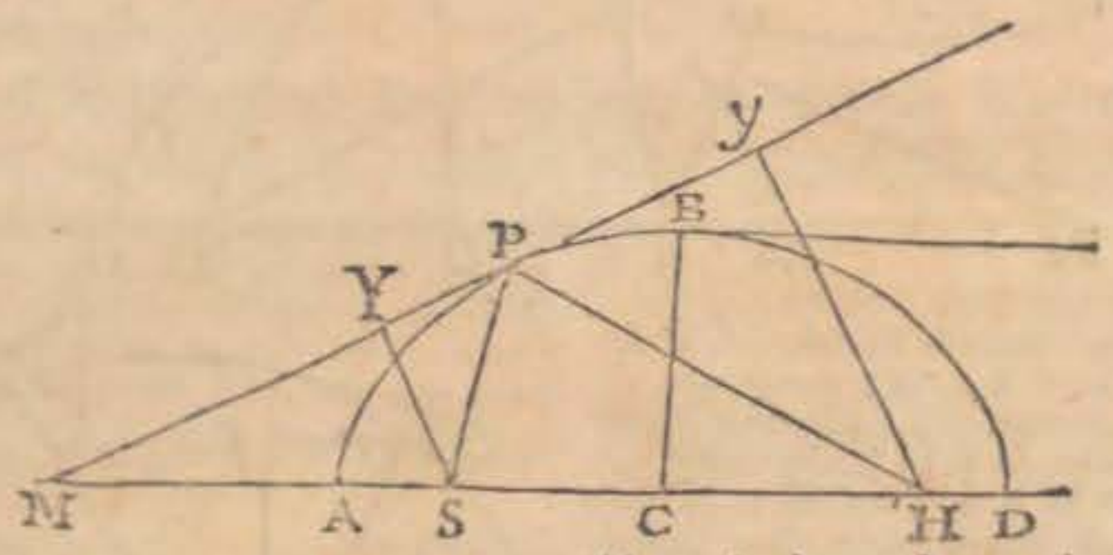
278. *Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis eſt velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam diſtantiam*; nam velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ SP eſt ad velocitatem in circulo cujus radius SP, ut $\sqrt{2}$ ad 1, (per coroll. 6. prop. IV.) ſed velocitas in parabolâ ad diſtantiam SP, eſt ad velocitatem in circulo cujus radius SP, etiam ut $\sqrt{2}$. ad 1, velocitas igitur in parabolâ ad diſtantiam SP, æquatur velocitati in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ SP.

(l) 279. *In Ellipſi velocitas corporis ad quamvis ab umbilico diſtantiam eſt ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro diſtantiam in minore ratione* quam $\sqrt{2}$ ad 1; *in Hyperbolâ in ratione majore.* Sit enim Ellipſis vel hyperbolæ latus rectum $L$, diſtantia ab umbilico SP, perpendiculum ad tangentem ſectionis in puncto P demiſſum SY; SP, ſit radius circuli, C ſit velocitas in Ellipſi vel hyperbola ad diſtantiam SP; C, velocitas in circulo, & erit (per prop. XVI.) $c^2 : C^2 = \frac{L}{SY^2}$; $\frac{2SP}{SP^2} = L \times SP : 2SY^2$; ſed (276) $2SY^2 = \frac{2BC^2 \times SP}{AD \mp SP}$, ergo $c^2 : C^2 = L \times SP : \frac{2BC^2 \times SP}{AD \mp SP}$ $= L \times AD \mp SP : 2BC^2$; & ob $L \times AD = 4BC^2$ ſeu $2BC^2 = L$

*Corol.* 8. Velocitas gyrantis in sectione quâvis conicâ est ad velocitatem gyrantis in circulo in distantiâ dimidii lateris recti principalis sectionis, ut distantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem sectionis demissum. (m) Patet per corollarium quintum.

*Corol.* 9. (n) Unde cum (per corol. 6. prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo sit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in conicâ sectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eâdem distantiâ, ut media proportionalis inter distantiam illam communem & semissem principalis lateris recti sectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

PRO-




$= \frac{L \times AD}{2}$, est $c^2 : C^2 = 2AD \mp 2SP : AD$; unde in Ellipsi in quâ $2SP$ habet signum $-$, ratio $c^2$ ad $C^2$, minor est quam ratio 2, ad 1, & ratio $c$ ad $C$, minor quam ratio $\sqrt{2}$, ad 1; in hyperbolâ major ob $+ 2SP$ (276.)

280. Coroll. Quoniam distantia ab altero sectionis foco $HP = AD \mp SP$, erit $c^2 : C^2 = 2HP : AD = HP : \frac{1}{2}AD$, hoc est, velocitas in Ellipsi & hyperbolâ ad quamvis ab umbilico seu centro virium distantiam SP est ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam in ratione subduplicatâ distantiæ HP ab altero umbilico ad semiaxem majorem.

(m) * Nam iste circulus & sectio Conica idem latus rectum habent, quia in circulo distantia à Centro semi diametro æquatur & tota diameter est latus Rectum, ideo velocitates sunt reciprocè ut perpendicula in Tangentem demissa (per Cor. 5, hujusce) sed in circulo semidiameter perpendiculo æquatur, ergo velocitates in sectione & in circulo sunt ut semi-diameter circuli ad Perpendiculum &c.

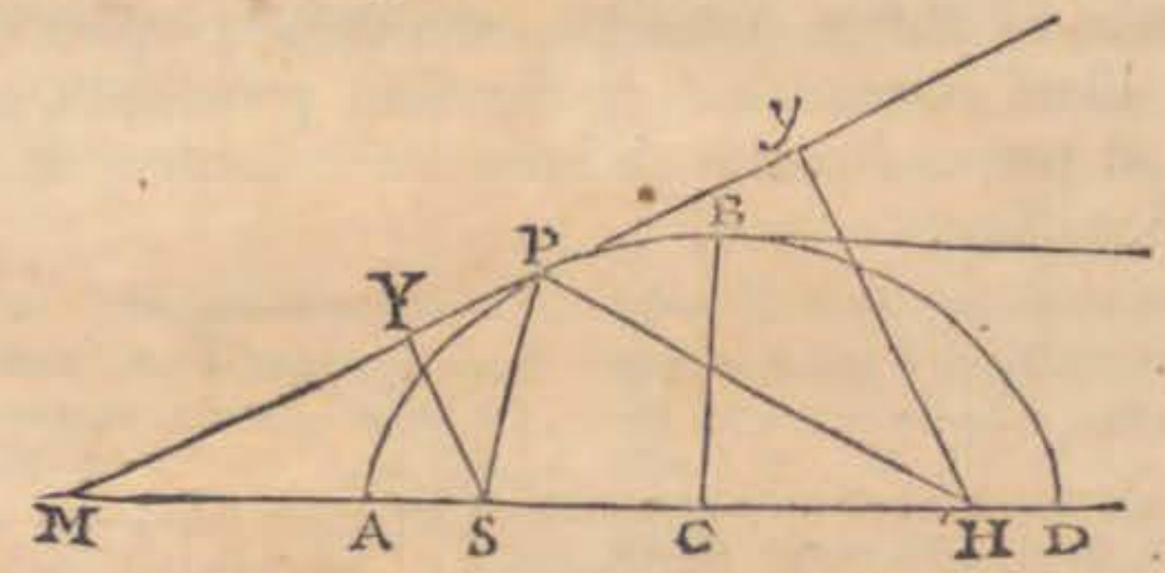
(n) 281. Sit $C$ velocitas corporis gyrantis in circulo ad distantiam dimidii lateris recti $\frac{1}{2}L$, $c$ velocitas in sectione conicâ ad distantiam $SP$, $K$ velocitas in circulo ad eandem distantiam $SP$, & erit (per coroll. 8.) $c^2 : C^2 = \frac{1}{4}L^2 : SY^2$ (& per cor. 6. prop. IV.) $C^2 : K^2 = SP : \frac{1}{2}L$. undè, ex æquo, $c^2 : K^2 = SP \times \frac{1}{4}L^2 : SY^2 \times \frac{1}{2}L = SP \times \frac{1}{2}L : SY^2$. Fiat $SP : m = m : \frac{1}{2}L$, & erit $m^2 = SP \times \frac{1}{2}L$, ac proindè $c^2 : K^2 = m^2 : SY^2$ & $c : K = m : SY$.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

*Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea, quam corpus describit de loco dato cum datâ velocitate secundum datam rectam egrediens.*

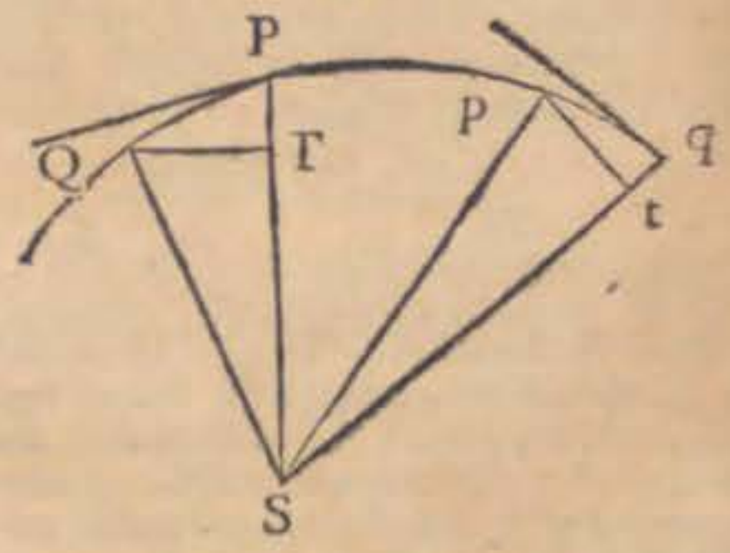
Vis centripeta tendens ad punctum $S$ ea sit, quâ corpus $p$ in orbitâ quâvis datâ $p\,q$ gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco $p$. De loco $P$ secundum lineam $PR$




282. Sit C, centrum Ellipsis, CB semiaxis minor, foci S & H, tendatque vis centripeta ad focum S; velocitas in P erit ad velocitatem in B, in subduplicatâ ratione distantiæ H P à foco H, ad distantiam S P ab altero foco seu centro virium S; Nam velocitas in P dicatur $C$, velocitas in B dicatur $c$, & erit (per cor. 5. prop. XVI.) $C : c = CB : SY$, adeóque $C^2 : c^2 = CB^2 : SY^2$, hoc est, ob $CB^2 = SY \times Hy$ (235.) $C^2 : c^2 = SY \times Hy : SY^2 = Hy : SY$; sed ob similia triangula SPY, HPy, $Hy : SY = HP : SP$. Ergò $C^2 : c^2 = HP : SP$, & $C : c = H\,P^{\frac{1}{2}}, S\,P^{\frac{1}{2}}$ Q. e. D.

Theorema illud invenit clarissimus Geometra Abrahamus de Moivre.

283. Velocitas angularis corporis P, in quâvis orbitâ Q P p, revolventis seu angulus P S Q, quem radius vector S P, dato tempore minimo describit est directè ut Q T perpendicularis ad radium vectorem SP, & distantia S P inversè, dum puncta Q & P coeunt, nam linea perpendicularis Q T pro arcu circuli haberi potest, undè angulus $PSQ = \frac{QT}{SP}$ (153.)

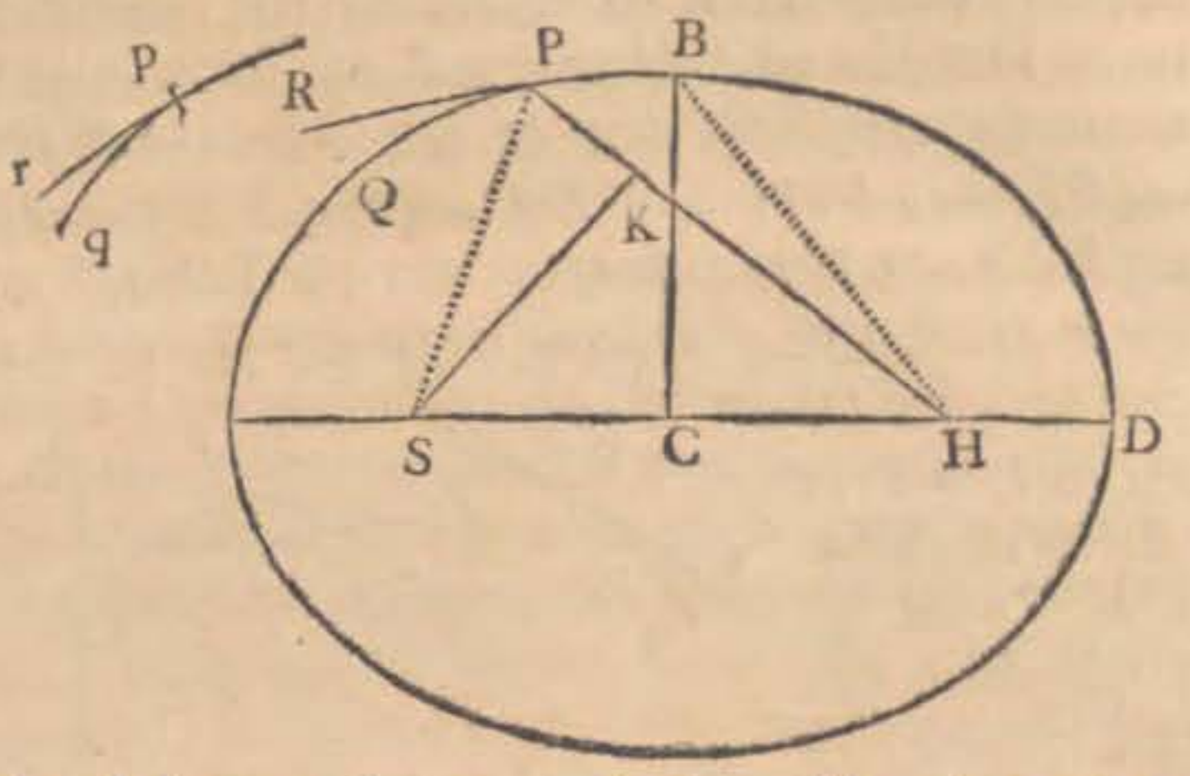



284. Coroll. 1. Hinc velocitas angularis in eâdem orbitâ est ubique reciprocè in duplicatâ ratione distantiæ S P à centro virium S. Nam sectores P S Q, p S q, eodem tempusculo descripti sunt æquales (prop. I.). Undè $QT \times SP = qt \times Sp$, adeóque $QT : qt = Sp : SP$, & hinc $\frac{QT}{SP} : \frac{qt}{Sp} = \frac{Sp}{SP} : \frac{SP}{Sp} = Sp^2 : SP^2$.

285. Coroll. 2. Velocitates angulares in sectionibus conicis circà umbilicum communem seu centrum virium descriptis sunt inter se ut radices quadratæ laterum rectorum principalium directè & quadrata dis-

exeat corpus $P$ cum datâ velocitate, & mox inde, cogente vi centripetâ, deflectat illud in coni sectionem $PQ$. Hanc igitur recta $PR$ tanget in $P$. Tangat itidem recta aliqua $pr$ orbitam $pq$ in $p$, & si ab $S$ ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per corol. 1. prop. XVI.) latus rectum principale coni sectionis ad latus rectum principale orbitæ in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum & duplicatâ ratione velocitatum, atque ideo datur. (a) Sit $L$ coni sectionis latus






distantiarum inversè. Nam, (per prop. XIV.) Latera recta $L$, $l$, sunt in duplicatâ ratione sectorum $PSQ$, $pSq$, simul descriptorum, seu $L^{\frac{1}{2}} : l^{\frac{1}{2}} = QT \times SP : qt \times Sp$, adeóque $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SP} : \frac{l^{\frac{1}{2}}}{Sp} = QT : qt$; & hinc velocitates angulares seu anguli minimi $PSQ$, $pSq$, hoc est, $\frac{QT}{SP}$, $\frac{qt}{Sp}$, sunt ut $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SP^2}$, $\frac{l^{\frac{1}{2}}}{Sp^2}$.

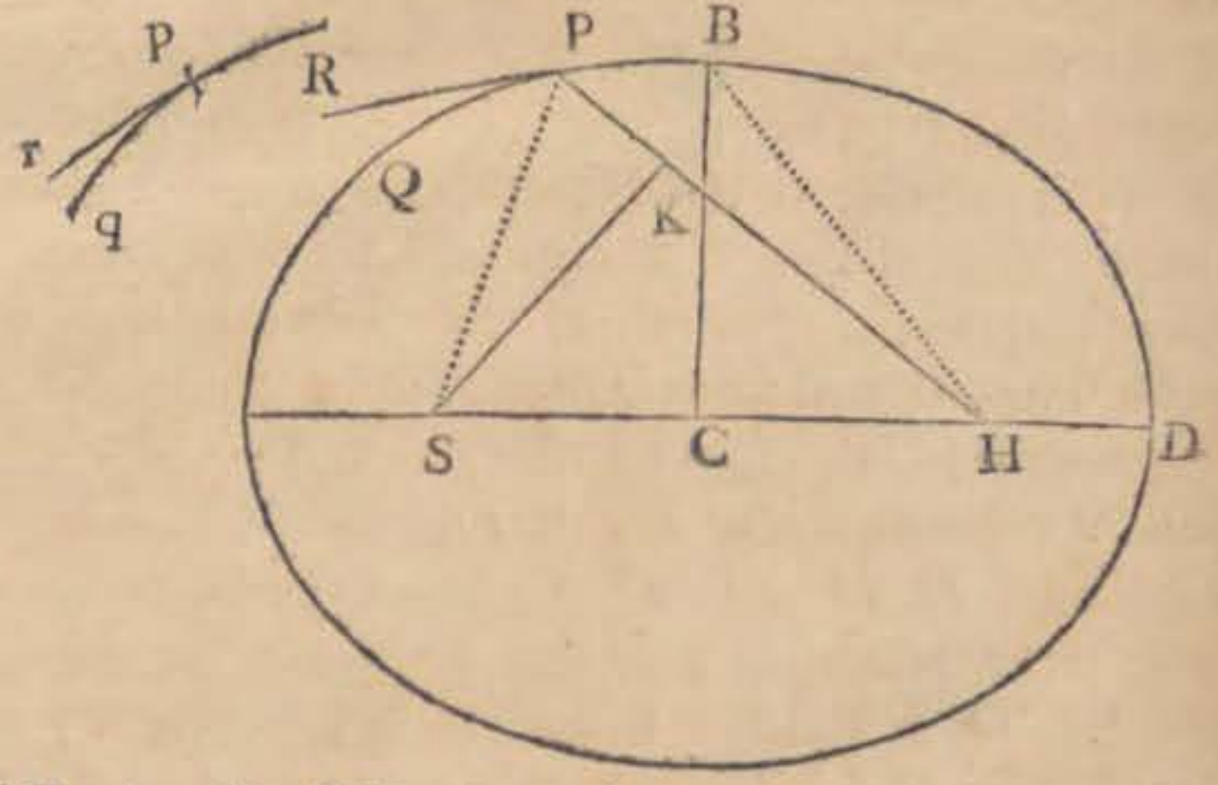
(a) Solutio hujus Problematis duas continet partes; Sit enim corpus è puncto P secundum lineam PR datâ cum velocitate projectum & retineatur circa punctum S per vim centripetam quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum à Centro cujusque quantitas absoluta in puncto P sit cognita, id corpus describet (per Cor. 1. Prop. XIII.) sectionem aliquam Conicam cujus 1°. quæritur Latus Rectum principale, 2°. Dato umbilico S illius sectionis, puncto P, Tangente PR, & latere recto quæritur alter umbilicus, quo nempe invento & ex cæteris datis describetur sectio Conica quam Corpus propositum percurrit.

Ad primam solutionis partem, fingitur sectio quælibet Conica cujus umbilicus sit S, & alter umbilicus & latus rectum ad arbitrium sumuntur, unde in quovis ejus puncto P duci poterit Tangens, & quantitas vis in eo puncto erit cognita, est enim ad vim in puncto P quæ data est reciprocè ut quadrata linearum Sp, SP; Invenietur etiam velocitas in eo puncto p; Nam velocitas corporis gyrantis in circulo ad distantiam Sp (sive arcus in eo descriptus tempore quo arcus PQ describitur) est media proportionalis inter vim centripetam in p, quæ inventa est, & duplam distantiam Sp (per naturam circuli), hæc verò est ad velocitatem in hâc Sectione Conicâ, ut perpendiculum ab S ad Tangentem communem demissum ad mediam proportionalem inter distantiam Sp & semissem lateris Recti istius sectionis.

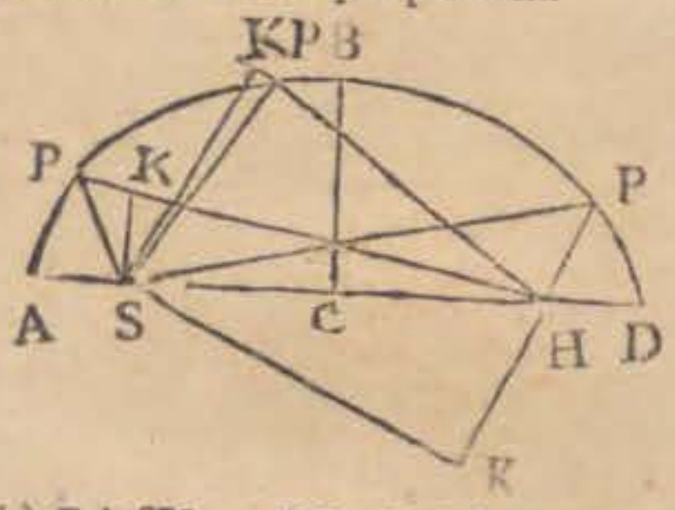
Cum ergo (per Cor. 1. Prop. XVI.) *Latera Recta principalia sectionum circà umbilicum communem descriptarum sint in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum & duplicatâ ratione velocitatum* & ob datas Tangentes in p & P dentur perpendicula ex S in eas Tangentes demissa, deturque Velocitas corporis moti in P & inventa sit velocitas in puncto p, datur ratio Lateris

DE MOTU CORPORUM.

rectum. Datur præterea ejuſdem coni ſectionis umbilicus *S*. Anguli *RPS* complementum ad duos rectos fiat angulus *RPH*; & dabitur poſitione linea *PH*, in quâ umbilicus alter *H* locatur. Demiſſo ad *PH* perpendiculo *SK*, erigi intelligatur ſemiaxis conjugatus *BC*, (b) & erit $SPq - 2KPH + PHq = SHq = 4CHq = 4BHq - 4BCq = \overline{SP + PH}$: *quad.* $- L \times \overline{SP + PH}$ (c) $= SPq + 2SPH + PHq - L \times \overline{SP + PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP + PH}$, & fiet $L \times \overline{SP + PH} = 2SPH + 2KPH$, ſeu $\overline{SP + PH}$ ad *PH* ut $2SP + 2KP$ ad *L*. Uude datur *PH* tam longitudine quam poſitione. Nimirum ſi ea ſit corporis in *P* velocitas, ut latus rectum *L* minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit *PH* ad eandem partem tangentis *PR*




Recti ſectionis aſſumptæ ad Latus Rectum ſectionis quam corpus P deſcribit; Quod ergo invenitur, eratque primum.




(b) *Erit* $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SH^2$, Etenim (per 12. & 13. 2. Elem.) in omni Triangulo SPH, quadratum lateris SH quod conſideratur ut Hypothenuſa anguli P, æquatur quadratis aliorum laterum SP PH dempto duplo Rectanguli lateris PH in quod cadit perpendiculum, ducti in partem PK ab Angulo P ad perpendiculum uſque interceptam, quæ quidem PK ſumitur cum ſigno + ſi ſit ab eâdem parte Tangentis ac S & cum ſigno − ſi ſit in parte oppoſitâ.

(c) 287. $SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2$ &c. Ex naturâ Ellipſeos eſt 2BH æqualis axi majori 2AC ideoque æqualis SP + PH & $4BH^2 = \overline{SP + PH}^2$, pariter eſt 2AC: 2BC = 2BC: *L* eſt ergo $4BC^2 = L \times 2AC$ ſive $L \times \overline{SP + PH}$ unde eſt $4BH^2 - 4BC^2 = \overline{SP + PH}^2 - L \times \overline{SP + PH}$.

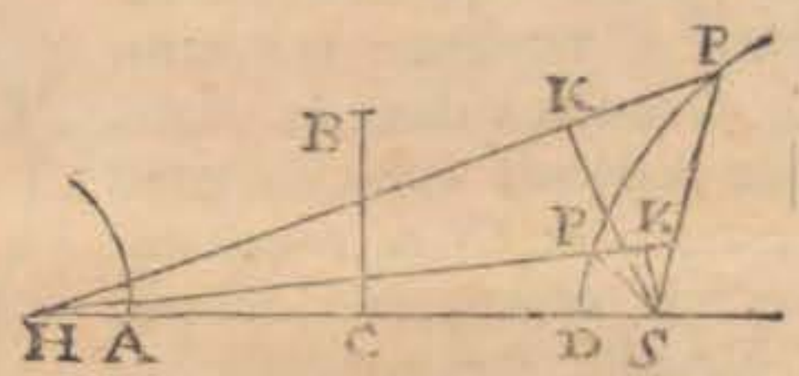
Collatis itaque valoribus ejuſdem quantitatis $SH^2$, eſt $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = \overline{SP}^2 + 2SP \times PH + PH^2 - L \times \overline{SP + PH}$, utrinque detractis æqualibus manet $-2KP \times PH = 2SP \times PH - L \times \overline{SP + PH}$ tranſpoſitiſque partibus negativis eſt $L \times \overline{SP + PH} = 2SP \times PH + 2KP \times PH$ ſive $2SP + 2KP \times PH$ unde eſt $2SP + 2KP : L = SP + PH : PH$ & dividendo $2SP + 2KP - L : L = SP : PH$ unde

cum linea $PS$; ideoque figura erit ellipsis, & ex datis umbilicis $S$, $H$, & axe principali $SP+PH$, dabitur. Sin tanta sit corporis velocitas ut latus rectum $L$ æquale fuerit $2SP+2KP$, longitudo $PH$ infinita erit; & propterea figura erit parabola axem habens $SH$ parallelum lineæ $PK$, & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo $P$ exeat, capienda erit longitudo $PH$ ad alteram partem tangentis; ideoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum $SP$ & $PH$, & inde dabitur. Nam si corpus in his casibus revolvatur in conicâ sectione sic inventâ, demonstratum est in prop. XI, XII, & XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum distantiæ corporis à centro virium $S$ reciprocè; ideoque linea $PQ$ rectè exhibetur, quam corpus tali vi describet, de loco dato $P$, cum datâ velocitate, secundum rectam positione datam $PR$ egrediens. $Q.E.F.$

*Corol.* 1. Hinc in omni coni sectione ex dato vertice principali $D$, latere recto $L$, & umbilico $S$, datur umbilicus alter $H$ capiendo $DH$ ad $DS$ ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$. (d) Nam proportio $SP+PH$ ad $PH$ ut $2SP+2KP$ ad $L$ in casu hujus corollarii, fit $DS+DH$ ad $DH$ ut $4DS$ ad $L$, & divisim $DS$ ad $DH$ ut $4DS-L$ ad $L$.

unde quo magis accedit valor lateris recti $L$ ad quantitatem $2SP+2KP$, eo major est $PH$ respectu $SP$. si $L=2SP+2KP$, infinitum est $SP$ respectu $PH$, hoc est, Ellipsis abit in Parabolam, si $L$ sit majus quam $2SP+2KP$, primus terminus Proportionis fit negativus, ideoque $PH$ in partem oppositam Tangentis cadet & sectio fiet Hyperbola; manentibus autem cæteris crescit Latus Rectum cum velocitate in puncto P datâ: Unde quo major fit velocitas respectu vis centripetæ eo magis elongatur Ellipsis quam describit corpus propositum vel etiam in Parabolâ movetur, & tandem in Hyperbolâ.

288. Demonstratio pro Hyperbolâ ita instituitur: Quia $PK$ non est in eâdem parte Tangentis ac $S$, sumitur $PK$ cum signo $-$ ideoque est $SH^2=SP^2+2KP\times PH+PH^2$, & per naturam Hyperbolæ $SH^2=4CH^2=4CA^2+4CB^2$ sive quia $2CA=PH-SP$ & $4CB^2=L\times 2CA$ est $SH^2=PH^2-2SP\times PH$




$+SP^2+L\times\overline{PH-SP}$ unde collatis valoribus $SH^2$ & detractis quantitatibus communibus est $2KP\times PH=-2SP\times PH+L\times\overline{PH-SP}$ & transpositis quantitatibus negativis est $2KP\times PH+2SP\times PH=L\times\overline{PH-SP}$ unde est $2SP+2KP:L=PH-SP:PH$, & convertendo $L-2SP-2KP:L=SP:PH$.

(d) 289. In casu hujus corollarii punctum P cadit in D, punctum K cadit in S, fitque $PK=DS=SP$, & $PH=DH$. Quare in omni sectione conicâ est $DH$, ad $DS$, ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$.

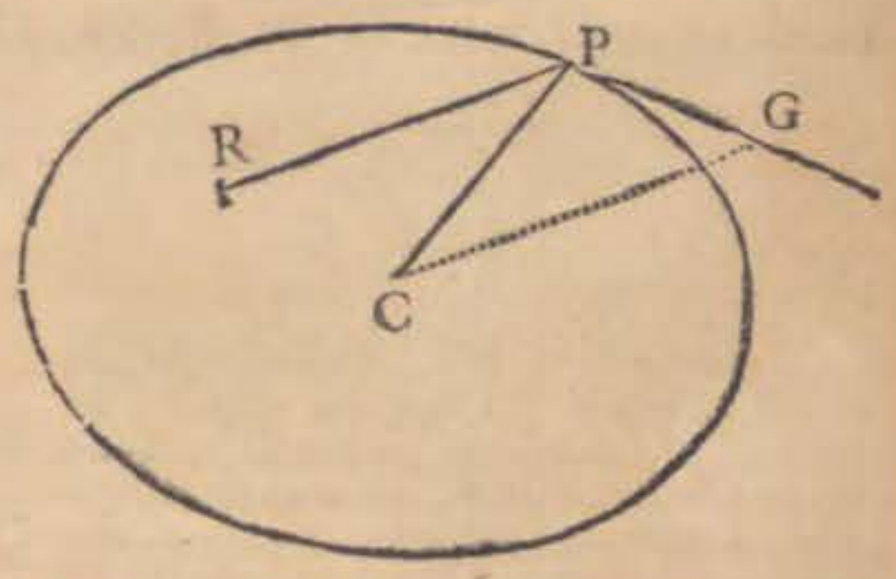
DE MOTU CORPORUM.

*Corol.* 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali $D$, invenietur orbita expeditè, capiendo scilicet latus rectum ejus ad duplam distantiam $DS$, in duplicatâ ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam $DS$ gyrantis (per corol. 3. prop. XVI.); dein $DH$ ad $DS$ ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$.

*Corol.* 3. Hinc etiam si corpus moveatur in sectione quâcunque conicâ, & ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest orbis, in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

*Corol.* 4. Et si corpus illud vi aliquâ extrinsecus impressâ continuo perturbetur, innotescet cursus quam proximè, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogiâ mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

## *Scholium.*




Si corpus $P$ vi centripetâ ad punctum quodcunque datum $R$ tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque sectionis conicæ, cujus centrum sit $C$; & requiratur lex vis centripetæ: ducatur $CG$ radio $RP$ parallela, & orbis tangenti $PG$ occurrens in $G$; & (e) vis illa (per corol. 1. & schol. prop. x. & corol. 3. prop. VII.) erit ut $\frac{CG\ cub.}{RP\ quad.}$

(e) 290. Vis ad centrum vel à centro C, tendens est ut CP, (per coroll. 1. Prop. X. & Not. 232.) adeòque exponatur per lineam CP; vis ad punctum R, tendens exponatur per lineam A, & (per corol. 3. prop. VII.) erit $CP \times RP^2$: $CG^3 = CP : A = \frac{CG^3}{RP^2}$.

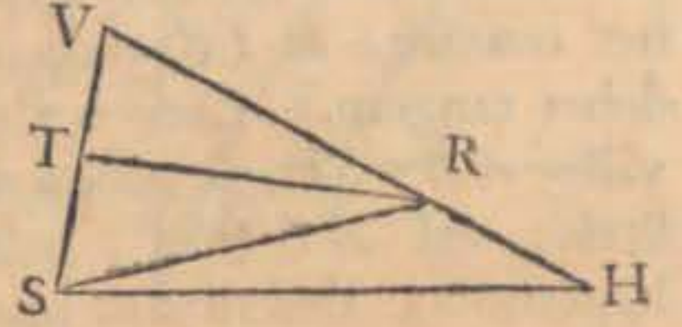
Si

## SECTIO IV.

*De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.*

### LEMMA XV.

*Si ab ellipſeos vel hyperbolæ cujuſvis umbilicis duobus* S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis ſit axi principali figuræ, id eſt, axi in quo umbilici jacent, altera* SV *à perpendiculo* TR *in ſe demiſſo biſecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *ſectionem conicam alicubi tanget: & contra, ſi tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*

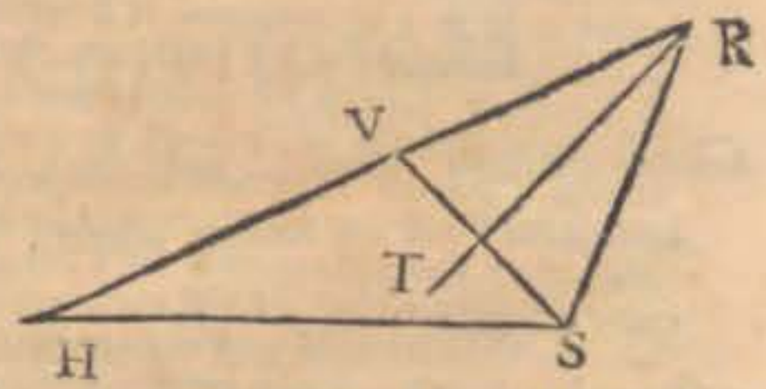



Secet enim perpendiculum *TR* rectam *HV* productam, ſi opus fuerit, in *R*; & jungatur *SR*. Ob æquales *TS*, *TV*, æquales erunt & rectæ *SR*, *VR* & anguli *TRS*, *TRV*. (f) Unde punctum *R* erit ad ſectionem conicam, & perpendiculum *TR* tanget eandem & contra. *Q. E. D.*

PRO-

(f) * Si fuerint S, & H, Ellipſeos umbilici, erit S R + R H = H V = axi majori, ac proinde R punctum perimetri Ellipſis quam T R tangit in R, ob angulos T R S, T R V, æquales (per prop. 52. & 46. lib. 3. conic. Apollon. Theor. III. & IV. de El.) & contrà ſi T R tangat Ellipſim in R, & ducatur S V, ad TR perpendicularis, erit ob angulos T R S, T R V, æquales V R = S R, & V H = S R + R H = axi majori.

* Si fuerint S, & H, Hyperbolæ umbilici ob æquales T S, T V, erit S R = V R, & H R − S R = H V æqualis axi majori, & R punctum Hyperbolæ quam tangit in R recta T R ob angulos V R T, T R S, æquales (per prop. 51. & 46. lib.




3. conic. Apoll. Theor. III. & IV. de Hyperb.) & contrà ſi T R tangat Hyperbolam in R, & agatur S V ad T R perpendicularis erit V R = S R, & H V = H R − R S, æqualis axi majori, ut patet.

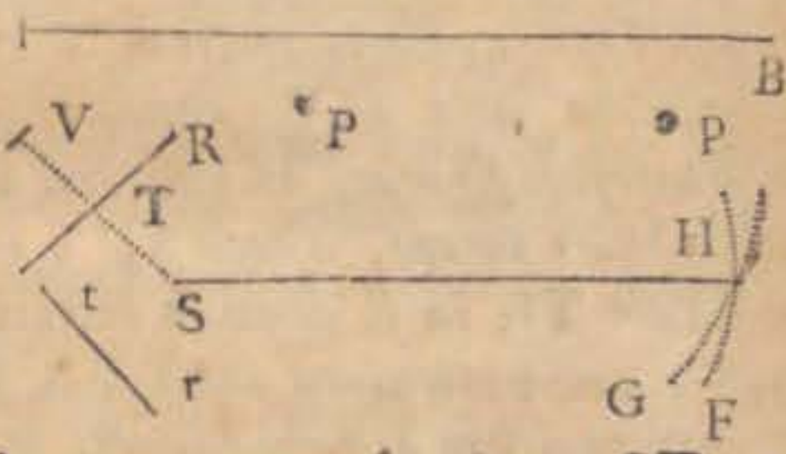
Si

De Motu Corporum.

## PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

*Datis umbilico & axibus principalibus describere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.*

Sit *S* communis umbilicus figurarum; *AB* longitudo axis principalis trajectoriæ cujusvis; *P* punctum per quod trajectoria debet transire; & *TR* recta quam debet tangere. Centro *P* intervallo *AB*−*SP*, si orbita sit ellipsis, vel *AB*+*SP*, si ea sit hyperbola, describatur circulus *HG*. Ad tangentem *TR* demittatur perpendiculum *ST*, & producatur idem ad *V*, ut sit *TV* æqualis *ST*; centroque *V* & intervallo *AB* describatur circulus *FH*. Hac methodo sive dentur duo puncta *P*, *p*, sive duæ tangentes *TR*, *tr*, sive punctum *P* & tangens *TR*, describendi sunt circuli duo. Sit *H* eorum intersectio communis, & umbilicis *S*, *H*, axe illo dato describatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria descripta (eo quod *PH*+*SP* in ellipsi, & *PH*−*SP* in hyperbola æquatur axi) transibit per punctum *P*, & (per lemma superius) tanget rectam *TR*. Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo *P*, *p*, vel tanget rectas duas *TR*, *tr*. (g) *Q. E. F.*



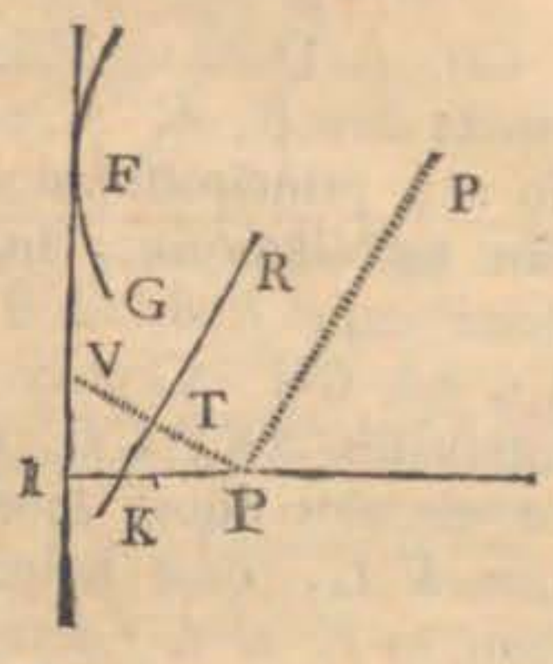

## PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

*Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas continget.*

Sit *S* umbilicus, *P* punctum & *TR* tangens trajectoriæ describendæ. Centro *P* intervallo *PS* describe circulum *FG*. Ab um-

* (g) Si orbita sit Hyperbola, focus H, erit in rectâ HS, ultra S, productâ.

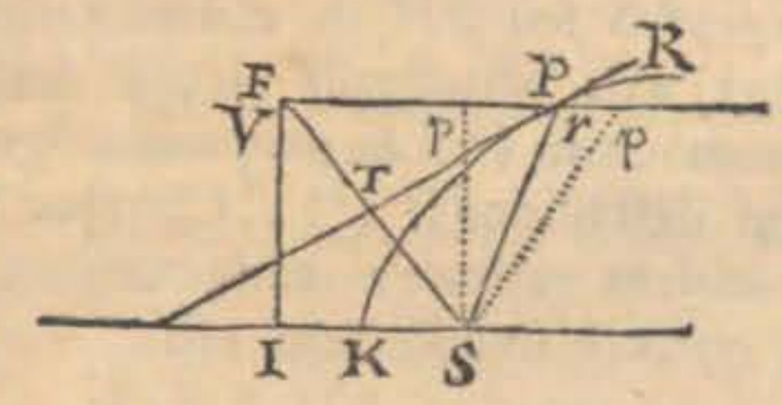
umbilico ad tangentem demitte perpendicularem $ST$, & produc eam ad $V$, ut sit $TV$ æqualis $ST$. Eodem modo describendus est alter circulus $fg$, si datur alterum punctum $p$; vel inveniendum alterum punctum $v$, si datur altera tangens $tr$; dein ducenda recta $IF$ quæ tangat duos circulos $FG$, $fg$ si dantur duo puncta $P$, $p$, vel transeat per duo puncta $V$, $v$, si dantur duæ tangentes $TR$, $tr$, vel tangat circulum $FG$ & transeat per punctum $V$, si datur punctum $P$ & tangens $TR$. Ad $FI$ demitte perpendicularem $SI$, eamque bisecca in $K$; & axe $SK$, vertice principali $K$ describatur parabola. Dico factum. (h) Nam parabola, ob æquales $SK$&$IK$, $SP$&$FP$, transibit per punctum $P$; & (per lem. XIV. corol. 3.) ob æquales $ST$&$TV$ & angulum rectum $STR$, tanget rectam $TR$. *Q. E. F.*




PRO-

(h) 191. *Nam Parabola ob æquales SK & IK, SP & FP, transibit per punctum P* scilicet Parabola descripta *ob æquales SK & IK* habet pro directrice lineam IF (per Theor. II. de Parab. n. 224. de Conicis), cum verò distantia puncti cujusvis Parabolæ à Directrice sit æqualis distantiæ ejus puncti à foco, vice versâ, punctum quod æqualiter à foco & à Directrice distabit pertinebit ad Parabolam, Finge enim lineam FP Directrici perpendicularem occurrere quidem Parabolæ in puncto P, ita ut sit FP=SP, sed in eâ posse sumi aliud punctum p ita ut sit etiam Sp=Fp=FP ±Pp, erit ob FP=SP, Sp=SP±Pp sed cum SPp sit Triangulum, absurdum est (per 20. 1. Elem.) esse Sp=SP±Pp ergo absurdum est fingere aliud Punctum præter id quod ad Parabolam pertinet tale ut ejus distantiâ à directrice sit æqualis ejus distantiæ à foco, ergo *ob æquales SP & FP*, Parabola cujus directrix est IF & umbilicus S *transibit per punctum P.*

2us. Casus. Parabola descripta *ob æquales ST, TV, ob angulum Rectum STR tanget rectam TR*, ejus enim Parabolæ descriptæ directrix est VI. Jam verò ducatur ex V perpendicularis in directricem quæ rectæ TR occurrat in r & ab r ducatur ad focum linea rS, ob æquales ST TV & angulum rectum STR erit Vr=rS & punctum r ad Parabolam pertinebit per superiorem demonstrationis partem, eâdem ratione probabitur angulum VrT æqualem esse angulo TrS ideoque linea Tr bifariam dividit angulum VrS, sed ea linea Parabolæ Tangens est quæ bifariam dividit angulum quem faciunt duæ lineæ ductæ à puncto quovis Parabolæ una ad focum altera perpendiculariter ad directricem (per Theor. III. de Parabola n. 224.) ergo linea TR tangit Parabolam descriptam sive *Parabola descripta tanget Rectam TR.*

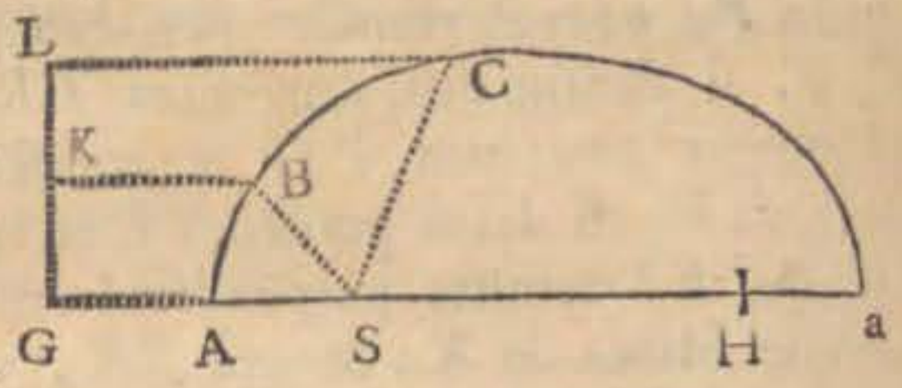


DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

*Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis ſpecie* (i) *datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.*

*Caſ.* 1. Dato umbilico $S$, deſcribenda ſit trajectoria $ABC$ per puncta duo $B$, $C$. Quoniam trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis principalis ad diſtantiam umbilicorum. In ea ratione cape $KB$ ad $BS$, & $LC$ ad $CS$. Centris $B$, $C$, intervallis $BK$, $CL$, deſcribe circulos duos, & ad rectam $KL$, quæ tangat eoſdem in $K$ & $L$, demitte perpendiculum $SG$, idemque ſeca in $A$ & $a$, ita ut ſit $GA$ ad $AS$ & $Ga$ ad $aS$ ut eſt $KB$ ad $BS$ & axe $Aa$, verticibus $A$, $a$, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Sit enim $H$ umbilicus alter figuræ deſcriptæ, & cum ſit $GA$ ad $AS$ ut $Ga$ ad $aS$, erit diviſim $Ga-GA$ ſeu $Aa$ ad $aS-AS$ ſeu $SH$ in eâdem ratione, ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus; (k) & propterea figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribenda. (l) Cumque ſint $KB$ ad $BS$ & $LC$ ad $CS$ in eâdem ratione, tranſibit hæc figura per puncta $B$, $C$, ut ex conicis manifeſtum eſt.



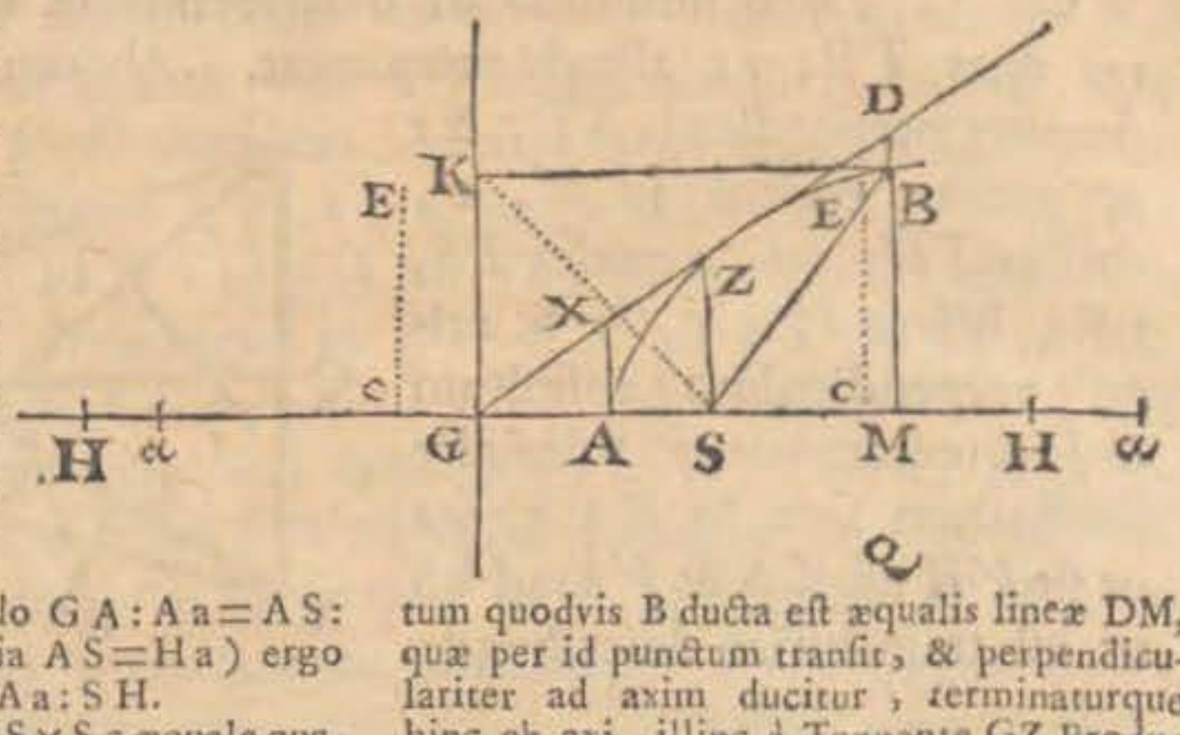

(i) 292. Sectiones conicæ ſunt ejuſdem ſpeciei ſeu ſimiles quarum axes duo, vel quod idem eſt, axis major & focorum diſtantia ſunt inter ſe in datâ ratione; Ex hâc enim ratione unicè pendent partium ſectionis ratio ac reſpectiva poſitio, atque hinc fit ut parabolæ omnes ſimiles ſint quod in omnibus focorum diſtantia infinita majori axi æqualis ſit.

(k) * Si deſcribenda ſit hyperbola, punctum a, ſumi debet in perpendiculo SG, ad alteram partem lineæ GL, producto ut ſit G, inter A, & a, tumque erit Ga + GA, ſeu Aa ad aS + AS, ſeu SH, in ratione GA ad AS, adeóque in ratione quam habet axis principalis hyperbolæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, & propterea hyperbola deſcripta ſimilis eſt hyperbolæ deſcribendæ.

(l) Ut demonſtretur *puncta B & C ad Sectionem Conicam deſcriptam pertinere* quædam prævia ex Conicis ſunt uſurpanda.

293. Lemma... Sit ſectionis conicæ AZB, axis major Aa, foci S, H, ſemiaxis minor cE erectâ ad axem perpendiculari SZ per punctum Z, ducatur tangens DZG quæ axi occurrat in G; tum ex punctis G, A, & quovis alio axis puncto M, erigantur ad axem perpendiculares GK, AX, MBD, & ex puncto ſectionis B, ducatur ad GK, perpendicularis BK, erit 1°. $SZ = \frac{1}{2}L$, ſeu dimidio lateri recto, etenim ordinata in foco eſt ſemper æqualis ſemilateri Recto, (per Theor. III. de Ell. & Hyp. & Cor. 2. Theor. I. de Parab. n. 224.) 294.

294. 2°. Erit. GA ad AS ſicut axis major ad diſtantiam focorum, hoc eſt GA: AS = Aa: SH; Nam cum G ſit punctum in quo Tangens ſecat Diametrum, ejus diſtantiæ GA, Ga, ab utroque vertice ſunt inter ſe ſicut abſciſſæ AS Sa ab utroque vertice Diametri ſumptæ, ſive eſt (per Lem. V. de Conic. n. 224.) GA: Ga = AS: Sa & convertendo GA: Aa = AS: Sa — AS ſive SH (quia AS = Ha) ergo alternando GA: AS = Aa: SH.




295. 3°. Erit factum GS × Sc æquale quadrato ſemi axis minoris, nam quia eſt GA: AS = Aa: SH, eſt componendo GS: AS = SH + Aa: SH, & ſumendo dimidium terminorum ultimæ rationis eſt GS: AS = Sc + ca (ſive Sa): Sc, eſt ergo GS × Sc = AS × Sa, ſed factum AS × Sa, (partium ab uno foco ad utrumque axis majoris verticem ſumptarum) eſt ſemper æquale quadrato ſemi axis minoris, nam id factum æquatur in Ellipſi cA² — cS² (per 5. 2. Elem.) & in Hyperbola cS² — cA² (per 6. 2. Elem.) utrumque verò æquatur quadrato ſemi axis minoris per naturam focorum (Theor. III. de Hyper. & Ellip. 224.) eſt ergo GS × Sc = cE².

296. 4°. Perpendicularis AS in axis Vertice A erecta & terminata ad Tangentem in extremitate Z ordinatæ quæ inſiſtit foco S eſt æqualis AS diſtantiæ foci à Vertice... Nam cum ob Triangula ſimilia XGA ZGS ſit GA: AX = GS: SZ ſive $\frac{1}{2}$ L = $\frac{2cE^2}{2cA}$ & ſit cE² = GS × Sc eſt GA: AX = GS: $\frac{GS \times Sc}{cA}$ = cA: Sc (& duplicando hos terminos) = Aa: SH, ſed in eadem ratione eſt GA ad AS (294) ergo GA: AX = GA: AS & AX = AS.

In Parabolâ idem verum eſt, in ea enim eſt GA = AS, GS = 2AS & SZ = $\frac{1}{2}$ L = 2AS (Cor. I. Lem. V. de Coni. 224). Ergo hæc proportio GA: AX = GS: SZ in hanc mutatur AS: AX = 2AS: 2AS ergo AS = AX.

297. 5°. Linea à foco S, ad curvæ punctum quodvis B ducta eſt æqualis lineæ DM, quæ per id punctum tranſit, & perpendiculariter ad axim ducitur, terminaturque hinc ab axi, illinc à Tangente GZ Produc enim DM ad Q ubi iterum occurrit Sectioni Conicæ ſitque MQ = BM, erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) ZX²: ZD² = AX²: DM × DP (ſive DM² — BM² per 6. 2. Elem.) ſed ob Parallelas AX, SZ, MD eſt ZX: ZD = AS: SM & ZX²: ZD² = AS²: SM². Ergo eſt AS²: SM² = AX² (ſive AS² per 296): DM² — BM² unde eſt SM² = DM² — BM² & addendo utrinque BM², SM² + BM² (ſive SB² per 47. 1. Elem.) = DM² & SB = DM.

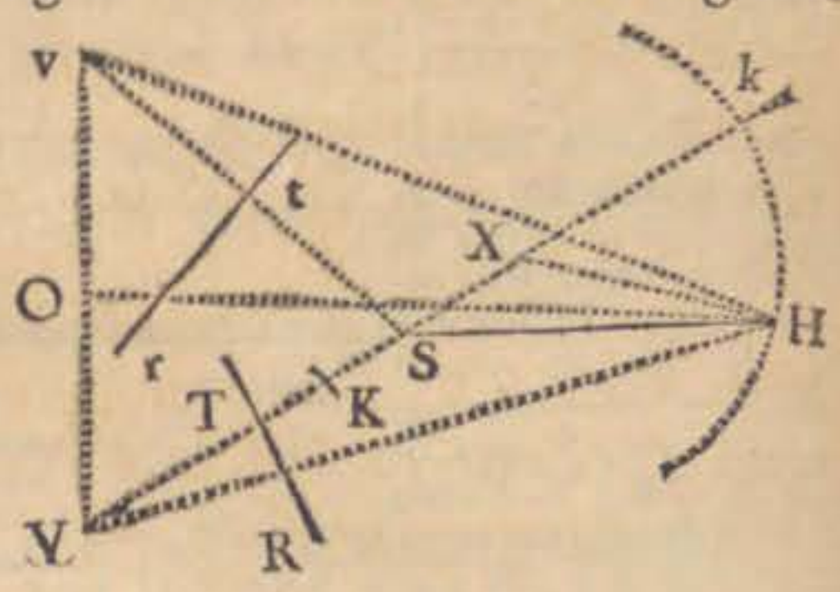
298. 6°. Si ex ſectionis quovis puncto B, ducatur perpendicularis BK ad lineam GK, & linea BS ad focum, erit ſemper KB: BS = GA: AS, nam propter Triangula ſimilia GMD GAX, eſt GM (ſive KB ob Parallelas GM & KB, GK & MB): MD (ſive BS per 297) = GA: AX (ſive AS per 296) hoc eſt KB: BS = GA: AS ideoque KB: BS = Aa: SH quoniam GA: AS = Aa: SH (per 294).

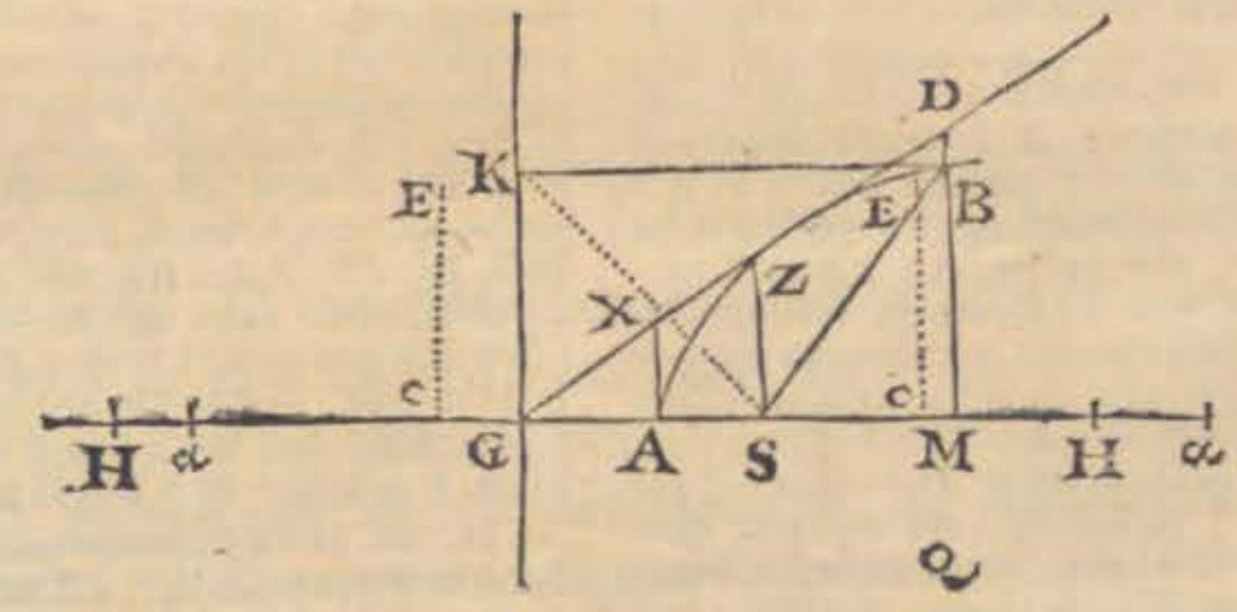
299. Converſa etiam vera eſt ſi ducatur perpendicularis in lineam GK, & in ea ſumatur B, ita ut ſit KB: BS = GA: AS = Aa: SH punctum B eſt in Sectione Conicâ deſcriptâ.

Sit enim Sectio Hyperbola aut Parabola, illa in unico puncto B ſecabitur per lineam KB, eritque (per 298) KB: BS = Aa: SH, dico autem nullum aliud punctum β ſumi poſſe in ea linea KB producta ſi lubet, ita ut ſit KB: BS = Aa: SH, fingatur enim dari illud punctum β, ſubtrahanturque termini duarum priorum rationum à ſe mutuo, erit KB — Kβ (ſive Bβ): BS — βS = Aa: SH ſed quia in Hyperbola eſt Aa, minor quam SH, & in Parabola ei eſt æqualis, erit Bβ minor

DE MOTU CORPORUM.

*Caſ.* 2. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula *ST*, *St* & produc eadem ad *V*, *v*, ut ſint *TV*, *tv*, æquales *TS*, *tS*. Biſeca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinitum *OH*, rectamque *VS* infinite productam ſeca in *K* & *k*, ita ut ſit *VK* ad *KS* & *Vk* ad *kS* ut eſt trajectoriæ deſcribendæ




non aut æqualis differentiæ $SB - S\beta$, ſed $SB\beta$ eſt Triangulum, ergo abſurdum eſt (per 20. 1. Elem.) unum ejus latus ut $B\beta$ eſſe minus aut æquale differentiæ aliorum, non datur ergo punctum illud $\beta$.

2°. Sectio ſit Ellipſis; Ducatur SK; ſi GK ſit æqualis ſemi axi minori, erit SK : GK = Aa : SH nam (per 295) eſt GS : cE (ſive GK ex Hyp.) = cE : Sc & $GS^2 : GK^2 = cE^2 : Sc^2$, & componendo $GS^2 + GK^2$ (ſive $SK^2$ per 47. 1. Elem.) : $GK^2 = cE^2 + Sc^2$ (ſive $cA^2$ per nat. focorum) : $Sc^2$ & SK : GK = cA : Sc & duplicando terminos poſterioris rationis eſt SK : GK = Aa : SH.

Si GK ſit major quam cE erit $GS^2 : GK^2$ in minori ratione quam $cE^2$ ad $Sc^2$, & componendo erit $GS^2 + GK^2$ ſive $SK^2$ ad $GK^2$ in minori ratione quam $cE^2 + Sc^2$ ad $Sc^2$ unde tandem deducetur in hoc caſu eſſe SK ad GK in minori ratione quam Aa ad SH.

Et pariter ſi GK ſit minor quam cE, erit SK ad GK in majori ratione quam Aa ad SH.

Sed (per princ. Trigo.) eſt in Triang. SKG, ſinus totalis ad ſinum ang. KSG (ſive ad ſinum anguli SKB huic æqualem ob Parallelas GS KB) ſicut KS ad KG. Ergo ratio ſinus totalis ad ſin Ang. SKB, æqualis eſt rationi Aa ad SH, ſi GK ſit æqualis cE, eſt illâ minor ſi GK ſuperet cE, eſt illa major ſi GK minor ſit quam cE.

Ut verò lineæ KB BS habeant rationem Aa ad SH, oportet ut in Triang. KBS, ſinus angulorum KSB SKB ſint in eâ ratione Aa ad SH; Ergo ſi GK ſit æqualis cE, eſt Sinus totalis: Sin. SKB = Sin. KSB: Sin. SKB, ideoque in hoc caſu erit Sin. tot. = Sin. KSB, hoc eſt, linea SB erit perpendicularis in SK, unica ergo erit, unicumque punctum B, ſicut etiam linea KB in unico puncto Sectioni Conicæ occurret.

Si GK ſit major cE eſt ſin. totalis ad ſin. SKB in minori ratione quam ſin. KSB ad ſin. SKB, unde ſinus totalis minor eſſe deberet ſinu KSB quod quidem eſt abſurdum, nul-

axis principalis ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro $Kk$ deſcribatur circulus ſecans $OH$ in $H$, & umbilicis $S$, $H$, axe principali ipſam $VH$ æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam biſeca $Kk$ in $X$, & junge $HX$, $HS$, $HV$, $Hv$. Quoniam eſt $VK$ ad $KS$ ut $Vk$ ad $kS$; & compoſite ut $VK+Vk$ ad $KS+kS$; diviſimque ut $Vk-VK$ ad $kS-KS$, id eſt, (m) ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, ideoque ut $VX$ ad $HX$ & $HX$ ad $SX$, ſimilia erunt triangula $VXH$, $HXS$, & propterea $VH$ erit ad $SH$ ut $VX$ ad $XH$, ideoque ut $VK$ ad $KS$. Habet igitur trajectoriæ deſcriptæ axis principalis $VH$ eam rationem ad ipſius umbilicorum diſtantiam $SH$, quam habet trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad ipſius umbilicorum diſtantiam, & propterea ejuſdem eſt ſpeciei. Inſuper cum $VH$, $vH$ æquentur axi principali, & $VS$, $vS$ à rectis $TR$, $tr$ perpendiculariter biſecentur, liquet (ex lem. xv.) rectas illas trajectoriam deſcriptam tangere. *Q. E. F.* (n)

*Caſ.*

nulla ergo duci poteri linea SB quæ determinet punctum B tale ut ſit KB ad SB ſicut A a ad SH, ſicut etiam in eo caſu linea KB nullibi occurrit Sectioni Conicæ.

Denique ſi GK ſit minor c E, eſt ſin. tot. ad ſin. SKB in majori ratione quam ſinus KSB ad ſin. SKB, dabitur ergo ſinus KSB, ſed ut ad acutum vel obtuſum angulum æqualiter pertinet duæ duci poterunt lineæ SB (ſed non plures) quæ requiſitam cum KB habeant rationem, ut etiam linea KB hoc in caſu duobus in punctis Ellipſim ſecat.

Ergo ſi KB:BS=GA:AS=Aa:SH punctum B eſt in Sectione Conicâ.

Ex his autem liquet curvam ſecundum Newtonianam ſolutionem deſcriptam tranſire per puncta B & C omnia enim planè conveniunt ad Lemmatis (293) Hypotheſim.

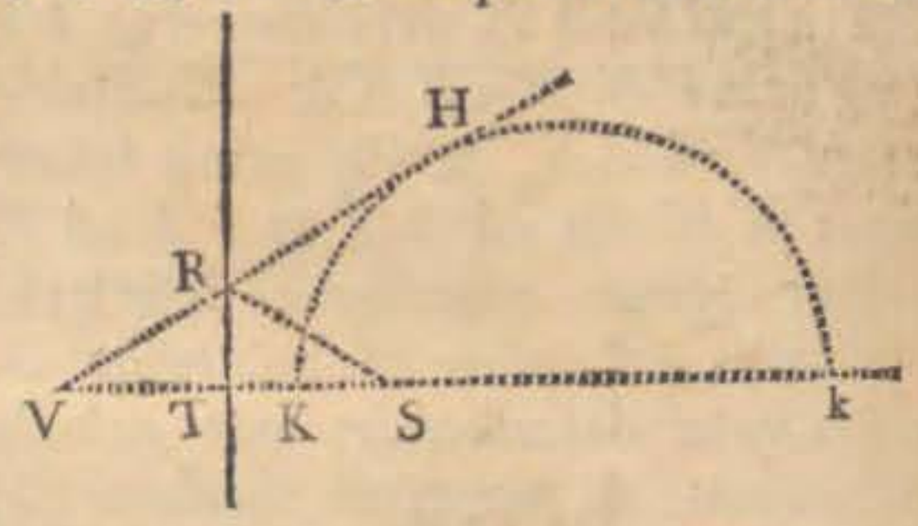
In iis omnibus parabolam uſurpamus pro ellipſi in quâ diſtantia focorum infinita eſt, ac proindè axi majori æqualis.

(m) * *Id eſt, ut* $2VX$ *ad* $2KX$, *&* $2KX$ *ad* $2SX$; nam KX=kX=HX (per conſtr.) adeóque VK+Vk=2VK+2KX=2VX, & KS+kS=Kk=Vk−VK=2KX; & quia kS−KS=kX+SX=KX+SX=KS+2SX, erit kS−KS=2SX, adeóque VK:KS=VX:HX=HX:SX. Quare ſimilia erunt triangula VXH, HXS, quorum latera VX & XH, HX & KS, proportionalia communem angulum X, complectuntur.

(n) * Si deſcribenda ſit hyperbola, in SV, versùs V productâ, ità ſumantur puncta K, k, ut inter utrumque poſitum ſit V, cæteraque fiant ut Newtonus præſcribit; & quoniam VK:KS=Vk:kS, erit Vk−VK:kS−KS=VK:KS=VK+Vk:KS+kS, ſed Vk−VK=2VX, kS−KS=2KX, VK+Vk=2KX, & KS+kS=2SX. Reliqua demonſtratio eadem eſt ac pro ellipſi.

DE MOTU CORPORUM.

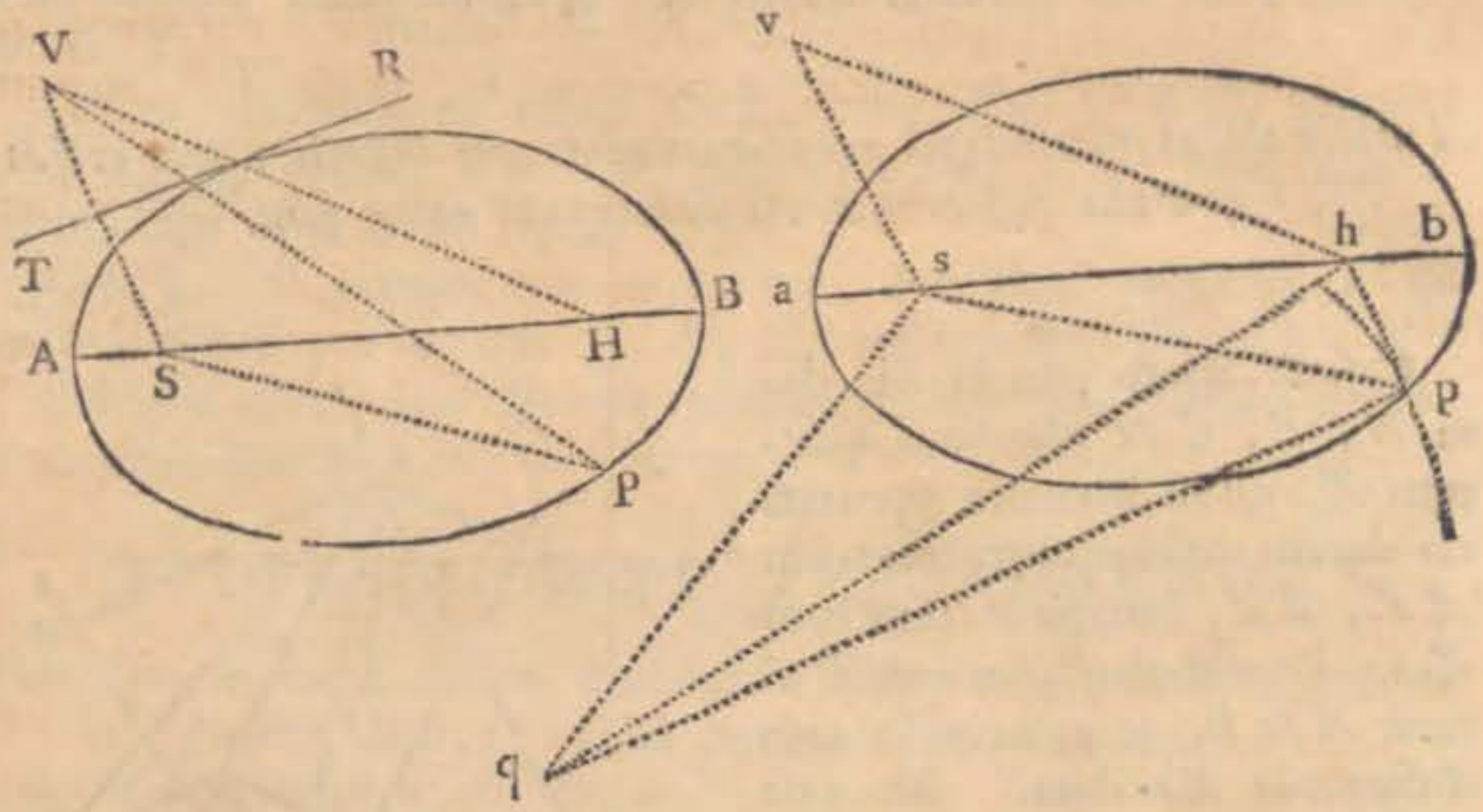
*Caſ.* 3. Dato umbilico *S* deſcribenda ſit trajectoria quæ rectam *TR* tanget in puncto dato *R*. In rectam *TR* demitte perpendicularem *ST*, & produc eandem ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*. Junge *VR* & rectam *VS* infinite productam ſeca in *K* & *k*, ita ut ſit *VK* ad *SK* & *Vk* ad *Sk* ut ellipſeos deſcribendæ axis principalis ad diſtantiam umbilicorum; circuloque ſuper diametro *Kk* deſcripto ſecetur producta recta *VR* in *H*, & umbilicis *S*, *H*, axe principali rectam *VH* æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Namque *VH* eſſe ad *SH* ut *VK* ad *SK* atque ideo ut axis principalis trajectoriæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, (o) patet ex demonſtratis in caſu ſecundo, & propterea trajectoriam deſcriptam ejuſdem eſſe ſpeciei cum deſcribendâ, rectam vero *TR* quâ angulus *VRS* biſecatur, tangere trajectoriam in puncto *R*, patet ex conicis. *Q. E. F.*




*Caſ.* 4. Circa umbilicum *S* deſcribenda jam ſit trajectoria *APB*, quæ tangat rectam *TR*, tranſeatque per punctum quodvis *P* extra tangentem datum, quæque ſimilis ſit figuræ *aph*, axe principali *ab* & umbilicis *s*, *h* deſcriptæ. In tangentem *TR* demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*. Augulis autem *SVP*, *SPV* fac angulos *hsq*, *shq* æquales; centroque *q* & intervallo quod ſit ad *ab* ut *SP* ad *VS* deſcribe circulum ſecantem figuram *apb* in *p*. Junge *sp* & age *SH* quæ ſit ad *sh* ut eſt *SP* ad *sp*, quæque angulum *PSH* angulo *psh* & angulum *VSH* angulo *psq* æquales conſtituat. Denique umbilicis *S*, *H*, & axe principali *AB* diſtantiam *VH* æquante, deſcribatur ſectio conica. Dico factum. Nam ſi agatur *sv* quæ ſit ad *sp* ut eſt *sh* ad *sq*, quæ-

(o) * Centro circuli litterâ X, notato, jungantur H X, H S, H V, & eadem eſt demonſtratio quæ caſus 2^i pro ellipſi, & ſi producatur R V, S V, versùs V, ut punctum V, ſitum ſit inter K & k, eadem quoque erit demonſtratio pro hyperbolâ. Si-

que conſtituat angulum *vsp* angulo *hsq* & angulum *vsh* angulo *psq* æquales, triangula *svh*, *spq* erunt ſimilia, & propterea *vh*




erit ad *pq* ut eſt *sh* ad *sq*, id eſt (ob ſimilia triangula *VSP*, *hsq*) ut eſt *VS* ad *SP* ſeu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vh* & *ab*. Porro (P) ob ſimilia triangula *VSH*, *vsh*, eſt *VH* ad *SH* ut *vh* ad *sh*, id eſt, axis conicæ ſectionis jam deſcriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sh*; & propterea figura jam deſcripta ſimilis eſt figuræ *aph*. Tranſit autem hæc figura per punctum *P*, (q) eo quod triangulum *PSH* ſimile ſit triangulo *psh*; & quia *VH* æquatur ipſius axi & *VS* biſecatur perpendiculariter à recta *TR*, tangit eadem rectam *TR*. (r) *Q. E. F.*

LEM-

* (P) Similia ſunt triangula VSH, vsh, nam (per conſtr.) angulus VSP = hsq = vsp, & angulus HSP = hsp, adeóque angulus VSH = vsh; & præterea sp : sh = SP : SH, & sv : sp = sh : sq = SV : SP, ob ſimilia triangula VSP, hsq; quare ex æquo sv : sh = SV : SH, triangula igitur VSH, vsh, quorum latera proportionalia æquales angulos complectuntur ſunt ſimilia.

* (q) Nam ſi ducatur recta SP, perimetro figuræ occurrens in P, & angulum PSH, æqualem faciens angulo psh, patet ob ſimilitudinem ſectionum conicarum, triangula duo PSH, psh, fore ſimilia; unde viciſſim manifeſtum eſt punctum P, eſſe in perimetro figuræ, ſi triangulum PSH, ſimile ſit triangulo psh.

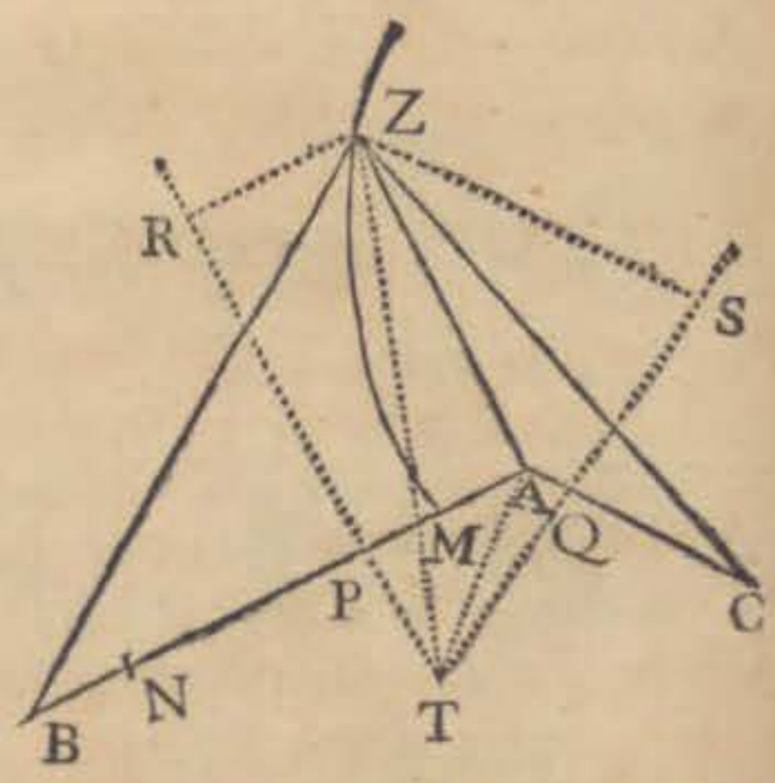
* (r) Eadem eſt conſtructio ac demonſtratio pro hyperbolâ, ſi foci H, h, & vertices B, b, ad contrariam partem tranſferantur.

Erit

## LEMMA XVI.

*A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.*

*Cas.* 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum *AZ*, *BZ*, locabitur punctum *Z* in hyperbola cujus umbilici sunt *A* & *B*, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille *MN*. Cape *PM* ad *MA* ut est *MN* ad *AB*, & erecta *PR* perpendiculari ad *AB*, demissaque *ZR* perpendiculari ad *PR*; erit, (f) ex naturâ hujus hyperbolæ, *ZR* ad *AZ* ut est *MN* ad *AB*. Simili discursu punctum *Z* locabitur in aliâ hyperbolâ, cujus umbilici sunt *A*, *C* & principalis axis differentia inter *AZ* & *CZ*, ducique potest *QS* ipsi *AC* perpendicularis, ad quam si ab hyperbolæ hujus puncto quovis *Z* demittatur normalis *ZS*, hæc fuerit ad *AZ* ut est differentia inter *AZ* & *CZ* ad *AC*. Dantur ergo rationes ipsarum *ZR* & *ZS* ad *AZ*, & idcirco datur earundem *ZR* & *ZS* ratio ad invicem; ideoque si rectæ *RP*, *SQ* concurrant in *T*, & agantur *TZ* & *TA*, figura *TRZS* dabitur specie, & recta *TZ* in qua punctum *Z* alicubi locatur, dabitur positione. Dabitur etiam recta *TA*, ut & angulus *ATZ*; & ob datas rationes ipsarum *AZ*




* (f) Erit ex naturâ hujus hyperbolæ ZR, ad AZ, ut est MN, ad AB, (298).

*A Z* ac (t) *TZ* ad *ZS* dabitur earundem ratio ad invicem; & inde dabitur triangulum *A T Z*, cujus vertex eſt punctum *Z*. *Q. E. I.* LIBER PRIMUS.

*Caſ.* 2. Si duæ ex tribus lineis, puta *A Z* & *B Z*, æquantur, ita age rectam *T Z*, ut biſecet rectam *A B*; dein quære triangulum *A T Z* ut ſupra.

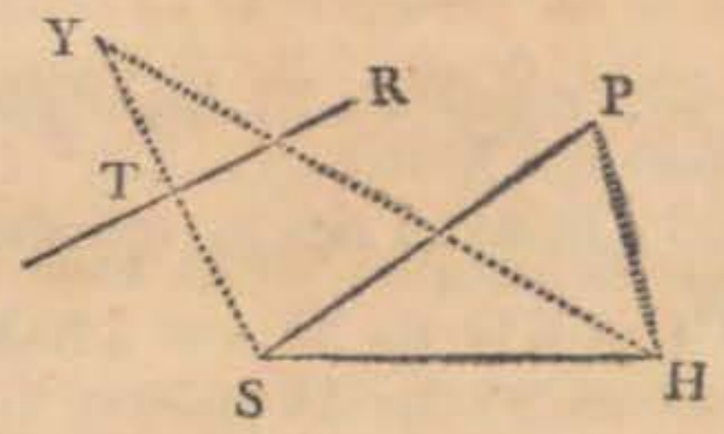
*Caſ.* 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum *Z* in centro circuli per puncta *A*, *B*, *C* tranſeuntis. *Q. E. I.*

Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum tactionum *Apollonii* à *Vieta* reſtitutum.

## PROPOSITIO XXI. THEOREMA XIII.

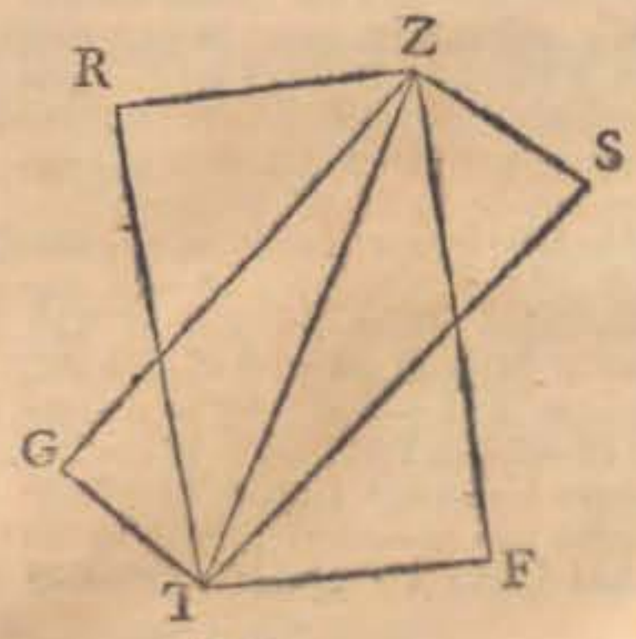
*Trajectoriam circa datum umbilicum deſcribere, quæ tranſibit per puncta data & rectas poſitione datas continget.*

Detur umbilicus *S*, punctum *P*, & tangens *T R*, & inveniendus ſit umbilicus alter *H*. Ad tangentem demitte perpendiculum *S T*, & produc idem ad *Y*, ut ſit *TY* æqualis *S T*, & erit *Y H* æqualis axi principali. Junge *S P*, *H P*, & erit *S P*



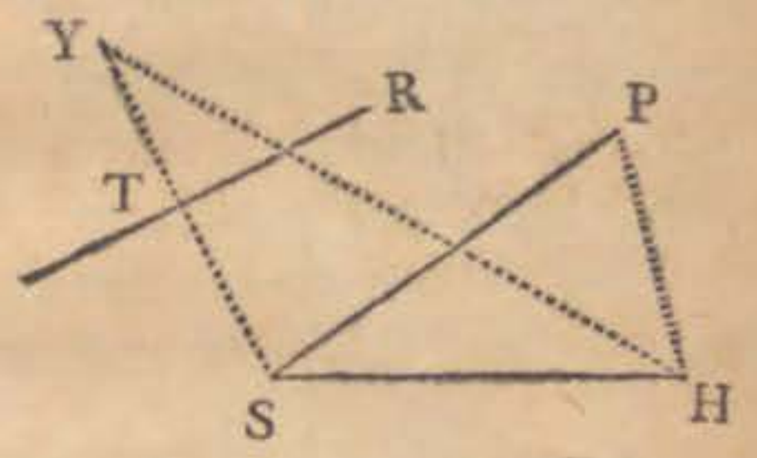

diſſe-

(t) 300. Et recta T Z, in quâ punctum Z, alicubi locatur, dabitur poſitione; ductis enim T F ad R T, & T G ad S T perpendicularibus, quæ ſint in ratione datâ R Z ad Z S, agantur G Z, F Z, ipſis T S, R T parallelæ & ſe mutuò interſecantes in puncto aliquo Z, juncta T Z, habebit poſitionem quæſitam; patet enim perpendicula Z S, Z R, ex puncto Z, in rectas T S, T R, demiſſa, eſſe lineis T G, T F æqualia adeóque in datâ ratione.



DE MOTU CORPORUM.

differentia inter $HP$ & axem principalem. (u) Hoc modo ſi dentur plures tangentes $TR$, vel plura puncta $P$, devenietur ſemper ad lineas totidem $YH$, vel $PH$, à dictis punctis $Y$ vel $P$ ad umbilicum $H$ ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus $SP$ differunt ab iiſdem, atque ideo quæ vel æquantur ſibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per lemma ſuperius, datur umbilicus ille alter $H$. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel eſt $YH$; vel, ſi trajectoria ellipſis eſt, $PH+SP$; ſin hyperbola, $PH-SP$) habetur trajectoria. *Q. E. I.*

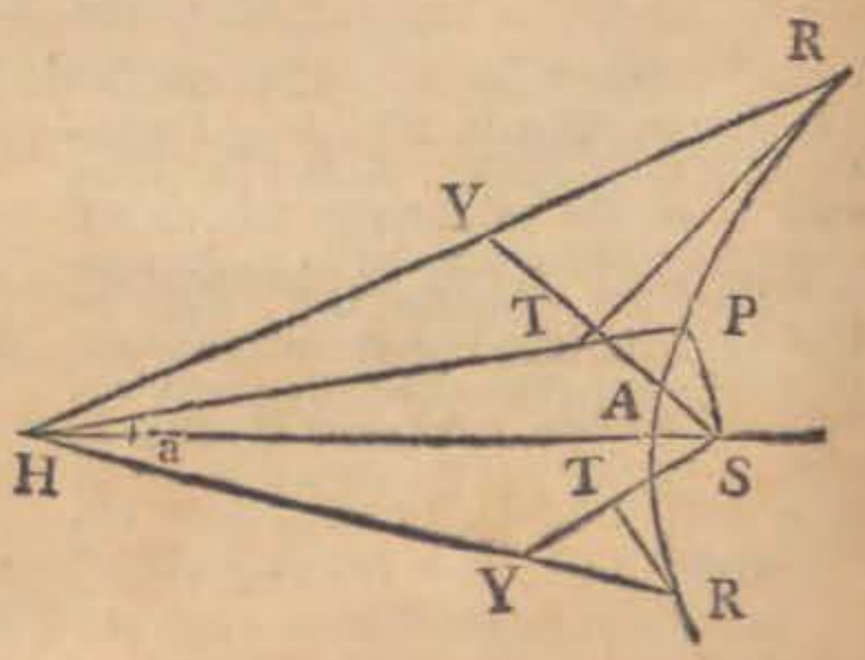



## *Scholium.*

Ubi trajectoria eſt hyperbola, ſub nomine hujus trajectoriæ oppoſitam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim pergendo in motu ſuo in oppoſitam hyperbolam tranſire non poteſt.

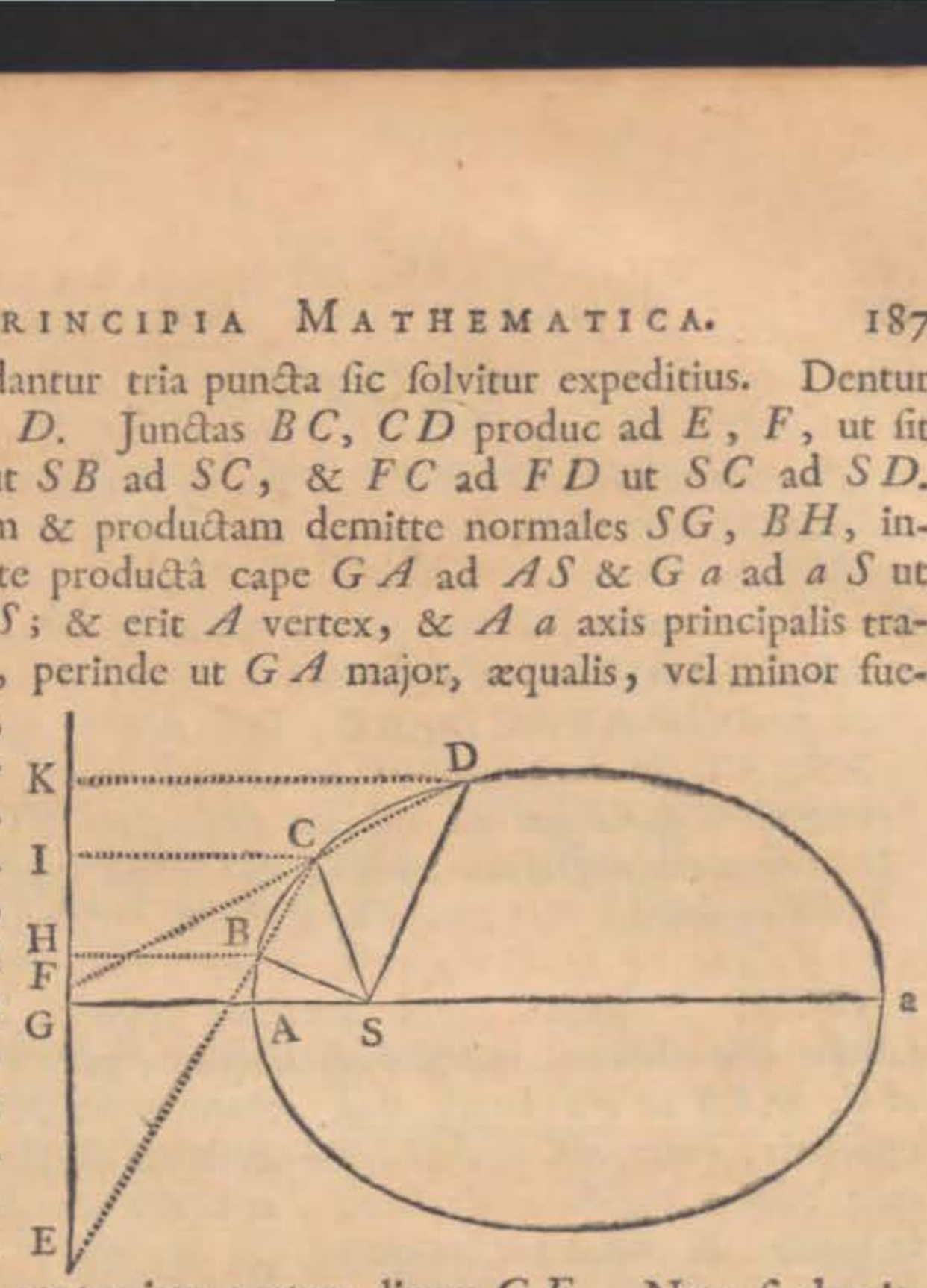
Caſus

(u) 301. Si dentur tres tangentes, dabuntur tria puncta ut Y, ex quibus ad umbilicum H, inflectendæ erunt tres rectæ æquales ut YH, quod fit per Caſ. 3. Lemmatis ſuperioris. Si duæ dentur tangentes & punctum perimetri ſectionis P, dabuntur duo puncta ut Y, ex quibus ad umbilicum H, inflectendæ erunt duæ rectæ æquales, & 3^um^ punctum P, ex quo ducenda PH, cujus differentia à lineâ YH, eſt data SP. Nam in ellipſi $PH+SP=YH$, adeóque $YH-PH=SP$; in hyperbolâ $PH-SP=YH$, undè $PH-YH=SP$, itaque Caſus 2^us^ Lem. XVI. Tandem ſi dentur tria perimetri puncta ut P, locum habet Caſus 1^us^ ejuſdem Lemmatis.




* Ju:

Cāſus ubi dantur tria puncta ſic ſolvitur expeditius. Dentur puncta *B*, *C*, *D*. Junctas *BC*, *CD* produc ad *E*, *F*, ut ſit *EB* ad *EC* ut *SB* ad *SC*, & *FC* ad *FD* ut *SC* ad *SD*. Ad *EF* ductam & productam demitte normales *SG*, *BH*, inque *GS* infinite productâ cape *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut eſt *HB* ad *BS*; & erit *A* vertex, & *Aa* axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut *GA* major, æqualis, vel minor fuerit quam *AS*, erit ellipſis, parabola vel hyperbola; puncto *a* in primo caſu cadente ad eandem partem lineæ *GF* cum puncto *A*; in ſecundo caſu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ *GF*. Nam ſi demittantur ad *GF* perpendicula *CI*, *DK*; erit *IC* ad *HB* ut *EC* ad *EB*, hoc eſt, ut *SC* ad *SB*; & viciſſim *IC* ad *SC* ut *HB* ad *SB* ſive ut *GA* ad *SA*. Et ſimili argumento probabitur eſſe *KD* ad *SD* in eâdem ratione. (x) Jacent ergo puncta *B*, *C*, *D* in coni ſectione circa umbilicum *S* ita deſcripta, ut rectæ omnes, ab umbilico *S* ad ſingula ſectionis puncta ductæ, ſint ad perpendicula à punctis iiſdem ad rectam *GF* demiſſa in datâ illâ ratione.




Methodo haud multum diſſimili hujus problematis ſolutionem tradit clariſſimus Geometra *de la Hire*, conicorum ſuorum lib. VIII. prop. XXV.

SEC-

(x) * *Jacent ergo puncta B, C, D, in Coni Sectione* (vide n. 298.)

DE MOTU CORPORUM.

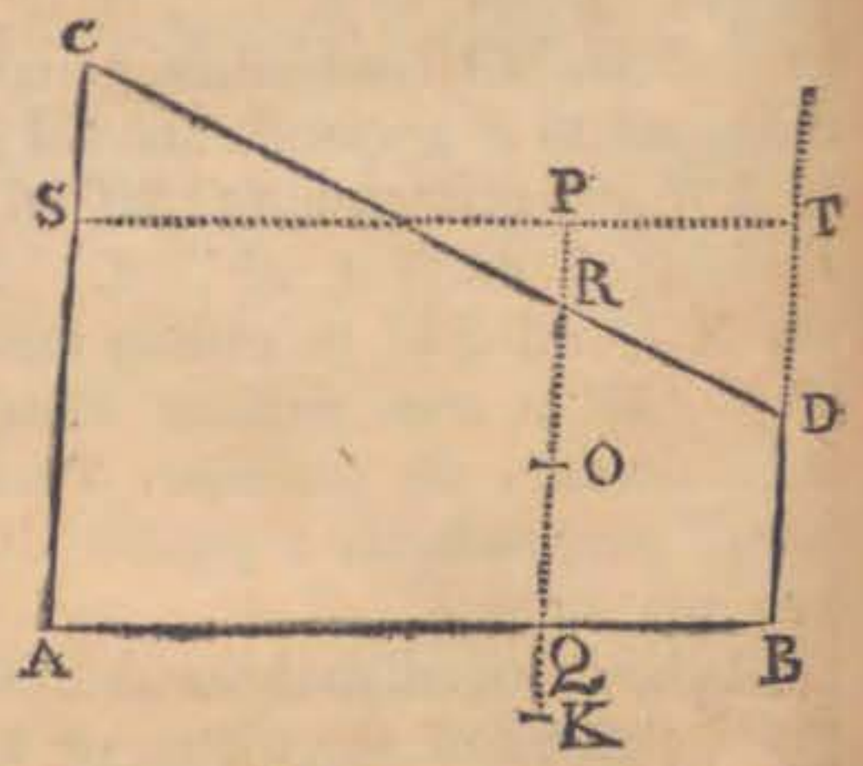
## SECTIO V.

### *Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.*

### LEMMA XVII.

*Si à datæ conicæ ſectionis puncto quovis* P *ad trapezii alicujus* ABDC, *in conicâ illâ ſectione inſcripti, latera quatuor infinitè producta* AB, CD, AC, DB *totidem rectæ* PQ, PR, PS, PT *in datis angulis ducantur, ſingulæ ad ſingula: rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera* PQ×PR, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera oppoſita* PS×PT *in datâ ratione.*

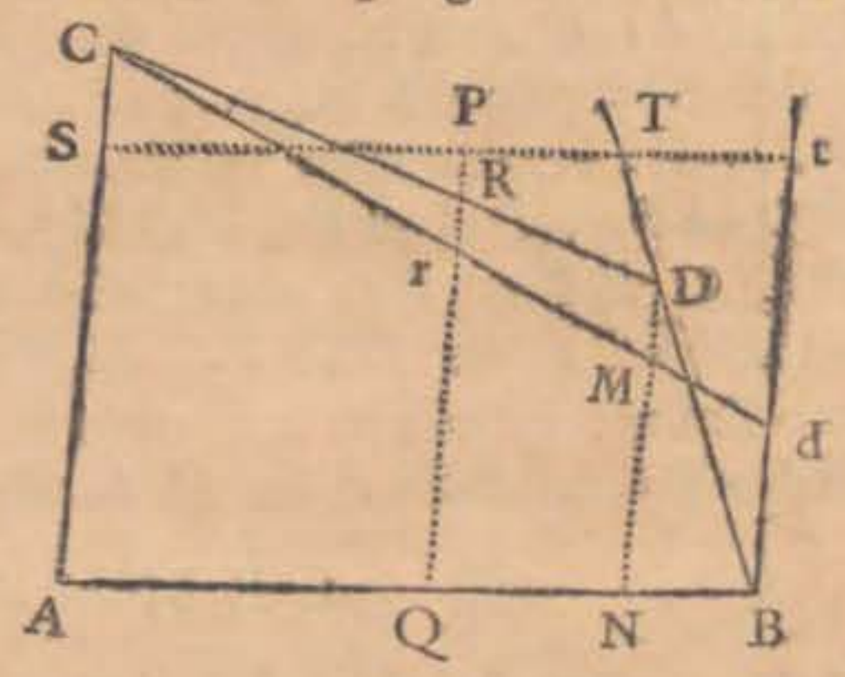
*Caſ.* 1. Ponamus primò lineas ad oppoſita latera ductas parallelas eſſe alterutri reliquorum laterum, putà *PQ* & *PR* lateri *AC*, & *PS* ac *PT* lateri *AB*. Sintque inſuper latera duo ex oppoſitis, putà *AC* & *BD*, ſibi invicem parallela. Et recta, quæ biſecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ ſectionis, & biſecabit etiam *RQ*. Sit *O* punctum in quo *RQ* biſecatur, & erit *PO* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc *PO* ad *K*, ut ſit *OK* æqualis *PO*, & erit *OK* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, *B*, *P* & *K* ſint ad conicam ſectionem, & *PK* ſecet *AB* in dato angulo, erit (per prop. 17, 19, 21 & 23. lib. III. conicorum *Apollonii*) rectangulum *PQK* ad rectangulum *AQB* in datâ ratione. (y) Sed *QK* & *PR* æqua-




(y) *Erit Rectangulum PQK ad Rectangulum AQB in datâ ratione.* Liquet (per Lem. III. de Conic.) quod ſi linea quævis in Sectione Conicâ terminata ut PK ſecet aliam

æquales ſunt, utpote æqualium $OK$, $OP$, & $OQ$, $OR$ differentiæ, & inde etiam rectangula $PQK$ & $PQ \times PR$ æqualia ſunt; atque ideo rectangulum $PQ \times PR$ eſt ad rectangulum $AQB$, hoc eſt ad rectangulum $PS \times PT$ in datâ ratione. *Q. E. D.*

*Caſ.* 2. Ponamus jam trapezii latera oppoſita $AC$ & $BD$ non eſſe parallela. Age $Bd$ parallelam $AC$ & occurrentem tum rectæ $ST$ in $t$, tum conicæ ſectioni in $d$. Junge $Cd$ ſecantem $PQ$ in $r$, & ipſi $PQ$ parallelam age $DM$ ſecantem $Cd$ in $M$ & $AB$ in $N$. Jam ob ſimilia triangula $BTt$, $DBN$; eſt $Bt$ ſeu $PQ$ ad $Tt$ ut $DN$ ad $NB$. Sic & (z) $Rr$ eſt ad $AQ$ ſeu $PS$ ut $DM$ ad $AN$. Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & conſequentes in conſequentes, ut rectangulum $PQ$ in $Rr$ eſt ad rectangulum $PS$ in $Tt$, ita rectangulum $NDM$ eſt ad rectangulum $ANB$, & (per caſ. 1.) ita rectangulum $PQ$ in $Pr$ eſt ad rectangulum $PS$ in $Pt$, (†) ac diviſim ita rectangulum $PQ \times PR$ eſt ad rectangulum $PS \times PT$. *Q. E. D.*




*Coſ.*

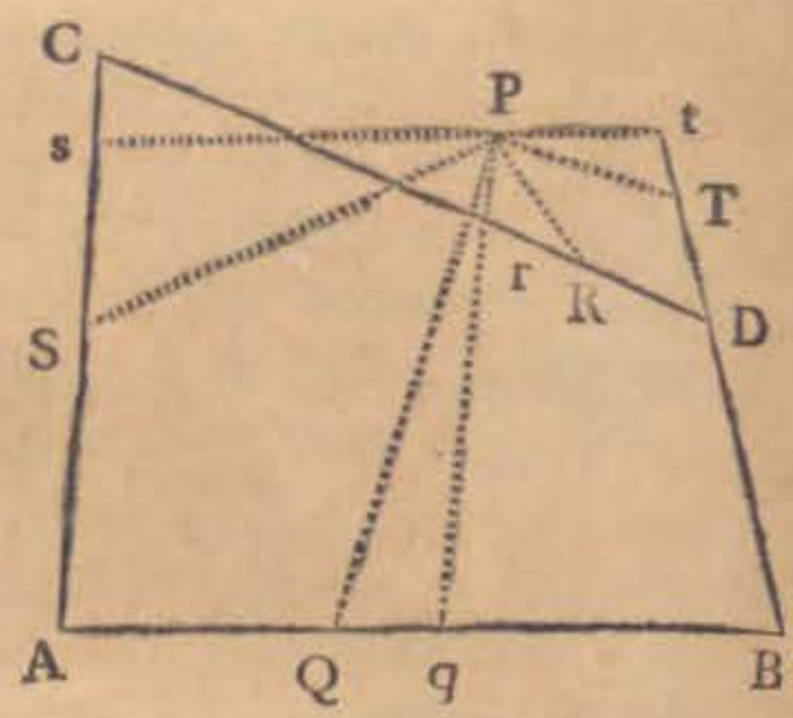
aliam lineam etiam in Sectione Conicâ terminatam ut AB, Rectangulum partium lineæ PK erit ad Rectangulum partium lineæ AB ut Rectangulum partium lineæ cujuſvis alius Parallelæ lineæ PK & ad Sectionem terminatæ, ad Rectangulum partium quas hæc nova linea ſecat in lineâ AB: ideo ubicumque ſit punctum P Rectangula PQK & AQB erunt in eâdem datâ ratione.

(z) * *Rr : AQ ſeu PS = DM : AN.* Sunt enim propter parallelas Rr, DM, triangula rCR MCD ſimilia, ideóque Rr : DM = Cr : CM; ſed eſt Cr : CM = AQ vel PS : AN; ergò Rr : DM = AQ, vel PS : AN & Rr : PS = DM : AN.

(†) * *Ac diviſim* Ex Demonſtratis NDM : ANB = PQ × Rr : PS × Tt = PQ × Pr : PS × Pt, & diviſim NDM : ANB = PQ × Pr − PQ × Rr : PS × Pt − PS × Tt = PQ × PR : PS × PT, ſed ratio NDM ad ANB data eſt, ergò & ratio PQ × PR ad PS × PT.

DE MOTU CORPORUM.

*Caſ.* 3. Ponamus denique lineas quatuor $PQ$, $PR$, $PS$, $PT$ non eſſe parallelas lateribus $AC$, $AB$, ſed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age $Pq$, $Pr$ parallelas ipſi $AC$; & $Ps$, $Pt$ parallelas ipſi $AB$; & propter datos angulos triangulorum $PQq$, $PRr$, $PSs$, $PTt$, dabuntur rationes $PQ$ ad $Pq$, $PR$ ad $Pr$, $PS$ ad $Ps$, & $PT$ ad $Pt$; atque ideo rationes compoſitæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per ſuperius demonſtrata, ratio $Pq \times Pr$ ad $Ps \times Pt$ data eſt: ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. *Q. E. D.*



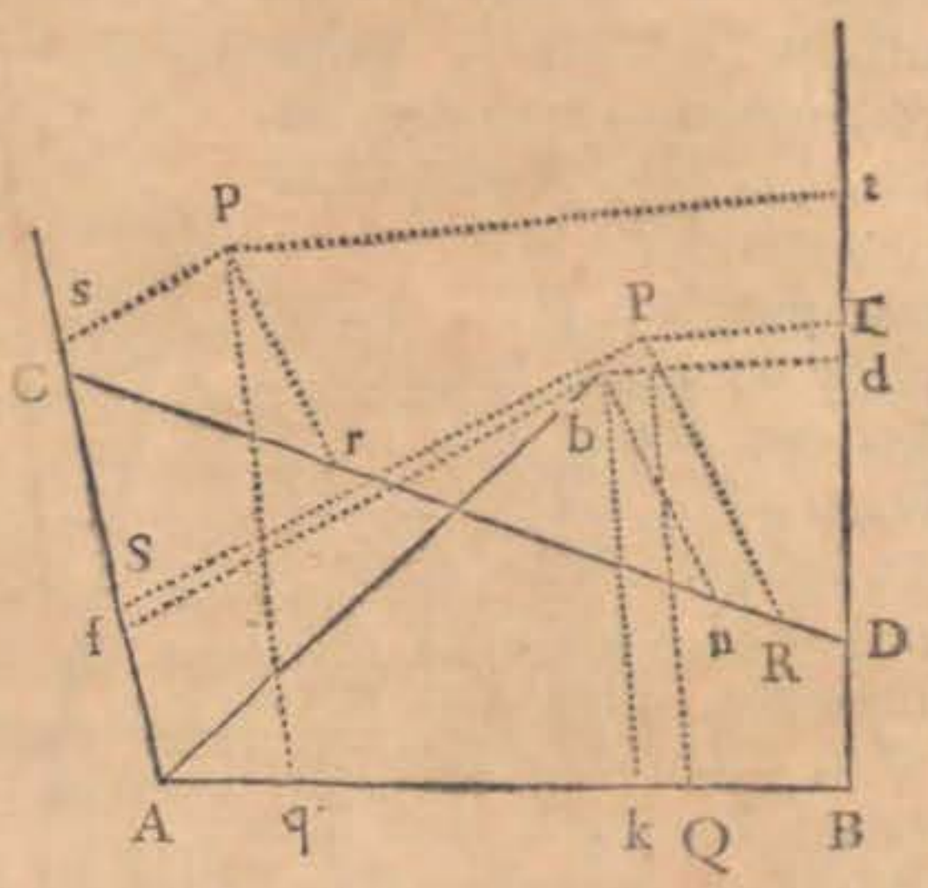

## LEMMA XVIII.

*Iiſdem poſitis, ſi rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera trapezii* PQ×PR *ſit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* PS×PT *in datâ ratione; punctum* P, *à quo lineæ ducuntur, tanget conicam ſectionem circa trapezium deſcriptam.*

Per puncta $A$, $B$, $C$, $D$ & aliquod infinitorum punctorum $P$, putà $p$, concipe conicam ſectionem deſcribi: dico punctum $P$ hanc ſemper tangere. Si negas, junge $AP$ ſecantem hanc conicam ſectionem alibi quam in $P$, ſi fieri poteſt, putà in $b$. Ergo ſi ab his punctis $p$ & $b$ ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ $pq$, $pr$, $ps$, $pt$ & $bk$, $bn$, $bf$, $bd$; erit ut $bk \times bn$ ad $bf \times bd$ ita (per lem. XVII.) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (per hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Eſt & propter ſimilitudinem trapeziorum $bkAf$, $PQAS$, ut $bk$ ad $bf$ ita $PQ$ ad $PS$. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correſpondentes hujus, erit $bn$ ad $bd$ ut $PR$ ad $PT$. (‡) Ergo trapezia æquiangula $Dnbd$, $DRPT$

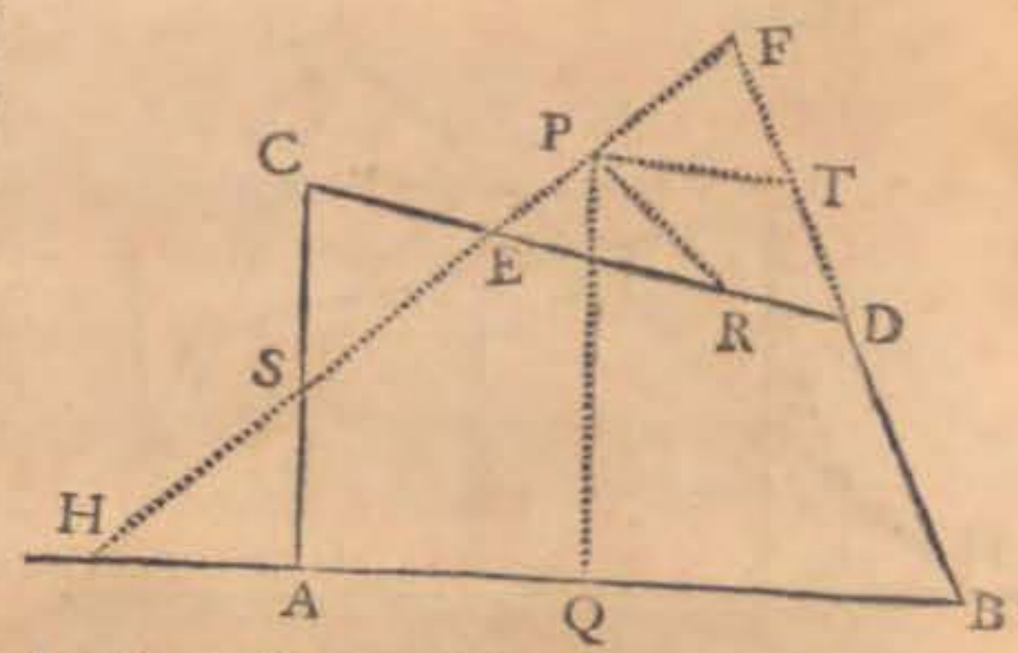
(‡) * Cum ſit bk × bn : bf × db = PQ × PR : PS × PT  item bf : bk = PS : PQ erit bn : bd = PR : PT.

Ergò




similia sunt, & (a) eorum diagonales *Db*, *DP* propterea coincidunt. Incidit itaque *b* in intersectionem rectarum *AP*, *DP* ideoque coincidit cum puncto *P*. Quare punctum *P*, ubicunque sumatur, incidit in assignatam conicam sectionem. *Q. E. D.* (b)

*Corol.* Hinc si rectæ tres *PQ*, *PR*, *PS* à puncto communi *P* ad alias totidem positione datas rectas *AB*, *CD*,

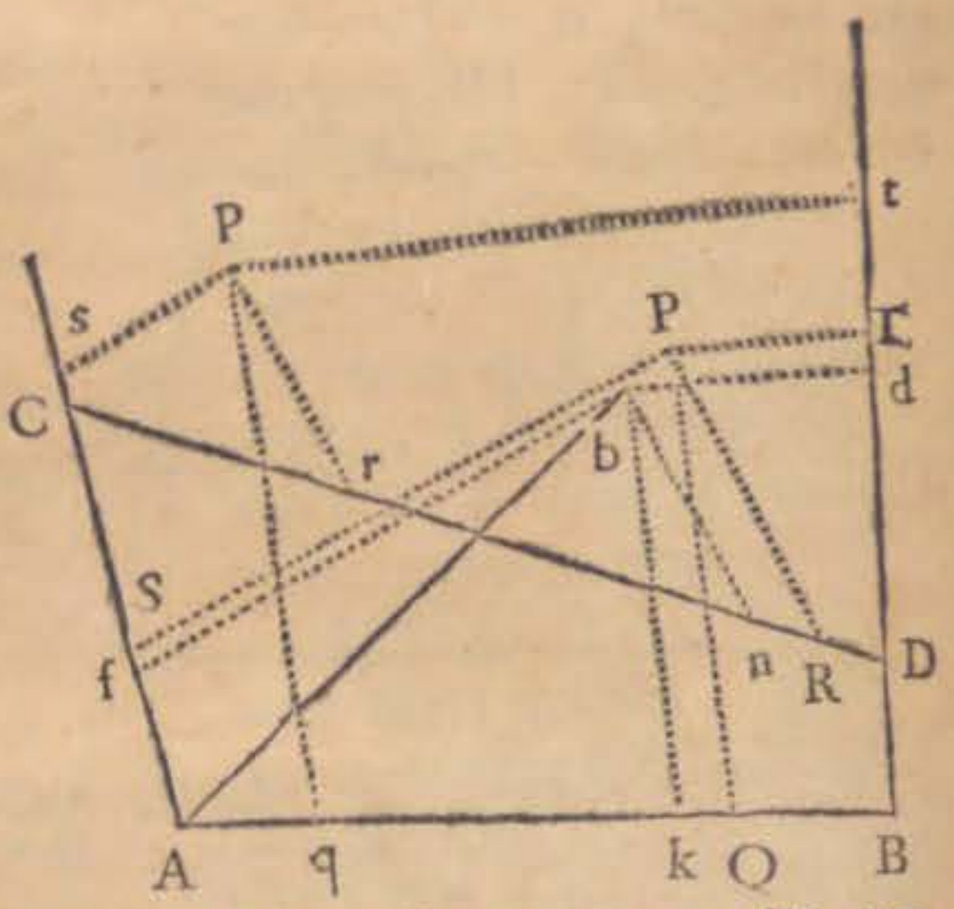


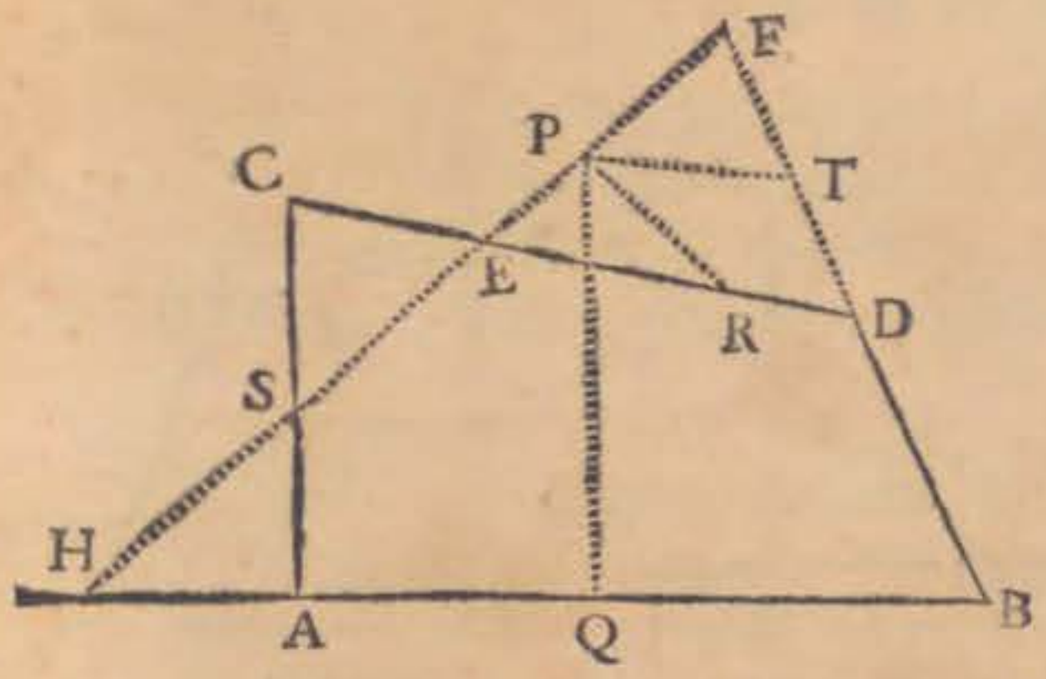

(a) *Ergò trapezia æquiangula D n b d, D R P T, similia sunt, & eorum diagonales D d, D P, propterea coincidunt;* nam jungantur n d, R T, & duo triangula n d b, R T P, æquiangula erunt ob latera b n, b d, & P R, P T; proportionalia, & angulos n b d, R P T, æquales; quarè & duo triangula n d D, R T D, æquiangula erunt ob angulum D, communem, & angulos ad T & t, R & n, æquales, erit igitur b n : n D = P R : R D, adeóque ductis diagonalibus D b, D P, duo triangula b D n, P D R, erunt similia, ac proindè angulus P D R, æqualis angulo b D n, quod esse non potest, nisi diagonales D b, D P, coincidant.

(b) 302. Lemma XVIII per analysim facilè demonstrari potest. Producta enim P S, donec singulis trapezii lateribus occurrat in F, E, S, H, ob datos omnes angulos figuræ, data erit ratio laterum quibus singula triangula F P T, F E D, P E R, E C S, S H A, P H Q, clauduntur. Assumptis igitur C E, tanquam abscissâ & P E tanquam ordinatâ loci punctorum P, data erit ratio P E, ad P R, adeóque P E, in datam quantitatem ducta æquabitur ipsi P R; ob datam C D, invenietur E D, ut potè æqualis C D − C E, & per triangulum F E D specie datum invenietur E F, ac proindè P F = E F − E P, & inde per triangulum F P T, invenietur P T, omnesque illæ lineæ exprimentur per lineas C E, P E, unius dimensionis, & alias datas quantitates. Similiter E S & C S & S A = C A − C S, atquè H S, per triangulum S A H, specie datum, & hinc P H = H S + S E + E P, adeóque P Q, per triangulum P H Q, invenientur in lineis C E & P E, unius dimensionis & aliis datis quantitatibus. Quarè in rectangulis P Q × P R, P S × P T, rectæ variabiles C E, P E, non plures quam duas dimensiones obtinebunt, undè æquatio quæ ex rectangulo-

DE MOTU COELO-RUM.

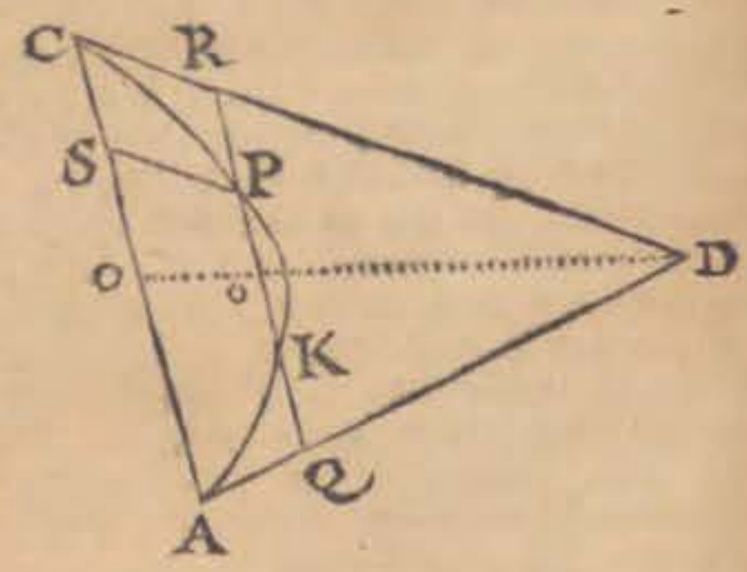
singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis (c) $PQ \times PR$ ad quadratum tertiæ $PS$ in datâ ratione: punctum $P$, à quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione conicâ quæ tangit lineas $AB$, $CD$ in $A$ & $C$; & contra. Nam coeat linea $BD$ cum lineâ $AC$, manente positione trium $AB$, $CD$, $AC$, dein coeat etiam linea $PT$ cum linea $PS$: & rectangulum $PS \times PT$ evadet $PS$ *quad.* rectæque $AB$, $CD$, quæ




gulorum illorum ratione datâ reperitur secundum gradum non superabit; Cum igitur, ut vulgò notum est, æquationis quadraticæ locus sit Sectio conica, patet locum punctorum P, esse ad sectionem conicam. Quod autem sectio illa per puncta C, D, P, A, transeat inito calculo facilè ostenditur, nam si in æquatione loci ponatur $CE = o$, invenietur valor unus ipsius $PE = o$, adeóque punctum P, cadit in C, si ponatur $CE = CD$, invenietur quoque valor unus $PE = o$, ac proindè punctum P, cum puncto D, coincidit;

idem pari argumento respectu punctorum A, B, reperitur, si ponatur $AQ = o$ vel $AQ = AB$.




(c) *Hinc si rectæ tres* &c. Sint tres lineæ AB, CD, AC positione datæ, & lineæ AB, CD tangant sectionem conicam in A & C, & à puncto communi P ducantur tres Rectæ PQ, PR, PS in datis angulis ad singulas AB, CD, AC erit $PQ \times PR$ in ratione datâ ad quadratum tertiæ PS: Sit enim PS parallela lineæ DC & sint RP, PQ parallelæ lineæ CA sitque PK chorda Sectionis, sumatur medium

quæ curvam in punctis *A* & *B*, *C* & *D* secabant, jam (†) curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantùm tangent.

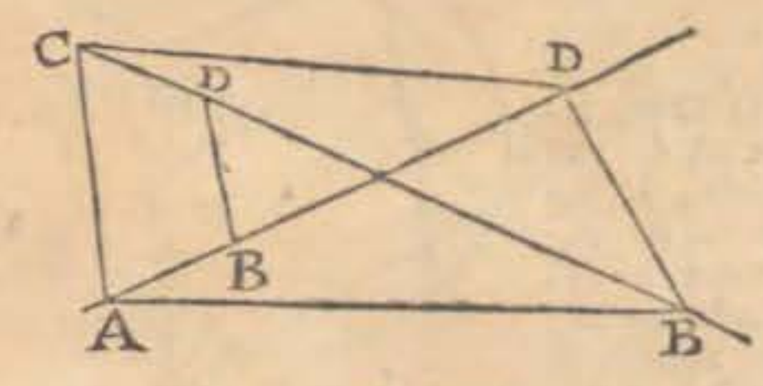
## *Scholium.*

Nomen conicæ sectionis in hoc lemmate latè sumitur, ita ut sectio tam rectilinea per verticem coni transiens, quam circularis basi parallela includatur. (d) Nam si punctum *p* incidit in rectam, quâ puncta *A* & *D* vel *C* & *B* junguntur, conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ æquale rectangulo sub duabus aliis $PS \times PT$, sectio conica evadium O chordæ A C ducaturque per punctum D DO, quæ secabit tam chordam PK quam totam RQ in medio (vide Lem. IV. de Conic. n. 224.) hinc erit RK=PQ, sed est (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) $CR^2$ ad $RP \times RK$ in datâ ratione, ideoque est $CR^2$ ad $RP \times PQ$ in datâ ratione, sed ob parallelas CR SP & CS RP est PS=CR, ergo $PS^2$ est ad $RP \times PQ$ in datâ ratione.

Si lineæ PS, RP, PQ in aliis sed datis angulis ad lineas A C CD A D inclinentur, dabuntur earum rationes ad has priores, unde deducetur eodem modo ac in Lemmate XVII. in isto etiam casu fore $SP^2$ ad $RP \times PQ$ in datâ ratione.

Pariter & conversa demonstrabitur ut Lemma XVIII.

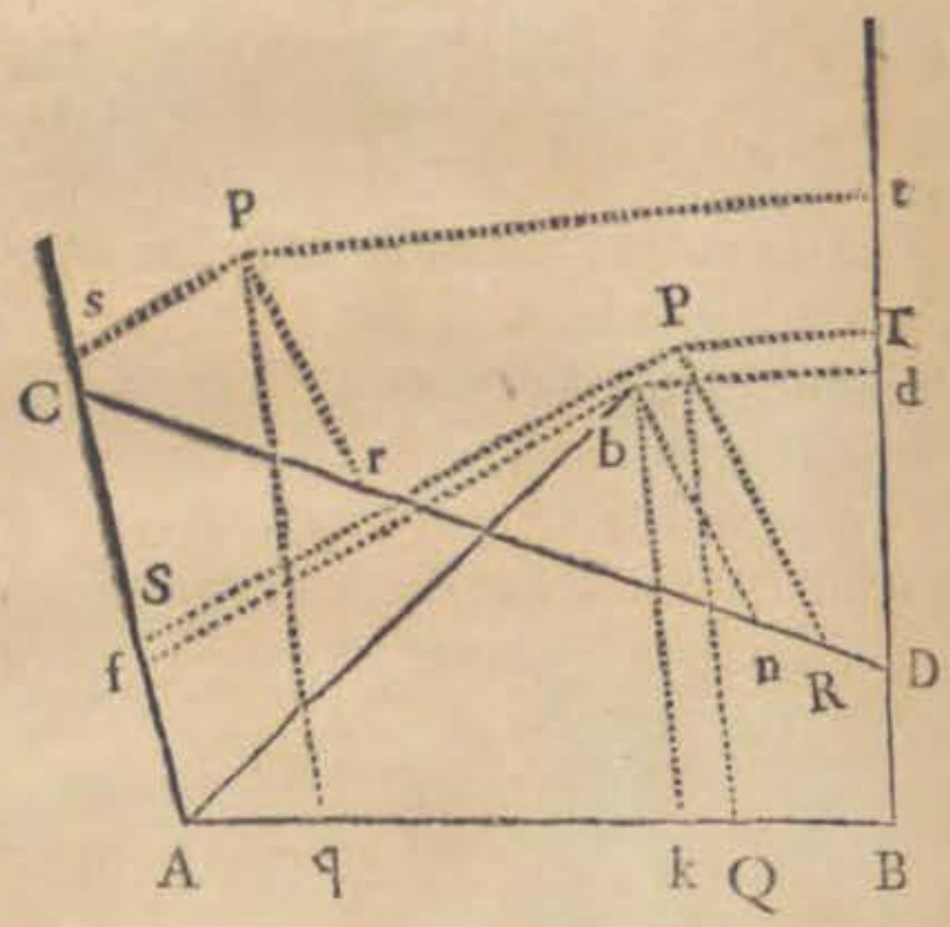
(†) * *Jam curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantùm tangent*; puncta enim A & B, C & D, semper supponuntur in conicæ sectionis perimetro posita; quarè evanescentibus distantiis A B & C D, lineæ A B & C D, ultimò coincidunt cum tangentibus sectionem in punctis A & C. Vid. Lem. VI. Newt.




(d) 303. Puncta quatuor A, B, D, C, sint in perimetro hyperbolæ vel in perimetris duarum hyperbolarum oppositarum, planum sectionis quo hyperbola in cono generatur accedat ad coni verticem; hyperbolæ in triangula rectilinea mutantur quæ erunt loca punctorum P, & quorum latera vel coincidunt cum duobus trapezii lateribus vel sunt ipsius diagonales, ac proindè punctum P, incidit in rectam quâ quævis ex punctis quatuor A, B, C, D, junguntur & *conica sectio vertitur in geminas rectas quarum una est recta illa in quâ punctum P incidit & altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur.*

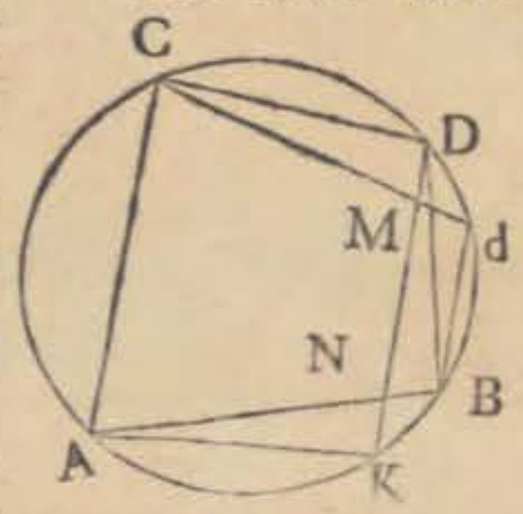
DE MOTU CORPORUM.

evadet circulus. (e) Idem fiet, si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis, & rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ sit ad rectangulum sub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum sub sinubus angulorum $S$, $T$, in quibus duæ ultimæ $PS$, $PT$ ducuntur, ad rectangulum sub sinubus angulorum $Q$, $R$, in quibus duæ primæ $PQ$,

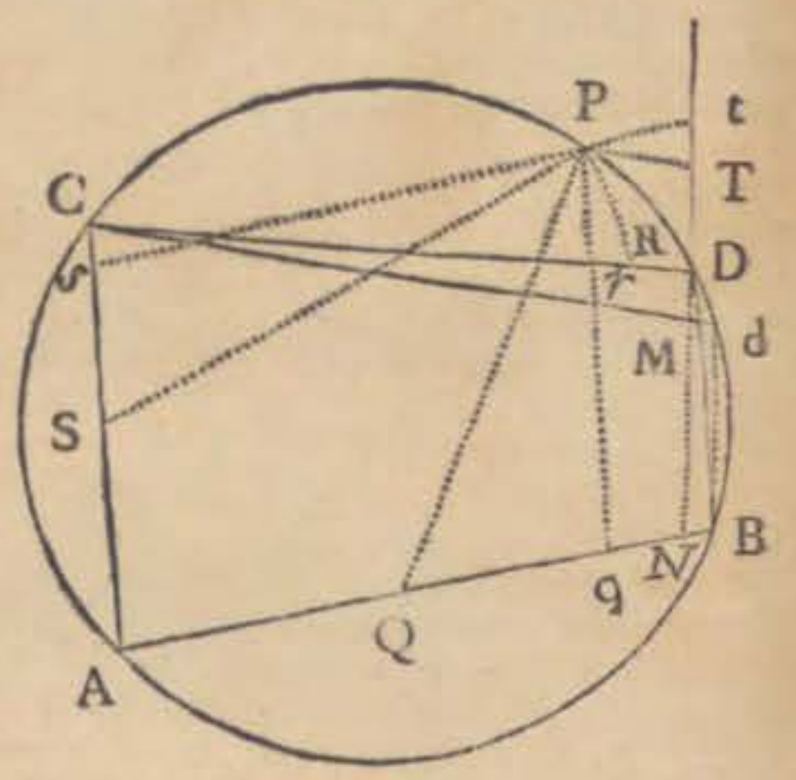



$PR$,

(e) 304. *Sectio Conica evadet circulus.* Si ex trapezii ABDC circulo inscripti angulo quovis D, agatur recta DN, lateri AC parallela, & lateri AB occurrens in N, deindè ex altero angulo B, ducatur Bd, lateri AC parallela circulo occurrens in d, jungaturque Cd rectam DN, secans in N, erit $DN \times DM = AN \times NB$. Nam jungatur AK, & quoniam arcus CD, & AK, Dd, & KB, inter easdem parallelas intercepti æquales sunt, anguli DCd, & BAK, CDK & AKD, iis arcubus insistentes & æqualium arcuum chordæ CD, AK, æquantur; quarè triangula AKN, CDM, similia & æqualia sunt; est igitur $DM = NK$; sed ex naturâ circuli $AN \times NB = KN \times DN$, ergò $AN \times NB = DM \times DN$.




305. Si ergo sectio conica trapezio circumscripta vertatur in circulum, hoc est, si sectionis planum basi coni fiat parallelum, erit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangu-




lum $PS \times PT$, ut rectangulum sub sinubus angulorum S, T, ad rectangulum sub sinubus angulorum Q, R... Dem... factâ constructione Cas. 3i. Lem XVII. agantur rectæ DN, Bd, lateri AC parallelæ, ut in articulo superiori; & erit per demonstrationem casus 2i. Lem. XVII., $ND \times DM : AN \times NB = Pq \times Pr : Ps \times Pt$, hoc est (304) $Pq \times Pr = Ps \times Pt$. Jam verò angulorum sinubus litterâ S designatis

*P R*, ducuntur. (f) Cæteris in casibus locus puncti *P* erit aliqua trium figurarum, quæ vulgo nominantur sectiones conicæ. (g) Vice autem trapezii *A B C D* substitui potest quadrilaterum, cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & è punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

LEM-

Egnatis erit S. P q A = S. C A B, & S. P r C = S. A C D, ob parallelas P q, A C, & S. P s S = S. P s C = S. C A B, & S. P t T = S. A B D, ob parallelas s t, A B, & ob angulum A C D, complementum anguli ABD ad duos rectos, S. P t T = S. ACD.

Porrò

P Q : P q = S. P q A (S. C A B) : S. P Q B
P s : P S = S. P S C : S. P s S (S. C A B).
P R : P r = S. P r C (S. ACD) : S. P R C.
P t : P T = S. P T t : S. P t T. (S. A C D).

Ergò per compositionem rationum

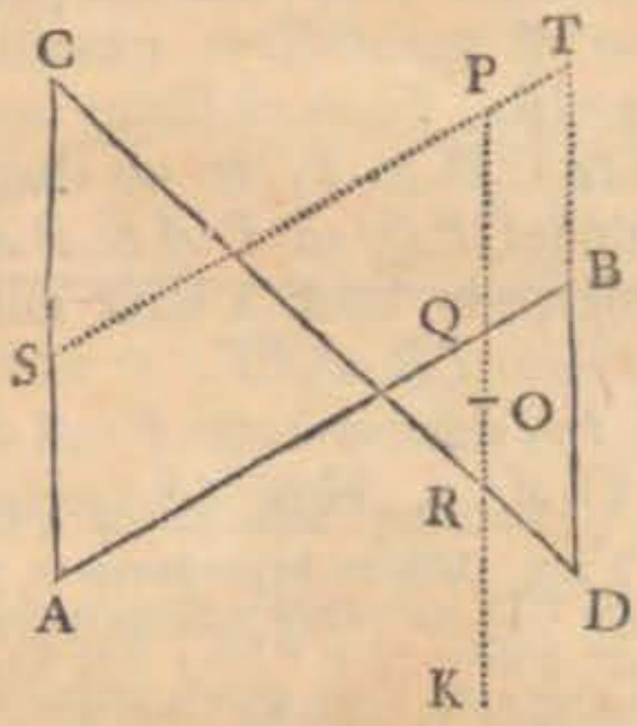
P Q × P R × P s × P t : P S × P T × P q × P r
= P Q × P R : P S × P T
= S. P S C × S. P T t : S. P Q B × S. P R C.

Q. e. D.

306. Coroll... Eâdem manente proportione, si omnes anguli ad S, T, Q, R, fuerint æquales, rectangulum P Q × P R, erit quoque æquale rectangulo P S × P T.

(f) * Nam vel punctum P, locabitur in sectione rectilineâ per verticem coni transeunte, vel in circulo, vel tandem in aliquâ trium sectionum conicarum, nullæ enim aliæ sunt sectiones conicæ, ut notum est.

(g) 307. *Vice autem trapezii substitui potest quadrilaterum A B D C, cujus latera duo A B, C D, se mutuò instar diagonalium decussant*; huic enim quadrilatero absque mutatione aptari possunt tam constructiones quam demonstrationes Lematum XVII. & XVIII. Exemplum sit

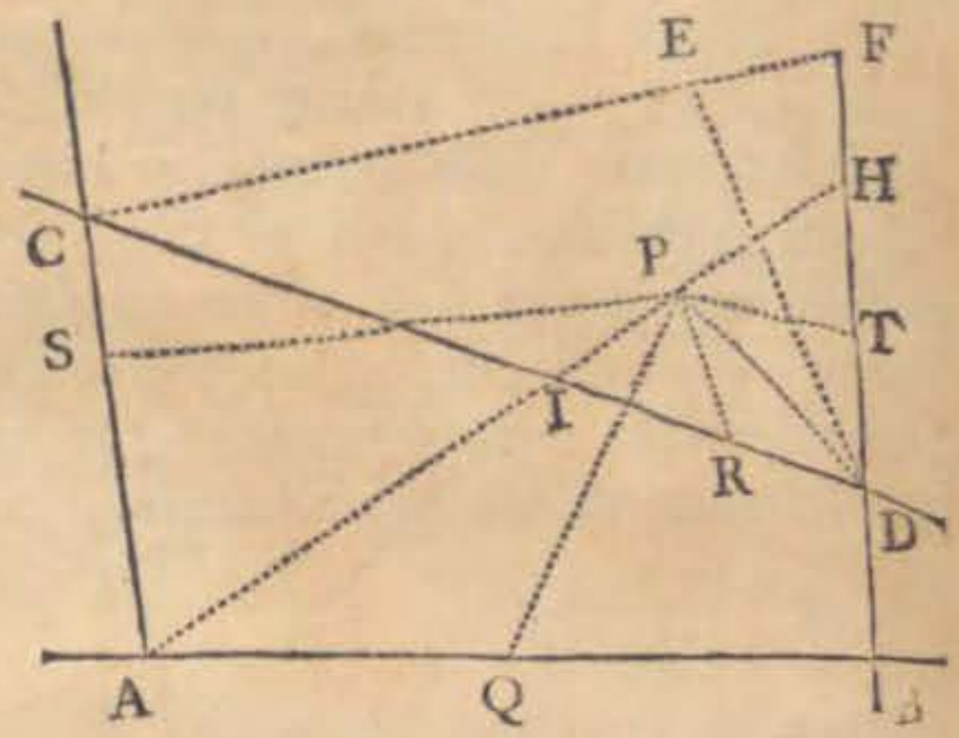



Cas. 1. Lem. XVII. ponamus lineas ex puncto P, ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putà P Q & P R, lateri A C & P S, ac PT, lateri A B; sintque insuper latera duo ex oppositis putà A C & B D, sibi invicem parallela & recta quæ bisecat &c. cæteræ omnes demonstrationis partes eodem modo transferuntur ad quadrilaterum CABD.

## LEMMA XIX.

DE MOTU CORPORUM.

*Invenire punctum* P, *à quo si rectæ quatuor* PQ, PR, PS, PT *ad alias totidem positione datas rectas* AB, CD, AC, BD, *singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis,* PQ×PR, *sit ad rectangulum sub aliis duabus,* PS×PT, *in datâ ratione.*




Lineæ *AB*, *CD*, ad quas rectæ duæ *PQ*, *PR* unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis *A*, *B*, *C*, *D*. Ab eorum aliquo *A* age rectam quamlibet *AH*, in quâ velis punctum *P* reperiri. Secet ea lineas oppositas *BD*, *CD*, nimirum *BD* in *H* & *CD* in *I*, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes *PQ* ad *PA* & *PA* ad *PS*, ideoque ratio *PQ* ad *PS*. Auferendo hanc à datâ ratione *PQ*×*PR* ad *PS*×*PT*, dabitur ratio *PR* ad *PT*, & addendo datas rationes *PI* ad *PR*, & *PT* ad *PH* dabitur ratio *PI* ad *PH*, atque ideo punctum *P*. *Q.E.I.*

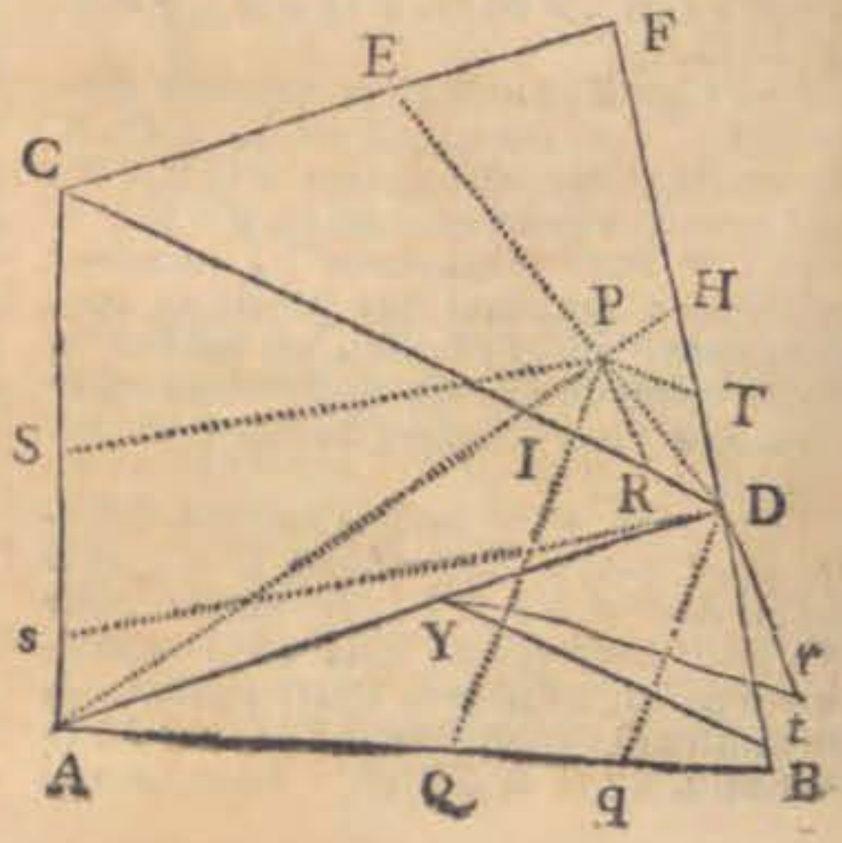
*Corol.* 1. Hinc ([h]) etiam ad loci punctorum infinitorum *P*

([h]) 308. Minima fit punctorum P, D, distantia PD, agantur Ds, Dq, ad AC, AB, in angulis datis PSC, PQA, & junctâ AD, ex illius quovis puncto Y, ducantur Yr, lateri CD, parallela, & Yt, ad DB, in angulo dato PTH; tum ex puncto D, ad Yr, ducatur Dr, in angulo dato PRI; punctis P, D, coeuntibus erit PQ:PA=Dq:DA, & PA:PS=DA:Ds, adeóque PQ:PS=Dq:Ds, & proindè PQ×PR:PS×PT=Dq×PR:Ds×PT. Ratio data rectanguli PQ×PR ad PS×PT sit A ad B, & erit Dq×PR:Ds×PT=A:B, adeóque

PR:PT=A×Ds:B×Dq

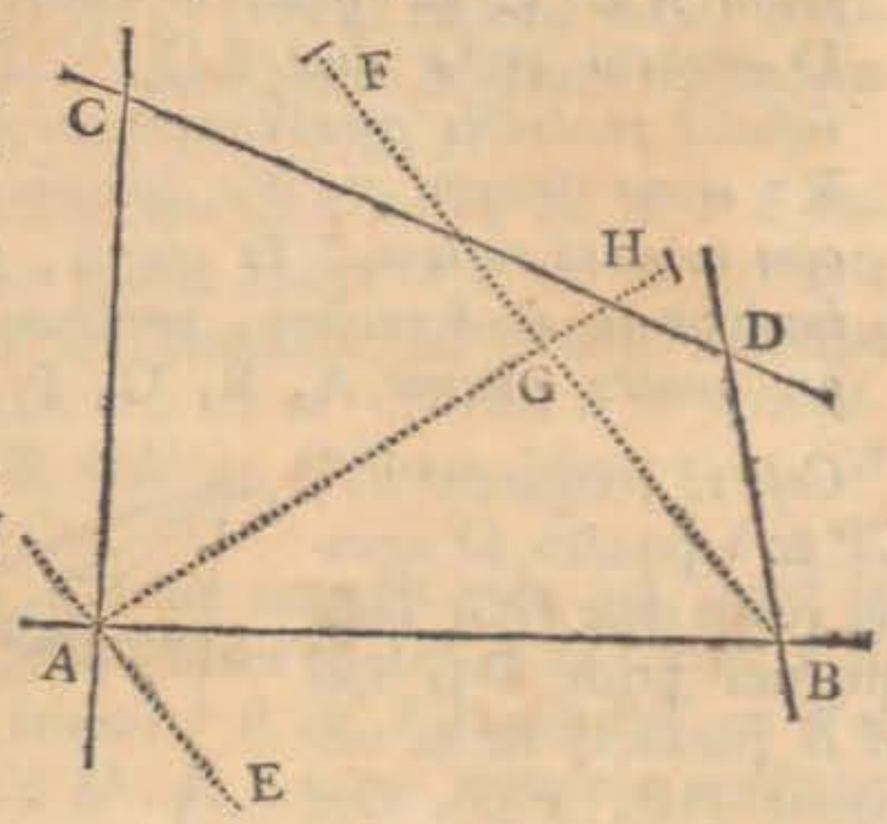
& evanescente PD, ob similia triangula PIR, DYr, erit

PI:PR=DY:Dr



punctum quodvis $D$ tangens duci poteſt. Nam chorda $PD$, ubi puncta $P$ ac $D$ conveniunt, hoc eſt, ubi $AH$ ducitur per punctum $D$, tangens evadit. Quo in caſu, ultima ratio evaneſcentium $IP$ & $PH$ invenietur ut ſupra. Ipſi igitur $AD$ duc parallelam $CF$, occurrentem $BD$ in $F$, & in eâ ultimâ ratione ſectam in $E$, & $DE$ tangens erit, propterea quod $CF$ & evaneſcens $IH$ parallelæ ſunt, & in $E$ & $P$ ſimiliter ſectæ. 

*Corol.* 2. Hinc etiam locus punctorum omnium $P$ definiri poteſt. Per quodvis punctorum $A$, $B$, $C$, $D$, puta $A$, duc loci tangentem $AE$, & per aliud quodvis punctum $B$ duc tangenti parallelam $BF$ occurrentem loco in $F$. Invenietur autem punctum $F$ per lem. XIX. Biſeca $BF$ in $G$, & actâ indefinita $AG$ erit poſitio diametri ad quam $BG$ & $FG$ ordinatim applicantur. Hæc $AG$ occurrat loco in $H$, (i) & erit $AH$ diameter ſive latus tranſverſum, ad quod latus rectum erit ut $BGq$ ad $AG \times GH$. Si (k) $AG$ nuſquam occurrit loco, lineâ $AH$ exiſtente infinitâ, locus erit parabola, & latus rectum ejus ad diametrum $AG$ pertinens erit $\frac{BGq}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit, locus hyperbola erit, ubi puncta $A$ & $H$ ſita ſunt ad eaſdem partes ipſius $G$: & ellipſis, ubi $G$ intermedium eſt, niſi forte angulus $AGB$ rectus ſit, & inſuper $BG$ *quad.* æquale rectangulo $AGH$, quo in caſu circulus habebitur.




& ob ſimilia triangula PTH, YtD, erit
PT : PH = Yt : DY
ergò per compoſitionem rationum
PI : PH = A × Ds × Yt : B × Dq × Dr
= CE : EF, ob parallelas IH : CF, ducta DE, erit tangens in D.

(i) * Et erit AH, diameter (per prop. 7am lib. 2. conic. Apoll. Lemma IV. de Conic. 224.) ſive latus tranſverſum ad quod latus rectum erit ut $BG^2$ ad $AG \times GH$ (per prop. 21. lib. 1. conic. Apoll. Theor. II. de Hyp. & de Ellip. & Theor. I. de Parab. n. 224.)

(k) 309. Locus omnium punctorum P. eſt aliqua ex quinque coni ſectionibus, per Lem. XVIII. & ipſius ſcholium. Si locus

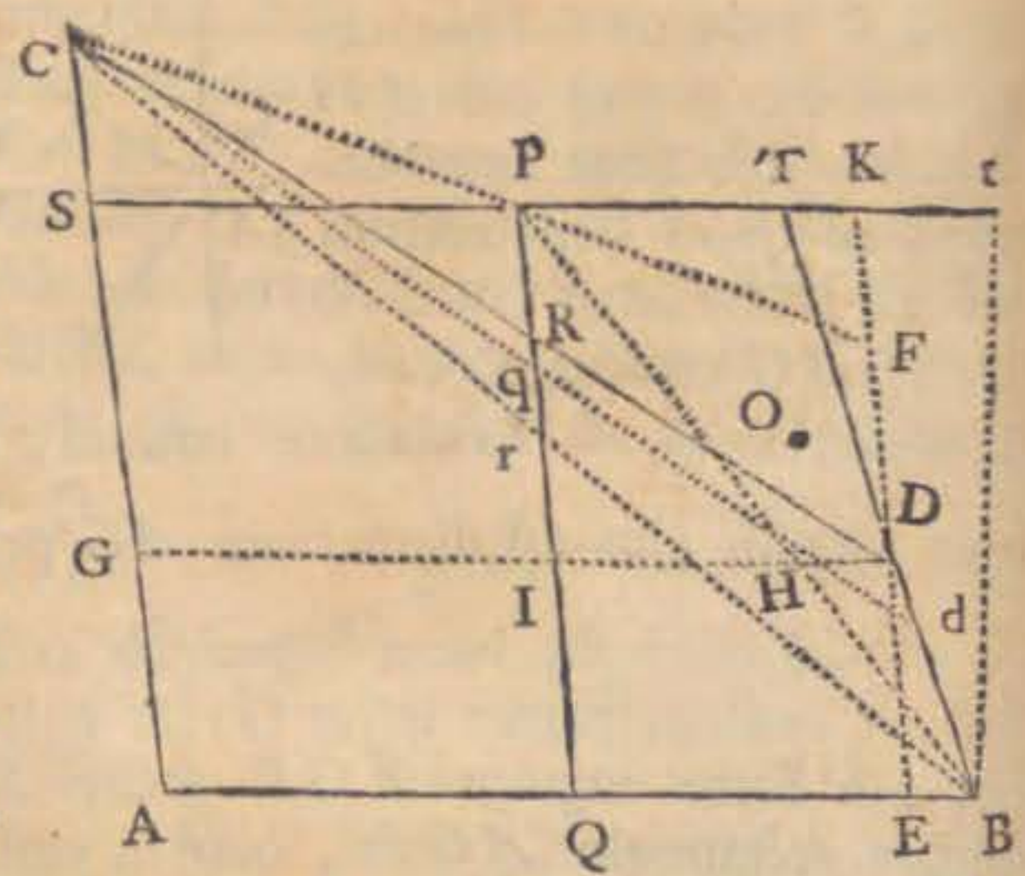
DE MOTU CORPORUM.

Atque ita problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* inceepti & ab *Appollonio* continuati non calculus, ſed compoſitio geometrica, qualem veteres quærebant in hoc corollario exhibetur. (1)

## LEMMA XX.

*Si parallelogrammum quodvis* ASPQ *angulis duobus oppoſitis* A *&* P *tangit ſectionem quamvis conicam in punctis* A *&* P; *& lateribus unius angulorum illorum infinitè productis* AQ, AS *occurrit eidem ſectioni conicæ in* B *&* C; *à punctis autem occurſuum* B *&* C *ad quintum quodvis ſectionis conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* BD, CD *occurrentes alteris duobus infinitè productis parallelogrammi lateribus* PS, PQ *in* T *&* R: *erunt ſemper abſciſſæ laterum partes* PR *&* PT *ad invicem in datâ ratione. Et contra, ſi partes illæ abſciſſæ ſunt ad invicem in datâ ratione, punctum* D *tanget ſectionem conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *tranſeuntem.*

*Caſ.* 1. Jungantur *BP*, *CP* & à puncto *D* agantur rectæ duæ *DG*, *DE*, quarum prior *DG* ipſi *AB* parallela ſit & occurrat *PB*, *PQ*, *CA* in *H*, *I*, *G*; altera *DE* parallela ſit ipſi *AC* & occurrat *PC*, *PS*, *AB* in *F*, *K*, *E*: & erit (per lem. XVII.) rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$




ſuerit linea recta ac proindè tangens ipſa AE, (303) recta BF, tangenti parallela nullibi occurret loco; ſi verò locus fuerit alia coni ſectio, recta BF, huic ſectioni occurret in puncto aliquo F, tumque diameter AG, vel utrinque terminabitur ad hyperbolas oppoſitas, quo caſu, puncta A & H, ſita erunt ad eaſdem partes ipſius G, vel claudetur Ellipſi aut circulo, & punctum G, inter A & H poſitum erit, vel tandem nullibi occurret loco qui proindè erit parabola. Porrò datis ſectionis conicæ vertice, diametro, hujus latere recto ac ordinatarum angulo ſectio deſcribi poteſt (per prop. 52. 53. 54. 55. lib. 1. conic. Apoll. ſive ex iis quæ in notâ 224. de Conicis tradita fuere).

(1) * Hoc veterum problema primus in ſuâ Geometriâ Carteſius per calculum analyticum generaliter reſolvit.

in ratione datâ. Sed eſt $PQ$ ad $DE$ (ſeu $IQ$) ut $PB$ ad $HB$, ideoque ut $PT$ ad $DH$; & viciſſim $PQ$ ad $PT$ ut $DE$ ad $DH$. Eſt & $PR$ ad $DF$ ut $RC$ ad $DC$, ideoque ut ($IG$ vel) $PS$ ad $DG$, & viciſſim $PR$ ad $PS$ ut $DF$ ad $DG$; & conjunctis rationibus fit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$ ut rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, atque ideo in datâ ratione. Sed dantur $PQ$ & $PS$, & propterea ratio $PR$ ad $PT$ datur. *Q. E. D.*

*Caſ.* 2. Quod ſi $PR$ & $PT$ ponantur in datâ ratione ad invicem, (m) tum ſimili ratiocinio regrediendo, ſequetur eſſe rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione datâ, ideoque punctum $D$ (per lem. XVIII.) contingere conicam ſectionem tranſeuntem per puncta $A$, $B$, $C$, $P$. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc ſi agatur $BC$ ſecans $PQ$ in $r$, & in $PT$ capiatur $Pt$ in ratione ad $Pr$ quam habet $PT$ ad $PR$: erit $Bt$ tangens conicæ ſectionis ad punctum $B$. Nam concipe punctum $D$ coire cum puncto $B$, ita ut chordâ $BD$ evaneſcente, $BT$ tangens evadat; & $CD$ ac $BT$ coincident cum $CB$ & $Bt$.

*Corol.* 2. Et vice versâ ſi $Bt$ ſit tangens, & ad quodvis conicæ ſectionis punctum $D$ conveniant $BD$, $CD$; erit $PR$ ad $PT$ ut $Pr$ ad $Pt$. Et contra, ſi ſit $PR$ ad $PT$ ut $Pr$ ad $Pt$: convenient, $BD$, $CD$ ad conicæ ſectionis punctum aliquod $D$.

*Corol.* 3. Conica ſectio non ſecat conicam ſectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, ſi fieri poteſt, tranſeant duæ conicæ ſectiones per quinque puncta $A$, $B$, $C$, $P$, $O$; eaſque ſecet recta $BD$ in punctis $D$, $d$, & ipſam $PQ$ ſecet recta $Cd$ in $q$. Ergo $PR$ eſt ad $PT$ ut $Pq$ ad $PT$; (n) unde $PR$ & $Pq$ ſibi invicem æquantur, contra hypotheſin. LEM-

(m) * *Nam ſi PR & PT ponantur in ratione datâ*, erit quoque ob datas PQ, PS, rectangulum PQ × PR, ad rectangulum PS × PT, in ratione datâ; ſed per demonſtrata in 1°. caſu PQ × PR : PS × PT = DE × DF : DH × DG; ergò DE × DF ad DH × DG in ratione datâ.

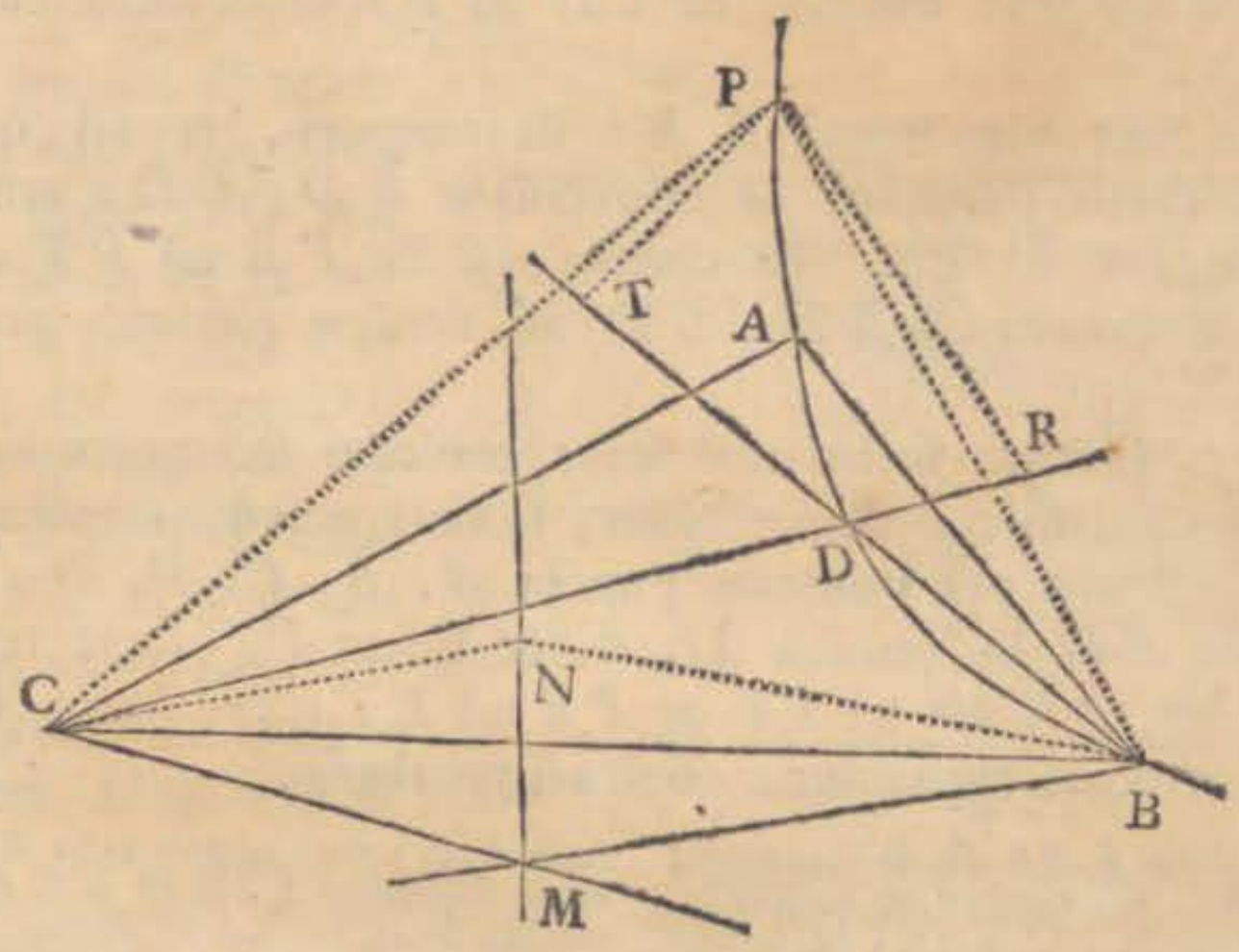
(n) * Cum enim duæ ſectiones conicæ ſe mutuò interſecent in punctis O & B, (per hyp.) duci poterit recta BD, quæ duos ſectionum arcus in B & O convenientes ſecet in punctis duobus, eritque per coroll. 1. Lem. XX. PR : PT = Pr : Pt = Pq : PT, adeóque PR : PT = Pq : PT, unde PR & Pq. ſibi invicem æquantur, ac proindè Cd, coincidit cum CD, & punctum d, cum puncto D, (contra hyp.).

De Motu Corporum.

## LEMMA XXI.

*Si rectæ duæ mobiles & infinitæ* BM, CM *per data puncta* B, C *ceu polos ductæ, concursu suo* M *describant tertiam positione datam rectam* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD, *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur: dico quod hæ duæ* BD, CD *concursu suo* D *describent sectionem conicam per puncta* B, C *transeuntem. Et vice versâ, si rectæ* BD, CD *concursu suo* D *describant sectionem conicam per data puncta* B, C, A *transeuntem, & sit angulus* DBM *semper æqualis angulo dato* ABC, *angulusque* DCM *semper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam positione datam.*

Nam in rectâ *MN* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit in immotum *N*; incidat punctum mobile *D* in im-




motum *P*. Junge *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, & a puncto *P* age rectas *PT*, *PR* occurrentes ipsis *BD*, *CD* in *T* & *R*, & facientes an-

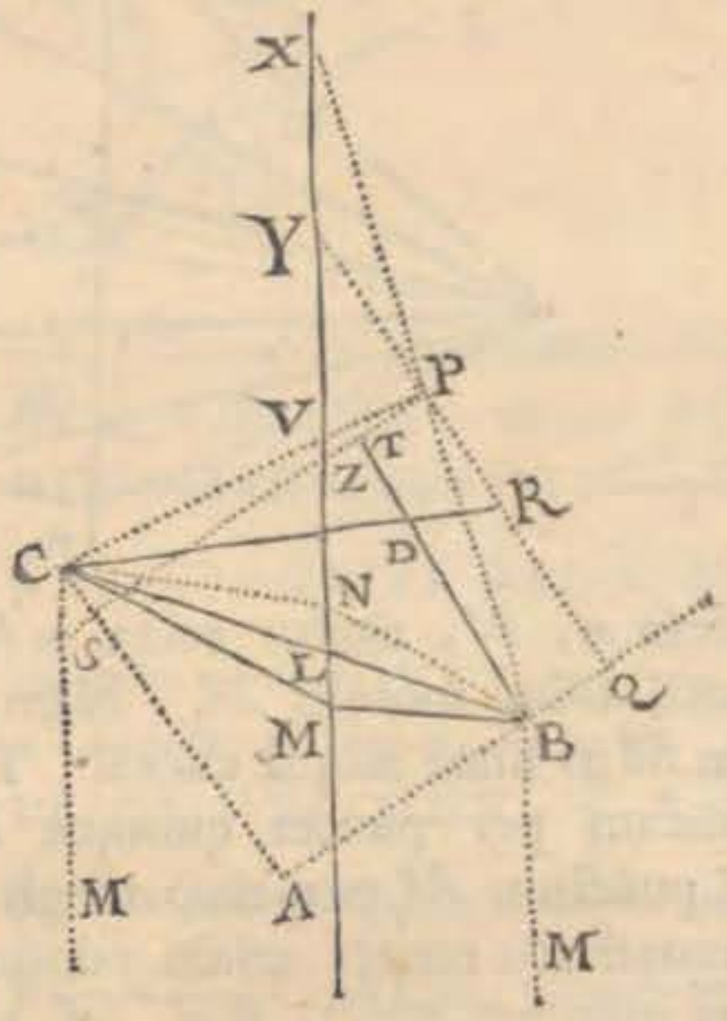
angulum *BPT* æqualem angulo dato *BNM*, & angulum *CPR* æqualem angulo dato *CNM*. Cum ergo (ex hypotheſi) æquales ſint anguli *MBD*, *NBP*, ut & anguli *MCD*, *NCP*; auferendo communes *NBD* & *NCD*, & reſtabunt æquales *NBM* & *PBT*, *NCN* & *PCR*: ideoque triangula *NBM*, *PBT* ſimilia ſunt, ut & triangula *NCM*, *PCR*. Quare *PT* eſt ad *NM* ut *PB* ad *NB*, & *PR* ad *NM* ut *PC* ad *NC*. Sunt autem puncta *B*, *C*, *N*, *P* immobilia. Ergo *PT* & *PR* datam habent rationem ad *NM*, proindeque datam rationem inter ſe; atque ideo (per lem. xx. (o)) punctum *D*, perpetuus rectarum mobilium *BT* & *CR* concurſus, contingit ſectionem conicam, per puncta *B*, *C*, *P* tranſeuntem. *Q. E. D.*

Et

(o) *Atque ideo per Lemma XX.* &c. ut pateat Lemma XX. ad hanc demonſtrationem applicari, hæc ſunt ſupplenda conſtructioni Newtonianæ.

Concurrant lineæ BM, CM in puncto lineæ NM infinite diſtanti, hoc eſt, ſint illi lineæ NM parallelæ, & ducantur lineæ BA, CA facientes cum illis lineis BM, CM angulos MBA, MCA datis MBD, MCD æquales. Dico lineas BA, CA fore parallelas lineis PT, PR ſecundum conſtructionem Newtonianam deſcriptis: Productis enim BP & PT (ſi neceſſe ſit) donec ſecent rectam datam MN in X & Z, erit angulus BPZ exterior reſpectu Trianguli PZX, ideoque æqualis angulis X & PZX, & angulus BNM erit exterior reſpectu Trianguli BNX ideoque æqualis angulis X & XBN, anguli vero BPZ & BNM æquales ſunt per conſtructionem Newton. ergo anguli X & PZX æquales ſunt angulis X & XBN, unde angulus PZX, quem facit linea PT cum recta NM eſt æqualis angulo XBN ſive angulo dato MBD quem facit linea BA cum linea BM ipſi NM parallela, ergo per naturam Parallelarum, eſt linea PT parallela lineæ BA.

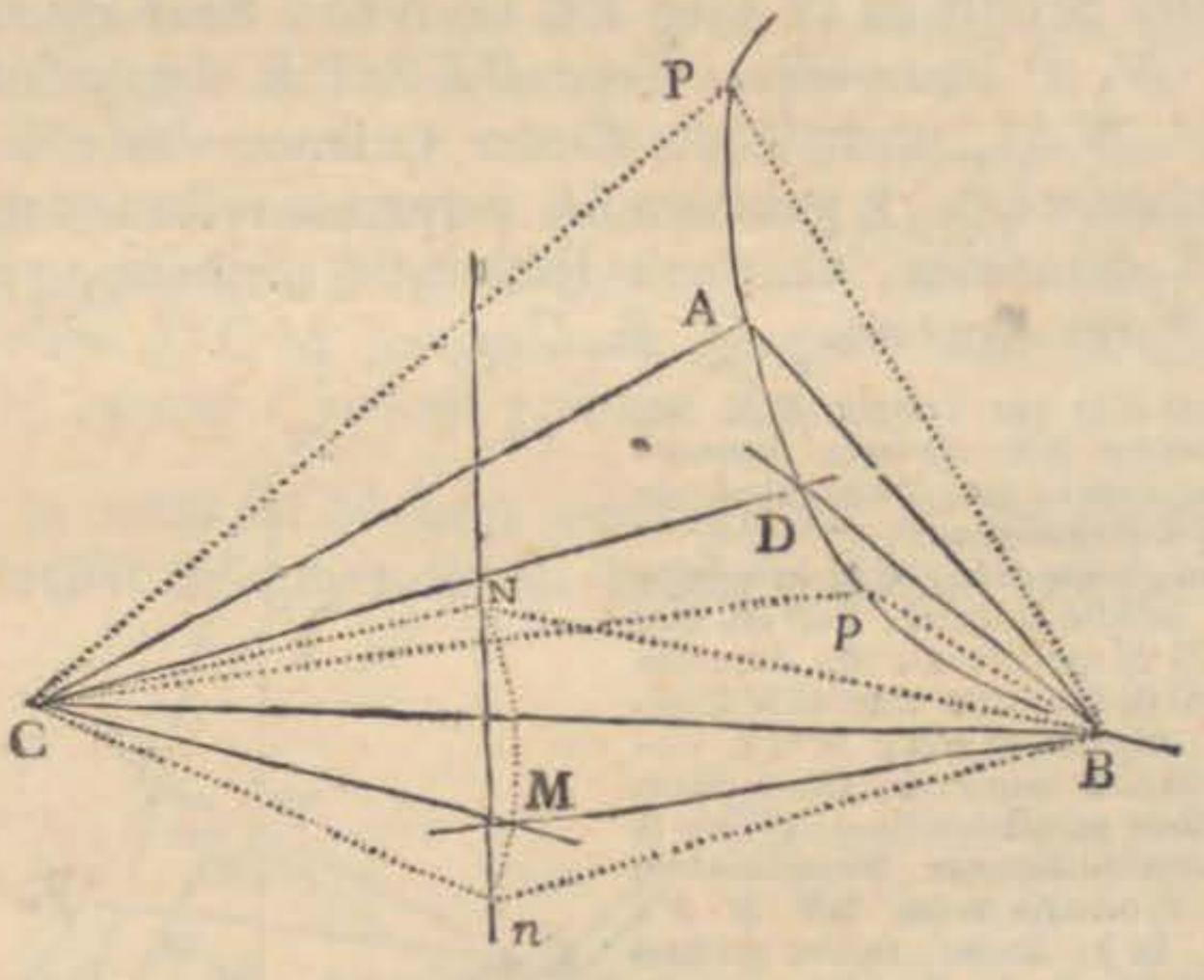
Eodem planè modo demonſtrabitur lineam CA eſſe Parallelam lineæ PR. Quibus poſitis, ſit ſectio Conica per puncta B, C, P & A tranſiens, lineæ BD, CD juxta conditiones in Lemmate præſcriptas ductæ, concurſu ſuo D percurrent eam ſectionem Conicam: Productis enim lineis PT PR, donec ſecent lineas CA, BA, in S & Q fiet *Parallelogrammum ASPQ*,




*quod in Angulis ſuis oppoſitis A & P tangit ſectionem conicam & lateribus anguli A productis occurrit eidem ſectioni in B & C, & lineæ BD, CD à punctis occurſuum B & C ductæ* (ſecundum conditiones Lemmatis hujuſce XXI.) *abſcindunt à Parallelogrammi lateribus PS, PQ partes PT, PR quæ ſunt ad invicem in datâ ratione* (per demonſtrationem Newtonianam hujuſce) *ergo* (per 2. caſum Lem. XX.) *punctum D tangit ſectionem Conicam per puncta quatuor A, B, C, P tranſeuntem.*

DE MOTU CORPORUM.

Et contra, ſi punctum mobile $D$ contingat ſectionem conicam tranſeuntem per data puncta $B$, $C$, $A$, & ſit angulus $DBM$ ſemper æqualis angulo dato $ABC$, & angulus $DCM$ ſemper æqualis angulo dato $ACB$, & ubi punctum $D$ incidit ſucceſſivè in duo quævis ſectionis puncta immobilia $p$, $P$, punctum mobile $M$ incidat ſucceſſivè in puncta duo immobilia $n$, $N$: per




eadem $n$, $N$, agatur recta $nN$, & hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis $M$. Nam, ſi fieri poteſt, verſetur punctum $M$ in lineâ aliquâ curvâ. Tanget ergo punctum $D$ ſectionem conicam per puncta quinque $B$, $C$, $A$, $p$, $P$ tranſeuntem, ubi punctum $M$ perpetuò tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonſtratis tanget etiam punctum $D$ ſectionem conicam per eadem quinque puncta $B$, $C$, $A$, $p$, $P$, tranſeuntem, (P) ubi punctum

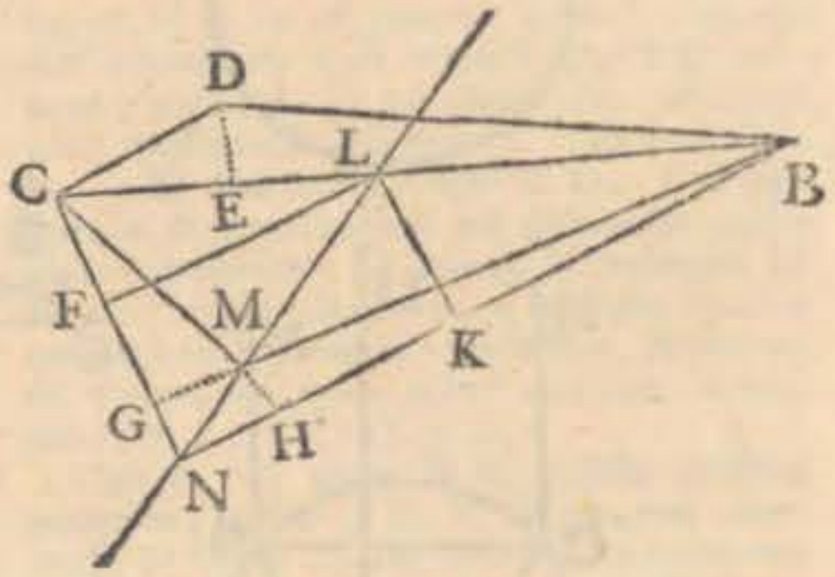
(P) * *Ubi punctum M, perpetuò tangit lineam rectam* n N &c. cum enim angulorum datorum A B C, A C B, latera duo coincidunt cum rectâ C B, punctum A, aliorum laterum B A, C A, interſectio, locatur in ſectione coniçâ per polos C, B, tranſeunte; dum verò latera duo B n, & C n, B N, & C N, ſeſe interſecant in n, N, aliorum laterum B p, & C p, B P & C P interſectiones p, P, ſunt in eâdem ſectione coniçâ ex demonſtratis.

tum *M* perpetuò tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra corol. 3. lemmat. xx. Igitur punctum *M* versari in lineâ curvâ absurdum est. *Q. E. D.* (9)

(9) 310. In hâc organicâ sectionum conicarum descriptione, angulorum circà polos mobilium crura utrinque producantur, ut cum duo crura v. gr. C F, B P suprà lineam C B divergunt, infrà eandem producta convergant.

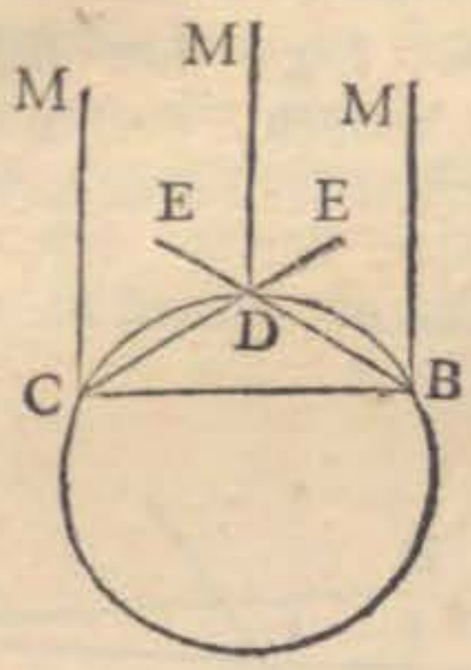
Si recta N M, per polorum alterutrum C, vel B, transeat, aut si anguli B C D, C B D, simul evanescant, punctum D describet lineam rectam. Nam in 1°. casu angulorum datorum unus immobilis manet, dum alter circà polum suum rotatur & crurum suorum cum immobilis anguli cruribus intersectione lineam rectam describit; Si enim recta N M cum anguli dati D C M crure altero C M coincidat, immobili manente angulo D C M, alterius D B M crura rectas M C, C D perpetuò intersecabunt; deindè si crure B M, coincidente cum C B, ut rectam C M positione datam perpetuò secet in C, immobilis maneat angulus D B M, alterius D C M circà polum C rotati crus C D rectam B D perpetuò intersecabit.

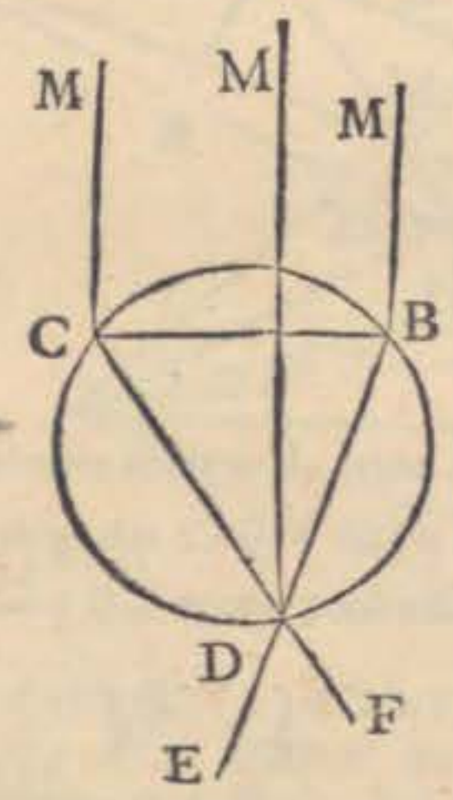
In 2°. casu anguli B C N, C B N circà polos C, B mobiles, crurum duorum C N, B N concursu, rectam N M L positione datam & aliorum crurum C B, B C seu C D, B D concursu D lineam quamlibet percurrant, sintque N punctum fixum M & D puncta mobilia; ductis ex puncto L dato ad latera data C N, B N perpendicularibus L F, L K ex puncto mobili M ad easdem perpendicularibus M G, M H & ex puncto D ad rectam C B, perpendiculari D E; sit C E = $x$, D E = $y$, C B = $a$, ac proindè E B = $a-x$, M N = $z$, L N = $b$, L F = $c$, F N = $d$ C N = e, L K = f, N K = h, N B = g; & ob triangula N M G, N F L similia, N L ($b$) : L F ($c$) = M N ($z$) : G M = $\frac{cz}{b}$, & L N ($b$) : F N ($d$) = M N ($z$) : G N = $\frac{dz}{b}$, adeòque C G = C N − G N



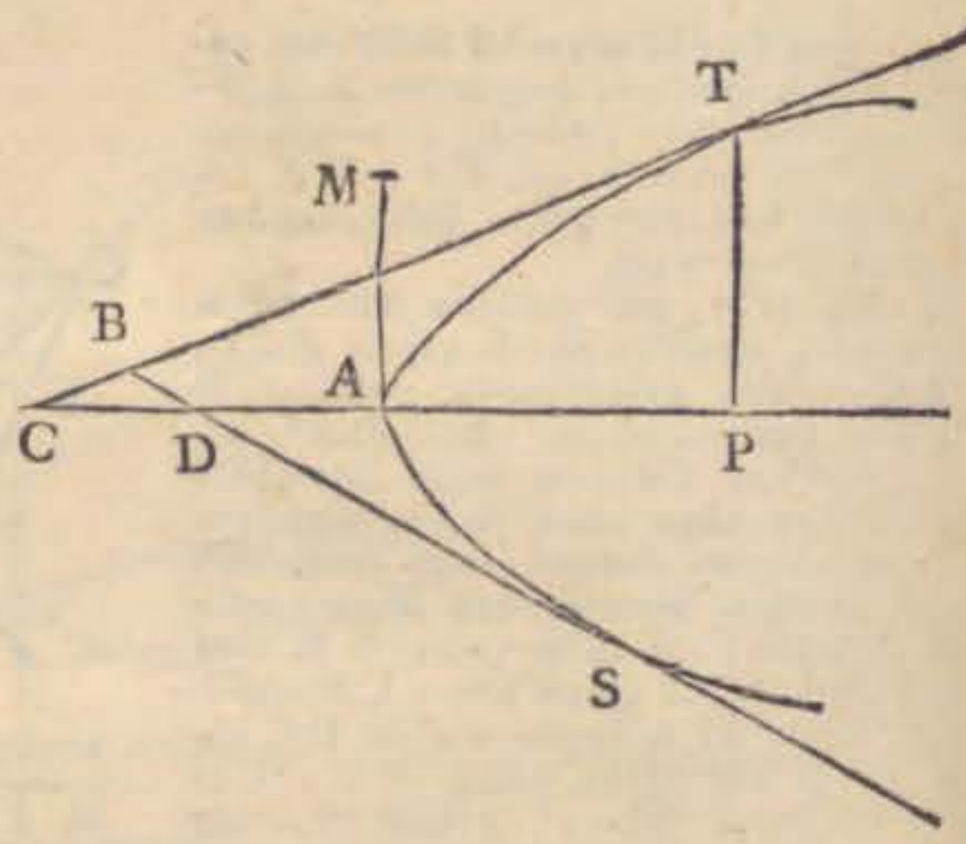

= $\frac{be-dz}{b}$; porrò ob angulos æquales D C E, M C G, & D E C, M G C, triangula D C E, M C G similia sunt; quarè C G ($\frac{be-dz}{b}$) : G M ($\frac{cz}{b}$) = C E ($x$) : D E ($y$). Undè $czx = bey - dzy$, & $z = \frac{bey}{cx+dy}$; ob triangula N L K, N M H, similia N L ($b$) : L K ($f$) = N M ($z$) : M H = $\frac{fz}{b}$, & N L ($b$) : N K ($h$) = M N ($z$) : N H = $\frac{hz}{b}$. undè B H = $\frac{gb-hz}{b}$; ob similia triangula B E D, B H M, B H ($\frac{gb-hz}{b}$) : M H ($\frac{fz}{b}$) = B E ($a-x$) : D E ($y$) quarè $faz - fzx = gby - hzy$, & $z = \frac{gby}{fa+hy-fx} = \frac{bey}{cx+dy}$, adeóque $gcx + gdy = fae + hey - fex$. Cum igitur æquatio sit unius dimensionis, locus punctorum D, est linea recta.

DE MOTU CORPORUM.



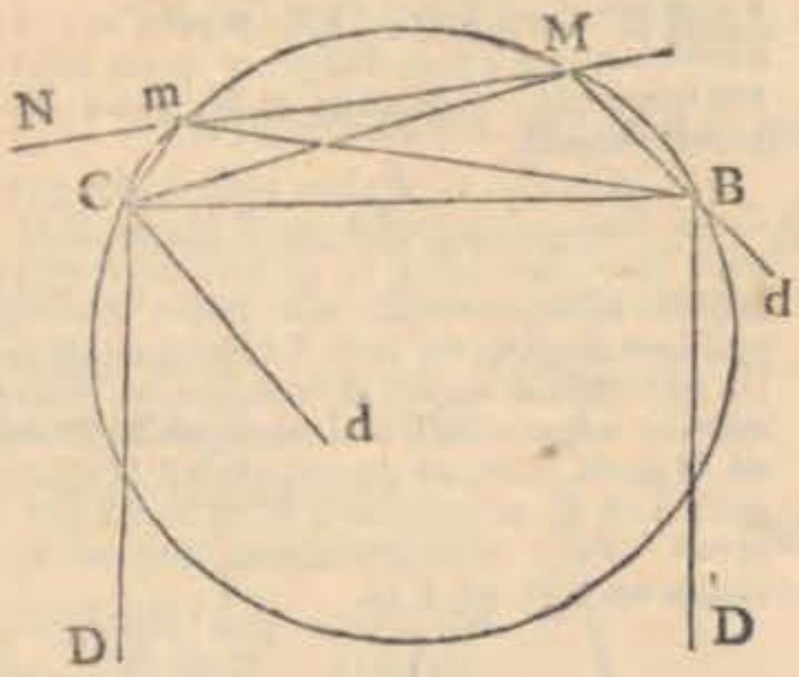




311. Si angulorum mobilium MCD, MBD crura CM, BM sibi invicem parallela maneant, seu, si recta NM ad distantiam infinitam abeat, crura alia CD, BD concursu suo D circulum describent, & contrà. Concurrant enim CM, DM, BM ad distantiam infinitam, & angulus MCD æqualis erit angulo MDF, ac MBD æqualis MDE; quoniam igitur dati sunt anguli MCD, MBD dabuntur quoque anguli MDF, MDE ac etiam angulus EDF & ei æqualis CDB. quarè cum curva concursu D descripta, necessariò transeat per puncta data C, & B, patet punctum D seu verticem anguli dati CDB chordæ CB insistentis esse in circuli peripheriâ. Et contrà, si concursus D, tangat circulum per puncta C, & B transeuntem, dabuntur tres anguli CDB, MCD, MBD atque adeo in quadrilatero MCDBM, cujus duo latera CM, BM concurrunt in M, dabitur angulus CMB, quod fieri nequit, nisi recta NM ad distantiam infinitam abeat, hoc est, nisi parallela fiant crura CM, BM.




312. Lemma. Si duæ rectæ parabolam tangant, & puncta contactuum in infinitum abeant, binæ tangentes se mutuò intersecant ad angulum infinitesimum & evadunt parallelæ axi parabolæ. Sit enim parabolæ axis CP, vertex A, CT tangens in T &, axem secans in C, TP ad axem ordinata, AM latus rectum axis, erit $CP = 2AP$, & $AP : PT = PT : AM$, adeóque $2AP\ (CP) : PT = 2PT : AM$. Si punctum contactûs T, in infinitum abeat, erit 2PT, infinita respectu AM, & proindè CP, infinita respectu PT, hoc est, sinus totus CP infinitus evadit respectu tangentis PT anguli TCP, quarè angulus ille infinitesimus est, & tangens axi CP parallela, altera tangens BS, axem secet in D, & tangentem CT in B, & punctum contactûs S in infinitum abeat; erit angulus SDP infinitesimus & angulus TBD duobus internis atque infinitesimis BCD, BDC æqualis, erit quoque infinitesimus.

313.

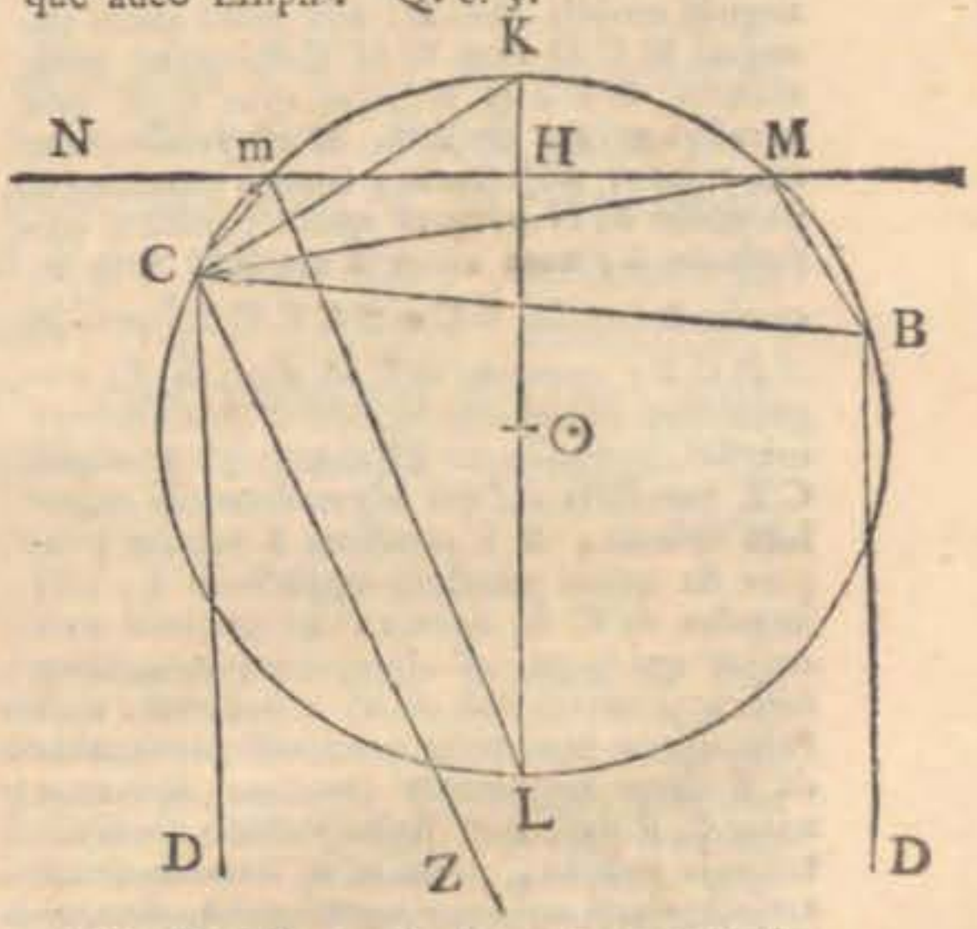



313. Super datâ rectâ C B, describatur segmentum circuli B M m C, quod capiat angulum B M C, datorum M C D, M B D supplementum ad quatuor rectos & compleatur circulus. Si recta data N M, quam in descriptione sectionis conicæ percurrit crurum B M C M concursus M hunc circulum secet, describetur hyperbola; si recta N M circulum contingat, describetur parabola; si recta N M circulo nullibi occurrat, describetur ellipsis.

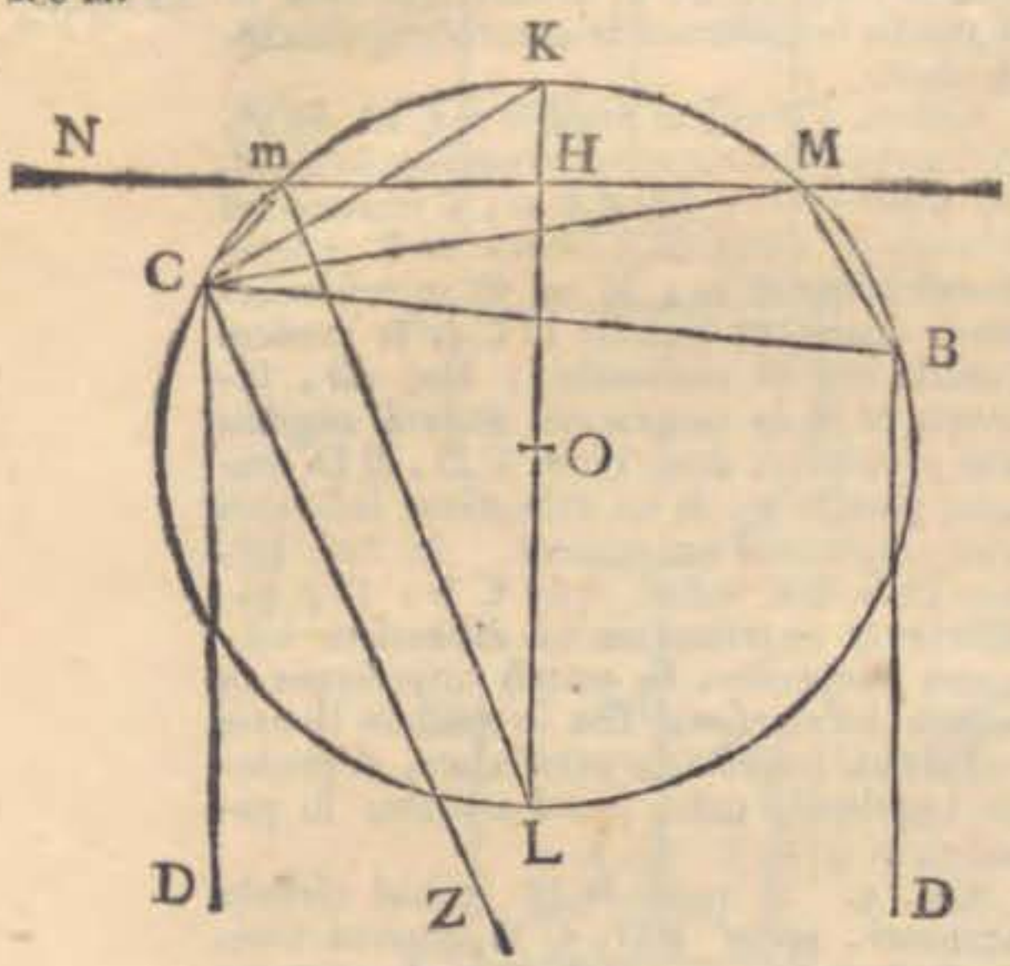
Cas. 1. Recta N M circulum secet in punctis m, M, & crura C d, B d, & C D, B D, sibi invicem parallela erunt sive concurrent ad distantiam infinitam; nam cum in quadrilatero D C M B D d C m B d angulus M vel m sit complementum angulorum C & B ad quatuor Rectos, angulus ad D vel d, evanescit, ideoque lineæ C D, B D erunt parallelæ. Cum verò in omni Sectione Conicâ inveniri possit Tangens parallela chordæ cuivis datæ (per Lemma IV. de Conicis pag. 129.) ductæ intelligantur Tangentes Sectionis chordis C D C d Parallelæ, illæ Tangentes facient inter se angulum æqualem angulo D c d quem faciunt inter se illæ chordæ, & puncta contactuum erunt ad distantiam infinitam, nulla verò est sectio conica præter hyperbolam cujus ad infinitam distantiam tangentes angulum finitum communi intersectione faciant; in Ellipsi enim nulla est tangens ad distantiam infinitam, & in parabolâ hujusmodi tangentes angulum infinitesimum duntaxat, facerent (per Lemma superius 313). Si igitur recta M N circulum secet, describetur hyperbola cujus asymptoti seu tangentes ad distantiam infinitam rectis C D, C d parallelæ sunt & se mutuò intersecant in centro trajectoriæ. Q. e. 1.

Cas. 2. Quoniam angulus m C M, in 1°. casu æqualis est asymptotorum angulo D C d, ob æquales D C M, d C m; si manentibus circulo & distantiâ polorum C B, puncta intersectionum m, M ad se mutuò accedant, decrescet angulus D C d, & tandem punctis m, M coeuntibus, hoc est, secante M N in tangentem mutatâ angulus ille evanescet, dum rectæ C D, B D manent parallelæ, & ad distantiam infinitam cum trajectoriâ conveniunt. In hoc igitur casu duæ rectæ, ipsis C D, C d parallelæ & trajectoriam ad distantiam infinitam tangentes, se mutuò intersecant in angulo infinitesimo, seu in unicam lineam coeunt axi trajectoriæ parallelam, & proinde hyperbola casus primi mutatur in parabolam (312). Q. e. 2.

Cas. 3. Si recta N M nullibi circulo occurrat, rectæ B D, C D quarum concursu D sectio conica describitur nunquam possunt fieri parallelæ, & proindè curva non abit in infinitum, sed in se redit, estque adeò Ellipsis. Q. e. 3.

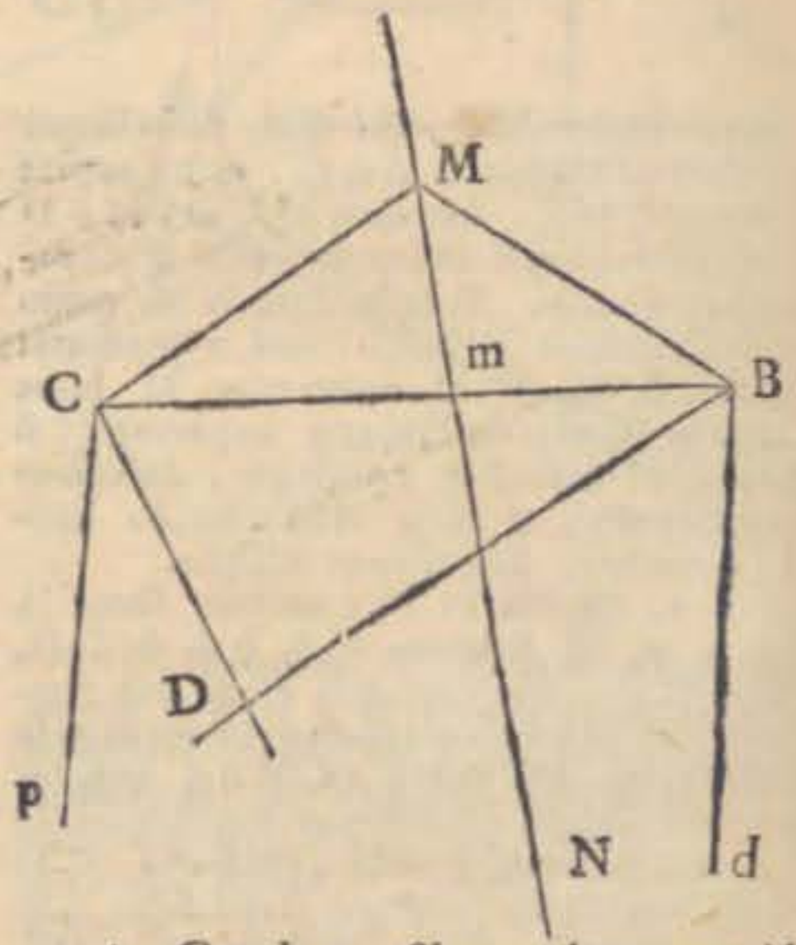



314. Coroll. 1. Ex his axes trajectoriæ facilè determinantur. Sit O centrum circuli C m M B ut suprà (313) descripti, ab hoc centro in rectam N M cadat perpendicularis O H circulo occurrens in




punctis K & L, & rectæ N M in H, jungatur C K, & fiat angulus K C Z æqualis angulo mobili M C D, aut quod idem est, anguli M C D crus C M ducatur ad positionem C K, & alterum crus C Z erit parallelum axi majori, & perpendiculare axi minori trajectoriæ, modò punctum K sit rectæ M N propius quam punctum oppositum L; nam arcus K m, K M sunt æquales & angulus K C m = K C M = $\frac{1}{2}$ m C M = D C Z; cumque m C M æqualis sit angulo quo asymptoti se mutuò intersecant, erit D C Z dimidium illius anguli, adeóque C Z parallela axi qui asymptotorum angulum bisecat; & si punctum K regulæ propius sit quam punctum oppositum L, erit angulus m C M acutus, ac proindè axis major qui angulum asymptotorum acutum bisecat, erit rectæ C Z parallelus, axis verò minor huic rectæ perpendicularis; undè si detur trajectoriæ centrum dabuntur axes, & si descripta sit trajectoria, invenitur axis positio, ductâ ad C Z normali ad trajectoriam utrinque terminatâ quam axis perpendiculariter & bifariam dividit; inventâ autem axium positione, habetur centrum in eorum intersectione communi. Superior autem constructio non solum hyperbolæ convenit, sed & parabolæ in quam hyperbola mutatur, dum puncta m, M coeunt, atque etiam Ellipsi in quam vertitur parabola, dum recta M N, extrà circulum transit.

315. Coroll. 2. Axium trajectoriæ quadrata sunt ad invicem ut K H, ad L H; nam axes sunt inter se ut cosinus dimidii anguli asymptotorum ad sinum dimidii ejusdem anguli; est verò K C m qui æqualis est dimidio anguli asymptotorum, etiam æqualis angulo m L K, adeóque L H est ad H m ut axis ad axem; sed L H : H m = H m : K H, ac proindè L H : K H = L H$^2$ : H m$^2$. Ergò quadrata axium sunt ad invicem ut L H ad K H.

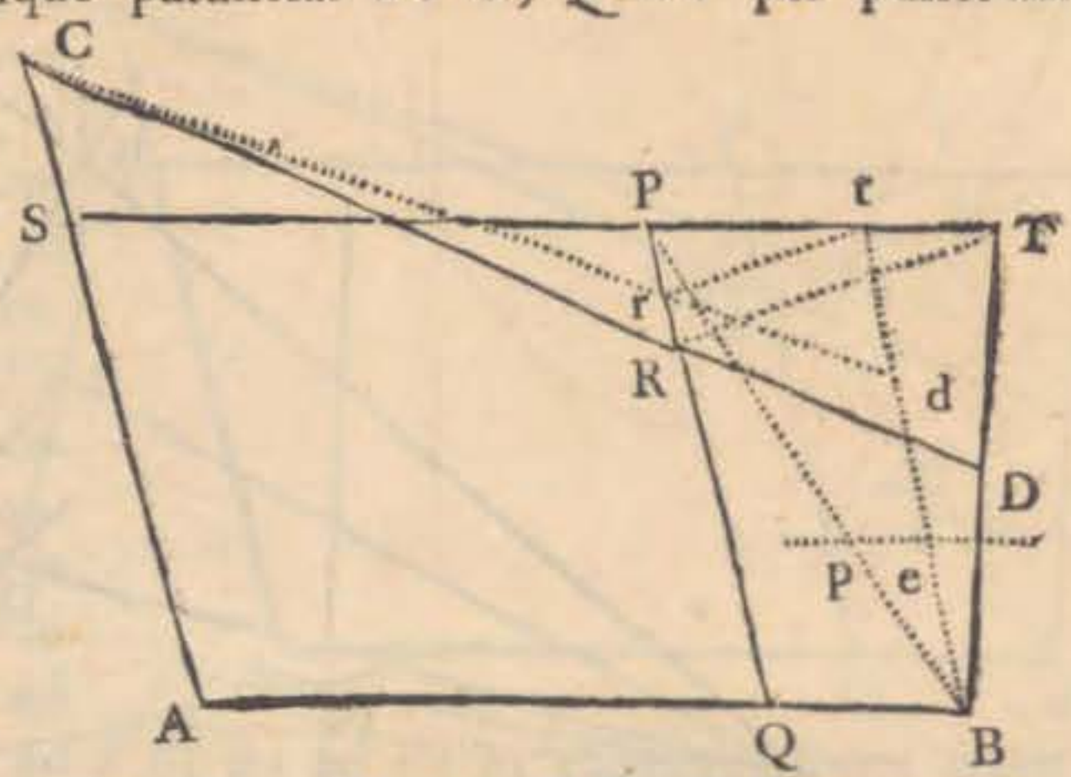



316. Corol. 3. Si angulorum mobilium summa duobus rectis æqualis fuerit, rectæ B D, C D fiunt parallelæ, quandò punctum M pervenit ad m, ubi recta N M occurrit rectæ C B productæ, si opus est, & quandò M abit in infinitum, cum in utroque casu evanescat angulus B M C. Si itaque linea M N, in hâc hypothesi alicubi occurrat rectæ B C productæ, duæ rectæ trajectoriam in distantiâ infinitâ contingent, & se mutuò ad angulum datum intersecabunt, adeóque describetur hyperbola; at si M N rectæ C B non occurrat, sed ipsi parallela sit, rectæ C D, B D non evadent parallelæ, nisi quando punctum M abit in infinitum, ac proindè trajectoria erit parabola. Quoniam igitur recta M N rectæ C B productæ occurrit,

## PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

*Trajectoriam per data quinque puncta describere.*

Dentur puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B*, *C*, quæ poli nominentur, age rectas *AB*, *AC*, hisque parallelas *TPS*, *QRP* per punctum quartum *P*. Deinde à polis duobus *B*, *C* age per punctum quintum *D*, infinitas duas *BDT*, *CRD*, novissimè ductis *TPS*, *PRQ* (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in *T* & *R*. Denique de rectis *PT*, *PR*, actâ rectâ *tr* ipsi *TR* parallelâ, abscinde quasvis *Pt*, *Pr* ipsis *PT*, *PR* proportionales; & si per earum terminos *t*, *r* & polos *B*, *C* actæ *Bt*, *Cr* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in trajectoriâ quæsitâ. Nam punctum illud *d* (per lem. xx.) versatur in conicâ sectione per puncta quatuor *A*, *B*, *C*, *P* transeunte; & lineis *Rr*, *Tt* evanescentibus, coit punctum *d* cum punto *D*. Transibit ergo sectio conica per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q. E. D.*




*Idem*

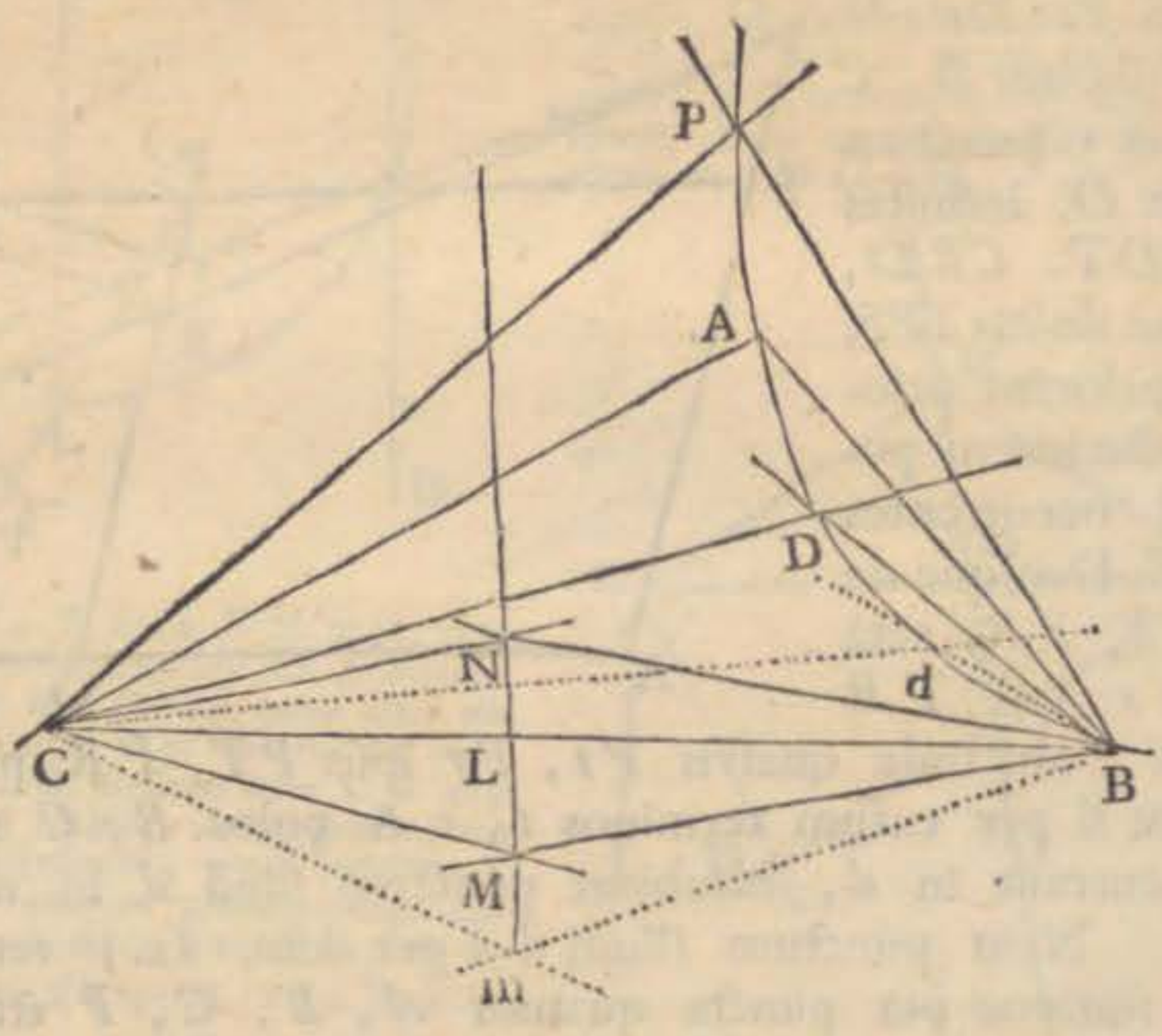
occurrit, vel ipsi parallela est, patet nunquam posse Ellipsim describi, si angulorum mobilium summa, duobus rectis æqualis fuerit.

Scholium. Si crura CM, BM concursu suo M percurrant sectionem conicam per polum alterum C transeuntem, crura duo reliqua CD, BD concursu suo D describunt curvam secundi generis per polum alterum B transeuntem, præterquam ubi anguli BCD, CBD simul evanescunt, quo casu punctum D describet sectionem conicam per polum C transeuntem, & eâdem methodo curvas varias tertii, quarti, superiorum generum describere licet. Sed hæc ad præsens institutum non pertinent, qui plura desideraverit legat Geometriam Organicam Celeberrimi Matheseos Professoris Colini Mac-Laurin, ex quo eximio opere non pauca excerpsimus.

DE MOTU CORPORUM.

## *Idem aliter.*

E punctis datis junge tria quævis *A*, *B*, *C*; & circum duo eorum *B*, *C*, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *ABC*, *ACB*, applicentur crura *BA*, *CA* primò ad punctum *D*, deinde ad punctum *P*, & notentur puncta *M*, *N* in qui-



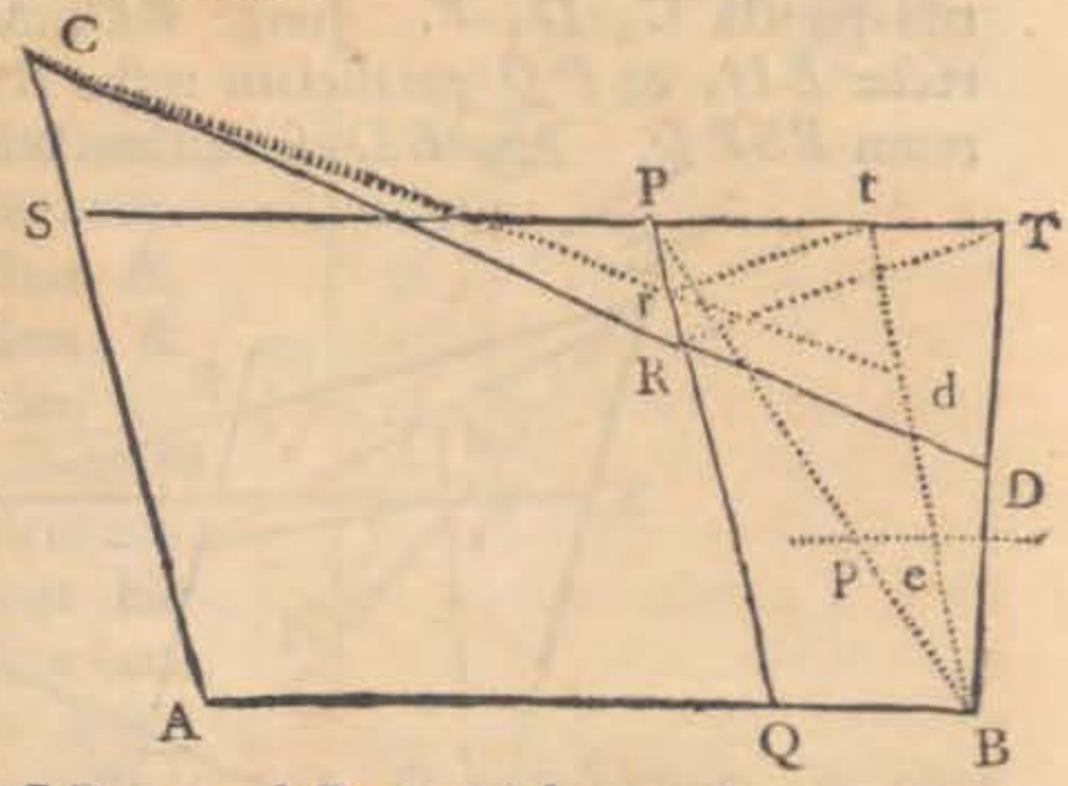

bus altera crura *BL*, *CL* casu utroque se decussant. Agatur recta infinita *MN*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos *B*, *C*, eâ lege ut crurum *BL*, *CL* vel *BM*, *CM* intersectio, quæ jam sit *m*, incidat semper in rectam illam infinitam *MN*; & crurum *BA*, *CA*, vel *BD*, *CD*, intersectio, quæ jam sit *d*, trajectoriam quæsitam *PADdB* delineabit. Nam punctum *d* (per lem. XXI.) continget sectionem conicam per puncta *B*, *C* transeuntem; & ubi punctum *m* accedit ad puncta *L*, *M*, *N*, punctum *d* (per constructionem) accedet ad puncta *ADP*. Describetur itaque sectio conica transiens per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q. E. F.*

*Corol.*

*Corol.* 1. (r) Hinc recta expeditè duci poteſt, quæ trajectoriam quæſitam in puncto quovis dato *B* continget. Accedat punctum *d* ad punctum *B*, & recta *B d* evadet tangens quæſita.

*Corol.* 2. (ſ) Unde etiam trajectoriarum centra, diametri & latera recta inveniri poſſunt, ut in corollario ſecundo lemmatis XIX.

## *Scholium.*




Conſtructio prior evadet paulo ſimplicior jungendo *B P*, & in eâ, ſi opus eſt, productâ capiendo *B p* ad *BP* ut eſt *PR* ad *PT*; & per *p* agendo rectam infinitam *p e* ipſi *SPT* parallelam, & in eâ (t) capiendo ſemper *p e* æqualem *P r*; & agendo rectas *B e*, *C r* concurrentes in *d*. Nam cum ſint *P r* ad *P t*, *P R* ad *PT*, *pB* ad *PB*, *p e* ad *P t* in eâdem ratione; erunt *p e* & *P r* ſemper æquales. Hâc methodo puncta trajectoriæ inveniuntur expeditiſſimè, niſi mavis curvam, ut in conſtructione ſecundâ, deſcribere mechanicè.

PRO-

(r) 317. Tangens in B, coincidit cum crure B d anguli mobilis d B m, dum alterius anguli d C m, crus C d, coincidit cum rectâ C B. Nam in hoc caſu, chorda B d evaneſcit & poſitione congruit cum tangente; undè tangens per punctum quodvis datum expeditè duci poteſt etiam nondùm deſcriptâ ſectione conicâ, ſi punctum illud datum pro polo uſurpetur.

(ſ) 318. Per quodvis punctorum datorum puta h, duc trajectoriæ tangentem, & per aliud quodvis punctum datum C, duc tangenti parallelam occurrentem trajectoriæ jam deſcriptæ in puncto aliquo; aut ſi deſcripta non fuerit trajectoria circà polos, rotentur anguli mobiles, donec crurum C D, B D concurſus D, reperiatur in rectâ tangenti parallelâ; vel tandem punctum illud in quo recta tangenti parallela trajectoriæ occurrit, geometricè quæratur per lem. XIX. Nam (vid. fig. & demonſtr. Lem. XX) cum data ſint quinque puncta C, A, B, D, P, dabitur ratio conſtans rectangulorum P Q × P R, P S × P T, hoc eſt, rectangulorum D E × D F, D G × D H, adeóque (per Lem. XIX.) invenietur punctum concurſus trajectoriæ cum lineâ per punctum datum C ductâ. Cætera fiant ut in coroll. 2°. Lem. XIX. poſſent etiam trajectoriarum axes & centra inveniri eo modo quo docuimus num. 314.

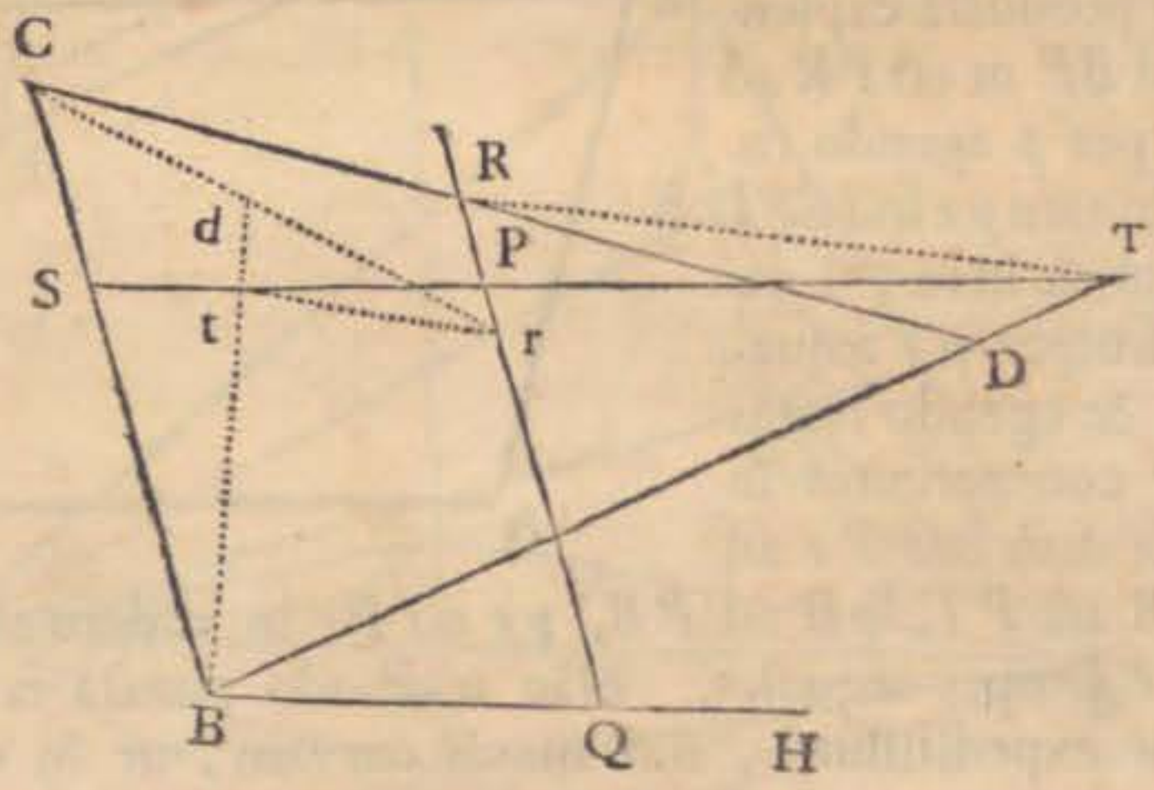
(t) * Hoc eſt linearum p e, P r, alterutra ad arbitrium capiatur, & altera aſſumptæ æqualis fiat, aganturque rectæ B e, C r, concurrentes in d; nam (per priorem conſtr.) P r : P t = P R : P T = p B : P B, (per hanc conſtr.); & junctâ B t, ob parallelas p e, P t, erit p B : P B = p e : P t, atque adeò P r : P t = p e : P t, unde P r = p e.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

*Trajectoriam describere, quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.*

*Cas.* 1. Dentur tangens *HB*, punctum contactus *B*, & alia tria puncta *C*, *D*, *P*. Junge *BC*, & agendo *PS* parallelam rectæ *BH*, & *PQ* parallelam rectæ *BC*, comple parallelogrammum *BSPQ*. Age *BD* secantem *SP* in *T*, & *CD* secantem




*PQ* in *R*. Denique, agendo quamvis *tr* ipsi *TR* parallelam, de *PQ*, *PS* abscinde *Pr*, *Pt* ipsi *PR*, *PT* proportionales respectivè; & actarum *Cr*, *Bt* concursus *d* (per lem. xx.) (u) incidet semper in trajectoriam describendam.

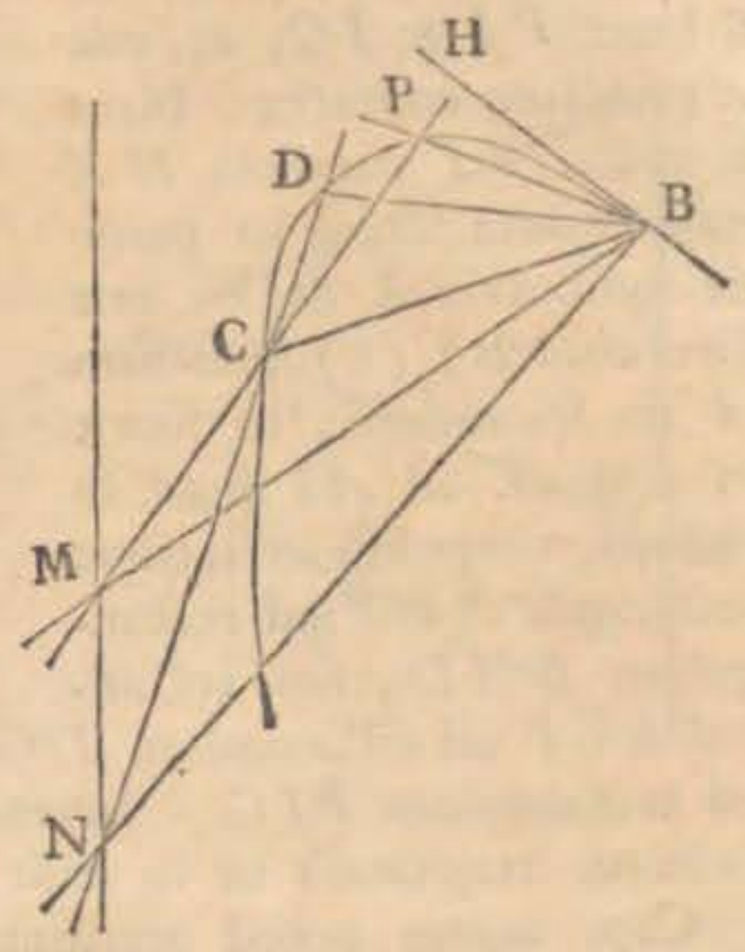
### *Idem aliter.*

Revolvatur tum angulus magnitudine datus *CBH* circa polum *B*, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus *DC* circa polum *C*. Notentur puncta *M*, *N*, in quibus anguli crus *BC*

(u) * Demonstratio clara fit, si in figurâ Lem. XX; punctum B accedat ad punctum A, & recta ABQ sectionis conicæ tangens evadat.

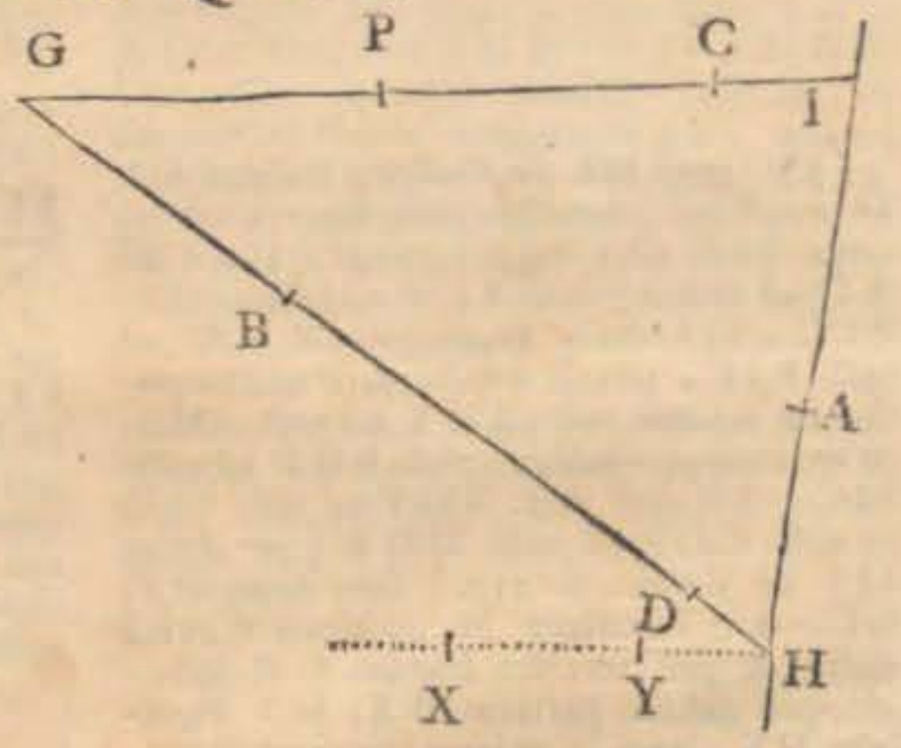
* Nam

*BC* ſecat radium illum, ubi crus alterum *BH* concurrit cum eodem radio in punctis *P* & *D*. Deinde ad actam infinitam *MN* concurrant perpetuo radius ille *CP* vel *CD* & anguli crus *BC*, & cruris alterius *BH* concurſus cum radio delineabit trajectoriam quæſitam.




Nam ſi in (x) conſtructionibus problematis ſuperioris accedat punctum *A* ad punctum *B*, lineæ *CA* & *CB* coincident, & linea *AB* in ultimo ſuo ſitu fiet tangens *BH*; atque ideo conſtructiones ibi poſitæ evadent eædem cum conſtructionibus hic deſcriptis. Delineabit igitur cruris *BH* concurſus cum radio ſectionem conicam per puncta *C*, *D*, *P* tranſeuntem, & rectam *BH* tangentem in puncto *B*. *Q. E. F.*

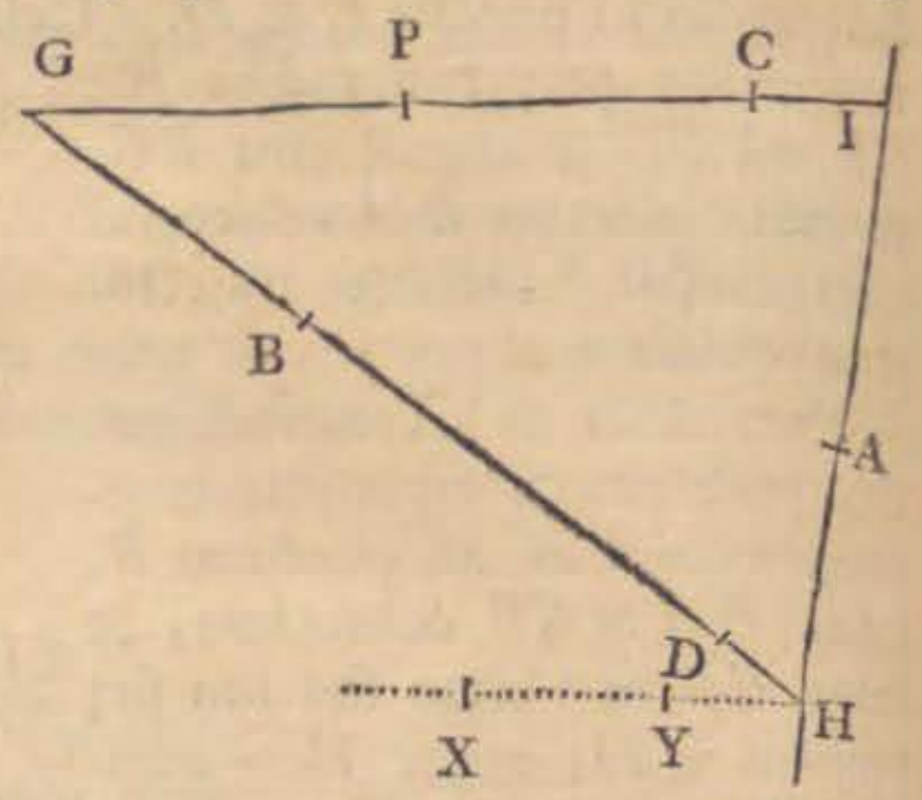
*Caſ.* 2. Dentur puncta quatuor *B*, *C*, *D*, *P* extra tangentem *HI* ſita. Junge bina lineis *BD*, *CP* concurrentibus in *G*, tangentique occurrentibus in *H* & *I*. Secetur tangens in *A*, ita ut ſit *HA* ad *IA*, ut eſt rectangulum ſub mediâ proportionali inter *CG* & *GP* & mediâ proportionali inter *BH* & *HD*,




(x) * Nam in alterâ problematis XXII. ſolutione ABC, ACB, ſunt anguli circà polos C & B mobiles; undè ſi punctum A accedat ad punctum B, coincidunt crura CA, CB, & unicam rectam conſtituunt, evaneſcente angulo ACB, remanet verò angulus ABC quem tangens AB cum BC continet; quarè dum anguli ABC, crus BC cum radio AC, ſi neceſſum ſit, producto, perpetuò concurrit in rectâ aliquâ poſitione datâ ut NM, cruris AB & radii CA concurſus trajectoriam deſcribit.

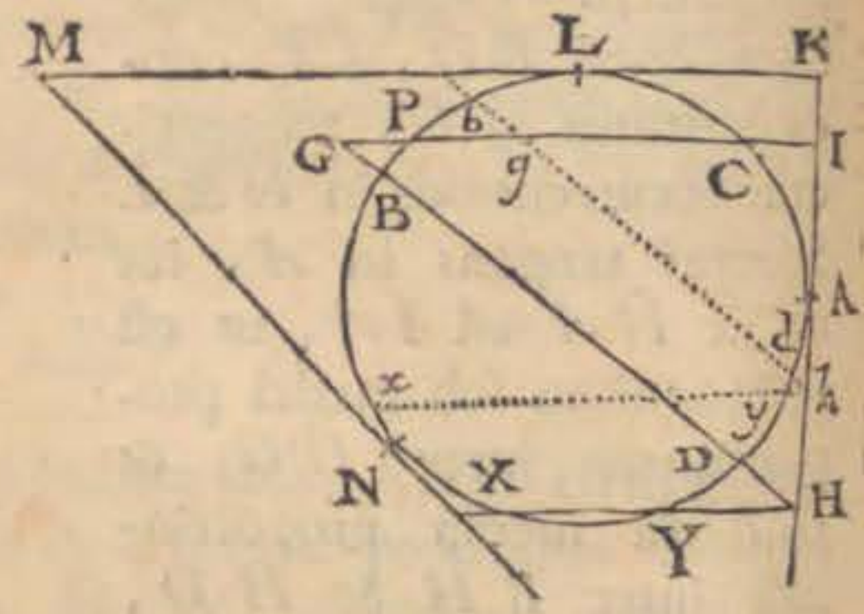
DE MOTU CORPORUM.

ad rectangulum sub mediâ proportionali inter *D G* & *G B* & mediâ proportionali inter *P I* & *I C*; & erit *A* punctum contactus. Nam si rectæ *P I* parallela *H X* trajectoriam secet in punctis quibusvis *X* & *Y*: erit (ex conicis) (y) punctum *A* ita locandum, ut fuerit *HA quad.* ad *AI quad.* in ratione compositâ ex ratione rectanguli *XHY* ad rectangulum *BHD*, seu rectanguli *CGP* ad rectangulum *DGB*, & ex ratione rectanguli *BHD* ad rectangulum *PIC*. Invento autem contactus puncto *A*, describetur trajectoria ut in casu primo. *Q. E. F.*




Capi autem potest punctum *A* vel inter puncta *H* & *I*, vel extra; & perinde trajectoria dupliciter describi.

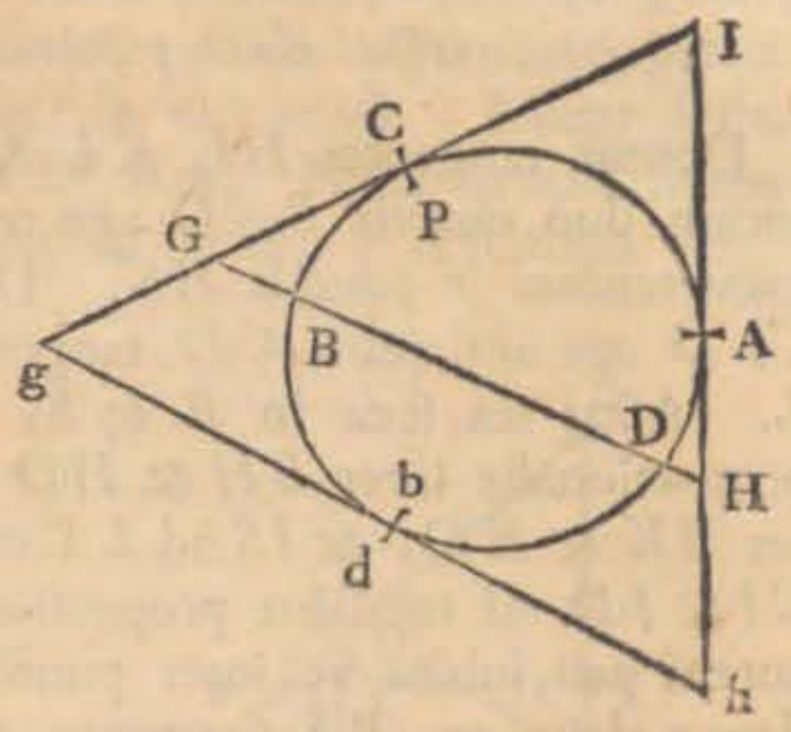
(y) 319. *Erit ex Conicis*; scilicet si A fit punctum contactus erit (per Cor. 3. Lem. III. de Conic. p. 119.) $HA^2$ ad $AI^2$ ut rectangulum XHY ad rectangulum PIC, sed ratio rectanguli XHY ad rect. PIC, potest considerari ut composita ex ratione rect. XHY ad rect. BHD, & ex ratione ejusdem rect. BHD ad rect. PIC. Est verò rect. XHY ad rect. BHD ut rect. CGP ad rect. DGB (per Lem. III. de Conic. p. 117.) sunt enim HX, GC, duæ Parallelæ in Sectione Conicâ ductæ & per tertiam lineam GH sectæ, ideoque factum partium HX, HY Parallelæ HX, quæ sumuntur ab intersectione H ad curvæ puncta X & Y, est ad BH×HD factum partium lineæ secantis GH sumptarum ab intersectione H ad puncta curvæ B & D, sicut factum partium alterius Parallelæ CG×GP, ad DG×GB factum partium correspondentium lineæ secantis. Est ergo ratio $HA^2$ ad $AI^2$ æqualis rationi compositæ ex ratione rect. CGP ad rect. DGB &, rect. BHD ad rect. PIC ideoque est HA: ad AI ut $\sqrt{CGP} \times \sqrt{BHD}$ ad $\sqrt{DGB} \times \sqrt{PIC}$, sed Radices quadratæ illorum Rectangulorum sunt ipsæ mediæ



diæ proportionales inter illorum latera; Ergo *eſt HA ad AI ut eſt rect. ſub media proportionali inter CG & GP & media proportionali inter BH & HD ad rect. ſub media proportionali inter DG & GB & media proportionali inter PI & IC.* Si itaque HI in A ſecetur in eâ ratione, habebitur punctum contactus.

320. Coroll. 1. Si ex punctis quibuſlibet H & I rectæ HI ſectionem conicam tangentis in A, agantur duæ quævis rectæ IG, HG convenientes in G, & ſectionem conicam ſecantes in punctis quatuor C, P, D, B; factum CGP × BHD, erit ad factum DGB × PIC, in datâ ratione, nempè in ratione $HA^2$, ad $AI^2$; Ducta enim linea HYX lineæ ICP parallela, erit ut prius (per Lem. III. de Conic. p. 117.) DGB : BHD = CGP : XHY = $\frac{CGP \times BHD}{DGB}$, eſt verò $HA^2$ : $AI^2 = HXY\left(\frac{CGP \times BHD}{DGB}\right)$ : PIC (per Cor. 3. ejuſdem Lem.) ergo $HA^2$ : $AI^2 = CGP \times BHD : DGB \times PIC$.

Quod ſi linea HYX, extra ſectionem cadat aut eam tangat, ex puncto quovis h lineæ HAI, ducatur alia linea hyx lineæ ICP parallela quæ ſectioni occurrat in x & y, & ducatur alia linea hdbg lineæ HDBG Parallela ita ut ſectioni occurrat in d & b, & lineæ PC in g, habebiturque ut prius $hA^2 : AI^2 = CgP \times bhd : dgb \times PIC$. Sed cum ob parallelas GH, bh ſit (per Lemma 3^um. de Con. p. 117.) CgP : dgb = CGP : DGB, & (per Cor. 3. ejuſd. Lem.) ſit $hA^2 : bhd = HA^2 : BHD$ ſubſtitutis his ultimis rationibus loco priorum in proportione $hA^2 : AI^2 = CgP \times bhd : dgb \times PIC$ fiet $HA^2 : AI^2 = CGP \times BHD : DGB \times PIC$ ut prius. Undè ſatis patet demonſtrationem conſtructionis univerſalem eſſe, quomodocumque rectæ GI, GH flectantur, adeóque etiam valere, ubi recta HX ſectioni non occurrit.



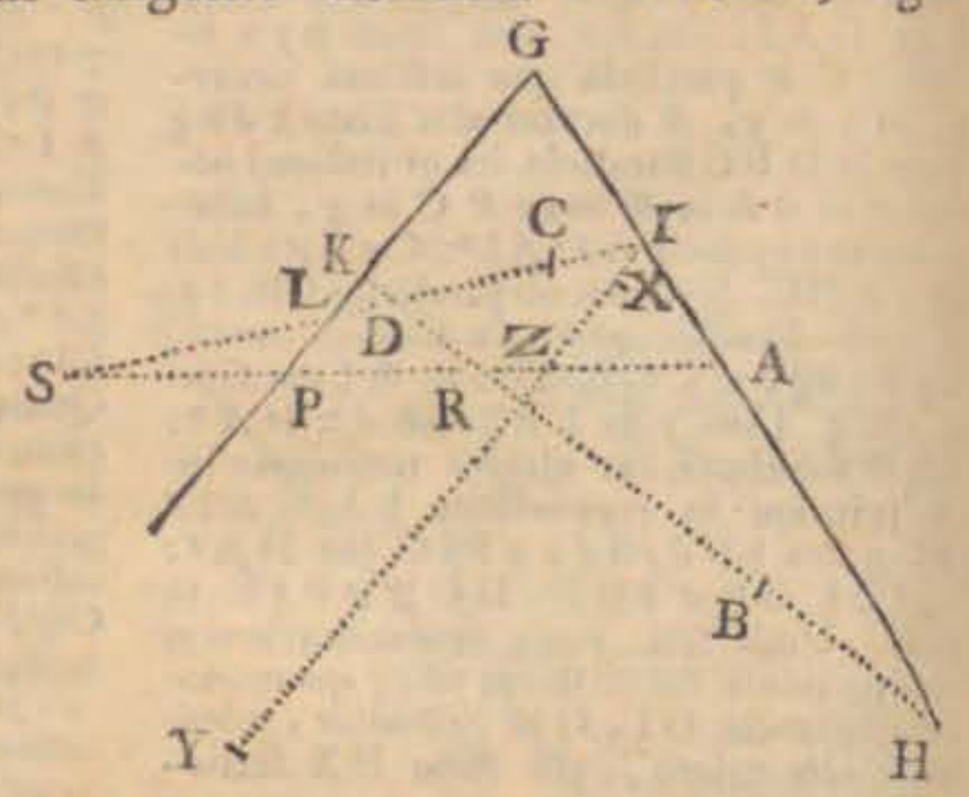

321. Coroll. 2. Coeuntibus punctis C, P, recta IG fit tangens in C & GP = GC, CI = PI, adeóque CGP = $GC^2$, & PIC = $CI^2$; undè in hoc caſu $HA^2$ : $AI^2 = GC^2 \times BHD : CI^2 \times DGB$. Coeuntibus quoque punctis B & D, & ſecante GH, in tangentem gh, mutatâ erit $hA^2 : AI^2 = gC^2 \times dh^2 : CI^2 \times gd^2$, ac proindè hA : AI = gC × dh : CI × gd; & hA × CI × gd = AI × gC × dh. Quare ſi ducantur tres rectæ ſectionem conicam tangentes & inter ſe concurrentes in punctis I, g, h, facta ex tribus tangentium partibus inter concurſuum & contactuum puncta alternatim ſumptis AI, Cg, dh, & Ah, IC, gd, ſunt æqualia.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

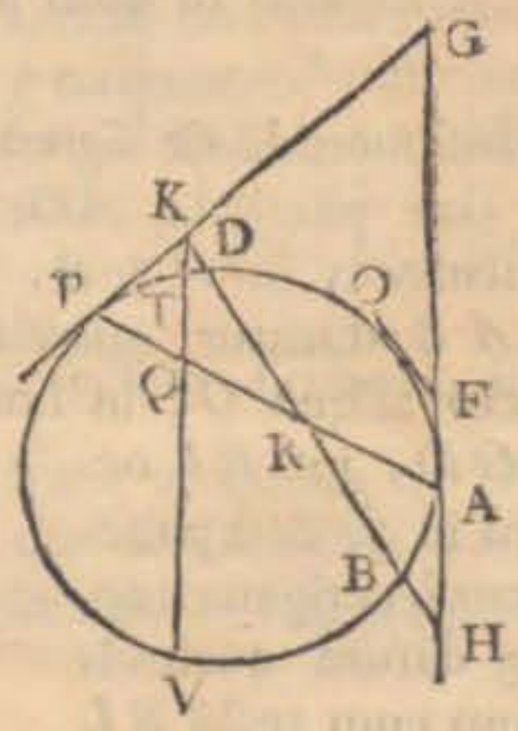
*Trajectoriam describere, quæ transibit per data tria puncta, & rectas duas positione datas continget.*

Dentur tangentes *HI*, *KL* & puncta *B*, *C*, *D*. Per punctorum duo quævis *B*, *D* age rectam infinitam *BD* tangentibus occurrentem in punctis *HK*. Deinde etiam per alia duo quævis *C*, *D* age infinitam *CD* tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita seca in *R* & *S*, ut sit *HR* ad *KR* ut est media proportionalis inter *BH* & *HD* ad mediam proportionalem inter *BK* & *KD*; & *IS* ad *LS* ut est media proportionalis inter *CI* & *ID* ad mediam proportionalem inter *CL* & *LD*. Seca autem pro lubitu vel inter puncta *K* & *H*, *I* & *L*, vel extra eadem; dein age *RS* secantem tangentes in *A* & *P*, & erunt *A* & *P* puncta contactuum. Nam si *A* & *P* supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I*, in tangente alterutra *HI* situm, agatur recta *IY* tangenti alteri *KL* parallela, quæ occurrat curvæ in *X* & *Y*, & in ea sumatur *IZ* media proportionalis inter *IX* & *IY*, erit, ex conicis, (z) rectangulum *XIY* seu *IZ quad.* ad *LP quad.* ut rectangulum *CID* ad rectangulum *CLD*, id est (per constructionem) ut *SI quad.* ad *SL quad.* atque ideo *IZ* ad *LP* ut *SI* ad *SL*. Jacent ergo puncta *S*, *P*, *Z*




(z) *Erit ex Conicis rect. XIY ad LP² ut rect. CID ad rect. CLD.* Scilicet cum P supponatur punctum contactus alicubi in Tangente KL situm & cum linea IY sit (per const.) parallela Tangenti KL & utraque secetur per lineam IL, illa in I hæc in L erit (per Lem. III. de Conic. p. 117.) rect. partium Parallelæ IY ab inter-

$Z$ in unâ rectâ. Porro tangentibus concurrentibus in $G$, erit (ex conicis) rectangulum $XIY$ seu $IZ$ *quad.* ad $IA$ *quad.* ut $GP$ *quad.* ad $GA$ *quad.* ideoque $IZ$ ad $IA$ ut $GP$ ad $GA$. Jacent ergo puncta $P$, $Z$ & $A$ in unâ rectâ, ideoque puncta $S$, $P$ & $A$ sunt in unâ rectâ. Et (a) eodem argumento probabitur quod puncta $R$, $P$ & $A$ sunt in unâ rectâ. Jacent igitur puncta contactuum $A$ & $P$ in rectâ $RS$. Hisce autem inventis, trajectoria describetur ut in casu primo problematis superioris (b). *Q. E. F.*




In intersectione I ad curvæ puncta X & Y sumptarum ad Rectang. partium Parallelæ LP ab intersectione L ad curvæ puncta (quæ coeunt in uno P quia LP debet esse Tangens, ideóque illud rectangulum est quadratum LP) sicut rect. CID, ad rect. CLD quia nempe hæc rectangula sunt facta partium lineæ secantis IL factis partium singulæ Parallelæ correspondentia, ideóque (per const.) $IZ^2 : LP^2 = SI^2 : SL^2$ atque adeo $IZ : LP = SI : SL$, cum igitur sit IZ parallela LP (per const.) puncta S, P, Z, jacent in unâ rectâ. Porrò Tangentibus concurrentibus in G, cum supponatur punctum contactus alicubi situm in Tangente GA erit (per Cor. 2. ejusdem Lem. III. de Con. p. 118.) XIY (sive $IZ^2$) : $IA^2 = GP^2 : GA^2$ ideoque &c.

(a) *Et eodem argumento probabitur quod puncta R, P & A, sunt in unâ rectâ,* h per punctum K, agatur recta KV, tangenti GH, parallela, quæ occurrat curvæ in T & V, & in eâ sumatur KQ, media proportionalis inter KT & KV, cum recta KH secet Parallelas KV & AH erit (per Lem. III. de Con. p. 117.) rectan. VKT (sive $KQ^2$) ad $AH^2$ sicut rect. BKD ad rect. BHD hoc est ut $KR^2$ ad $HR^2$ (per const.) adeóque erit KQ : AH = KR : RH, quare puncta Q, R, & A erunt in eadem rectâ. Porrò Tangentibus concurrentibus in G erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic.) VKT ($KQ^2$) : $PK^2 = GA^2 : GP^2$ & KQ : PK = GA : GP, unde erunt P, Q & A in eâdem rectâ, ideoque P, R, & A in eâdem rectâ.

(b) 322. Coroll. 1. Hinc si duæ rectæ HG, PG (vid. fig. Newt.) concurrentes in G, sectionem conicam tangant in A & P, jungaturque AP & producatur, & ex punctis quibusvis I & H, in unâ tangentium GH, sumptis agantur ad idem sectionis conicæ punctum D, duæ rectæ ID, HD, quarum altera ID secet sectionem conicam in C, rectam AP in S, & tangentem GP in L, altera verò HD secet sectionem in B, rectam AP, in R, & tangentem GP, in K; erit semper $HR^2 : KR^2 = BHD : BKD$. & $IS^2 : LS^2 = CID : CLD$, quomodocumque inflectantur rectæ ID, HD, & tangentes GA, GP.

323. Coroll. 2. Si puncta D & C, coeant, (vid. fig. Newt.) ut ILS, tangens evadat in D, seu C, erit CI = DI, & CL = DL, adeóque $IS^2 : LS^2 = DI^2 : DL^2$, & IS : IS = DI : DL. h. e. si Tangens IL, terminata per duas alias Tangentes, secet in S lineam AB jungentem puncta contactus earum Tangentium, ejus partes à sectione S ad utramque Tangentem sumptæ, erunt inter se sicut ejus partes à puncto contactus ad easdem Tangentes terminatæ.

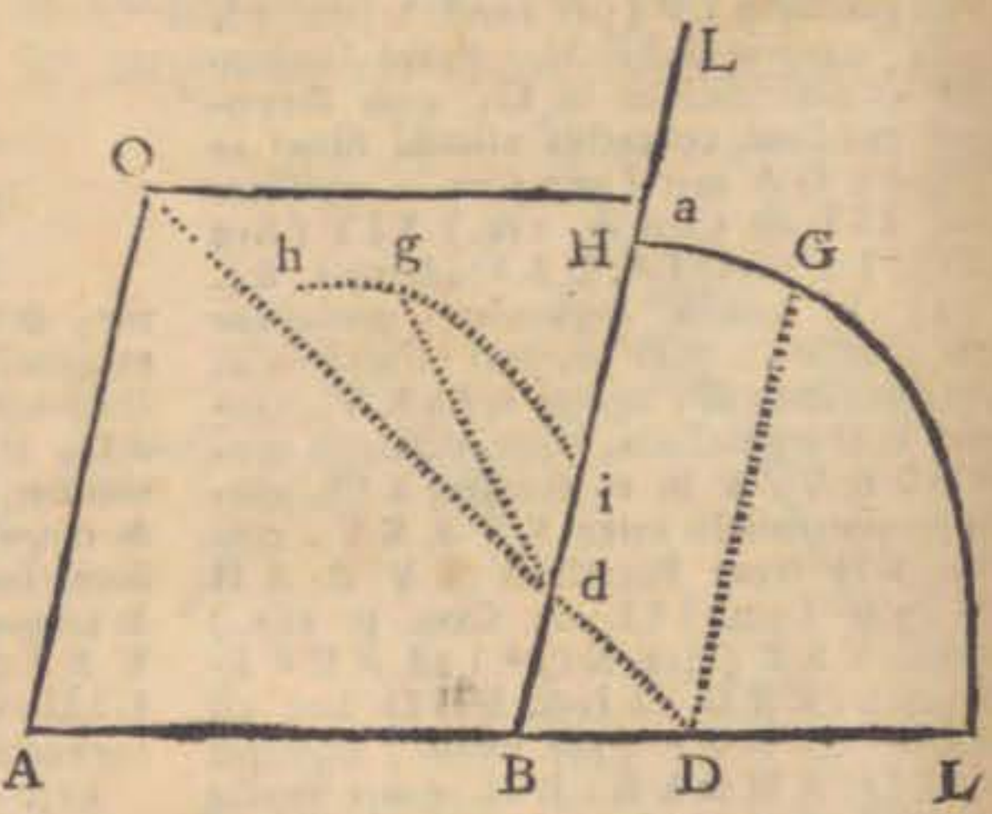
DE MOTU CORPORUM.

In hâc propositione, & casu secundo propositionis superioris constructiones eædem sunt, sive recta *XY* trajectoriam secet in *X* & *Y*, sive non secet; eæque non pendent ab hâc sectione. Sed demonstratis constructionibus ubi recta illa trajectoriam secat, innotescunt constructiones, ubi non secat; iisque ultra demonstrandis brevitatis gratiâ non immoror.

## LEMMA XXII.

*Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.*

Transmutanda sit figura quævis *HGI*. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ *AO*, *BL* tertiam quamvis positione datam *AB* secantes in *A* & *B*, & a figuræ puncto quovis *G*, ad rectam *AB* ducatur quævis *GD*, ipsi *OA* parallela. Deinde à puncto aliquo *O*, in linea *OA* dato, ad punctum *D* ducatur recta *OD*, ipsi *BL* occurrens in *d*, & à puncto occursus erigatur recta *dg* datum quemvis angulum cum rectâ *BL* continens, atque eam habens rationem ad *Od* quam habet *DG* ad *OD*; & erit *g* punctum in figurâ novâ *hgi* puncto *G* respondens. Eâdem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum *G* motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratiâ nominemus *DG* ordinatam primam, *dg* ordinatam novam; *AD* abscissam primam,



mam, *ad* abſciſſam novam; *O* polum, *OD* radium abſcindentem, *OA* radium ordinatum primum, & *Oa* (quo parallelogrammum *OABa* completur) radium ordinatum novum.

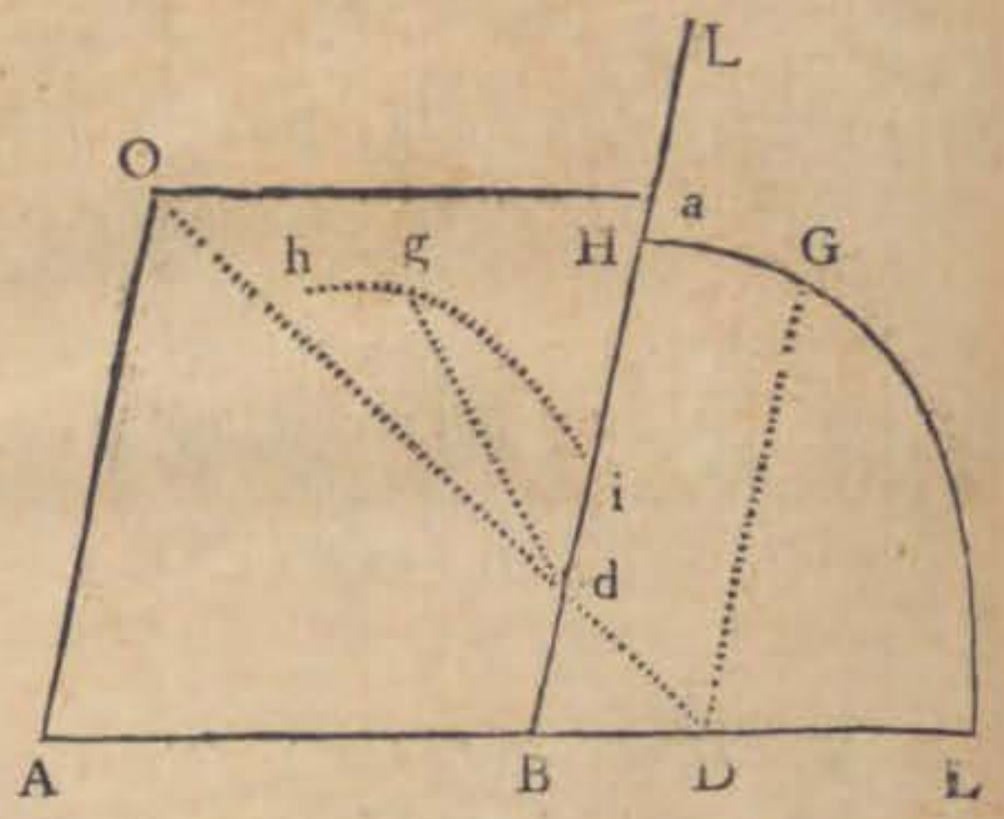
Dico jam quod, ſi punctum *G* tangit rectam lineam poſitione datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam poſitione datam. Si punctum *G* tangit conicam ſectionem, punctum *g* tanget etiam conicam ſectionem. Conicis ſectionibus hic circulum annumero. Porro ſi punctum *G* tangit lineam (c) tertii ordinis analytici, punctum *g* tanget lineam tertii itidem ordinis; & ſic de curvis lineis ſuperiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejuſdem ſemper ordinis analytici quas puncta *G*, *g* tangunt. (d) Etenim ut eſt *ad* ad *OA* ita ſunt *Od* ad *OD*, *dg* ad *DG*, & *AB* ad *AD*; ideoque *AD* æqualis eſt $\frac{OA \times AB}{ad}$, & *DG* æqualis eſt $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam ſi punctum *G* tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quâvis, quâ relatio inter abſciſſam *AD* & ordinatam *DG* habetur, indeterminatæ illæ *AD* & *DG* ad unicam tantum dimenſionem aſcendunt, ſcribendo in hâc æquatione *OA*

(c) 324. Newtonus lineas geometricas in ordines analyticos diſtinguit ſecundum numerum dimenſionum æquationis quâ relatio inter ordinatas & abſciſſas definitur, vel (quod preinde eſt) ſecundum numerum punctorum in quibus à lineâ rectâ ſecari poſſunt; tot enim dimenſiones habet æquatio ad curvam quot poſſunt eſſe illius curvæ & rectæ interſectiones; nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere, adeóque tot eſſe debent æquationis radices ac proinde dimenſiones quot ſunt interſectiones. Hinc linea primi ordinis erit recta ſola, lineæ ſecundi ſive quadratici ordinis erunt ſectiones conicæ & circulus, & lineæ tertii ſive cubici ordinis parabola cubica, parabola Neiliana, Ciſſois veterum & aliæ. Cum autem recta inter curvas non ſit numeranda, curva primi generis eadem eſt cum lineâ ſecundi ordinis, & curva ſecundi generis eadem cum lineâ tertii ordinis, & linea ordinis infiniteſimi ea eſt quam recta in punctis infinitis ſecare poteſt, qualis eſt ſpiralis, cyclois, quadratrix & linea omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

(d) 325. Etenim ob ſimilia triangula, $adO$, $AOD$, $ad : OA = Od : OD$, (& per conſtr.) $Od : OD = dg : DG$, & ob rectas $AO$, $Bd$ parallelas $Od : OD = AB : AD$; unde $ad : OA = dg : DG = AB : AD$, atque adeò $AD = \frac{OA \times AB}{ad}$, & $DG = \frac{OA \times dg}{ad}$. Sit $OA = a$, $AB = b$, $AD = x$, $DG = y$, $ad = z$, $dg = u$, & erit $x = \frac{ba}{z}$, $y = \frac{au}{z}$.

DE MOTU CORPORUM.

$\frac{OA \times AB}{ad}$ pro $AD$, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro $DG$, (e) producetur æquatio nova, in qua abſciſſa nova $ad$ & ordinata nova $dg$ ad unicam tantum dimenſionem aſcendent, atque ideo quæ deſignat lineam rectam. (f) Sin $AD$ & $DG$, vel earum alterutra, aſcendebant ad duas dimenſiones in æquatione primâ, aſcendent itidem $ad$ & $dg$ ad duas in æquatione ſecundâ. Et (g) ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus. Indeterminatæ $ad$, $dg$ in æquatione ſecundâ, & $AD$, $DG$ in primâ aſcendent ſemper ad eundem dimenſionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta $G$, $g$ tangunt, ſunt ejuſdem ordinis analytici.




Dico

(e) * Sit GL recta poſitione data & ad illam æquatio quævis $cx + dy + ef = o$, in qua $+$, ſignificat vel $+$, vel $-$ loco $x$ & $y$, ſubſtituantur eorum valores (325) $\frac{ba}{z}$, $\frac{au}{z}$ & producetur $\frac{cba}{z} + \frac{dau}{z} + ef = o$, hoc eſt, reductione ad communem denominatorem factâ $cba$, $+ dau + efz = o$ æquatio nova unius dimenſionis ad rectam lineam gi.

(f) * Sit GI, ſectio conica & ad illam æquatio generalis, $cxx + dyy + exy + g^2x + m^2y + n^3 = v$, loco $x$, $y$, ſubſtituantur $\frac{ba}{z}$, $\frac{au}{z}$, & prodibit æquatio nova ad conicam ſectionem $\frac{cb^2a^2}{z^2} + \frac{da^2u^2}{z^2} + \frac{eba^2u}{z^2} + \frac{bag^2}{z} + \frac{m^2au}{z} + n^3 = o$, hoc eſt, reductione factâ, $cb^2a^2 + da^2u^2 + eba^2u + bag^2z + m^2auz + n^3z^2 = o$.

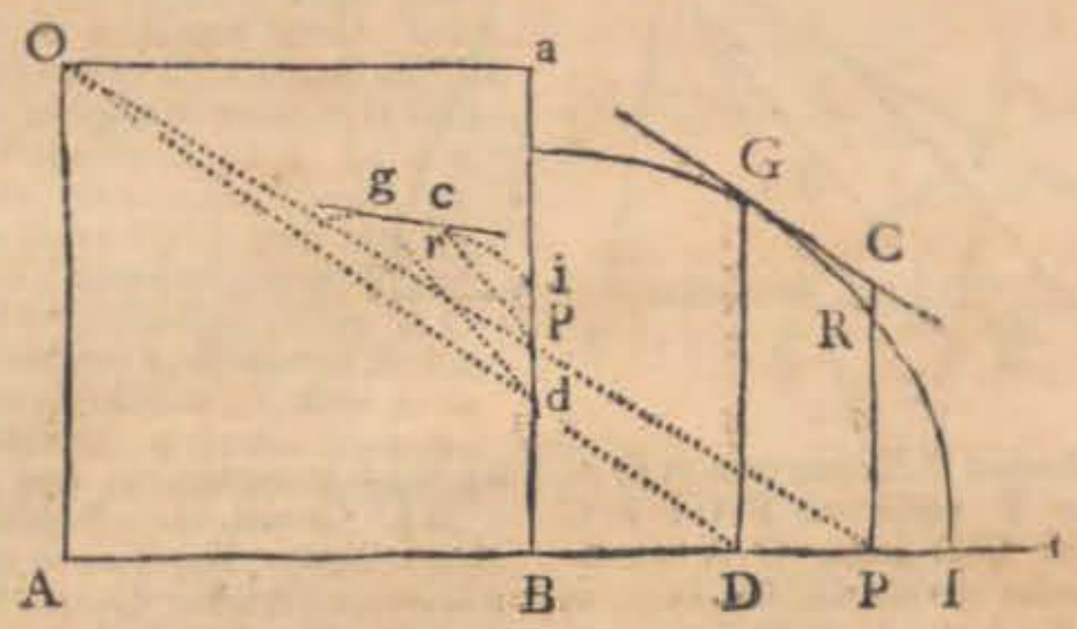
(g) * *Et ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus*, nam ſi in ſerie $1, x, x^2, x^3, x^4$ &c. loco $x$, & dignitatum ejus ſubſtituantur $\frac{1}{z}$, & ipſius dignitates prodibit ſeries nova $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^3}, \frac{1}{z^4}$ &c. & reductione ad communem denominatorem factâ habebitur $\frac{z^4, z^3, z^2, z^1}{z^4}$. Similiter ſi in ſerie $y, y^2, y^3, y^4$ &c. loco $y$, ſubſtituatur $\frac{u}{z}$, prodibit ſeries nova $\frac{u}{z}, \frac{u^2}{z^2}, \frac{u^3}{z^3}, \frac{u^4}{z^4}$ &c. & per reductionem ad denominatorem communem $\frac{uz^3, u^2z^2, u^3z, u^4,}{z^4}$ iiſdem $x$ & $y$ valoribus ſubſtitutis in ſeriebus

(h) Dico præterea, quod ſi recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ; hæc recta eodem modo cum curvâ in figuram novam tranſlata tanget lineam illam curvam in figurâ novâ; & contra. Nam ſi curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figurâ primâ, puncta eadem tranſlata accedent ad invicem & coibunt in figurâ novâ; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, ſimul evadent curvarum tangentes in figurâ utrâque.

Componi poſſent harum aſſertionum demonſtrationes more magis geometrico. Sed brevitati conſulo.

Igitur

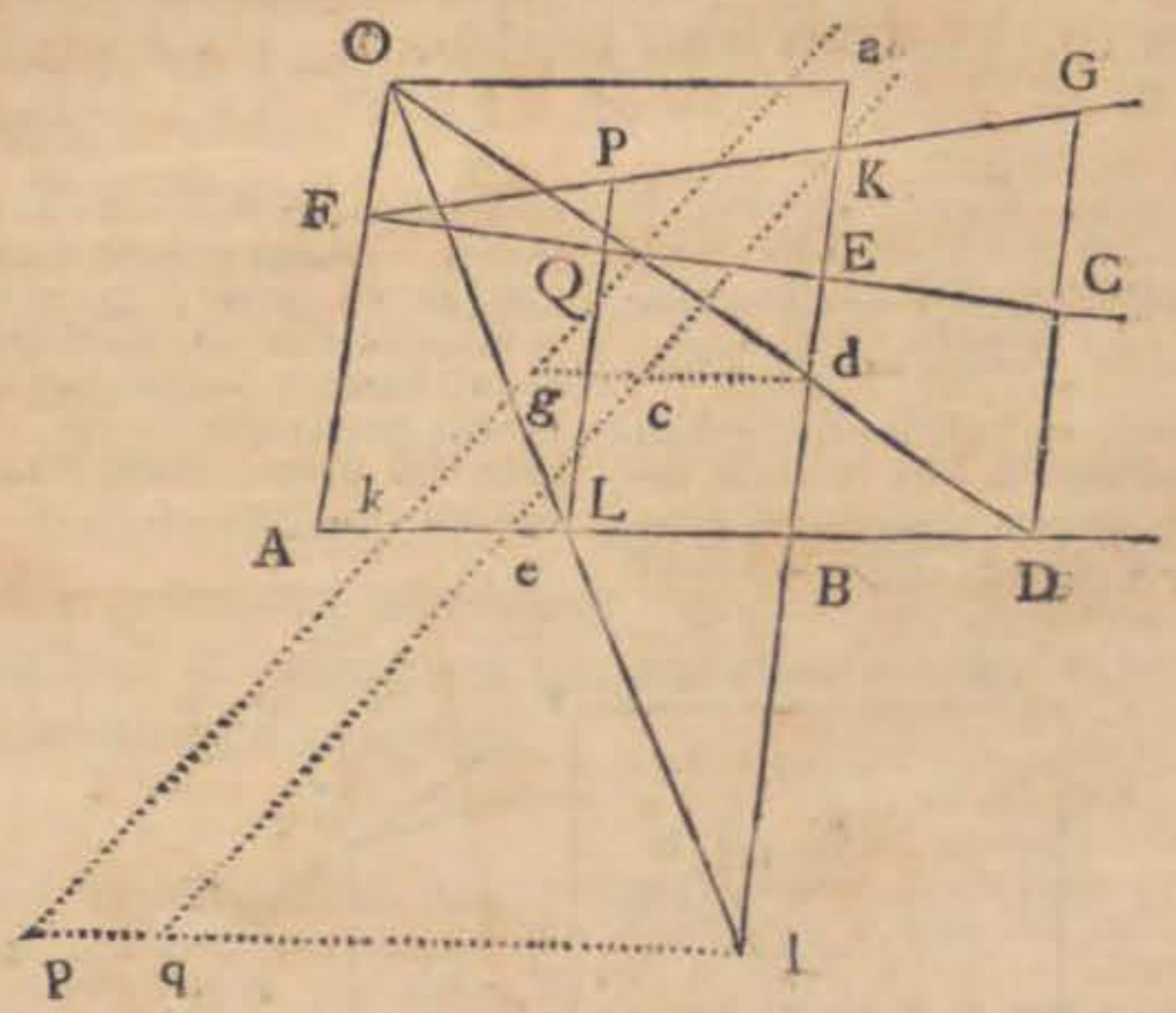
riebus factorum $x$, $y$, $xy^2$, $xy^3$ &c. & $x^2y$, $x^3y$ &c. & reductione ad communem denominatorem $z^4$ factâ, habebuntur ſeries $\frac{z^2u,\ zu^2,\ zu^3}{z^4}$, & $\frac{zu,\ u}{z^4}$. Porrò æquatio omnis ex hujuſmodi dignitatibus & factis compoſita eſt, & abjici poteſt communis omnium terminorum denominator qui hic eſt $z^4$, ergò hujuſmodi ſubſtitutionibus non mutatur gradus æquationis. Eadem quoque demonſtrari poſſunt ex eo quod ſi linea recta curvam HGI, ſecet in quotlibet punctis, eadem recta tranſlata curvam hgi in totidem punctis interſecare debeat, quoniam ſingulæ nec plures interſectiones in novam figuram transferuntur.




(h) 326. Recta G C curvam G I tangat in G, transferatur punctum G, in g, & ductâ P C parallelâ D G, quæ curvæ occurrat in R & tangenti in C; transferatur punctum C, in c, faciendo ut O P: P C = O p: p c parallelam d g, & recta g c, quæ puncta g, & c, jungit, novam curvam g i, tanget in g; nam accedat P C, ad D G, & accedat correſpondens p c, ad d g, & punctis C, R, G, coeuntibus, coibunt in figurâ novâ puncta c, r, g, adeoque linea g c, poſitione coincidit cum chordâ evaneſcente g r, hoc eſt cum tangente in g. Idem aliâ ratione poteſt demonſtrari; quoniam enim P C: p c = P O: p o = P R: p r, & proinde P C: P R = p c: p r, ergo punctum c, non eſt in curvâ g i, niſi cum C reperitur in curvâ G I, hoc eſt, niſi C & G coeant.

DE MOTU CORPORUM.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum, à quibus conflatur, intersectiones transferre, & per easdem in figurâ novâ lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes, & lineæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc lemma solutioni difficiliorum problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam (i) rectæ quævis convergentes




(i) 327. Radius ordinatus primus O A, per concursum F rectarum F G, F C transeat, ductâ G D radio O A parallelâ, transferantur puncta G, C, in g, c, & puncta K, E, in k, e, rectæ k g, e c, erunt parallelæ; nam ducta intelligatur O L radio O A infinitè proxima, & rectas A D, A B secans in L & l, & actâ L Q P radio O A, parallelâ, puncta P, Q in p, q, translata concipiantur, & erit O L: O l = P L: p l = Q L: q l. coeuntibus verò punctis P, Q, F erit O l infinita & Q L = F A = P L, adeóque p l = q l. Punctum igitur concursus F ad distantiam infinitam transfertur, & lineæ g p, c q, ad illud convergentes sunt parallelæ.

328. Coroll. 1. Puncta K & E, seu intersectiones linearum F G, F C cum a B, transferuntur capiendo in novâ ordinatâ B k = B K, B e = B E; est enim (per constr.) B K: B O = B k: B O. & B E: B O = B e: B O.

329. Coroll. 2. Si punctum F, cum puncto A, coincidat, erunt g k, c e, rectis O A, a B parallelæ; nam ob parallelas B K, D G, A O & (per constr.) A B: A D = O d: O D = d g: D G, & coeuntibus punctis F, A, A B: A D = B K (B k): D G, adeóque d g: D G = B k: D G, ac proindè B k = d g, unde g k lineæ B d est parallela.

330.

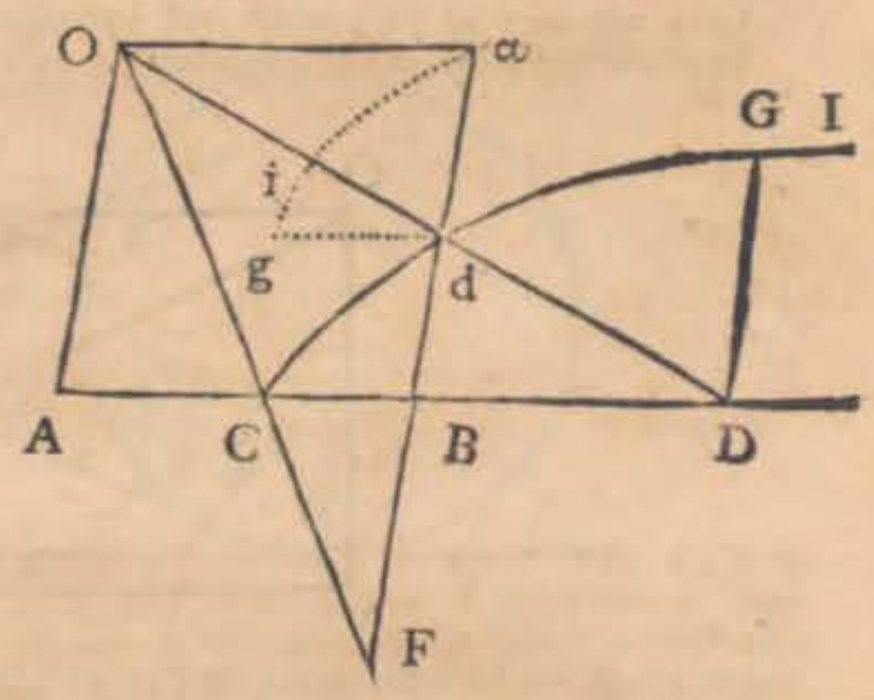
gentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit; idque quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallelæ sunt, quæ nusquam concurrunt. Postquam autem problema solvitur in figurâ novâ; si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, (k) habebitur solutio quæsita.

(l) Utile est etiam hoc lemma in solutione solidorum problematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenerint, quarum intersectione problema solvi potest, transmutare licet earum alterutram, si hyperbola sit vel parabola, in ellipsin: deinde ellipsis facile mutatur in circulum. Recta item & sectio conica, in constructione planorum problematum, vertuntur in rectam & circulum.

330. Coroll. 3. Si recta linea F G, coincidat cum A D, transformabitur in rectam coincidentem cum a B, nam punctum D, transfertur in d, punctum L, in l.

(k) 331. (Vide fig. Newt. pag. 218.) Figura h g i data in figuram primam H G I, transformatur, faciendo ut O d, ad d g, ita O D, ad D G, parallelam radio O A.

(l) 332. Sit curva C G I, parabola cujus diameter C D, diametri vertex C, ordinata G D radio ordinato primo A O parallela, latus rectum $l$, sitque O A $= a$, A B $= b$, A C $= c$, A D $= x$, C D $= x - c$ G D $= y$, nova abscissa, a d $= z$, nova ordinata g d $= u$, erit ex naturâ parabolæ $lx - lc = yy$, & substitutis pro $x$, & $y$, eorum valoribus $\frac{ba}{z}$, $\frac{bu}{z}$ (325) producetur æquatio nova ad novam curvam g i, $\frac{lba}{z} - lc = \frac{b^2u^2}{z^2}$, hoc est, reductione factâ $b^2u^2 - lbaz + lcz^2 = 0$, æquatio ad Ellipsim cujus diameter a F $= \frac{ba}{c}$, latus rectum $= \frac{la}{b}$, nam $\frac{baz}{c} - z^2 : u^2 = \frac{ba}{c} : \frac{la}{b}$.

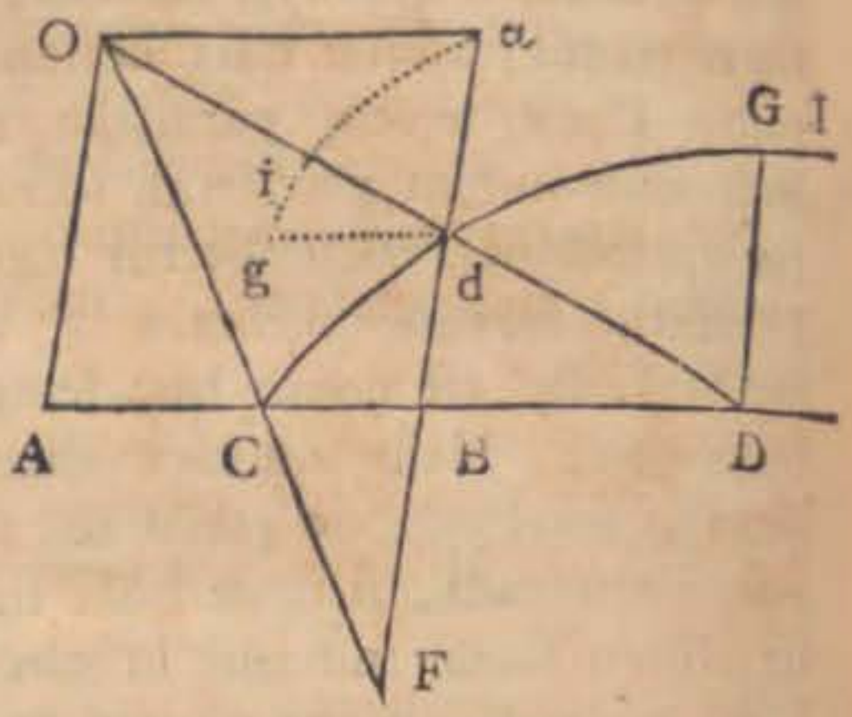



Si nova ordinata g d, ponatur ad abscissam a d, perpendicularis, & præterea fiat $lc = b^2$, sive $l \times$ A C $=$ A B$^2$ superior ad Ellipsim æquatio in hanc mutabitur $u^2 - \frac{baz}{c} + zz = 0$, quæ est ad circulum cujus diameter $\frac{ba}{c}$, ex tribus autem rectis $a$, $b$, $c$, binæ $a$ & $b$, vel $a$ & $c$, possunt ad arbitrium assumi, & tertia determini-

DE MOTU CORPORUM.

terminatur per æquationem $lc = bb$, in circulo.

Si vertex C cum puncto A coeat, hoc eſt, ſi $AC = c = o$ æquatio ad novam curvam erit $b^2a^2 - lbaz = o$, hoc eſt, curva g i, erit parabola; & eodem modo invenitur Ellipſim & Hyperbolam atque adeò Sectiones omnes conicas in parabolam transformari, dum diametri A D radio O a parallelæ vertex C coincidit cum puncto A radii ordinati primi O A ordinatis ad diametrum paralleli.

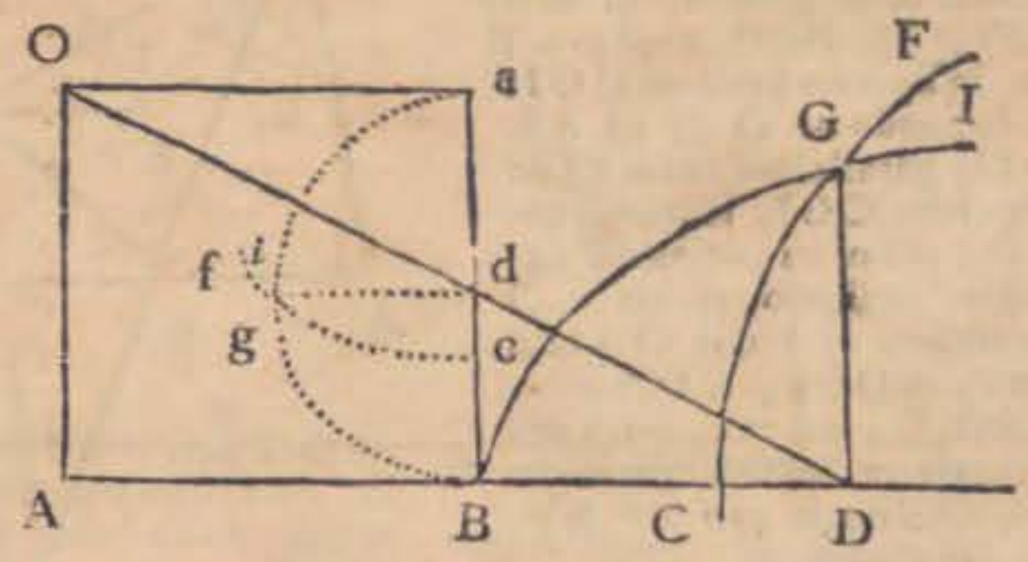



Si parabolæ vertex C cum puncto B coeat, erit $b = c$, adeóque Ellipſis vel circuli g i diameter $\frac{ba}{c}$, erit $a = OA = aB$.

Si curva C G I, fuerit hyperbola cujus ſit diameter $d$, latus rectum $l$, manentibus cæteris denominationibus ut ſuprà, erit ex naturâ hyperbolæ $dy^2 = lx^2 - 2clx + dlx - ldc + lcc$, & ſubſtitutis loco $x$ & $y$, eorum valoribus & reductione ad communem denominatorem factâ producetur.

$$db^2u^2 + 2clbaz + ldcz^2 - lb^2a^2 = o \\ - dlbaz - lc^2z^2$$

nova æquatio ad parabolam vel hyperbolam aut Ellipſim prout aſſumitur linea $c$, æqualis vel major vel minor diametro $d$, Ellipſis autem in circulum abit ponendo $ldc - lc^2 = db^2$, & angulum g d a, rectum, ut ex locorum geometricorum doctrinâ liquet. Eâdem ratione transformatur Ellipſis.



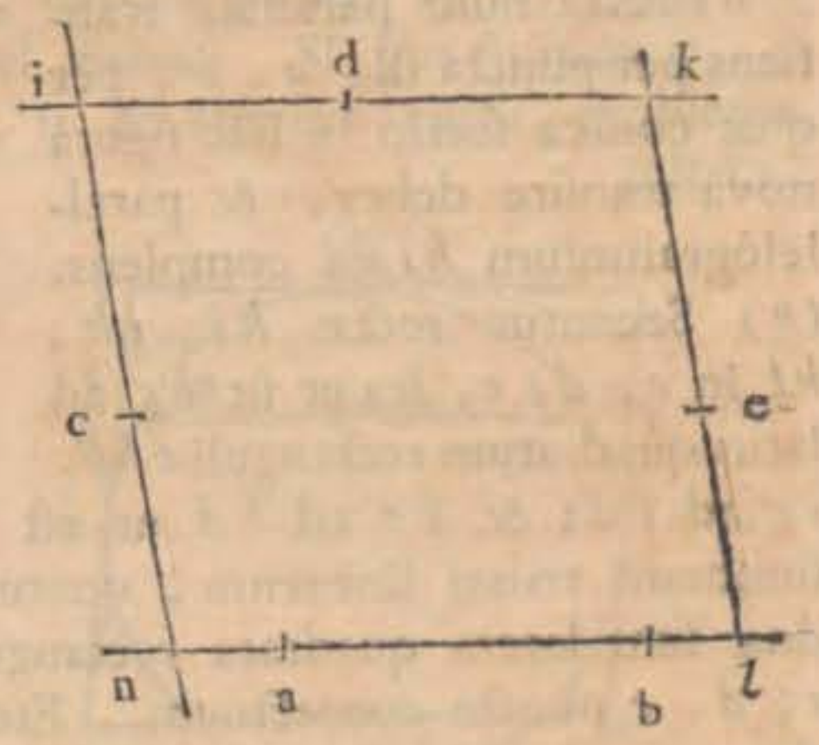

333. His præmiſſis facilè intelligitur hujus lemmatis uſus in ſolidorum aut etiam planorum problematum ſolutione. Nam ſit quærenda interſectio G conicæ ſectionis B G I cum alterâ ſectione conicâ aut rectâ lineâ C G F poſitione datâ. transformetur (332.) ſectio conica B G I in circulum B G a, & linea C G F, in lineam c g f, tum ex puncto interſectionis g, circuli B g a, & lineæ c g f, demittatur ad a B nova ordinata ſive perpendicularis g d, & per punctum d, agatur radius abſcindens O d D ſecans rectam A B in D, denique per D agatur G D radio ordinato primo O A parallela quæ ſit ad O D ut g d, ad O d, & erit G punctum interſectionis quæſitum. Cum enim in puncto interſectionis duarum linearum B G I, C G F, communis ſit ordinata G D manifeſtum eſt interſectionem illam transformari in interſectionem linearum B g a, c g f, & vice verſâ (331).

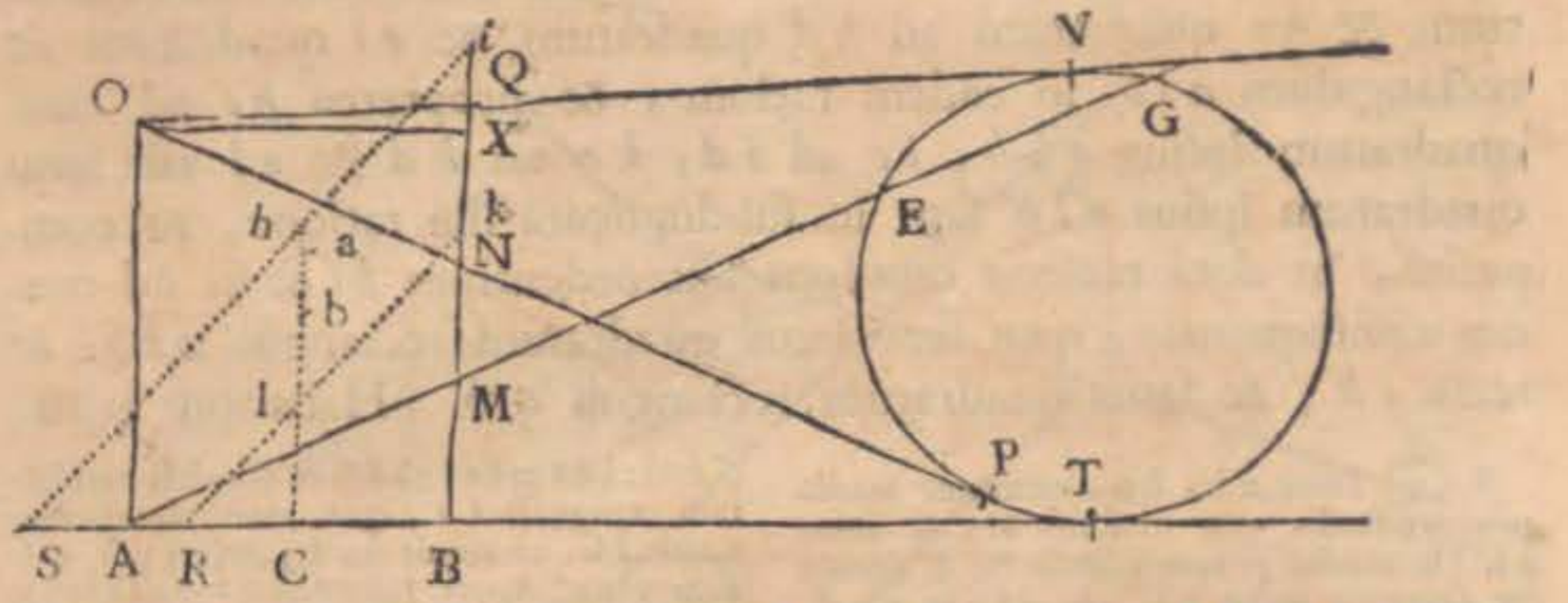
PRO-

## PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

*Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit, & rectas tres continget positione datas.*

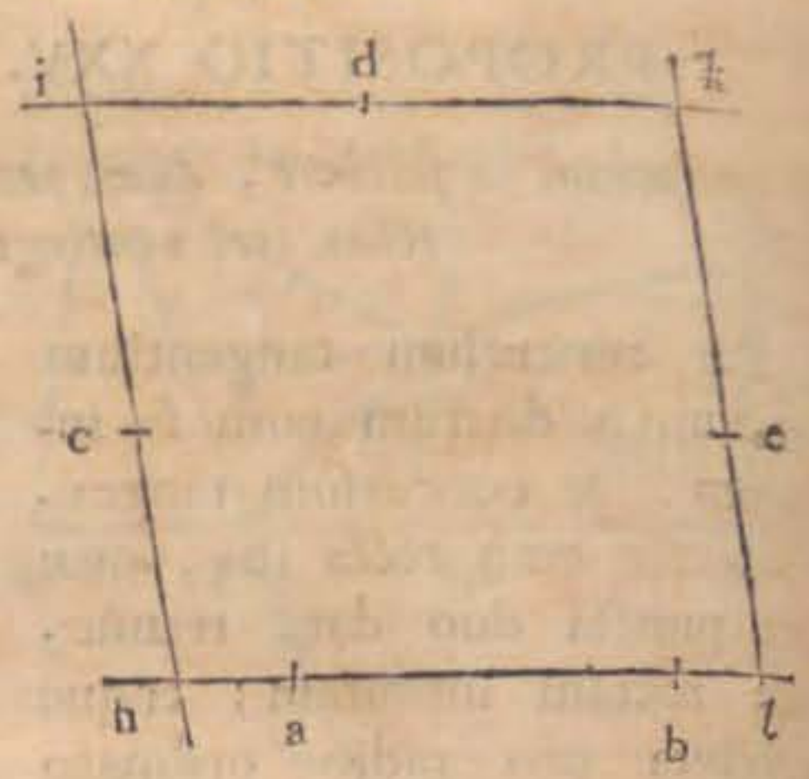
Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per lemma superius, in figuram novam. (m) In hâc figurâ tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallelæ, & tan-




(m) 334. Sit O, concursus tangentium duarum OV, OP, A concursus tangentis tertiæ AT, cum rectâ AG, quæ per puncta duo E, G, data transit, age rectam infinitam OA, eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, & OX parallelâ AT, pro radio ordinato novo usurpatâ, transmutetur figura in figuram novam, quod facillimum est, si ordinatæ novæ parallelæ sumantur radio ordinato novo OX, nam recta AT transformatur in rectam BXi (330), recta AG in rectam Ch ipsi BX parallelam (329) & punctum illius C, reperitur, capiendo BC=BM (328): rectæ OV, OP transmutantur in rectas parallelas Rk, Si, (327); earumque puncta R, S, habentur capiendo BR=BN, BS=BQ, & alia puncta duo (per Lem. XXII.) facilè reperiuntur. Puncta E, & G, transferantur in b, & a, & productis lineis parallelis Bi & Ch, Rk, & Si, donec sibi mutuò occurrant, compleatur parallelogrammum lhik, & nova sectio conica transibit per puncta b, & a, & tanget à rectis tribus hi, lk, ki (326).

DE MOTU CORPORUM.



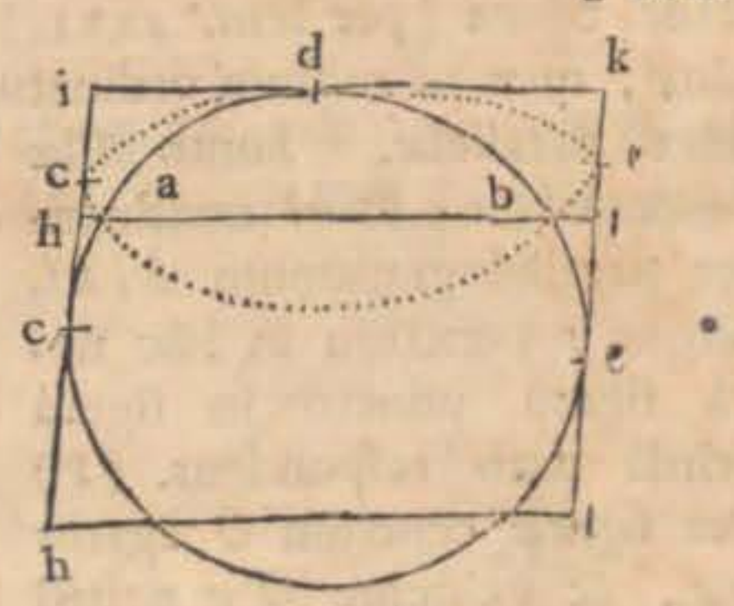

gens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data tranſeunti. Sunto *hi*, *kl* tangentes illæ duæ parallelæ, *ik* tangens tertia, & *hl* recta huic parallela tranſiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ conica ſectio in hâc figurâ novâ tranſire debet, & parallelogrammum *hikl* complens. (n) Secentur rectæ *hi*, *ik*, *kl* in *c*, *d*, *e*, ita ut ſit *hc* ad latus quadratum rectanguli *ahb*, *ic* ad *id*, & *ke* ad *kd* ut eſt ſumma rectarum *hi* & *kl* ad ſummam trium linearum, quarum prima eſt recta *ik*, alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum *ahb* & *alb*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex conicis, ſunt *hc* quadratum ad rectangulum *ahb*, & *ic* quadratum ad *id* quadratum, & *ke* quadratum ad *kd* quadratum, & *el* quadratum ad rectangulum *alb* in eâdem ratione; & propterea *hc* ad latus quadratum ipſius *ahb*, *ic* ad *id*, *ke* ad *kd* & *el* ad latus quadratum ipſius *alb* ſunt in ſubduplicatâ illâ ratione, & compoſitè, in datâ ratione omnium antecedentium *hi* & *kl* ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli *ahb*, & recta *ik*, & latus quadratum rectanguli *alb*. Habentur igitur

* (n) Inter ah, hb, quæratur media proportionalis quæ dicatur *M*, & inter al, lb, media proportionalis *N*; & deinde ita ſecentur rectæ hi, ik, kl, in c, d, e, ut ſit hc, ad *M*, ic, ad id, & ke ad kd, ut eſt hi + kl, ad ik + *M* + *N*, & erunt c, d, e, puncta contactuum; Etenim ſi fuerint c, d, e, puncta contactuum, ob hl parallelam tangenti ik, quæ cum alterâ tangente hi, concurrit in i, erit (per prop. 16. & 18. lib. 3. conic. Apoll. ſive per Corol. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.) $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2$, & ob, hi, occurrentem ſectioni in ſolo puncto c, & parallelam tangenti lk, quæ alteri tangenti ik occurrit in k, erit (per eaſdem prop. Apoll.) $ic \times ic (ic^2) : id^2 = ke^2 : kd^2$, & ob, hl, parallelam tangenti ik, quæ cum alterâ tangente lk, convenit in k, erit (per eaſdem prop. Apoll.) $ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, adeoque $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2 = ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, & propterea $hc : \sqrt{ah \times hb}\,(M) = ic : id = ke : kd = el : \sqrt{al \times lb}\,(N)$, & compoſitè ſumma omnium antecedentium eſt ad ſummam omnium conſequentium ut quilibet antecedens ad ſuum conſequentem, hoc eſt $hc : M = ic : id = ke : kd = el : N = hc + ic + ke + el\,(hi + kl) : M + id + kd + N\,(ik + M + N)$. Habentur igitur (per conſtr.) ex datâ illâ ratione puncta contactuum c, d, e, in figurâ novâ per inverſas operationes (331).

335.

ex datâ illâ ratione puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inversas operationes lemmatis noviſſimi transferantur hæc puncta in figuram primam, & ibi (per prob. XIV.) deſcribetur trajectoria. *Q. E. F.* (o) Cæterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, problema impoſſibile eſt.

PRO-



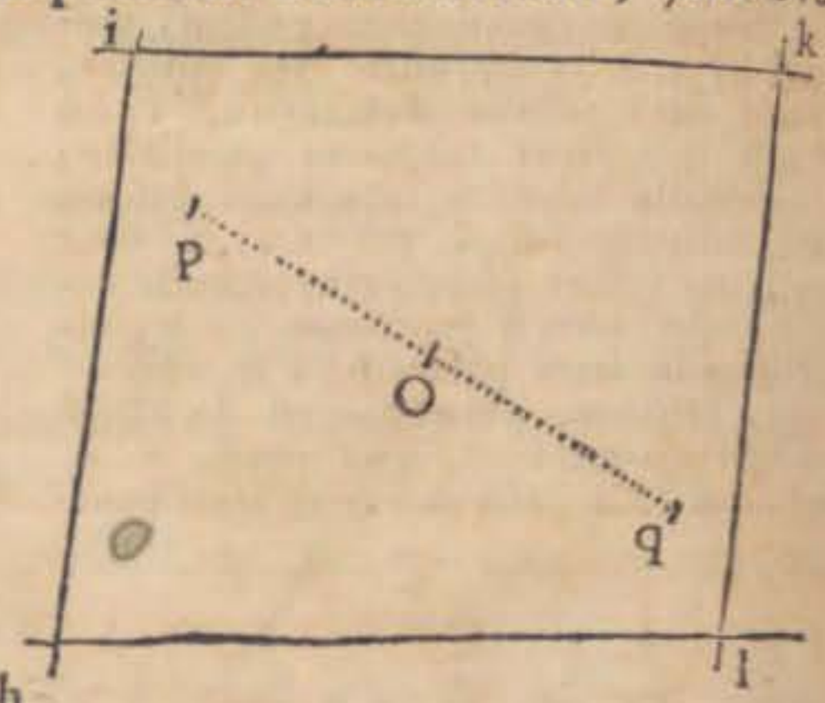

(o) 335. Quoniam duæ parallelæ h i, l k, neque parabolam, neque hyperbolam ſimplicem contingere poſſunt, tangent hyperbolas oppoſitas vel ellipſim, circulo inter ellipſes annumerato. Porrò Ellipſis tota inter tangentes parallelas, & hyperbolæ oppoſitæ totæ extra eaſdem ſunt; quare in Ellipſi puncta a, b, inter puncta h, l, ſita ſunt; in hyperbolis extra; atque adeò ſi punctorum a, b, alterum cadit inter puncta h, l & alterum extrà, problema impoſſibile eſt. In Ellipſi punctum contactûs d, inter puncta i, k, neceſſariò cadit; alia duo c, e, inter puncta h & i, l & k, vel aliquandò extrà eſſe poſſunt; in hyperbolis oppoſitis contactuum puncta duo ut c, d, extrà puncta h, i, k, l, neceſſariò poſita ſunt, tertium ut e, vel extrà vel intra eſſe poteſt, undè præſcribit Newtonus ut puncta c, d, e, vel inter puncta h, i, k, l, vel extrà capiantur, perinde ut puncta a, b, jacent vel inter puncta h, l, vel extrà.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

*Trajectoriam describere, quæ transibit per punctum datum, & rectas quatuor positione datas continget.*

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, transmutetur figura (per lem. XXII.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ *hi* & *kl*, *ik* & *hl* continentes parallelogrammum *hikl*. Sitque *p* punctum in hâc novâ figurâ puncto in figurâ primâ dato respondens. (P) Per figuræ centrum *O* agatur *pq*, & existente *Oq* aquali *Op*, erit *q* punctum alterum per quod sectio conica in hâc figurâ novâ transire debet. Per lemmatis XXII. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest trajectoria illa per problema XVII. *Q. E. F.*




LEM.

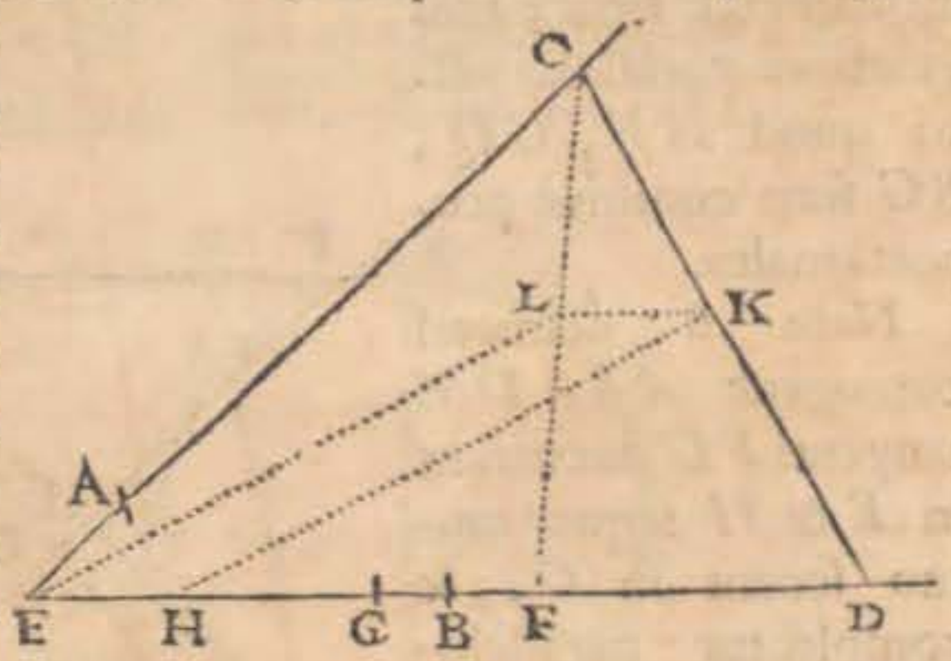
(p) 336. Parallelogrammi h, i, k, l, sectioni conicæ circumscripti diagonales in sectionis centro O, se mutuò intersecant. Nam rectæ quæ opposita contactuum puntajungunt, sunt sectionis diametri centro O bisectæ (per prop. 27. & 31. Lib. 2. conic. Apoll. utque sequitur ex Lem. IV. de Conic. p. 119).

* Vid.

## LEMMA XXIII.

*Si rectæ duæ positione datæ* AC, BD *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta* CD, *quâ puncta indeterminata* C, D *junguntur, secetur in ratione datâ in* K: *dico quod punctum* K *locabitur in rectâ positione datâ.*

(q) Concurrant enim rectæ *AC*, *BD* in *E*, & in *BE* capiatur *BG* ad *AE* ut est *BD* ad *AC*, sitque *FD* semper æqualis datæ *EG*; & erit ex constructione *EC* ad *GD*, hoc est, ad *EF* ut *AC* ad *BD*, ideoque in ratione datâ, & propterea dabitur specie triangulum *EFC*. Secetur *CF* in *L* ut sit *CL* ad *CF* in ratione *CK* ad *CD*; & ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum *EFL*; proindeque punctum *L* locabitur in rectâ *EL* positione datâ. Junge *LK*, & similia erunt triangula *CLK*, *CFD*; & ob datam *FD* & datam rationem *LK* ad *FD* dabitur *LK*. Huic æqualis capiatur *EH*, & erit semper *ELKH* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi illius latere positione dato *HK*. *Q. E. D.*




*Corol.* Ob datam specie figuram *EFLC*, rectæ tres *EF*, *EL* & *EC*, id est *GD*, *HK* & *EC*, datas habent rationes ad invicem.

LEM-

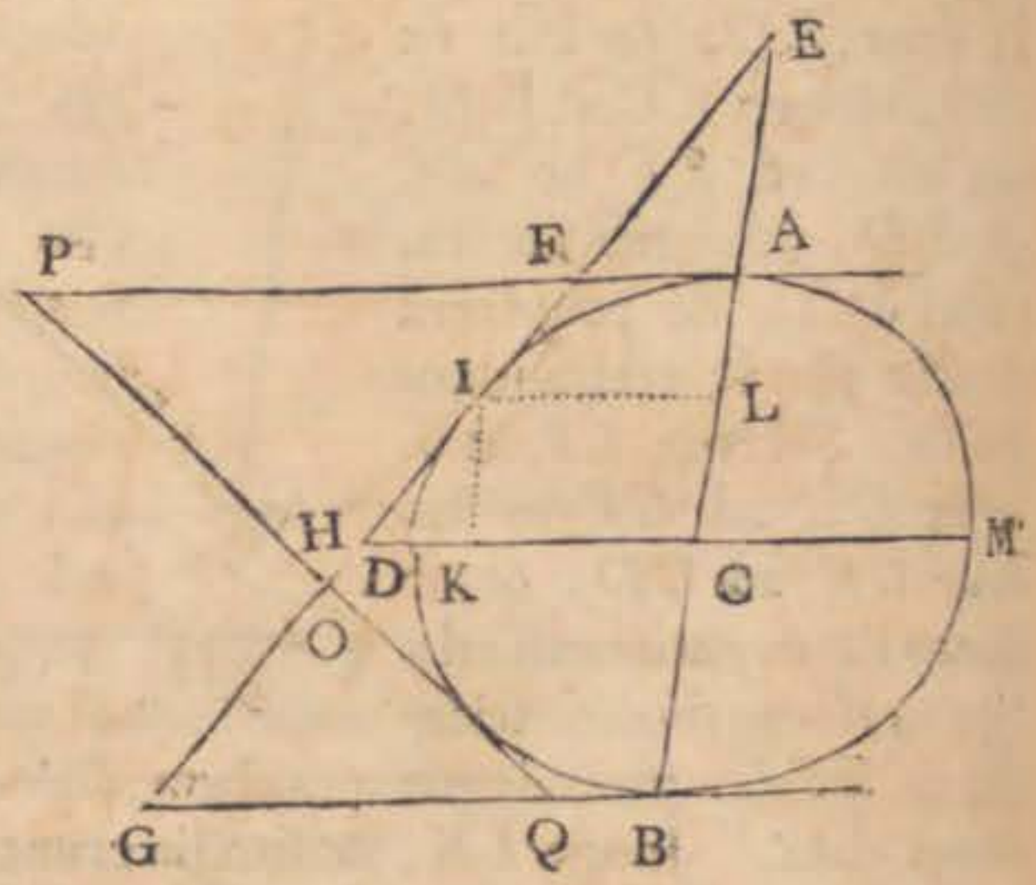
(q) * Vid. not. 67. pag. 39.

DE MOTU CORPORUM.

## LEMMA XXIV.

*Si rectæ tres tangant quamcunque coni sectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione; dico quod sectionis semidiameter huic duabus parallela, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.*

Sunto $AF$, $GB$ parallelæ duæ coni sectionem $ADB$ tangentes in $A$ & $B$; $EF$ recta tertia coni sectionem tangens in $I$, & occurrens prioribus tangentibus in $F$ & $G$; sitque $CD$ semidiameter figuræ tangentibus parallela: dico quod $AF$, $CD$, $BG$ sunt continuè proportionales.




Nam si diametri conjugatæ $AB$, $DM$ tangenti $FG$ occurrant in $E$ & $H$ seque mutuo secent in $C$, & compleatur parallelogrammum $IKCL$; (r) erit ex naturâ sectionum conicarum ut $EC$ ad $CA$ ita $CA$ ad $CL$, & ita divisim $EC-CA$ ad $CA-CL$, seu $EA$ ad $AL$, & compositè $EA$ ad $EA+AL$ seu $EL$ ut $EC$ ad $EC+CA$ seu $EB$; ideoque, ob similitudinem triangulorum $EAF$, $ELI$, $ECH$, $EBG$, $AF$ ad $LI$ ut $CH$ ad $BG$. Est itidem, ex naturâ sectionum conicarum, $LI$ seu $CK$ ad $CD$ ut $CD$ ad $CH$; (f) atque ideo ex æquo perturbatè $AF$ ad $CD$ ut $CD$ ad $BG$. *Q. E. D.* Co-

(r) * *Erit ex naturâ sectionum conicarum &c.* (per prop. 37. 38. Lib. 1. conic. Apoll. vide cor. 2. Lem. V. de Conic. p. 121.).

(f) * Cum sit $EA:EL=EC:EB$, & ob similitudinem triangulorum $EAF$ $EIL$ sit $EA:EL=AF:LI$, seu $CK$, & ob similitudinem triangulorum $ECH$, $EBG$,

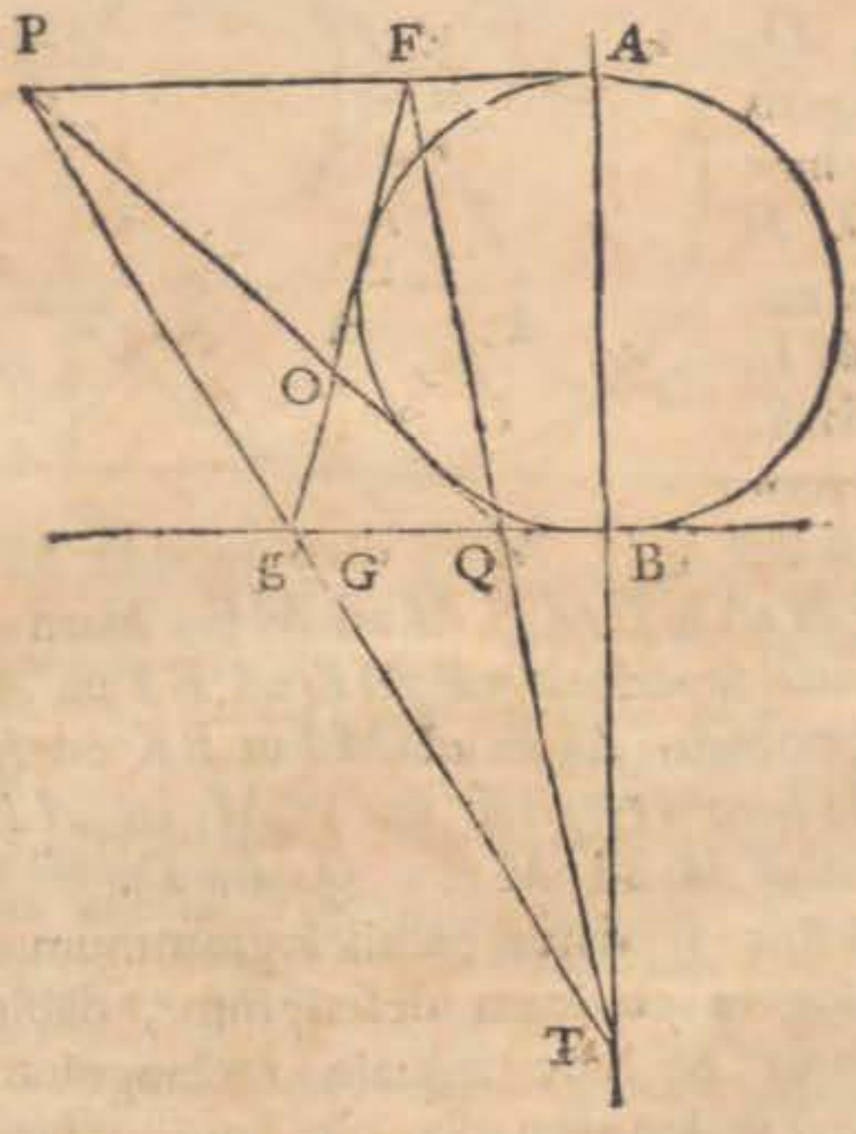
*Corol.* 1. Hinc si tangentes duæ $FG$, $PQ$ tangentibus parallelis $AF$, $BG$ occurrant in $F$ & $G$, $P$ & $Q$, seque mutuo secent in $O$; erit ex æquo perturbatè $AF$ ad $BQ$ ut $AP$ ad $BG$, (t) & divisim ut $FP$ ad $GQ$, atque ideo ut $FO$ ad $OG$.

*Corol.* 2. (u) Unde etiam rectæ duæ $PG$, $FQ$, per puncta $P$ & $G$, $F$ & $Q$ ductæ, concurrent ad rectam $ACB$ per centrum figuræ & puncta contactuum $A$, $B$ transeuntem.

LEM-

EBG fit EC:EB=CH:BG, erit AF:CK=CH:BG, & quia (ex conic. loco citato) CK:CD=CD:CH, erit AF×CK:CK×CD=CH×CD:BG×CH, hoc est, AF:CD=CD:BG.

(t) * Est enim AF:CD=CD:BG, & similiter BQ:CD=CD:AP, seu CD:BQ=AP:CD, adeóque AF×CD:CD×BQ=CD×AP:BG×CD, hoc est AF:BQ=AP:BG=AP−AF:BG−BQ=FP:GQ=FO:OG, ob similia triangula FOP, GOQ.




(u) * Agatur enim recta FQ, ipsi AB occurrens in T, & jungatur PT, rectam BG, secans in g, erit AF:BQ=AT:BT=AP:Bg, sed per coroll. 1. AF:BQ=AP:BG, est igitur BG=Bg ac proindè punctum g, cum G coincidit.

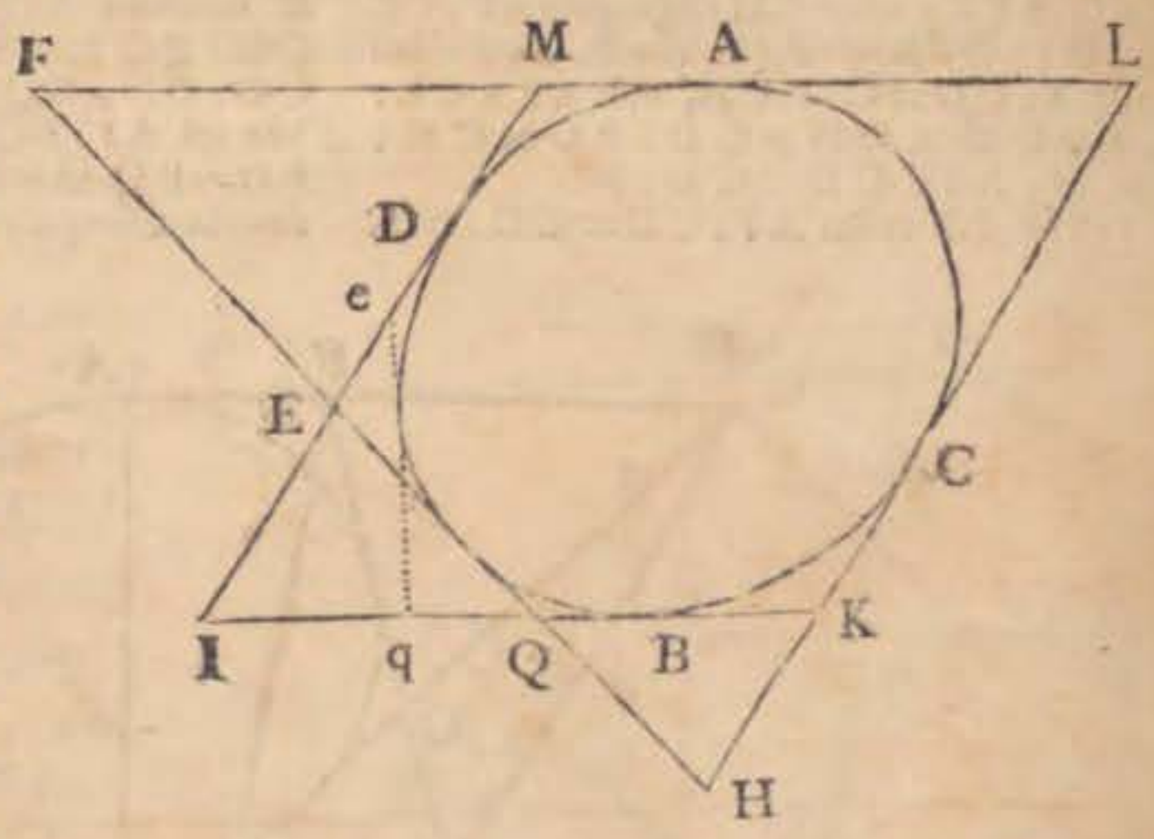


* Nam

De Motu Corporum.

## LEMMA XXV.

*Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant sectionem quamcunque conicam, & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud à quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium est ad abscissarum alteram.*




Tangant parallelogrammi *MLIK* latera quatuor *ML*, *IK*, *KL*, *MI* sectionem conicam in *A*, *B*, *C*, *D*, & secet tangens quinta *FQ* hæc latera in *F*, *Q*, *H* & *E*; sumantur autem laterum *MI*, *KI* abscissæ *ME*, *KQ*, vel laterum *KL*, *ML*, abscissæ *KH*, *MF*: dico quod sit *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*; & *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. Nam per corollarium primum lemmatis superioris est *ME* ad *EI* ut *AM* seu *BK* ad *BQ*, & componendo *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*. *Q. E. D.* Item *KH* ad *HL* ut (x) *BK* seu *AM* ad *AF*, & dividendo *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. *Q. E. D.*

*Corol* 1. Hinc si datur parallelogrammum *IKLM*, circa datam sectionem conicam descriptum, dabitur rectangulum $KQ \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$. Æquantur enim rectangula illa ob similitudinem triangulorum *KQH*, *MFE*.

*Co-*

(x) * Nam si puncta contactuum A, & B, rectâ jungantur, hæc transibit per centrum commune sectionis conicæ & parallelogrammi, (336) adeóque erit AM = BK.

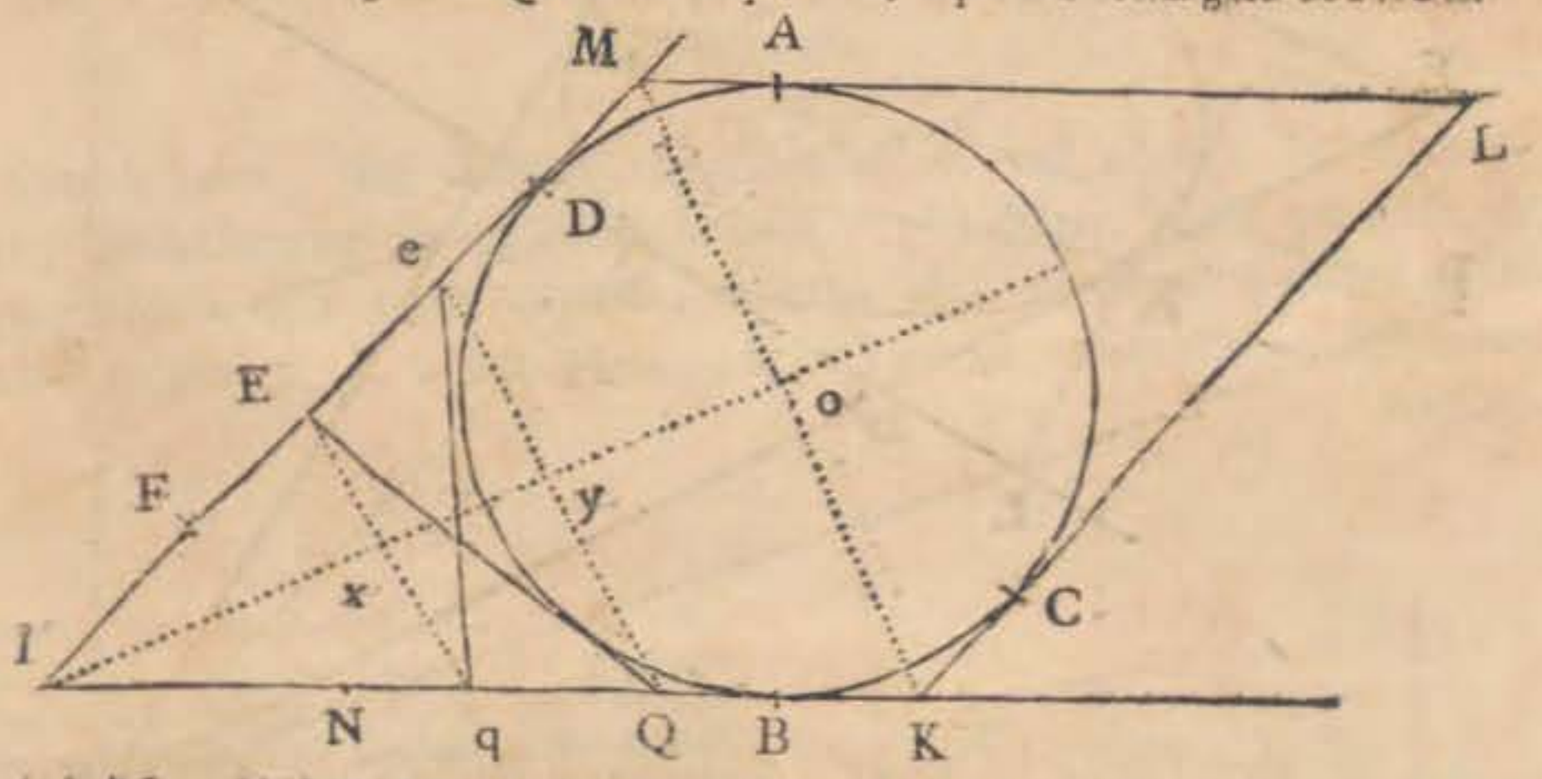
* Nam

*Corol.* 2. Et si sexta ducatur tangens $eq$ tangentibus $KI$, $MI$ occurrens in $q$ & $e$; (y) rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque $KQ$ ad $Me$ ut $Kq$ ad $ME$, & divisim ut $Qq$ ad $Ee$.

*Corol.* 3. Unde etiam si $Eq$, $eQ$ jungantur & bisecentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum sectionis conicæ. Nam cum sit $Qq$ ad $Ee$ ut $KQ$ ad $Me$, transibit eadem recta per medium omnium $Eq$, $eQ$, $MK$ (z) (per lem. XXIII.) & medium rectæ $MK$ est centrum sectionis. (a)

PRO-

(y) * Nam rectangula KQ × ME, Kq × Me, æquantur rectangulo MI × BK.



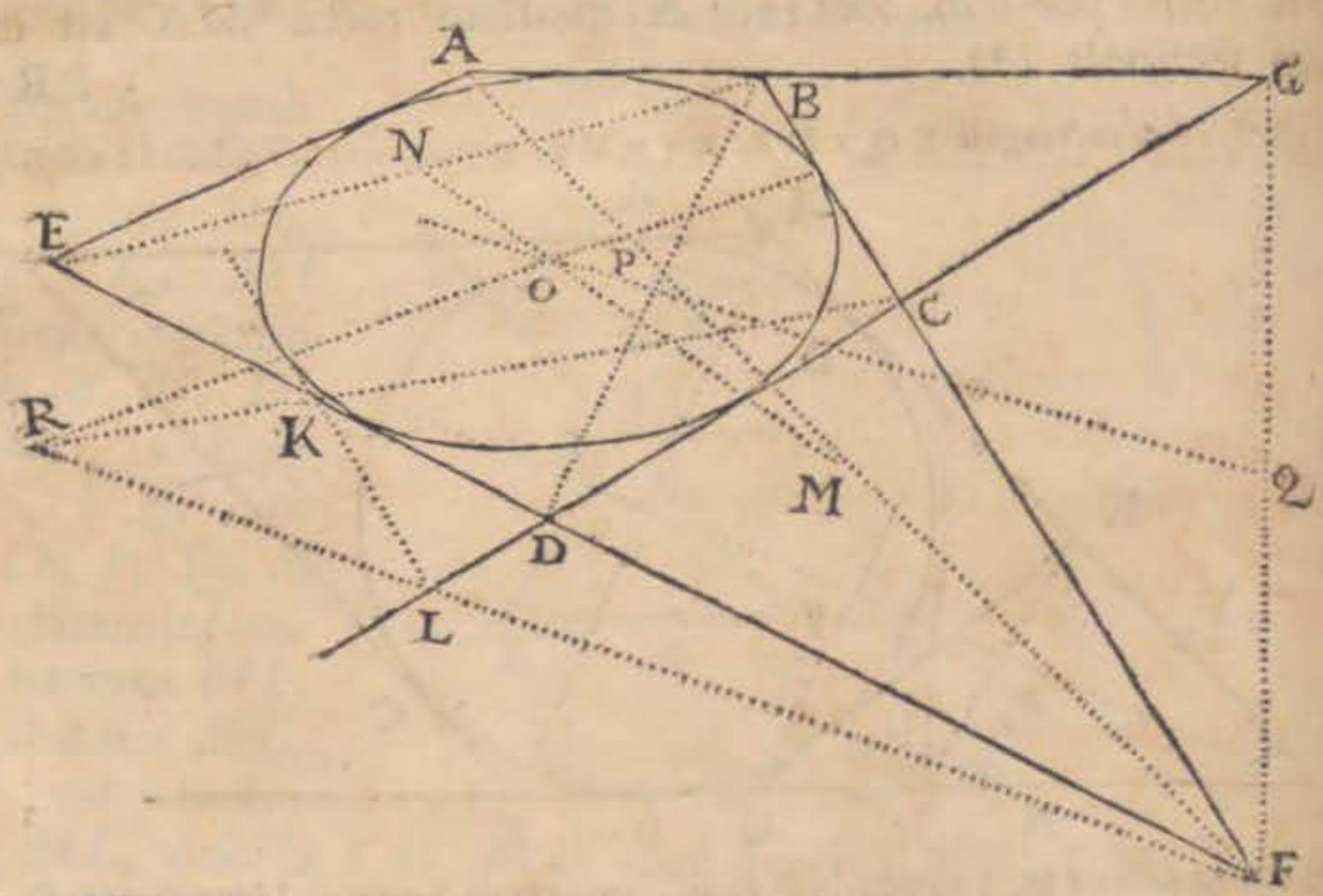

(z) * In rectis IM, IK, positione datis capiatur qN, ad EF, ut est qQ, ad Ee, & puncta N, F, tanquam data seu fixa considerentur, & erit Nq:FE=qQ:Ee=QK:eM, & composite, Nq:FE=NQ:Fe=NK:FM; quare si rectæ Eq, eQ, MK, quibus puncta indeterminata E, & q, E, Q, M & K junguntur, secentur in ratione datâ in x, y, o, puncta omnia x, y, o, locantur in unâ eâdemque rectâ xy, (per Lem. XXIII). Si itaque recta xy, lineas Eq, eQ, bisecat, rectam MK bisecabit, adeóque (336) per centrum sectionis conicæ transibit.

(a) Hinc si lineæ quatuor ut ED, eq, EQ, QB sectionem Conicam tangant & sibi mutuò occurrant in punctis e, E, q, Q junganturque puncta oppositta e, Q & E, q, bifariamque dividantur lineæ eQ, Eq, linea eas bisecans erit locus centri figuræ: Idque semper verum erit quamcumque figuram faciant lineæ ED, eq, EQ, QB sive sese decussent sive Trapezium constituant, Concipiatur illas Diametros duci quarum vertex est in puncto contactûs harum linearum donec occurrant curvæ altero suo vertice, Tangentes in eo vertice ductæ erunt parallelæ prioribus: Dabuntur ergo Parallelæ duabus lineis ED, QB, quæ erunt Tangentes curvæ, ideoque fiet ut in Lemmatis Hypothesi Parallelogrammum MIKL constans quatuor Tangentibus quarum oppositæ erunt inter se Parallelæ, & Tangentes EQ & eq considerari poterunt ut quinta & sexta Tangens de quibus agitur in hoc Lemmate, ideoque per ejus corollarium 3. *si bisecentur lineæ Eq eQ & recta per bisectionum puncta agatur transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ, &c.*

De Motu Corporum.

## PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

*Trajectoriam describere, quæ rectas quinque positione datas continget.*

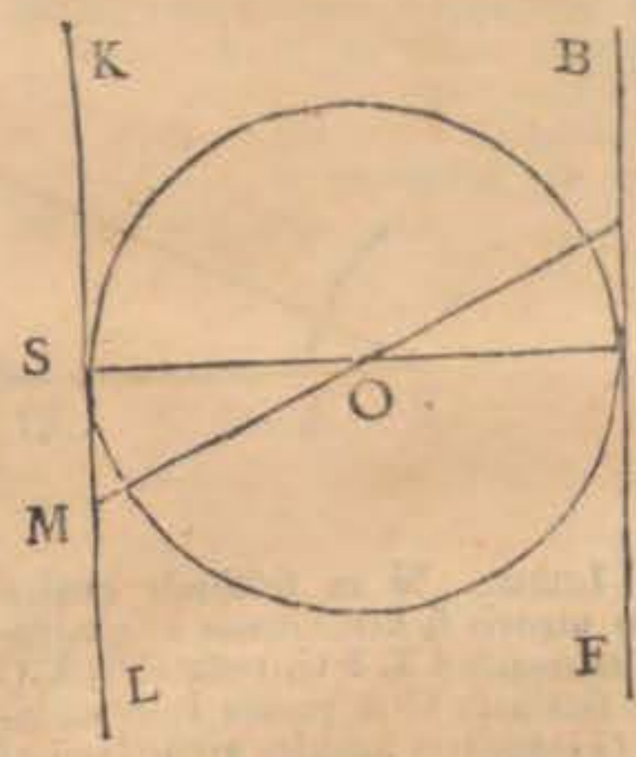



Dentur positione tangentes *ABG*, *BCF*, *GCD*, *FDE*, *EA*. Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ *ABFE* diagonales *AF*, *BE* biseca in *M* & *N*, & (per corol. 3. lem. xxv.) recta *MN* per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Rursus figuræ quadrilateræ *BGDF*, sub aliis quibusvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) *BD*, *GF* biseca in *P* & *Q*: & recta *PQ* per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo

go centrum in concurſu biſecantium. Sit illud *O*. (b) Tangenti cuivis *BC* parallelam age *KL*, ad eam diſtantiam ut centrum *O* in medio inter parallelas locetur, & acta *KL* tanget trajectoriam deſcribendam. Secet hæc tangentes alias quaſvis duas *GCD*, *FDE* in *L* & *K*. Per harum tangentium non parallelarum *CL*, *FK* cum parallelis *CF*, *KL* concurſus *C* & *K*, *F* & *L* age *CK*, *FL* concurrentes in *R*, & recta *OR* ducta & producta ſecabit tangentes parallelas *CF*, *KL* in punctis contactuum. Patet hoc per corol. 2. lem. XXIV. Eâdem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per conſtruct. prob. XIV. trajectoriam deſcribere. *Q. E. F.*

## *Scholium.*

Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel aſymptoti, includuntur in præcedentibus. (c) Nam datis punctis & tangentibus unà cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes à centro ex alterâ parte æqualiter diſtantes. Aſymp-



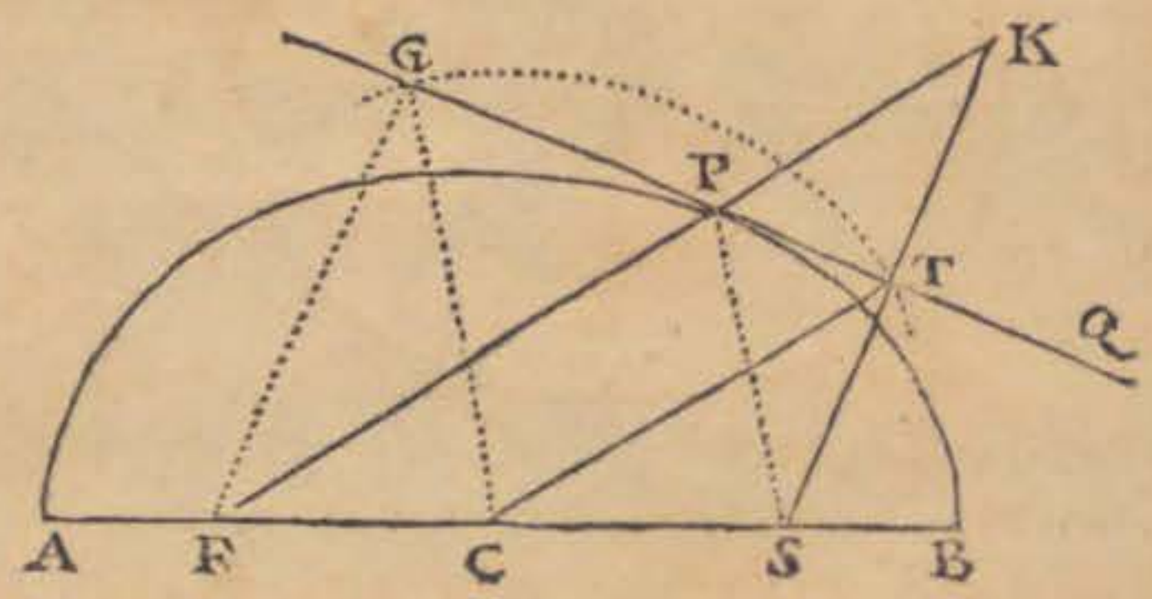

alterutro axe, & duabus tangentibus non parallelis, vel tangente & puncto trajectoriæ Ellipticæ & Hyperbolicæ ex lemmatis ſequentibus facilè deſcribuntur.

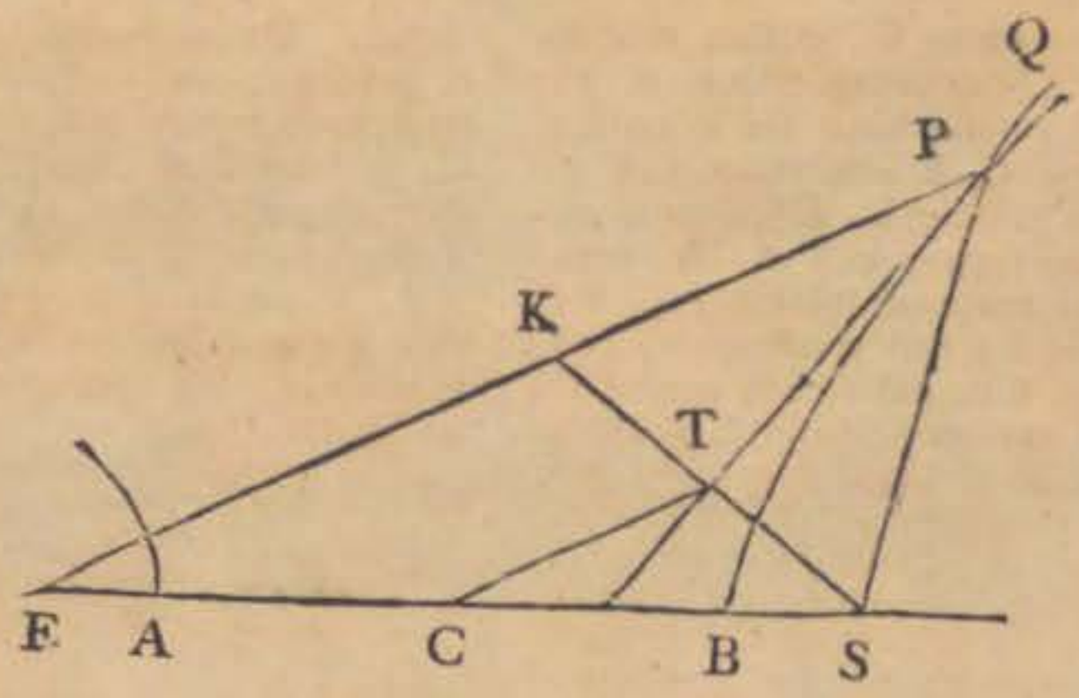
(b) 337. Datis ſectionis conicæ centro O, & tangente quâvis B F, altera tangens L K datæ parallela facile invenitur; Nam per centrum O ducâtur recta quævis infinita M O N tangenti datæ occurrens in N, & ſumptâ O M = O N per M ducatur M K tangenti datæ F B parallela, erit M K tangens; ſi enim per punctum contactûs T & centrum O agatur ſectionis diameter T O S, erit S O = O T & tangens in S tangenti in T parallela lineam N O M ita ſecabit in M, ut ſit M O = O N, ob, S O : O T = M O : O N.

(c) 338. Hinc datis præter centrum tribus tangentibus non parallelis vel duabus tangentibus convergentibus & puncto, vel tangente & punctis duobus, vel punctis tribus, dantur ſex tangentes, vel tangentes quatuor & puncta duo, vel tangens & puncta quatuor, vel puncta ſex, quibus datis trajectoria deſcribi poteſt per prop. (27. 26. 25. 24. 23. 22.). Ex datis centro,

DE MOTU CORPORUM.

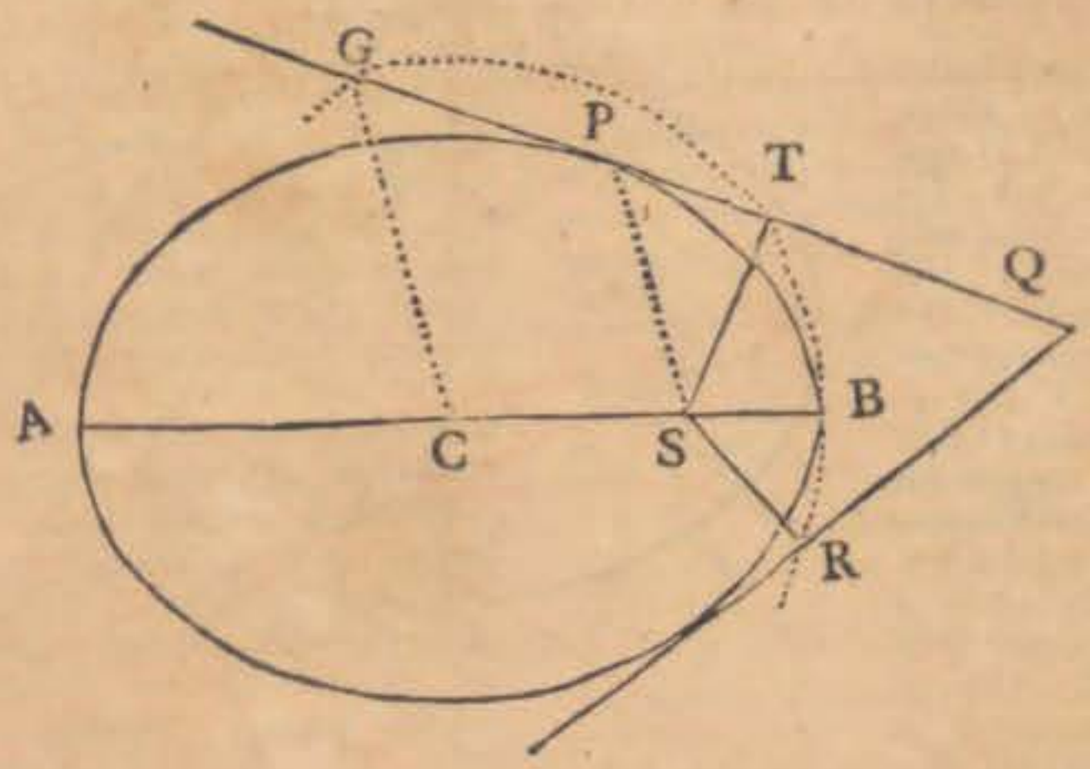
Asymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinitè distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Asymptoton, atque constructiones problematum præcedentium vertentur in constructiones ubi Asymptotos datur.




339. Lemma. Si ex sectionis conicæ umbilico utrovis S demittantur ad tangentem PQ normales S T, F G, rectæ C T, C G centrum sectionis C & puncta intersectionum T, G jungentes æquales erunt semiaxi principali CB, & parallelæ lineis FP, SP ex altero umbilico F & S ad punctum contactûs P ductæ. Producantur enim FP, ST, donec concurrant in K, & erit (per Lem. XV. Newt.) $FK = 2CB$, $KT = TS$, cumque sit etiam $FC = CS$, erit $ST : SK = SC : SF$, & ideo quia latera SK SF secantur proportionaliter in T & C erit CT parallela FK sive FP, ideoque erit $ST : SK = CT : FK$ & quia $ST = \frac{1}{2} SK$ erit CT æqualis $\frac{1}{2}$ FK, seu æqualis CB. Eodem modo probabitur, CG esse æqualem CB & parallelam lineæ PS.

340.

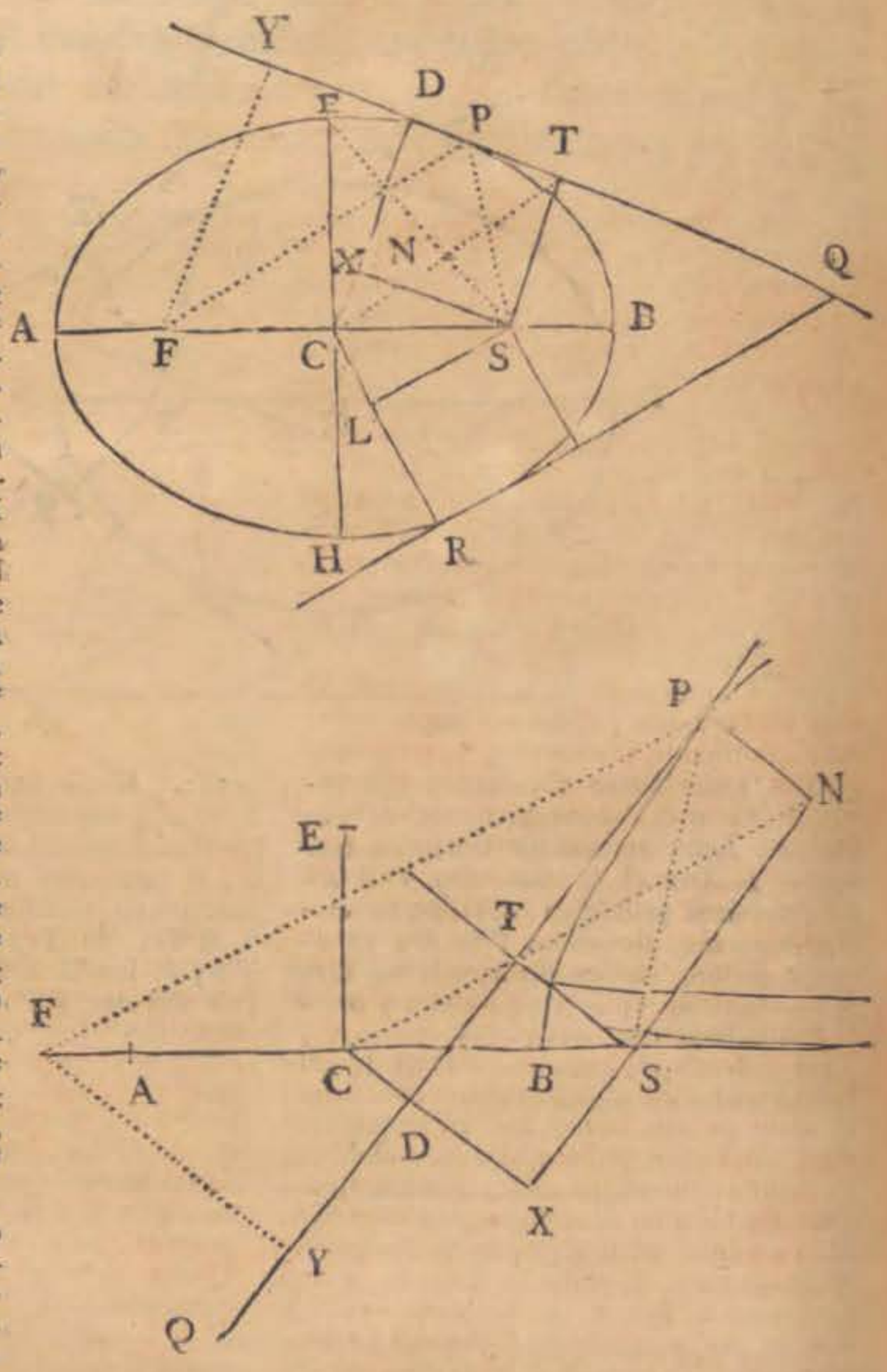



340. Datis centro C, duabus tangentibus P Q, E Q convergentibus & axe principali A B, deſcribitur ſectio conica. Nam ſi centro C & intervallo C B æqualis ſemiaxi principali deſcribatur circulus tangentes ſecans in T & R, agantur tangentibus perpendiculares T S, R S, concurrentes in S, erit punctum S, alteruter umbilicus quo dato cum centro C, dantur poſitio axis principalis C B, & ipſius longitudo ac umbilici duo.

341. Datis centro C, tangente P Q, & puncto contactûs P, cum axe principali, trajectoria conica deſcribitur. Centro enim C, & intervallo æquali ſemiaxi principali deſcribatur circulus tangentem ſecans in T & G; in T excitetur perpendiculum T S, & junctâ C G, per punctum contactûs ducatur P S ipſi C G parallela perpendiculo T S occurrens in S, erit S umbilicus (339).

DE MOTU CORPORUM.

342. Si ex centro C sectionis conicæ ad tangentem PQ, demittatur perpendicularis CD, & ex altero umbilico S ad CD agatur normalis SX, sitque CE semiaxis minùs principalis, erit in ellipsi $CX^2 = CD^2 - CE^2$, & in hyperbolâ $CX^2 = CD^2 + CE^2$, & demissâ ex umbilico in tangentem perpendiculari ST, junctâque CT, rectam SX secante in N, erit in utrâque sectione XN æqualis DP distantiæ puncti contactûs P à perpendiculari CD; Nam in Ellipsi $CS^2 = CT^2 (CB^2) - CE^2$, in Hyperbolâ $CS^2 = CT^2 + CE^2$, & in utrâque sectione $CS^2 = CX^2 + SX^2 = CX^2 + DT^2$; Ergò in Ellipsi $CX^2 + DT^2 = CT^2 - CE^2 = CD^2 + DT^2 - CE^2$, & hinc $CX^2 = CD^2 - CE^2$, & in hyperbolâ $CX^2 + DT^2 = CT^2 + CE^2 = CD^2 + DT^2 + CE^2$, adeòque $CX^2 = CD^2 + CE^2$. Q. e. 1.




Ex altero umbilico F, in tangentem demittatur perpendicularis FY, & junctis FP, SP, similia erunt triangula FPY, SPT, ob angulos æquales (per natur. Tangentium & focorum) FPY, SPT, & STP, FYP rectos; & quoniam FP & CT, FY & CD sunt parallelæ, similia quoque erunt triangula CTD, FPY, ideóque duo triangula CTD, SPT sunt similia; quarè $CD : DT = ST (DX) : PT$, & divisim $CD : DT = CD - DX : DT - PT$, & compositè $CD : DT = CD + DX : DT + PT$. Undè quoniam in Ellipsi $CD - DX = CX$, & $DT - PT = DP$; in hyperbolâ verò $CD + DX = CX$, & $DT + PT = DP$, erit in utrâque sectione $CD : DT = CX : DP$. Verùm ob SX tangenti DT parallelam, $CD : DT = CX : XN$, ergò $XN = DP$. Q. e. 2.

343. Hinc datis centro C, semiaxe minùs principali CE, tangentibus duabus

non-

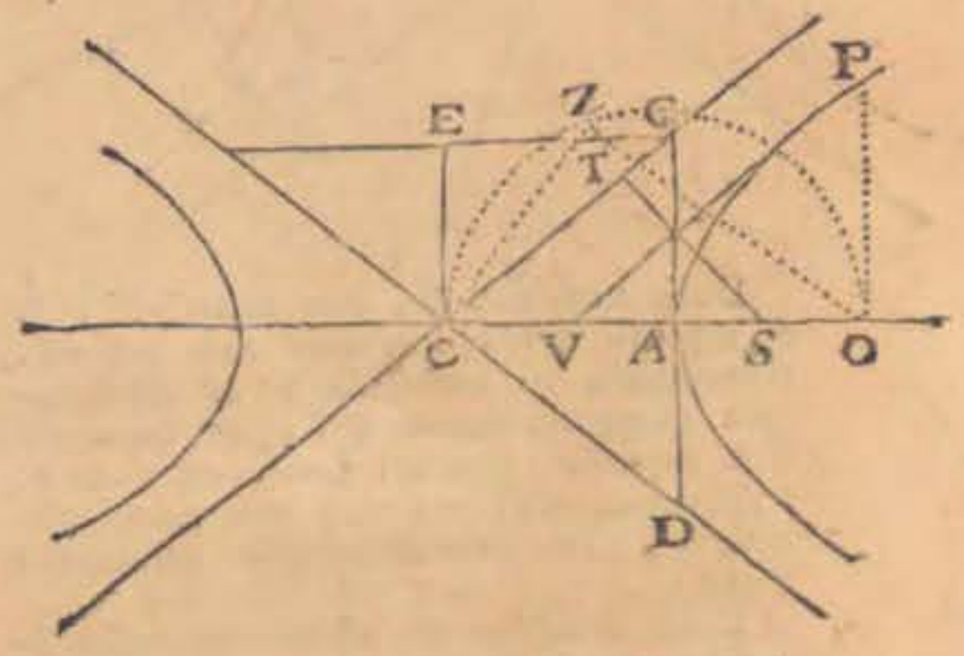
non paralleli, DQ, RQ, trajectoria Elliptica & Hyperbolica describitur. Nam ex centro C, ad tangentes demittantur perpendicula CD, CR, & capiantur CX, CL, ità ut $CX^2=CD^2-CE^2$, $CL^2=CR^2-CE^2$, si describenda sit ellipsis; vel ità ut $CX^2=CD^2+CE^2$, & $CL^2=CR^2+CE^2$, si describenda sit hyperbola; & per X & L puncta, erigantur ad CD, CR perpendicula XS, LS concurrentia in S, erit S focus ex quo si ad tangentem alterutram DQ, demittatur normalis ST, juncta CT, erit semiaxis principalis.

344. Datis centro C, semiaxe minùs principali CE, tangente PQ, & puncto contactûs P, sectio conica describitur. Nam ductâ XS, infinitâ ut suprà (343) capiatur XN=DP & jungatur CN, producaturque donec tangenti occurrat in T, recta TS, tangenti normalis secabit rectam XS in umbilico S, eritque CT semiaxis principalis.

345. Dato centro cum tangente & alterutro axe datur positio rectæ per umbilicum transeuntis; unde si præterea detur punctum extrà tangentem, facile erit umbilicum invenire. Eâdem ferè methodo quâ superiora Lemmata demonstravimus, Hermannus in Tom. IV. Academiæ Petropolitanæ solvit problema de Ellipsi Conicâ, cujus axis alteruter datus est, angulo positione & magnitudine dato ità inscribendâ ut centrum ejus intrà datum angulum sit etiam positione datum.

346. Datis asymptotis, dantur hyperbolæ centrum seu asymptotorum concursus; 2°. datur positio axium qui asymptotorum angulos deinceps positos bifariam dividunt, 3°. datur eorum axium ratio, sunt enim ficut Sinus dimidiorum illorum angulorum CGA, ACG ideóque datis asymptotis cum puncto vel tangente, hyperbola describi potest (per prop. 4. & 9^m. lib. 2. conic. apoll.). Scilicet per punctum P ducatur PO perpendicularis in axem & PV Asymptoto Parallela & descripto circulo super Diametrum CO in eo secetur chorda OZ=OV, & sumatur CA=CZ & erit A Vertex Hyperbolæ. Nam sit *a* verus Hyperbolæ Vertex, sit C*a* semi axis major & *ag* semi axis minor, erit $Ca^2:ag^2=CO^2-Ca^2:PO^2$ (per nat. Hyp. vid. Theor. 2. de Hyp. p. 122. & Cor. 1. Lem. 3. de Conicis p. 118.) sed (per const.) est $Ca:ag=OV:PO$, sive $Ca^2:ag^2=OV^2:PO^2$ est ergo $OV^2=CO^2-Ca^2$, Rursus (per Constr.) est $OV^2$ sive $OZ^2=CO^2-CZ^2$ ergo $CO^2-Ca^2=CO^2-CZ^2$ & C*a*=CZ=CA, ergo erit A vertex Hyperbolæ.

Si detur Tangens, producatur illa usque ad utramque Asymptoton ubi utrinque terminetur, ejus medium erit punctum contactûs, sive punctum ad Hyperbolam pertinens, cujus ope axis major invenietur ut supra.

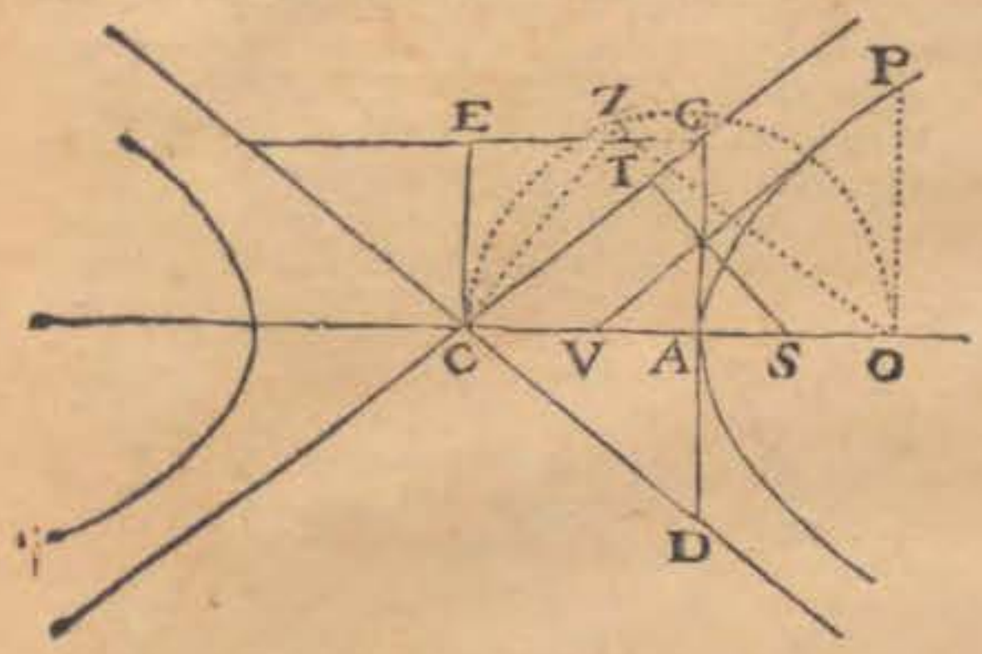



347. Datis asymptotis & umbilico vel alterutro axe, facile est hyperbolam describere. Sunto asymptoti CG, CD concurrentes in C, S umbilicus, CA, CE semiaxes; si ex umbilico S, in asymptotum quæ est tangens, demittatur perpendiculum ST, erit CT, æqualis semiaxi principali CA, (339), & ST æqualis semiaxi minùs principali CE seu GA, ob triangula CAG, CTS, similia & æqualia propter latus CA æquale lateri CT. Quare dato præter asymptotos semiaxe principali CT seu CA, datur umbilicus S, & contrà. Dato præter asymptotos semiaxe minùs principali CE, seu GA, invenitur alter semiaxis CA, seu EG, rectæ CE normalis in E, & asymptoto occurrens in G, & hinc reperitur umbilicus.

348. Asymptotus data, ut notum est, in problematum solutione æquivalet tangenti datæ cum puncto contactûs ad distantiam infinitam posito, atque adeò recta quævis ex puncto dato ad punctum contactûs asymptoti ducta ipsi asymptoto paral-

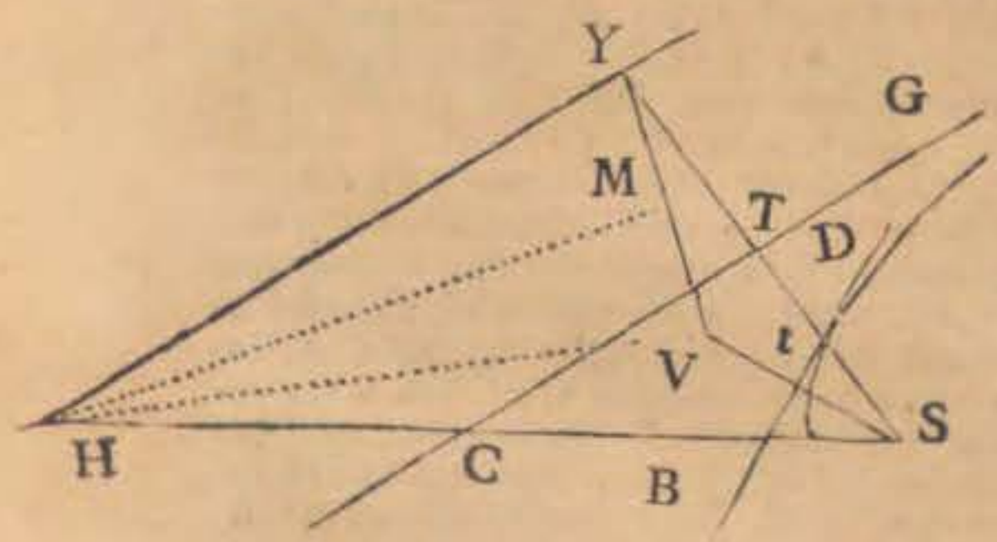
DE MOTU CORPORUM.

lela est & positione data. Hinc facile erit problematum sectionis IV. constructiones ad hyperbolam transferre ubi asymptotus alterutra cum umbilico data est.

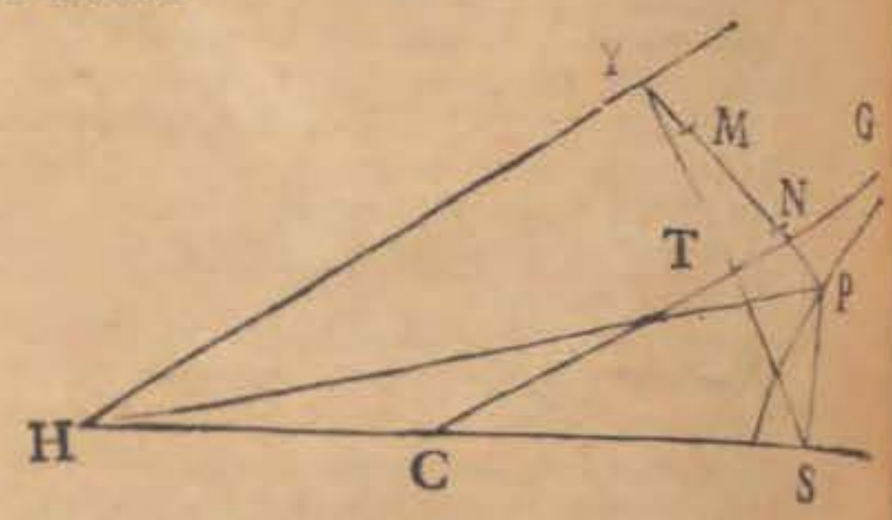



Datis umbilico S, axe principali, & asymptoto CG, invenitur axis positio, demittendo ex umbilico S ad asymptotum perpendicularem ST, & capiendo TC æqualem semiaxi dato, est enim C hyperbolæ centrum, CS axis principalis positio, TS semiaxis minùs principalis (348).

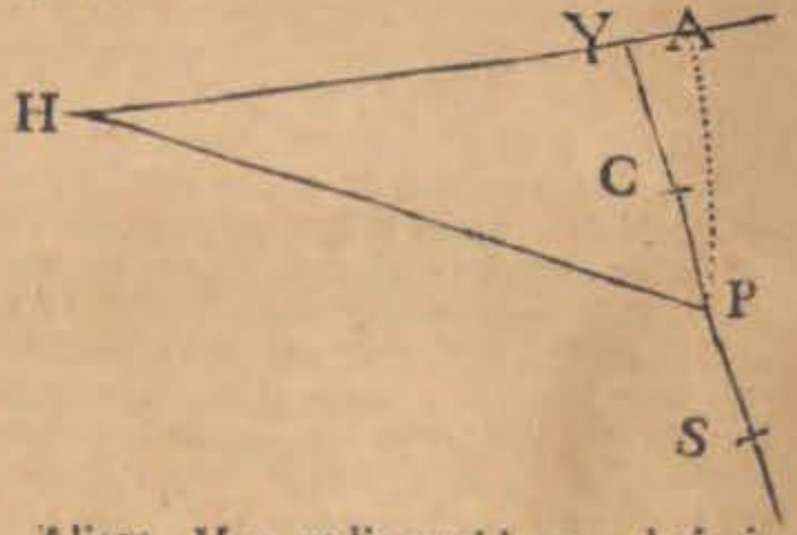
Datis umbilico & asymptoto describitur hyperbola specie data, per constr. Cas. 3. Prop. XIX. vel brevius, observando datam esse TS semiaxem minus principalem, undè ob datam axium rationem, dabitur centrum & axium positio cum alterâ asymptoto, & hyperbola describitur (348).




Datis asymptoto, umbilico & tangente, invenitur umbilicus alter ac proindè axis transversi positio & centrum. Sit enim asymptotus data CG, umbilicus S, tangens BD, ex umbilico S, ad asymptotum & tangentem, demittantur perpendicula ST, St, & producantur ad Y & V ut sint TY = ST, tV = St; per punctum Y, agatur YH, asymptoto parallela, & juncta YV, bisecetur in M, perpendiculo MH; perpendiculi hujus & rectæ YH communis intersectio H, est umbilicus alter, recta enim HY, asymptoto parallela transit per punctum contactûs asymptoti, adeóque ob TY = TS, transit etiam per umbilicum H; Porrò rectæ YH, VH, per umbilicum H, ductæ sunt æquales axi principali hyperbolæ per Lem. XV., & ideò æquales inter se; quarè perpendiculum HM, ex umbilico H in rectam YV demissum eam in M bisecat.



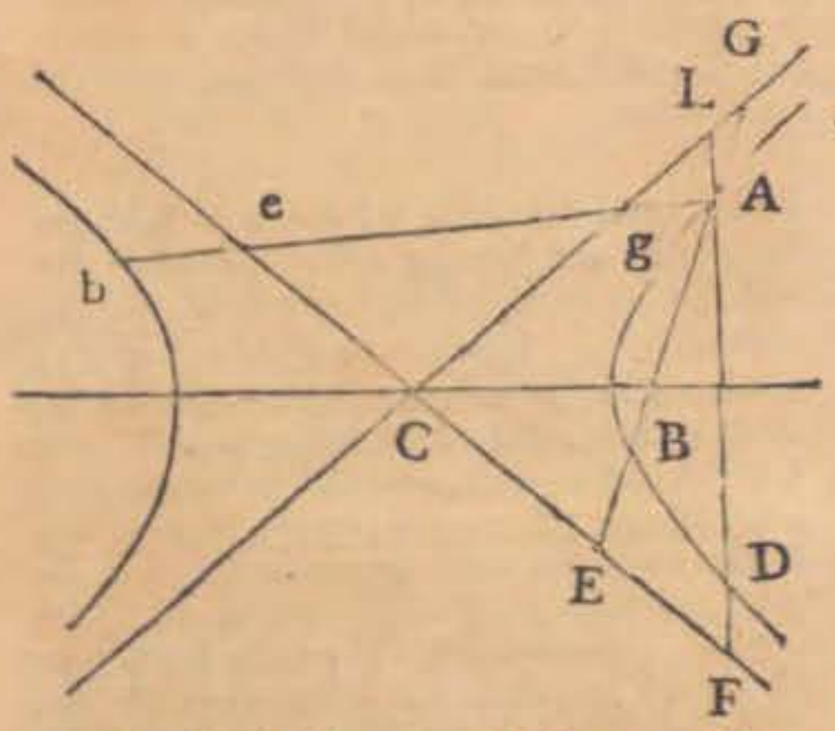

Datis asymptoto CG, puncto P, & umbilico S, invenitur umbilicus alter H, demisso ad asymptotum perpendiculo ST, & sumptâ TY = ST, actâque YH asymptoto parallelâ jungatur YP, & in eâ capiatur MN = SP, & ità locetur ut sit YM = PN, hyperbola umbilicis Y, P, & axe principali MN, descripta, rectam YH secabit in altero umbilico H quæsito. Nam PS seu MN est rectarum HY, HP differentia, quæ semper æqualis est axi principali HY.




Aliter, Huc redit problema, datis in triangulo HYP latere PY, angulo Y, & laterum HY, HP differentia PS, invenire

venire latera. Ex puncto P, in HY, demittatur perpendicularis P A, capiatur laterum H P, H Y, differentia P C = P S, & sumatur Y H ad C Y, ut est Y S ad S C ∓ 2 Y A, scribendo − 2 Y A, si angulus H Y P est obtusus, & + 2 Y A, si acutus, & delendo ∓ Y A, si fuerit rectus, erit H punctum quæsitum, facilis est demonstratio ob angulum rectum A.

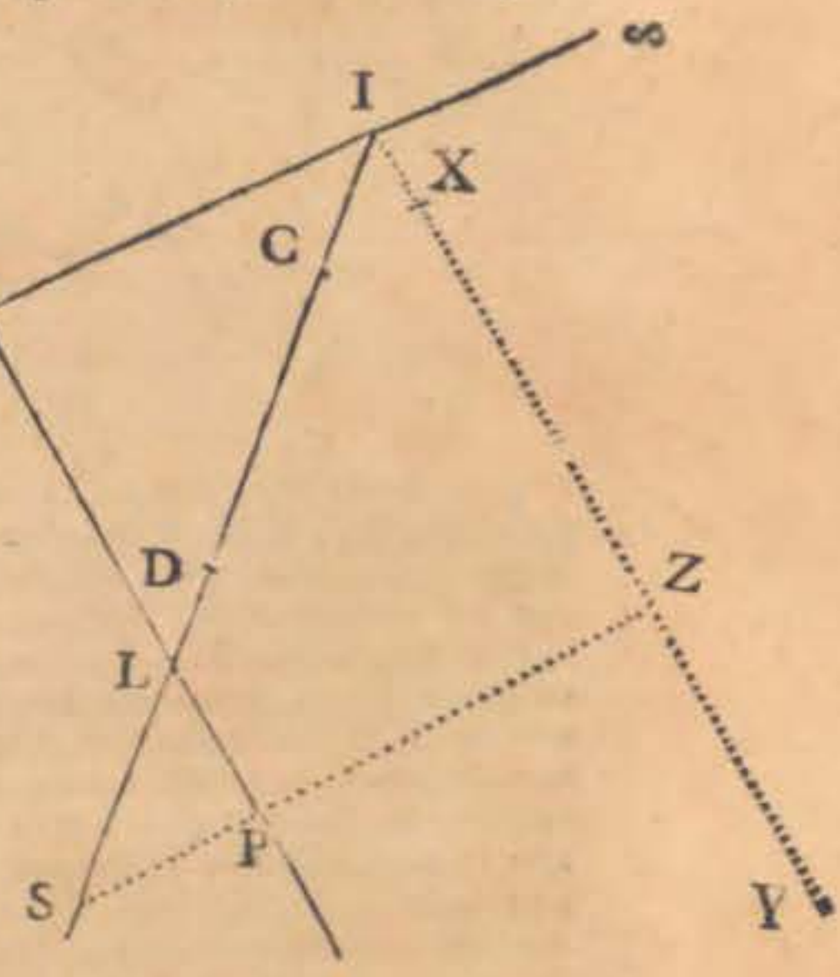
Sectionis V^æ. problemata, ubi asymptotus alterutra data est ad sequentia revocantur.




349. Datâ asymptoto C G, cum tribus punctis A, D, B, vel b, hyperbolam describere. Per punctum quodvis A, datum & alia duo D, B, vel b, agantur linæ infinitæ A D, A B vel A b, asymptoto datæ occurrentes in L & G, vel g; tum capiantur F D = A L, B E = G A, vel b e = g A, juncta F E, aut F e, erit asymptotus altera (per prop. 8^va. lib. 2. Conic. Apoll. per Lem. I. de Conic. p. 115.) quare (346) hyperbola describitur, cum facilè inveniri possint quinque sectionis puncta, per angulos mobiles organicè potest describi.

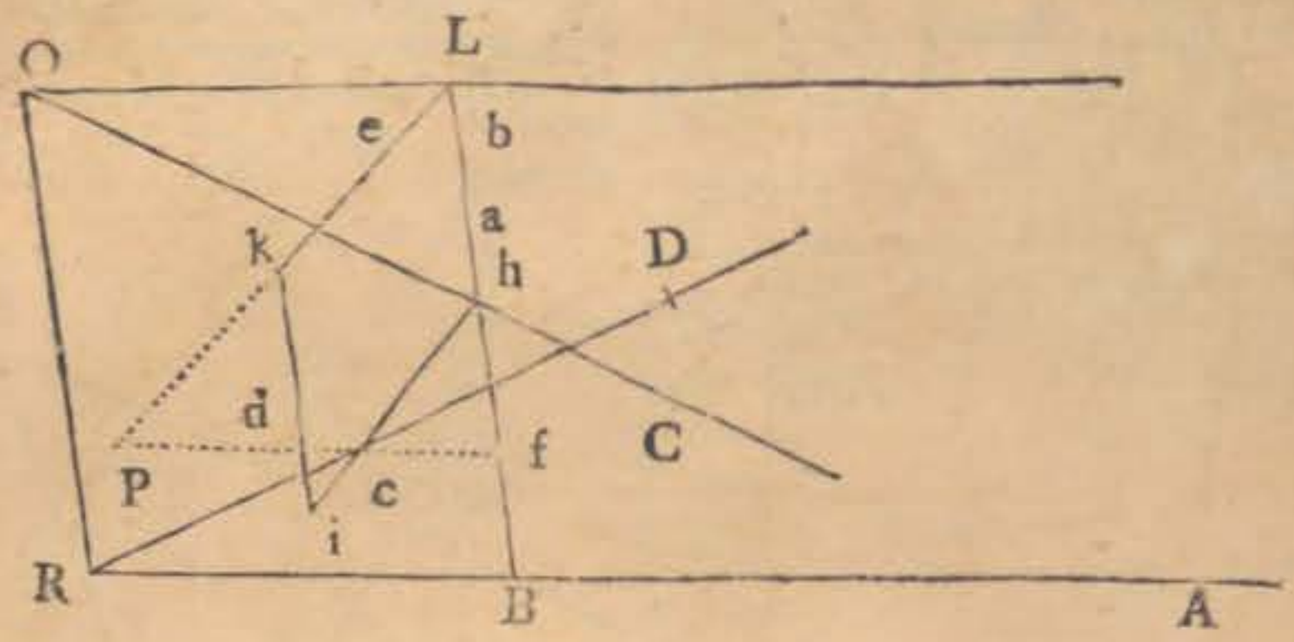
350. Datis asymptoto G I, tangente G L, punctisque duobus C, D, Hyperbolam describere, constructio & demonstratio eædem ferè sunt ac problematis (XVI.).

Per puncta duo data C, D, age rectam infinitam C D, asymptoto & tangenti occurrentem in punctis I, L, actam ita secà in S, ut sit I S ad I S, ut est media proportionalis inter C I & I D ad mediam proportionalem inter C L & L D; deinde age S P asymptoto G I parallelam, hæc secabit tangentem G L, in puncto contactûs P; nam si P supponatur esse punctum contactûs, & per punctum I agatur I Y tangenti G L parallela quæ occurrat hyperbolæ in X & Y, & in eâ sumatur I Z, media proportionalis inter I X & I Y erit (per prop. 3. & 10. lib. 2. conic. Apoll.) I X × I Y sive I Z² = P G², sit enim ∞ punctum contactus Hyperbolæ & Asymptoti erit ∞ I² : ∞ G² = I X × I Y : P G² (par Cor. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.) sed cum ∞ I & ∞ G sint lineæ infinitæ quantitate finitâ G I differentes, pro æqualibus habentur, ergo etiam I X × I Y sive I Z² = P G², atque adeò I Z = P G, & consequenter juncta P Z, parallela est asymptoto G I; recta Z P producta secet rectam I L, in puncto aliquo S, & ob similia triangula S I Z, S L P, erit I Z² : L P² = I S² : L S²; verùm (vid. Not. ad probl. XVI. aut Lem. III. de Conic. p. 117.) X I × I Y (I Z²) : L P² = C I × I D : C L × L D; ergò I S² : L S² = C I × I D : C L × L D, quare si recta I L ita secetur in S, ut sit I S² : L S² = C I × I D : C L × L D, & agatur S P, asymptoto G I parallela, erit P punctum contactûs. Datis autem tribus punctis C, P, D, Hyperbola describitur (349).




351.

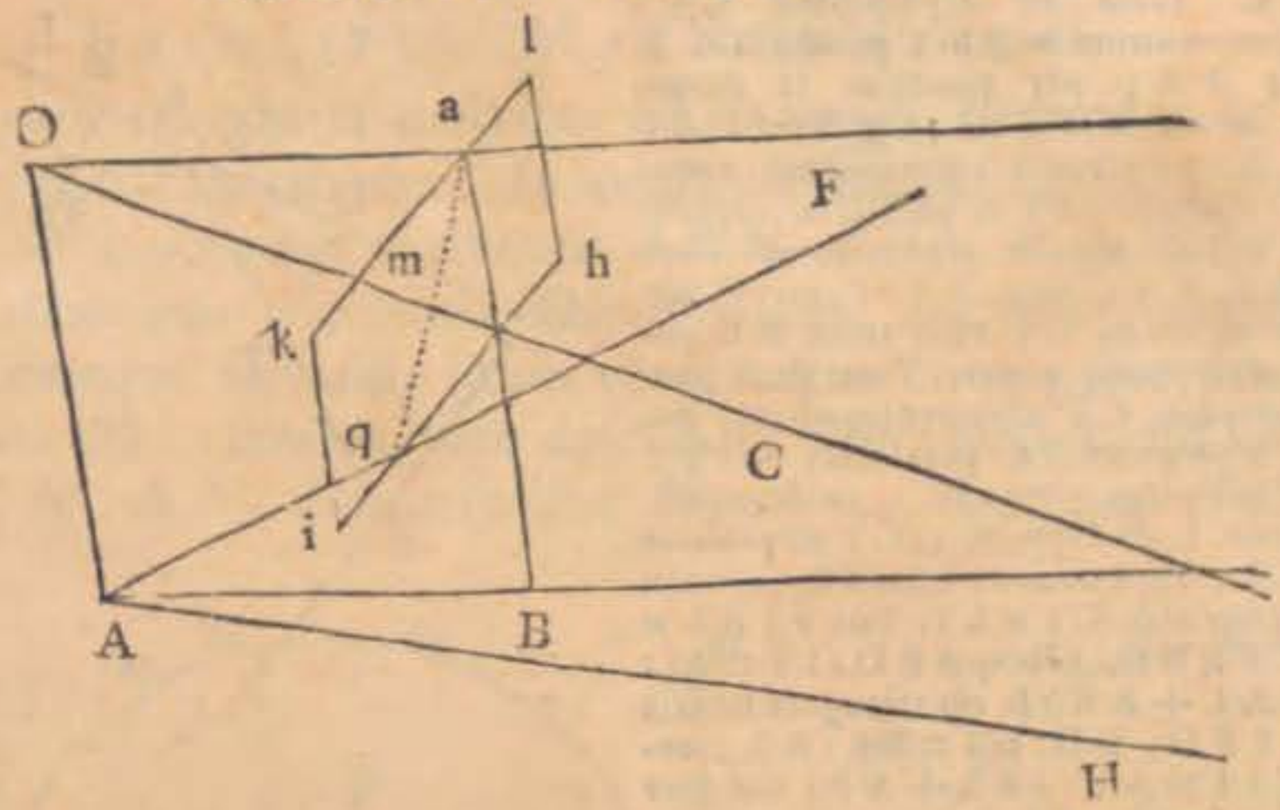
DE MOTU CORPORUM.




351. Datis asymptoto OL, duabus tangentibus OC, RD, & puncto A, Hyperbolam describere; (solutio facilè deducitur ex problemate XVII).

Per concursum O asymptoti OL cum tangente OC, & concursum R tangentis alterius RD cum rectâ RA quæ per punctum datum A & punctum contactûs asymptoti transit, seu quæ est asymptoto parallela; age rectam infinitam OR, eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, OL verò pro radio ordinato novo usurpatâ, sumptisque ordinatis novis asymptoto parallelis (ad majorem constructionis facilitatem), transmutetur figura per Lem. XXII. in figuram novam, nimirum linea BA in lineam Ba, (330), punctum A in a, linea RD in ik ipsi BL parallelam (329) OC in ih, OL in kL ipsi ih parallelam (327) & punctum contactûs asymptoti infinitè distans transferetur in L; Nam punctum contactûs asymptoti est communis intersectio Linearum RA, OL infinitarum, & ideò transfertur in L communem intersectionem rectarum kL, BL parallelogrammi hikL; Tria ergo latera hi, ik, kL tangunt novam sectionem conicam quæ transire debet per punctum a, dicantur c & d puncta contactuum linearum hi, ik, sic invenietur punctum c, sumatur Radix quadrata facti $hL \times ha$ & addatur lineæ ik, illa summa erit ad duplum lineæ hi ut ea ipsa Radix quadrata ad portionem hc. Hoc est $ik + \sqrt{hL \times ha} : 2hi = \sqrt{hL \times ha} : hc$. Nam (per Cor. 2. & 3. Lem. III. de Conic. p. 118.) est $dk^2 : kL^2 = di^2 : ic^2 = hL \times ha : hc^2$ inde est $dk : kL = di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$, & sumendo summam Antec. & Conseq. est $dK + di + \sqrt{hL \times ha} : KL + ic + hc$ sive $ik + \sqrt{hL \times ha} : kL + hi\ (2hi) = \sqrt{hL \times ha} : hc$: Invento autem puncto c invenitur punctum d, si quidem est $di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$: Construitur autem hæc solutio capiendo hf, æqualem mediæ proportionali inter Lh & ah, & productâ Lk ad P, ut sit $kP = kL$, agendo per f & P rectam fP, illa fP latera hi, ik secabit in punctis quæsitis c, d; nam ob parallelas ch, PL & ik, fL est $Lf\ (ik + \sqrt{ah \times hL}) : LP\ (2kL \text{ sive } 2ih) = hf\ (\sqrt{ah \times hL}) : hc$, & $hc : hf = ic : id$; per inversas operationes Lem. XXII. (331), transferantur puncta c, d, in figuram primam, nimirum in C, D, & data erunt tria hyperbolæ puncta D, C, A, cum asymptoto OL, quarè describetur hyperbola (349).

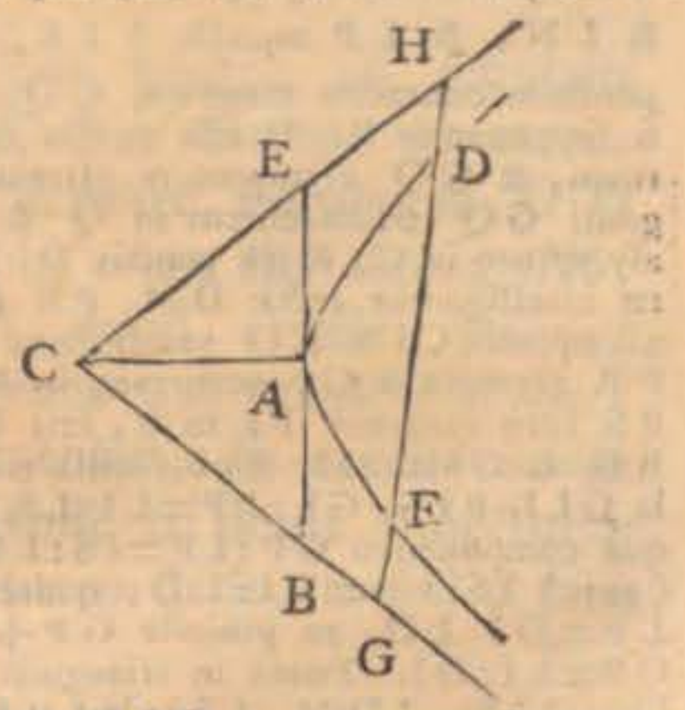
352. Datâ




352. Datâ aſymptoto O a, & tribus tangentibus O C, A F, A H hyperbolam deſcribere, ſolvitur ut problema XVIII. Ab interſectione communi O aſymptoti O a, & tangentis O C, ad interſectionem communem A aliarum tangentium A F, A H agatur recta infinita O A, & eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, O a verò aſymptoti parte pro radio ordinato novo ſumptâ, tranſmutetur figura in figuram novam, nimirùm tangens O C & aſymptotus in parallelas i h, k l punctum contactûs aſymptoti in a, & duæ tangentes A F, A H in parallelas i k, h l, & parallelogrammi h l k i, latera ſingula novam ſectionem conicam tangunt, & quidem latus k l, in a, per a, & parallelogrammi centrum m, agatur a q, tangenti, i h, occurrens in q, & erit q, punctum alterum quo i h, novam ſectionem tangit. Per Lemmatis XXII. operationem inverſam transferatur hoc punctum in figuram primam, nempè in C, & erit C, punctum contactûs tangentis O C, quarè datis aſymptoto O a, duabus tangentibus A F, A H, & puncto C, deſcribetur hyperbola. (351).

353. Datis aſymptoto, axium ratione, duobus punctis vel puncto & tangente aut binis tangentibus, hyperbolam deſcribere. Sunto hyperbolæ aſymptoti C E, C G, centrum C, vertex principalis A, ſemiaxis tranſverſus C A, ſemiaxis conjugatus A E ad C A, normalis; in triangulo rectangulo C A E datâ ratione crurum C A, A E, datur angulus E C A, eſt enim C A, ad E A, ut ſinus totus ad tangentem anguli E C A, quarè datâ ſpecie hyperbolæ ſeu axium ratione datur aſymptotorum angulus E C B, & viceverſâ dato aſymptotorum angulo datur ſpecie hyperbola; his poſitis problema facilè ſolvitur.

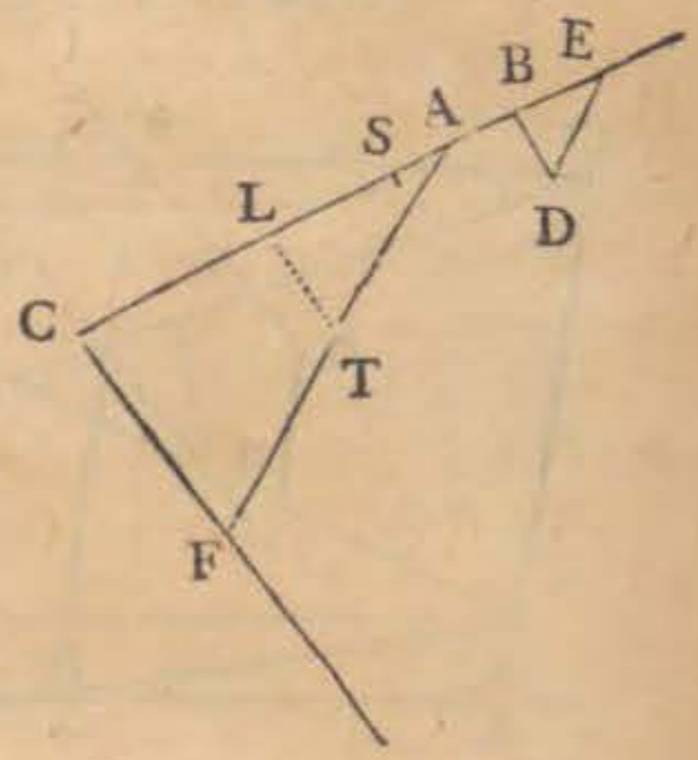
Caſ. 1. Data ſit aſymptotus C H, cum axium ratione ſeu aſymptotorum angulo & punctis duobus D, F, per puncta illa age rectam infinitam D F, aſymptoto datæ occurrentem in H, fac F G = H D, & per punctum G, age rectam infinitam G C, quæ cum aſymptoto C H, efficiat



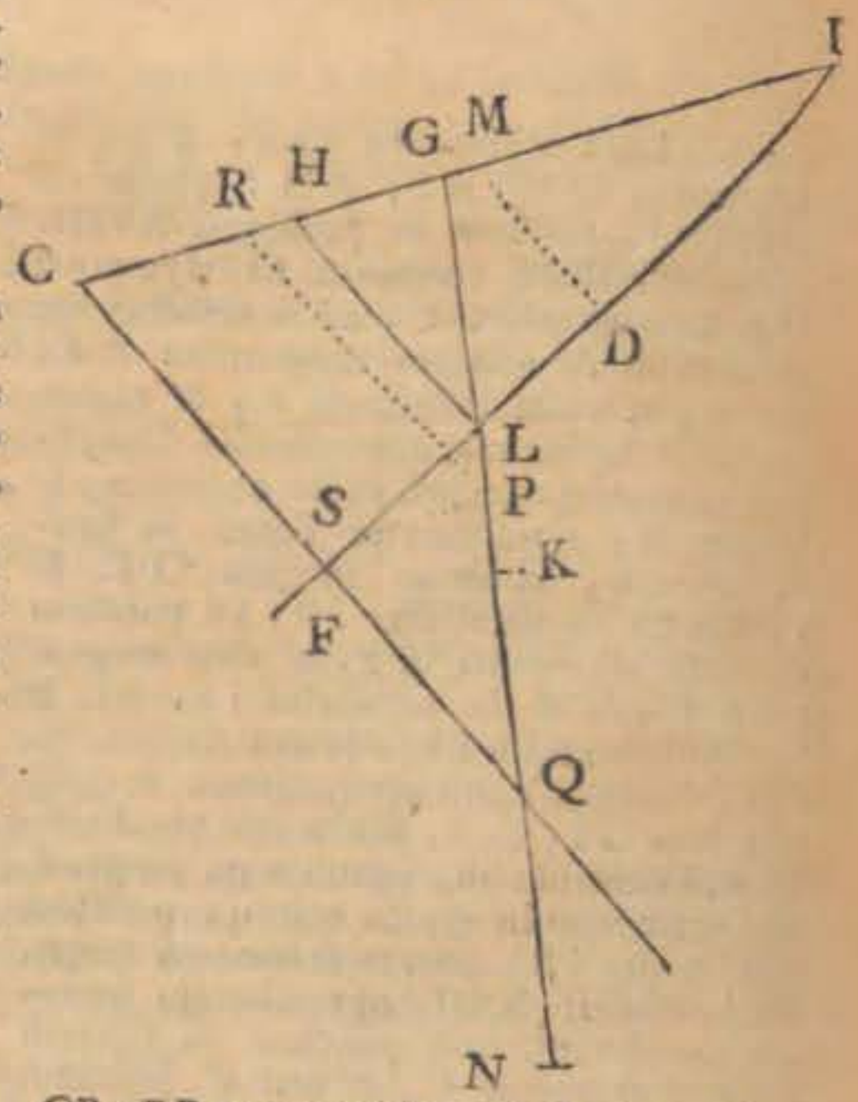

angulum H C G, æqualem angulo aſymptotorum dato, erit C G, aſymptotus altera (per prop. 8am. Lib. 2. conic. Apoll. ſive Lemma I. de Conic.) quare deſcribetur hyperbola (346).

DE MOTU CORPORUM.

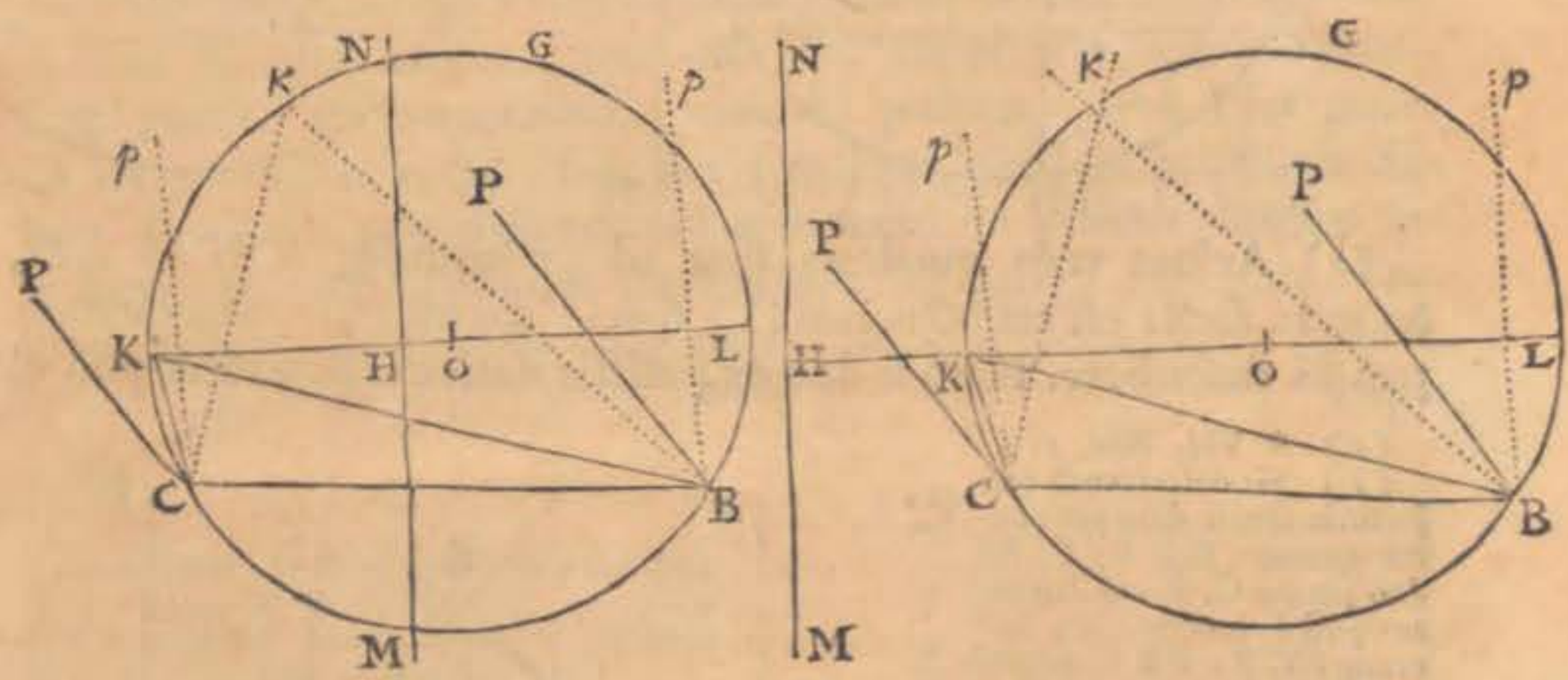
Caſ. 2. Data ſit aſymptotus CE, cum aſymptotorum angulo, puncto D, & tangente FA; per punctum D datum agantur recta BD, ad angulum DBE datum, ſeu æqualem aſymptotorum angulo, & DE tangenti FA parallela, capiantur BS æqualis mediæ proportionali inter BE & AE, & AC æqualis 2SE, erit C hyperbolæ centrum, CF verò rectæ BD parallela aſymptotus altera. Nam ſit T punctum contactûs, CF aſymptotus altera, ductâ TL aſymptoto FC parallelâ, erit FT = TA (per prop. 31^m. Lib. 2. conic. apoll. ſup. Theor. 1. de Hyp. p. 122.) ac proindè LA = CL: Eſt autem ex naturâ hyperbolæ inter aſymptotos CL × LT, hoc eſt AL × LT = CB × BD, adeóque BD : LT = AL : CB. (2AL + AB) & ob triangula ſimilia ALT, EBD, BD : LT = BE : AL; ergò BE : AL = AL : 2AL + AB, ſed (per conſtr.) BE : BS = BS : BE + AB, & compoſitè BE : BS = SE : SE + AB, & BE : SE = SE : 2SE + AB, eſt igitur AL = SE, & 2AL ſeu AC = 2SE.




Caſ. 3. Data ſit aſymptotus GI, cum aſymptotorum angulo & duabus tangentibus FI, GQ ſe mutuò interſecantibus in L & aſymptotum in G & I; ex puncto L agatur ad aſymptotum GI recta LH, in angulo aſymptotorum dato LHG, producatur GL ad N, ut ſit LN ad HI, ut eſt GL ad GH, capianturque GK æqualis mediæ proportionali inter GL, & LN, & LP æqualis $\frac{1}{2}$ LK, erit P punctum contactûs tangentis GQ. Nam ſi ſupponamus P, D eſſe puncta contactuum, & CQ aſymptotum alteram tangenti GQ occurrentem in Q & alteri aſymptoto in C, & ex punctis D, P ductæ intelligantur rectæ DM, PR & PS, aſymptotis CI & CQ parallelæ ac DM, PR aſymptoto CI occurrant in M, R, PS verò tangenti FI in S, erit CR = RG, & CM = MI; & ob ſimilia triangula GLI, PLS, GL : LP = LI : LS, adeóque componendo GP : LP = IS : LS, ſed (323.) IS : LS = DI : LD; quare GP : LP = DI : LD, ac proindè GP + LP : GP = LI : DI. Porrò in triangulis ſimilibus ILH, IDM, LI² : HI × LH = DI² : DM × MI, & in triangulis ſimilibus GLH, GRP, GH × LH : GL² = GR × RP : GP² = DM × MI : GP², ob MI × DM = CM × DM = CR × RP = GR × RP ex naturâ hyperbolæ inter aſymptotos, quare per compoſitionem rationum LI² × GH × LH : GL² × HI × LH = DI² : GP² = LI² × GH : GL² × HI. Verùm (per conſtruct.) GH : HI = GL² : GL × LN, & GK² = GL × LN, ac proindè GH : HI = GL² : GK², undè DI² : GP² = LI² × GL² : GL² × GK² = LI² : GK², & DI : GP = LI : GK, atque adeò LI : DI = GK : GP; ſed ſuprà invenimus GP + LP : GP = LI : DI, ergò GK : GP = GP + LP : GP, atque ità



Poſtquam trajectoria deſcripta eſt, invenire licet axes & umbilicos ejus hác methodo. In conſtructione & figurâ lemmatis XXI. fac ut angulorum mobilium $PBN$, $PCN$ crura $BP$, $CP$, quorum concurſu trajectoria deſcribebatur, ſint ſibi invicem parallela, eumque ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos $B$, $C$ in figurâ illâ. Interea vero deſcribant altera angulorum illorum crura $CN$, $BN$, concurſu ſuo $K$ vel $k$, circulum $BGKC$.



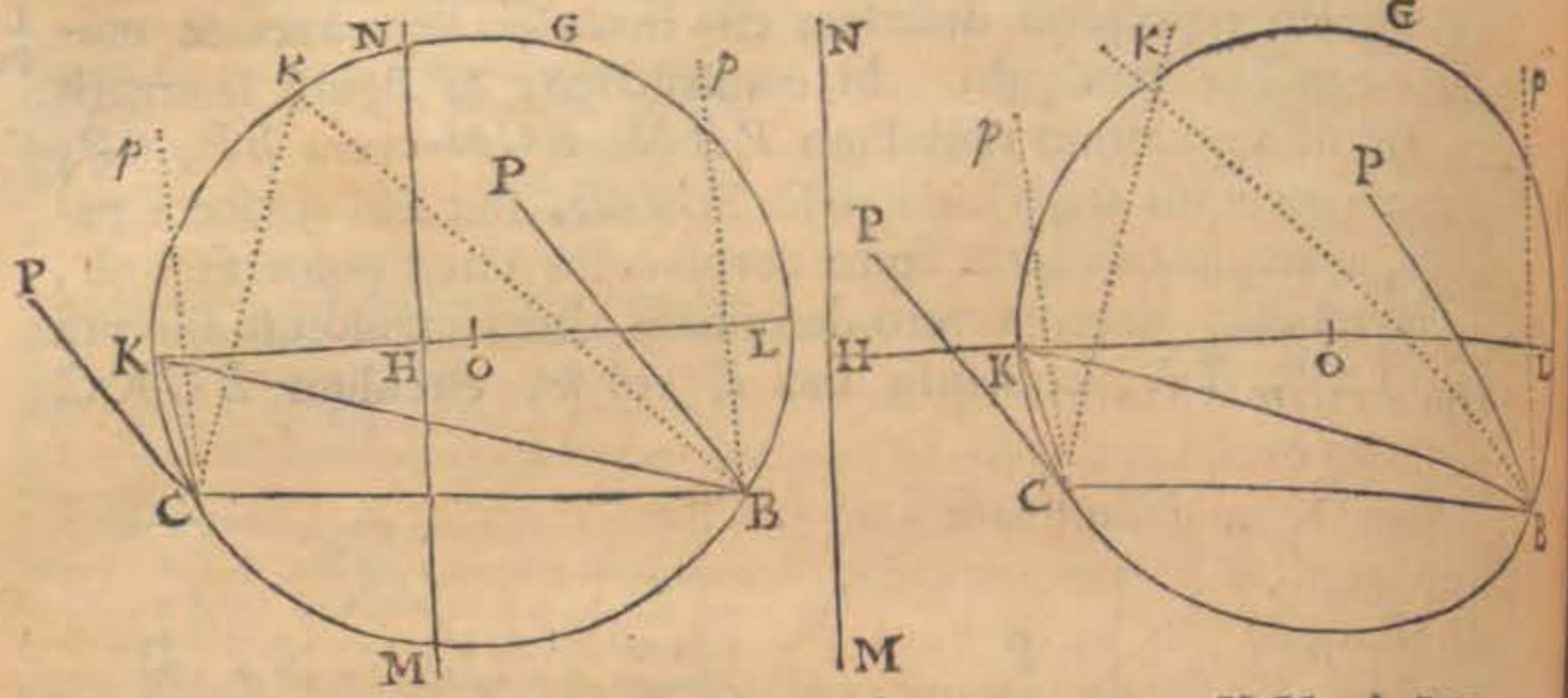

Sit circuli hujus centrum $O$. Ab hoc centro ad regulam $MN$, ad quam altera illa crura $CN$, $BN$ interea concurrebant, dum trajectoria deſcribebatur, demitte normalem $OH$ circulo occurrentem in $K$ & $L$. Et ubi crura illa altera $CK$, $BK$ concurrunt ad punctum illud $K$ quod regulæ propius eſt, crura prima $CP$, $BP$ parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, ſi crura eadem concurrunt ad punctum remotius $L$. Unde ſi detur trajectoriæ centrum, dabuntur axes. (d) Hiſce autem datis, umbilici ſunt in promptu.

Axium

ità $GK = GP + LP$, ſeu $GL + LK = GL + 2LP$, ac proindè $LK = 2LP$, & $LP = \frac{1}{2}LK$; invento autem puncto contactûs P, ſi capiatur $PQ = PG$, & per punctum Q, agatur QC, ipſi LH parallela, erit QC altera aſymptotus, & hyperbola deſcribetur (346).

(d) * Vid. Not. 314.

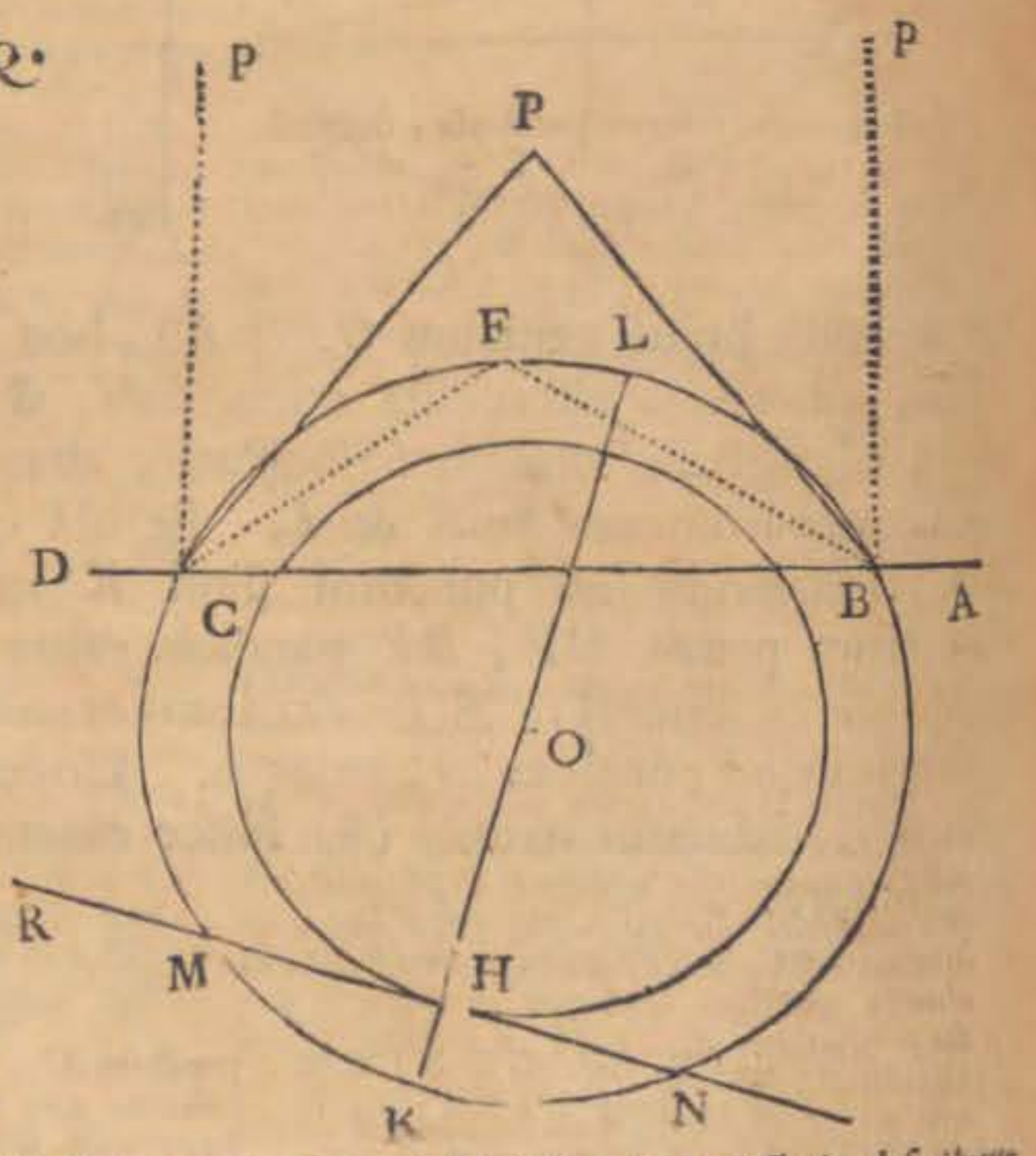
DE MOTU CORPORUM.




(e) Axium vero quadrata ſunt ad invicem ut $KH$ ad $LH$, & inde facile eſt trajectoriam (f) ſpecie datam per data quatuor puncta deſcribere. Nam ſi duo ex punctis datis conſtituantur poli $C$,

(e) * Vid. Not. 315.

(f) Sit deſcribenda trajectoria ſpecie data per puncta quatuor C, B, P, Q, duo puncta C, B conſtituantur poli & junctis CP, BP erunt PCB, PBC anguli mobiles, fac ut angulorum illorum crura BP, CP ſint ſibi invicem parallela, nempè in poſitione quávis Bp, Cp, & crura alia BC, CB ſe mutuò interſecent in F; & centro O deſcribe circulum per tria puncta C, F, B tranſeuntem cujuſque proindè ſegmentum CFB capit angulum CFB, centro O radio OH deſcribatur circulus, (punctum verò H, ita determinetur in Diametro KL ut ſit KH ad LH ut ſunt ad invicem quadrata axium trajectoriæ). Tum crurum BP, CP concurſus adducatur ad punctum Q & intereà notetur punctum R ubi concurrunt alia crura CA, BD, & ex puncto R agatur recta RMN tangens circulum radio OH deſcriptum, *erit NM regula cujus ope trajectoria deſcribetur Si*




(314).

*B*, tertium dabit angulos mobiles, *PCK*, *PBK*; his autem datis describi potest circulus *BGKC*. Tum ob datam specie trajectoriam, dabitur ratio *OH* ad *OK*, ideoque ipsa *OH*. Centro *O* & intervallo *OH* describe alium circulum, & recta, quæ tangit hunc circulum, & transit per concursum crurum *CK*, *BK*, ubi crura prima *CP*, *BP* concurrunt ad quartum datum punctum, erit regula illa *MN* cujus ope trajectoria describetur. (g) Unde etiam vicissim trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in datâ quâvis sectione conicâ inscribi potest.

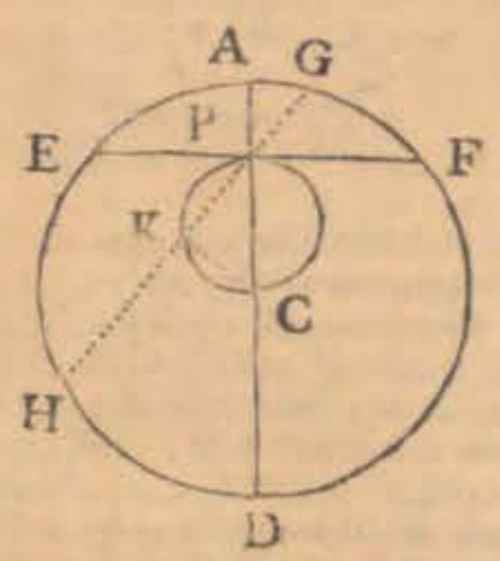
Sunt & alia lemmata quorum ope trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus, describi possunt. (h) Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam coni sectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam coni sectionem ejusdem speciei cum priore, atque

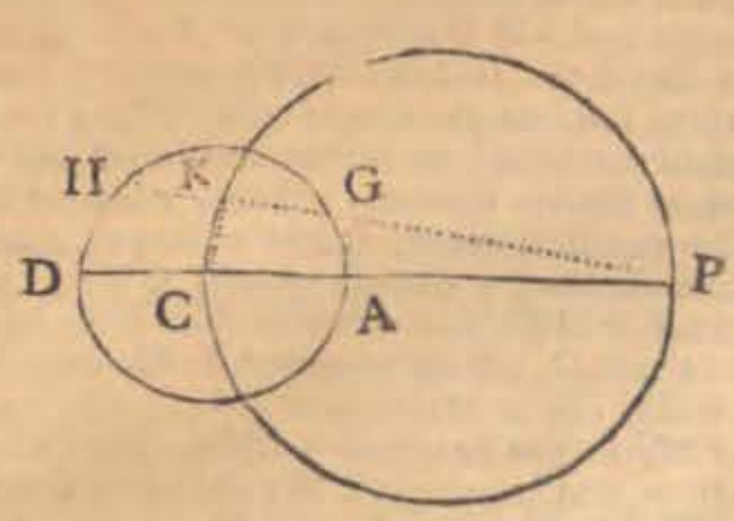
Si describenda foret parabola, ducenda esset ex puncto R recta R N, circulum C K B tangens; nam in parabolâ punctum H, coincidit cum puncto K (313).

Quoniam autem ex puncto R, duæ tangentes ut R N duci possunt, patet duas trajectorias specie datas per data quatuor puncta posse describi.

(g) * Nam si describatur trapezium quodvis specie datum, & huic circumscribatur sectio conica datæ similis Methodo in notâ præcedente expositâ, deindè in sectione conicâ datâ quatuor agantur lineæ in eâ similiter positæ ac quatuor trapezii latera in sectione trapezio circumscriptâ, habebitur trapezium specie datum in datâ sectione conicâ inscriptum.

(h) * Hoc Lemma facilè demonstratur in circulo. Intra vel extra circulum A F D E datum sit punctum P per quod & per centrum circuli C agatur P D; tum diametro P C describatur circulus P K C P, chorda quælibet G H per punctum P ducta, bifariam divisa est in puncto K ubi circulo P K C occurrit; Nam junctâ K C, erit angulus C K P rectus ac proindè chorda H G bisecta in K.

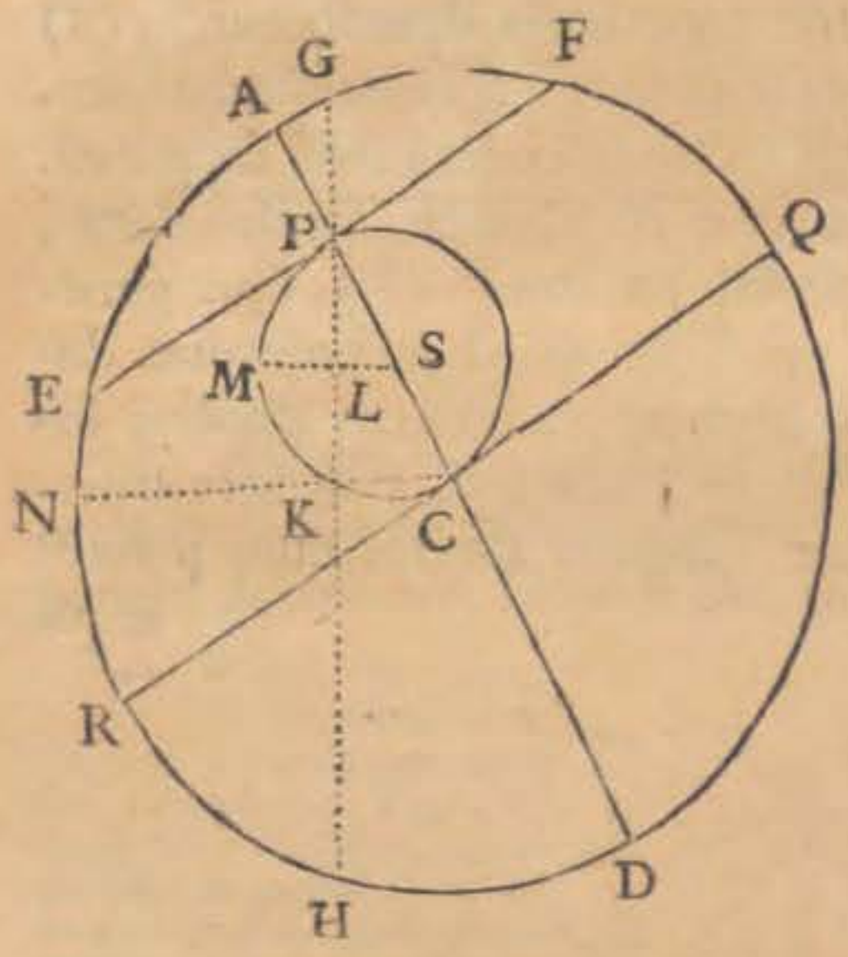


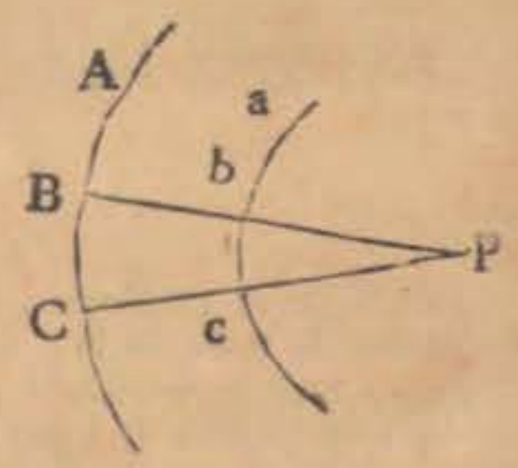
DE MOTU CORPORUM.

atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

LEM.



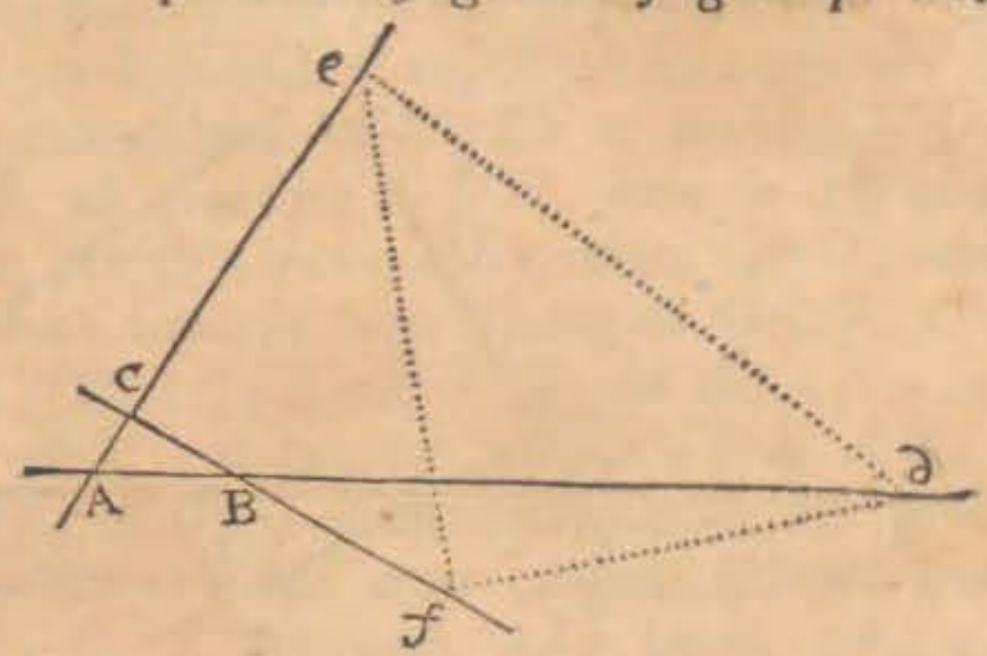

(h) * Idem Lemma pari facilitate in cæteris sectionibus conicis demonstratur. Datum sit punctum P, per hoc & per centrum C sectionis conicæ AFDE agatur diameter AD, tùm diametro PC, quæ similis sit diametro AD, describatur alia sectio conica PMKC, ejusdem speciei cum datâ, & diameter conjugata ipsius PC, similis erit & parallela diametro RQ, conjugatæ ipsius AD, & quia in duabus figuris similibus, si duo latera homologa parallela sint. cætera omnia latera similia sunt etiam parallela, ambarum sectionum conicarum simules diametri omnes, adeóque & axes paralleli erunt; agatur nunc per punctum datum P, chorda quævis GPH, sectioni PMC occurrens in K, dico esse KH=KG. Nam jungatur CK, & producatur donec trajectoriæ AHD occurrat in N, & per centrum S trajectoriæ PKC, agatur SM parallela CK, chordæ PK occurrens in L & sectioni in M, erunt SM, NC diametri similes, & earum ordinatæ parallelæ, sed quia in triangulis similibus PSL, PCK est PS=SC erit quoque PL=LK, ac proinde PLK erit ordinata ad diametrum SM, adeóque GKH erit ordinata ad diametrum NC; quare GK=KH *ergo punctum bisectionis K tanget curvam priori similem & axes habentem prioris axibus parallelos.* Eadem est demonstratio, si punctum P extrà sectionem sumatur.



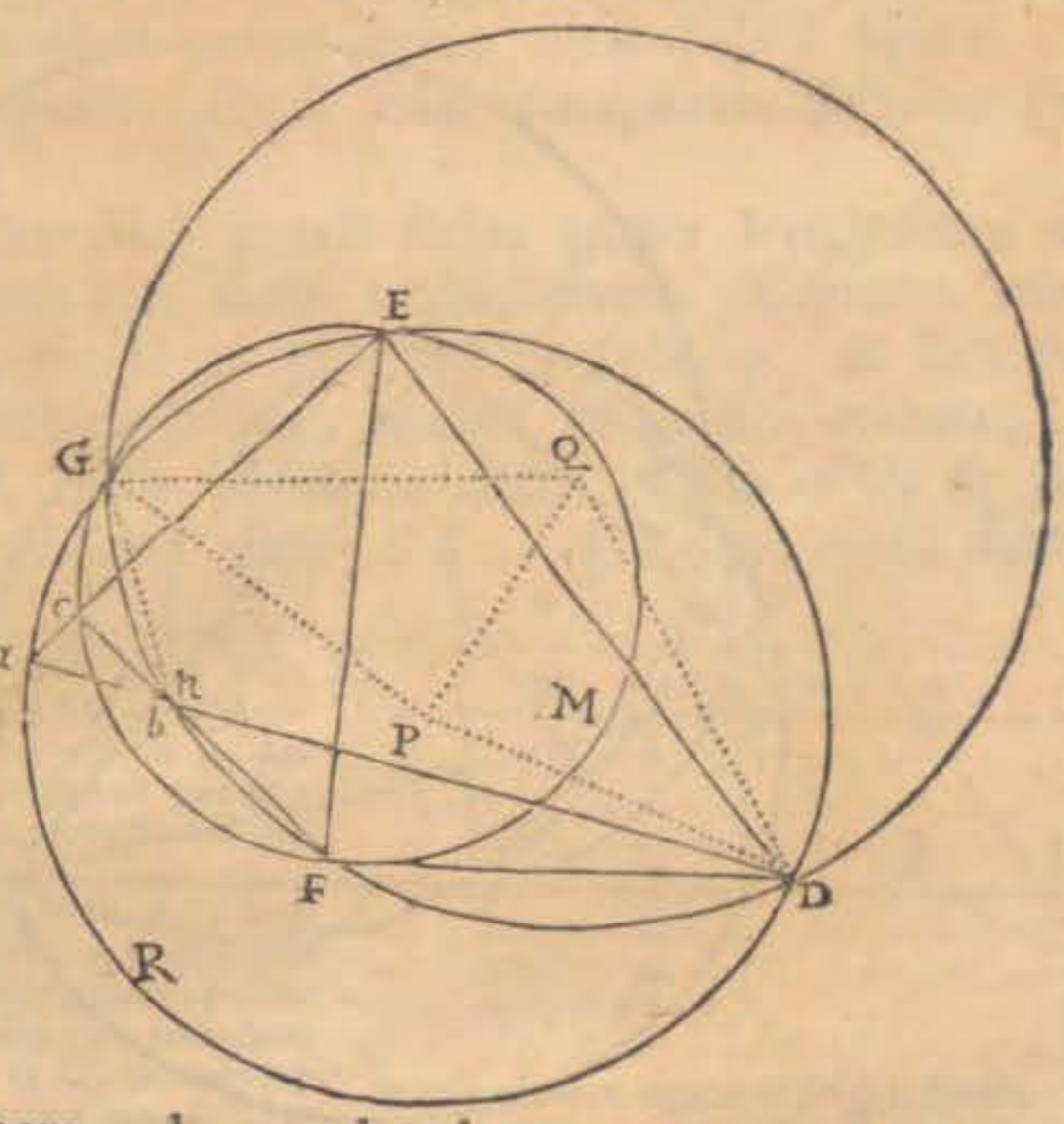

354. Adjungemus aliud Lemma maximè universale. Si ex puncto quovis P dato ducatur recta PB, curvæ cuilibet ABC occurrens in B, & recta illa PB ità dividatur in b, ut sit semper Pb ad PB in ratione datâ, punctum b, tanget curvam abc ejusdem speciei & ordinis cum curvâ ABC, atque lineas habentem similibus curvæ ABC lineis parallelas. Nam si fuerit ABC polygonum rectilineum cujus latus unum BC, cum sit (per hyp.) Pb : PB = Pc : PC, similia erunt triangula PBC, Pbc, & latera BC, bc, parallela & in datâ ratione PB, ad Pb, ac proindè totum polygonum ABC simile polygono abc, & eorum latera homologa parallela erunt. Laterum polygoni ABC numerus augeatur in infinitum & ipsorum longitudo in infinitum minuatur & duo polygona ABC, abc mutabuntur in curvas similes in quibus latera homologa sunt parallela.

## LEMMA XXVI.

*Trianguli ſpecie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem poſitione datas, quæ non ſunt omnes parallelæ, ſingulos ad ſingulas ponere.* LIBER PRIMUS.

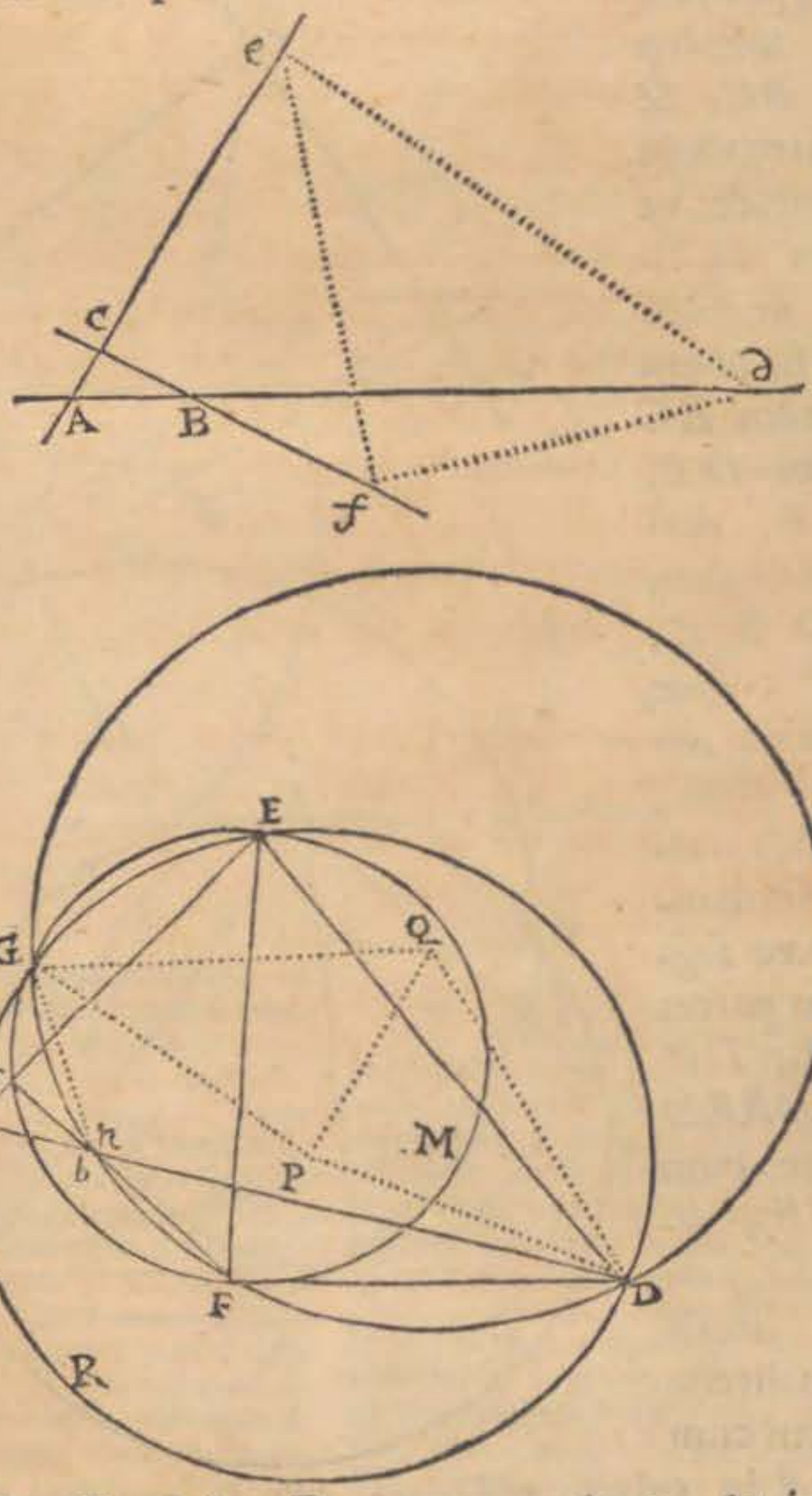



Dantur poſitione tres rectæ infinitæ *AB*, *AC*, *BC*, & oportet triangulum *DEF* ita locare, ut angulus ejus *D* lineam *AB*, angulus *E* lineam *AC*, & angulus *F* lineam *BC* tangat. Super *DE*, *DF* & *EF*, deſcribe tria circulorum ſegmenta *DRE*, *DGF*, *EMF*, quæ capiant angulos angulis *BAC*, *ABC*, *ACB* æquales reſpectivè. Deſcribantur autem hæc ſegmenta ad eas partes linearum *DE*, *DF*, *EF*, ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BACB*, literæ *DGFD* eodem cum literis *ABCA*, & literæ *EMFE* eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant; deinde compleantur hæc ſegmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores ſe mutuo in *G*, ſintque centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut eſt *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* deſcribe circulum, qui ſecet circulum primum *DGE* in *a*. Jungatur tum *aD* ſecans circulum ſecundum *DFG* in *b*, tum *aE*



DE MOTU CORPORUM

secans circulum tertium *E M F* in *c*. Et jam licet figuram *A B C d e f* constituere similem & æqualem figuræ *a b c D E F*. Quo facto perficitur problema.

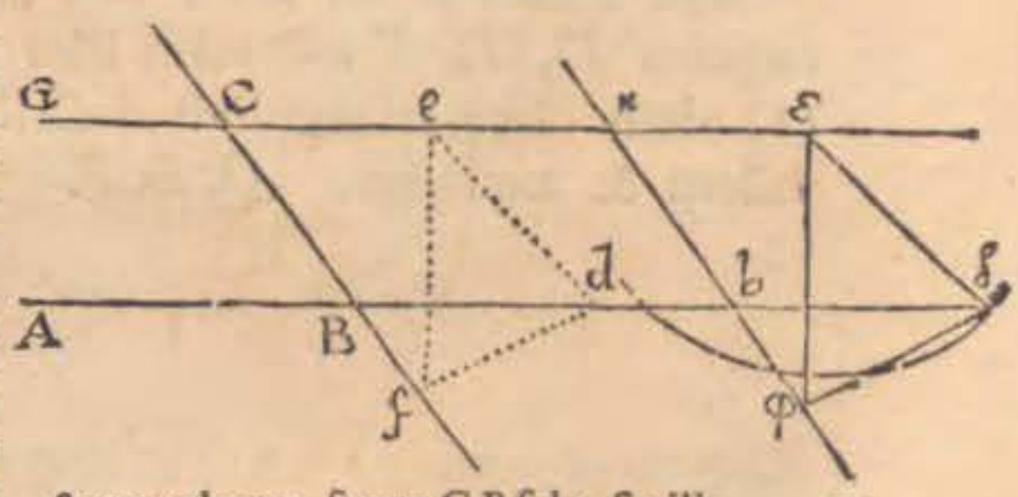



Agatur enim *F c* ipsi *a D* occurrens in *n*, & jungantur *a G b G*, *Q G*, *Q D*, *P D*. Ex constructione est angulus *E a D* æqualis angulo *C A B*, & (i) angulus *a c F* æqualis angulo *A C B*,

(i) * *Angulus a c F æqualis angulo ACB*, nam angulus F c E est anguli a c F atque etiam anguli in segmento E M F complementum ad duos rectos, quare angulus a c F, est æqualis angulo quem capit segmentum E M F, hic autem angulus æqualis est angulo A C B (per constr.). * An-

ideoque triangulum *anc* triangulo *ABC* æquiangulum. Ergo angulus *anc* ſeu *FnD* angulo *ABC*, ideoque angulo *FbD* æqualis eſt; & propterea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus *GPQ*, (k) qui dimidius eſt anguli ad centrum *GPD*, æqualis eſt angulo ad circumferentiam *GaD*; & angulus *GQP*, qui dimidius eſt anguli ad centrum *GQD*, æqualis eſt complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam *GbD*, ideoque æqualis angulo *Gba*; ſuntque ideo triangula *GPQ*, *Gab* ſimilia; & *Ga* eſt ad *ab* ut *GP* ad *PQ*; id eſt (ex conſtructione) ut *Ga* ad *AB*. Æquantur itaque *ab* & *AB*; & propterea triangula *abc*, *ABC*, quæ modo ſimilia eſſe probavimus, ſunt etiam æqualia. Unde cum tangant inſuper trianguli *DEF* anguli *D*, *E*, *F* trianguli *abc* latera *ab*, *ac*, *bc* reſpectivè, compleri poteſt figura *ABCdef* figuræ *abc* *DEF* ſimilis & æqualis, atque eam complendo ſolvetur problema. *Q.E.F.*

*Corol.* Hinc recta duci poteſt cujus partes longitudine datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt. Concipe triangulum *DEF*, puncto *D* ad latus *EF* accedente, & lateribus *DE*, *DF* in directum poſitis, mutari in lineam rectam, cujus pars data *DE* rectis poſitione datis *AB*, *AC*, & pars data *DF* rectis poſitione datis *AB*, *AC*, interponi debet;




& compleatur figura CBfde ſimilis & æqualis figuræ *n*bφδε, patet factum. Si recta ED minor ſit parallelarum GC, AB diſtantiâ, problema impoſſibile eſt; ſi major fuerit circulus radio εδ, deſcriptus, rectam AB in duobus punctis ſecabit, & duæ erunt rectæ εδ poſitiones.

(k) * Angulus GPQ dimidius eſt anguli ad centrum GPD, recta enim PQ, quæ circulorum DRGD, DGFD centra jungit, perpendicularis eſt ad rectam GD, quæ puncta interſectionum circulorum jungeret adeóque angulum GPD biſecat.

355. Si trium rectarum GC, AB, CB poſitione datarum duæ GC, AB ſint parallelæ & oporteat triangulum datum DEF ità locare ut angulus ejus D lineam AB, angulus E lineam GC, & angulus F lineam BC tangat, centro quovis ε in lineâ GC, ad arbitrium ſumpto & radio εδ, æquali ED, deſcribatur circulus rectæ AB, occurrens in δ; ſuper baſi εδ conſtruatur triangulum εδφ ſimile & æquale triangulo dato EDF, & ex angulo illius φ agatur φn rectæ BC parallela ſecans GC in *n*, & AB in b.

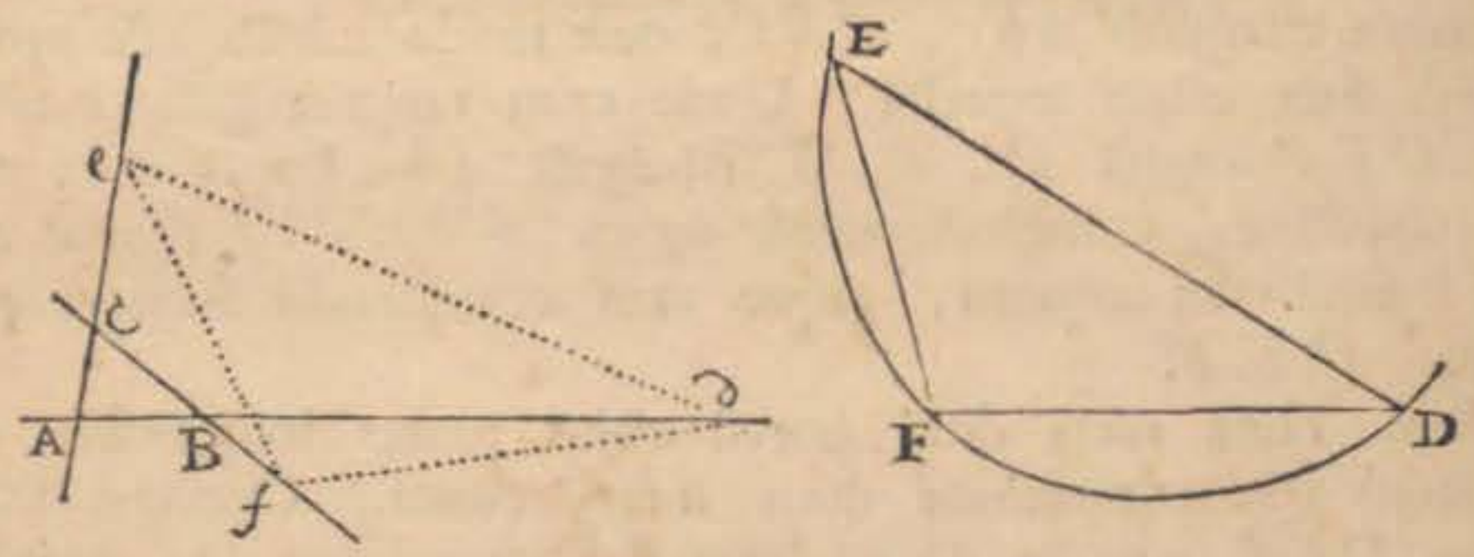
DE MOTU CORPORUM.

& applicando conſtructionem præcedentem ad hunc caſum ſolvetur problema.

## PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

*Trajectoriam ſpecie & magnitudine datam deſcribere, cujus partes datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt.*

Deſcribenda ſit trajectoria, quæ ſit ſimilis & æqualis lineæ curvæ $DEF$, quæque à rectis tribus $AB$, $AC$, $BC$ poſitione




datis, in partes datis hujus partibus $DE$ & $EF$ ſimiles & æquales ſecabitur.

Age rectas $DE$, $EF$, $DF$, & trianguli hujus $DEF$ pone angulos $D$, $E$, $F$ ad rectas illas poſitione datas (per lem. XXVI) (1) dein circa triangulum deſcribe trajectoriam curvæ $DEF$ ſimilem & æqualem. *Q. E. F.*

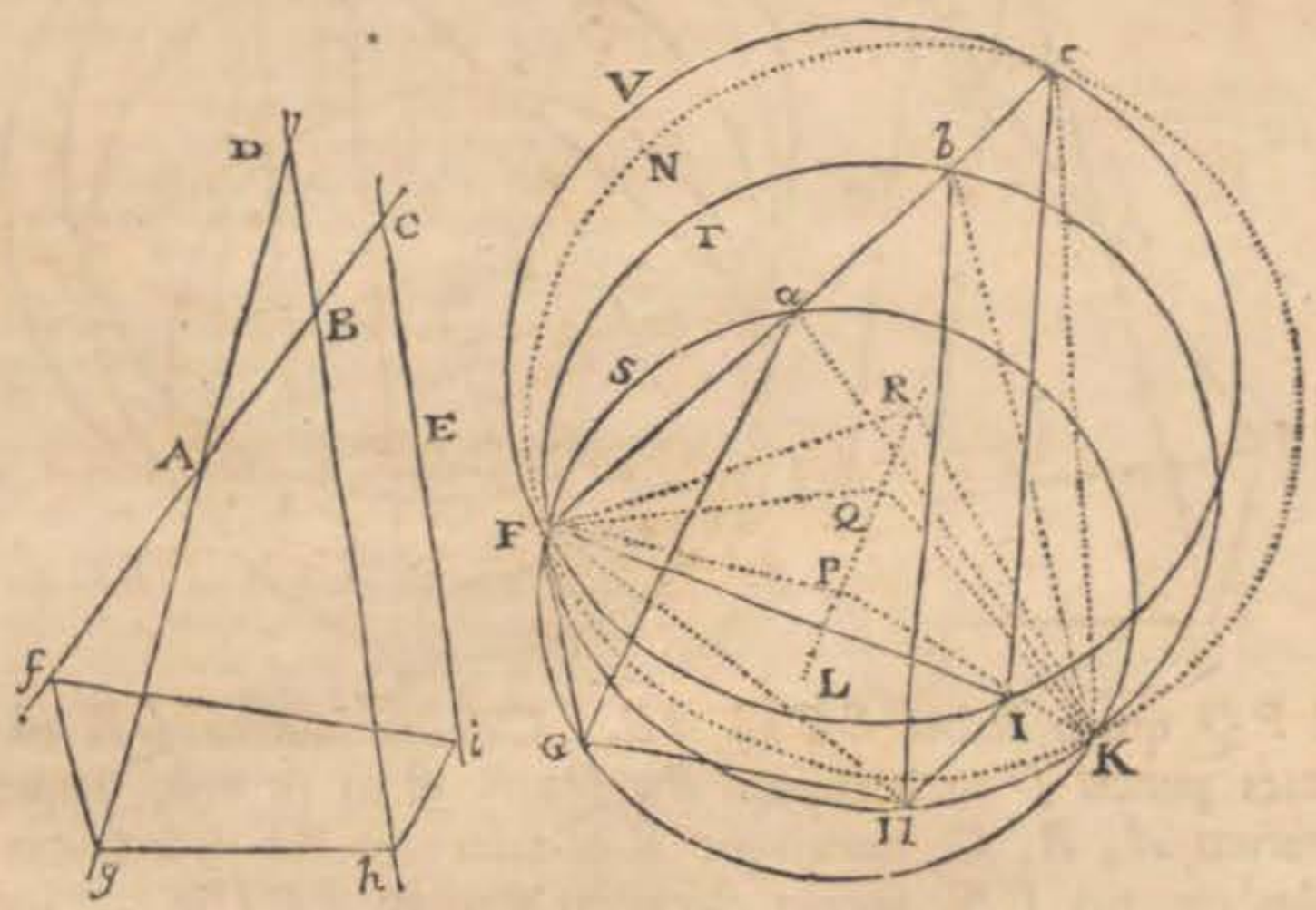
LEM-

(1) * Si enim data ſit curva DEF, triangulo dato EFD circumſcripta, dabitur diametrorum & axium ejuſdem curvæ poſitio ad trianguli EFD latera, & hinc habebitur poſitio diametrorum & axium curvæ ſimilis & æqualis circà triangulum efd deſcribendæ.

## LEMMA XXVII.

*Trapezium ſpecie datum deſcribere, cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas, quæ neque omnes parallelæ ſunt, neque ad commune punctum convergunt, ſinguli ad ſingulas conſiſtent.*

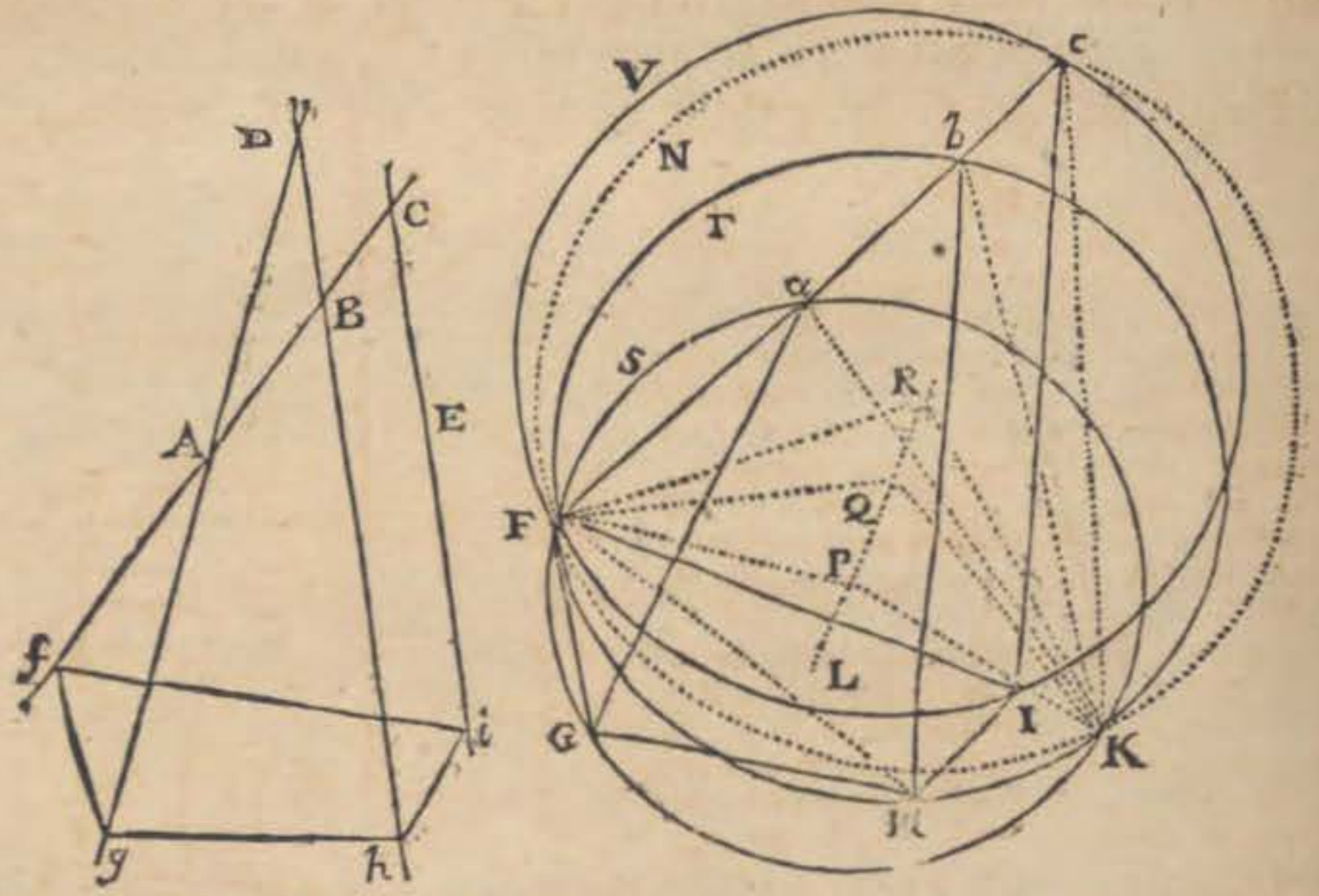
Dentur poſitione rectæ quatuor $ABC$, $AD$, $BD$, $CE$; quarum prima ſecet ſecundam in $A$, tertiam in $B$, & quartam in $C$: & deſcribendum ſit trapezium $fghi$, quod ſit trapezio $FGHI$ ſimile; & cujus angulus $f$, angulo dato $F$ æqualis, tan-




gat rectam $ABC$; cæterique anguli $g$, $h$, $i$, cæteris angulis datis $G$, $H$, $I$ æquales, tangant cæteras lineas $AD$, $BD$, $CE$ reſpectivè. Jungatur $FH$ & ſuper $FG$, $FH$, $FI$ deſcribantur totidem circulorum ſegmenta $FSG$, $FTH$, $FVI$; quorum primum $FSG$ capiat angulum æqualem angulo $BAD$, ſecundum $FTH$ capiat angulum æqualem angulo $CBD$, ac ter-

DE MOTU CORPORUM.

tium $FVI$ capiat angulum æqualem angulo $ACE$. Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum $FG$, $FH$, $FI$, ut literarum $FSGF$ idem sit ordo circularis qui literarum $BADB$, utque literæ $FTHF$ eodem ordine cum literis $CBDC$; & literæ $FVIF$ eodem cum literis $ACEA$ in orbem redeant. Compleantur segmenta in circulos integros; sitque $P$ centrum circuli primi $FSG$, & $Q$ centrum secundi $FTH$. Jungatur & utrinque producatur $PQ$, & in eâ capiatur $QR$ in eâ ratione




ad $PQ$ quam habet $BC$ ad $AB$. Capiatur autem $QR$ ad eas partes puncti $Q$ ut literarum $P$, $Q$, $R$ idem sit ordo atque literarum $A$, $B$, $C$: centroque $R$ & intervalo $RF$ describatur circulus quartus $FNc$ secans circulum tertium $FVI$ in $c$. Jungatur $Fc$ secans circulum primum in $a$, & secundum in $b$. Agantur $aG$, $bH$, $cI$, & figuræ $abcFGHI$ similis constitui potest figura $ABCfghi$. Quo facto erit trapezium $fghi$ illud ipsum, quod constituere oportebat.

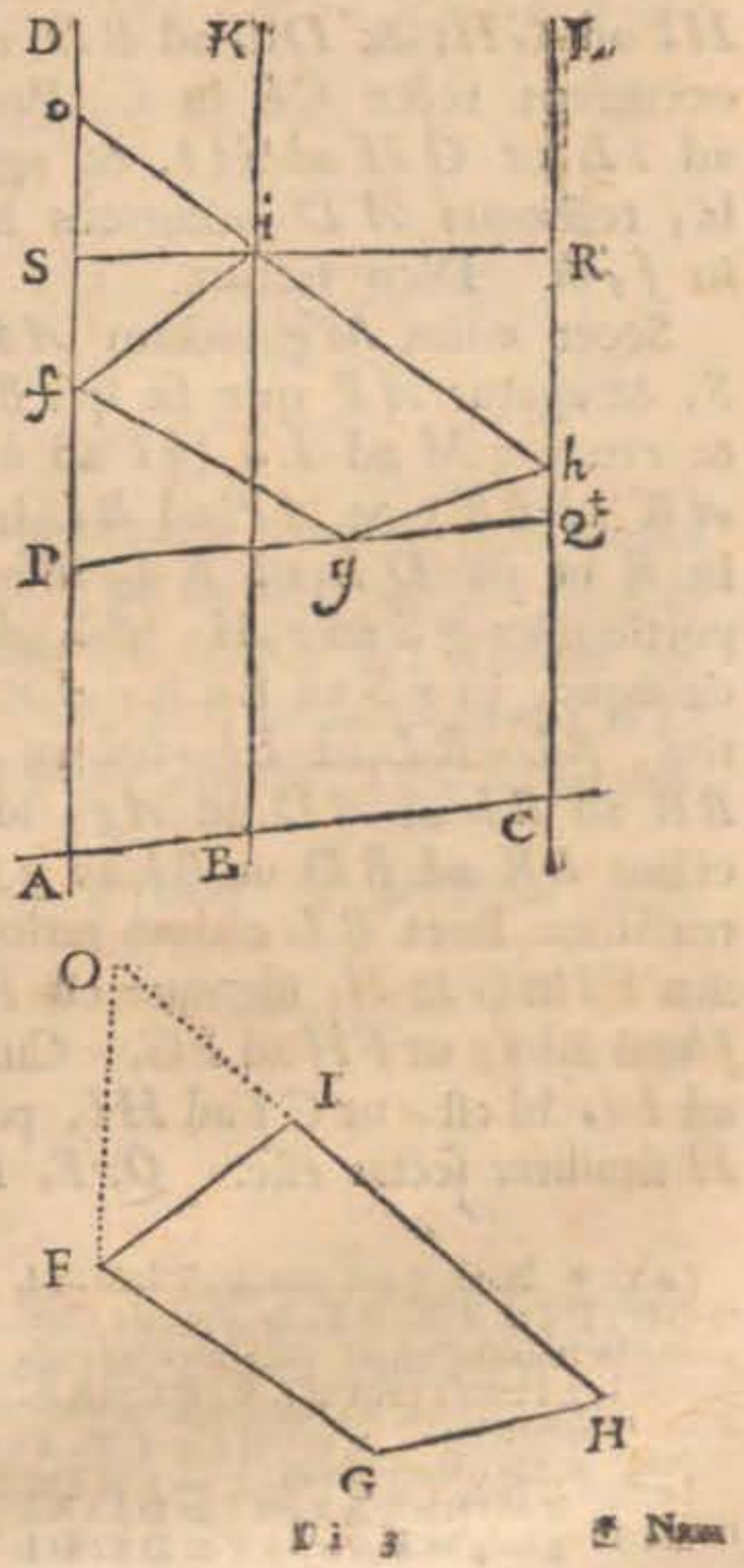
Secent enim circuli duo primi $FSG$, $FTH$ se mutuo in $K$. Jungantur $PK$, $QK$, $RK$, $aK$, $bK$, $cK$, & producatur $QP$ ad $L$. Anguli ad circumferentias $FaK$, $FbK$, $FcK$ sunt semisses

misses angulorum $FPK$, $FQK$, $FRK$ ad centra, ideoque angulorum illorum dimidiis $LPK$, $LQK$, $LRK$ æquales. (m) Est ergo figura $PQRK$ figuræ $abcK$ æquiangula & similis, & propterea $ab$ est ad $bc$ ut $PQ$ ad $QR$, id est, ut $AB$ ad $BC$. Angulis insuper $FaG$, $FbH$, $FcI$ æquantur $fAg$, $fBh$, $fCi$ per constructionem. Ergo figuræ $abcFGHI$ figura similis $ABCfghi$ compleri potest. Quo facto trapezium $fghi$ constituetur simile trapezio $FGHI$, & angulis suis $f$, $g$, $h$, $i$ tanget rectas $ABC$, $AD$, $BD$, $CE$. *Q. E. F.* Co-

(m) * Est enim angulus K a b = K P R, angulus K b a = K Q P, ac proinde triangulum a K b, simile triangulo P Q K, & similiter patet triangulum b K c, esse simile triangulo Q K R, adeóque totam figuram a b c K, similem esse figuræ PQRK.

* Si ex quatuor rectis positione datis duæ vel tres fuerint parallelæ manet eadem constructio. Potest tamen hæc alia adhiberi quæ etiam valet, ubi quatuor sunt parallelæ. Datæ sint tres parallelæ A D, B K, C L quas quarta A C in A, B, C secat & oporteat describere trapezium simile trapezio F I H G & cujus anguli angulis F, I, H, G æquales, rectas A D, B K, C L, A C, tangant. per punctum quodvis i, rectæ B K, agatur S i R, parallelis A D, B K C L normalis, iisque occurrens in S, & R, producatur H I, ad O, ut sit H I ad I O ut est R i ad i S jungaturque F O; tum ex puncto i, agatur i f, parallelam A D secans in f, ità ut sit angulus f i B seu i f D, æqualis angulo I F O, & super latere f i, simili F I construatur trapezium f i h g simile trapezio F I H G, ac per angulum g agatur recta P Q ipsi A C parallela, & tandem super rectâ A C, construatur figura similis figuræ P Q h i f g. Dico factum.

Demonstrandum est angulum h esse in parallelâ C L; si punctum h, non est in lineâ C L producatur i h donec rectæ C L occurrant in t, & producatur t i, donec occurrat rectæ A D in o & erit H I : I O = h i : i o = R i : i S, ob figuras o i f h, O I F H, (per constr.) similes; sed ob similia triangula t i R, o i S, t i : i o = R i : i S, ergò h i : i o = t i : i o, atque adeò h i = t i; quarè punctum t, cum h, coincidit.



DE MOTU CORPORUM.

*Corol.* Hinc recta duci poteſt cujus partes, rectis quatuor poſitione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli $FGH$, $GHI$ uſque eo, ut rectæ, $FG$, $GH$, $HI$ in directum jaceant, & in hoc caſu conſtruendo problema ducetur recta $fghi$, cujus partes $fg$, $gh$, $hi$, rectis quatuor poſitione datis $AB$ & $AD$, $AD$ & $BD$, $BD$ & $CE$ interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ $FG$, $GH$, $HI$, eundemque ſervabunt ordinem inter ſe. Idem verò ſic fit expeditius.

Producantur $AB$ ad $K$, & $BD$ ad $L$, ut ſit $BK$ ad $AB$ ut $HI$ ad $GH$; & $DL$ ad $BD$ ut $GI$ ad $FG$; & jungatur $KL$ occurrens rectæ $CE$ in $i$. Producatur $iL$ ad $M$, ut ſit $LM$ ad $iL$ ut $GH$ ad $HI$, & agatur tum $MQ$ ipſi $LB$ parallela, rectæque $AD$ occurrens in $g$, tum $gi$ ſecans $AB$, $BD$ in $f$, $h$. Dico factum.

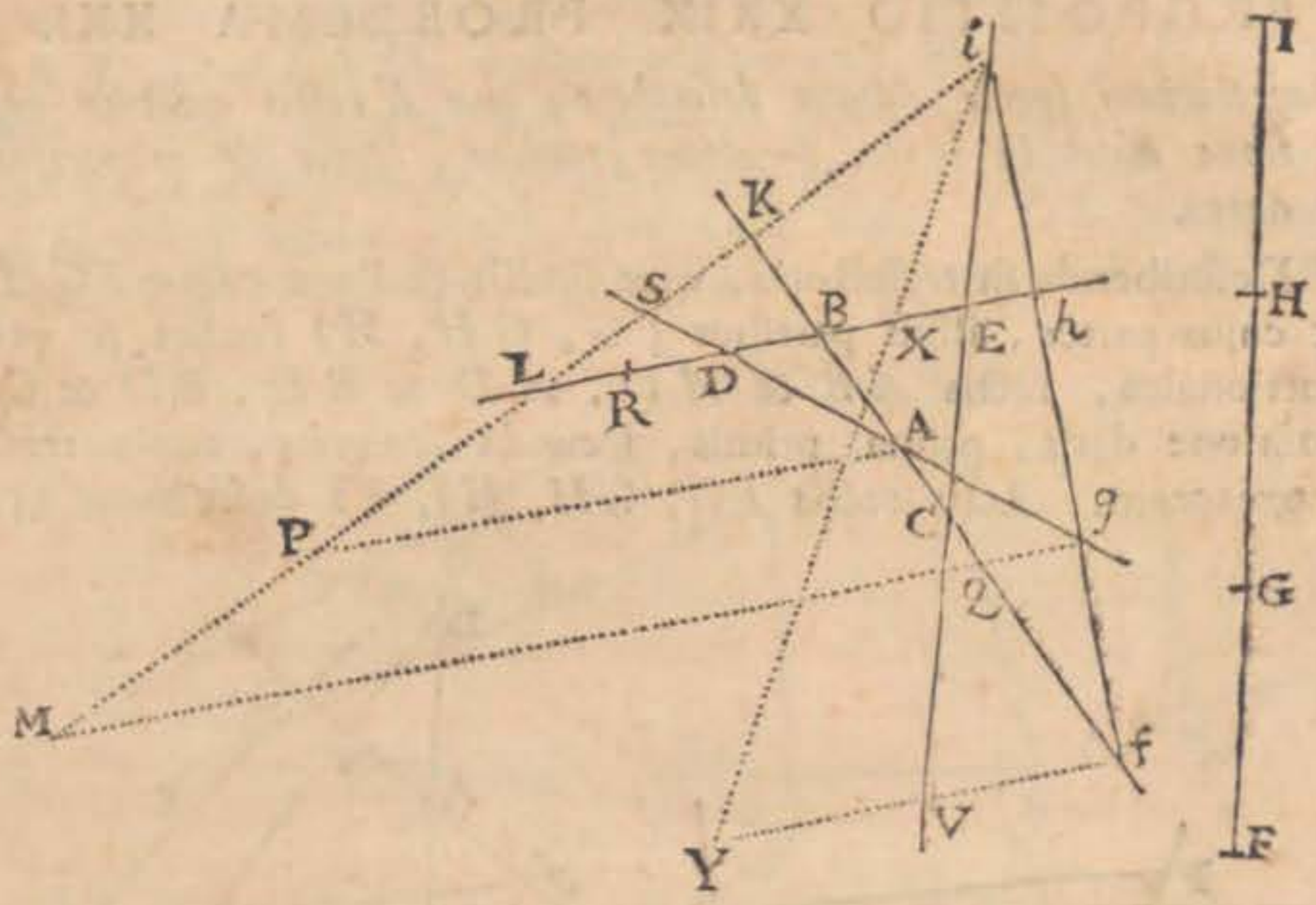
Secet enim $Mg$ rectam $AB$ in $Q$, & $AD$ rectam $KL$ in $S$, & agatur $AP$ quæ ſit ipſi $BD$ parallela & occurrat $iL$ in $P$, & erunt $gM$ ad $Lh$ ($gi$ ad $hi$, (n) $Mi$ ad $Li$, $GI$ ad $HI$, $AK$ ad $BK$) & $AP$ ad $BL$ in eâdem ratione. Secetur $DL$ in $R$ ut ſit $DL$ ad $RL$ in eâdem illâ ratione, & ob proportionales $gS$ ad $gM$, $AS$ ad $AP$, & $DS$ ad $DL$; erit, (o) ex æquo, ut $gS$ ad $Lh$ ita $AS$ ad $BL$ & $DS$ ad $RL$; & mixtim, $BL-RL$ ad $Lh-BL$ ut $AS-DS$ ad $gS-AS$. Id eſt $BR$ ad $Bh$ ut $AD$ ad $Ag$, ideoque ut $BD$ ad $gQ$. Et viciſſim $BR$ ad $BD$ ut $Bh$ ad $gQ$, ſeu $fh$ ad $fg$. Sed ex conſtructione linea $BL$ eâdem ratione ſecta fuit in $D$ & $R$ atque linea $FI$ in $G$ & $H$: ideoque eſt $BR$ ad $BD$ ut $FH$ ad $FG$. Ergo $fh$ eſt ad $fg$ ut $FH$ ad $FG$. Cum igitur ſit etiam $gi$ ad $hi$ ut $Mi$ ad $Li$, id eſt, ut $GI$ ad $HI$, patet lineas $FI$, $fi$ in $g$ & $h$, $G$ & $H$ ſimiliter ſectas eſſe. *Q. E. F.*

In

(n) * Nam (per conſtr.) $LM:iL=GH:HI=AB:BK$, ac proindè componendo conſequentes cum antecedentibus $Mi:Li=GI:HI=AK:BK=AP:BL$ ob parallelas.

(o) * Quoniam enim
$gM:Lh=AP:BL=DL:RL$
& $gS:gM=AS:AP=DS:DL$
patet eſſe $gS:Lh=AS:BL=DS:RL$, & conſequenter $gS-AS:Lh-BL=AS-DS:BL-RL=gS:Lh$; undè invertendo permutando & alternando $BL-RL:Lh-BL=AS-DS:gS-AS$ id eſt $BR:Bh=AD:Ag=BD:gQ$, ob ſimilia triangula $ADB$, $AgQ$.

* Si




In conſtructione corollarii hujus poſtquam ducitur $LK$ ſecans $CE$ in $i$, producere licet $iE$ ad $V$, ut ſit $EV$ ad $Ei$ ut $FH$ ad $HI$, & (P) agere $Vf$ parallelam ipſi $BD$. (Q) Eodem recidit ſi centro $i$, intervallo $IH$, deſcribatur circulus ſecans $BD$ in $X$, & producatur $iX$ ad $Y$, ut ſit $iY$ æqualis $IF$, & agatur $Yf$ ipſi $BD$ parallela.

Problematis hujus ſolutiones alias *Wrennus* & *Walliſius* olim excogitarunt.

PRO-

(p) * Si enim ex puncto f, per ſuperiorem conſtructionem invento agatur fV parallela BD & lineæ iE productæ occurrens in V, erit ob ſimilia triangula iEh, iVf, EV:Ei=fh:hi, ſed ex ſuprà demonſtratis fh:hi=FH:HI, ergò EV:Ei=FH:HI.

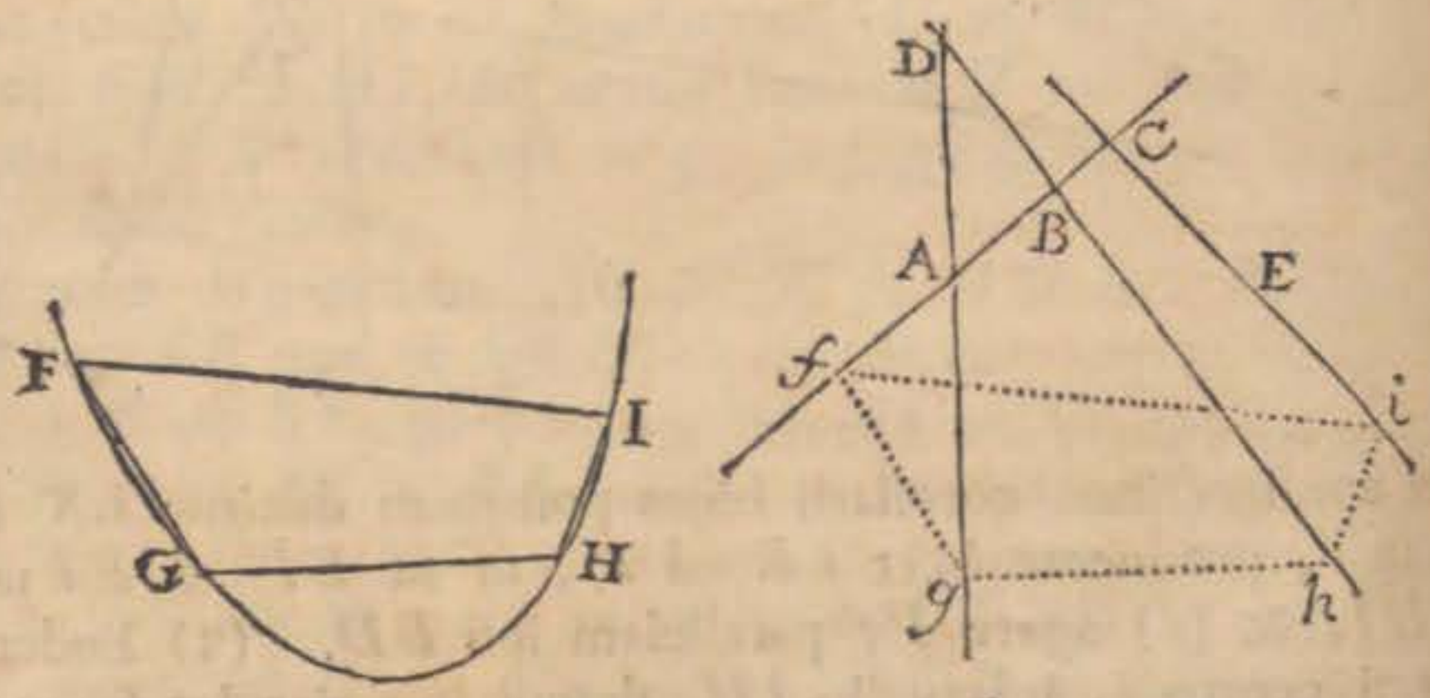
(q) * Nam ſi ex puncto f, ut ſuprà invento agatur fY, ipſi BD, parallela & rectæ iX, productæ occurrens in Y, erit ob ſimilia triangula iXh, iYf, ih:hf=iX:XY=IH:HF. Unde cum ſit iX=IH (ex hyp.) erit XY=HF.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

*Trajectoriam ſpecie datam deſcribere, quæ à rectis quatuor poſitione datis in partes ſecabitur, ordine, ſpecie & proportione datas.*

Deſcribenda ſit trajectoria, quæ ſimilis ſit lineæ curvæ *FGHI*, & cujus partes, illius partibus *FG*, *GH*, *HI* ſimiles & proportionales, rectis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* poſitione datis, prima primis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* deſcribatur (per

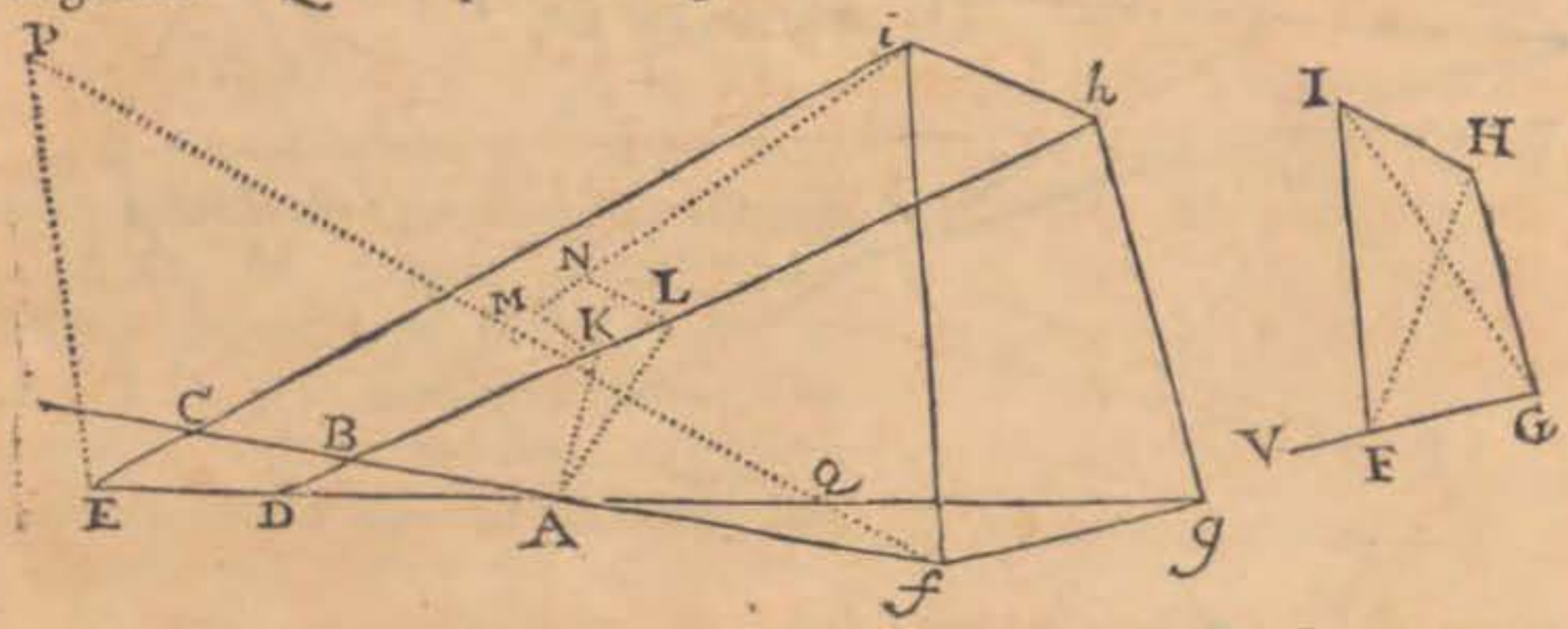



lem. XXVII.) Trapezium *fghi*, quod ſit trapezio *FGHI* ſimile, & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas poſitione datas *AB*, *AD*, *BD*, *CE*, ſinguli ſingulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium deſcribatur trajectoria curvæ lineæ *FGHI* conſimilis.

### *Scholium.*

Conſtrui etiam poteſt hoc problema ut ſequitur. Junctis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* produc *GF* ad *V*, jungeque *FH*, *IG*, & angulis *FGH*, *VFH* fac angulos *CAK*, *DAL* æquales. Concurrant *AK*, *AL* cum recta *BD* in *K* & *L*, & inde agantur *KM*, *LN*, quarum *KM* conſtituat angulum *AKM* æqualem angulo *GHI*, ſitque ad *AK* ut eſt *HI* ad *GH*; & *LN* conſtituat angulum *ALN* æqualem angulo *FHI*, ſitque ad *AL*

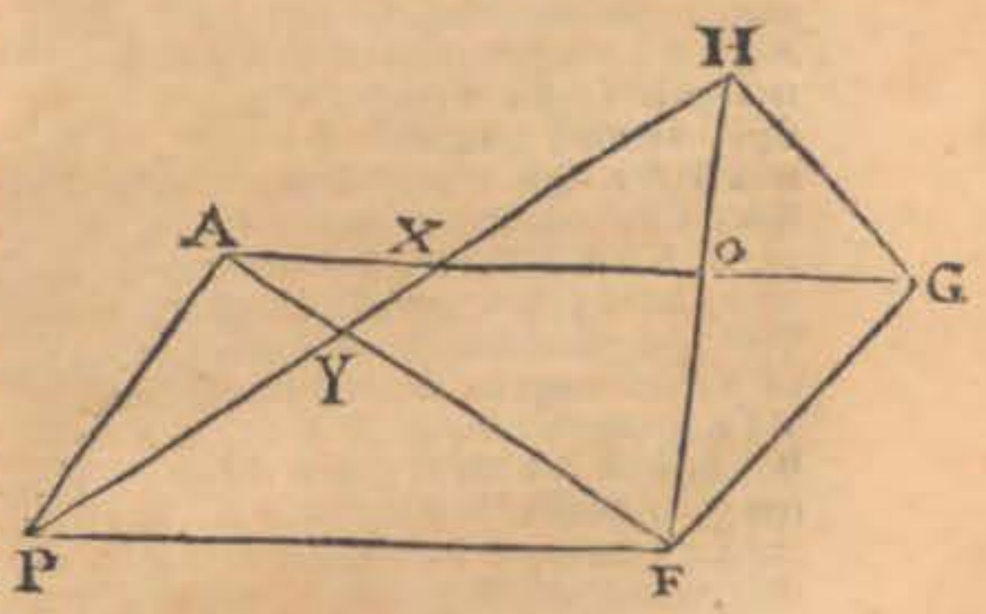
$AL$ ut $HI$ ad $FH$. Ducantur autem $AK$, $KM$, $AL$, $LN$ ad eas partes linearum $AD$, $AK$, $AL$, ut literæ $CAKMC$, $ALKA$, $DALND$, eodem ordine cum literis $FGHIF$ in orbem redeant; & acta $MN$ occurrat rectæ $CE$ in $i$. Fac angulum $iEP$ æqualem angulo $IGF$, ſitque $PE$ ad $Ei$ ut $FG$ ad $GI$; & per $P$ agatur $PQf$, quæ cum rectâ $ADE$ contineat angulum $PQE$ æqualem angulo $FIG$, rectæque $AB$ occurrat




in $f$, & jungatur $fi$. Agantur autem $PE$ & $PQ$ ad eas partes linearum $CE$, $PE$, ut literarum $PEiP$ & $PEQP$ idem ſit ordo circularis qui literarum $FGHIF$, & ſi ſuper lineâ $fi$ eodem quoque literarum ordine conſtituatur trapezium $fghi$ trapezio $FGHI$ ſimile, & circumſcribatur trajectoria ſpecie data, ſolvetur problema. (r)

(r) Hæc nova conſtructio hoc præmiſſo Lemmate Demonſtratur.

Lemma. Si ex puncto A extrà triangulum F G H dato, agatur ad angulum F recta AF, & ad angulum G recta A G, ſecans latus oppoſitum H F in O, & ſuper rectam A F, conſtruatur triangulum F A P, ſimile triangulo F G H, jungaturque P H ſecans A G in X, & A F in Y, ſimilia erunt triangula P H F, A G F, & anguli H X G, H F G æquales; quoniam enim anguli A F P, H F G ſunt æquales (per hyp.) æquales quoque erunt anguli P F H, A F G; & quoniam duo triangula P F A, H F G, ſimilia ſunt (per hyp.) erit P F : A F = H F : F G, adeóque triangula A F G, P F H, quorum latera proportionalia æqualem angulum continent ſunt ſimilia, & hinc anguli H P F, G A F æquantur; cumque anguli oppoſiti

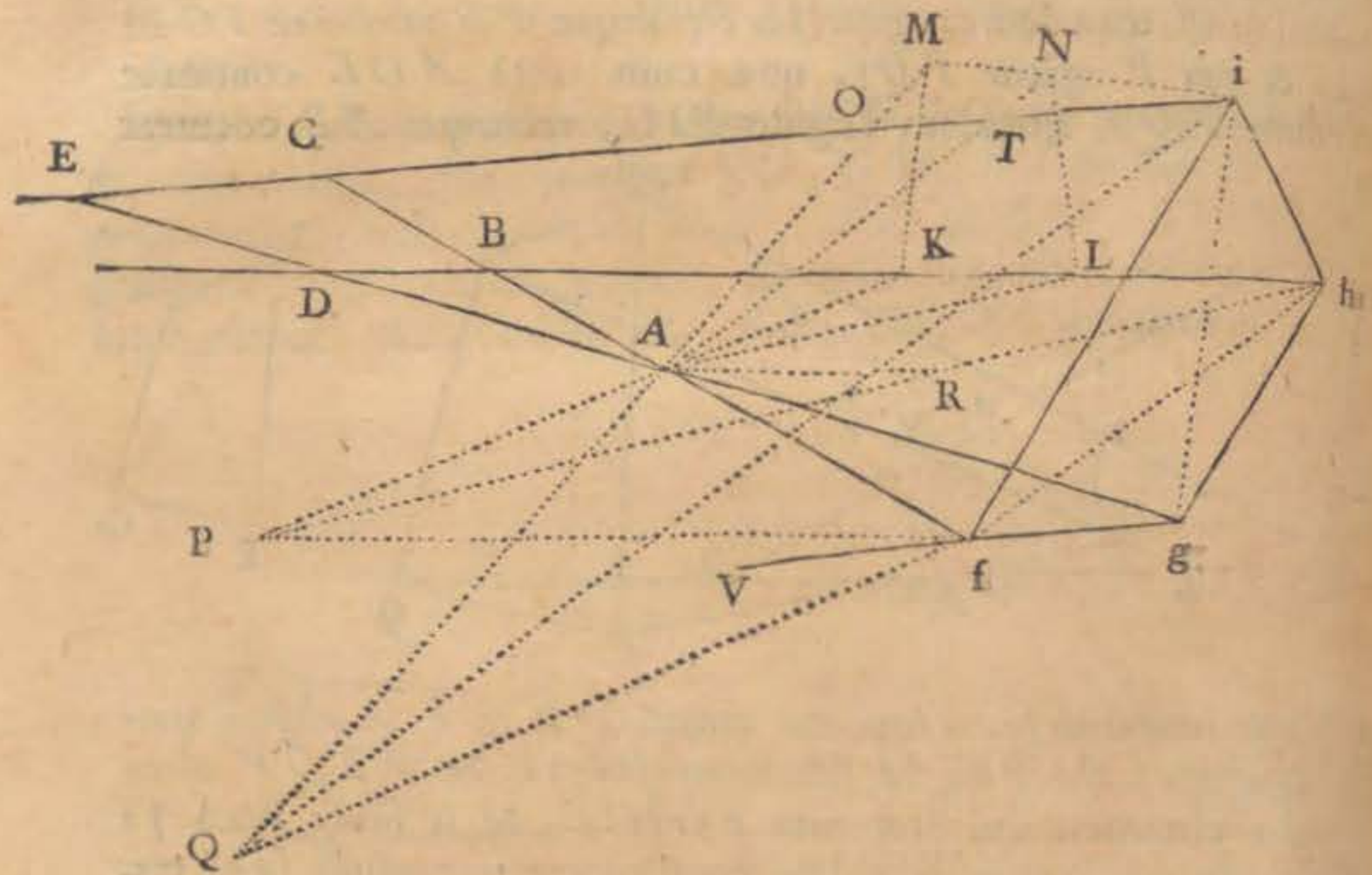



P Y F, A Y X, ſint etiam æquales, liquet angulum A X Y ſive H X G, æqualem eſſe angulo A F P = H F G. Q. e. D.

DE MOTU CORPORUM.

Hactenus de orbibus inveniendis. Supereſt ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

SEC.




357. Hoc itaque, poſito, demonſtratur Newtoniana conſtructio. Trapezii f g h i, anguli quatuor tangant rectas C i, B h, A g, A f. Super rectâ A f, conſtruantur triangula f A P, f A Q, triangulis f g h, f g i, ſimilia; jungantur P h, Q i, & latera P A, Q A, producantur, ut rectis B h, C i, occurrant in K, & O; erunt anguli B A K, B A O, æquales angulis datis f g h, f g i; agantur A L, A T, rectis P h, Q i parallelæ, & producto latere g f, ad V, erit angulus D A L, æqualis angulo V f h; angulus enim D A L = D A B + B A K + K A L = f A g + P A f + h P A; ſed (per conſtr.) P A f = f g h, & f P A = f h g; cumque ſit triangulum f P h, ſimile triangulo f A g, (356), angulus f P h = f A g, adeóque h P A + f A g = h P A + f P h = f P A = f h g; quare D A L = f g h + f h g = V f h (per 32. 1. Elem.). Et ſimiliter oſtenditur angulum D A T, eſſe æqualem angulo V f i, ob triangula f A Q f Q i, triangulis f g i, f A g, ſimilia. Agantur rectæ K M, L N, quæ cum rectis A K, A L conſtituant angulos A K M, A L N angulis g h i, f h i æquales, rectiſque A Q, A T productis occurrant in M & N, & triangula A K M, A L N ſimilia erunt triangulis g h i, f h i, (unde juxtà conſtructionem Newtoni erit K M : A K = h i : h g, & L N : A L = h i : h f). Etenim angulus M A K = P A Q = P A f − Q A f = f g h − f g i = i g h, (per conſtr.) quare cùm ſit quoque (per conſtr.) angulus A K M = g h i, triangula A K M, g h i ſunt ſimilia, angulus verò N A L = D A L − D A T = V f h − V f i (per Dem.) ſed V f h − V f i = i f h, ergò triangula i f h, N A L ſimilia ſunt. jungatur M N, demonſtrandum eſt hanc lineam productam tranſire per angulum i, quo trapezium tangit lineam E C i, ex puncto A, ad rectam P h, agatur A R

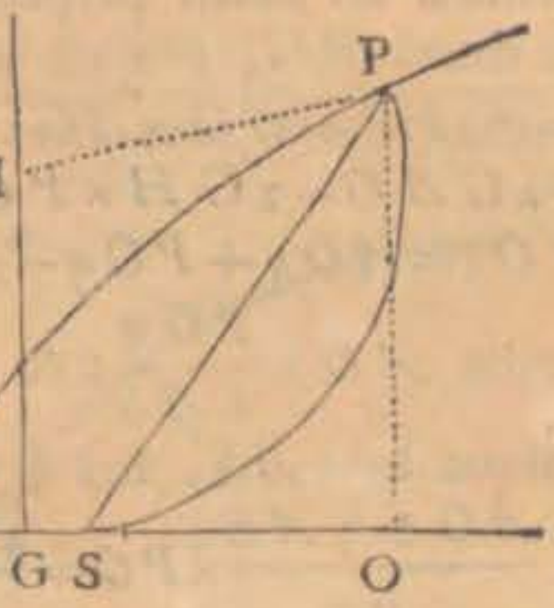
rectæ

## SECTIO VI.

*De inventione motuum in orbibus datis.*

### PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

*Corporis in datâ trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus assignatum.* (f)




(f) Sit $S$ umbilicus & $A$ vertex principalis parabolæ, sitque $4AS \times M$ æquale areæ parabolicæ abcindendæ $APS$, quæ radio $SP$, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem dest. rectæ Bh, parallela, ob similia triangula fgh, fAP erit ..... fg:hg = Af:PA
ob sim. tri. fgi, fAQ .... gi:fg = QA:Af
ob sim. tri. ghi, AKM .... hg:gi = AK:AM
ob sim. tri. AKL, PAR .... AK:AL = PA:PR
ob sim. tri. fQi, fPh, .... fh:fi = Ph:Qi;
sed ob sim. tri. fhi, ALN,
fh:fi = AL:AN.
ergo AL:AN = Ph:Qi
& AL:AN = Ph − AL:Qi − AN
& quia AL = Rh est AL:AN = PR:Qi − AN
unde per compositionem rationum & ex æquo, AK:AN = QA × AK:AM × (Qi − AN)
quare AK × AM:AN × AM = QA × AK:AM × Qi − AN, ac proindè AM:AN = QA:Qi − AN, adeóque AM:AN = QM seu QA + AM:Qi seu Qi − AN + AN. Quoniam igitur rectæ AN, Qi, sunt parallelæ (per constr.) patet puncta M, N, i, esse in unâ rectâ, atque hæc est prima pars constructionis Newtonianæ quæ erat demonstranda.

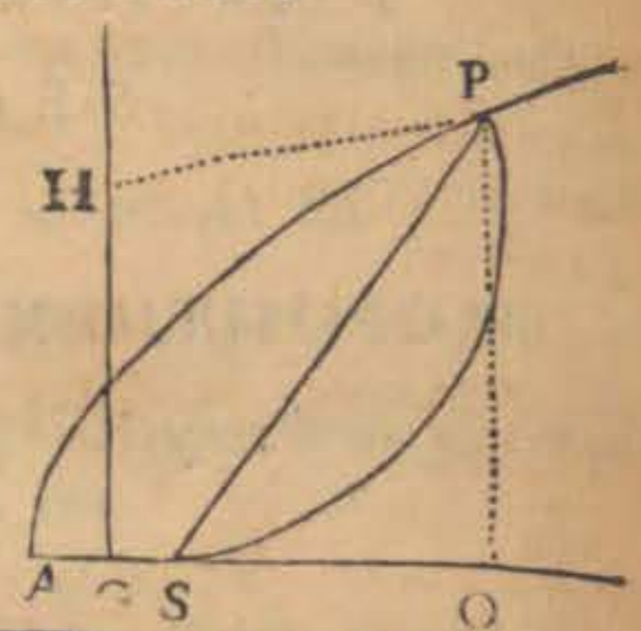
2°. illius pars facilè ostenditur. Nam (vid. fig. Newt.) junctâ Pi, erit (per constr.) triangulum PiE, super rectâ Ei constructum simile triangulo fig, ad cujus angulos i & g, ductæ sunt ex puncto E, rectæ Ei, Eg; quare (356), si per punctum P agatur recta PQ, quæ cum rectâ Eg, contineat angulum PQE æqualem angulo fig, recta illa PQ, producta tanget angulum f, trianguli fig, seu trapezii fghi. Q. e. D.

(f) 338. Newtonus in hâc totâ sectione supponit corpus in trajectoriâ conicâ datâ ità moveri, ut radiis ad trajectoriæ umbilicum ductis areas seu sectores describat temporibus proportionales; eâ enim lege planetas omnes in orbitis conicis revolvi ex phenomenis lib. 3°. ostendit. Præterea supponit notum esse tempus quo corpus ex puncto trajectoriæ dato v. g. ex vertice illius principali ad aliud ejusdem trajectoriæ punctum datum pervenit, datamque esse aream seu trajectoriæ sectorem huic tempori correspondentem, atque ex his datis quærit locum mobilis in trajectoriâ ad aliud quodvis tempus datum, aut contrà quærit tempus quo mobile datum quodvis trajectoriæ punctum attingit; nam cum sint areæ temporibus proportionales, dato tempore quovis, datur area hoc tempore descripta, & viciſſim datâ areâ descriptâ datur tempus quo describitur.

(t) * Sit S umbilicus, & A, vertex principalis parabolæ, datumque sit tempus quo cor-

DE MOTU CORPORUM.

cribenda est. Innotescit quantitas areæ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Bisecta $AS$ in $G$, erigeque perpendiculum $GH$ æquale $3M$, & circulus centro $H$, intervallo $HS$ descriptus secabit parabolam in loco quæsito $P$. Nam, demissâ ad axem perpendiculari $PO$ & ductâ $PH$, (u) est $AGq+GHq$ $(=(x)HPq=\overline{AO-AG:quad.}+\overline{PO-GH:quad.})=AOq+POq-2GAO-2GH\times PO+AGq+GHq$. (y) Unde $2GH\times PO\,(=AOq+POq-2GAO)=AOq+\frac{3}{4}POq$. Pro $AOq$ scribe $AO\times\frac{POq}{4AS}$; & applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductisque in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH\times AS\,(=\frac{1}{6}AO\times PO+\frac{1}{2}AS\times PO=\frac{AO+3AS}{6}\times PO=\frac{4AO-3SO}{6}\times PO=$ areæ $\overline{APO-SPO})$ $=$areæ $APS$. Sed $GH$ erat $3M$, & inde $\frac{4}{3}GH\times AS$ est $4AS\times M$. Ergo area abcissa $APS$ æqualis est abscindendæ $4AS\times M$. *Q. E. D.*




*Co-*

corpus in parabolâ motum, ut modò exposuimus (358.) ex vertice A ad punctum P, aut ex puncto P ad verticem A pervenit, seu datum sit tempus quo sector quilibet APS describitur.

(u) * Est $AG^2+GH^2=HP^2$; nam $AG=GS$, $HP=HS=HA$, & angulus G rectus (per constr.) quare $HA^2=HP^2=AG^2+GH^2$.

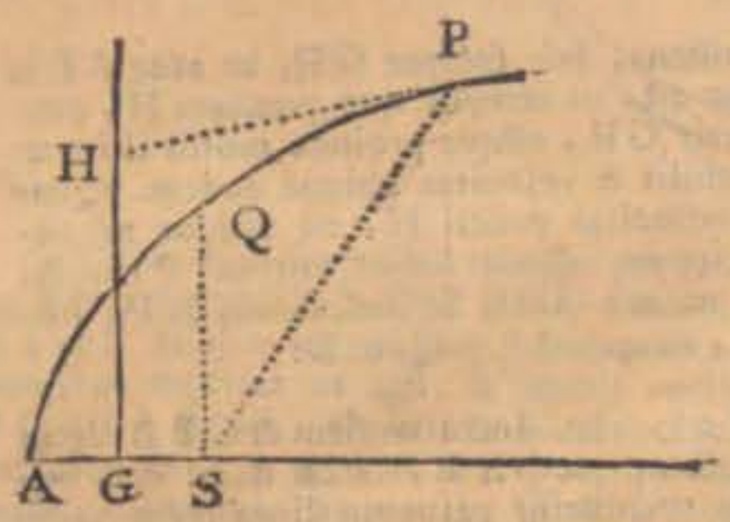
(x) * $HP^2=\overline{AO-AG}^2+\overline{PO-GH}^2$. Nam ex puncto H, ad rectam PO demissa intelligatur perpendicularis, hæc erit æqualis ipsi $GO=AO-AG$, & pars rectæ PO inter perpendicularem & punctum P intercepta æqualis erit $PO-GH$.

(y) * Undè sublatis utrinque quadratis $AG^2+GH^2$, & addito utrinque rectangulo $2GH\times PO$, est $2GH\times PO=AO^2+PO^2-2GAO$; quoniam autem in parabolâ latus rectum $=4AS=8AG$, est $8AG\times AO$ sive $8GAO=PO^2$, & $2GAO=\frac{1}{4}PO^2$, & $PO^2-2GAO=\frac{3}{4}PO^2$. Cum verò sit $4AS\times AO=PO^2$, adeóque $4AS\times AO^2=AO\times PO^2$, & $AO^2=\frac{AO\times PO^2}{4AS}$, erit igitur $2GH\times PO=\frac{AO\times PO^2}{4AS}+\frac{3}{4}PO^2$, & dividendo utrinque per $3PO$, fiet $\frac{2}{3}GH=\frac{AO\times PO}{12AS}+\frac{1}{4}PO$, ductisque omnibus terminis in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH\times AS=\frac{1}{6}AO\times PO+\frac{1}{2}AS\times PO=\frac{AO+3AS}{6}\times PO=\frac{\overline{4AO-3SO}}{6}\times PO$

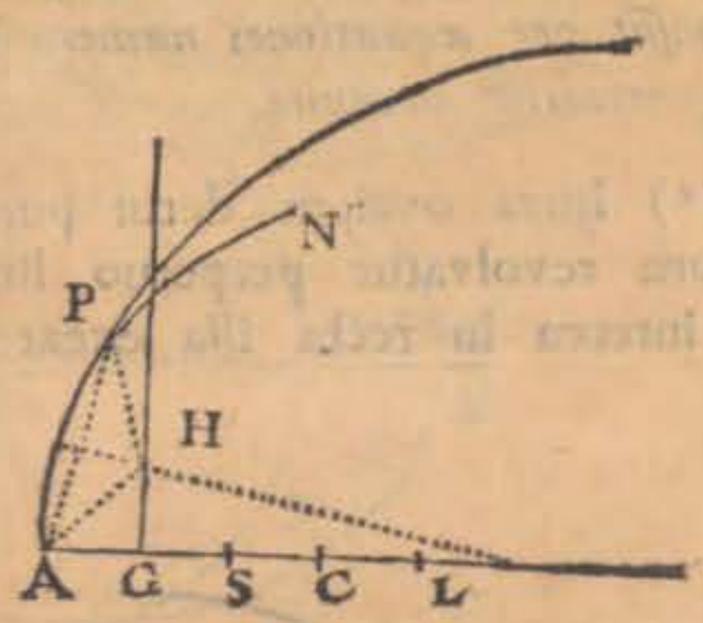
*Corol.* 1. Hinc $GH$ eſt ad $AS$, ut tempus quo corpus deſcripſit arcum $AP$ ad tempus quo corpus deſcripſit arcum inter verticem $A$ & (a) perpendiculum ad axem ab umbilico $S$ erectum.

*Corol.* 2. (b) Et circulo $ASP$ per corpus motum $P$ perpetuo tranſeunte, velocitas puncti $H$ eſt ad velocitatem quam corpus

ob $AS = AO - SO$ unde eſt $3AS = 3AO - 3SO$. Verùm $\frac{4AO \times PO}{6}$ ſeu $\frac{2}{3}AO \times PO$, eſt area parabolica $APOA$, (Archimed. prop. 17. quadr. Parab. ſup. Theor. IV. de Parab. pag. 133.) & $\frac{3SO \times PO}{6}$ ſeu $\frac{1}{2}SO \times PO$, eſt area trianguli $PSO$, ergò area ſectoris Parabolici $APS$, æqualis eſt $\frac{4AO - 3SO}{6} \times PO$, quare $\frac{4}{3}GH \times AS =$ areæ $APS$; *ſed* $GH = 3M$, (*per conſtr.*) &c.




(a) * Sit perpendiculum illud $SQ$, erit area $ASP$, ad aream $ASQ$, ut $\frac{4}{3}GH \times AS$, ad $\frac{2}{3}AS \times SQ$ (Theor. IV. de Par. p. 133.); ſed ex naturâ Parabolæ (Vid. Cor. 2. Theor. 1. de Par. p. 131.) $SQ$ æqualis dimidio lateri recto $= 2AS$, ergò area $ASP$ eſt ad aream $ASQ$, ſeu tempus per $AP$ ad tempus per $AQ$, ut $\frac{4}{3}GH \times AS$ ad $\frac{4}{3}AS^2$, hoc eſt, ut $GH$ ad $AS$. Dato igitur tempore quo deſcribitur arcus $AQ$, & tempore quo deſcribitur $AP$, per ſimplicem proportionem invenitur $HG$, & inde punctum $P$ habetur.




(b) * Jungatur $AP$, & ad medium ejus punctum $q$, erigatur perpendiculum $qL$, axem ſecans in $L$, & quoniam (ex Dem.) eſt ſemper $HP = HA$, ideoque eſt $AP$ chorda circuli cujus centrum eſt $H$. Itaque (per 1. 3^i. Elem.) perpendiculum illud $qL$, rectæ $GH$, occurrit in $H$; & ob ſimilitudinem triangulorum $LGH$, $LqA$, eſt $GH : qA$ ſeu $\frac{1}{2}AP = LG : Lq$. Sumatur $AC = 2AS$ dimidio nempè lateris recti parabolæ & centro $C$, & intervallo $CA$, deſcribatur circulus $AN$, hic parabolam oſculatur in $A$ (241); coeuntibus verò punctis $P$ & $A$, $H$ & $G$, coeunt etiam $L$ & $C$, fitque $Lq = LA = CA = 2AS = 4GS$, & $LG = CG = 3GS$, atque arcus $AP$ æqualis chordæ $AP$, (Lem. VII.); undè cum in proportione ſuperiori ſit $GH : \frac{1}{2}AP = LG : Lq$ erit in hoc caſu $GH : \frac{1}{2}AP = 3GS : 4GS$

DE MOTU CORPORUM.

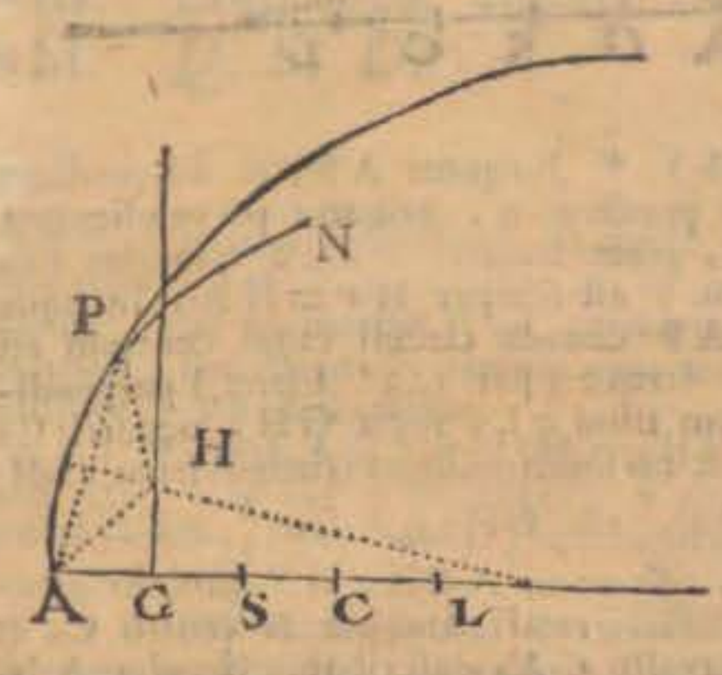
pus habuit in vertice *A* ut 3 ad 8; ideoque in eâ etiam ratione eſt linea *GH* ad lineam rectam quam corpus tempore motus ſui ab *A* ad *P*, eâ cum velocitate quam habuit in vertice *A*, deſcribere poſſet.

*Corol.* 3. Hinc etiam vice versâ inveniri poteſt tempus quo corpus deſcripſit arcum quemvis aſſignatum *AP*. Junge *AP* & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ *GH* occurrens in *H*.

## LEMMA XXVIII.

*Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abſciſſa, poſſit per æquationes numero terminorum ac dimenſionum finitas generaliter inveniri.*

(c) Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergat-

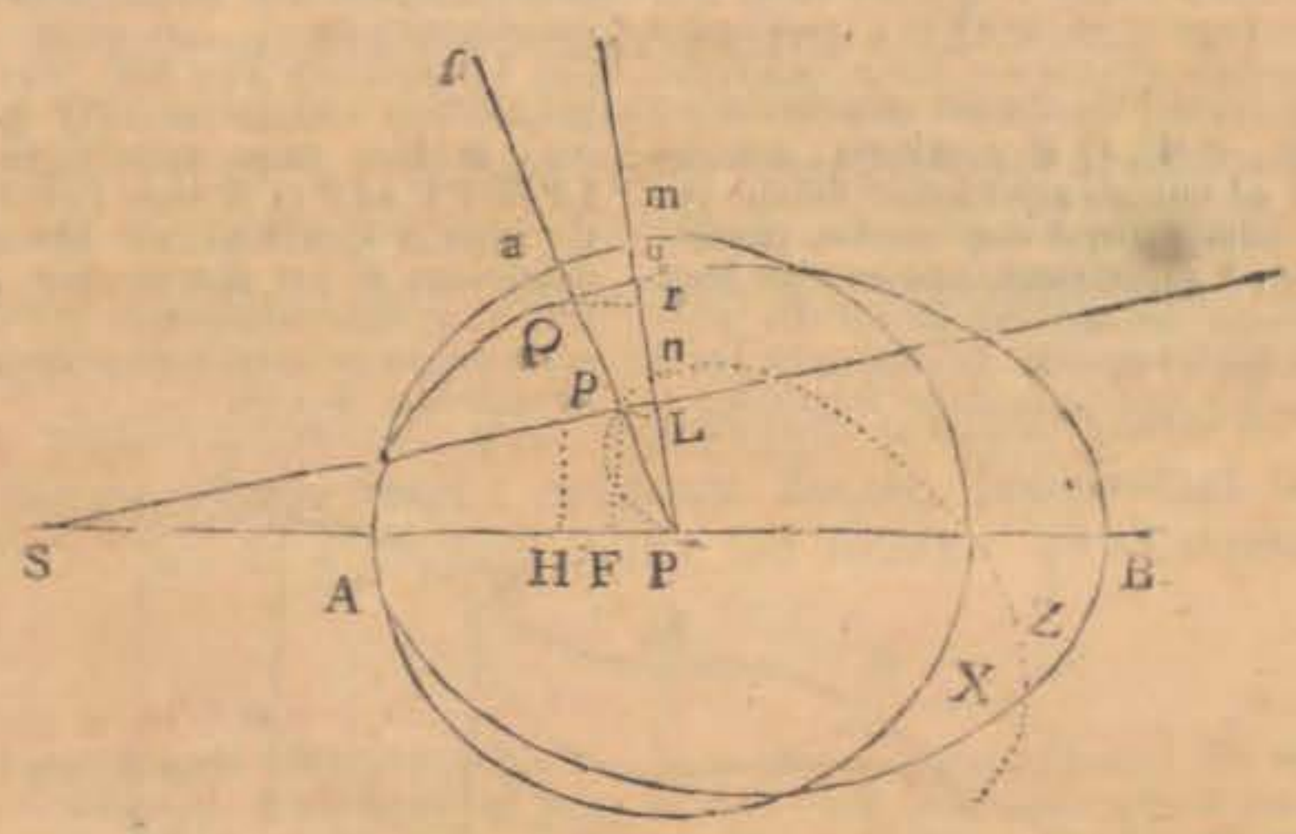



hoc eſt, G H : A P = 3 : 8. Verùm ob motum æquabilem & æquidiuturnum per naſcentes A P, G H, velocitas puncti H in G, eſt ad velocitatem corporis P in A ut G H ad A P, & quoniam (ex Dem.) eſt ſemper $\frac{4}{3}$ AS × GH æqualis areæ A P S, & $\frac{4}{3}$ A S, eſt quantitas conſtans, erit ſemper G H, ut area A P S, hoc eſt, ut tempus quo punctum H, percurrit G H, eſtque proinde motus illius æquabilis & velocitas ubique eadem. Quare velocitas puncti H, eſt ubique ad velocitatem quam habet corpus P in A, ut naſcens G H, ad naſcentem A P, hoc eſt, ut 3. ad 8. Q. e. D.

(c) 359. Intrà ovalem A C B A detur punctum quodvis P, circà quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta infinita P S, uniformi cum motu, ità ut punctum datum A illius lineæ circuli A a m X arcus æquales æqualibus temporibus deſcribat, & interea in rectâ illâ P S, exeat punctum mobile p de polo P, pergatque ſemper in eâdem rectâ P ſ cum velocitate quæ ſit ut rectæ illius intrà ovalem quadratum, hoc eſt, cum linea P S pervenit ad ſitum P ſ, & punctum mobile p ad p, velocitas puncti p ſit ut quadratum rectæ P Q inter polum P & ovalem A Q C B contentæ, hoc motu punctum illud p, deſcribet ſpiralem P p n Z, gyris infinitis.

360.

gatque ſemper eâ cum velocitate, quæ ſit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud deſcribet ſpiralem gyris infinitis. Jam ſi areæ ovalis à rectâ illâ abſciſſæ portio per finitam æquationem inveniri poteſt, invenietur etiam per eandem æquationem diſtantia puncti à polo, (d) quæ huic areæ proportionalis eſt, ideoque omnia ſpiralis puncta per æquationem finiLIBER PRIMUS.



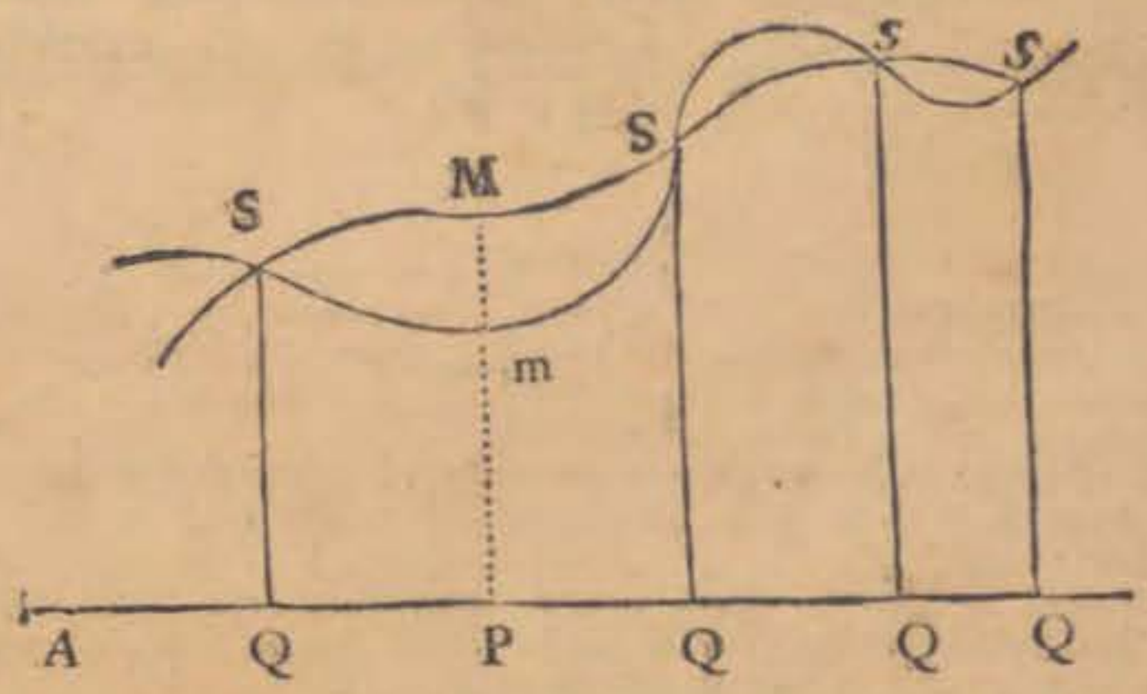

(d) 360. His ſuppoſitis erit ſemper recta P p ut area P A Q P; nam circulus A a m X diviſus intelligatur in arcus innumeros æquales ut a m, & ductis radiis P Q, P q ſpirali, circulo & ovali occurrentibus in p & n, a & m, Q & q, demiſſa capiantur ex punctis Q & p, ad P q, perpendicula Q r, p L, & eodem tempore quo punctum a, percurret arcum a m, punctum p percurret rectam L n; quâpropter naſcente arcu a m, erit L n ut velocitas puncti p in rectâ P f, hoc eſt, (per Hyp.) ut quadratum rectæ P Q; porro ob triangula ſimilia P a m, P Q r eſt $P a : PQ = a m : Q r = \frac{PQ \times a m}{P a}$, ac proindè ſectoris naſcentis P Q q area $\frac{1}{2} Q r \times PQ = \frac{PQ^2 \times a m}{2 P a}$. Cum igitur a m & 2 P a, ſint quantitates conſtantes (ex hyp.) erit ſector P Q q, naſcens ſeu fluxio areæ P A Q ut $PQ^2$, atque ideò ut naſcens L n, ſeu ut fluxio rectæ P p, & hinc tota area fluens P A Q, erit ut tota recta fluens P p, (coroll. Lem. IV.) Q. e. D.

361. Puncta p & Q referantur ad rectam A B, poſitione datam demiſſis ad A B perpendicularibus Q H, p F ſitque area P A Q, æqualis quantitati finitæ E ex lineis variabilibus P H, Q H & aliis conſtantibus quomodolibet compoſitæ, & quoniam linea P p areæ P A Q ſeu quantitati finitæ E proportionalis eſt (360) linea illa exprimi poterit per factum ex quantitate E in quantitatem conſtantem B, eritque P p E = × B æquatio finita. Verùm ob ſimilia triangula P F p, P H Q & angulum ad H rectum, P p : p F = P Q, ſeu $\sqrt{PH^2 + QH^2} : QH$, & P p : P F = P Q ſeu $\sqrt{PH^2 + QH^2} : PH$, & præterea

DE MOTU CORPORUM.

finitam inveniri poſſunt: & propterea rectæ cujuſvis poſitione datæ interſectio cum ſpirali inveniri etiam poteſt per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta ſpiralem ſecat in punctis, numero infinitis, & (e) æquatio, quâ interſectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum interſectiones omnes radicibus totidem, ideoque aſcendit ad tot dimenſiones

reà ex naturâ ovalis AQCB, datur alia æquatio inter PH & QH, inveniuntur ergò quatuor æquationes finitæ quæ ſimul quinque tantum variabiles, nimirum Pp, PF, pF, PH, QH continent, quæque proindè ad unicam æquationem finitam poterunt reduci in quâ duæ tantum variabiles PF, pF reperientur, adeóque per hanc æquationem finitam omnia ſpiralis puncta inveniri poterunt, & propterea rectæ cujuſvis Sp poſitione datæ interſectio p cum ſpirali inveniri etiam poterit per æquationem finitam; cum enim duæ rectæ Sp, SB poſitione datæ ſint, linea SP magnitudine & triangulum SPF ſpecie dantur, & hinc datur ratio lineæ SF ſeu SP ∓ PF ad Fp, & nova invenitur æquatio inter PF & Fp; per hanc igitur æquationem & per alteram quæ ad ſpiralem eſt, determinabuntur PF, & Fp, punctumque interſectionis p invenietur per æquationem finitam.




(e) 362. Lineæ duæ SMS, Sms ſe mutuò interſecantes in punctis S, s ad eandem rectam AQ poſitione datam referantur, ſintque AQ, AP abſciſſæ communes, & QS, PM, Pm ad eas ordinatæ; quoniam in communibus linearum SMs, Sms, interſectionibus S, S, ordinatæ PM, Pm ſunt æquales, ſi in duabus ad lineas SMs, Sms æquationibus, manente abſciſſâ communi, loco ordinatarum PM, Pm, eadem ſcribatur littera, v. gr. y, & deindè ex illis æquationibus eliminetur littera quæ abciſſam communem exprimit, obtinebitur æquatio ex ſolâ y, & conſtantibus compoſita. Porrò hæc ultima æquatio non magis primam ordinatam communem SQ, ſeu primam interſectionem S, quam ſecundam aut tertiam &c. determinabit, cum ſit eadem omnium lex & conditio idemque calculus; hæc igitur æquatio debet omnes communes ordinatas QS, omneſque interſectiones S, ſimul complecti & indifferenter exhibere, & ità tot radices ſeu ipſius y valores reddere quot ſunt communes ordinatæ ſeu interſectiones, æquatio autem tot dimenſiones habet quot radices; Si itaque linearum SMs, Sms, interſectiones S, s, ſunt numero finitæ, æquatio quoque quæ illas determinat finita eſt; at ſi fuerint interſectiones numero infinitæ, erit æquatio numero dimenſionum & radicum infinita. * Exem-

ſiones quot ſunt interſectiones. Quoniam circuli duo ſe mutuo ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenietur niſi per æquationem duarum dimenſionum, quâ interſectio altera etiam inveniatur. (f) Quoniam duarum ſectionum conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri niſi per æquationem quatuor dimenſionum, quâ omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque, & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam interſectiones ſectionum conicarum & curvarum tertiæ poteſtatis, eo quod ſex eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum, & interſectiones duarum curvarum tertiæ poteſtatis; quia novem eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. (g) Id niſi neceſſario fieret, reducere liceret, problemata omnia ſolida ad plana, & pluſquam ſolida, ad ſolida. (h) Loquor hic de

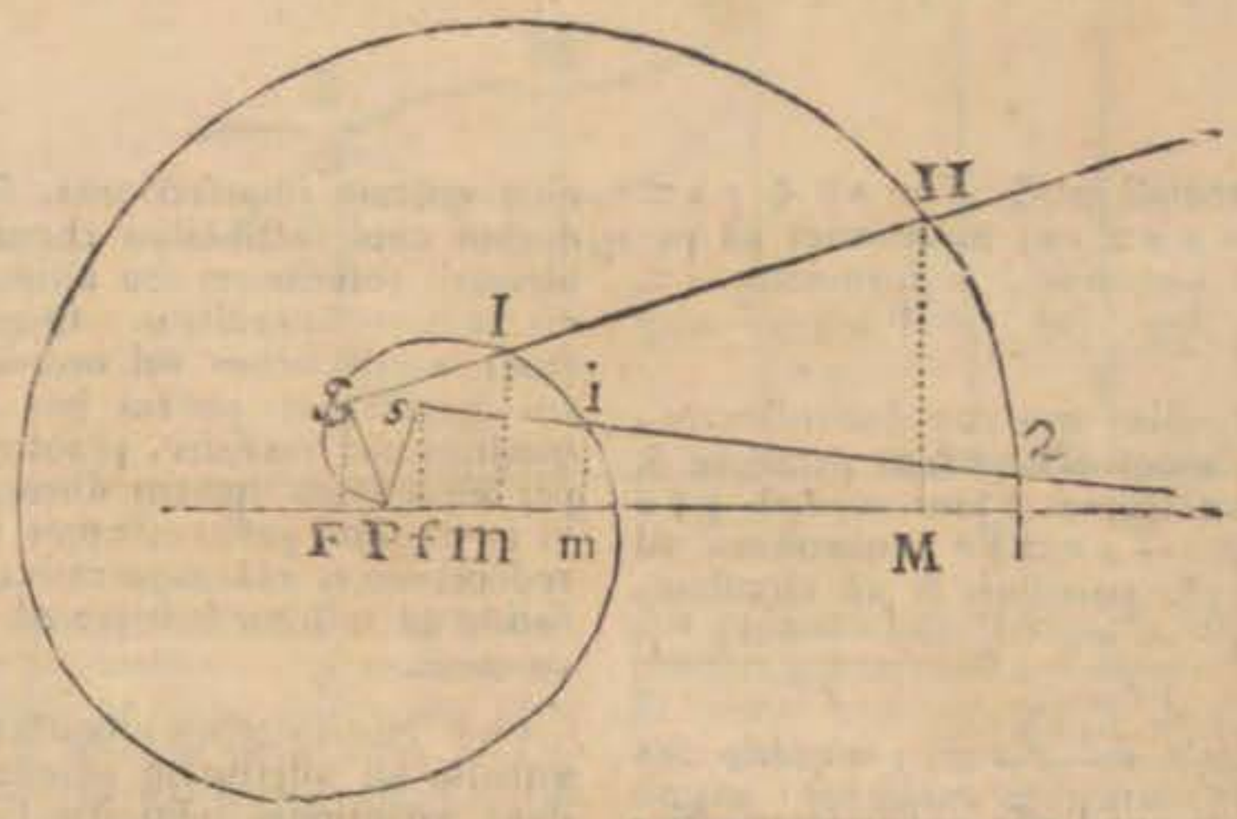
(f) * Exempli cauſâ. Sint $ap + px = yy$, & $bx - xx = yy$, æquationes ad parabolam & circulum, & invenietur $x = \frac{yy - ap}{p}$, & $\frac{byy - bap}{p} - \frac{y^4 + 2apyy - aapp}{pp} = yy$, æquatio quatuor dimenſionum, quoniam quatuor eſſe poſſunt parabolæ & circuli interſectiones. Sint $ap^2 + p^2x = y^3$, & $bx - xx = y^2$ æquationes ad parabolam $3^{æ}$. poteſtatis & ad circulum, erit $x = \frac{y^3 - ap^2}{p^2}$ & $\frac{by^3 - bap^2}{p^2} - \frac{y^6 + 2ap^2y^3 - a^2p^4}{p^2} = yy$ æquatio ſex dimenſionum quod eſſe poſſint interſectiones ſex, & ità de cæteris. Generatim verò tot eſſe poſſunt curvarum duarum interſectiones quot ſunt unitates in facto ex poteſtatis curvæ unius indice ſeu exponente in alterius exponentem; index autem poteſtatis curvæ idem eſt cum numero dimenſionum æquationis ad illam curvam.

(g) * Nam in ſolidorum problematum conſtructione duæ adhibentur ſectiones conicæ quarum interſectiones, ſeu ordinatæ duabus coni ſectionibus communes, problematis ſolutionem ſeu ultimæ æquationis radices ſuppeditant. Quarè ſi hujuſmodi interſectiones vel ordinatæ communes generaliter poſſent per æquationem quadraticam inveniri, problemata ſolida per æquationes duarum dimenſionum ſolvi ac conſtrui poſſent, atque ità ad plana reducerentur, eâdemque ratione plus quam ſolida ad ſolida, indeque ad plana revocarentur.

(h) Nonnunquam propoſita ad curvam æquatio ad inferiorem poteſtatem aut in duas æquationes inferioris poteſtatis reſolvi poteſt. Sic æquatio $ax^3 - a^2x^2 - bx^2y + axy^2 + abxy - by^3 = o$ reſolvi poteſt in duas $xx - ax + yy = o$, & $ax - by = o$ quarum prior eſt ad circulum, poſterior ad parabolam. Parabolæ autem & circuli cum lineâ quâvis interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt.

DE MOTU CORPORUM.

de curvis poteſtate irreducibilibus. Nam ſi æquatio, per quam curva definitur, ad inferiorem poteſtatem reduci poſſit: curva non erit unica, ſed ex duabus vel pluribus compoſita, quarum interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt. Ad eundem modum interſectiones binæ rectarum & ſectionum conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum, ternæ rectarum & curvarum irreducibilium tertiæ poteſtatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum irreducibilium quartæ poteſtatis per æquationes dimenſionum quatuor, & ſic in infinitum. Ergo rectæ & ſpiralis interſectiones numero infinitæ, cum curvâ hæc ſit ſimplex & in curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus interſectiones omnes poſſunt ſimul exhiberi. Eſt enim eadem omnium lex & idem calculus. (i) Nam ſi à polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum, & perpendi-




(i) * Sit polus P, ſecans SI, II, ad eam ex polo normalis Ps, interſectio prima in i, ſecunda in II, &c. circà polum P, revolvatur perpendiculum Ps, unà cum ſecante SI, II ad illud ſemper normali, ubi perpendiculum pervenit ad ſitum Ps, & ſecans SI, II ad ſitum si2, interſectio prima I, perçurſo arcu Ii, pervenit ad i, & poſt integram revolutionem cum si2, redit ad ſitum SI, II, prima interſectio I, ſeu i, pervenit ad II, & fit ſecunda, & poſt duas revolutiones fit tertia & ſic deinceps. Ex punctis S, s, ad rectam PM infinitam & poſitione datam demittantur perpendicula SF, sf; manente ſecantis SI, II, poſi-

tione,

diculum illud unà cum ſecante revolvatur circa polum, interſectiones ſpiralis tranſibunt in ſe mutuo, quæque prima erat ſeu proxima, poſt unam revolutionem ſecunda erit, poſt duas tertia, & ſic deinceps: nec interea mutabitur æquatio niſi pro mutatâ magnitudine quantitatum per quas poſitio ſecantis determinatur. Unde cum quantitates illæ poſt ſingulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, ideoque una eademque exhibebit interſectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi poſſunt. Nequit ergo interſectio rectæ & ſpiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat ovalis cujus area, rectis imperatis abciſſa, poſſit per talem æquationem generaliter exhiberi.

(k) Eodem argumento, ſi intervallum poli & puncti, quo ſpiralis deſcribitur, capiatur Ovalis perimetro abſciſſæ proportionale, probari poteſt quod longitudo perimetri nequit per finitam æqua-

tione, conſtantes ſunt rectæ SF, FP, SP, quibus illa poſitio determinatur, & demiſſâ ex I ad PM perpendiculari Im datur æquatio aliqua inter Pm vel Im & datas SP, FP, SF, quâ interſectio I exhibetur; ubi verò ſecans SIII, pervenit ad ſitum si2, manente ſecantis si2 poſitione, datur æquatio inter im vel Pm & datas sP, ſeu SP, Pf, sf, & æquatio hæc à priori diverſa non eſt, niſi ratione quantitatum FP FS, quæ mutatæ ſunt in fP, fs, per quas ſecantis si2, poſitio determinatur, cum utraque æquatio in ſitu SIII, & ſitu si2, ab æquatione ad ſpiralem quæ eadem ſemper manet & ab æquatione ſecantis poſitionem determinante diducantur. Quoniam igitur lineæ fs, fP poſt primam revolutionem ac proinde poſt ſingulas redeunt ad magnitudines primas FS, FP interſectione primâ in ſecundam tranſeunte, ſecundâ in tertiam, & ſic deinceps, æquatio inter IIM, vel PM, & datas PF, PS, SF, redibit ad formam primam quam habebat æquatio inter Im, vel Pm, & eaſdem datas quantitates PF, PS, SF, adeóque una eademque æquatio exhibebit interſectiones omnes I, II, &c., ſeu valores Im, IIM, &c., propterea radices exhibebit numero infinitas quibus omnes exhiberi poſſunt.

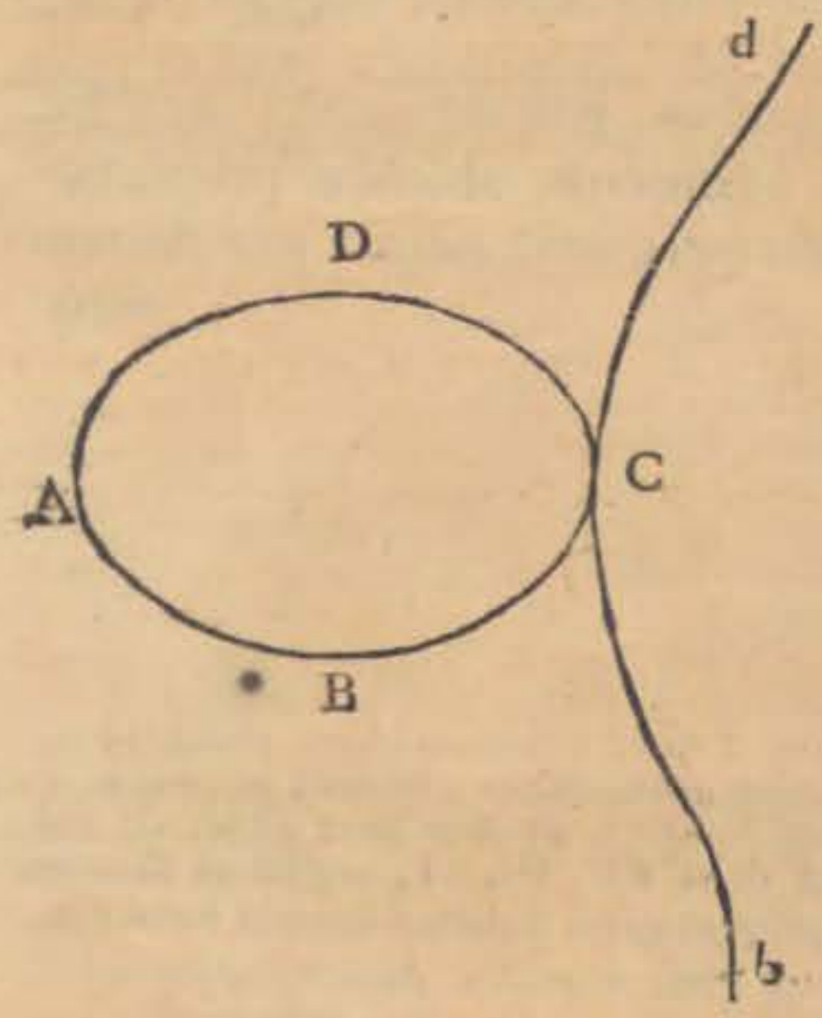
(k) * Eâ enim ratione ſpiralis deſcribetur gyris infinitis ad quam proinde æquatio erit numero dimenſionum infinita, quæ quidem finita deberet eſſe, ſi longitudo perimetri ovalis pro lubitu abſciſſa ſeu intervallum puncti ſpiralem deſcribentis & poli, per finitam æquationem generaliter exhiberi poſſet.

DE MOTU CORPORUM.

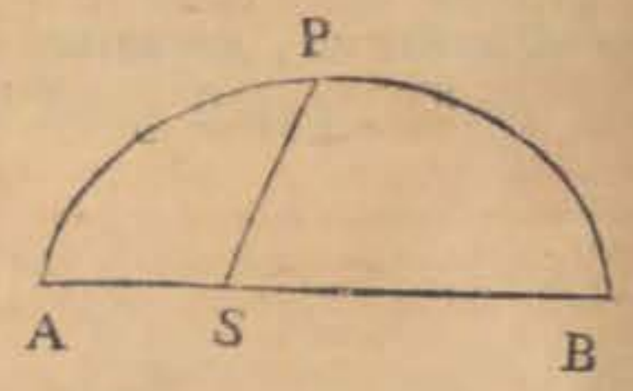
æquationem generaliter exhiberi. (l) De ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur à figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

*Corollarium.*

(m) Hinc area ellipſeos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto deſcribitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per deſcriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Curvas geometricè rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationem




(l) * Ovalem ABCD tangat in C curva conjugata bCd, cujus rami Cb, Cd in infinitum pergant, pro hujuſmodi ovalibus non valet Newtoni demonſtratio. Supponit enim circà punctum datum in ovali perpetuò revolvi lineam rectam uniformi cum motu quæ ſit ad peripheriam ovalis terminata, & abſcindat areas ſibi proportionales; ſi autem ovalis tangatur à figurâ conjugatâ bCd, cujus rami in infinitum pergunt, evidens eſt lineâ rectâ intrà ovalem revolvente non percurri totam novæ hujus figuræ aream, nec gyris perpetuis ac infinitis ſimplicem ſpiralem deſcribi.



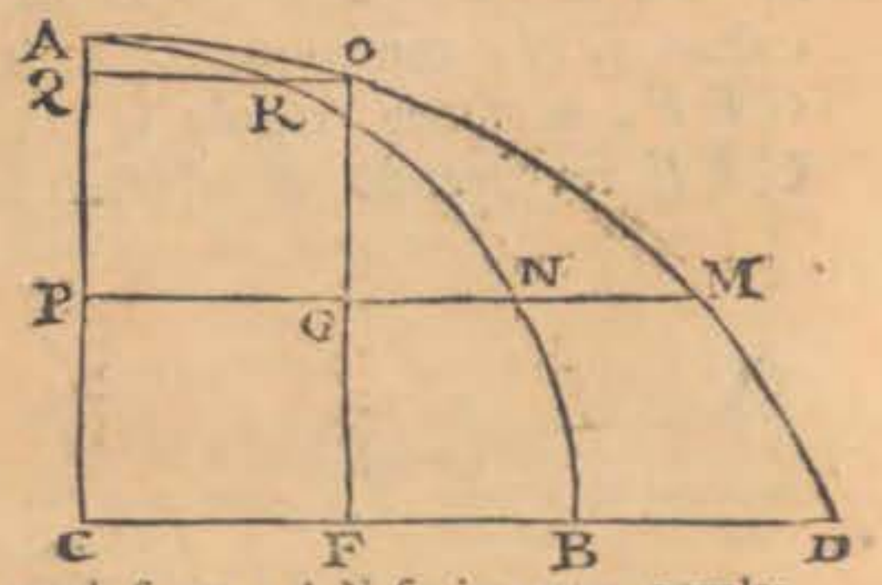

(m) 363. Sit Ellipſeos A P B, axis AB, umbilicus S, radius vector SP, dataque ſint totius Ellipſis area & tempus periodicum, ſitque tempus periodicum ad tempus per arcum AP, ità area totius ellipſeos ad aream ſectoris APS, obtinebitur æquatio inter aream APS, & tempus quo illa deſcribitur. Unde ſi poſteà inveniri poſſet æquatio finita inter aream indefinitam APS & radium vectorem SP ac datas quantitates, inveniretur quoque æquatio finita inter tempus per arcum quemvis AP, & radium vectorem SP, qui ità ex dato tempore per æquationem finitam prodiret; Et viceverſâ, ſi ex tempore quo arcus AP deſcribitur, radii vectoris SP longitudo per æquationem finitam poſſet determinari, ope hujus æquationis & ſuperioris proportionis inter tempora & areas obtineretur æquatio finita inter aream quamlibet ASP & radium vectorem SP ac datas quantitates, quod impoſſibile eſſe demonſtratum eſt; & propterea longi-

quæ-

tionibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut spirales, quadratrices, trochoides) geometricè irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) sunt arithmeticè rationales vel irrationales. Aream igitur ellipseos tempori proportionalem abscindo per curvam geometricè irrationalem ut sequitur. PRO- LIBER PRIMUS.

tudo (ac proindè positio quæ ex longitudine data est) radii vectoris SP, per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Sunt autem curvæ geometricè rationales in quibus ordinatarum & abscissarum rectarum relatio æquatione finitâ exprimi potest, quarumq; e proinde puncta omnia per harum rectarum linearum rationes complicatas determinari possunt. Si in æquatione ad curvam $ax^m + by^n + \&c. = o$ numerus terminorum finitus sit & exponentes m, n, rationales fuerint, curva erit geometrice rationalis contrà si numerus terminorum infinitus fuerit, & summari nequeant, aut si exponens aliquis irrationalis fuerit, curva est geometrice irrationalis.

364. Circuli (adeóque & Ellipsis) quadraturam seu rectificationem indefinitam finitâ æquatione exhiberi non posse demonstravit Saurinus in Commentariis Parisiensibus an. 1720. illius demonstrationem ut potè facilem & brevem referemus. Sit quadrans circuli CAB, & ex puncto quovis N arcûs AB demittatur ad radium AC perpendiculatis NP, demonstrandum est arcus AN, & rectarum AP, PN relationem nullâ æquatione finitâ posse exprimi. Descripta intelligatur curva AOMD cujus hæc sit natura ut recta MP ex puncto quovis M ad radium AC perpendiculariter demissa, sit æqualis arcui abscisso AN; ope curvæ AMD arcus AN in ratione quâvis datâ rectæ PG ad PM dividi potest in R; nam si per punctum G agatur recta Go, ipsi PM normalis & curvæ AMD occurrens in o, atque ex puncto o, ducatur ad AC perpendicularis oQ arcum AN secans in R, erit AR = Qo, adeóque AR : AN = PG : PM. Verùm demonstravit Clariss. Hospitalius art. 443. lib. 10. Sectionum Conicarum,




quod si arcus AN sit in partes æquales dividendus quarum una sit AR, æquatio quâ determinatur partis unius Chorda AR, tot dimensiones obtinet quot sunt in arcu AN, partes æquales, atque adeò si dividendus sit arcus AN in ratione indefinitâ rectæ PG ad PM, æquatio illa finita esse nequit. Ergò curva AMD, quâ arcus quilibet AN in ratione quâvis PG ad PM per eandem semper constructionem dividitur geometrice, rationalis non est; sed si arcus AN & rectarum AP, PN relatio posset æquatione finitâ exprimi, eadem æquatio exhiberet quoque relationem abscissæ AP ad ordinatam PM, ac proinde curva AMD esset geometrice rationalis. Ergò rectificatio arcûs AN, æquatione finitâ generaliter exhiberi non potest. Q. E. D.

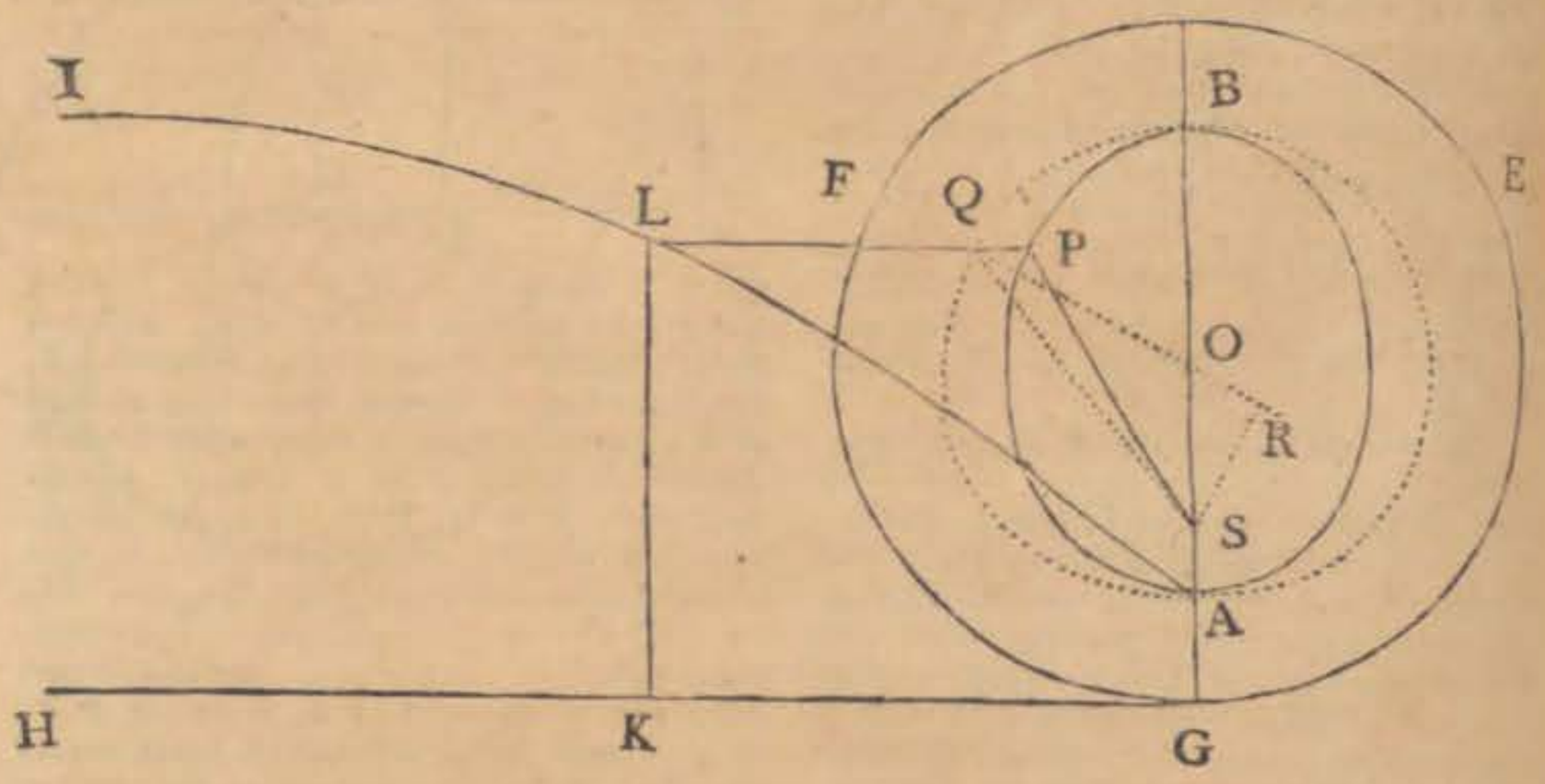
365. Hinc patet curvas omnes quarum descriptio pendet à quadraturâ vel rectificatione circuli & ovalium indefinitâ quales sunt spirales, quadratrices, trochoides esse geometrice irrationales. Ex demonstratis autem minime sequitur circuli & ovalium quadraturam vel rectificationem determinatam seu quadraturam vel rectificationem totius ovalis aut portionis illius determinatæ impossibilem esse.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

*Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus assignatum.*

Ellipseos *APB* sit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, & *O* centrum, sitque *P* corporis locus inveniendus. Produc *OA* ad *G*, ut sit *OG* ad *OA* ut *OA* ad *OS*. Erige perpendiculum *GH*, centroque *O* & intervallo *OG* describe circulum *GEF*, & super regula *GH*, ceu fundo, progrediatur rota *GEF* revolvendo circa axem suum, & interea puncto suo *A*



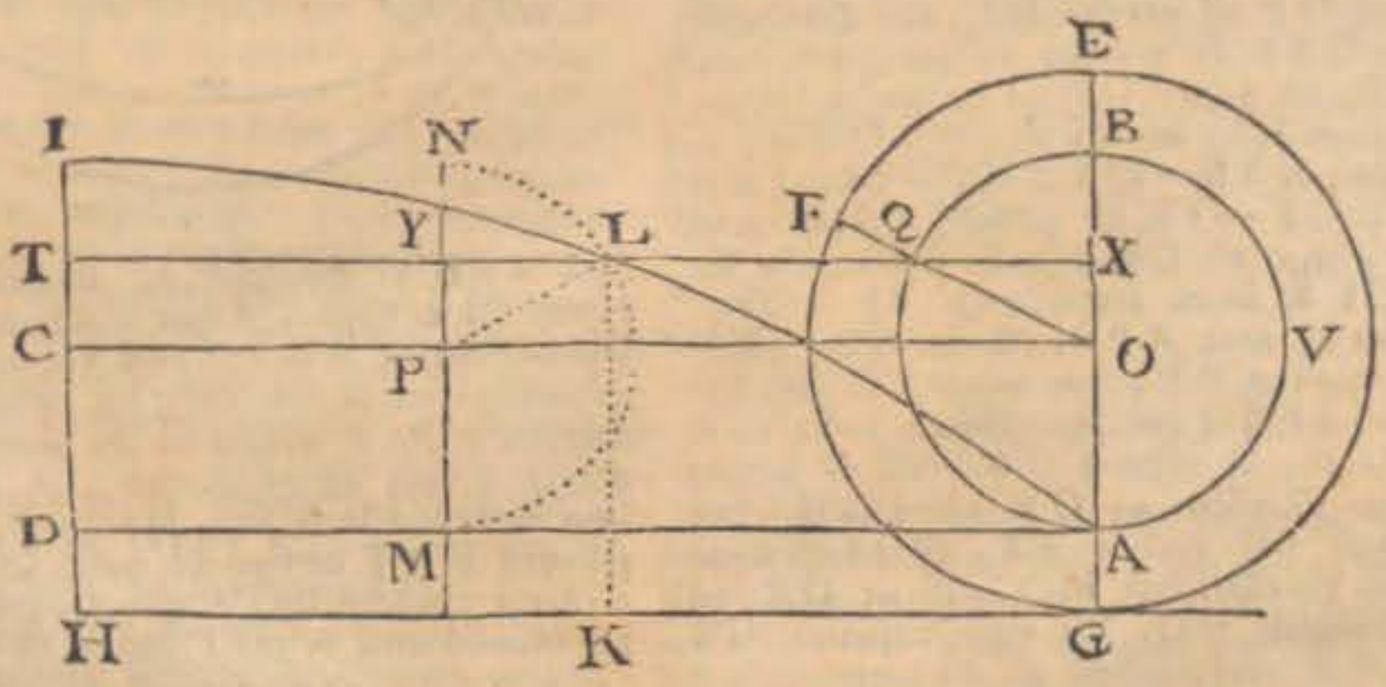

describendo trochoidem *ALI*. Quo facto, cape *GK* in ratione ad rotæ perimetrum *GEFG*, ut est tempus, quo corpus progrediendo ab *A* descripsit arcum *AP*, ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Erigatur perpendiculum *KL* occurrens trochoidi in *L*, & acta *LP* ipsi *KG* parallela occurret ellipsi in corporis loco quæsito *P*.

Nam centro *O*, intervallo *OA* describatur semicirculus *AQB*, & arcui *AQ* occurrat *LP* si opus est producta in *Q*, jungantur *SQ*, *OQ*. Arcui *EFG* occurrat *OQ* in *F*, & in ean-

eandem $OQ$ demittatur perpendiculum $SR$. (n) Area $APS$, eſt ut area $AQS$, id eſt, ut differentia inter ſectorem $OQA$ & triangulum $OQS$, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}OQ \times AQ$ & $\frac{1}{2}OQ \times SR$, hoc eſt, ob datam $\frac{1}{2}OQ$, ut differentia inter arcum $AQ$ & rectam $SR$, ideoque (cum (p) eædem ſint datæ rationes $SR$ ad ſinum arcus $AQ$, $OS$ ad $OA$, $OA$ ad $OG$, $AQ$ ad $GF$, & diviſim (q) $AQ-SR$ ad $GF-$ſinu arcus $AQ$) ut $GK$ differentia inter arcum $GF$ & ſinum arcus $AQ$. $Q.E.D.$

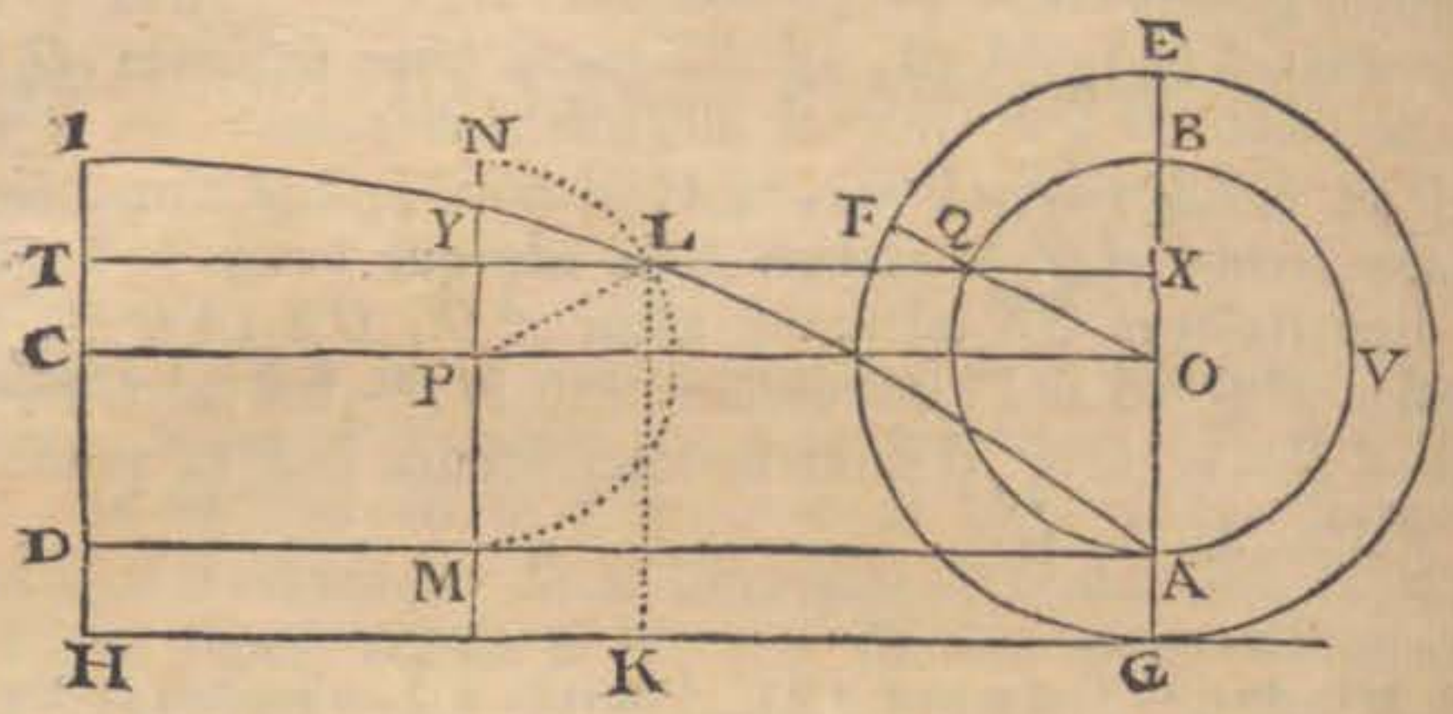
(n) *366. Area APS eſt ut area AQS* (251) ſed area AQS æqualis eſt *differentiæ inter ſectorem OQA & triangulum OQS*, ſector verò $OQA = \frac{1}{2}OQ \times AQ$, & triangulum $OQS = \frac{1}{2}OQ \times SR$. Ergò ob datam $\frac{1}{2}OQ$, area AQS adeóque & area APS eſt ut differentia inter arcum AQ & rectam SR ex foco S in radium QO perpendiculariter demiſſam.

(p) *367.* Si ex puncto Q ad diametrum AB, demittatur perpendiculum ſeu ſinus arcûs AQ, triangulum OSR, ſimile erit triangulo contento ſub radio OQ ſinu & coſinu arcûs AQ; unde erit SR ad ſinum arcûs AQ, in datâ ratione OS ad OQ ſeu OA; ſed (per conſtr.) $OS : OA = OA : OG$, & OA ad OG ut arcus AQ ad arcum GF, & diviſim AQ $-$SR eſt ad GF$-$ſinu arcûs AQ ut SR ad ſinum arcûs AQ, ſive in datâ ratione OS ad OA. Eſt igitur differentia inter arcum AQ, & rectam SR, adeóque & area APS, ut differentia inter GF, & ſinum arcûs AQ.




(q) Quod autem ſit GK æqualis differentiæ inter arcum GF & ſinum arcûs AQ facile eſt demonſtrare. Sit enim ALI dimidia trochois ſemirevolutione ratæ GFE deſcripta, eriţ GH, æqualis ſemiperipheriæ GFE, & HI æqualis & parallela rectæ GB; Per puncta A, O, L agantur rectæ AD, OC, XT parallelæ & æquales rectæ GH, & trochois deſcripta intelligatur duplici motu circuli AVBQ, al-

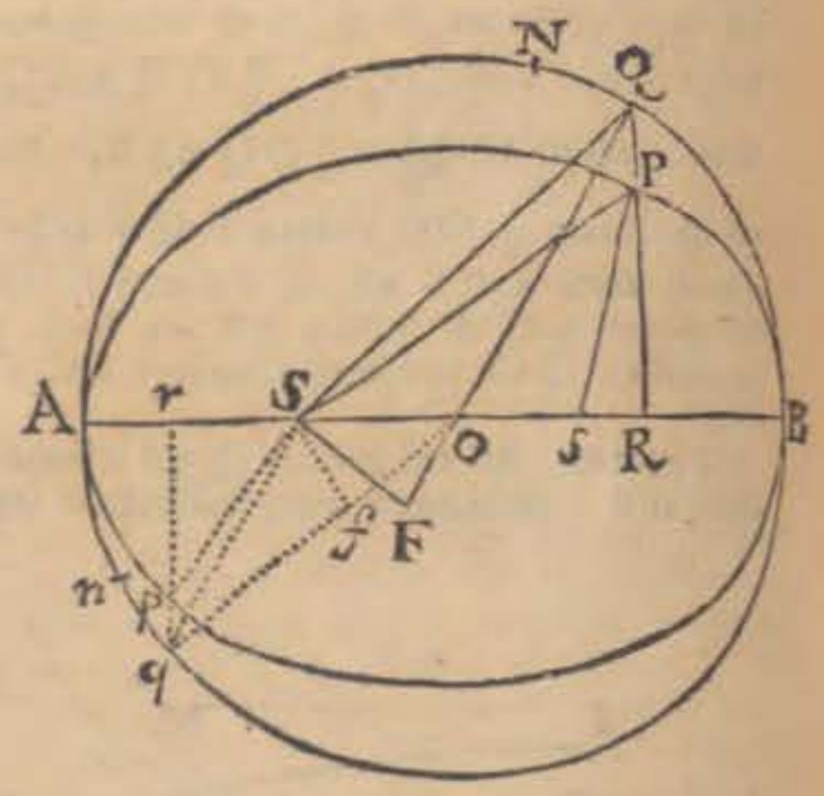
DE MOTU CORPORUM.




altero quidem quo centrum O cum plano circuli uniformiter feratur per rectam O C, altero quo eodem tempore punctum A in circuli periferiâ uniformiter percurrat semiperiferiam AVB, & centrum O, circuli mobilis A V B sit in P quando punctum A pervenit in L & jam percurrit arcum ML; Quoniam in motu æquabili spatia eodem tempore percursa sunt in datâ ratione, erit recta O C (hoc est semicircumferentia rotæ G F E) quam centrum O percurrit, ad semiperiferiam A V B, quam eodem tempore percurrit punctum A, ut O P ad arcum M L, sed semiperiferia G F E est quoque ad semiperiferiam A V B, ut arcus G F ad arcum A Q seu æqualem M L; est igitur G F = O P = Y X, ac proindè Y X − Q X = Y X − Y L = L X = G K = G F − Q X est vero Q X sinus arcus A Q, ergo est G K æqualis differentiæ inter G F & sinum arcus A Q. Q. e. D.

Itaque area A P S, est ut G K, adeóque area A P S, est ad aream semiellipsis A P B (vid fig. Newt.) ut G K ad G H, & area A P S, est ad aream totius ellipseos ut G K ad 2 G H, seu tempus per arcum A P, est ad tempus unius revolutionis in Ellipsi ut G K ad perimetrum rotæ. Si ergò capiatur G K ad rotæ perimetrum ut est tempus per A P, ad tempus periodicum & cætera fiant ut in Newtonianâ constructione, erit P locus corporis in Ellipsi. Ex demonstratis quædam deducuntur corollaria.

368. Cor. 1. Planeta revolvatur in El-




lipsi A P B vi tendente ad umbilicum S quem sol occupat, sitque linea apsidum, seu axis major A B, centrum O, ac proindè excentricitas seu distantia centri O à sole S, S O; B aphelion seu punctum in orbitâ à sole remotissimum, A perihelion sive punctum soli proximum, locus planetæ in P; centro O radio O B describatur circulus B Q A qui dicitur circulus excentricus, & per P agatur recta Q R axi A B normalis & circulo occurrens in Q, junganturque S P (quæ dicitur intervallum) & S Q. Ex demonstratis (251) manifestum est aream S Q B esse ad aream totius circuli ut est area S P B ad aream totius ellipseos. Quare si area circuli B Q A rectâ S Q ex foco S ductâ in datâ ratione

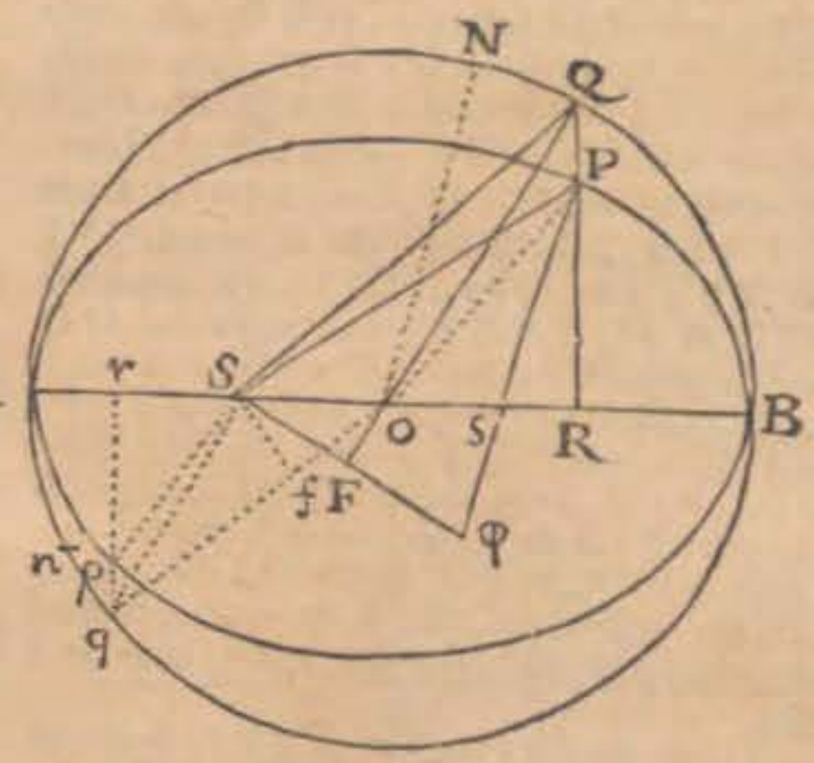
ne divisa fuerit, demisso ex puncto Q, perpendiculo QR ellipsi occurrente in P, & junctâ SP, erit etiam area ellipseos in eâdem datâ ratione divisa. Ut itaque rectâ ex umbilico S ductâ abscindatur ellipseos area data, seu quæ sit ad aream totius Ellipseos in ratione datâ, sufficit rectam SQ, in circulo ducere quæ aream circuli in illâ datâ ratione secet.

369. Cor. 2. In radium QO si opus fuerit productum, ex umbilico S demittatur perpendiculum SF, & erit, (ex Dem.) area SQB ut arcus BQ + recta SF si motus fiat ab aphelio B ad perihelium A per arcum BQA, sed si planeta à perihelio A ad aphelion B feratur per ApB, erit area ASq, ut arcus Aq − recta Sf; hinc si capiatur arcus BN, vel An, proportionalis tempori quo planeta percurrit arcum BP, vel Ap, erit BQ + SF = BN, vel Aq − Sf = An, adeóque SF = QN, vel Sf = qn. Et si datus fuerit arcus BQ vel Aq, & priori addatur arcus NQ vel posteriori demtur arcus nq æqualis rectæ SF vel Sf, erit arcus BN proportionalis tempori quo planeta fertur per arcum BP, arcus An proportionalis tempori per arcum Ap, & arcus BAn proportionalis tempori per arcum BPAp.

370. Arcus BQ dicitur anomalia excentri, angulus BSP sub quo distantia planetæ ab aphelio BP ex sole videtur anomalia vera vel coæquata seu angulus ad Solem dicitur; tempus verò quo planeta ab aphelio B ad orbitæ suæ punctum quodlibet P digreditur, anomalia media sive simplex appellatur. Undè si tempus periodicum totâ circuli peripheriâ seu 360. gradibus exprimatur, erit arcus BN anomaliæ mediæ æqualis, seu anomaliam mediam exhibebit; cum sit BN ad totam periferiam ut tempus per BP ad tempus periodicum (369). Differentia inter anomaliam mediam & veram seu differentia inter angulum NOB & angulum PSB æquatio centri seu prostaphæresis vocatur.

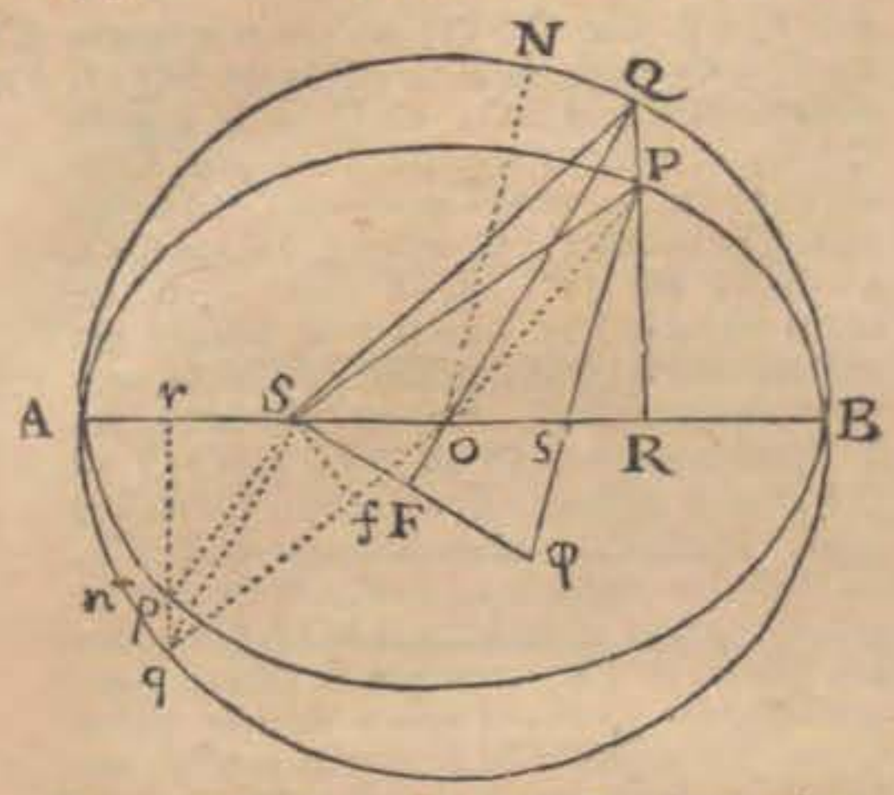
371. Ex datâ anomaliâ verâ seu angulo BSP, facile invenitur ei congrua anomalia media, seu arcus BN, quoniam enim sumpta recta SR pro sinu toto, est PR tangens anguli PSR, & QR tangens anguli QSR, atque PR ad QR ut minor axis ellipseos ad majorem; si fiat ut axis minor ad majorem, ità tangens anguli dati PSB ad $4^{um}$., invenietur tangens anguli QSB sive QSO, ac proindè angulus QSO; hinc datis in triangulo SQO, duobus lateribus SO, OQ cum angulo QSO, invenietur angulus SOQ, & illius ad duos rectos complementum QOB seu anomalia excentri BQ dabitur. Fiat ut QO, ad SO, ità 57°. 29578 (qui arcus est radio æqualis) ad quartum & dabitur arcus æqualis SO in gradibus gradûsque partibus decimalibus, dicatur hic arcus *B*, & quoniam est SO ad SF, ut OQ ad QR, seu ut radius ad sinum anguli QOB sive arcus BQ, fiat ut radius ad sinum arcûs BQ, ità SO sive arcus *B*, ad $4^{um}$., & dabitur in gradibus arcus in peripheriâ BQA sumendus æqualis rectæ SF; cumque sit recta SF æqualis arcui QN, (369.) dabitur arcus QN, & proindè BN anomalia media, atque hinc facile est anomaliarum & æquationum centri tabulas construere.

372. In orbitis planetarum non admodùm excentricis, datâ anomaliâ mediâ facile per approximationem duabus methodis sequentibus invenitur anomalia coæquata.



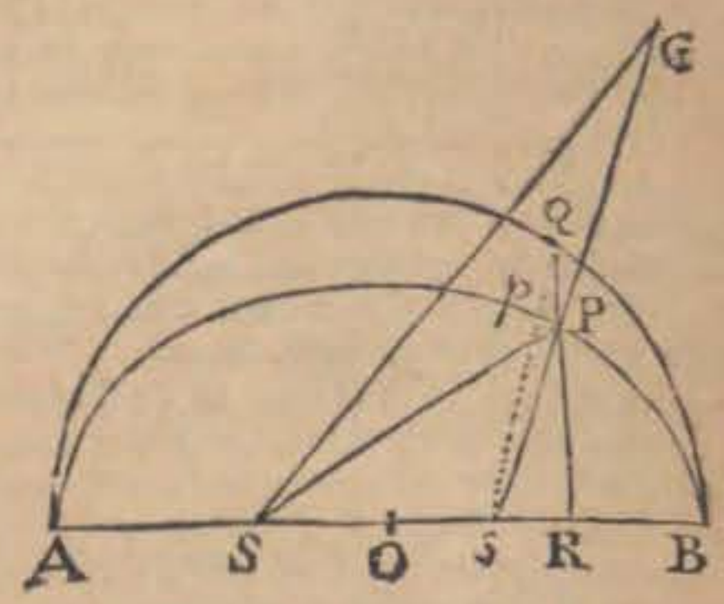

Methodus Wardi. Ad secundum focum s, fiat angulus BsP, æqualis anomaliæ mediæ, jungatur SP, erit angulus PSB, anomalia vera, quod quidem ipse Wardus assumebat ut verum ex Hypothesi merâ, sed quod etiam ex suppositione areas esse temporibus proportionales deducitur, saltem quam proximè: est enim angulus NOB sive anomalia media, æqualis angulis QOB & NOQ, & QOB sive anomalia excentri, est æqualis angulis QSB (sive PSB neglecto QSP) & SQO, ergo angulus NOB est æqua-

DE MOTU CORPORUM.

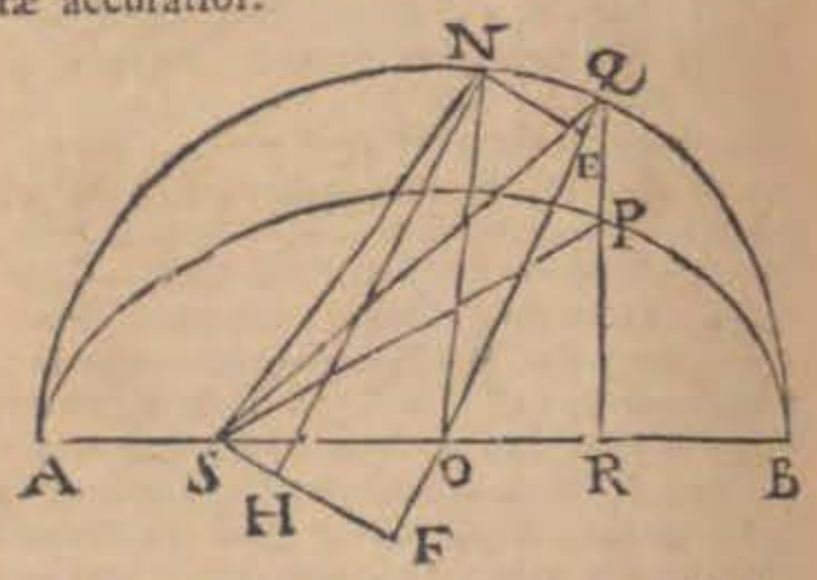



lis angulis PSB, SQO, NOQ quibus etiam quam proximè æqualis est angulus PsB, nam coeuntibus focis S & s cum centro O, puncta Q & P etiam coeunt & angulus SPO angulo SQO est quam proximè æqualis; pariter ut QO proximè coincidit cum PO fingatur SF esse perpendicularem in ipsam PO, & produci donec cum Ps producto in φ concurrat, erunt quam proximè OF, sφ parallelæ, ideoque ob æquales SO, Os, æquales erunt SF & Fφ, SP & Pφ, ut & anguli SPF & FPφ sive OPs, sed ob SF æqualem QN & SQ sive SP prope æqualem OQ est angulus SPF sive OPs prope æqualis angulo NOQ: ergo totus angulus SPs est æqualis angulis SQO & NOQ simul sumptis, & cum angulus PsB sit æqualis angulis PSB & SPs, æqualis prope erit angulis PSB, SQO, NOQ sicut angulus NOB, ergo angulus PsB est quam proximè anomalia media cujus anomalia coæquata est PSB.

Dato autem angulo BsP, angulum PSB, ità quærit Wardus. Producatur sP, ad G, ut sit PG = PS, & jungatur SG, erit sG = SP + Ps = AB (ex nat. Ellipf.) adeóque in triangulo GsS, datis lateribus Gs, Ss, angulo SsG dantur anguli SGs (= GSP, ob SP = PG) & GSs, undè cognoscetur angulus PSs sive PSB æqualis nempe differentiæ angulorum GSs, GSP, quarè in triangulo SPs, datis angulis duobus PsS, PSs, angulo SPs, qui est summa angulorum GSP, SGP, & latere Ss, invenietur latus SP seu intervallum.



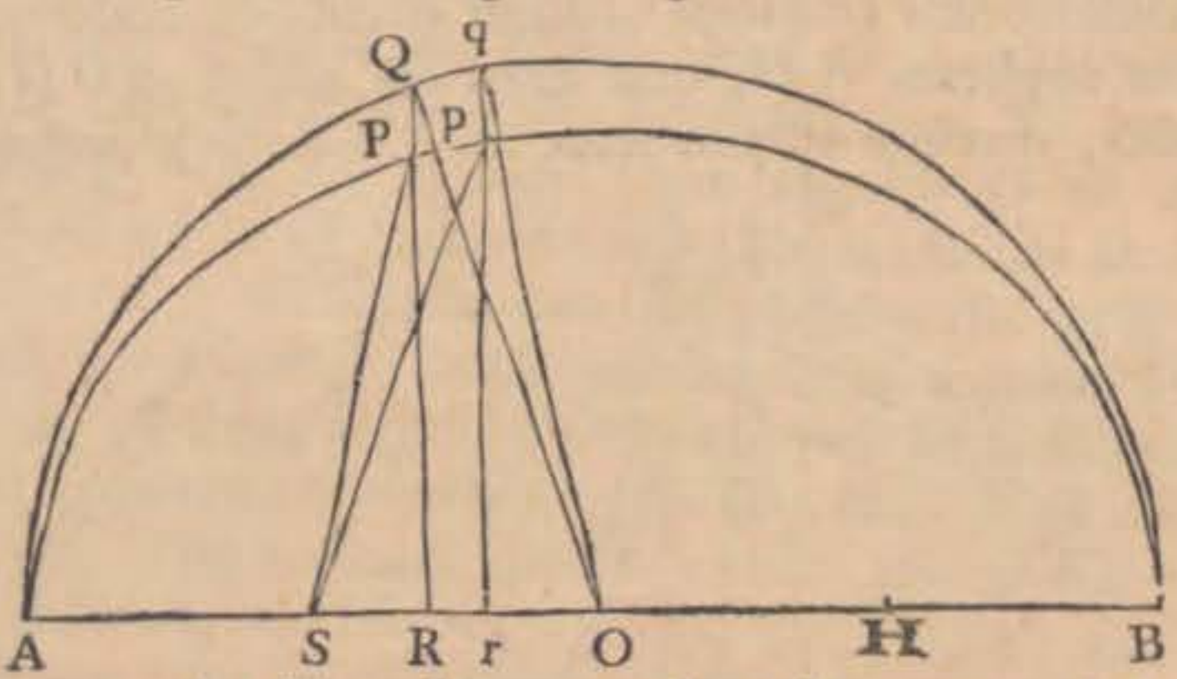

Ubi excentricitas paulo major est. Wardi methodum ità corrigit Bullialdus. Per punctum P Wardi methodo determinatum agatur QR axi AB normalis, & excentrico occurrens in Q, jungaturque sQ, orbitam secans in p, erit p, locus planetæ accuratior.




Methodus Cassini. Omnibus positis (ut suprà num. 369.) jungantur SN, ON & agantur NH rectæ QF parallela & lineæ SF occurrens in H, & NE parallela SF rectæ QF occurrens in E, erit NE = HF sinus arcûs NQ; cumque sit SF = NQ (369) erit SH differentia inter arcum NQ & ipsius sinum NE; si excentricitas SO exigua fuerit erit fere NQ = NE = HF = SF & proindè SN parallela FQ, adeóque angulus SNO, æqualis angulo NOQ; Porrò in triangulo SNO, datis duobus lateribus NO, SO, & angulo intercepto SON (complemento nempe anomaliæ mediæ datæ ad duos rectos) invenietur angulus SNO seu NOQ, & ipsius mensura nempè arcus NQ; & inde innotescet anomalia excentri BQ; Hinc in triangulo SQO, datis lateribus SO, OQ & angulo SOQ, invenietur ang-

## *Scholium.*

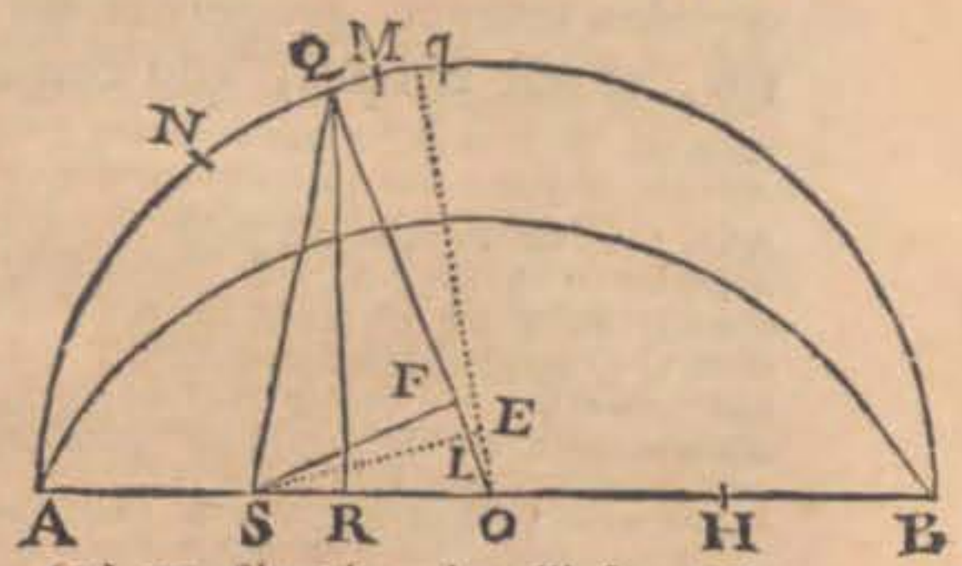
(r) Cæterum, cum difficilis ſit hujus curvæ deſcriptio, præſtat ſolutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui ſit ad angulum graduum 57. 29578, quem




arcus radio æqualis ſubtendit, ut eſt umbilicorum diſtantia *SH* ad ellipſeos diametrum *AB*; tum etiam longitudo quædam L, quæ ſit ad radium in eâdem ratione inversè. Quibus ſemel inven-

angulus QSO, & ſumptâ SR pro ſinu toto, erit QR ad PR ſeu axis major ad minorem, ut tangens anguli dati QSB ad tangentem anguli ad ſolem PSB, qui ità obtinebitur.

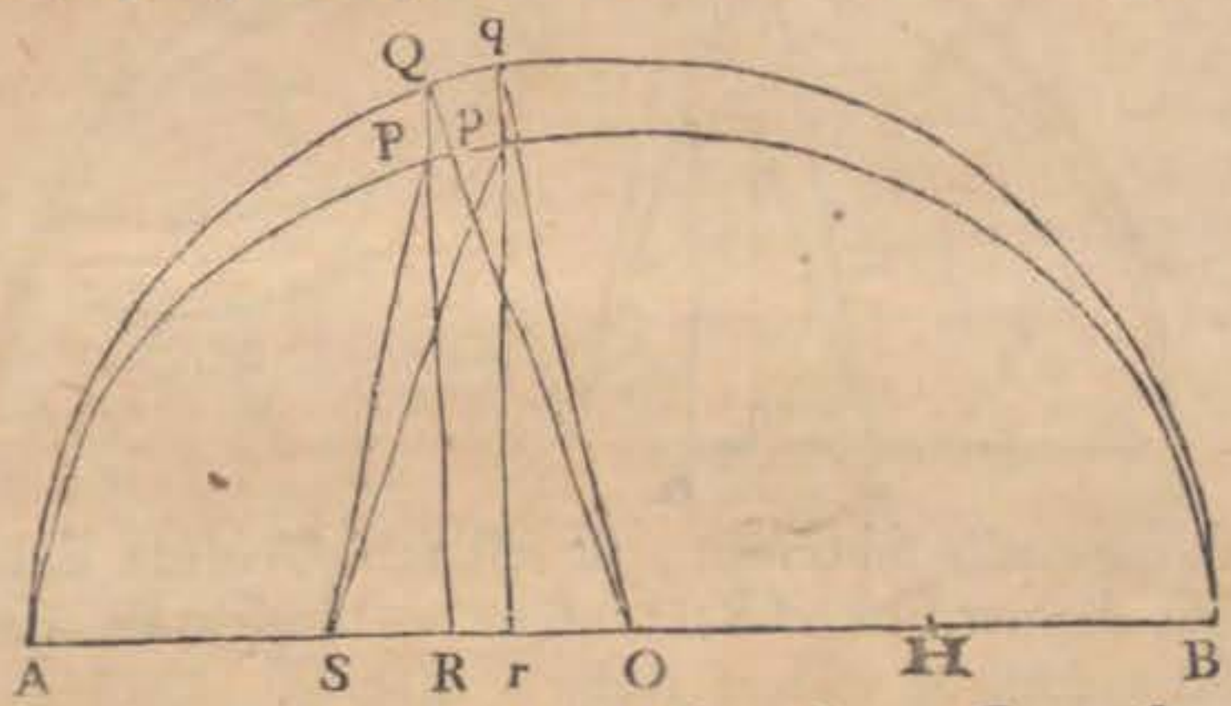
Hæc ſatis ſunt in orbitis planetarum non valde excentricis, ſed in orbitis Mercurii & Martis quarum major eſt excentricitas ità invenitur arcus NQ. Ex datis in triangulo SNO, lateribus SO, NO, & angulo SON, inveniuntur latus SN, & angulus SNO; deindè quæritur in partibus decimalibus radii ON differentia inter arcum qui metitur angulum SNO, & ejus ſinum quæ citrà errorem ſenſibilem ſupponi poteſt æqualis rectæ SH, ſeu differentiæ inter arcum NQ anguli NOQ menſuram & ejus ſinum NE. Sitque ille decimalium numerus *A*. Inveniatur numerus decimalium radii SN quem eadem linea SH continet dicendo ut SN ad NO ſic *A* ad numerum quæſitum *B*, & quoniam in triangulo rectangulo SHN eſt SN ad ſinum totum ut SH ſive *B* ad ſinum anguli SNH, invenietur ergò angulus SNH, ex angulo invento SNO ſubducendus, ut relinquatur angulus HNO, ſeu æqualis NOQ, ſive arcus NQ.




(r) 373. Sit axis major ellipſeos AB, centrum O, umbilici S & H, & feratur planeta à perihelio A ad aphelium B, radio AO deſcribatur circulus excentricus AQB; quoniam radius circuli æqualis eſt arcui graduum 57. 29578, ſi fiat AB ad SH ſeu QO ad SO, ut arcus vel angulus 57. 29578, ad arcum *B*, erit *B* arcus æqualis rectæ SO. Cognoſcitur arcus AN tempori proportionalis, & dicatur *N*; deindè per methodum Wardi aut Caſſini vel aliâ ratione inveniatur arcus

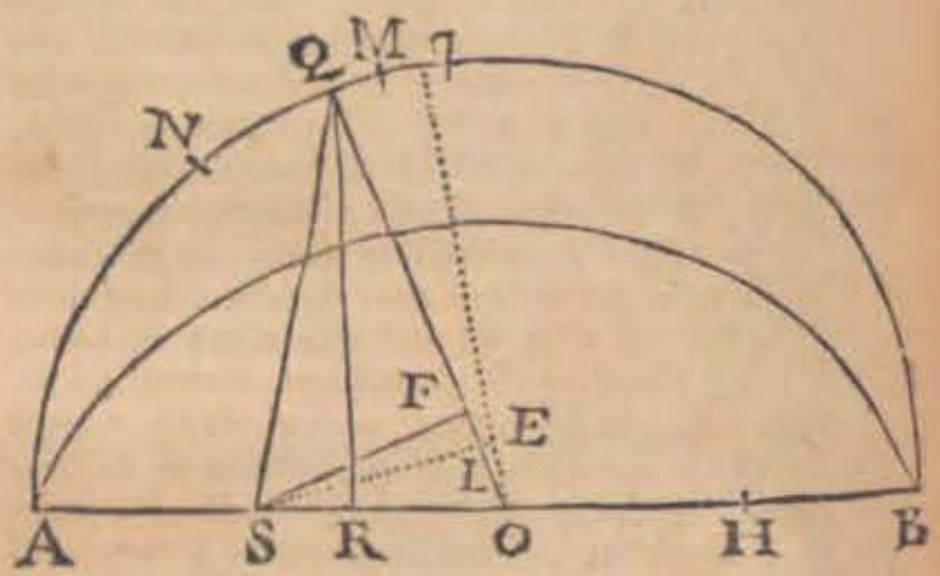
DE MOTU CORPORUM.

ventis, problema deinceps confit per ſequentem analyſin. Per conſtructionem quamvis, vel utcunque conjecturam faciendo, cognoſcatur corporis locus $P$ proximus vero ejus loco $p$. Demiſſâque ad axem ellipſeos ordinatim applicatâ $PR$, ex proportione diametrorum ellipſeos, dabitur circuli circumſcripti $AQB$ ordinatim applicata $RQ$, quæ ſinus eſt anguli $AOQ$ exiſtente $AO$ radio, quæque ellipſin ſecat in $P$. Sufficit angulum illum




rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoſcatur etiam angulus tempori proportionalis, id eſt, qui ſit ad quatuor rectos, ut eſt tempus, quo corpus deſcripſit arcum $Ap$, ad tempus

AQ, proximè æqualis anomaliæ excentri à perihelio A ſumptæ, erit arcus NQ æqualis rectæ SF ex umbilico S in radium QO perpendiculariter demiſſæ (369). fiat ut SH ad AB ſive ut SO ad QO, ità radius $R$ ad longitudinem quandam $L$, & erit $QO = \frac{SO \times L}{R}$. & quoniam triangulum SOF, ſimile eſt triangulo QOR erit QO:QR=SO:SF, hoc eſt, radius ad ſinum anguli QOA, ut arcus $B$ ad alium arcum $D$ qui erit æquales rectæ SF: Si itaque arcus AQ rectè aſſumptus fuiſſet foret arcus $D$ æqualis arcui NQ (369): Si verò arcus AQ accuratus non eſt, capiatur NM=$D$, punctum M cadet ſuprà vel infra punctum Q. Sit anomalia excentri accurata (quæ eſt incognita) Aq, & in radium qO cadat perpendiculum SE erit æquale Nq




(369) undè SE−SF, hoc eſt ferè LE=Nq−NM=Mq=Qq−QM. Quoniam verò angulus QOq, parvus eſt, erit OE:Oq ſive OQ=LE:Qq=Qq−QM:Qq. Unde OQ−OE:OQ=QM:Qq.

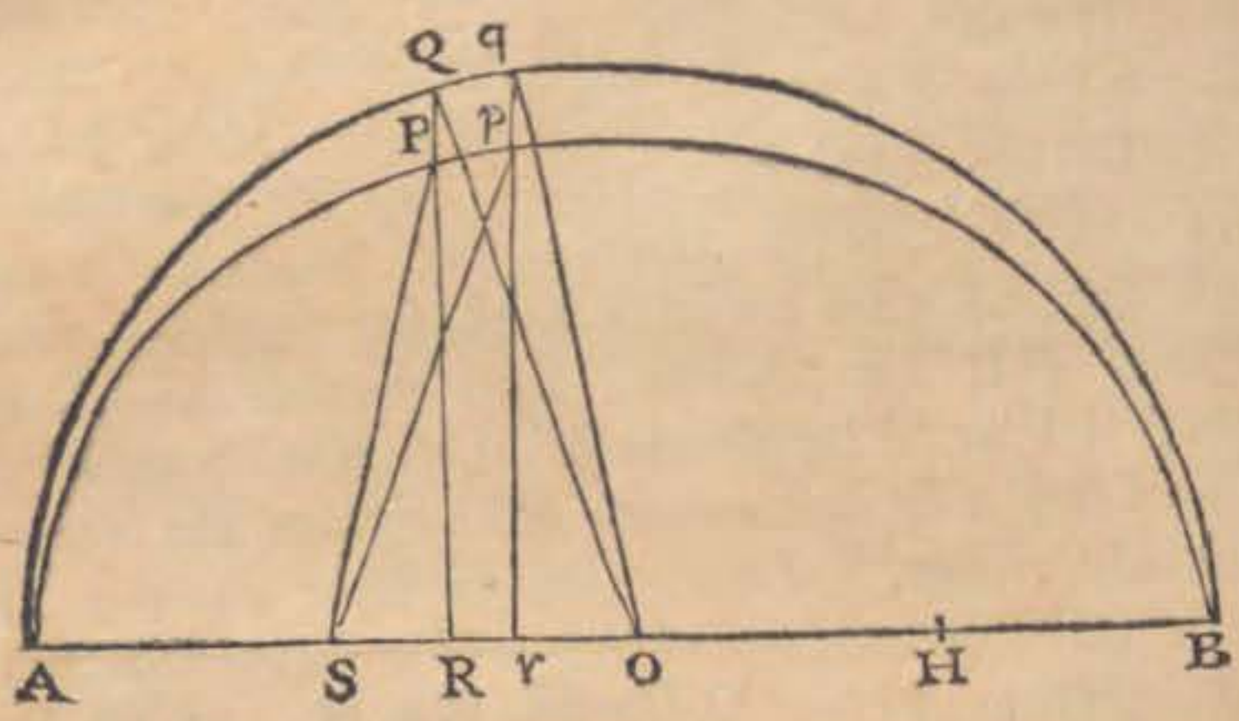
and

pus revolutionis unius in ellipſi. Sit angulus iſte N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut eſt ſinus iſte anguli $AOQ$ ad radium, & angulus E ad angulum $N-AOQ+D$, ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem L coſinu anguli $AOQ$ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Poſtea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut eſt ſinus anguli $AOQ+E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N-AOQ-E+F$ ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem coſinu anguli $AOQ+E$ diminutam ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Tertiâ vice capiatur angulus H ad angulum B, ut eſt ſinus anguli $AOQ+E+G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N-AOQ-E-G+H$, ut eſt longitudo L ad eandem longitudinem coſinu anguli $AOQ+E+G$ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Et ſiç pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus $AOq$ æqualis angulo $AOQ+E+G+I+$&c. Et (f) ex coſinu

Sed OE, eſt ferè æqualis OF, ergò OQ $-$OF : OQ = QM : Qq. Porrò OQ, eſt ad RO, ſeu radius ad coſinum anguli AOQ, ut SO, ad OF, adeóque $OF=\frac{SO\times \text{cof. } AQ}{R}$. Creſcentibus AN, AQ, QR, decreſcit RO, & evaneſcit ubi AQ eſt circuli quadrans, ac tandem fit negativa ubi AQ quadrante major eſt. Quarè cum ſit $+OQ:+SO=RO:OF$, OF idem ſignum $+$ vel $-$ habere debet cum RO, adeóque ſi angulus AOQ, ſeu arcus AQ eſt quadrante minor, OF eſt quantitas affirmativa; Si AQ quadrans eſt, OF evaneſcit; Si AQ eſt quadrante major. OF fit negativa. Eſt igitur $OQ-\frac{SO\times \text{cof. } AQ}{R}:$ $OQ=QM:Qq$, ſeu ob $QO=\frac{SO\times L}{R}$, eſt $\frac{SO\times L-SO\times \text{cof. } AQ}{R}:\frac{SO\times L}{R}$, ſive $L-\text{cof. } AQ : L = QM : Qq$, ſi fuerit AQ minor quadrante, & $L+\text{cof. } AQ : L = QM : Qq$, ſi fuerit AQ major quadrante. Eſt autem arcus $QM=AN=AQ+NM=N-AQ+D$, quarè ſi arcus Qq, dicatur $E$, erit $E:N-AQ+D=L:L\mp\text{cof. } AQ$ & $AQ+E$, erit æqualis Aq; invento itaque $E$ per ultimam proportionem, ſi loco AQ capiatur arcus accuratior Aq, ſeu angulus $AOQ+E$, & inſtituatur proceſſus priori ſimilis, capiendo arcum $F$, ad arcum $B$, ut eſt ſinus arcûs $AQ+E$ ſeu Aq ad radium, & arcum $G$ ad arcum $N-Aq+F$, ſeu, $N-AQ-E+F$, ut eſt longitudo $L$, ad longitudinem eandem coſinu anguli $AOq$ ſeu $AOQ+E$ diminutam ubi angulus $AOq$ recto minor eſt, auctam ubi major, erit $AQ+E+G$, ſeu $Aq+G$, arcus magis verus, & ſimiliter ſi loco arcûs Aq, uſurpetur arcus $Aq+G$ & idem repetatur proceſſus, invenietur novus arcus $AQ+E+G+I$, ſeu $Aq+G+I$, accuratior arcu $Aq+G$, & ſic pergere licet in infinitum & quantumvis proxime ad veritatem accedere.

(f) * *Ex coſinu Or.* Eſt enim radius ad coſinum anguli inventi AOq, ut qO ad Or, invenientur ergò punctum r, & ordinata qr. Deinde ſi fiat ut axis major ad minorem, ità qr ad pr, habebitur locus corporis p.

DE MOTU CORPORUM.



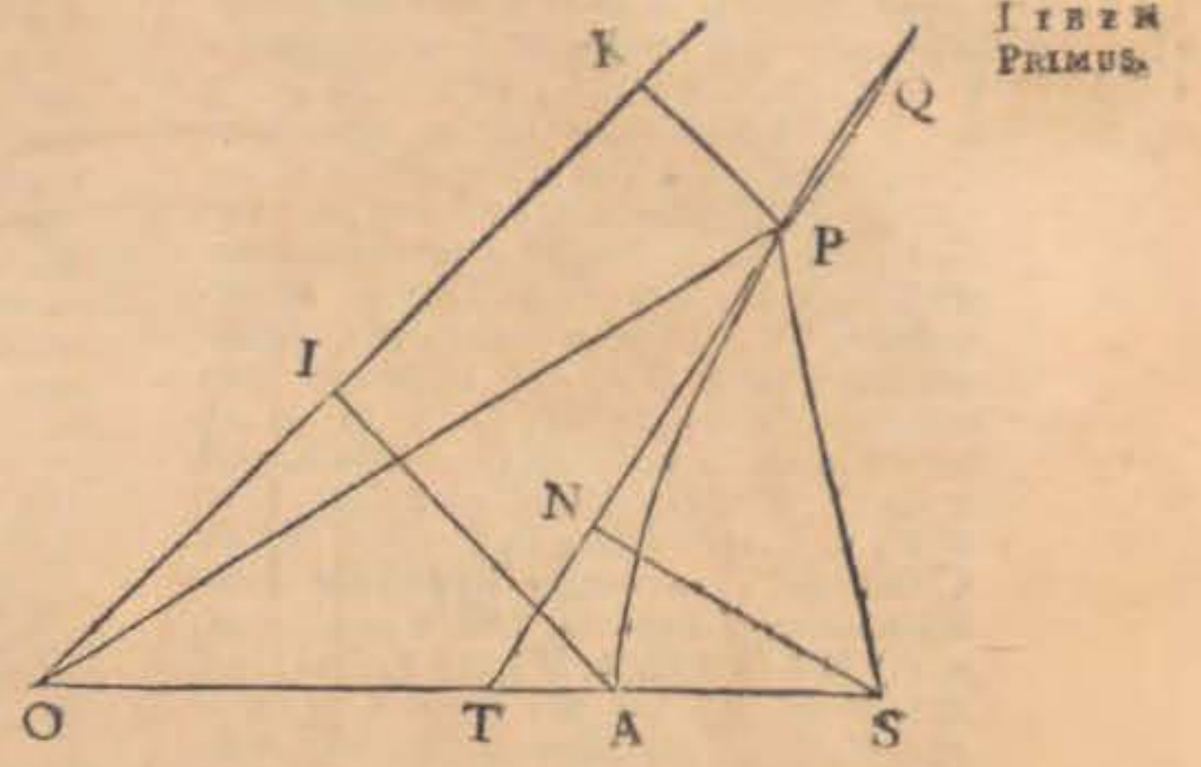

finu ejus *Or* & ordinata *pr*, quæ eſt ad ſinum ejus *qr* ut ellipſeos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus *p*. (t) Si quando angulus N − *A O Q* + D negativus eſt, debet ſignum + ipſius E ubique mutari in −, & ſignum − in +. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I, ubi anguli N − *A O Q* − E + F, & N − *A O Q* − E − G + H negativi prodeunt. Convergit autem ſeries infinita *A O Q* + E + G + I + &c. quam celerrimè, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum ſecundum E. Et fundatur calculus in hoc theoremate, quod area *A P S* ſit ut differentia inter arcum *A Q* & rectam ab umbilico *S* in radium *O Q* perpendiculariter demiſſam.

Non

* (t) Si quandò angulus *N* − A Q + *D*, ſeu arcus Q M, (vid fig. Not.) negativus eſt, ſeu ſi punctum M, cadit infrà punctum Q, debet ſignum ipſius + *E*, ubique mutari in −, & ſignum − in +. Quoniam enim ſuprà invenimus *E*: *N* − A Q + *D* = *L* : *L* ∓ cof. A Q, ſi fuerit arcus *N* − A Q + *D*, negativus, debet quoque arcus *E* eſſe negativus, & arcus A q erit A Q − *E*. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I &c. ob eandem rationem.

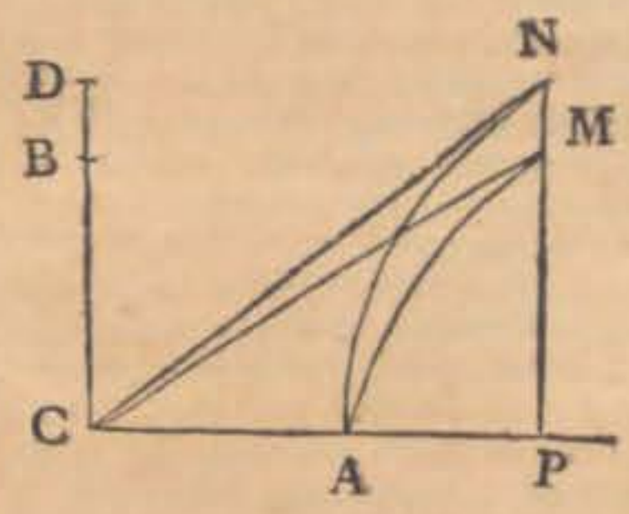
Dixi-

Non dissimili calculo conficitur problema in hyperbolâ. Sit ejus centrum *O*, vertex *A*, umbilicus *S* & asymptotos *OK*. Cognoscatur quantitas areæ abscindendæ tempori proportionalis. Sit ea *A*, & fiat conjectura de positione rectæ *SP*, quæ aream *APS* abscindat veræ proximam. Jungatur *OP*, & ab *A* & *P* ad asymptoton agantur *AI*, *PK* asymptoto alteri parallelæ, & (a) per tabulam logarithmorum dabitur area




(a) Diximus superius (Theor. IV. de Hyp. p. 124.) aream inter asimptotum, Hyperbolam, ordinatam in vertice erectam & aliam ordinatam comprehensam, esse Logarithmum abscissæ, idem verò, more veterum demonstrare & ad hanc Propositionem propius accommodare hic non pigebit.

Lemma. Sint duæ hyperbolæ AM, AN quarum centrum C, semidiameter communis AC, semidiametri conjugatæ CB, CD, per punctum quodvis P agatur PMN ordinatim ad diametrum CP applicata, hyperbolis occurrens in punctis M & N, junganturque CM, CN spatia hyperbolica AMP, ANP & sectores AMC, ANC sunt ad invicem in ratione semidiametrorum conjugatarum CB, CD, vel etiam ordinatarum PM, PN. Nam ex naturâ hyperbolæ (Theor. II. de Hyp.) $PM^2 : CB^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$, & $PN^2 : CD^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$, undè $PM^2 : CB^2 = PN^2 : CD^2$, & $PM^2 : PN^2 = CB^2 : CD^2$, ac PM : PN = CB : CD, cùmque idem semper eveniat quâcumque in parte cadat ordinata PMN, liquet spatia hyperbolica AMP, ANP esse inter se ut CB ad CD, vel PM



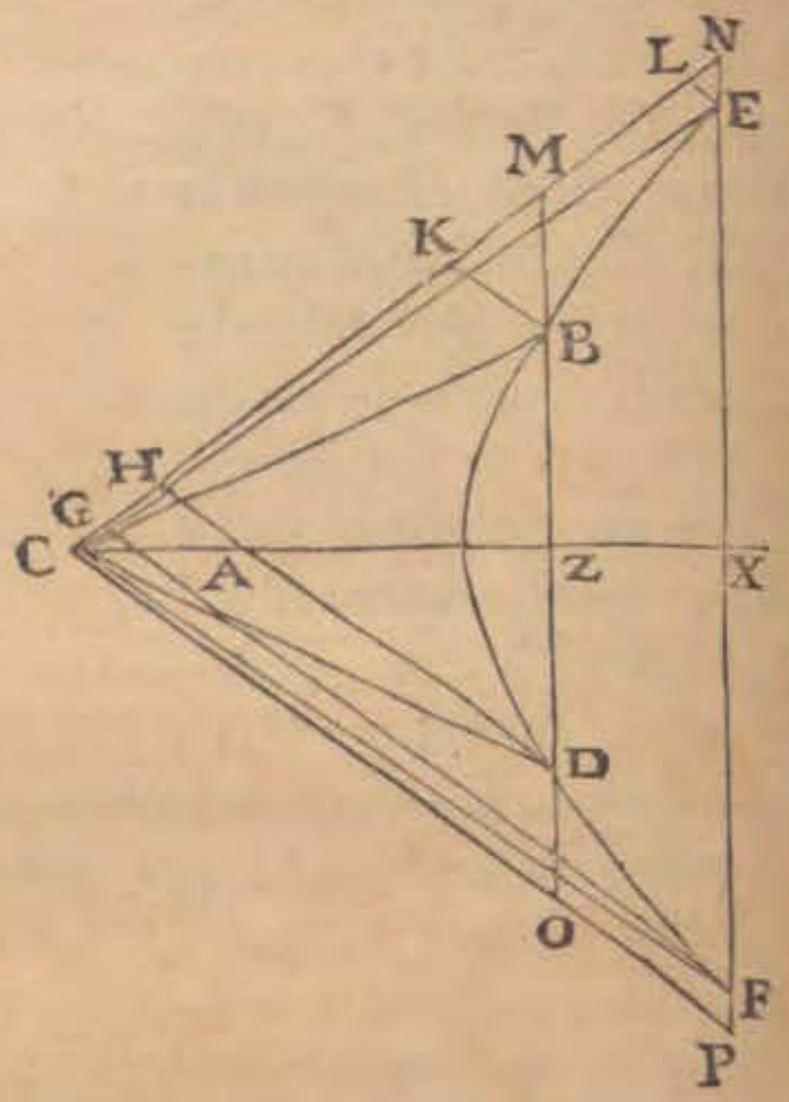

ad PN, sed triangula CPM, CPN sunt ad invicem ut PM ad PN vel CB ad CD; ergò CPM − AMP : CNP − ANP = AMC : ANC = PM : PN = CB : CD. Q. e. D.

375. Coroll. Si duæ semidiametri conjugatæ CA, CD fuerint æquales, hyperbola AN erit æquilatera; quare inventâ quadraturâ spatiorum hyperbolicorum ANP vel ANC in hyperbolis æquilateris, habebitur etiam quadratura spatiorum hyperbolicorum AMP vel AMC in aliis quibusvis hyperbolis.

376.

DE MOTU CORPORUM.

376. Lemma. Si ſuper hyperbolæ EBDF aſymptoto CN ſumantur quatuor partes CG, CH, CK, CL, ut ſit CG:CH =CK:CL; ducantur autem rectæ GF, HD, KB, LE alteri aſymptoto CP parallelæ, & hyperbolæ occurrentes in punctis F, D, B, E, jungaturque ſemidiametri CF, CD, CB, CE, ſectores hyperbolici CBE, CDF erunt æquales. Agantur enim rectæ BD, EF aſymptotis occurrentes in punctis M, O, N, P, & ob parallelas KB, HD, CO erit MB:MK =DO:CH, & ob parallelas LE, GF, CP erit etiam NE:NL=FP:CG; ſed, ex naturâ hyperbolæ inter aſymptotos (Lem. I. de Conic. pag. 115.) MB=DO, & NE=FP, undè MK =CH & NL=CG; Porrò CG:CH =CK:CL (per hyp.) hoc eſt, NL:MK=CK:CL=LE:KB, ex naturâ hyperbolæ intrà aſymptotos (Theor. IV. de Hyp. p. 124.) rectæ igitur NE, MB, hoc eſt, EF, BD erunt parallelæ, ac proindè, linea per earum medium X, Z ducta erit Diameter, tranſibitque per centrum C; (Lem. IV. de Conic. p. 119.) unde facile deducitur trapezia MXZN, OXZP fore æqualia ut & areæ mixtilineæ BXZE, DXZF, unde ſingulis ex correſpondenti trapezio ſubſtractis relinquentur areæ MBEN & ODFP æquales, quibus addantur Triangula MBC, ODC, æqualia ob baſes æquales MB, OD in eâdem linea poſitas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, erunt æquales areæ CMNEBC, COPFDC, ex quibus denique ſubſtractis Triangulis NEC, PFC quæ æqualia ſunt ob baſes æquales NE, PF in eâdem lineâ poſitas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, ſupererunt ſectores hyperbolici CBE, CDF inter ſe æquales. Q. e. D.




377. Lemma. Si per puncta quævis aſymptoti CL, agantur duæ rectæ GF, HD alteri aſymptoto CP parallelæ, & hyperbolæ occurrentes in F & D, jungaturque ſemidiametri CF, CD, trapezium hyperbolicum GFDH æquatur ſectori CFD. Nam, ex naturâ hyperbolæ inter aſymptotos, triangula CHD, CGF, æquantur ob æquales angulos G & H & latera reciproca (per Theor. IV. de Hyp. p. 124.) adeóque ſublato communi triangulo CGA, reſidua ſpatia GADH, CAF erunt æqualia, quibus ſi addatur idem ſpatium hyperbolicum DAF, ſummæ GFDH, CFD erunt æquales. Q. e. D.

378. Coroll. 1. Hinc iiſdem poſitis quæ (num. 376.) trapezia hyperbolica GFDH, KBEL ſunt æqualia.

379. Coroll. 2. Si aſymptoti partes CG, CH, CK fuerint continuè proportionales, duo ſectores CFD, CDB & duo trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, æquantur. Eâdem enim ratione quâ num. 376. oſtendetur rectam BF tangenti per punctum D ductæ eſſe parallelam. Undè ſi ſuper aſymptoto CL ſumantur partes quotcumque CG, CH, CK, CL &c. in continuâ progreſſione geometricâ, & ex punctis G, H, K, L &c. agantur rectæ GF, HD, KB, LE &c. alteri aſymptoto parallelæ, trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, KBEL erunt æqualia; & viciſſim ſi trapezia illa æquantur, erunt rectæ CG, CH, CK, CL &c. in continuâ progreſſione geometricâ.

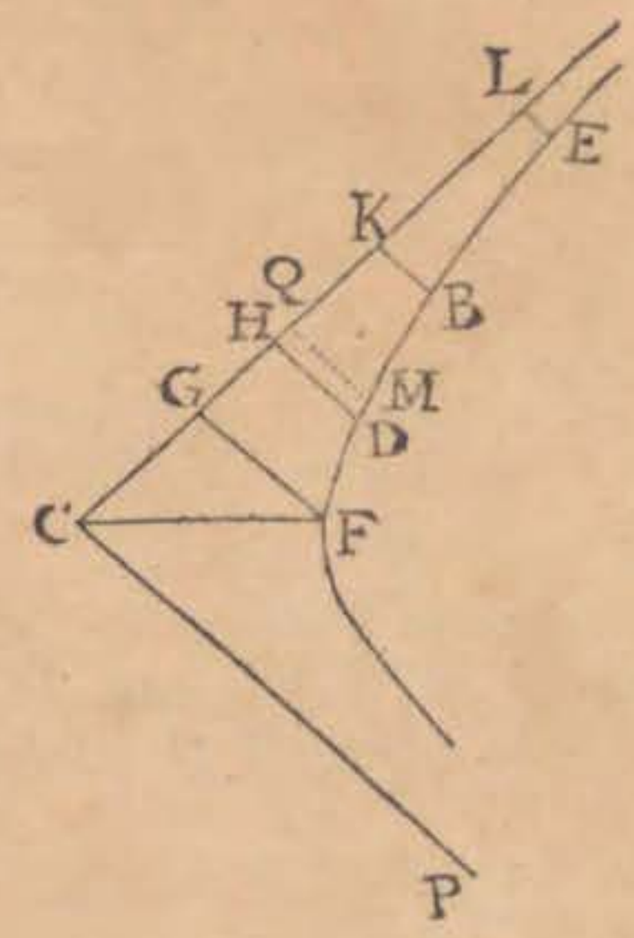
380.

380. Coroll. 3. Sit hyperbola F D B E æquilatera, cujus centrum C, asymptotus C L, semiaxis transversus C F, capiantur in asymptoto partes C G, C H, C K, C L, &c. in continuâ progressione geometricâ, aganturque G F, H D, K B, L E &c., alteri asymptoto C P parallelæ, trapezia hyperbolica G F D H, H D B K, K B E L &c. erunt æqualia; quatè eorum summæ, scilicet o, G F D H, G F B K, G F E L, &c. erunt in continuâ progressione arithmeticâ. Si itaque C G sit unitas, C H, C K, C L, &c. numeri, erunt o, G F D H, G F B K, G F E L, illorum numerorum logarithmi.

381. Coroll. 4. Itaque per logarithmorum hyperbolicorum tabulas, inveniri possunt trapeziorum quorumvis G F D H, B G F K, &c. areæ; Sumptâ enim C G pro unitate, quærantur in numeris valores rectarum C H, C K, &c. & horum numerorum logarithmi exhibebunt trapezia hyperbolica G F D H, G F B K, &c.

382. Coroll. 5. Sit $CG=1$, $GH=x$, $CH=1+x$, $HD=y$, & erit, ex naturâ hyperbolæ inter asyptotos $1+x\times y=1$, adeóque $y=\frac{1}{1+x}$, & trapezii G F D H elementum D H Q M seu $y\,dx=\frac{dx}{1+x}$; Si igitur $L.\ 1+x$, denotet logarithmum numeri $1+x$, erit $L.\ 1+x=$ G F D H, & elementum logarithmi seu $d.\ L.\ 1+x=y\,dx=\frac{dx}{1+x}$. Et similiter elementum logarithmi numeri cujusvis $z$ seu $d.\ L.\ z=\frac{dz}{z}$.

383. Coroll. 6. Cum sit $y=\frac{1.}{1+x}$, si peragatur divisio, erit $y=1-x+x^2-x^3+x^4$ &c. in infinitum, ac proinde $y\,dx=dx-x\,dx+x^2\,dx-x^3\,dx$ &c. in infinitum, & sumptis utrinque fluentibus $S.\ y\,dx=$ G F H D $=L.\ 1+x=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum. Si autem numerus propositus sit unitate minor, seu $1-x$, eodem modo invenietur ipsius



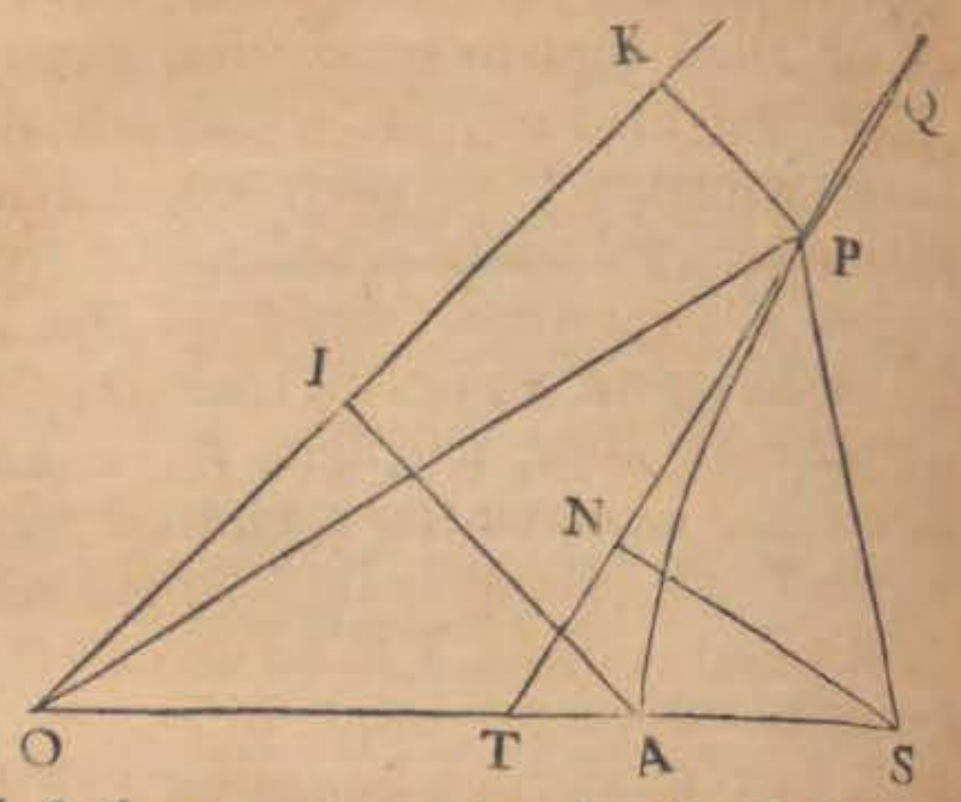

logarithmus $S.\ -y\,dx=L.\ 1-x=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5$ &c.

384. Scholium. Observandum est logarithmos hyperbolicos Neperi à logarithmis Briggii quibus vulgò utimur differre; verùm cum hyperbolici sint semper ad Briggianos seu vulgares in eâdem constanti ratione, nimirum logarithmus hyperbolicus numeri denarii 2. 302585 est ad logarithmum Briggianum numeri denarii 1. 000000, ut quilibet logarithmus hyperbolicus ad ejusdem numeri logarithmum Briggianum, facile est hyperbolicos ad Briggianos & contrà Briggianos ad hyperbolicos reducere, adeóque hyperbolarum quadraturam per logarithmos etiam vulgares invenire. Si dividatur 1. 000000, per 2. 302585 &c., quotiens 0. 4342948 &c. per logarithmum quemvis Hyperbolicum multiplicatus, dabit logarithmum vulgarem, & viceversâ, si logarithmus quilibet vulgaris per 0. 4342948 1 & dividatur, quotiens erit logarithmus hyperbolicus.

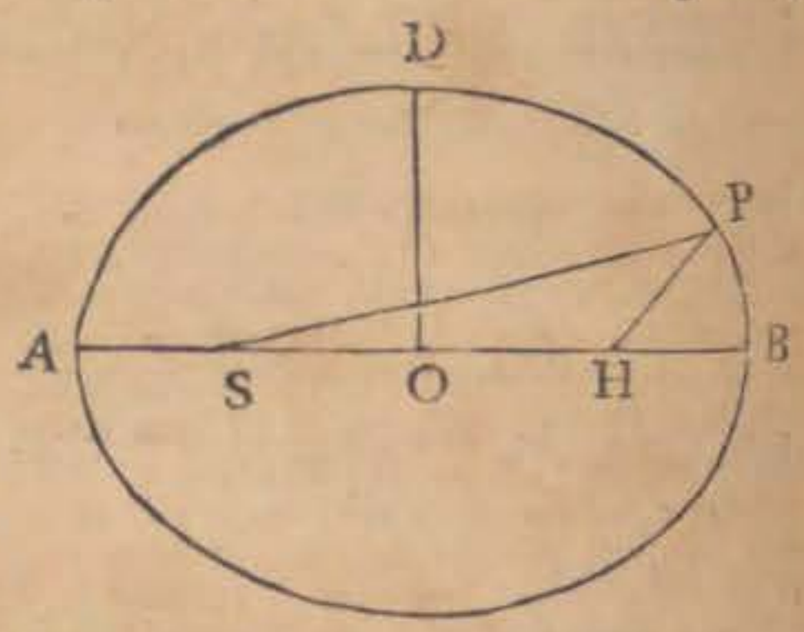
* *Et per tabulam.* (381. 384.)

DE MOTU CORPORUM.

$AIKP$, (b) eique æqualis area $OPA$, quæ ſubducta de triangulo $OPS$ relinquet aream abſciſſam $APS$. Applicando areæ abſcindendæ A & abſciſſæ $APS$ differentiam duplam $2APS-2A$ vel $2A-2APS$ ad lineam $SN$, quæ ab umbilico $S$ in tangentem $TP$ perpendicularis eſt, (c) orietur longitudo chordæ $PQ$. Inſcribatur autem chorda illa $PQ$ inter $A$ & $P$, ſi area abſciſſa $APS$ major ſit areâ abſcindendâ A, ſecus ad puncti $P$ contrarias partes; & punctum $Q$ erit locus corporis accuratior. Et computatione repetitâ invenietur idem accuratior in perpetuum.




Atque his calculis problema generaliter confit analyticè. Verùm uſibus aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis qui ſequitur. Exiſtentibus $AO$, $OB$, $OD$ ſemiaxibus ellipſeos, & L ipſius latere recto, ac D differentia inter ſemiaxem minorem $OD$ & lateris recti ſemiſſem $\frac{1}{2}$ L; quære tum angulum Y, cujus ſinus ſit ad radium ut eſt rectangulum ſub differentia illa D, & ſemiſumma axium $AO+OD$ ad quadratum axis majoris $AB$; tum angulum Z, cujus ſinus ſit ad radium ut eſt

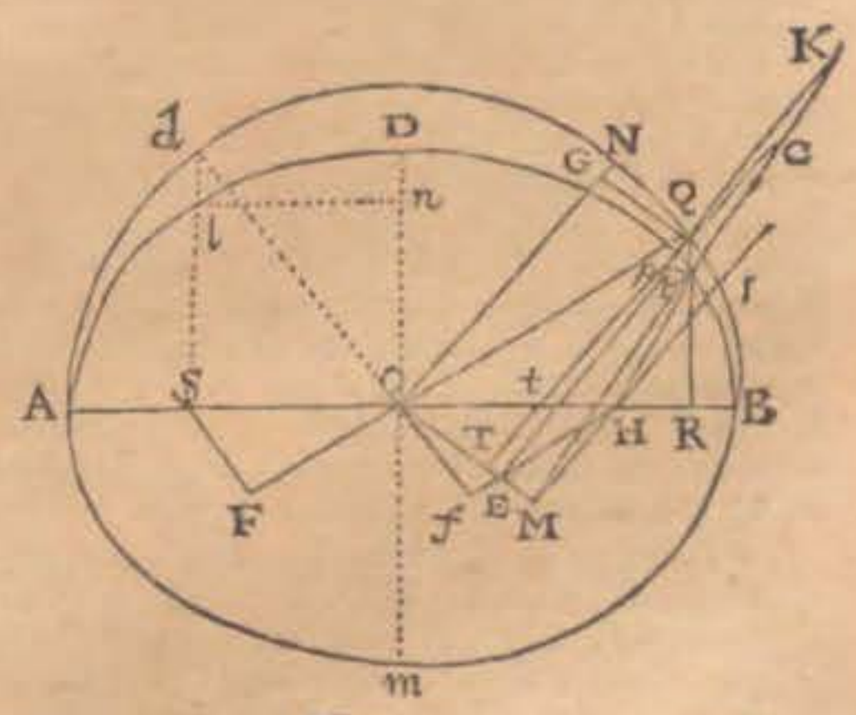



* (b) *Eique æqualis area OPA* (377).

* (c) *Orietur longitudo.* Nam cum arcus PQ exiguus ſit, accipi poteſt pro chordâ PQ ſeu parte PQ tangentis TP productæ; undè triangulum rectilineum SQP, quam proximè æquatur differentiæ ſpatiorum hyperbolicorum APS, ASQ ſeu $A$; ſed triangulum rectilineum $SQP=\frac{PQ\times SN}{2}$, ergò $\frac{PQ\times SN}{2}=A-APS$, vel $=APS-A$, ac proindè $PQ=\frac{2A-2APS}{SN}$ vel $=\frac{2APS-2A}{SN}$, prout area $A$ major vel minor eſt areâ APS.

duplum rectangulum ſub umbilicorum diſtantiâ *SH* & differentiâ illâ D ad triplum quadratum ſemiaxis majoris *AO*. His angulis ſemel inventis, locus corporis ſic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus *BP* deſcriptus eſt, ſeu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V, primam medii motus æquationem, ad angulum Y, æquationem maximam primam, ut eſt ſinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X, æquationem ſecundam, ad angulum Z, æquationem maximam ſecundam, ut eſt cubus ſinus anguli T ad cubum radii. Angulorum T, V, X vel ſummæ T+X+V, ſi angulus T recto minor eſt, vel differentiæ T+X−V, ſi is recto major eſt rectiſque duobus minor, æqualem cape angulum *BHP*, motum medium æquatum; & ſi *HP* occurrat ellipſi in *P*, actâ *SP* abſcindet aream *BSP* tempori proportionalem quam proximè. Hæc praxis ſatis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X, in minutis ſecundis, ſi placet, poſitorum, figuras duas treſve primas invenire ſufficit. Sed & ſatis accurata eſt ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ipſius, cujus æquatio centri maxima eſt graduum decem, error vix ſuperabit minutum unum ſecundum. Invento autem angulo motus medii æquati *BHP*, angulus veri motus *BSP* & diſtantia *SP* in promptu ſunt per methodum notiſſimam. (d) Hacte-

(d) 385. Ellipſeos quam Planeta deſcribit ſit Centrum O, umbilici S, H, & ſemiaxes O B, O D; Sole in S poſito umbilicus alter H erit ferè centrum medii motûs Planetæ, (372) id eſt, ſi ex umbilico H agatur linea H I, quæ cum lineâ apſidum OB, conſtituat angulum IHB anomaliæ mediæ æqualem, recta illa H I, ferè tranſibit per locum Planetæ in orbitâ ellipticâ parum excentricâ revolventis, tranſeat autem H P, per locum verum Planetæ P & erit angulus P H I, anomaliæ mediæ I H B, addendus (vel detrahendus) ut motus medius æquatus BHP habeatur, & angulus P H I aut ipſi æquipollens dicetur æquatio tota medii motus, quam in duas partes dividit Newtonus, quarum unam primam æquationem & al-



DE MOTU CORPORUM.

Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem potest ut mobile rectâ descendat vel rectâ ascendat, & quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo jam exponere.

SEC.

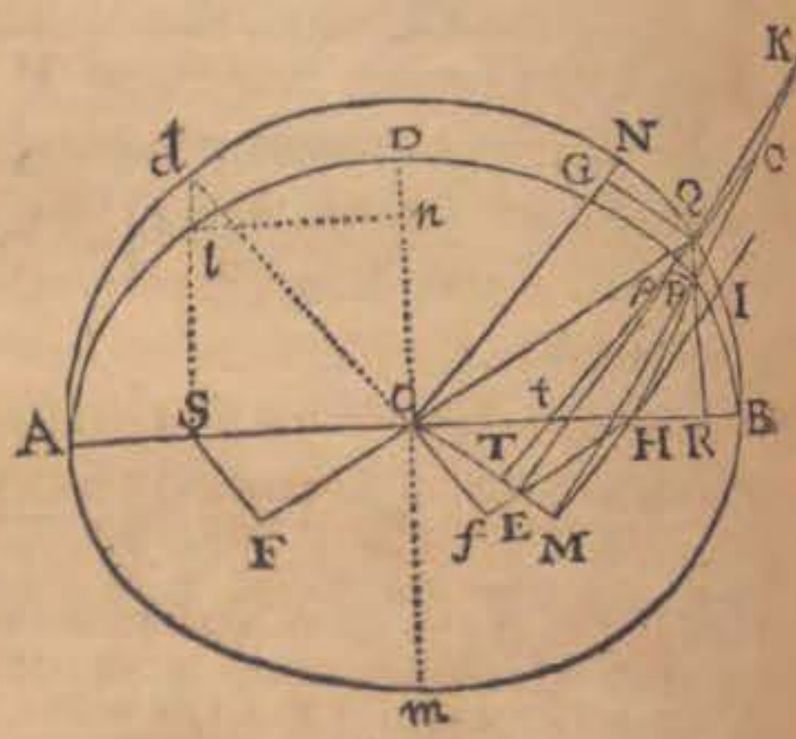
teram secundam æquationem vocat; determinat singulas in iis punctis ubi maximæ sunt, & rationem maximæ æquationis ad aliam in dato quovis puncto adhibendam indicat.

Præcedentes Methodos illustrarunt demonstrationibus & exemplis Keillius & Gregorius, hanc non minus ingeniosam intactam reliquerunt, vestigiis Newtoni insistere conabimur, & aperire quibus fundamentis nitatur hæc approximatio.

386. Producatur IH in M donec occurrat perpendiculo OM, à centro O in ipsam IH demisso jungaturque MP, erit angulus PHI æqualis angulis PMH & MPH, quorum sinus erunt inter se sicut PH ad MH; sed cum MH sit semper minor OH distantia centri à foco, sitque PH distantia foci H ad punctum P Ellipseos, exigua erit MH respectu HP, ideoque minimus est angulus MPH respectu anguli PMH, illum itaque negligit, & hunc solum PMH ut æquationem totam considerat Newtonus.

Ducto verò ut superius expositum est, circulo BQNA super magnum axem Ellipseos AB, & ex P loco Planetæ ductâ PR perpendiculari in eum magnum axem eáque PR productâ donec secet circulum BQNA in Q; ducatur TQ perpendicularis in OM (ideoque parallela lineæ IM) & producatur ita ut secet in C lineam MP etiam productam, erit (per 29. 1. El.) angulus TCM æqualis Angulo CMH sive PMH, eritque TCM æquatio totalis motus medii: Ducatur pariter QO quæ producatur in F donec secetur à perpendiculo SF à foco S in quo sol versatur ducto, sumaturque arcus QN æqualis SF & ducatur NO, erit NOB anomalia media (369) & erit NO parallela lineis IM, TQ; sit QG perpendicularis ducta ex Q in ON, erit QG sinus arcus QN, & erit OT illi sinui æqualis.

Ducatur denique in O, Of, perpendicularis in lineam OQ, ideoque parallela lineæ SF, & ex H in illam ducatur perpendiculum Hf, Triangulum OfH æquale erit Triangulo SOE, ob lineas æqua-




les SO, OH, angulos rectos in F & f, & angulos æquales in S & O ob parallelas SF, Of; erit ergo Of=SF=QN; Concurrant lineæ fH, OM in E, & ex E ducatur per Q linea EQ secans MC (productam si necesse sit) in K, angulus TCM erit æqualis angulis EKM & KQC sive TQE (per 32 1 Elem.) sic ergo Newtonus dividit æquationem totam TCM in angulos EKM, TQE, quos separatim determinat.

Prima ergo æquatio determinatur, ductâ HM ex foco quæ faciat cum axi angulum anomaliæ mediæ æqualem, & ductâ ex centro lineâ OM in illam perpendiculari, tum etiam ductâ ex foco lineâ Hf quæ faciat cum axi angulum anomaliæ excentri æqualem, secetque lineam OM (productam si necesse sit) in E; ex M ducatur linea per locum planetæ P & ex E ducatur linea per Q punctum correspondens in circulo, & concurrant illæ lineæ in K, & angulus EKM est prima æquatio; & si sit KM radius, ME est sinus illius æquationis.

Ut ergo determinetur ME, observandum angulum MHE esse æqualem

angulo NOQ, cum sit NO parallela MH & QO parallela EH per constructionem, sumpto verò MH pro radio erit ME tangens ejus anguli MHE quæ in exiguo angulo pro Arcu ipso tumi potest, ideoque Radius ON sive OB erit ad arcum NQ ut MH ad lineam ME; Dicatur autem angulus anomaliæ mediæ $T$ erit (per constructionem) HOM ejus complementum ad duos Rectos, fiatque ut Radius (qui in toto hoc calculo sumitur æqualis OB) ad Cos. $T$ sic OH ad MH $= \frac{OH \times \text{Cos. } T}{OB}$; Præterea arcus NQ=SF, & est OQ (sive OB) ad QR ut est OS (sive OH) ad SF ideoque SF sive $NQ = \frac{OH \times QR}{OB}$ unde proportio superius inventa $OB : NQ = MH : ME$ in hanc vertitur $OB : \frac{OH \times QR}{OB} = \frac{OH \times \text{Cos. } T}{OB} : ME = \frac{OH^2 \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^3}$ sive quia (per nat. Ellipsis) $OH^2 = OB^2 - OD^2 = OB + OD \times OB - OD$ (per 6. 2. Elem.) est $ME = \frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^3}$.

Radius verò KM hac ratione determinatur: Ducatur ex P linea Pp, perpendicularis in TQ ac proinde parallela lineæ ME, ejus portio terminata in linea EK est quidem ita proximè æqualis ipsi Pp, ut Pp pro illa sumi possit, est verò ob parallelas $ME : Pp = KM : KP$.

Facile autem determinatur ratio ME ad Pp, nam angulus TQR est complementum anomaliæ mediæ QtR, unde est, Radius OB, ad Cos. $T$ sicut QP ad Pp $= \frac{\text{Cos. } T}{OB} \times QP$, est autem QP differentia inter QR & PR, est verò QR ad PR ut semiaxis major OB ad minorem OD, est ergo $PR = \frac{OD \times QR}{OB}$ & $QP = QR - \frac{OD \times QR}{OB} = \frac{QR}{OB} \times OB - OD$, itaque $Pp = \frac{\text{Cos. } T \times QR}{OB^2} \times OB - OD$, ideoque ME ad Pp sicut $\frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^3}$ ad $\frac{OB - OD \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^2}$ utroque autem termino multiplicato per $\frac{OB^3}{OB - OD \times QR \times \text{Cos. } T}$ supereſt ratio $OB + OD$ ad OB, æqualis rationi ME ad Pp sive KM ad KP, unde convertendo est $OD : OB + OD = KM - KP\,(MP) : KM$; sive quia $OB + OD$ est ferè $2OB$, est $OD : 2OB. = MP : KM$.

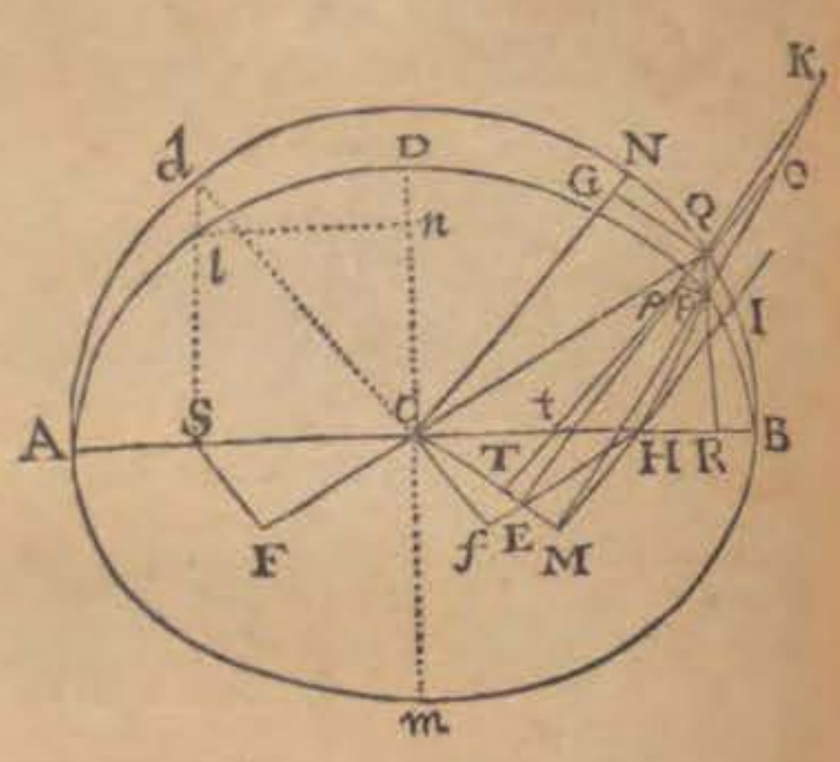
Erit autem MP proximè æqualis lineæ Tp, hæc verò lineæ Qt, cum enim parva sit excentricitas, Qp compensat ferè partem neglectam Tt, est verò Qt parallela NO, ideoque est QtR æqualis anomaliæ mediæ, ergo est sinus anomaliæ mediæ ad radium ut QR ad Qt, sive $\text{sin. } T : OB = QR : Qt = \frac{OB \times QR}{\text{sin. } T} = MP$ unde cum sit OD ad $2OB$ ficut MP sive $\frac{OB \times QR}{\text{sin } T}$ ad KM erit $KM = \frac{2OB^2 \times QR}{OD \times \text{sin } T}$, sed inventa erat $ME = \frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^3}$ multiplica ergo valores KM & ME per $\frac{2 \text{ sin } T \times OD}{QR}$ eritque KM ad ME sive radius ad sinum anguli K ut $4OB^2$ (sive $AB^2$) ad $\frac{2OD \times OB + OD \times OB - OD \times \text{sin } T \times \text{Cos. } T}{OB^3}$ & cum sit semi latus rectum $\frac{1}{2}L = \frac{OD^2}{OB}$, erit $OD - \frac{1}{2}L = OD - \frac{OD^2}{OB} = \frac{OD}{OB} \times OB - OD$, vocetur $D$ ea differentia semiaxis minoris & semilateris recti, & substituto $D$ loco $\frac{OD}{OB} \times OB - OD$ erit Radius ad sinum anguli K ut $AB^2$ ad $D \times OB + OD \times \frac{2\text{Cos. } T \times \text{sin. } T}{OB^2}$.

387. Ergo in quovis gradu anomaliæ mediæ erit, est semper Radius ad $AB^2$ ut sinus Anguli K, ad $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times \frac{2\text{Cos. } T \times \text{sin. } T}{OB}$ cum verò ratio Radii ad $AB^2$ sit constans, hæc altera etiam erit constans, ideoque in omni casu sinus Anguli K ubi anomalia media est $T$, erit ad ejus sinum ubi anomalia media erit $t$, ut $D \times OB + OD \times 2\text{Cos.}$

DE MOTU CORPORUM.

$-\frac{2\,Cos.T\,sin.T}{OB^2}\times$ ad $D\times OB+OD\times\frac{2\,Cos.t\times sin.t}{OB^2}$ sive multiplicando utrumque terminum per constantes $\frac{OB}{D\times OB+OD}$ ut $\frac{2\,Cos.T\times sin.T}{OB}$ ad $\frac{2\,Cos.t\,sin.t}{OB}$ sed constat ex Trigonometricis, quod duplum facti sinus anguli dati cujusvis per ejus Cosinum, divisum per radium, est æquale sinui Anguli qui est duplus ejus anguli dati, ergo sinus angulorum K in diversis anomaliæ mediæ gradibus sunt inter se ut sinus dupli anguli anomaliæ. Unde sequitur, quod cum duplum anomaliæ mediæ 45. graduum sit 90. ejusque sinus sit æqualis Radio seu sinui totali, angulus K erit maximus in 45° gradu, sive est illic anomaliæ mediæ æquatio prima maxima, & si ea data sit, invenientur in aliis gradibus æquationes adhibendæ, dicendo ut Radius ad sinum dupli anomaliæ mediæ ita sinus æquationis maximæ primæ ad sinum æquationis quæsitæ, sive (quia hic de minimis angulis agitur qui sunt inter se ut sui sinus) ita ipsa æquatio maxima ad æquationem quæsitam: Invenietur autem facile maxima illa æquatio, cum enim sit Radius ad $AB^2$ ut sinus K ad $D\times\frac{OB+OD}{OB}\frac{\times\,sin\,2T}{}$ si $T$ sit 45°, sin. $2T$ est ipse Radius OB; Est ergo Radius ad $AB^2$ ut sinus K ad $D\times\frac{OB+OD}{OB}\times OB$ sive, ut statuit Newtonus, est Radius ad sinum æquationis primæ maximæ ut $AB^2$ ad $D\times OB+OD$. Quod erat 1°. Dem.

388. Secunda æquatio TQE continetur lineis ductis à puncto Q circuli BQNA ad puncta T & E lineæ OM quæ perpendiculariter in ON lineam motus medii ducitur, est vero OT æqualis sinui arcus $QN=SF=Of$, & si ex f ducatur ad focum linea fH, intersectio ejus lineæ fH (productæ si necesse sit) cum linea OM dat alterum punctum E. In hâc ergo æquationis parte est QE radius, TE sinus, eorumque ratio est investiganda, est verò QE paulo major quam QT & QT est æqualis OG, quâ paulò major est ON sive OB unde QE pro OB commodè assumi potest.

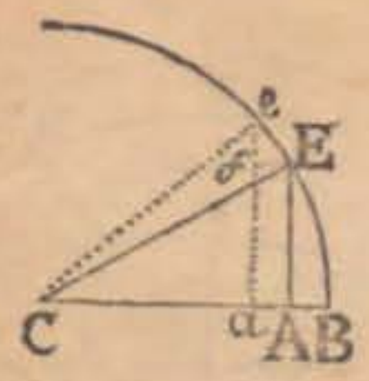



quamvis eâ sit paulo minor; Ut autem valor lineæ TE assignetur, notandum est quod cum sit OM in ON perpendicularis, & Of in OQ, est angulus fOM æqualis angulo NOQ.

Cognoscetur ergo arcus mensurans angulum fOM sive fOE, assumpto Of pro radio, dicendo radius ON sive OB ad arcum NQ ut Of (sive NQ) ad arcum mensurantem angulum fOE qui ideo erit $\frac{NQ^2}{OB}$, secans illius arcus est OE, cum verò TO sit sinus arcus NQ (æqualis Of) feratur longitudo Of secundum lineam OM, cadet tantùm ultra T quantum arcus NQ suum sinum excedit, & tantùm citra E quantùm radius ille Of à secante anguli cujus arcus est $\frac{NQ^2}{OB}$ deficit: Dato ergo arcu NQ, inveniatur ejus excessus super ejus sinum, & dato arcu $\frac{NQ^2}{OB}$ inveniatur excessus ejus secantis super radium NQ sive Of & inventis his duobus habebitur linea TE quæsita.

Lemma I. *Dato Arcu invenire ejus sinum.* Sit radius CB, $r$, sinus quæsitus EA, $x$, ejus Cosinus CA, $\sqrt{rr-xx}$, Arcus datus BE, $v$, ejus fluxio Ee sit $dv$.

Ducto radio CE, & radio proximo Ce & sinu arcus Be, ductoque ex E in F perpendiculo, erit ef fluxio sinus quæsiti sive $dx$. Triangula verò ECA, efE, pro similibus sunt habenda, nam angulus fEA est rectus




rectus ut & angulus CEe quia circulus eſt perpendicularis in radium, & dempto communi CEf remanent CEA & fEe æquales, & ob rectos in f & A, angulus tertius feE æqualis erit tertio ECA unde habetur hæc proportio, CA ad CE ut eF ad eE, ſive $\sqrt{rr-xx}:r=dx:dv$ unde eſt $dv=\frac{r\,dx}{\sqrt{rr-xx}}$ & $dv^2=\frac{rr\,dx^2}{rr-xx}$ ſive $rr^2-xx^2=\frac{rr\,dx^2}{dv^2}$.

Jam verò ſupponatur valorem $x$ hac ſerie exprimi, $x=Av+Bv^3+Cv^5$ &c. erit $dx=Adv+3Bv^2dv+5Cv^4dv$ &c. & $dx^2=A^2dv^2+6ABv^2dv^2+9BBv^4dv^2$ $+10ACv^4dv^2$ &c.

& $xx=A^2v^2+2ABv^4+BBv^6$ $+2ACv^6$ &c.

unde $rr-xx=rr-A^2v^2-2ABv^4$ &c.

& $\frac{rr\,dx^2}{dv^2}=rrA^2+6rrABv^2+9rrBBv^4$ $+10ACv^4$ &c.

undè hæ duæ ſeries æquales ſunt, & terminorum A, B, C &c. valor ex comparatione terminorum correſpondentium harum ſerierum eruitur, erit ergo

$-rr-A^2v^2-2ABv^4$ &c.

$=rrAA+6rrABv^2+9rrBBv^4$ $+10rrACv^4$ &c.

undè erit $rr=rrAA$, idoque $A=1$.

$-A^2v^2=6rrABv^2$, undè $-1=6rrB$

& $B=\frac{-1}{6rr}$

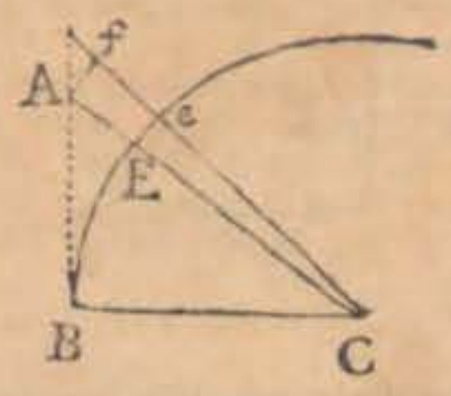
$-2ABv^4=9rrBBv^4+10rrACv^4$, ſive ſubſtitutione facta & terminis per $v^4$ diviſis $+\frac{2}{6rr}=\frac{9}{36rr}+10rrAC$, ſive

$10rrAC=\frac{3}{36rr}$

& $C=\frac{3}{10\times 36r^4}=\frac{1}{2\times 3\times 4\times 5r^4}$, &c.

undè ſeries $Av+Bv^3+Cv^5$ &c. $=x$, ad

hanc redit $x=v-\frac{v^3}{2\times 3r^2}+\frac{v^5}{2\times 3\times 4\times 5r^4}$ &c. quæ ſeries facile continuatur, & arcu exiſtente parvo citiſſimè convergit.




Lemma II. *Dato arcu invenire ſecantem.* Sit ut prius radius CB, $r$, ſecans quæſita CA, $y$, Tangens BA $\sqrt{yy-rr}$, Arcus datus BE, $v$, ejus fluxio Ee, $dv$; Ducatur ex centro ſecans Ca, proxima poſitæ, & radio CA centro C, deſcribatur arcus Af erit fA fluxio ſecantis quæſitæ ſive $dy$, erunt autem arcus Ee & Af ut eorum radii CE, CA ideoque eſt $r:y=dv:Af=\frac{y\,dv}{r}$; præterea Triangula ACB, aAf, ſunt ſimilia, nam ob angulum rectum fAC angulus fAa eſt complementum anguli CAB ſive eſt æqualis angulo ACB, anguli verò B & f ſunt ambo æquales ut pote recti, eſt ergo CB: BA = Af: fa, ſive $r:\sqrt{yy-rr}=\frac{y\,dv}{r}:dy$ & quadrando, $rr:yy-rr=\frac{yy\,dv^2}{rr}:dy^2$ ſive $r^4\frac{dy^2}{dv^2}=y^4-rryy$. Fingatur ergo eſſe $y=A+Bv^2+Cv^4+Dv^6$ &c.

eſt $dy=2Bvdv+4Cv^3dv+6Dv^5dv$ &c.

& $dy^2=4B^2v^2dv^2+16BCv^4dv^2$ $+16C^2v^6dv^2$ $+24DBv^6dv^2$ &c.

& $y^2=A^2+2ABv^2+2ACv^4$ $+BBv^4$ &c.

& $y^4=A^4+4A^3Bv^2+6A^2B^2v^4$ $+4A^3Cv^4$ &c.

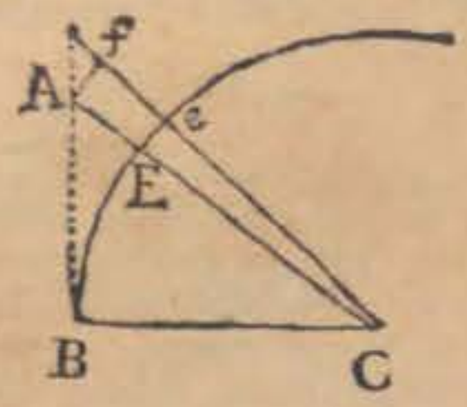
eſt ergo $\frac{r^4dy^2}{dv^2}$

$=4r^4B^2v^2+16r^4BCv^4+16r^4C^2v^6$ $+24r^4DBv^6$ &c.

& $y^4-rry^2$

$=A^4+4A^3Bv^2+6A^2B^2v^4$ $-r^2A^2-2r^2ABv^2+4A^3Cv^4$ $-2r^2ACv^4$ &c. $-r^2B^2v^6$

DE MOTU CORPORUM




Unde collatis terminis correſpondentibus harum ſerierum eſt $A^4 - r^2 A^2 = o$, ideoque $A^2 = r^2$, & $A = r$; eſt $4r^4 B^2 v^2 = 4A^3 B v^2 - 2r^2 AB v^2$, ſive diviſis omnibus terminis per $B v^2$ & poſito $r$ loco $A$; $4r^4 B = 4r^3 - 2r^3$

ideoque eſt $B = \frac{1}{2r}$,

eſt $16r^4 BC v^4 = 6A^2 B^2 v^4 + 4A^3 C v^4 - 2r^2 AC v^4 - r^2 BB v^4$, quæ diviſa per $v^4$ ſubſtitutiſque valoribus $A$ & B dant

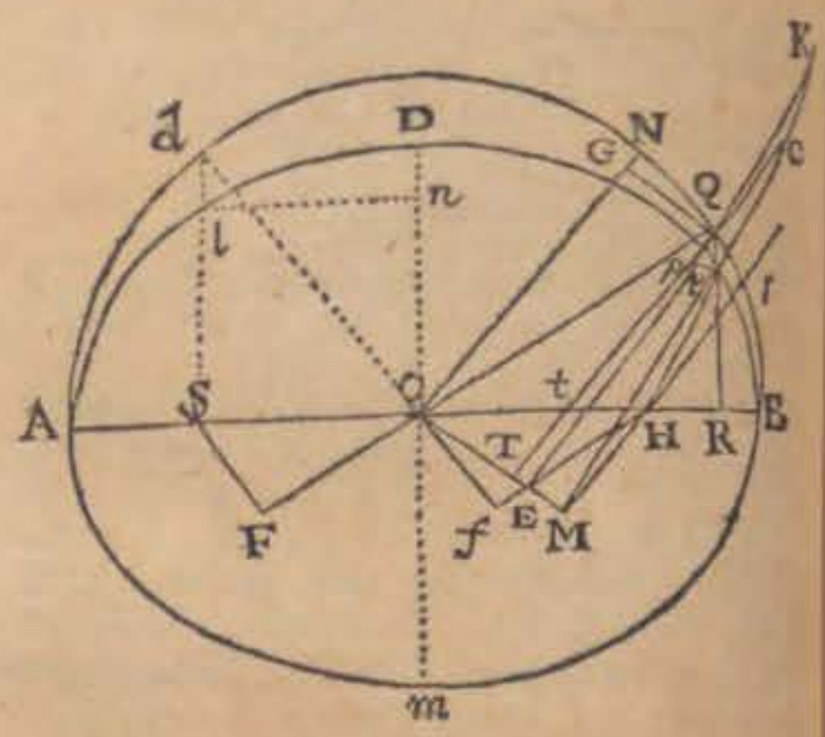
$8r^3 C = \frac{6}{4} + 4r^3 C - 2r^3 C - \frac{1}{4}$ unde eſt

$6r^3 C = \frac{5}{4}$ & $C = \frac{5}{2 \times 3 \times 4r^3}$ &c.

Series ergo ad ſecantis valorem exprimendum $A + Bv^2 + Cv^3$ &c. in hanc vertitur $r + \frac{v^2}{2r} + \frac{5v^3}{2 \times 3 \times 4r^3}$ &c. Quæ ſatis prompte convergit ſi modo arcus $v$ ſit exiguus, ut iſto in caſu.

His poſitis, invenientur commodè partes lineæ TE, ſive ſinus ſecundæ æquationis, ea enim conſtat ex differentia inter arcum NQ & ejus ſinum (dato radio OB) & ex differentia inter eum ipſum arcum NQ ſumptum ut radium in angulo fOE & illius anguli ſecantem.

Primum ergo differentia inter arcum NQ & ejus ſinum, ex primâ ſerie invenitur, ſit enim $v = NQ$ & $r = OB$, ſinus arcus NQ per eam ſeriem invenitur $NQ - \frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ &c. & omiſſis reliquis terminis ſeriei, hic admodum exiguis, liquet differentiam inter arcum NQ & ejus ſinum eſſe terminum $\frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ qui erat in eâ




ſerie ex arcu NQ tollendus ut obtineretur ſinus.

Secundo, ut differentia inter radium & ſecantem anguli fOE obtineatur, loco radii $r$ in ſerie ſuperius inventâ valor radii Of ſive NQ eſt ſubſtituendus, & loco arcus $v$, valor arcus qui menſurat eum angulum & qui inventus fuit $= \frac{NQ^2}{OB}$, ergo ſeries quæ ſecantem exprimit in hanc abit $NQ + \frac{NQ^4}{2OB^2 \times NQ}$ &c. reliquis terminis ut pote minimis omiſſis, exceſſus ſecantis ſuper radium eſt $\frac{NQ^3}{2OB^2}$, qui junctus cum exceſſu arcus ſuper ſinum ſuperius invento $\frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ efficit ſummam $\frac{4NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ ſive $\frac{2NQ^3}{3OB^2}$ pro valore ſinus æquationis ſecundæ; ſed eſt (369) ut Radius OB ad QR ita SH ſive OH ad SF ſive NQ, ergo $NQ = \frac{OH}{OB} \times QR$

& $\frac{2NQ^3}{3OB^2} = TE = \frac{2OH^3}{3OB^3} \times QR^3$.

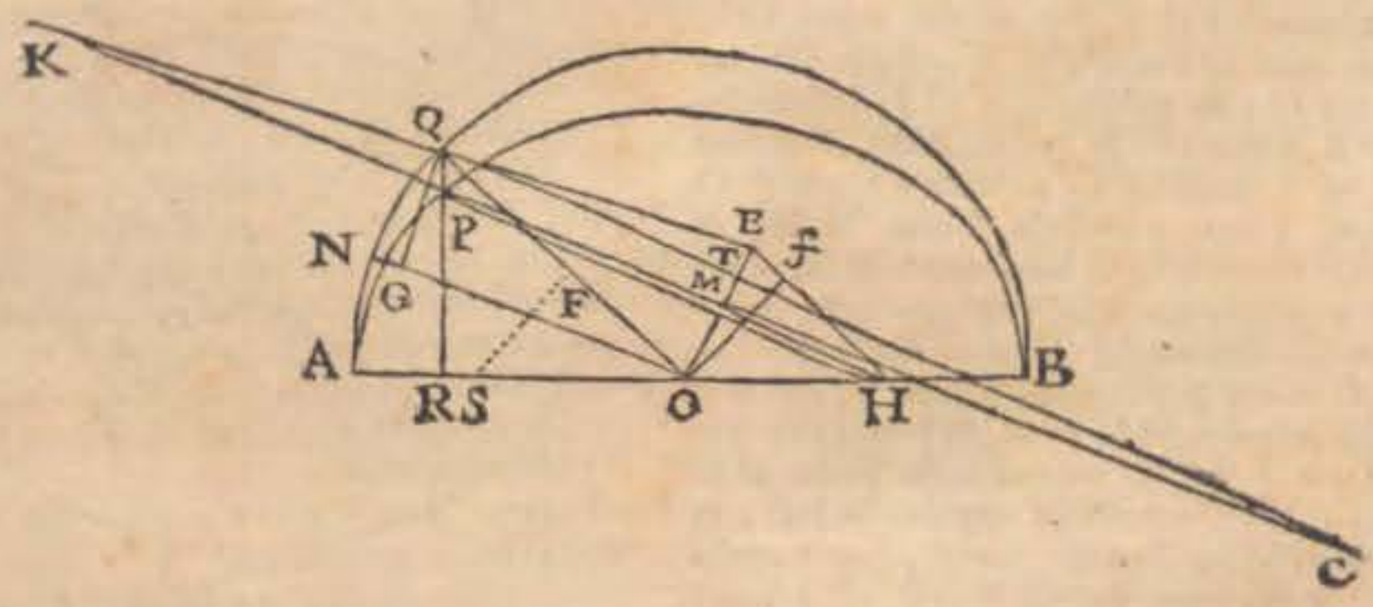
Itaque cum in hâc ſecundâ æquatione radius QE ſit in omni anomaliæ gradu idem aut prope idem, & anguli ſint minimi erunt inter ſe quam proximè ut eorum ſinus

TE

TE, cumque in valore TE quantitas $\frac{2OH^3}{3OB^5}$ sit constans, sinus illi sunt inter ut $QR^3$, sed QR est sinus anomaliæ excentri, & in eâdem prope sunt ratione sinus anomaliæ mediæ, hinc istæ æquationes secundæ in variis anomaliæ mediæ gradibus adhibendæ, sunt inter sè ut cubi sinuum anomaliæ mediæ. Si iraque sumatur anomalia media 90. graduum ejus sinus est ipse Radius, eritque illic maxima æquatio, quæ erit ad aliam quamvis, ut cubus Radii ad cubum sinus anomaliæ mediæ ipsi convenientis ut statuit Newtonus.

Ut verò determinetur hæc æquatio ubi est maxima, notandum quod si in foco S erigatur usque ad Ellipsim ordinata Sl ea erit æqualis semi lateri recto, & si ducatur, In ordinata in minorem axem erit In = OS sive OH, & Dn erit differentia semi lateris recti & minoris axis quam Newtonus vocat *D*, & ex natura Ellipseos erit $AO^2$ sive $OB^2 : In^2 (OH^2) = OD^2 : Dn \times nm$ (sive $D \times nm$) sed nm est ferè axi minori 2OD æqualis, ergo erit $OB^2 : OH^2 = OD^2 : D \times 2OD$ & $OH^2 = \frac{2D \times OB^2}{OD}$, quo posito valor $TE = \frac{2OH^3}{3OB^5} QR^3$ est æqualis $\frac{2OH \times 2D}{3OB^3 \times OD} \times QR^3$ vel quia 2OH = SH est $TE = \frac{2D \times SH}{3OB^3 \times OD} QR^3$.

In nonagesimo verò gradu anomaliæ mediæ linea OM sive OE in axem OB cadit & QT cui ferè æqualis est QE coincidit cum QR, unde QE pro QR sumi potest, & præterea QR nonnihil excedit lineam Sd sive axem minorem DO, cum non nihil citra focum cadat, minor tamen est radio OB, unde $QR^2$ pro $OB \times OD$ satis accuratè sumi potest, sicque valor $TE = \frac{2D \times SH}{3OB^3 \times OD} QR^3$ in hanc abit $TE = \frac{2D \times SH}{3OB^2} QE$, sed Radius est ad sinum æquationis maximæ secundæ ut QE ad TE (sive $\frac{2D \times SH}{3OB^2} \times QE$) & QE ad $\frac{2D \times SH}{3OB^2} QE$ sicut $3OB^2$, ad $2D \times SH$, ergo æquatio secunda maxima invenietur dicendo ut triplum Quadrati semi axis majoris ad duplum Rectangulum sub umbilicorum distantiâ SH & differentia *D* semi axis minoris & semi Lateris Recti, ita Radius ad sinum secundæ æquationis ubi est maxima, & ea data reliquæ invenientur dicendo ut cubus Radii ad cubum sinus anomaliæ mediæ propositæ ita hæc maxima æquatio, ad quæsitam. Q. E. D.

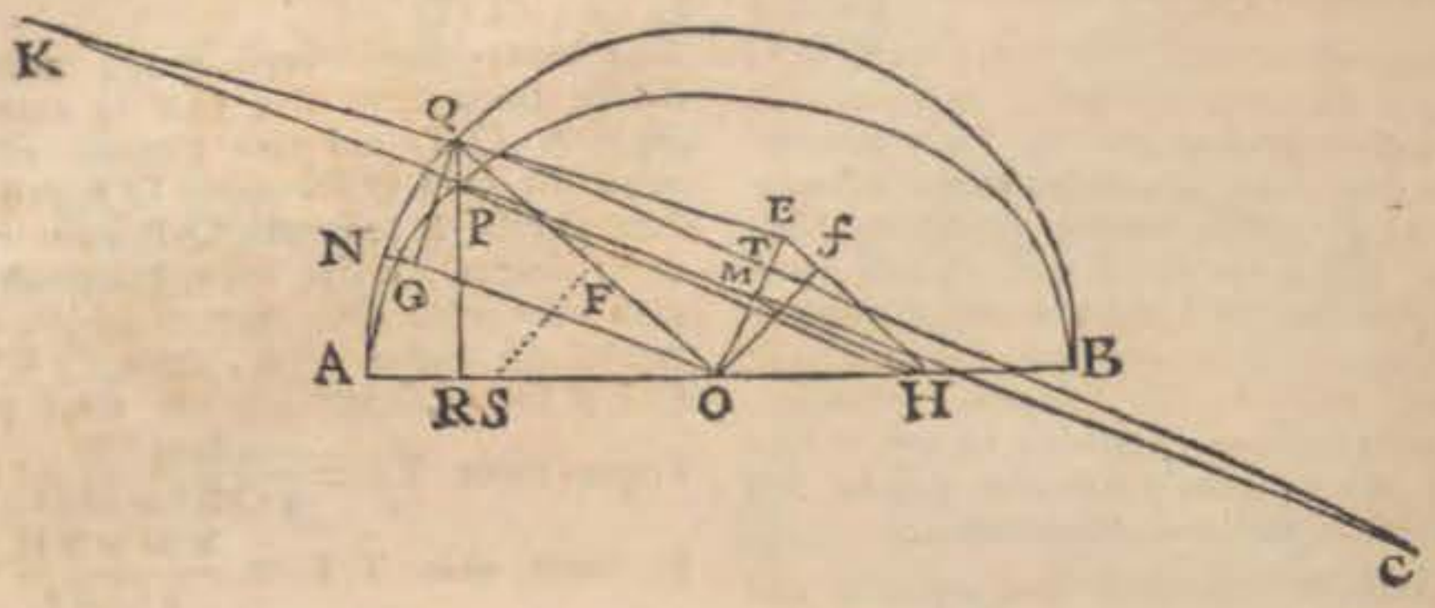



389. Annihilatur prima æquatio in 90. gradu anomaliæ mediæ & in primo, negativa fit in secundo quadrante, positiva in tertio, negativa iterum in quarto.

Etenim in 90. gradu anomaliæ mediæ OM coincidit cum OH ex constructione, sicque linea fH non amplius secat lineam OM in E, evanescit itaque ME sinus primæ Æquationis.

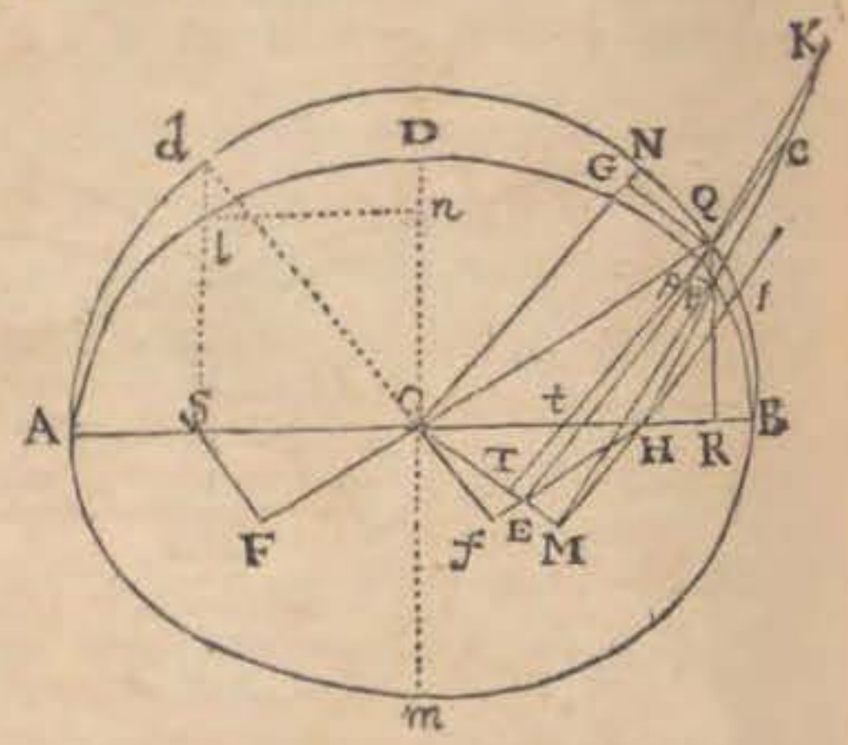
Excedat verò anomalia media 90. fiat-

DE MOTU CORPORUM.

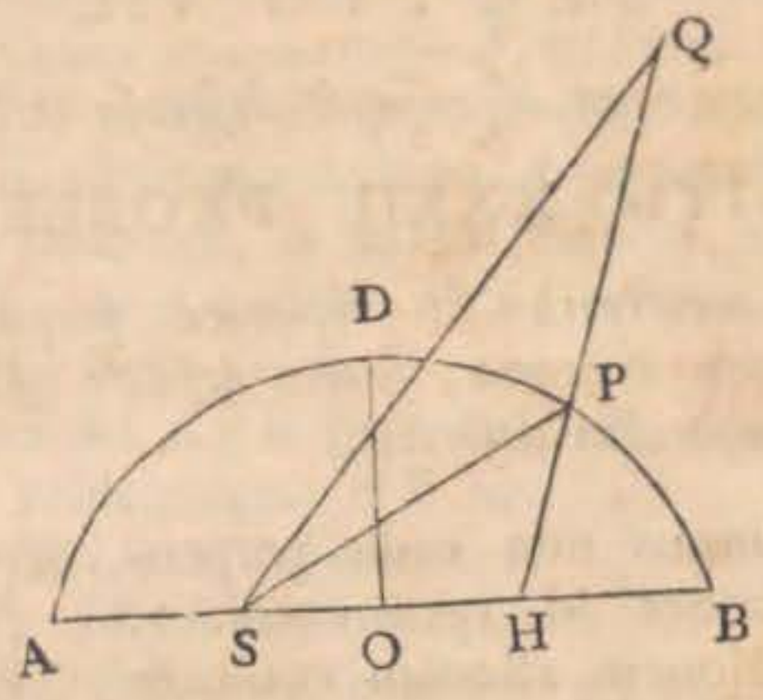



que alia figura ſecundum conſtructionem à nobis indicatam, ſit locus verus Planetæ P, deſcribatur circulus BQNA, in magnum axem BA, ſitque PR perpendicularis à loco Planetæ in axem ducta, quæ producta ſecet circulum BQNA in Q, ducatur QO, in quam ex ſole S, ducatur perpendiculum SF, cui æqualis ſumatur arcus QN, erit NOB anomalia media, ducaturin lineam ON perpendicularis OM quæ terminetur in M per perpendiculum à foco altero H ductum, erit ergo MH parallela ON & MHB æqualis anomaliæ mediæ, ex H ducatur ad Planetam linea HP, erit ergo angulus MHP angulus anomaliæ mediæ addendus ut prodeat motus medius æquatus PHB, fiat etiam ſuper OH Triangulum OfH ſimile & æquale Triangulo SFO, & producatur Hf donec ſecet in E lineam OM productam; Ducatur ex Q ad T linea QT, parallela lineæ NO ideoque etiam parallela lineæ MH, & erit OT æqualis QG ſinui arcus QN. Ducatur etiam linea PM quæ producta ſecabit in C lineam QT productam & angulus C erit æqualis angulo HMC, qui erit æqualis angulis MHP & MPH (per 32. Iᵐⁱ. Elem.) ſed ob exiguitatem lineæ MH reſpectu MP, omittitur angulus MPH, & angulus HMC, ſive angulus C, pro angulo MHP æquatione motus medii aſſumitur; Denique ex E per Q ducatur linea EQK quæ lineam PMC ſecabit in K erit angulus EQT æqualis angulis K & C: (per 32. I. Elem.) ergo ſi ex angulo EQT ſubtrahatur angulus K remanebit angulus C, ſive æquatio quæſita, eſt vero angulus EQT ſecunda æquatio & angulus K ſive EKM prima, ut liquet ex conſtructione, ergo in ſecundo quadrante prima æquationis pars ſubſtrahi debet ſive negative ſumi, ſecunda verò poſitiva remanet.

In tertio quadrante hæc eadem figura deorſum convertatur ſub axe AB, liquebitque angulum MHB ſeu Anomaliam mediam, quæ hic 180° gradus ſuperat, angulo MHP ſive angulo C eſſe minuendam ut habeatur anomalia æquata PHB, ideoque cum ſit C=EQT−K ſecunda æquatio EQT ſubſtractivè ſumi debebit, & prima K additivè.




In ultimo denique quadrante invertatur figura prima, liquebit ex anomaliâ mediâ IHB, ſeu HMP, detrahendum eſſe angulum IHP, ſeu HMP, ſive angulum C ipſi æqualem, ut prodeat motus medius æquatus ſed angulus C eſt ſumma utriuſque partis æquationis, nempe anguli K, & anguli




guli K Q C sive T Q E, ergo in ultimo quadrante utraque æquatio negativè assumitur.

390. Exemplum sit in orbe Martis A D B, qui omnium, si orbem Mercurii excipias, est maxime excentricus. Excentricitas S O, sit partium 141. & semiaxis major = 1523. 69. erit semiaxis minor O D = 1516. 93. semilatus rectum seu $\frac{1}{2}$ L = 1510. 184. differentia inter semiaxem minorem & semilatus rectum $\frac{1}{2}$ L, = 6. 746. = D. Differentia inter logarithmum radii & logarithmum quadrati axis A B, per tabulas.

erit = 3. 0321367. 62.
Log. A O + O D = 3. 3097621. 36.
Log. D = 0. 7580391. 75.
Summa = 7. 0999380. 73.

æqualis logarithmo sinûs anguli Y, per primam proportionem Newtoni, atque hinc in tabulis invenietur angulus Y, minutorum primorum 4', secundorum 21. 14".

Differentia inter logarithmum radii & Logarithmum facti 3 A O².

erit = 3. 1570755. 62.
Log. facti 2 S H × D = 3. 5093282. 75.
Summa = 6. 6664038. 37.

æqualis logarithmo sinûs anguli Z, qui per tabulas invenitur esse minutorum secundorum 100. 39". Inventis jam æquationibus maximis Y + Z, anguli V, & X, pro quolibet anomaliæ mediæ gradu facilè reperiuntur v. gr. pro 45°.

Est enim Log. anguli Z = 2. 0016853. 46.
Log. cubi sinûs 45°. = 29. 5484550.
horum summa = 31. 5501403. 46.

Ex hâc summa detrahe logarithmum cubi radii 30. 0000000; residuum 1. 5501403. 46. erit logarithmus sinûs anguli X, qui per tabulas invenietur esse minutorum secundorum 35. 41". Quarè cum in 45°. anomaliæ gradu angulus V, æqualis sit angulo Y, erit motus medius æquatus, seu angulus P H B, = 45°, 4', 56. 55".

Jam verò ut inveniatur anomalia vera, seu angulus P S B, dato angulo P H B, producatur H P ad Q ut sit P Q = S P, & erit H Q = A B, ex natura ellipseos, atque angulus P H B, æqualis summæ angulorum Q S H, S Q H; Quarè semisumma laterum S H, H Q, est ad eorum semi differentiam, hoc est, A O + S O, ad A O — S O, ut tangens dimidii anguli P H B, ad tangentem semidifferentiæ angulorum Q S H, S Q H.

Log. tang. $\frac{1}{2}$ P H B = 9. 6181066. 717.
Log. A O — S O = 3. 1407247. 98.
horum summa = 12. 7588314. 698.
Log. A O + S O = 3. 2212068. 41.
Differentia = 9. 5376246. 246.
= Log. tang. Ang. $\frac{1}{2}$ Q S H — $\frac{1}{2}$ S Q H.

Undè invenietur $\frac{1}{2}$ Q S H — $\frac{1}{2}$ S Q H = 19°. 1', 35. 5"; & hinc anomalia vera = Q S H — S Q H (sive — Q S P) = 38°. 3' 11", quam proximè; Nam si ex datâ hâc anomaliâ verâ, quæratur (371) anomalia media, invenietur esse 45°. graduum quam proximè.

DE MOTU CORPORUM.

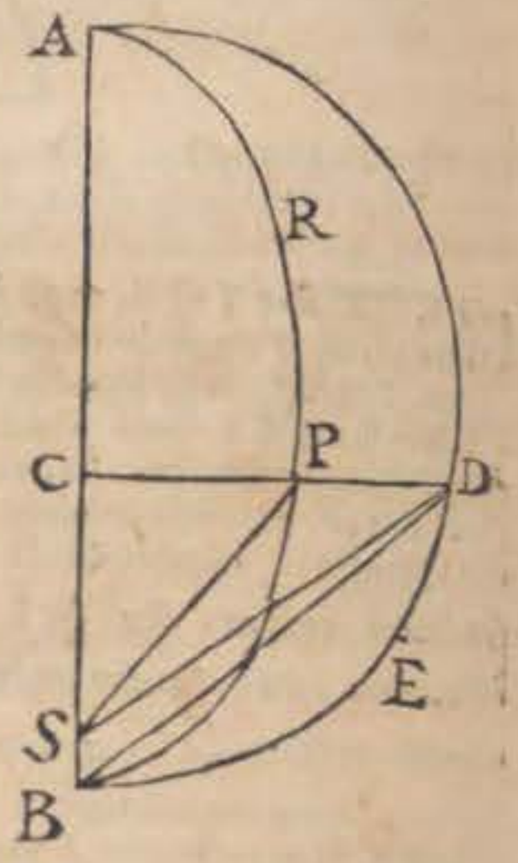
## SECTIO VII.

### *De corporum aſcenſu & deſcenſu rectilineo.*

### PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

*Poſito quodvis centripeta ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, ſpatia definire quæ corpus rectà cadendo datis temporibus deſcribit.*

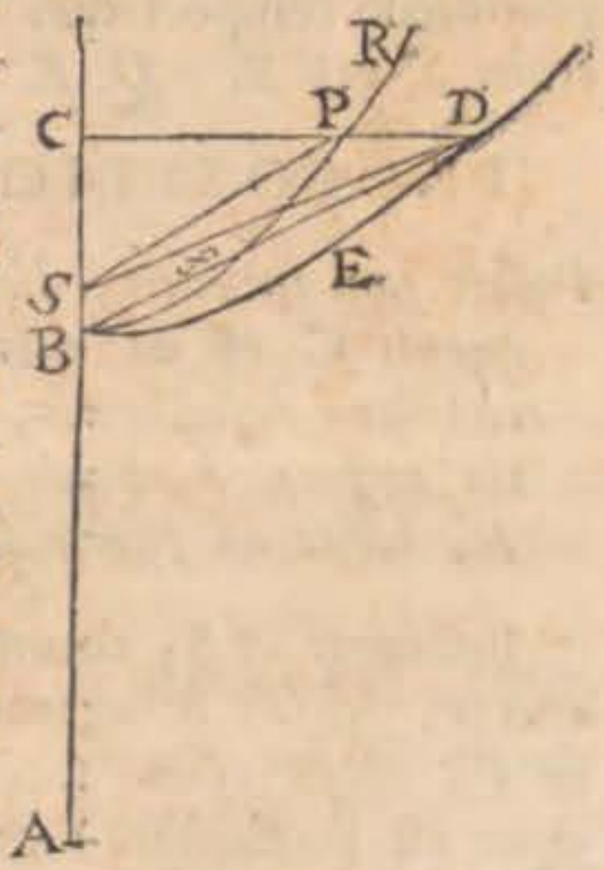
*Caſ.* 1. Si corpus non cadit perpendiculariter, deſcribet id (per corol. 1. prop. XIII.) ſectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit ſectio illa conica *A R P B* & umbilicus ejus *S*. Et primo ſi figura ellipſis eſt; ſuper hujus axe majore *AB* deſcribatur ſemicirculus *ADB*, & per corpus decidens tranſeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actiſque *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP*, atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo ellipſeos, & ſemper manebit area *ASD* tempori proportionalis. (e) Minuatur latitu-




(e) 391. Lemma. Si ſectionis conicæ latus rectum ad axem tranſverſum pertinens perpetuò minuatur, & tandem evaneſcat, manente ſectionis axe tranſverſo, omnes ad axem ordinatæ perpetuò minuuntur & tandem evaneſcunt, ac perimeter ſectionis cum axe & umbilici cum axis verticibus coincidunt. Eſt enim, (ex conic.) ordinatæ cujuſvis quadratum ad rectangulum abſciſſarum in ratione datâ lateris recti ad axem tranſverſum; quarè ſi manente axe tranſverſo, adeóq. & abſciſſarum rectangulo, latus rectum perpetuò minuatur ac tandem evaneſcat, ordinatæ quadratum adeóque & ordinata ipſa perpetuò minuitur & tandem evaneſcit, & perimeter ſectionis conicæ cum axe coincidit. Porrò ordinata per umbilicum æqualis eſt dimidio lateri recto (Vid. ſup. in Conicis, Theor. III. de Hyperbola & de Ellipſi & Cor. I. Theor. I. de Parab.) adeóque quadratum dimidii lateris recti eſt ad rectangulum ex diſtantiis umbilici à verticibus, ut latus rectum ad axem tranſverſum, undè rectangulum ſub quartâ parte lateris recti & axe tranſverſo æquatur rectangulo ex diſtantiis umbilici à verticibus; quarè evaneſcente latere recto & manente axe tranſverſo, rectangulum ſub diſtantiis umbilici à verticibus nullum fit, & umbilicus cum proximo vertice coincidit.

latitudo illa in infinitum: & orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, descendet corpus in rectâ *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque spatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & à puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC* (f). *Q. E. I.*

*Cas.* 2. Si figura illa *RPB* hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem *AB* hyperbola rectangula *BED*: & (g) quoniam areæ *CSP*, *CBfP*, *SPfB* sunt ad areas *CSD*, *CBED*, *SDEB*, singulæ ad singulas, in datâ ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB* proportionalis est tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PfB*; erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus *PB* cum rectâ *CB* & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum rectâ *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto descensu describit lineam *CB*. *Q. E. I.*



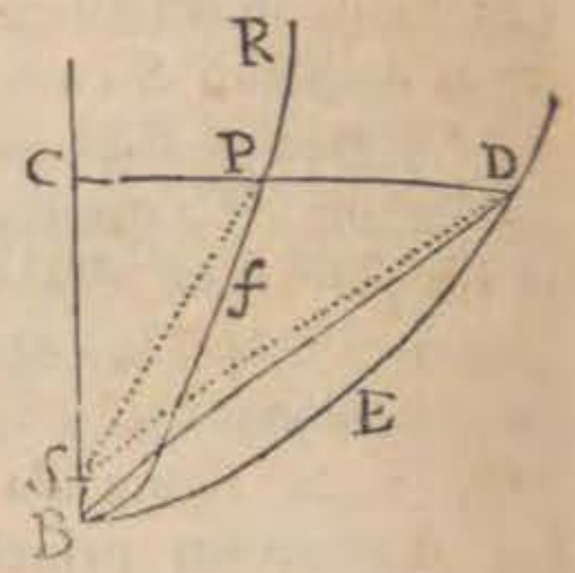

*Cas.*

(f) 392. *Perpendicularis DC.* Quoniam area ABD, semper proportionalis est tempori quo corpus ex puncto A per rectam AC cadit, erit totius semicirculi area ADEB, proportionalis tempori quo corpus idem cadendo percurrit lineam AB, & divisim area segmenti BDEB, proportionalis tempori quo corpus ex A, cadendo percurrit lineam CB.

(g) 393. *Quoniam areæ.* Nam 1°. triangula CSP, CSD quorum est basis communis CS, sunt ut altitudines CP, CD. 2°. areæ hyperbolicæ CBfP, CBED sunt ut eædem altitudines CP, CD (374) unde 3°. divisim CBfP − CSP ad CBED − CSD, hoc est, sector SPfB ad sectorem SDEB ut CP ad CD.

DE MOTU CORPORUM.

*Caſ.* 3. (h) Et ſimili argumento ſi figura *RPB* parabola eſt, & eodem vertice principali *B* deſcribatur alia parabola *BED*, quæ ſemper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus *P* movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum lineâ *CB*; fiet ſegmentum parabolicum *BDEB* proportionale tempori quo corpus illud *P* vel *C* deſcendet ad centrum *S* vel *B*. *Q. E. I.*




## PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

*Poſitis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *eſt ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum deſcribentis, in ſubduplicatâ ratione quam* AC *diſtantia corporis à circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad figuræ ſemidiametrum principalem* ½ AB.

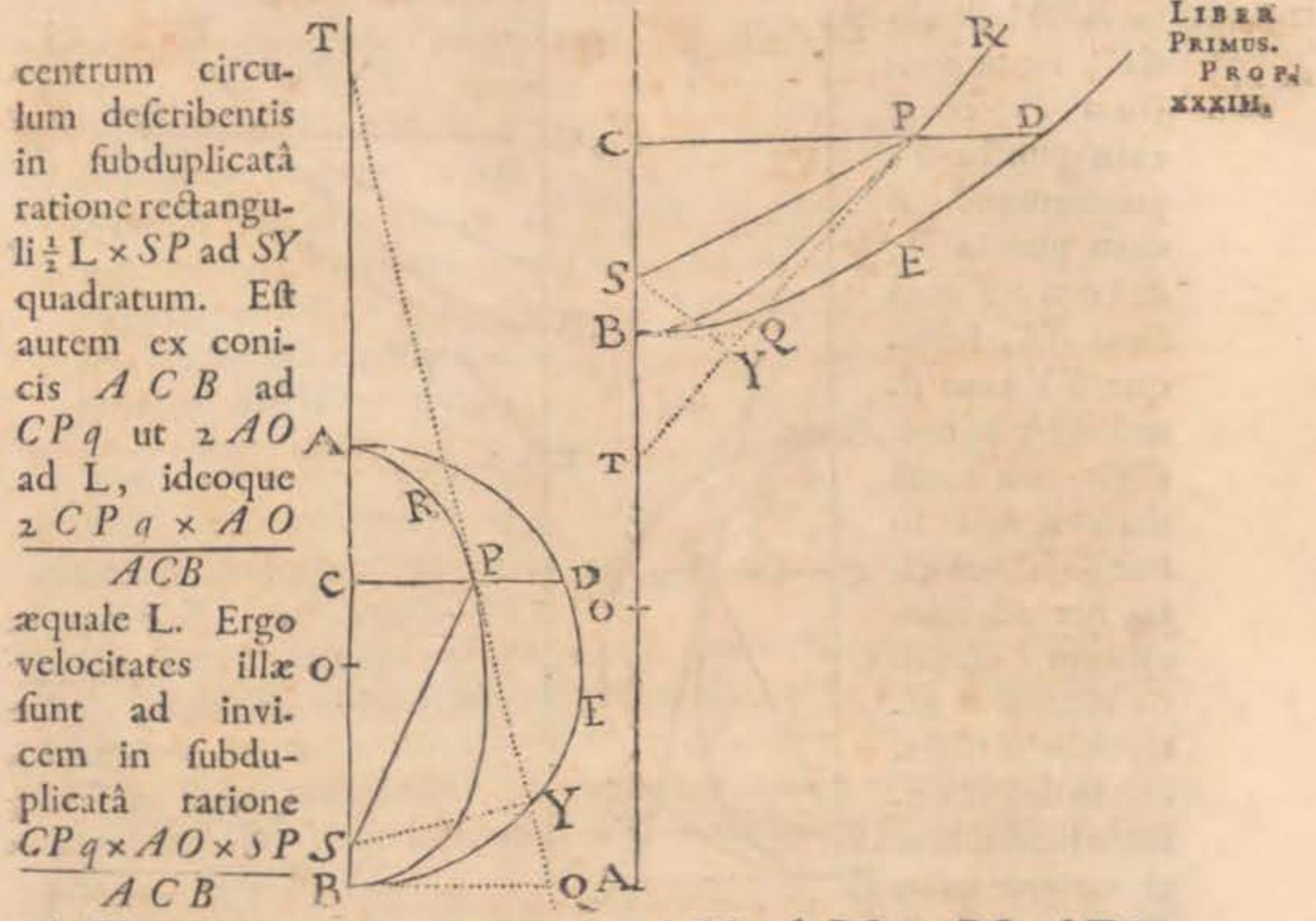
Biſecetur *AB*, communis utriuſque figuræ *RPB*, *DEB* diameter, in *O*; & agatur recta *PT*, quæ tangat figuram *RPB* in *P*, atque etiam ſecet communem illam diametrum *AB* (ſi opus eſt productam) in *T*; ſitque *SY* ad hanc rectam, & *BQ* ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ *RPB* latus rectum ponatur L. Conſtat per corol. IX. prop. XVI. quod corporis in lineâ *RPB* circa centrum *S* moventis velocitas in loco quovis *P* ſit ad velocitatem corporis intervallo *SP* circa idem

(h) 394. *Simili argumento.* In Parabolâ 1°. CSP:CSD=CP:CD. 2°. ſit latus rectum Parabolæ BfP=*l*, latus rectum Parabolæ BED=*L*, erit, ex naturâ Parabolæ $CP^2=l\times CB$ & $CD^2=L\times$ ●B, adeóque CP:CD=$\sqrt{l}:\sqrt{L}$, hoc eſt, in ratione datâ, ergò area CBEP eſt ad aream CBED, in eâdem ratione datâ CP ad CD; Quarè 3°. diviſim SPfB:SDEB=CP:CD. Cætera ſe habent ut in demonſtratione casûs ſecundi.

395. Scholium. Corporis per rectam CS, ad centrum S, cadentis velocitas in loco quovis C, eſt ad velocitatem corporis alterius ad eandem à centro diſtantiam circulum deſcribentis, vel in ratione minore quam $\sqrt{2}$, ad 1, vel in ratione majore aut in eâ ipsâ ratione. In 1°. caſu recta SC, uſurpanda eſt pro ellipſi latitudinis evaneſcentis; in 2°. caſu, recta SC, eſt hyperbola cujus latus rectum evaneſcit; in 3°. caſu, recta SC, eſt parabola lateris recti evaneſcentis. Hæc omnia patent ex coroll. 7°. Prop. XVI.

396.

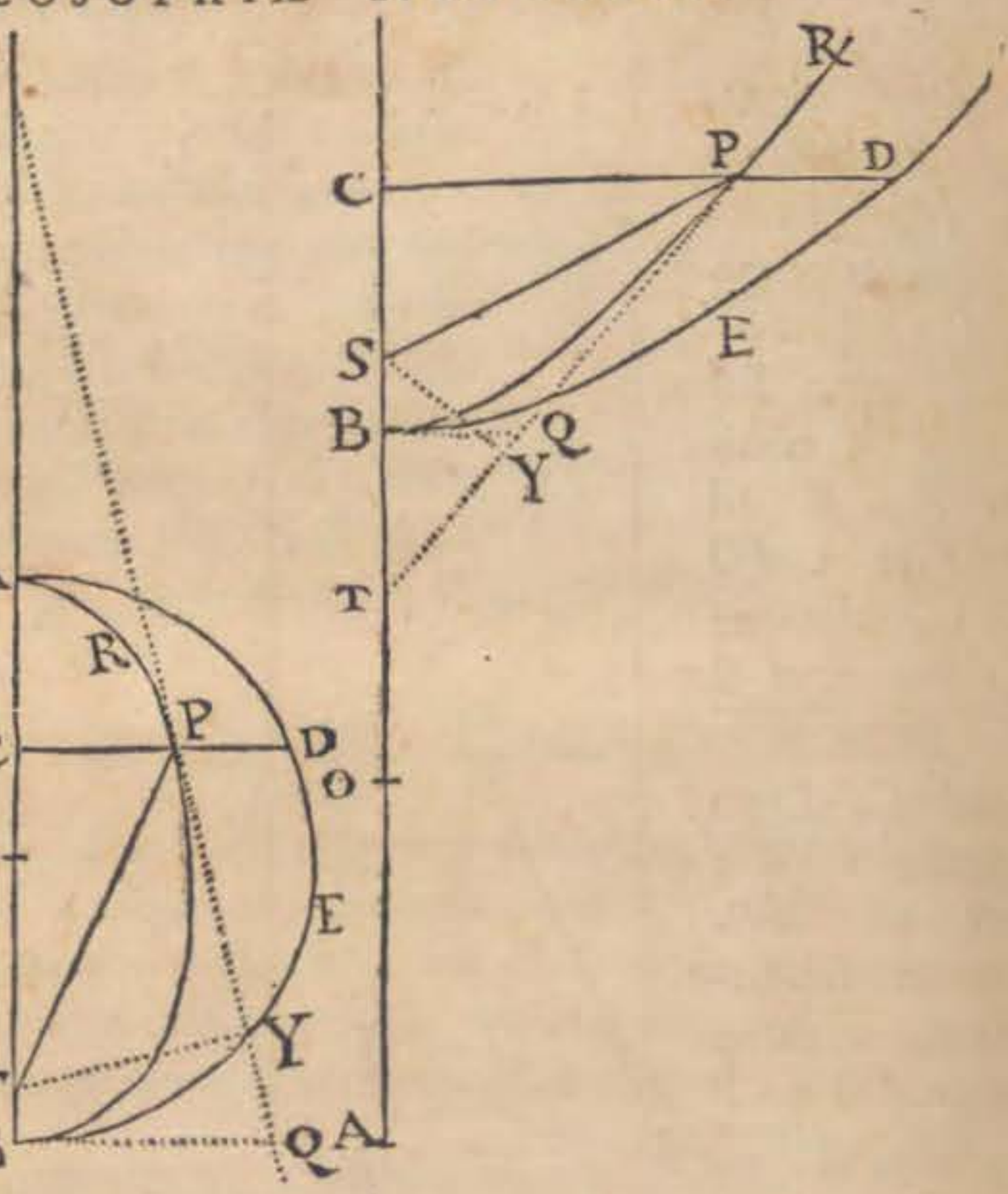
centrum circulum deſcribentis in ſubduplicatâ ratione rectanguli $\frac{1}{2}$ L × *SP* ad *SY* quadratum. Eſt autem ex conicis *A C B* ad *CP q* ut 2 *AO* ad L, ideoque $\frac{2\,CP\,q \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ ſunt ad invicem in ſubduplicatâ ratione $\frac{CP\,q \times AO \times SP}{ACB}$ ad *SY quad.* (i) Porro ex conicis eſt *CO* ad *BO* ut *BO* ad *TO*, & compoſitè vel diviſim ut *CB* ad *BT*. Unde vel dividendo vel componendo fit *BO* − vel + *CO* ad *BO* ut *CT* ad *BT*, id eſt, *AC* ad *AO* ut *CP* ad *BQ*; indeque $\frac{CP\,q \times AO \times SP}{ACB}$ æquale eſt, $\frac{BQ\,q \times AC \times SP.}{AO \times BC}$ Minuatur jam in infinitum figu-




(i) 396. *Porrò ex conicis.* (Vid. Lem. V. de Conicis, Cor. 2.) eſt TO : AO = AO : CO & quia AO = BO, invertendo & permutando eſt CO : BO = BO : TO & in Ellipſi compoſitè CO : BO = CB (ſeu CO + BO) : BT (ſeu BO + TO); & in hyperbolâ diviſim, CO : BO = CB (ſeu CO − BO) : BT (ſeu BO − TO); Quarè in utraque ſectione, CO : BO = CB : BT. Undè in ellipſi dividendo fit AC, ſeu BO − CO, aut AO − CO : BO = CT, ſeu BT − CB : BT, & in hyperbolâ, componendo AC ſeu CO + BO : BO = CT ſeu CB + BT : BT; adeóque in utráque ſectione AC : BO ſeu AO = CT : BT. Sed propter ſimilitudinem triangulorum TCP, TBQ, CT : BT = CP : BQ, ergò AC : AO = CP : BQ, & $CP = \frac{BQ \times AC}{AO}$, ac $CP^2 = \frac{BQ^2 \times AC^2}{AO^2}$; indeque $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB} = \frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times CB}$.

DE MOTU CORPORUM.

ræ $RPB$ latitudo $CP$, ſic ut punctum $P$ coeat cum puncto $C$, punctumque $S$ cum puncto $B$, & linea $SP$ cum linea $BC$, lineaque $SY$ cum lineâ $BQ$; & corporis jam rectà deſcendentis in lineâ $CB$ velocitas fiet ad velocitatem corporis centro $B$ intervallo $BC$ circulum deſcribentis; in ſubduplicatâ ratione ipſius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad $SYq$, hoc eſt (neglectis æqualitatis rationibus $SP$ ad $BC$ & $BQq$ ad $SYq$) in ſubduplicatâ ratione $AC$ ad $AO$ ſive $\frac{1}{2}AB$. *Q. E. D.*




*Corol.* 1. Punctis $B$ & $S$ coeuntibus, fit $TC$ ad $TS$ ut $AC$ ad $AO$.

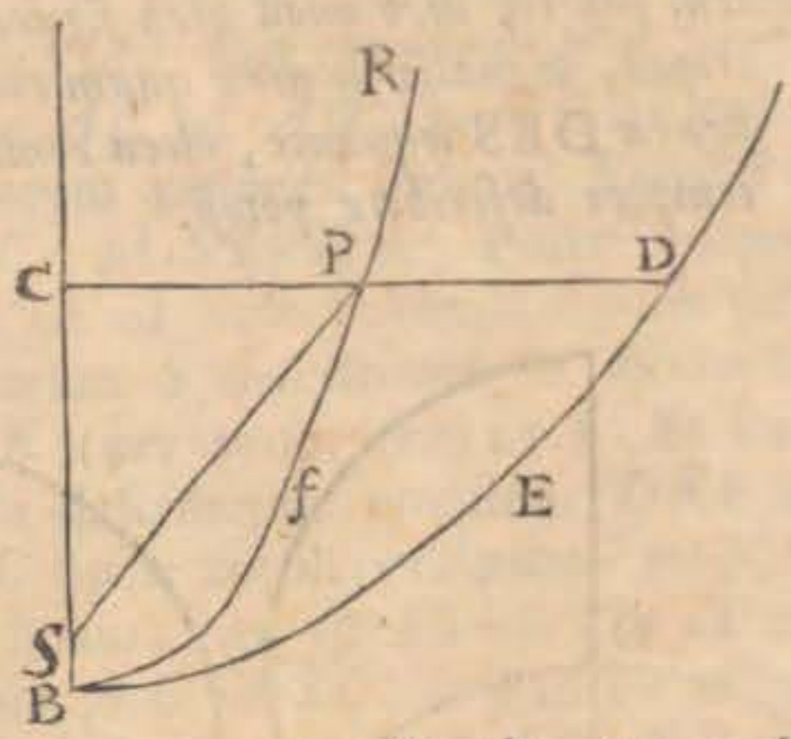
*Corol.* 2. (k) Corpus ad datam à centro diſtantiam in circulo quovis revolvens, motu ſuo ſurſum verſo aſcendet ad duplam ſuam à centro diſtantiam. PRO-

(k) 397. *Corpus ad datam.* Si fuerit BED circulus, & punctum C coincidat cum puncto O, erit $AC = AO = \frac{1}{2}AB$, adeóque velocitas per radium AO cadendo acquiſita eſt æqualis velocitati corporis centro B intervallo $BO = AO$ circulum deſcribentis. Undè ſi corpus illud, ad datam à centro diſtantiam BO in circulo revolvens, ſurſum per OA, projiciatur cum eâ velocitate quâ circulum deſcribit, ſeu quam per AO cadendo acquiſivit, aſcendet ad punctum A, per ſpatium OA (25) ſeu ad duplam ſuam à centro B diſtantiam $BA = 2BO$.

398. Coroll. 1. Velocitas in puncto quovis C, eſt ad velocitatem in alio puncto c, in ratione ſubduplicatâ rectanguli $AC \times BC$, ad rectangulum $Ac \times Bc$. Nam velocitas in C, eſt ad velocitatem corporis intervallo BC circulum deſcriben-

## PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

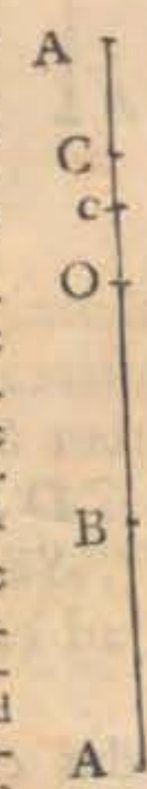
*Si figura* BED *parabola eſt, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis eſt velocitati quâ corpus centro* B *dimidio intervalli ſui* BC *circulum uniformiter deſcribere poteſt.*




Nam corporis parabolam *R P B* circa centrum *S* deſcribentis velocitas in loco quovis *P* (per corol. VII. prop. XVI.) æqualis eſt velocitati corporis dimidio intervalli *SP* circulum circa idem centrum *S* uniformiter deſcribentis. Minuatur parabolæ latitudo *CP* in infinitum eo, ut arcus parabolicus *PfB* cum rectâ *CB*, centrum *S* cum vertice *B*, & intervallum *SP* cum intervallo *BC* coincidat, & conſtabit propoſitio. *Q. E. D.*

PRO-

bentis ut $\sqrt{AC}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$, (per hancce prop.); Velocitas corporis intervallo BC circulum deſcribentis eſt ad Velocitatem corporis intervallo Bc circulum deſcribentis, (per Cor. 6. Prop. IV.) reciproce in ratione ſubduplicatâ Radiorum, hoc eſt, ut $\sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{BC}$; Denique Velocitas Corporis intervallo Bc circulum deſcribentis eſt ad Velocitatem in c corporis ex A cadentis ut $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$ ad $\sqrt{Ac}$ (per hanc propoſitionem); Ergo per compoſitionem rationum) eſt velocitas in C ad velocitatem in c, in ratione compoſitâ ex ratione $\sqrt{AC}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$, ratione $\sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{BC}$, & ratione $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$ ad $\sqrt{Ac}$, ſive ut $\sqrt{AC} \times \sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{Ac} \times \sqrt{BC}$, hoc eſt, in ratione ſubduplicatâ rectanguli $AC \times Bc$ ad rectangulum $Ac \times BC$. Q. E. D.

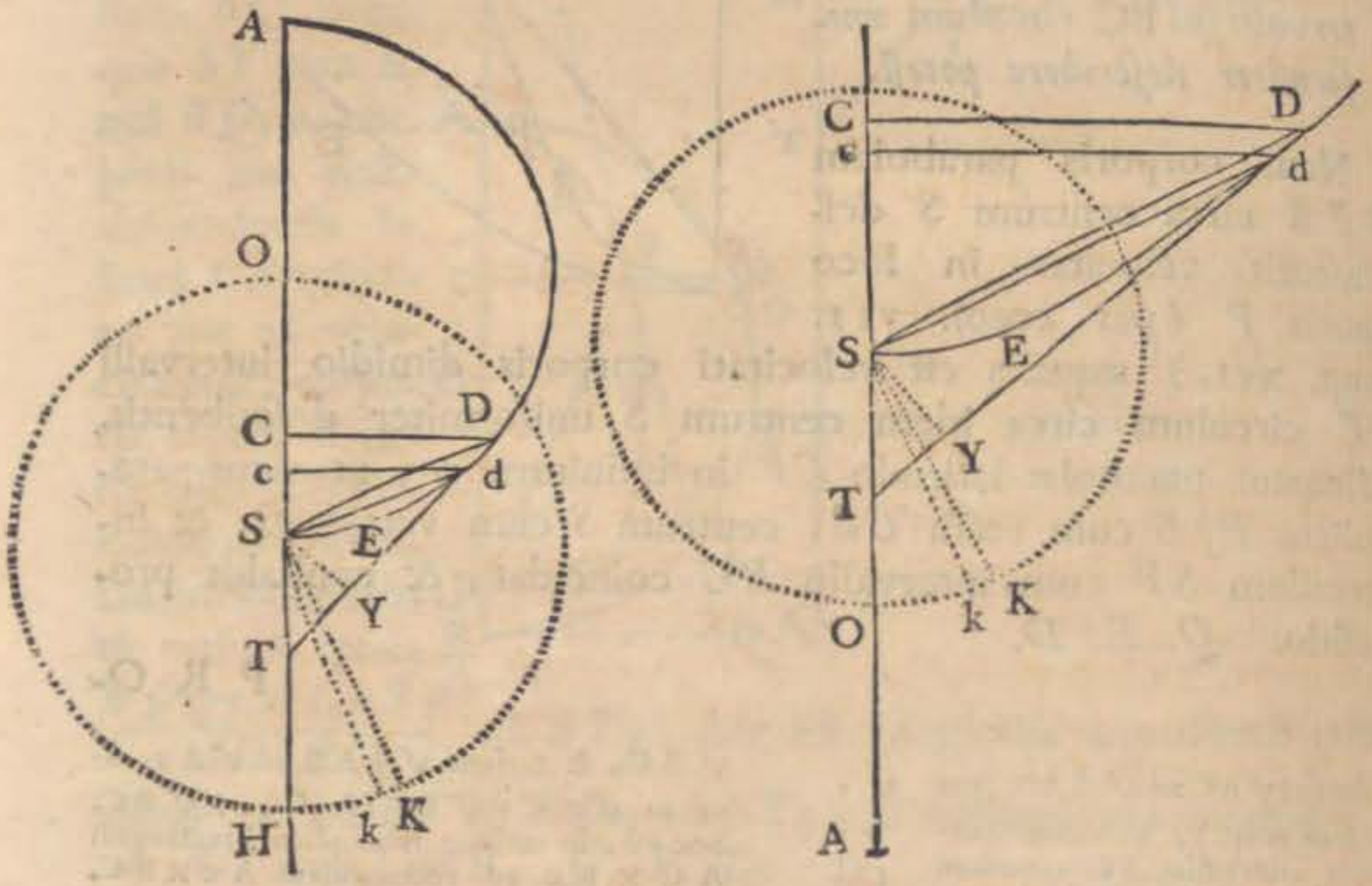



399. Coroll. 2. Si fuerit B f P Parabola, corporis in ea mori velocitas in loco quovis P, erit ad velocitatem corporis ad diſtantiam S P, circulum deſcribentis in ratione $\sqrt{2}$, ad 1; ſi fit Ellipſis in minori ratione, in majori verò ſi fuerit hyperbola (per Cor. 7. Prop. 16.) & latitudine orbis imminuta in infinitum ut coincidat B f P cum axe B C, erit corporis cadentis velocitas in loco quovis C ad velocitatem corporis ad diſtantiam BC circulum deſcribentis ut $\sqrt{2}$ ad 1. adeóque $AC : \frac{1}{2}AB = 2 : 1$ in 2°. caſu ratio $AC_2$ ad $\frac{1}{2}AB$, minor erit quam ratio 2 ad 1; in 3°. caſu major, & contrà.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

*Iisdem positis, dico quod area figuræ* DES, *radio indefinito* SD *descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.*




Nam concipe corpus *C* quam minimâ temporis particulâ lineolam *Cc* cadendo describere, & interea corpus aliud *K*, uniformiter in circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* describere. Erigantur perpendicula *CD*, *cd* occurrentia figuræ *DES* in *D*, *d*. Jungantur *SD*, *Sd*, *SK*, *Sk* & ducatur *Dd* axi *AS* occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum *SY*.

*Cas.* 1. Jam si figura *DES* circulus est vel hyperbola rectangula, bisecetur ejus transversa diameter *AS* in *O*, & erit

*SO*

*SO* dimidium lateris recti. (l) Et quoniam eſt *TC* ad *TD* ut *Cc* ad *Dd*, & (m) *TD* ad *TS* ut *CD* ad *SY*, erit ex æquo *TC* ad *TS* ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Sed (per corol. I. prop. XXXIII.) (n) eſt *TC* ad *TS* ut *AC* ad *AO*, puta ſi in coitu punctorum *D*, *d* capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo *AC* eſt ad *AO* ſeu *SK* ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Porro corporis deſcendentis velocitas in *C* eſt ad velocitatem corporis circulum intervallo *SC* circa centrum *S* deſcribentis in ſubduplicatâ ratione *AC* ad *AO* vel *SK* (per prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis deſcribentis circulum *OKk* in ſubduplicatâ ratione *SK* ad *SC* (per corol. VI. prop. IV.) & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc eſt lineola *Cc* ad arcum *Kk* in ſubduplicatâ ratione *AC* ad *SC*, (o) id eſt in ratione *AC* ad *CD*. Quare eſt $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & (P) propterea *AC* ad *SK* ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeque $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2}\ SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2}\ SY \times Dd$, id eſt area *KSk* æqualis areæ *SDd*. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ *KSk*, & *SDd*, quæ, ſi magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per corollarium lemmatis IV.) areæ totæ ſimul genitæ ſunt ſemper æquales. *Q. E. D.*

*Caſ.*

(l) * *Et quoniam eſt TC ad TD ut Cc ad Dd.* Quia in Triangulo TCD, eſt cd parallela baſi CD, ideoque TC : TD ut partes correſpondentes Cc, Dd.

(m) * *Et TD ad TS ut CD ad SY.* Sunt enim propter angulos Y, & C, rectos & angulum T, communem, triangula TCD, TSY, ſimilia.

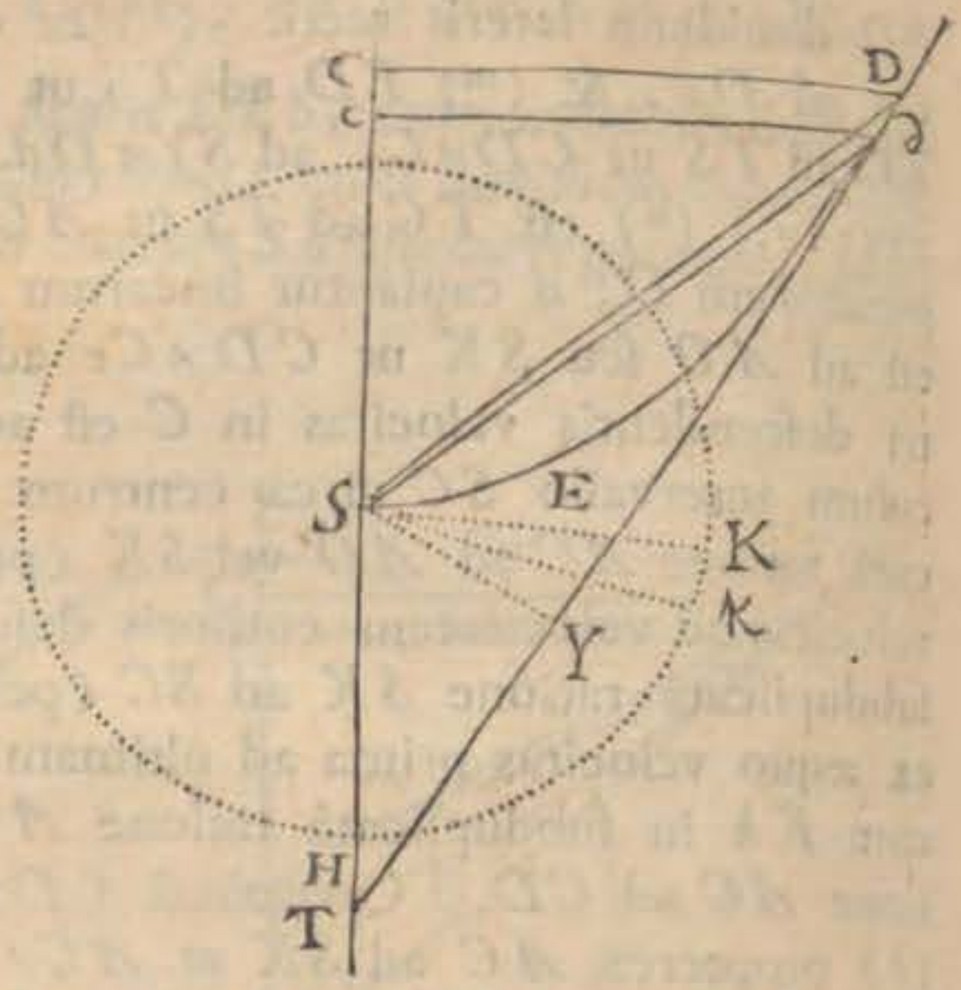
(n) * *Eſt TC : TS.* Nam punctis D, d, coeuntibus, fit TD, tangens; adeóque (396.) TC : TS = AC : AO.

(o) * *In ratione AC ad SC, id eſt in ratione AC ad CD.* Eſt enim SED, circulus, vel hyperbola æquilatera cujus vertices S & A, ſed in circulo & hyperbolâ æquilaterâ ob axium æqualitatem eſt $CD^2 = AC \times SC$, & proinde AC : CD = CD : SC, & hinc AC ad CD, in ratione ſubduplicatâ AC ad SC.

(p) * *Et propterea.* Nam ex ſuperius demonſtratis AC : SK = CD × Cc : SY × Dd.

DE MOTU CORPORUM.

*Caſ.* 2. Quod ſi figura *D E S* parabola ſit, invenietur eſſe ut ſupra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut $TC$ ad $TS$, hoc (q) eſt ut 2 ad 1, ideoque $\frac{1}{4} CD \times Cc$ æquale eſſe $\frac{1}{2} SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in $C$ æqualis eſt velocitati quâ circulus intervallo $\frac{1}{2} SC$ uniformiter deſcribi poſſit (per prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem quâ circulus radio $SK$ deſcribi poſſit, hoc eſt, lineola $Cc$ ad arcum $Kk$ (per corol. VI. prop. IV.) eſt in ſubduplicatâ ratione $SK$ ad $\frac{1}{2} SC$, id (r) eſt, in ratione $SK$ ad $\frac{1}{2} CD$. Quare eſt $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4} CD \times Cc$, ideoque æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, hoc eſt, area $KSk$ æqualis areæ $SDd$, ut ſupra. *Q. E. D.*




PRO-

(q) * *Hoc eſt ut* 2 *ad* 1. Cum enim ſit T D tangens, C D ordinata, S C abſciſſa, eſt ex naturâ Parabolæ T S = S C, adeóque T C : T S = 2. 1.

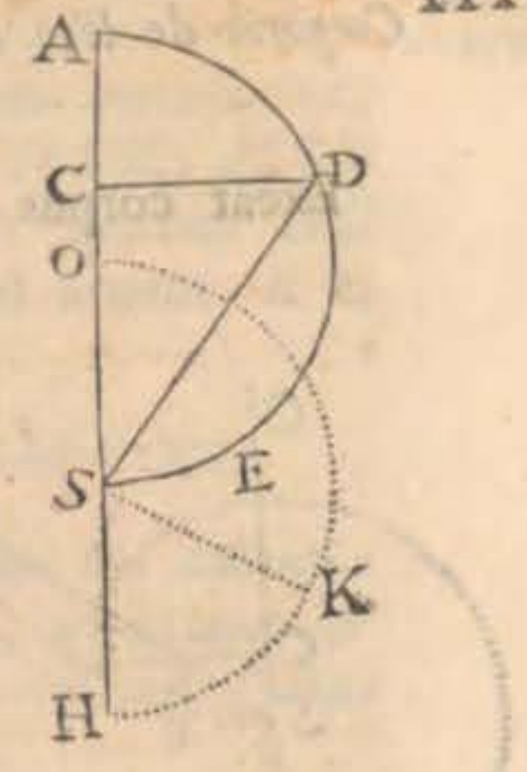
(r) * *Id eſt in ratione S K, ad* $\frac{1}{2}$ C D. Nam (ex hyp.) S K, æqualis eſt dimidio lateri recto, quare ex naturâ parabolæ $2SK \times SC = CD^2$, & $\frac{1}{2} SC \times SK = \frac{1}{4} CD^2$. Undè $SK : \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} CD : \frac{1}{2} SC$, & hinc S K ad $\frac{1}{2}$ C D in ratione ſubduplicatâ S K ad $\frac{1}{2}$ S C.

400. Coroll. 1. Si fuerit S E D circulus cujus diameter S A, corpus ex loco A demiſſum & ſolâ vi centripetâ ſollicitatum cadendo percurret totam diametrum A S, eodem tempore, quo corpus aliud ad dimidiam diſtantiam S O, deſcribet ſemicirculum O K H; ſunt enim areæ ſemicirculorum O K H & S E A æquales, tempus verò quo corpus ex A demiſſum cadendo percurrit ſpatium quodvis A C eſt ad tempus quo percurret A S, ut area A S D ad ſemicirculum A D E S, ſive ut ſector O S K ad ſectorem quem deſcribit corpus in circulo OKH revolvens æqualem ſemicirculo A D E S, qui ſector erit ipſe ſemicirculus O K H.

401. Coroll. 2. Si corpus ad diſtantiam S A, circulum deſcribens omni motu revolutionis privaretur, & ad centrum virium S, ſolâ vi centripetâ urgeretur, tempus quo ex A uſque ad S cadendo perveniret, eſſet ad tempus unius revolutionis in circulo ut 1, ad $4\sqrt{2}$: eſt enim tempus periodicum corporis ad diſtantiam S O circulum deſcribentis (hoc eſt, duplum ejus.

## PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

*Corporis de loco dato* A *cadentis determinare tempora descensus.*




Super diametro *AS* distantiâ corporis a centro sub initio, describe semicirculum *ADS*, ut & huic æqualem semicirculum *OKH* circa centrum *S*. De corporis loco quovis *C* erige ordinatim applicatam *CD*. Junge *SD*, & areæ *ASD* æqualem constitue sectorem *OSK*. (f) Patet per prop. xxxv. quod corpus cadendo describet spatium *AC* eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum *S* gyrando, describere potest arcum *OK*. *Q. E. F.*

ejus temporis quo corpus ex A, cadendo percurrit AS, (400)) ad tempus periodicum corporis ad distantiam AS (= 2 SO) in circulo revolventis ut Radices quadratæ cuborum distantiarum 1. & 2. sive ut 1, ad $\sqrt{8}$ (191), hoc est, ut 1 ad $2\sqrt{2}$; ergo tempus quo corpus cadendo percurrit AS, est ad tempus periodicum corporis ad distantiam A S in circulo revolventis ut $\frac{1}{2}$ ad $2\sqrt{2}$, hoc est, ut 1, ad $4\sqrt{2}$.

402. Scholium. Si planetarum orbitas circulares esse suponamus, vimque centripetam quâ in suis orbitis retinentur, in duplicatâ ratione distantiarum à centro decrescere, ex datis temporibus periodicis, facile erit tempora definire quibus usque ad centrum sui motus cadendo pervenirent. Exempli causâ, cum tempus periodicum lunæ circà terram revolventis sit dierum 27. hor. 7. minutorum primorum 43, hoc est, minutorum primorum 39343, erit $4\sqrt{2}$, ad 1, hoc est, quam proxime 565685, 100000, ut 39343, ad 6955. 5, seu dies 4, hor. 19, min. prim. 55, & secund. 30, tempus quo luna cadendo ad centrum telluris perveniret.

(f) * *Patet per prop. XXXV.* Cum enim semicirculorum ADS, OKH, & sectorum OSK, ASD, areæ æquales sint respective, erit quoque sector HSK æqualis segmento SED, adeóque (401.) tempus quo corpus ex A cadendo percurrit CS, æquatur tempori, quo corpus aliud in circulo OKH revolvens describit arcum KH, & quoniam tempus per AS cadendo æquatur tempori quo corpus revolvens totum semicirculum OKH, describit (401), erit tempus per AC, æquale tempori per arcum OK.

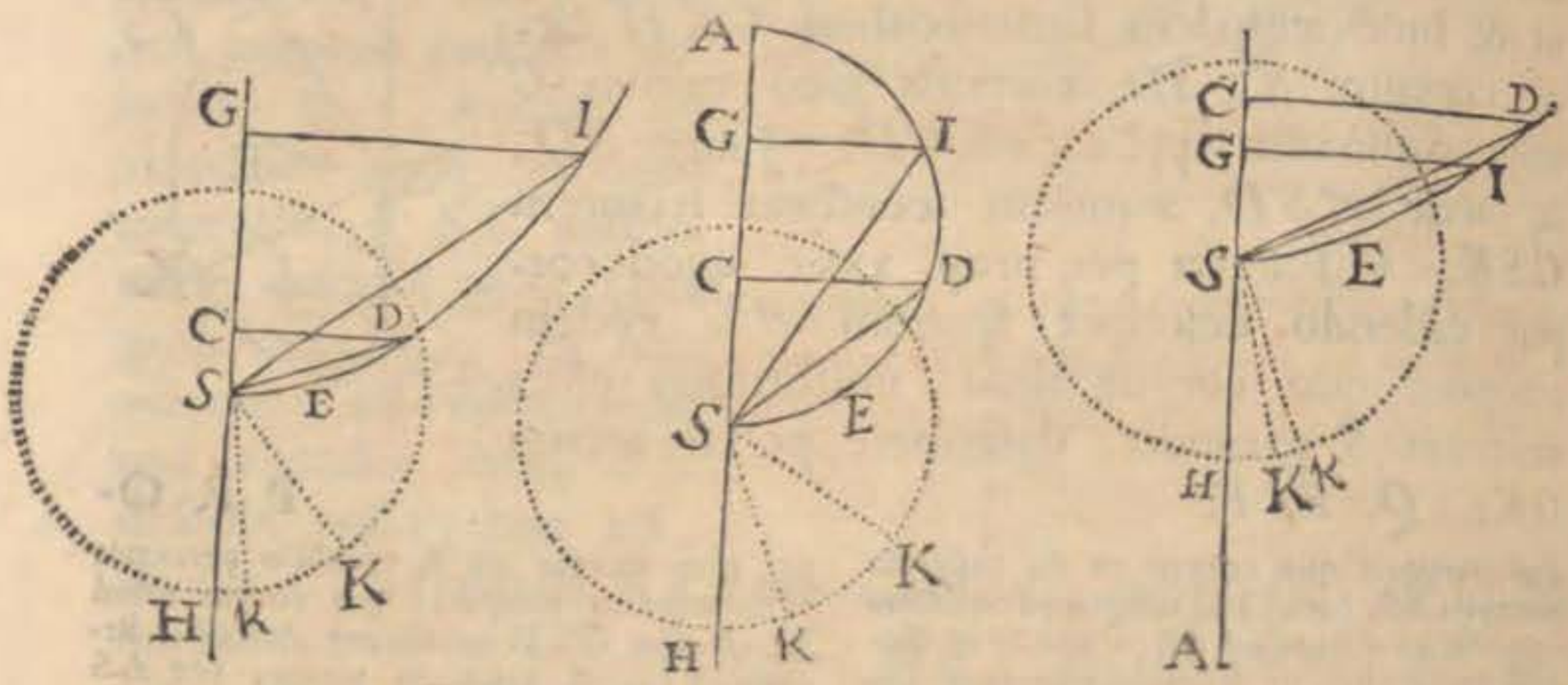
403. Coroll. Arcus OK, æqualis est summæ arcus AD & lineæ CD. Est enim sector ASD, æqualis sectori AOD, + triangulo DOS, sive $\frac{1}{2}$ AO × AD + $\frac{1}{2}$ AO × CD: sector verò OSK, = $\frac{1}{2}$ SO × OK = $\frac{1}{2}$ AO × OK, sed est sector OSK = ASD. Quare $\frac{1}{2}$ AO × OK = $\frac{1}{2}$ AO × AD + $\frac{1}{2}$ AO × CD, atque adeò OK = AD + CD. Si itaque fiat ut radius ad arcum grad. 57. 29578, qui radio æqualis est, ita CD, ad 4[to]. *B*, erit *B* arcus rectæ CD æqualis, & obtinebitur OK = AD + *B*. Hinc dato tempore quo corpus datam AS ex puncto A cadendo percurrit, invenitur tempus quo datam rectæ AS partem AC describit, si fiat ut semicirculus OKH, seu grad. 180, ad arcum AD + *B*, seu OK, ità tempus quo corpus ex A cadendo percurrit AS, ad tempus quo percurrit AC.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

*Corporis de loco dato ſurſum vel deorſum projecti definire tempora aſcenſus vel deſcenſus.*

Exeat corpus de loco dato *G* ſecundum lineam *G S* cum ve-




locitate quâcumque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, quâ corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi poſſet, cape *GA* ad $\frac{1}{2}$ *AS*. Si ratio illa eſt numeri binarii ad unitatem, punctum *A* infinite diſtat, quo caſu parabola vertice *S*, axe *SG*, latere quovis recto deſcribenda eſt. Patet hoc per prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major eſt quam 2 ad 1, priore caſu circulus, poſteriore hyperbola rectangula ſuper diametro *SA* deſcribi debet. (t) Patet per prop. XXXIII. Tum centro *S*, intervallo æquan-

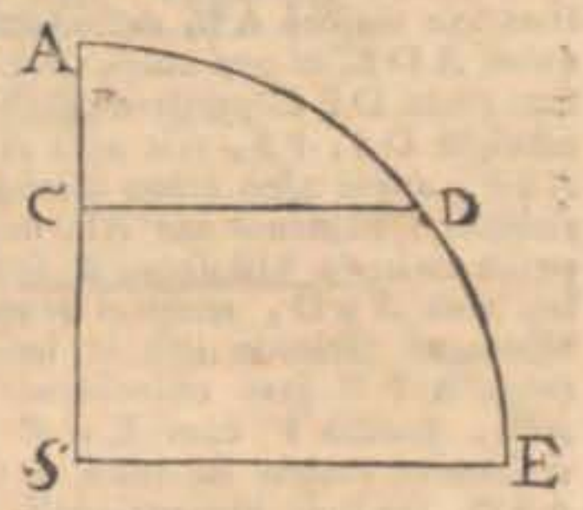
(t) * *Patet per Prop. XXXIII.* Scilicet, fingatur ſectio conica latitudinis quam minimæ, ut proximè coincidat cum axe AB, & in ea fingatur eſſe punctum G ex quo corpus movetur cum datâ velocitate, primo quæritur ſpecies illius ſectiones, & ex proportione velocitatis datæ ad velocitatem quâcum corpus ad intervallum datum SG circa Centrum S revolveretur, agnoſcetur, ex Cor. 7. Prop. XVI: &, ſi ſit Ellipſis vel Hiperbola ejus axis major ex velocitate in G datâ etiam innoteſcet, per Prop. XXXIII, quia velocitas corporis cadentis in puncto G, eſt ad velocitatem corporis in diſtantia SG revolventis in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ puncti G à vertice ulteriore Ellipſis vel Hyperbolæ ad ejus ſemi Axem, unde

æquante dimidium lateris recti, deſcribatur circulus $HkK$, & ad corporis deſcendentis vel aſcendentis locum $G$, & locum alium quemvis $C$, erigantur perpendicula $GI$, $CD$ occurrentia conicæ ſectioni vel circulo in $I$ ac $D$. Dein junctis $SI$, $SD$, fiant ſegmentis $SEIS$, $SEDS$ ſectores $HSK$, $HSk$ æquales, & per prop. xxxv. corpus $G$ deſcribet ſpatium $GC$ eodem tempore quo corpus $K$ deſcribere poteſt arcum $Kk$. *Q. E. F.*

## PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

*Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum à centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & ſpatia deſcripta ſunt arcubus, arcuumque ſinibus rectis & ſinibus verſis reſpectivè proportionalia.*

Cadat corpus de loco quovis $A$ ſecundum rectam $AS$; & centro virium $S$, intervallo $AS$, deſcribatur circuli quadrans $AE$, ſitque $CD$ ſinus rectus arcus cujuſvis $AD$; & corpus $A$, tempore $AD$, cadendo deſcribit ſpatium $AC$, inque loco $C$ acquiret velocitatem $CD$.




Demonſ-

unde ſi fiat GA ad $\frac{1}{2}$ SA in duplicatâ ratione velocitatis in G ad velocitatem corporis in diſtantiâ SG revolventis, erit A vertex ulterior Ellipſis vel Hyperbolæ, & $\frac{1}{2}$ SA ſemi Axis quæſitus.

Fiat ergo in vertice S Parabola quævis, ſi curva evaneſcens in quâ G eſt, ſit Parabola, vel fiat Circulus, vertice S Diametro SA, ſi ſit Elllpſis; vel Hyperbola æquilatera eâdem Diametro ſi ea curva ſit Hyperbola, & ſi Corpus ex G perveniat in C, erectis uſque ad curvas deſcriptas perpendicularibus GI. CD, erunt ſegmenta SEI, SED proportionalia temporibus quibus corpus propoſitum ex G ad S, & ex C ad S movebitur per Prop. XXXII: *Sed per Prop. XXXV*, corpus G ſpatia GS, CS, iiſdem temporibus cadendo percurrit, quibus corpus K, deſcribit arcus KH, kH; eodem igitur tempore percurritur GC, quo Kk.

DE MOTU CORPORUM.

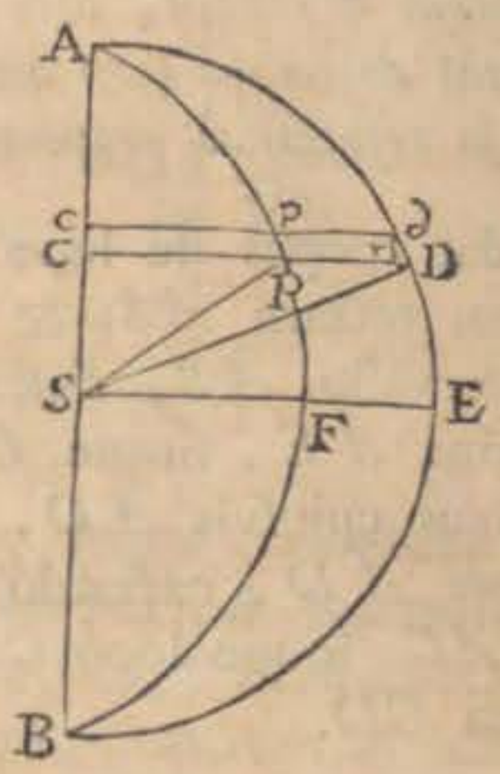
(u) Demonſtratur eodem modo ex propoſitione x, quo propoſitio XXXII, ex propoſitione XI demonſtrata fuit.

*Corol.* 1. (x) Hinc æqualia ſunt tempora, quibus corpus unum de loco *A* cadendo pervenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem *A D E*.

*Corol.* 2. Proinde æqualia ſunt tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad (y) uſque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per corol. III. prop. IV.) æquantur.

PRO.

(u) * 404. *Demonſtratur eodem modo.* Nam ſi corpus non cadit perpendiculariter, deſcribet id (per Cor. 1. Prop. X.) ellipſim aliquam A P F B, cujus centrum congruit cum centro virium S; Super hujus ellipſeos axe majore A B, deſcribatur ſemicirculus A D B, & per corpus decidens tranſeat recta D P C perpendicularis ad axem, actiſque D S, P S, erit area A S D, areæ A S P, atque adeò etiam tempori proportionalis. Manente axe AB, minuatur perpetuò latitudo Ellipſeos, & ſemper manebet area A S D, tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, & orbe A P B jam coincidente cum axe A B, puncto P cum C, & F cum S, deſcendet corpus in rectâ A C, & area A S D, ſeu huic proportionalis arcus A D, evadet tempori proportionalis. In rectâ A C capiatur linea quam minima C c, agaturque c d, parallela C D, & circulum ſecans in puncto d, ex quo ad C D, demittatur perpendiculum d r, & arcus D d proportionalis erit tempori quo percurritur C c, (ex demonſtr.) atque adeò coeuntibus punctis C c, & d D, erit velocitas in C, ut $\frac{C c}{D d}$ (5, 145), ſed ob triangula D r d, S C D, ſimilia C c, ſeu d r : d D = C D : S D, id eſt, $\frac{C c}{d D} = \frac{C D}{S D}$. Quarè velocitas in loco C, eſt ut $\frac{C D}{S D}$, hoc eſt, ob conſtantem S D, ut C D. Q. E. D.




(x) * *Cor.* 1. *Hinc æqualia.* Nam per coroll. 2. prop. X. tempora revolutionum in ellipſibus quibuſvis A P F, A D B, adeóque & tempora per ellipſeon quadrantes A P F ſeu A S, A D E, ſunt æqualia.

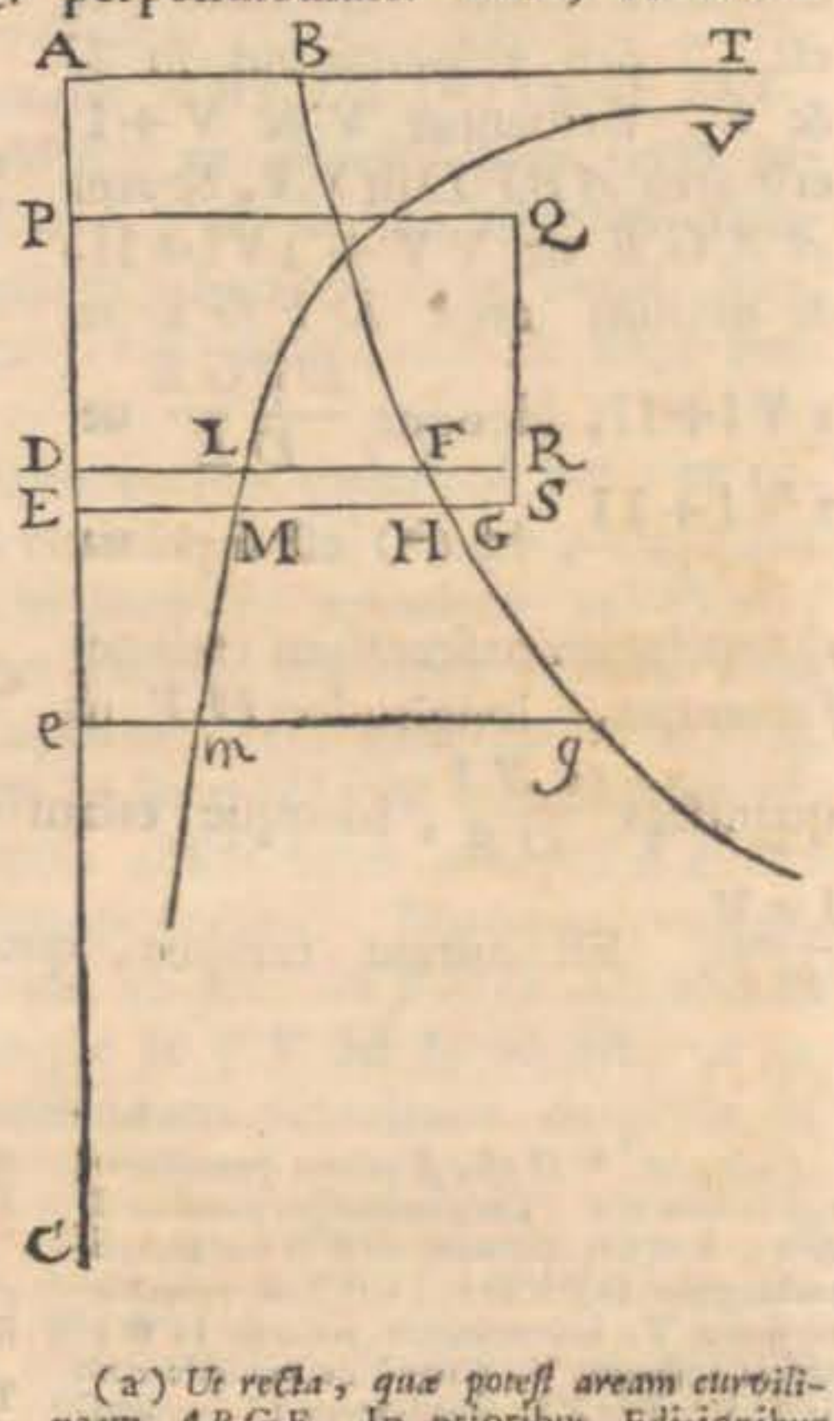
(y) * *Ad uſque centrum.* Ex quiete cadunt.

405. Æqualia ſunt tempora quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad locum C, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum circuli A D; Cum enim corpus in circulo uniformiter revolvatur, erit tempus per A D ad tempus per A E ſeu ad tempus per A S, ut arcus A D, ad quadrantem A E, ſed eſt etiam tempus per A C, ad tempus per A S, ut arcus A D, ad quadrantem A E, ergò tempus per A C, æquatur tempori per A D.

## PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

*Positâ cujuscumque generis vi centripetâ, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ ascendentis vel descendentis tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.*

De loco quovis *A* in rectâ *ADEC* cadat corpus *E*, (z) deque loco ejus *E* erigatur semper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitque *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipso motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis velocitas in loco quovis *E* (a) ut recta, quæ potest aream curvilineam *ABGE*. *Q. E. I.*



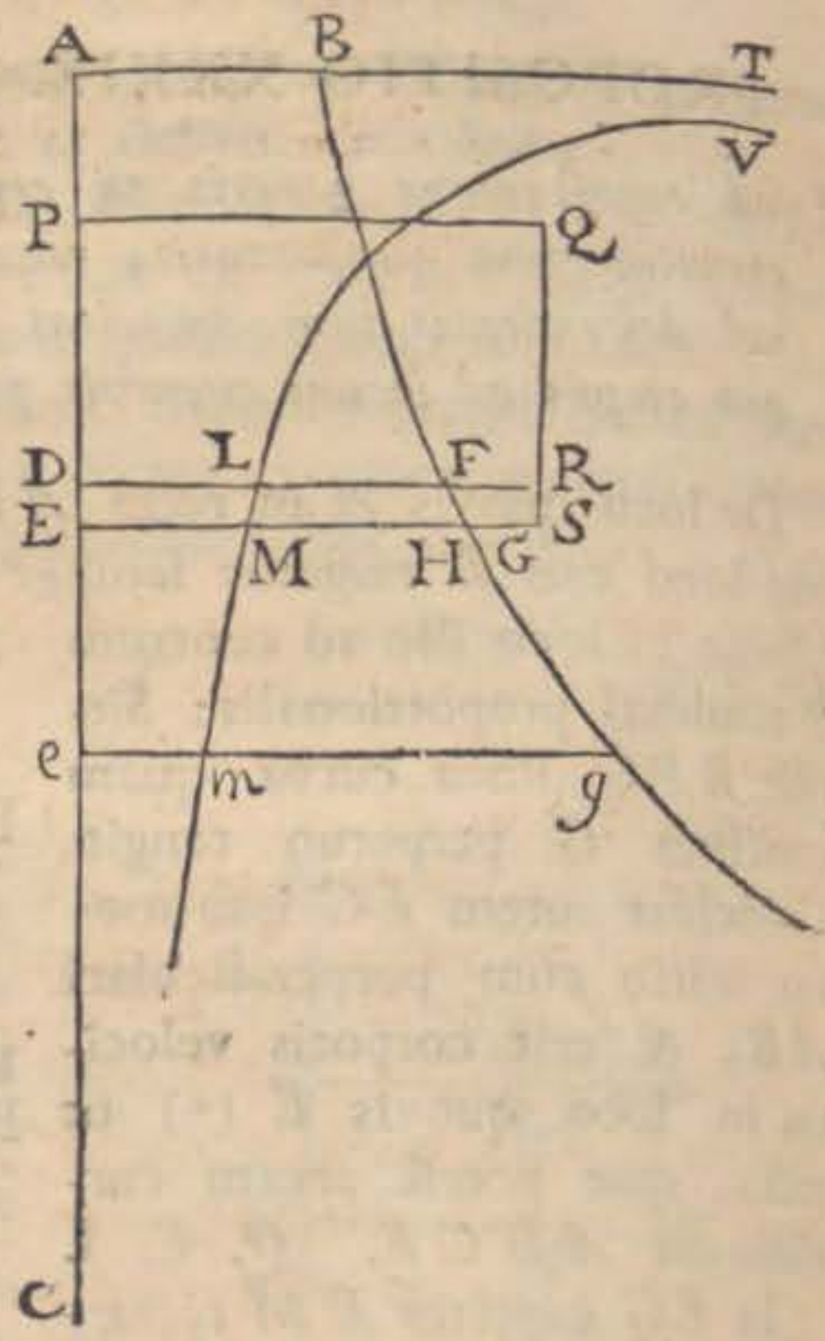

In *EG* capiatur *EM* rectæ, quæ potest aream *ABGE*, reciprocè proportionalis, & sit *VLM* linea curva, quam punctum *M* perpetuo tangit, & cujus asymptotos est recta *AB* producta; & erit tempus, quo corpus cadendo describit lineam *AE*, ut area curvilinea *ABTVME*. *Q. E. I.*

(z) * *Deque loco ejus E.* Id est, per omnia lineæ AC puncta erigantur perpendicula ut EG, vi centripetæ in singulis illis punctis proportionalia, sitque BFG curva ad quam omnia illa perpendicula terminentur. Possunt autem perpendicula illa ad arbitrium assumi, dummodò singula vi centripetæ in singulis locis proportionalia sint.

(a) *Ut recta, quæ potest aream curvilineam ABGE.* In prioribus Editionibus erat, *ut areæ curvilineæ ABGE latus quadratum*; hæ scilicet phrases synonymæ sunt; frasis quæ hic juxta Editionem Londinensem adhibetur, veteribus Geometris est familiaris: Ea autem linea quæ potest figuram datam, est linea cujus quadratura est æquale illi figuræ datæ.

DE MOTU CORPORUM.

Etenim in rectâ $AE$ capiatur linea quam minima $DE$ datæ longitudinis, ſitque $DLF$ locus lineæ $EMG$, ubi corpus verſabatur in $D$; & ſi ea ſit vis centripeta, ut recta, quæ poteſt aream $ABGE$, ſit ut deſcendentis velocitas: erit area ipſa in duplicatâ ratione velocitatis, id eſt, ſi pro velocitatibus in $D$ & $E$, ſcribantur V & V+I, erit area $ABFD$ ut VV, & area $ABGE$ ut VV + 2VI+II, & diviſim area $DFGE$ ut 2VI+II, ideoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI+II}{DE}$, id (b) eſt ſi primæ quantitatum naſcentium rationes ſumantur, longitudo $DF$ ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Eſt autem tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineolam




(b) 406. * *Id eſt, ſi primæ quantitatum naſcentium &c.* Seu coeuntibus punctis, D & E, F & G, fit area DFGE, æqualis rectangulo DF×DE (107) & velocitatis finitæ V, incrementem naſcens I, evaneſcit reſpectu V, (107) ac proinde cum ſit I:V=II:VI, quadratum II, evaneſcit reſpectu rectanguli VI, aut 2VI; Quarè in hoc caſu $\frac{DFGE}{DE}$, $= \frac{DF \times DE}{DE}$ $= DF$, & $\frac{2VI+II}{DE} = \frac{2VI}{DE}$; Eſt igitur longitudo DF, ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideóque etiam, ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$: Quoniam autem velocitas per ſpatium evaneſcens DE, eſt uniformis (145), ſi tempus quo DE percurritur, dicatur T, erit $T = \frac{DE}{V}$, (5). Eſt autem vis ut $\frac{I}{T}$ (13) adeóque ſi loco T ponatur $\frac{DE}{V}$, erit vis ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc eſt, ut longitudo DF, *ergò vis ipſi DF, vel EG &c.*

* Pos-

neolam $DE$, ut lineola illa directè & velocitas V inversè, eſtque vis ut velocitatis incrementum I directè & tempus inversè, ideoque ſi primæ naſcentium rationes ſumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc eſt, ut longitudo $DF$. Ergo vis ipſi $DF$ vel $EG$ proportionalis facit ut corpus eâ cum velocitate deſcendat, quæ ſit ut recta quæ poteſt aream $ABGE$. *Q. E. D.*

(c) Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola $DE$ deſcribatur, ſit ut velocitas inverſè, ideoque inverſè ut linea recta quæ poteſt aream $ABFD$; (d) ſitque $DL$, atque ideo area naſcens $DLME$, ut eadem linea recta inverſè: erit tempus ut area $DLME$, & ſumma omnium temporum ut ſumma omnium arearum, hoc eſt (per corol. lem. IV.) tempus totum quo linea $AE$ deſcribitur ut area tota $ATVME$. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Si $P$ ſit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ (qualis vulgo ſupponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco $D$ æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quâcunque cadens acquiſivit eodem loco $D$, & in perpendiculari $DF$ capiatur $DR$, quæ ſit ad $DF$ ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco $D$, & compleatur rectangulum $PDRQ$, eique æqualis abſcindatur area $ABFD$; erit $A$ locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo $DRSE$, (e) cum ſit area $ABFD$ ad aream $DFGE$ ut VV ad 2VI, ideoque ut $\frac{1}{2}$ V ad I, id eſt, ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæ-

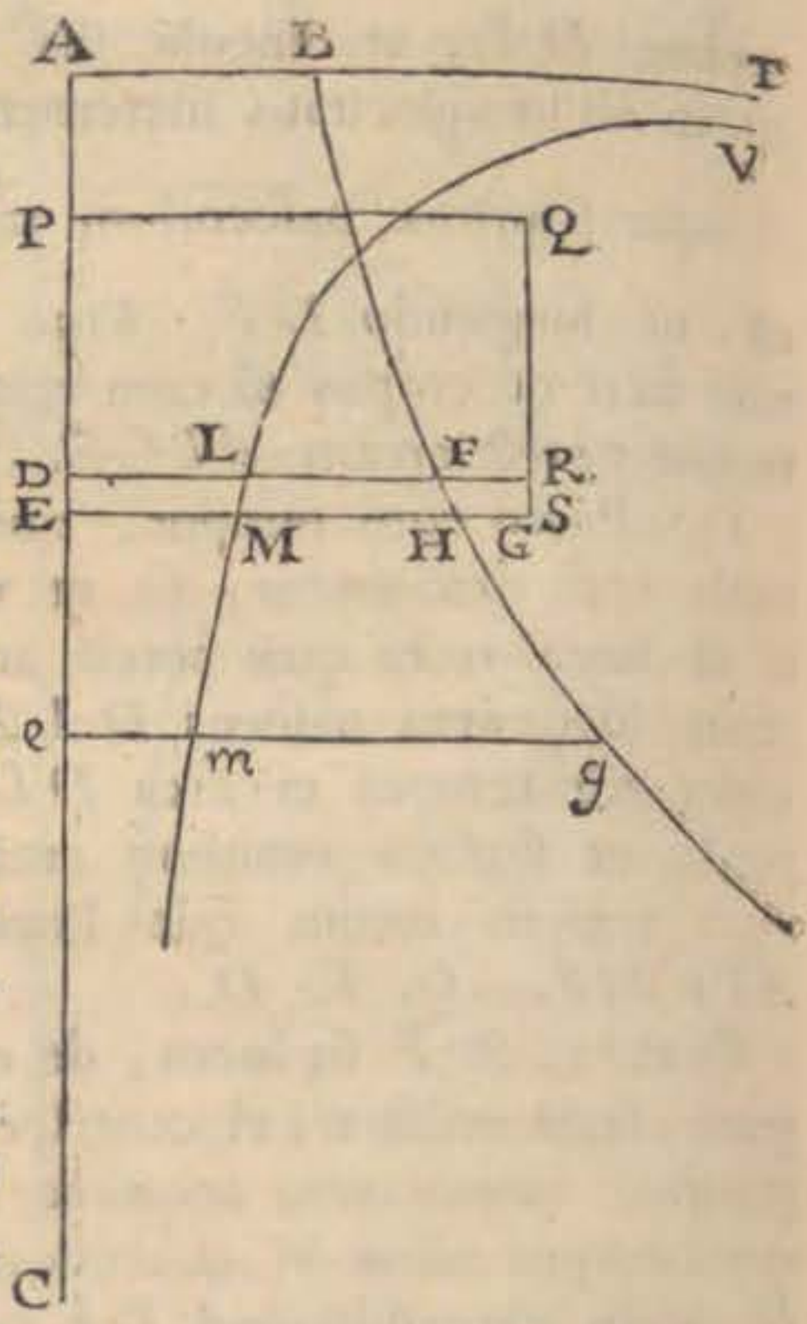
(c) * *Porrò cum tempus.* Tempus enim eſt ut ſpatium uniformiter percurſum directe & velocitas inverſe (5), quare ſi ſpatium conſtans fuerit, tempus eſt ut velocitas inverſe.

(d) * *Sitque DL.* Eſt enim DL, ut DL in conſtantem DE ducta, hoc eſt, ut area naſcens DLME, ſed DL eſt ut latus quadratum areæ ABFD inverſe (per conſtr.) ergò area naſcens DLME, eſt ut idem latus quadratum inverſe, hoc eſt, ut velocitas inverſe, ſive, ut tempus per DE. *Quare ſumma omnium temporum eſt ut ſumma omnium arearum naſcentium. Hoc eſt, &c.*

(e) * *Cum* (coeuntibus punctis D, E) *ſit area ABFD ad aream DFGE, ut VV, ad 2V×I;* Si enim A ſit locus ex quo corpus cadere debet vi quâcumque ut eamdem in D velocitatem V acquiſiverit ac ſi ex P vi gravitatis decidiſſet erit area ABFD, ut VV, & area DFGE, ut 2VI+II, hoc eſt, (406) ut 2VI. Quare ABFD: DFGE = VV : 2VI = $\frac{1}{2}$V : I.

DE MOTU CORPORUM.

inæquabili cadentis; (f) & similiter area *PQRD* ad aream *DRSE* ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ *DF*, *DR*, ideoque ut areæ nascentes *DFGE*, *DRSE*; erunt ex æquo areæ totæ *ABFD*, *PQRD* ad invicem ut semisses totarum velocitatum, & propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.




*Corol.* (g) 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque *D* datâ cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco

(f) * *Et similiter area PQRD ad aream DRSE*, hoc est, linea PD ad lineam DE (propter altitudinem communem DR=SE) *ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis*, scilicet cum velocitas in D sit V, ejus incrementum in E sit X, ex naturâ gravitatis altitudines ex quibus corpus cadit sunt ut quadrata velocitatum in fine lapsus acquisitarum, ergo erit PD ad PE ut VV ad VV + 2VX + X², & dividendo PD: DE = VV: 2VX + X² (& omisso X² ut pote infinite parvo) VV: 2VX = ½V: X; unde PQRD: DRSE = ½V: X, sive invertendo DRSE: PQRD = X: ½V; sunt verò incrementa illa I & X (13) ut vires generatrices id est ut DF ad DR, sive ut DFGE ad DRSE. Est ergo per hanc demonstrationem

ABFD: DFGE = ½V: I
DFGE: DRSE = DF: DR = I: X
DRSE: PQRD = X: ½V

Unde ex compositione rationum ABFD: PQRD = ½V × I × X: I × X × ½V sive in ratione æqualitatis.

(g) * *Coroll.* 2. *demonstratur.* Sit A punctum ex quo corpus cadere debet ut acquirat in loco D velocitatem cum quâ sursum vel deorsum projicitur, erit, (ex Dem.) area ABge proportionalis quadrato velocitatis corporis in loco e; Est autem (ex Dem.) area ABFD, æqualis rectangulo PQRD, adeóque area ABge = PQRD + DFge si locus e loco D inferior fuerit, & ABge = PQRD − DFge, si locus e loco D superior, hoc est, si corpus sursum projectum sit; ergò velocitas

loco $e$, erigendo ordinatam $eg$, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco $D$ ut eſt recta, quæ poteſt rectangulum $PQRD$ aream curvilineâ $DFge$ vel auctum, ſi locus $e$ eſt loco $D$ inferior, vel diminutum, ſi is ſuperior eſt, ad rectam quæ poteſt rectangulum ſolum $PQRD$.

*Corol* 3. Tempus quoque innoteſcet erigendo ordinatam $em$ reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD \pm$ vel $- DFge$, & capiendo tempus quo corpus deſcripſit lineam $De$ ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit à $P$ & cadendo pervenit ad $D$, ut area curvilinea $DLme$ ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam $PD$ eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam $PE$ in (h) ſubduplicatâ ratione $PD$ ad $PE$, id eſt (lineola $DE$ jamjam naſcente) in ratione $PD$ ad $PD + \frac{1}{2}DE$ ſeu $2PD$ ad $2PD + DE$, & (i) diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam $DE$ ut $2PD$ ad $DE$, ideoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLME$; eſtque tempus quo corpus utrumque deſcripſit lineolam $DE$ ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam $De$, ut area $DLME$ ad aream $DLme$, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLme$.

corporis in loco e, eſt ut $\sqrt{PQRD \mp DFge}$; cumque ſit velocitas in D, ut $\sqrt{ABFD}$, ſive ut huic æqualis $\sqrt{PQRD}$ (ex Dem.) erit velocitas in e, ad velocitatem in D, ut $\sqrt{PQRD \mp DFge}$, ad $\sqrt{PQRD}$.

(h) * *In ſubduplicatâ ratione* PD, ad PE (27), *id eſt, lineola DE, jamjam naſcente in ratione PD, ad* $PD + \frac{1}{2}DE$; quadratis enim his ultimis terminis fiet $PD^2 : PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4}DE^2$; & cum ſit PD quantitas finita, & DE naſcens, evaneſcit (107) $\frac{1}{4}DE^2$ reſpectu $PD \times DE$; adeóque $PD \times DE \mp \frac{1}{4}DE^2 = PD \times DE$. Undè eſt $PD^2 : PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4}DE^2 = PD^2 : PD^2 + PD \times DE = PD : PD + DE$, ſeu $PE$; eſt igitur $PD : PE$ in ratione duplicatâ $PD$ ad $PD + \frac{1}{2}DE$, atque adeò $PD$ ad $PD + \frac{1}{2}ED$, in ratione ſubduplicatâ $PD$, ad $PE$.

(i) * *Et diviſim.* Tempus per PD, vi uniformi deſcriptum eſt ad tempus per DE, ut $2PD$, ad DE, adeóque ut rectangulum $2PD \times DL$, ad rectangulum $DE \times DL$, ſeu ad aream DLME; tempus per rectam PD, vi uniformi deſcriptam ſit T, tempus per DE, ſit $\theta$, & tempus per De, ſit t, erit (ex Dem.) $T : \theta = 2PD \times DL : DLME$, eſtque idem tempus $\theta$, quo utrumque corpus deſcribit lineam DE, ſiquidem utriuſque eadem eſt velocitate in D: ſed (ex conſtructione) tempus quo corpus

DE MOTU CORPORUM.

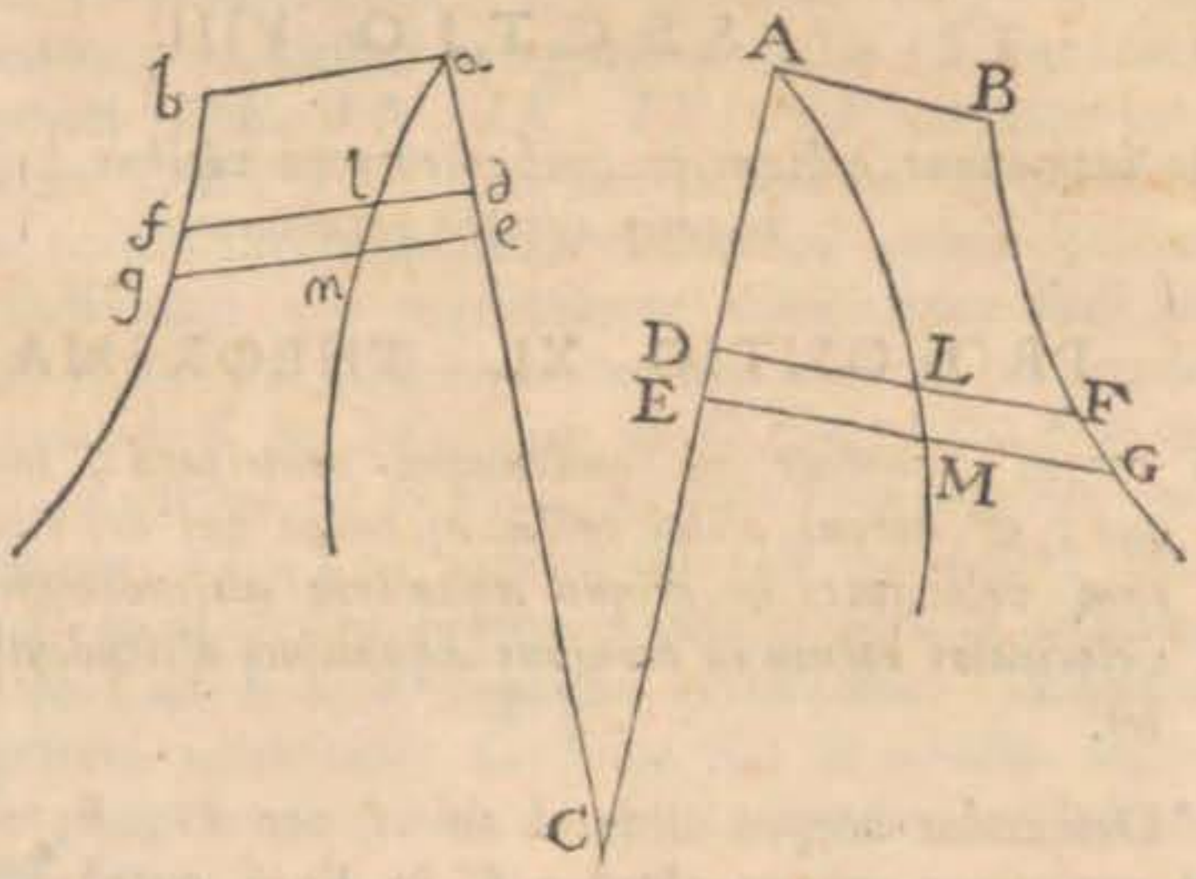
inæquabili motu describit lineam D E est ad tempus quo describit lineam D e, ut area D L M E, ad aream D L M e, ergo $\theta$: T = D L M E : D L m e; unde ex æquo T : t = 2 P D × D L : D L m e.

407. Sit spatium à corpore cadente descriptum A E = $x$, velocitas in E acquisita = $v$, tempus quo A E, percurritur = $t$, vis centripeta in E, hoc est, E G = $y$, erunt $dx$, $dv$, $dt$, quantitatum $x$, $v$, $t$, fluxiones seu incrementa nascentia vel evanescentia (146. 158), cumque velocitas per spatium nascens D E, sit uniformis (145) erit $v = \frac{dx}{dt}$ (5), ac proinde velocitatis incrementum $dv = \frac{ddx}{dt}$, si sumatur $dt$, constans (164) sed est (13) $y = \frac{dv}{dt}$, adeóque si loco $dv$, substituatur $\frac{ddx}{dt}$, invenietur $y = \frac{ddx}{dt^2}$. Hæ sunt formulæ quas tradidit Varignonius in Comm. Paris. an. 1700. Harum formularum ope, datâ inter duas ex variabilibus quatuor $y$, $x$, $v$, $t$, æquatione quâvis, obtinebuntur tres æquationes quæ simul quatuor duntaxat variabiles complectentur, ex quibus proindè æquationibus per calculum fluxionum & solitas reductiones inveniri poterit æquatio inter duas quaslibet ex quatuor variabilibus $y$, $x$, $v$, $t$, ut demonstravit Varignonius in Comm. Paris. an. 1700, qui in iisdem commentariis an. 1707. 1720. præclara de ascensu & descensu corporum perpendiculari theoremata edidit.

408. Coroll. Cum sit juxtà superiores formulas $dt = \frac{dx}{v}$, & $dt = \frac{dv}{y}$, ac proindè $\frac{dx}{v} = \frac{dv}{y}$, vel $y\,dx = v\,dv$, erit $S.\,y\,dx = \frac{1}{2}v^2$. Sed $y\,dx$ = E G × D E, seu fluxioni areæ $ABGE$; ergò (147) $S.\,y\,dx$ = areæ A B G E, $= \frac{1}{2}v^2$, & $v = \sqrt{2}$ A B G E. Est igitur ob constantem 2, velocitas in loco E, ut recta quæ potest aream curvilineam A B G E. Hinc est 1^us^. casus Prop. XXXIX. Newt. Quoniam verò $dt = \frac{dx}{v}$ & $v = \sqrt{2\,ABGE}$, erit $dt = \frac{dx}{\sqrt{2\,ABGE}}$; Quare si capitur E M = $\frac{1}{\sqrt{2\,ABGE}}$, erit $dt$ = E M × $dx$ = E M × D E, & sumptis utrinque fluentibus $t$ = area A L M E. Hic est casus 2^us^. Prop. XXXIX. Newt.

409. Superior expressio vis centripetæ $y$, $= \frac{dv}{dt}$ si vis centripeta consideretur ut gravitas in centrum, supponit massam corporum aut eandem esse aut ponderibus proportionalem. Verùm si pondera non sint massis proportionalia, diversæque inter se massæ conferantur, tum habenda est massarum ratio ut determinetur tota corporis gravitas, seu vis tota quâ centrum versus urgetur. Sit vis illa = $y$, & massa = $m$, erit quidem semper $v = \frac{dx}{dt}$ (5), at fiet $y = \frac{m\,dv}{dt}$. Etenim vis centripeta considerari potest ut potentia motrix, quæ corpori indesinenter applicata, motum in eo suâ actione producit, quæque tempusculo evanescente eadem constanter permanet, & uniformiter agit (117). Porrò factum ex potentiâ motrice uniformiter agente & tempore actionis æquivalet quantitati actionis; crescit enim actionis quantitas cum potentiâ motrice & tempore actionis proportionaliter, & factum ex massâ corporis & celeritate, seu quantitas motûs producti est id quod actione illâ effectum est, seu quantitati actionis æquipollet, cum necessarius sit nexus inter quantitatem actionis & quantitatem effectûs & alter alteri æquivaleat. Quare $y\,dt = m\,dv$, & $y = \frac{m\,dv}{dt}$.

410. Si




410. Si itaque pondera non supponantur massis proportionalia, & corpora duo $A$, $a$, quorum massæ $M$, $m$ ad idem vel diversa virium centra C, perpendiculariter cadant, earumque vires centripetæ in singulis locis E, e, sint $Y = EG$, $y = eg$, velocitates $V$, $v$, spatia descripta $X = AE$, $x = ae$, tempora quibus descripta sunt $T$, $t$, invenietur (409) $v = \frac{dx}{dt}$, $V = \frac{dX}{dT}$, & $y\,dt = m\,dv$, $Y\,dT = M\,dV$, adeóque (408), $S.\ y\,dx = abge = \frac{1}{2}mvv$; & similiter $S.\ Y\,dX = ABGE = \frac{1}{2}MVV$, ob constantes $M$, $m$; undè $v = \frac{\sqrt{2\,abge}}{m}$, $V = \frac{\sqrt{2\,ABGE}}{M}$: proindèque $v : V = \frac{\sqrt{2\,abge}}{m} : \frac{\sqrt{2\,ABGE}}{M}$. Quarè $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx\sqrt{m}}{\sqrt{2\,abge}}$, & $dT = \frac{dX\sqrt{M}}{\sqrt{2\,ABGE}}$; undè si ponatur em, $= \frac{1}{\sqrt{2\,abge}}$ & $EM = \sqrt{2\,ABGE}$, erit $dt = de \times em \times \sqrt{m}$, & $dT = DE \times EM \times \sqrt{M}$, ac consequenter $t = alme \times \sqrt{m}$: & $T = ALME \times \sqrt{M}$. Unde $t : T = alme \times \sqrt{m} : ALME \times \sqrt{M}$.

SEC.

DE MOTU CORPORUM.

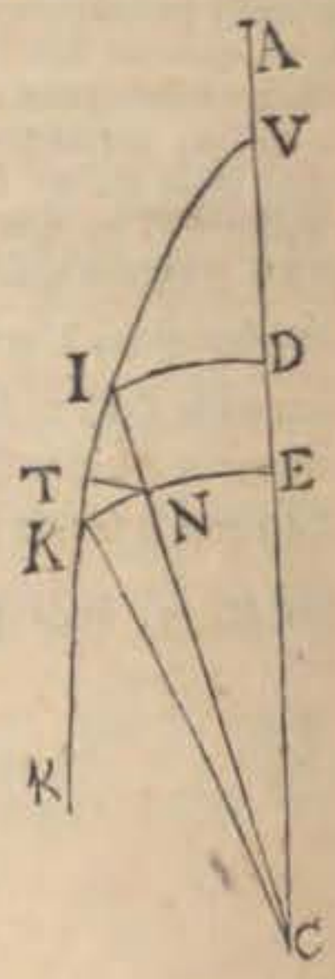
## SECTIO VIII.

*De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuſcunque centripetis agitata revolvuntur.*

### PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

*Si corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcunque, & corpus aliud rectâ aſcendat vel deſcendat, ſintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum caſu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.*

Deſcendat corpus aliquod ab *A* per *D*, *E*, ad centrum *C*, & moveatur corpus aliud a *V* in lineâ curvâ *VIKk*. Centro *C* intervallis quibuſvis deſcribantur circuli concentrici *DI*, *EK* rectæ *AC* in *D* & *E*, curvæque *VIK* in *I* & *K* occurrentes. Jungatur *IC* occurrens ipſi *KE* in *N*; & in *IK* demittatur perpendiculum *NT*; ſitque circumferentiarum circulorum intervallum *DE* vel *IN* quam minimum, & habeant corpora in *D* & *I* velocitates æquales. Quoniam diſtantiæ *CD*, *CI* æquantur, erunt vires centripetæ in *D* & *I* æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas *DE*, *IN*; & ſi vis una *IN* (per legum corol. 2.) reſolvatur in duas *NT* & *IT*, vis *NT*, agendo ſecundum lineam *NT* corporis curſui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in curſu illo, ſed retrahet ſolummodo corpus à curſu rectilineo, facietque ipſum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque viâ curvilineâ *ITKk* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota conſumetur: vis autem altera *IT*, ſecundum corporis curſum agendo, tota acceleſerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit



nerabit ſibi ipſi proportionalem. (k) Proinde corporum in *D* & *I* acceleratione æqualibus temporibus factæ (ſi ſumantur linearum naſcentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) ſunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus *DE* & *IK* deſcribuntur, ob æqualitatem velocitatum ſunt ut viæ deſcriptæ *DE* & *IK*, ideoque accelerationes, in curſu corporum per lineas *DE* & *IK*, ſunt ut *DE* & *IT*, *DE* & *IK* conjunctim, id eſt ut *DE quad.* & *IT*×*IK rectangulum*. (l) Sed *rectangulum IT*×*IK* æquale eſt *IN quadrato*, hoc eſt, æquale *DE quad.* & propterea accelerationes in tranſitu corporum à *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur ſunt corporum velocitates in *E* & *K*: & eodem argumento ſemper reperientur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. *Q. E. D.*

Sed & (m) eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter à centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc ſi corpus vel oſcilletur pendens à filo, vel impedimento quovis politiſſimo & perfectè lubrico cogatur in lineâ curvâ moveri, & corpus aliud rectâ aſcendat vel deſcendat,

(k) * *Proindè corporum in D & I acceleratione æqualibus temporibus factæ ſunt ut lineæ DE, IT.* Sunt enim vires acceleratrices ut accelerationes naſcentes, ſeu celeritatum incrementa naſcentia directè & tempora inversè (13), undè temporibus æqualibus accelerationes naſcentes ſunt ut vires acceleratrices, temporibus autem inæqualibus ut vires acceleratrices & tempora conjunctim; ſed lineæ DE, IT, ſunt ut vires acceleratrices in directionibus DE, IT; ergò corporum in *D* & I acceleratione æqualibus temporibus factæ ſunt ut lineæ DE, IT; temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim.

(l) * *Sed rectangulum* IT×IK *æquale eſt* IN *quadrato*, cum ſit KNI angulus rectus, & linea NT ad baſim IK normalis, adeóque crus IN medium proportionale inter hypothenuſam IK & illius abſciſſam IT.

(m) 411. *Et eodem argumento.* Vis enim acceleratrix motum corporis aſcendentis eodem modo retardat, quo motum deſcendentis accelerat in iiſdem locis (25); undè vera eſt propoſitio ſivè corpus utrumque deſcendat aut aſcendat, ſive deſcendente uno, alterum aſcendat.

412. Si centrum C in infinitum abeat, rectæ AC, IC fiunt parallelæ & arcus DI, EK in rectas, lineis AC, IC perpendiculares, mutantur. Valet igitur propoſitio etiam ubi vis centripetæ directio AC, IC ſibi perpetuò parallela eſt, dummodò puncta D, I æquè alta ſint, hoc eſt, in eâdem rectâ ad directionem vis centripetæ perpendiculari ſumantur.

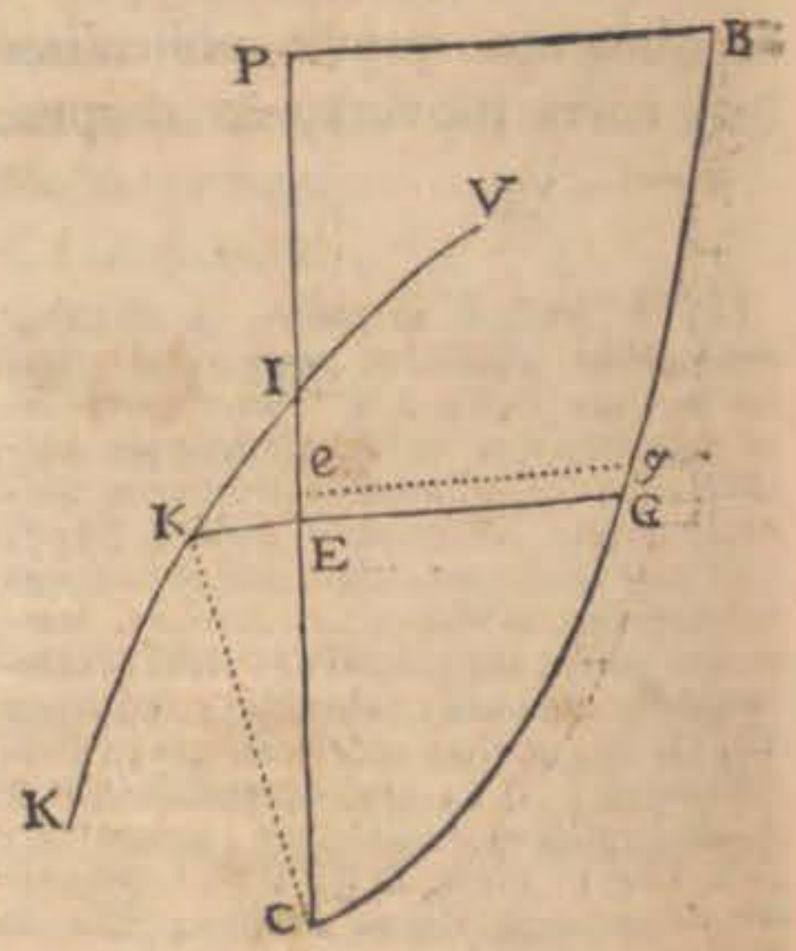
DE MOTU CORPORUM.

dat, ſintque velocitates eorum in eâdem quâcunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuſcunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo vel (n) impedimento vaſis abſolutè lubrici idem præſtatur quod vi tranſversâ *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, ſed tantum cogitur de curſu rectilineo diſcedere.

*Corol.* 2. Hinc etiam ſi quantitas P ſit maxima à centro diſtantia, ad quam corpus vel oſcillans vel in trajectoriâ quâcunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, eâ quam ibi habet velocitate ſurſum projectum aſcendere poſſit; ſitque quantitas A diſtantia corporis à centro in alio quovis orbitæ puncto, & vis centripeta ſemper ſit ut ipſius A dignitas quælibet $A^{n-1}$, cujus index $n-1$ eſt numerus quilibet $n$ unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. (o) Namque velocitas rectâ aſcendentis ac deſcendentis (per prop. XXXIX.) eſt in hâc ipsâ ratione.

(n) * *Impedimento vaſis.* (Vid. not. 83. 86. 89. 90. 91.

(o) 413. *Namque velocitas recta aſcendentis ac deſcendentis (per prop. XXXIX.) eſt in hâc ipsâ ratione* $\sqrt{P^n - A^n}$; Sit enim centrum virium C, diſtantiâ C P ex quâ corpus incipit cadere dicatur *P*, viſque centripeta ſit ſemper ut abſciſſarum C E (quæ dicuntur *A* in hoc Corollario) dignitas $n-1$, erigantur in omnibus punctis E perpendiculares E G vi centripetæ $CE^{n-1}$ proportionales, perpendicularis PB in puncto P erecta dicatur b, & per omnium perpendicularium vertices ducatur curva, dicantur *x* abſciſſæ CE, dicantur *y* ordinatæ EG, erit $b : y = P^{n-1} : x^{n-1}$, ideoque $y = \frac{b x^{n-1}}{P^{n-1}}$. Unde liquet curvam hanc eſſe generis Parabolici & ejus quadraturam facilè obtineri, ſit enim $Ee = dx$ fluxio abſciſſæ CE, erit $EegG = y\,dx$ fluxio areæ CEG, & loco *y* poſito ejus valore $\frac{b x^{n-1}}{P^{n-1}}$ erit $y\,dx = \frac{b x^{n-1}}{P^{n-1}} dx$, cujus fluens eſt (165) $\frac{b x^n}{n P^{n-1}}$, quæ exprimit aream quæ reſpondet abſciſſæ *x*, ſive *A*, itaque deletis con-

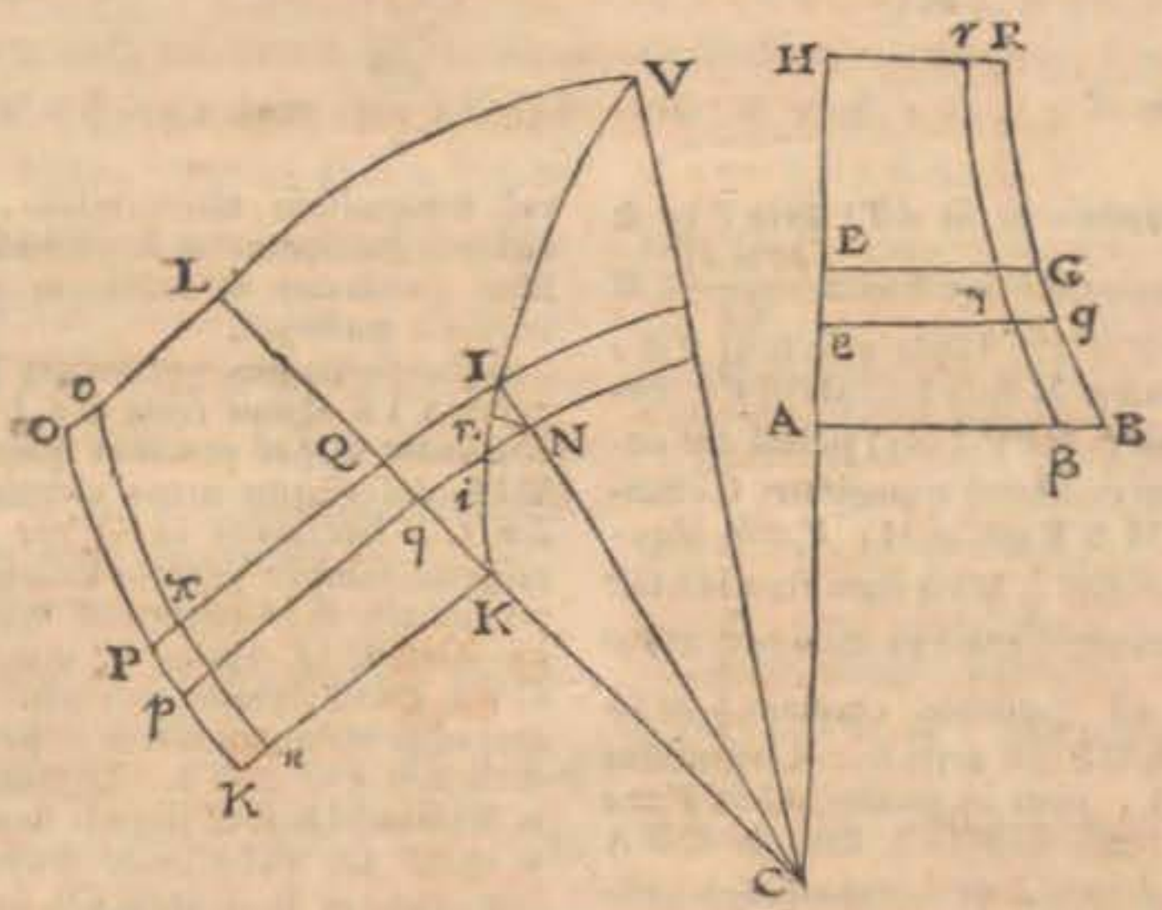


constantibus, erunt semper areæ CEG sicut $x^n$ sive $A^n$.

Jam verò per Prop. XXXIX., velocitas corporis cadentis in puncto E, est ut linea quæ potest aream PBGE, sive quæ potest differentiam arearum CPB, CEG, est autem semper CPB ad CEG ut $P^n$ ad $A^n$, earum ergo differentiæ erunt semper ut $P^n - A^n$, ideoque velocitas corporis cadentis in E erit semper ut $\sqrt{P^n - A^n}$.

His positis si corpus vel oscillans vel in trajectoriâ quâcumque VIKk revolvens in puncto I velocitatem eam habeat quâ (lineâ CI in P productâ) ex I in P ascendere potuisset, vel quod idem est quam acquireret (25) ex P ad I decidendo, in omni aliâ altitudine CK sive A eamdem habebit celeritatem quam corpus acquiret rectà descendendo ex distantiâ P à centro usque ad altitudinem æqualem CK, per Prop. præsentem, sed celeritates corporis ex P rectà descendentis erunt semper ut $\sqrt{P^n - A^n}$, Ergo etiam velocitates corporis in trajectoriâ revolventis erunt semper in quâvis distantiâ A à centro ut $\sqrt{P^n - A^n}$. Q. E. D.

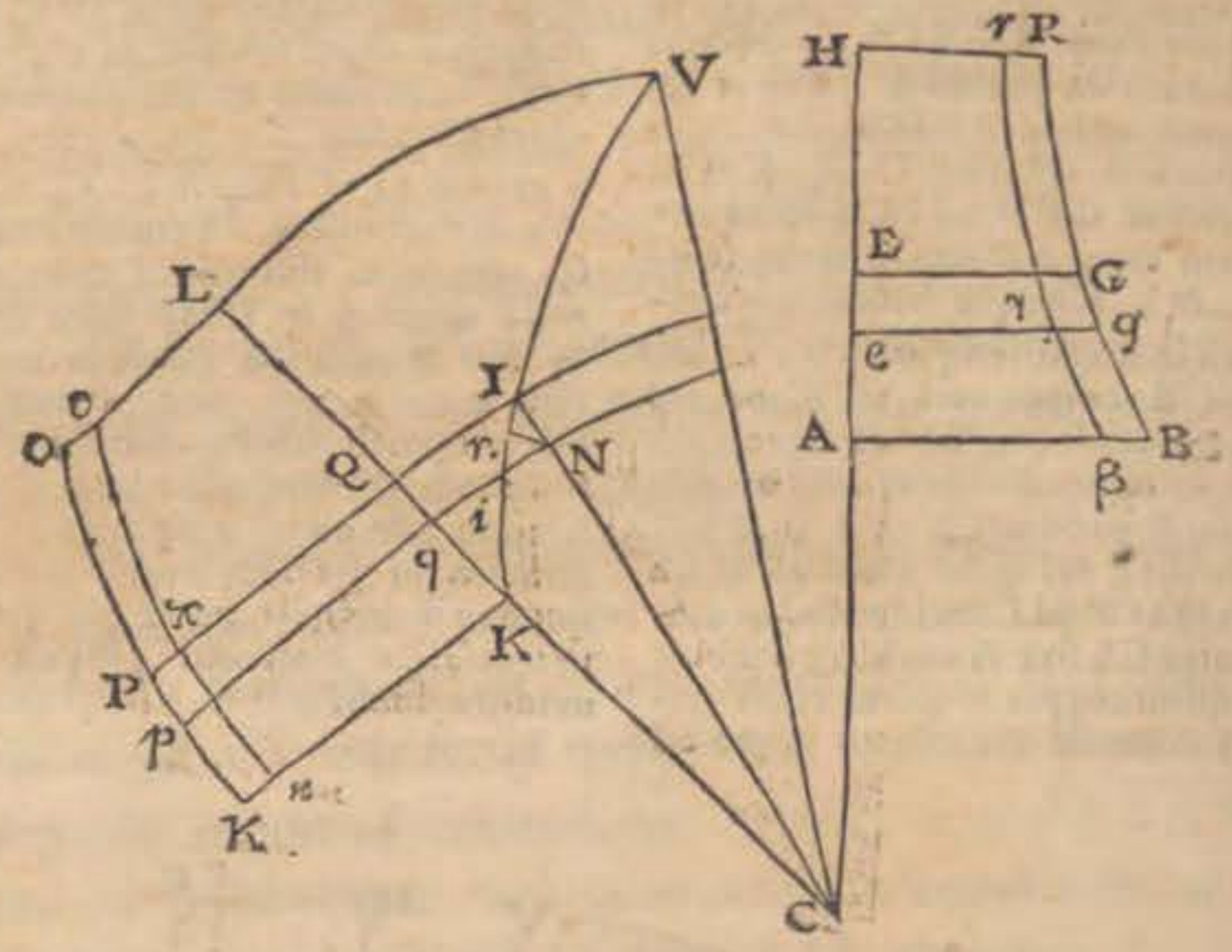
414. Scholium. Vera est Propositio XL, si corporum duorum (quorum unum in rectâ alterum in curvâ lineâ fertur) massæ sint æquales & pondera in locis æquè altis æqualia aut pondera massis inæqualibus proportionalia in locis æquè altis. Illud idem theorema ad majorem universalitatem admodum eleganter reduxit Varignonius in Comm. Paris. an. 1719. Nos quoque principiis suprà positis insistentes, universalius Newtoni propositionem demonstrabimus.




Corpora duo quorum Massæ $M$, $m$ ad idem vel diversa virium centra C ex locis quibuslibet datis H, V descendant, alterum quidem $M$, perpendiculariter per rectam HC; alterum verò $m$ per rectam vel curvam quamvis VIK.

Primùm. De loco quovis E lineæ HC erigatur semper perpendicularis EG vi centripetæ in loco illo ad centrum tendenti proportionalis, sitque RGB linea curva quam punctum G perpetuò tangit: Perpendiculares in punctis datis H & A sint HR & AB, perpendicularis in puncto variabili E sit EG cui proxima ducatur linea eg; velocitates in punctis datis H & A sint $b$ & $a$, velocitas in puncto variabili E sit $V$, & vis centripeta in eo puncto dicatur $F$, cui EG est proportionalis, sit abscissa HE, $s$, ejus fluxio Ee erit $ds$, & tempusculum quo describitur

DE MOTU CORPORUM.




Ee lapſu corporis *M* ſit *dT*; Erit (13 & 409) vis centripeta *F* ſive $EG = \frac{M \times dV}{dT}$, & (5) $ds = V\,dT$. Unde erit $EG \times ds$ ſive fluxio areæ $HRGE = MV\,dV$, cujus fluens erit $\frac{1}{2} MVV$ (165) junctâ aut detractâ quádam conſtanti quantitate; Coeuntibus enim H & E eſt in H, $V = b$ ideoque fit $\frac{1}{2} MVV = \frac{1}{2} Mbb$ dum area HRGE evaneſcit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2} MVV$ detrahenda eſt quantitas conſtans $\frac{1}{2} Mbb$ ut areæ HRGE ſit æqualis: Coeuntibus verò E & A, cum in puncto A ſit $V = a$ erit in eo caſu HRGE ſive HRBA $= \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} Mbb$, & ſumpto quovis puncto E erit HRBA − HREG ſive EGBA $= \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} Mbb - \frac{1}{2} MVV + \frac{1}{2} Mbb = \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} VV$, Unde ſic tandem incidimus in duas æquationes

$HRGE = \frac{1}{2} MVV - \frac{1}{2} Mbb$ &

$EGBA = \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} MVV$ quibus comparatis cum iis quas reſpectu corporis *m* in curvâ VIK moti ſimili modo deducemus, velocitates corporum in quibuſvis æqualibus vel inæqualibus altitudinibus, in quávis virium centripetarum hypotheſi & in quálibet ponderum & maſſarum proportione conferri poterunt.

Secundò itaque, per locum K datum in curva VIK agatur recta CKL æqualis CV & centro C per punctum quodvis I lineæ VIK deſcribatur arcus circularis IQ rectæ CL occurrens in Q per punctum Q erigatur ſemper perpendiculum PQ proportionale vi Centripetæ quâ Corpus in diſtantiâ CQ verſus C urgetur: ſitque OPk curva quam punctum P perpetuò tangit, & perpendiculares in punctis datis L & K ſint LO & Kk. Dicatur arcus VI, *x*, & linea LQ, *y*; ſit linea Ii fluxio arcus VI, & radio Ci deſcribatur arcus lineæ CI occurrens in q, & lineæ CI in N, erit $Qq = IN$, ex q erigatur perpendicularis qp uſque ad curvam OPK, & ex N ducatur Nn perpendicularis in arcum Ii.

Velocitates corporis *m* in punctis datis L & K dicantur *e* & *o* velocitas in puncto variabili Q ſit *u*: Vis totalis centripeta in Q ſemper exprimatur per QP, eadem vis QP aget in I (propter æquales CQ, CI,) ſecundùm directionem IN, reſolvatur ergo illa vis in vires duas quarum una agit in corpus *m* ſecundum directionem Im alte-

altera ſecundum directionem N n, erit I N ad I n ut vis tota Q P ad vim quâ corpus urgetur ſecundum curvam, ſed ob Triangula I N n, I N i ſimilia eſt I N ad I n ſicut I i ad I N ſive Q q, ideoque I i ad Q q ut vis Q P ad vim agentem ſecundum curvam quæ itaque erit $\frac{QP \times Qq}{Ii}$; ſit $dt$, tempuſculum quo deſcribetur I i per eam vim, eritque (13 & 409) ea vis $\frac{QP \times Qq}{Ii} = \frac{m\,du}{dt}$; Unde erit $QP \times Qq = \frac{m\,du}{dt} \times Ii$ ſed (5) eſt I i ſpatiolum percurſum tempore $dt$ velocitate $u$ eſt ergo æquale $udt$ ideoque $QP \times Qq \frac{mdu}{dt} \times udt = mudu$, ſed $QP \times Qq = m\,u\,d\,u$ eſt fluxio areæ L O Q P, hujus fluens eſt $\frac{1}{2}\,m\,u\,u$ (165) additâ aut detractâ quâdam conſtanti quantitate, coeuntibus enim Q & L, fit in L, $u = e$ ideoque fit $\frac{1}{2}\,m\,u\,u = \frac{1}{2}\,m\,e\,e$ dum area L O Q P evaneſcit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2}\,m\,u\,u$ detrahenda eſt quantitas conſtans $\frac{1}{2}\,mee$, eritque $LOQP = \frac{1}{2}\,m\,u\,u - \frac{1}{2}\,m\,e\,e$, & coeuntibus Q & K fit $u = c$ & $LOKk = \frac{1}{2}\,m\,c\,c - \frac{1}{2}\,m\,e\,e$ & $LOKk - LOQP$ ſive $QPKk = \frac{1}{2}\,m\,c\,c - \frac{1}{2}\,m\,u\,u$, ficque tandem incidimus in has duas æquationes

$LOQP = \frac{1}{2}\,m\,u\,u - \frac{1}{2}\,m\,e\,e$ &

$QPKk = \frac{1}{2}\,m\,c\,c - \frac{1}{2}\,m\,u\,u$ eâdem methodo quâ in primo calculo ſumus uſi.

415. Coroll. 1. Ex primâ Æquatione primi calculi eſt $V = \frac{\sqrt{2HRGE + Mbb}}{M}$, ex primâ Æquatione ſecundi calculi eſt $u = \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m}$, unde invenitur $V : u = \frac{\sqrt{2HRGE + Mbb}}{M} : \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m}$.

Ex ſecundâ verò æquatione primi calculi eſt $V = \frac{\sqrt{Maa - 2EGBA}}{M}$ & ex ſecunda Æquatione 2di. calculi $u = \frac{\sqrt{mcc - 2QPKk}}{m}$, & hinc eſt $V : u = \frac{\sqrt{Maa - 2EGBA}}{M} : \frac{\sqrt{mcc - 2QPKk}}{m}$.

LIBER PRIMUS. PROP. XL.

416. Coroll. 2. Si in perpendiculo QP, ità capiatur $Q\pi$, ut factum $\pi Q \times m$, ſit ubique gravitati corporis in I proportionale, ſeu rectæ Q P æquale, erit $2Lo\pi Q \times m = 2LOQP$, adeóque $u = \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m} = \sqrt{2Lo\pi Q + ee}$ & $u = \sqrt{cc - 2Q\pi nK}$. Et ſimiliter ſi ponatur $E\gamma \times M = EG$, erit $V = \sqrt{2Hr\gamma E + bb}$ & $V = \sqrt{aa - 2E\gamma\beta A}$.

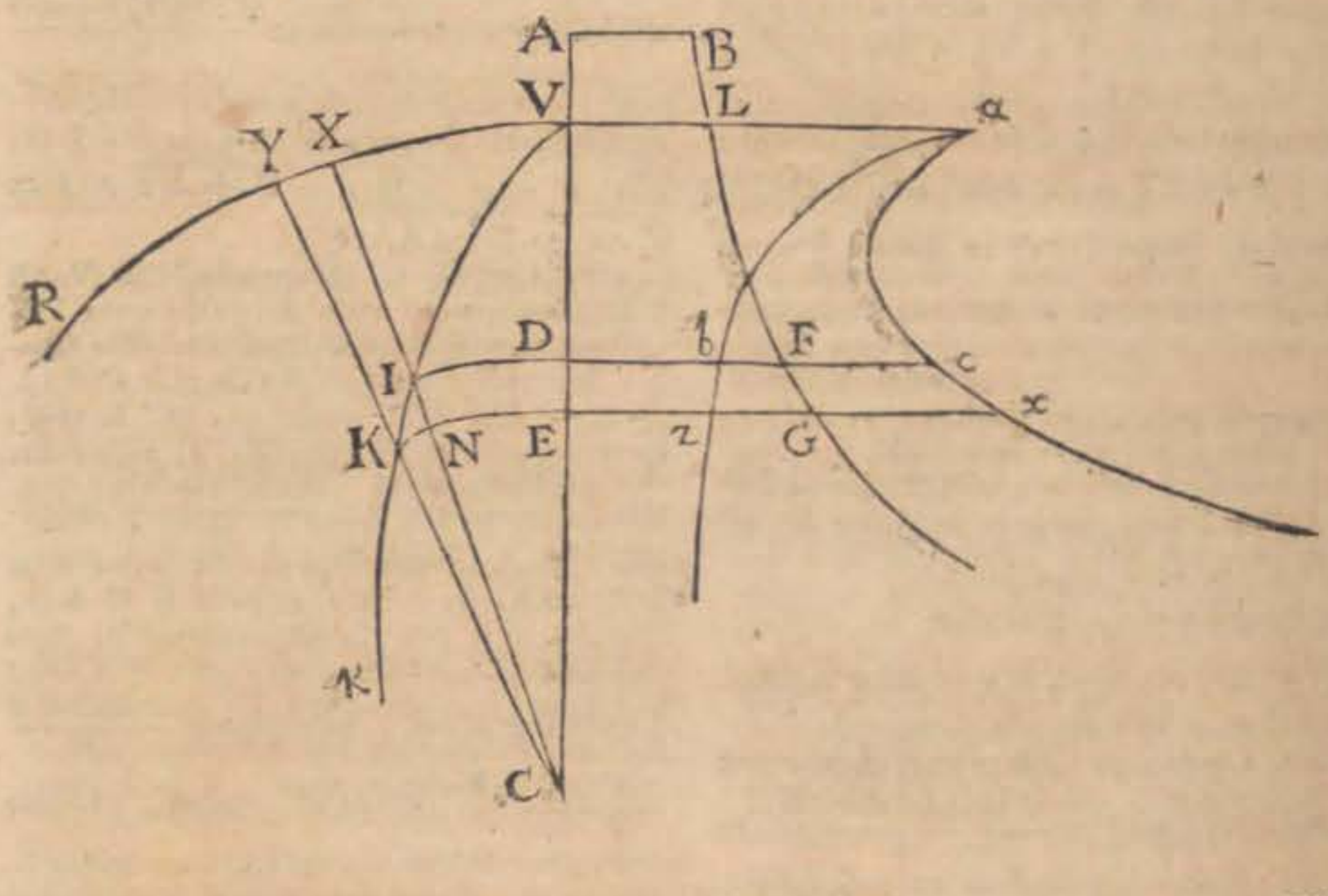
417. Coroll. 3. Si puncta H & V, E & I, fuerint æquè alta, & in illis lineæ EG, QP vi centripetæ proportionales, ſint ſemper æquales, erit $HRGE = LOPQ$. Quarè ſi præterea maſſæ $M$, $m$, & velocitates $b$, $e$, in punctis H, V, æquentur, erit $\frac{2HRGE + Mbb}{M} = \frac{2LOQP + mee}{m}$, adeóque $V = u$, in omnibus punctis æquè altis E & I. Si in punctis æquè altis H & V, E & I, vires centripetæ maſſarum $M$ & $m$ rationem ſemper habeant, erit $HRGE : LOQP = M : m$, proindéque $\frac{2HRGE}{M} = \frac{2LOQP}{m}$. Undè ſi præterea ponatur $bb = ee$, erit $V = u$, quæ eſt propoſitio XL. Newtoni. Patet etiam in 4. ſuperioribus formulis (415), Maſſas $M$ & $m$ exterminari, ſi fuerint ponderibus proportionales.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

*Positâ cujuscunque generis vi centripetâ & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.*

Tendat vis quælibet ad centrum *C* & invenienda sit trajectoria *VIKk*. Detur circulus *VR* centro *C* intervallo quovis *CV* descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli *ID*, *KE* trajectoriam secantes in *I* & *K* rectamque *CV*




in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* secantem circulos *KE*, *VR* in *N* & *X*, tum rectam *CKY* occurrentem circulo *VR* in *Y*. Sint autem puncta *I* & *K* sibi invicem viciniſſima, & pergat corpus ab *V* per *I* & *K* ad *k*; ſitque punctum *A* locus ille de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*. Et ſtantibus quæ in propoſitione XXXIX, lineola *IK*, dato tempore quam mini-

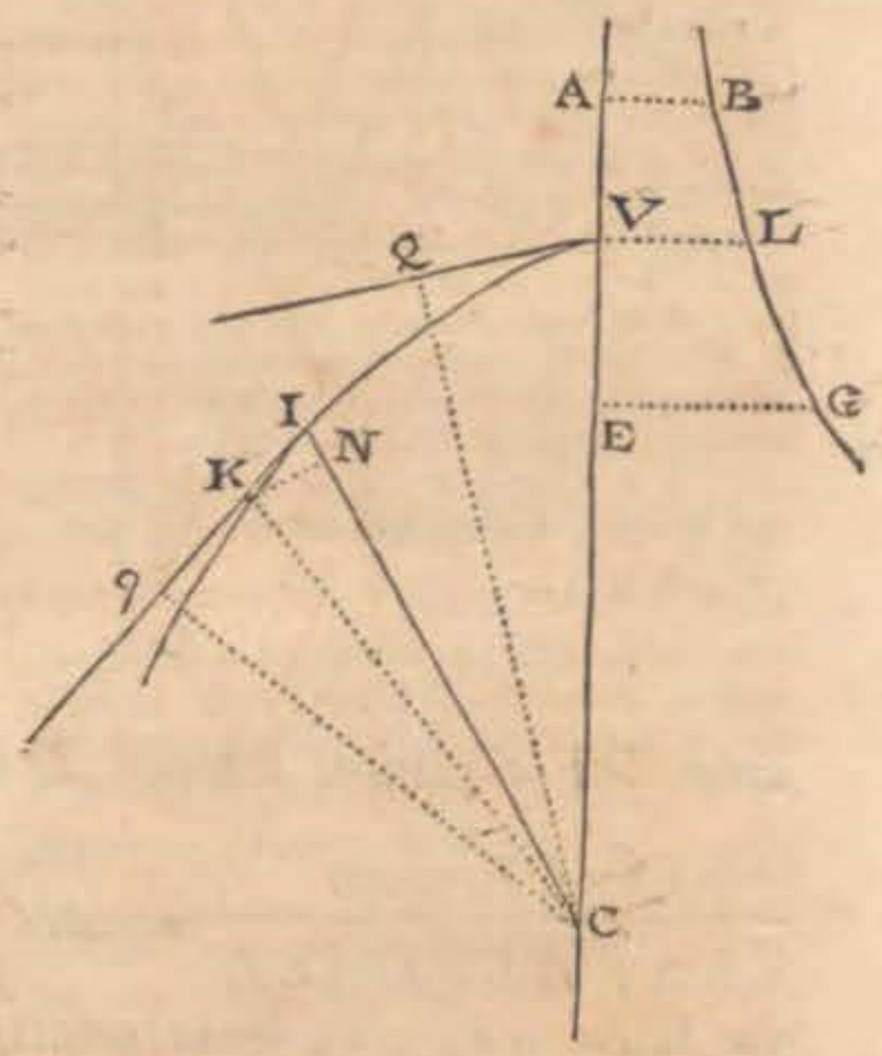
minimo descripta, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ potest aream $ABFD$, & (p) triangulum $ICK$ tempori proportionale dabitur, idcoque $KN$ erit reciprocè ut altitudo $IC$, id est, si detur quantitas aliqua Q, & altitudo $IC$ nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam esse magnitudinem ipsius Q ut sit in aliquo casu $\surd ABFD$ ad Z ut est $IK$ ad $KN$, & (q) erit in omni casu $\surd ABFD$ ad Z ut $IK$ ad $KN$, & $ABFD$ ad ZZ ut $IKq$ ad $KNq$, & divisim $ABFD-ZZ$ ad ZZ ut $IN$ (r) *quad.* ad $KN$ *quad.*

(p) * *Triangulum ICK tempori quo describitur proportionale* (per Prop. 1.) dato tempore *dabitur*; Est autem trianguli ICK aren $=\frac{1}{2}KN\times IC$. Quarè erit rectangulum $KN\times IC$ quantitati constanti æquale, & hinc lineola KN æqualis quantitati constanti ad IC applicatæ, hoc est, KN reciprocè ut IC.

(q) * *Erit in omni casu.* Quoniam IK est semper ut $\surd ABFD$, hoc est IK ad $\surd ABFD$ in datâ ratione, & similiter Z ad KN in datâ ratione, si in aliquo casu sit $\surd ABFD$ ad Z ut IK ad KN adeóque $\surd ABFD$ ad IK ut Z ad KN, erit in omni casu $\surd ABFD$ ad IK ut Z ad KN, ac proindè $\surd ABFD$ ad Z ut IK ad KN.

418. Ducatur VL parallela EG quæ curvæ BFG occurrat in L, & ex centro C ad QV tangentem in V, ac ad qI, tangentem in I, demissis perpendiculis CQ, Cq, erit $CQ\times\surd ABLV$ quantitas constans & æqualis $Cq\times\surd ABFD$. Nam (per coroll. 1. prop. 1.) velocitas in V (adeóque $\surd ABLV$) est ut CQ reciprocè, id est, ut $\frac{1}{CQ}$ directè & proinde $CQ\times\surd ABLV$ ut quantitas constans 1, & pariter velocitas in I (adeóque $\surd ABFD$) est ut Cq reciprocè, id est, ut $\frac{1}{Cq}$ directè, & proindè $Cq\times\surd ABFD$, ut quantitas constans 1, adeóque $Cq\times\surd ABFD=CQ\times\surd ABLV$.

Si itaque capiatur $Q=CQ\times\surd ABLV=Cq\times\surd ABFD$, & $Z=\frac{Q}{IC}$ (unde est $Q=Z\times IC$) erit semper $\surd ABFD:Z=IC:Cq=IK:KN$. Nam propter triangula IKN, ICq similia, est IK ad KN ut IC ad Cq, sed quia $Z\times IC(=Q)=Cq\times\surd ABFD$ est $IC:Cq=\surd ABFD:Z$ ergo $IK:KN=IC:Cq=\surd ABFD:Z$.




(r) × *Ut IN², ad KN².* Est enim ob angulum INK rectum, $IK^2-KN^2=IN^2$.

* *Ut*

De Motu Corporum.

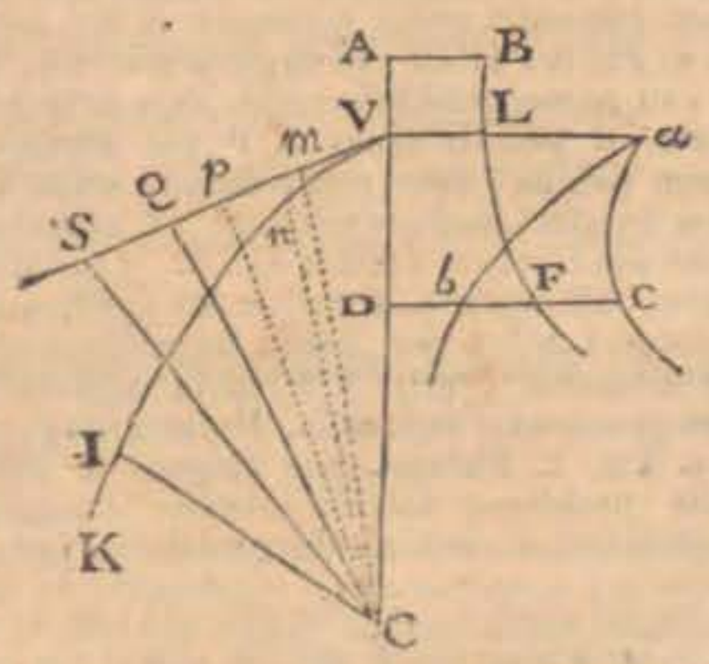
ideoque $\sqrt{ABFD-ZZ}$ ad $Z$ seu $\frac{Q}{A}$ ut $IN$ ad $KN$, & propterea $A \times KN$ æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD-ZZ}}$. (f) Unde cum $YX \times XC$ sit ad $A \times KN$ ut $CXq$ ad $AA$, erit rectangulum $XY \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX\ quad.}{AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$. Igitur si in perpendi-

culo $DF$ capiantur semper $Db$, $Dc$ ipsis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD-ZZ}}$, $\frac{Q \times CX\ quad.}{2AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$ æquales respectivè, & describantur curvæ lineæ $ab$, $ac$, quas puncta $b$, $c$ perpetuo tangunt; deque puncto $V$ ad lineam $AC$ erigatur perpendiculum $Va$ abscindens areas curvilineas $VDba$, $VDca$, & erigantur etiam ordinatæ $Ez$, $Ex$: quoniam rectangulum $Db \times IN$ seu $Dbz E$ æquale est dimidio rectanguli $A \times KN$ seu triangulo $ICK$; & rectangulum

(f) * *Undè cum* $YX \times XC : A \times KN = CX^2 : AA$. Sunt enim triangula nascentia CKN, CYX similia & eorum proindè areæ duplæ YX × XC, IC × KN, seu A × KN, in ratione duplicatâ homologorum laterum CX, CI, sive A.

† 419

$Dc \times IN$ seu $Dc \times E$ æquale est dimidio rectanguli $YX \times XC$ seu triangulo $XCY$; hoc est, quoniam arearum $VDba$, $VIC$ æquales semper sunt nascentes particulæ $Dbz E$, $ICK$, & arearum $VDca$, $VCX$ æquales semper sunt nascentes particulæ $Dc \times E$, $XCY$, erit area genita $VDba$ æqualis areæ genitæ $VIC$, ideoque tempori proportionalis, & area genita $VDca$ æqualis sectori genito $VCX$. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco $V$, (†) dabitur area ipsi proportionalis $VDba$, & inde dabitur corporis altitudo $CD$ vel $CI$; & area $VDca$, eique æqualis sector $VCX$ unà cum ejus angulo $VCI$. Datis autem angulo $VCI$ & altitudine $CI$ datur locus $I$,




(†) 419. *Dabitur area ipsi proportionalis.* Datâ corporis velocitate & directione seu tangente in V, datur spatium VS quod corpus in illâ tangente dato tempore quo describitur area VIC uniformi motu describeret. Porrò junctâ CS, area trianguli CSV æqualis erit areæ VIC, quam corpus in curvâ VIK motum describit eodem tempore quo uniformiter percurreretur VS. Nam tempusculo nascente velocitate æquabili spatium Vm describatur in tangente VS, & eodem tempusculo arcus Vn describatur in curvâ VIK, erit (per prop. 1.) area VCm = VCn, & ob velocitatem uniformem in tangente singulo tempusculo lineolæ æquales Vm, mp &c. percurrentur ideoque æqnabuntur triangula VCM, mCp, &c., sed pariter omnes areæ æqualibus tempusculis descriptæ in curva VIK æquantur areæ VCn sive VCm, undè patet summam arearum VCm + mCp + &c. æqualem esse summæ arearum quæ eodem tempore in curvâ describuntur, hoc est, totas areas VCS, VIC, eodem tempore descriptas esse æquales. Cum igitur data sit tangens VS & perpendiculum CQ in eam ductum, ex tempore dato dabitur area trianguli VCS, & area VIC ei æqualis; Hincque concessis figurarum quadraturis, invenietur area VDba = VCS = VIC, & indè dabitur VD, atque CD = CV − VD; dabitur quoque constans $Q = QC \times \sqrt{ABLV}$ (418).

420. Si ponatur variabilis $IC = CD = x$, data $VC = a$, erit $VD = a - x$ & $Z = \frac{Q}{x}$, concessisque figurarum curvilinearum quadraturis area ABFD exprimi poterit per datas AV, VC & variabilem $x$, ac proindè iisdem quantitatibus exprimi poterunt $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX^2}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$, seu ordinatim applicatæ Db, Dc; & hinc obtinebuntur æquationes ad curvas ab, ac, ex constantibus & solis variabilibus CD, Db, vel Dc, compositæ, curvæque illæ poterunt describi. Quoniam porrò est (per constr.) sector VCX, æqualis areæ VDca, erit arcus $VX = \frac{2VDca}{CV}$; quarè invenitur angulus VCX, & indè punctum I, in trajectoriâ VIK.

421. Scholium. Datâ vi centripetâ in singulis locis trajectoriæ VIK, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, trajectoria VIK describi potest, ut in probl. XXVIII, licet gravitates massis non

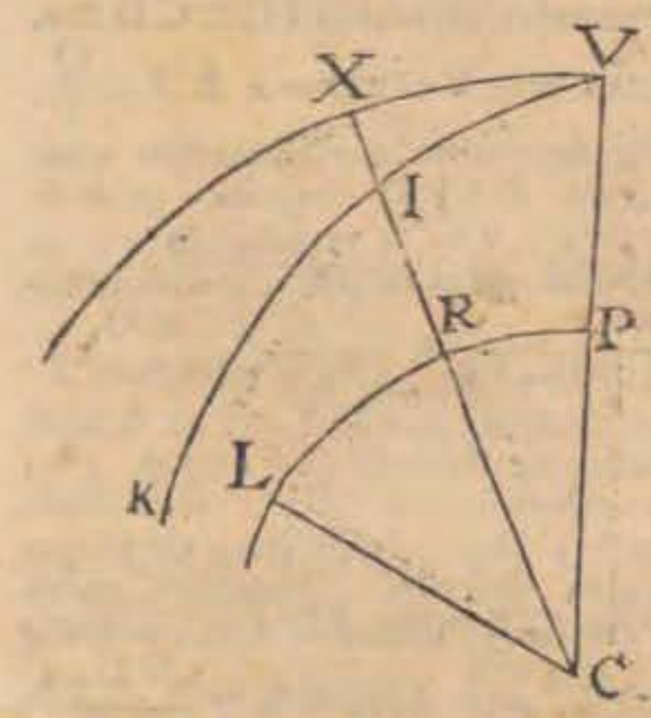
DE MOTU CORPORUM.

in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. I.*

*Corol.* 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est, apsides trajectoriarum expeditè inveniri possunt. Sunt enim apsides puncta illa in quibus recta *IC* per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam *VIK*, id (t) quod fit ubi rectæ *IK* & *NK* æquantur, ideoque ubi area *ABFD* æqualis est ZZ.

(u) *Corol.* 2. Sed & angulus *KIN*, in quo trajectoria alicu-

sipponantur proportionales, nec vis centripeta æqualis in æqualibus à centro distantis. Nam factum M×EG, ex corporis massa M in perpendiculum EG, ejusdem corporis gravitatem in loco quovis I exhibeat, sitque BLFG curva quam punctum G perpetuò tangit, velocitas in loco V dicatur C, lineâ AB ita abscindatur ut sit area $ABLV=\frac{1}{2}CC$; erit velocitas in $I=\sqrt{2VLFD+2ABLV}$ (416), id est $=\sqrt{2ABFD}$, adeóque ut $\sqrt{ABFD}$, undè *lineola IK dato tempore quam minimo descripta erit ut* $\sqrt{ABFD}$, *& triangulum ICK &c.* Cætera quæ in probl. XXVIII. solutione sequuntur ratiocinia & constructiones manent eadem.



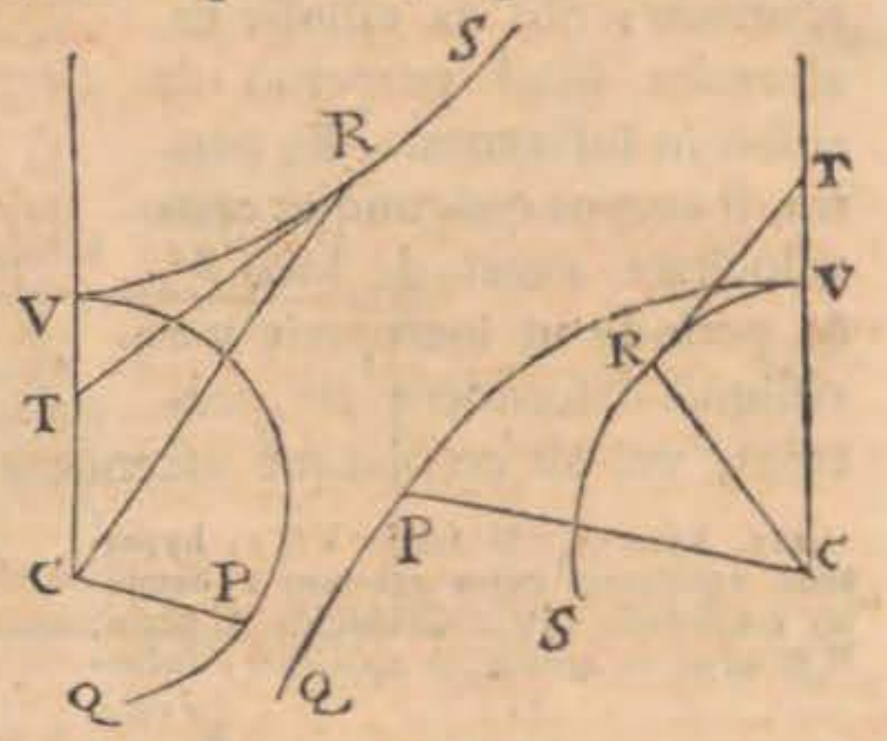

422. Trajectoria VIK, geometricè rationalis est ubi per æquationes finitas inveniri potest sector circuli æqualis areæ VDca: & hujus sectoris radius est ad CX radium, circuli VXY, ut *nn* ad 1 estque *nn* numerus rationalis positivus integer vel fractus. Sit enim sector circuli LPC = areæ VDca, id est, æqualis sectori VCX, sitque radius CP ad radium CV, ut *n*, ad 1, erit CP×PL = CV×VX, & CP:CV = *n*:1 = VX:PL, (per hyp.) & CP:CV = *n*:1 = PR:VX (ex naturâ circuli). Quare per compositionem rationum & ex æquo *nn*:1 = RP:PL. Si ergò fuerit *nn*, ad 1, ut numerus ad numerum, dato arcu PL, inveniri poterit arcus RP per æquationem finitam, cum possit semper arcus datus in datâ ratione numeri ad numerum per æquationem finitam dividi. Quoniam igitur assumptæ CI positio & punctum I, in curvâ VIK per finitas æquationes determinantur, erit VK curva algebraica seu geometricè rationalis. Hermannus prop. 25. Lib. I. Phoron. hoc elegans & difficile problema solvit: invenire canonem generalem determinandæ gravitatis variabilis pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, quantitatibus finitis expressum.

(t) * *Id quod fit ubi rectæ IK & KN æquantur.* Tunc enim punctum N coincidit cum puncto I, ob angulum KIN rectum, adeóque ob proportionem $\sqrt{ABFD}$: $Z=IK:KN$, fit $ABDF=ZZ=\frac{QQ}{IC^2}$, & $IC^2\times ABFD=QQ$ quantitati datæ. Hinc cum concessis curvarum quadraturis data sit area ABFD in quantitatibus constantibus & variabili IC seu CD, invenietur valor IC, hoc est, maximæ & minimæ altitudines corporis trajectoriam VK describentis.

(u) * *Coroll.* 2. Ob angulum KNI rectum in triangulo nascente KIN, sinus anguli KIN est ad sinum totum, ut KN ad IK, id est, ut Z (seu $\frac{Q}{IC}$) ad $\sqrt{ABFD}$. Verum datâ IC datur area ABFD, & indè ob quantitatem Q datam datur ratio

bi secat lineam illam $IC$, ex datâ corporis altitudine $IC$ expeditè invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut $KN$ ad $IK$, id est, ut Z ad latus quadratum areæ $ABFD$.

(x) *Corol.* 3. Si centro $C$ & vertice principali $V$ describatur sectio quælibet conica $VRS$, & à quovis ejus puncto $R$ agatur tangens $RT$ occurrens axi infinitè producto $CV$ in puncto $T$; dein junctâ $CR$ ducatur recta $CP$, quæ æqualis sit abscissæ $CT$, angulumque $VCP$ sectori $VCR$ proportionalem constituat; tendat autem ad centrum $C$ vis centripeta cubo distantiæ locorum à centro reciprocè proportionalis, & exeat corpus de loco $V$ justâ cum velocitate secundum lineam rectæ $CV$ perpendicularem: progredictur



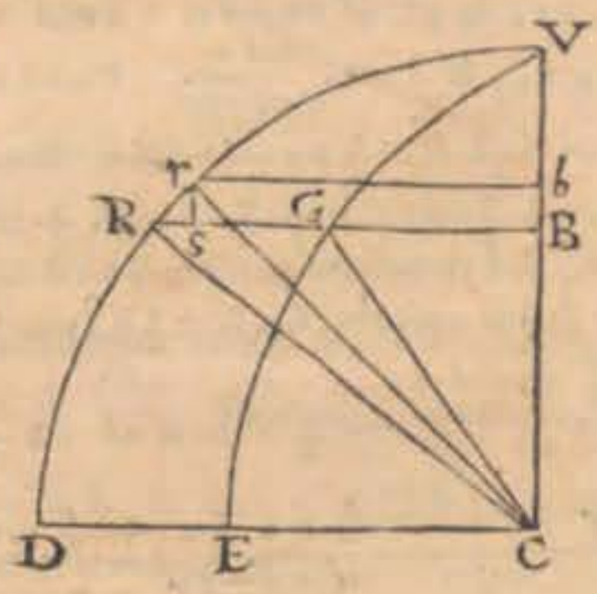

$\frac{Q}{IC}$ ad $\surd ABFD$, hoc est, ratio sinûs anguli $KIN$, ad radium. Invenietur ergò sinus anguli $KIN$, & hinc angulus ipse cognoscetur.

(x) 423. Lemma. Si fuerit $DVC$, circuli quadrans cujus radius $CV = r$ abscissa $CB = z$, ordinatæ infinitè propinquæ $BR$, $br$, fluxio arcûs $DR$ erit $\frac{r\,dz}{\surd rr-zz}$, & fluxio sectoris $CDR = \frac{\frac{1}{2}r\,r\,dz}{\surd rr-zz}$.

Est enim $BR = \surd rr-zz$, & demissâ ex puncto $r$ in $RB$, perpendiculari $rs$, triangula similia $RCB$, $rRs$, dant $RB\,(\surd rr-zz) : RC\,(r) = rs\,(dz) : Rr = \frac{r\,dz}{\surd rr-zz}$. Q. e. 1. Porrò sector nascens

$CRr = \frac{1}{2}CR \times Rr = \frac{\frac{1}{2}r\,r\,dz}{\surd rr-zz}$. Q. e. 2.

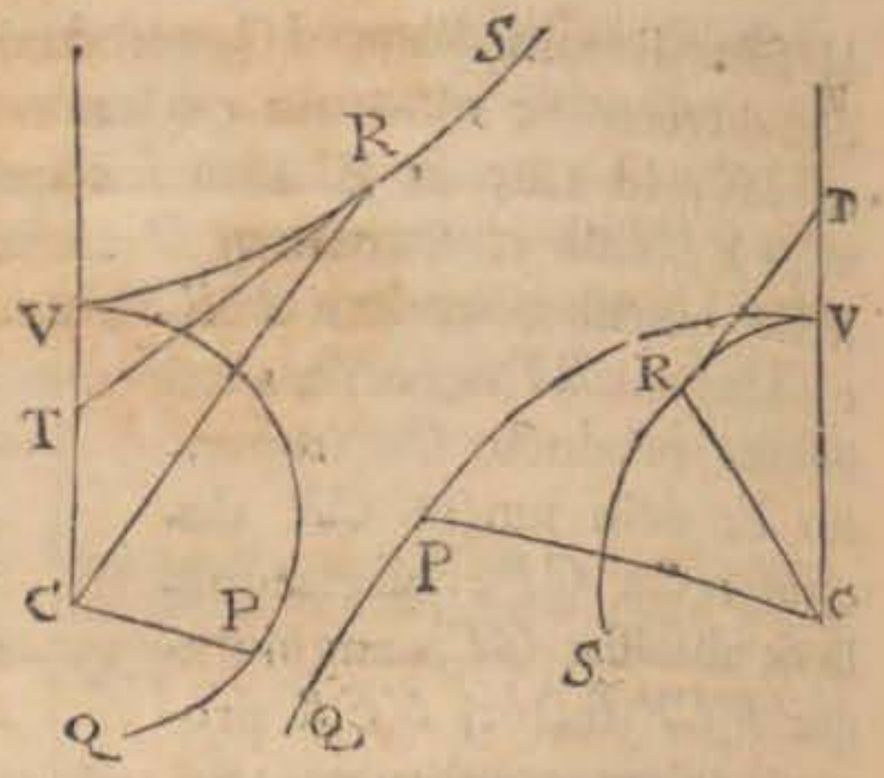
424. Coroll. Si fuerit $EGVC$, quadrans ellipseos cujus centrum $C$, semiaxis unus $CV = r$, alter semiaxis $CE = c$, abscissa $CB = z$, & $BG$ ordinatim applicata ad axem $CV$, sectoris $CEG$ fluxio erit $= \frac{\frac{1}{2}r\,c\,dz}{\surd rr-zz}$. Sunt enim sectores $CDR$, $CEG$, adeóque & eorum fluxiones in datâ ratione $r$ ad $c$, (251).




Sſ 2 425.

DE MOTU CORPORUM.

dietur corpus illud in trajectoriâ *VPQ* quam punctum *P* perpetuò tangit; ideoque si conica sectio *VRS* hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea ellipsis sit, ascendet illud perpetuò & abibit in infinitum. Et contra, si corpus quâcunque cum velocitate exeat de loco *V*, & perinde ut incœperit v e obliquè descendere ad centrum, vel ab eo obliquè ascendere, figura *VRS* vel hyperbo-



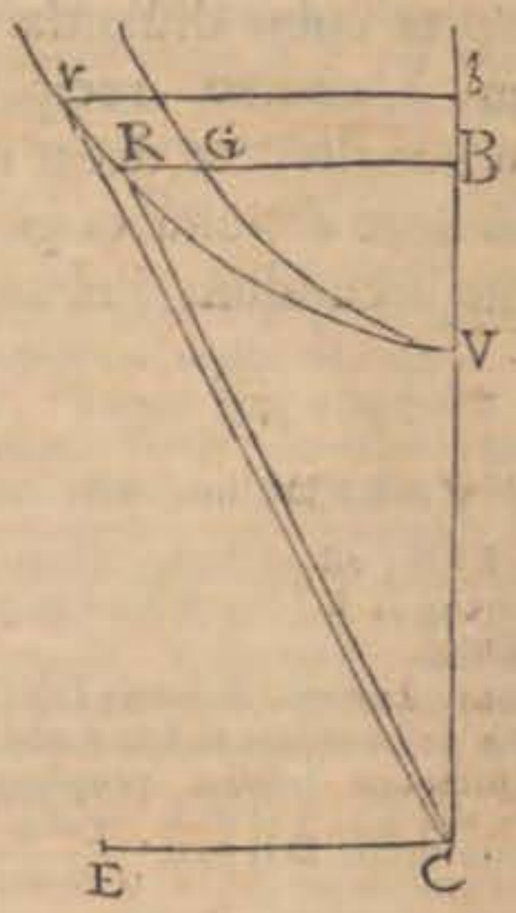

425. Lemma. Si fuerit VRr, hyperbola æquilatera cujus centrum *c*, semiaxis transversus CV=*r*, abscissa CB=*z*, RB ad axem ordinatim applicata, sectoris hyperbolici CRV fluxio erit $\frac{\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}$. Agatur enim rb ordinata, priori RB infinitè propinqua, sitque RB=*y*, erit (ex naturâ hyperbolæ æquilateræ) $yy=zz-rr$, & $y=\sqrt{zz-rr}$. Undè $zydy=zzdz$, & $dy=\frac{zdz}{\sqrt{zz-rr}}$. Porrò triangulum CRB=$\frac{1}{2}zy$, & illius fluxio = $\frac{1}{2}zdy+\frac{1}{2}ydz$=trapesio BbrR + triang. CrR; sed trapesium nascens BbrR=$ydz$, ergò sector nascens $CrR=\frac{1}{2}zdy-\frac{1}{2}ydz$

$$=\frac{\frac{1}{2}zzdz}{\sqrt{zz-rr}}-\frac{1}{2}dz\times\sqrt{zz-rr}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}zzdz-\frac{1}{2}zzdz+\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}.$$ Q. e. D.

426. Coroll. 1. Quoniam (ex demonstratis) $dy=\frac{zdz}{\sqrt{zz-rr}}$, & $yy=zz-rr$, erit $\frac{dz}{\sqrt{zz-rr}}=\frac{dy}{z}$, & $z=\sqrt{yy+rr}$,

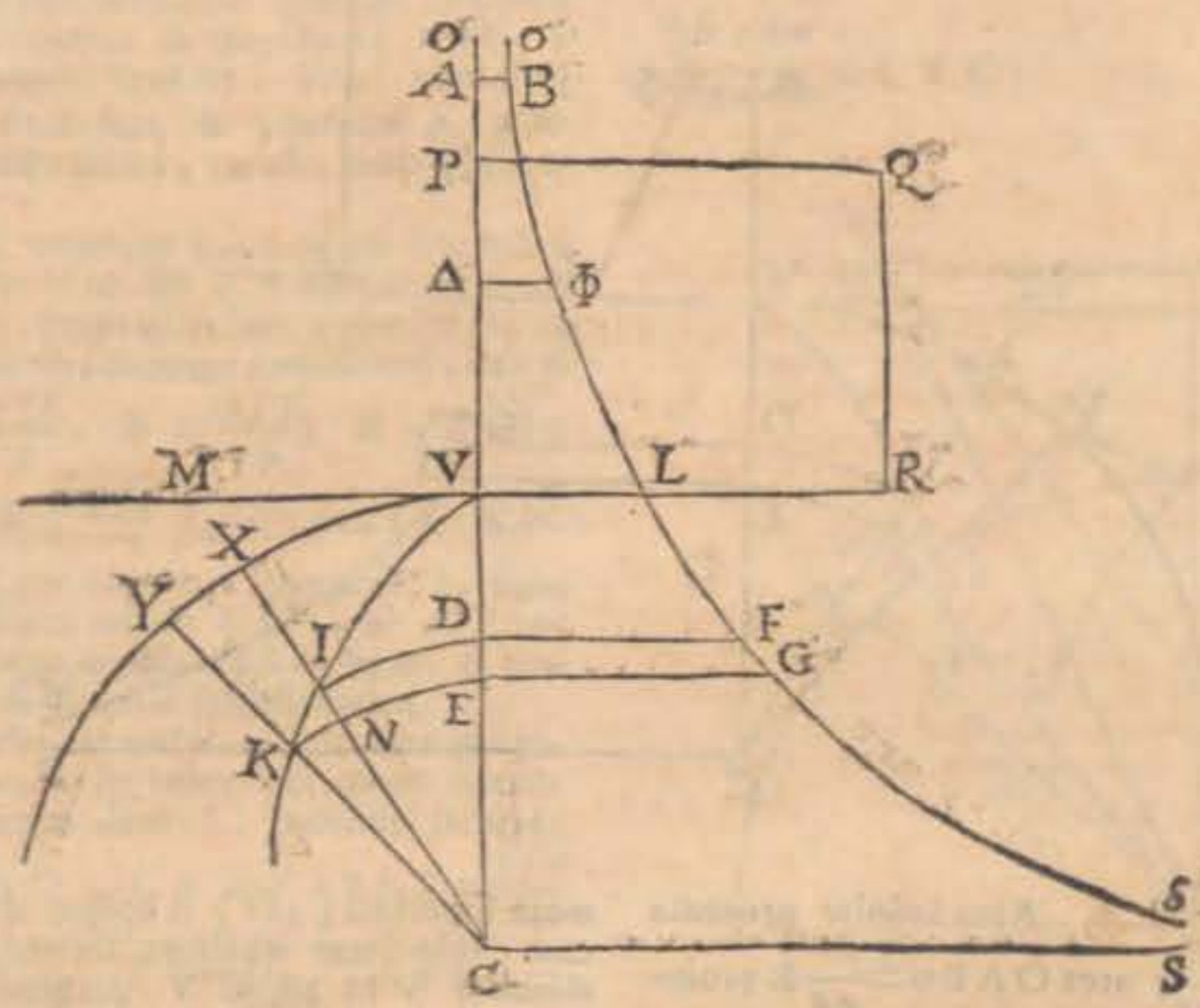



adeóque $CrR=\frac{\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}=\frac{\frac{1}{2}rrdy}{\sqrt{yy+rr}}$.

427. Coroll. 2. Si descripta fuerit altera hyperbola GV, cujus idem centrum C, idem semiaxis transversus CV=*r*, semiaxis conjugatus CE=*c*; sectoris CGV fluxio erit=$\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz-rr}}=\frac{\frac{1}{2}rcdy}{\sqrt{yy+rr}}$. Est enim sector CRV ad sectorem CGV, adeóque prioris fluxio ad fluxionem posterioris in datâ ratione *r* ad *c*. (374).

428.

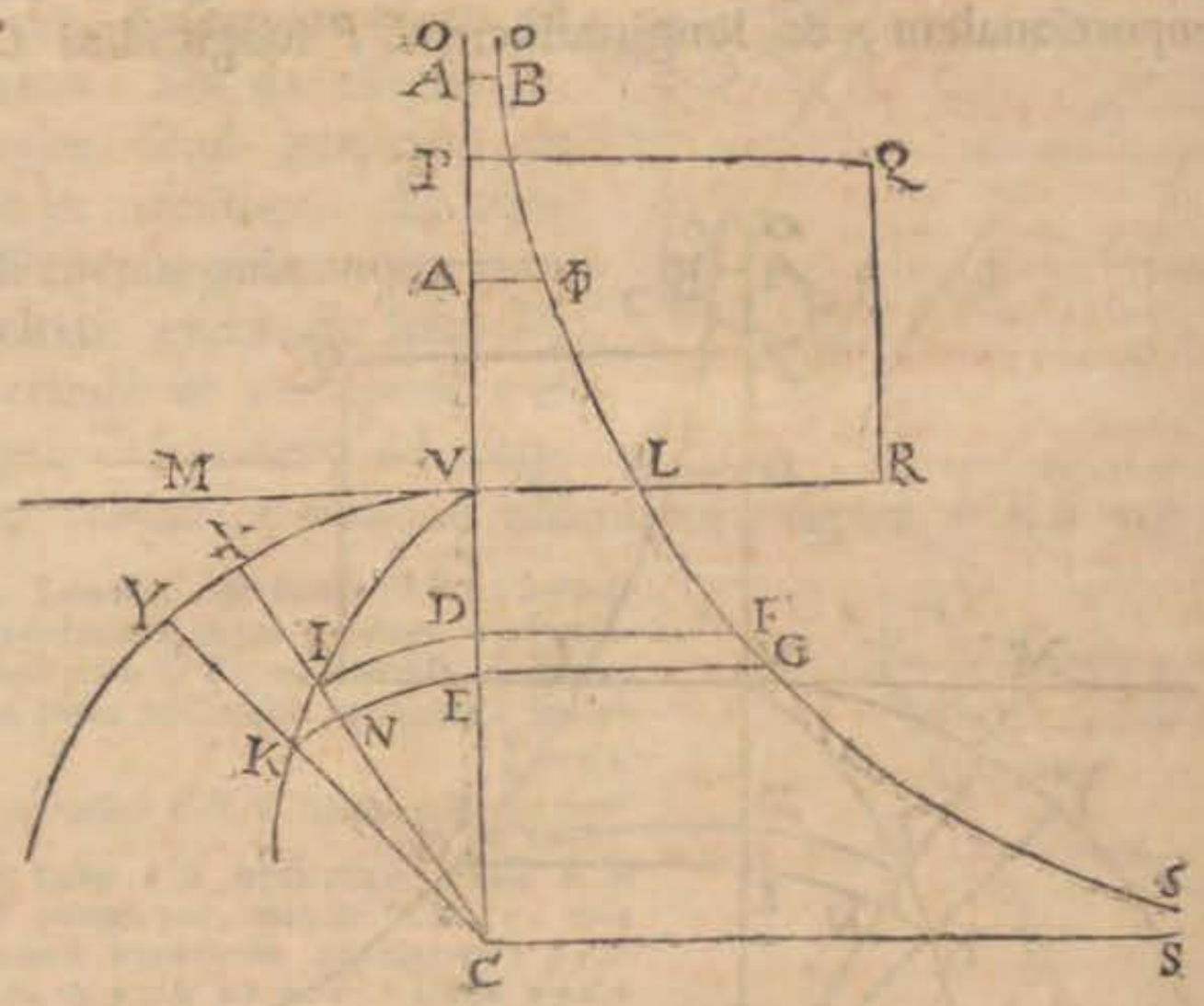
fit vel ellipſis, inveniri poteſt trajectoria augendo vel minuendo angulum $VCP$ in datâ aliquâ ratione. Sed &, vi centripetâ in centrifugam versâ, aſcendet corpus obliquè in trajectoriâ $VPQ$, quæ invenitur capiendo angulum $VCP$ ſectori elliptico $VRC$ proportionalem, & longitudinem $CP$ longitudini $CT$ æqua- LIBER PRIMUS. PROP. XLI.




428. Lemma. Iiſdem poſitis quæ in ſuperioribus Newtoni propoſitionibus, ſit $CV=r$, $CA=a$, CD vel $C\Delta=x$, DF vel $\Delta\Phi=y$; & ſi fuerit vis centripeta in loco quovis D ut $\frac{1}{CD^3}$, ſitque $2f^4$ quantitas data, erit $y=\frac{2f^4}{x^3}$, æquatio ad curvam BFG, & quoniam in æquatione $y$ infinita evadit ſi $x$ ponatur $=o$, & ſimiliter $x$ infinita fit ſi $y=o$, liquet rectas ſibi mutuò perpendiculares CO CS eſſe curvæ BFG aſymptotos. Area $DFGE=y\,dx=\frac{2f^4\,dx}{x^3}$, undè ſumptis fluentibus additâque conſtanti Q, erit area in infinitum versùs S protenſa $CDFsSC=Q-\frac{f^4}{xx}$; Ponatur $x$ infinita, & erit $\frac{f^4}{xx}=o$, & area CDFsS, mutabitur in aream utrinque infinitè protenſam COosSC; quare $COosSC=Q$; & hinc $COosSC-CDFsSC=ODFo=Q-Q+\frac{f^4}{xx}=\frac{f^4}{xx}$, id eſt, area ODFo, vel $O\Delta\Phi\sigma$ verſus O in infinitum extenſa, æqualis eſt quantitati finitæ $\frac{f^4}{xx}$.

DE MOTU CORPORUM.

qualem ut ſupra. Conſequuntur hæc omnia ex propoſitione præcedente, per curvæ cujuſdam quadraturam, cujus inventionem, ut ſatis facilem, brevitatis gratiâ miſſam facio.




429. Coroll. 1. Area infinitè protenſa $OVLo = \frac{f^4}{rr}$; area $OABo = \frac{f^4}{aa}$ & proindè $\surd OVLo = \frac{ff}{r}$, $\surd OABo = \frac{ff}{a}$.

430. Coroll. 2. Area $ABLV = OVLo - OABo = \frac{f^4 \times aa - rr}{rraa} = \frac{f^4 cc}{rraa}$, ponendo $aa - rr = cc$ (429) undè $\surd ABLV = \frac{f^2 c}{ra}$.

431. Coroll. 3. Similiter ſi punctum D ſit inter puncta data C, V, & punctum Δ inter puncta data V, A; erit area $AB\Phi\Delta$, vel $ABFD = \frac{f^4 \times aa - xx}{aaxx}$, area $VLFD = \frac{f^4 \times rr - xx}{rrxx}$, $\Delta\Phi LV = \frac{f^4 \times xx - rr}{rrxx}$. (428. 429. 430.)

432. Iiſdem manentibus quæ in Lemmate ſuperiori (428) ſi corpus de loco V, cum velocitate quâlibet ſecundùm directionem VM ad CV perpendicularem projiciatur ut curvam VIK deſcribat, erit VM hujus curvæ tangens in puncto V, CV ad tangentem Vm normalis, & velocitas projectionis æqualis erit velocitati quam corpus ex diſtantiâ infinitâ OV, cadendo acquireret in loco V, vel eâ minor, vel major.

433. Primus caſus. Velocitas projectionis æqualis ſit velocitati per ſpatium infinitum OV cadendo acquiſitæ in loco V, erit (418) quantitas data $Q = CV\surd OVLo = ff$ (429) & $Z = \frac{Q}{IC} = \frac{ff}{x}$. Sed (per prop. 41.) $\surd ODFo : Z = IK : KN$, hoc eſt, (428) $\frac{ff}{x} : \frac{ff}{x} = IK : KN$, ergò $IK = KN$, proindèque angulus KIN rectus eſt (cor. 2. prop. 41.) In hoc igitur

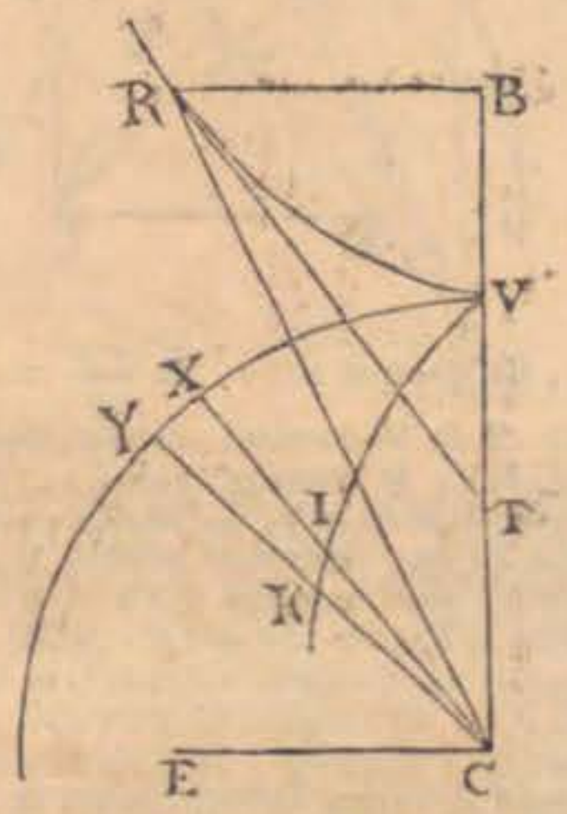
tur casu trajectoria VIK est circulus VXY radio CV descriptus.

434. Hinc si velocitas projectionis minor fuerit velocitate quæ ex infinitâ distantiâ cadendo acquiritur in loco V, corpus in trajectoriâ VK motum ad centrum virium C perpetuò accedet, velocitas illius perpetuò crescet, & punctum D semper erit inter data puncta V & C situm. Si verò projectionis velocitas major sit velocitate per infinitum spatium cadendo acquisitâ, corpus in trajectoriâ VIK, à centro semper recedet, illius velocitas continuò decrescet & punctum Δ puncto I correspondens, puncto dato V superius erit.

435. Si manente casûs primi hypothesi, directio VM ad CV perpendicularis non sit, & perpendiculum è centro C in projectionis directionem demissum dicatur $p$, erit $Q=\frac{pff}{r}$, $Z=\frac{pff}{rx}$, & $\sqrt{ODI}$ o $\left(\frac{ff}{x}\right):Z\left(\frac{pff}{rx}\right)=r:p=IK:KN$. Hoc est, (per coroll. 2. prop. 41.), sinus totus ad sinum anguli KIN, in datâ ratione adeóque angulus KIN datus, & trajectoria VK spiralis logarithmica.

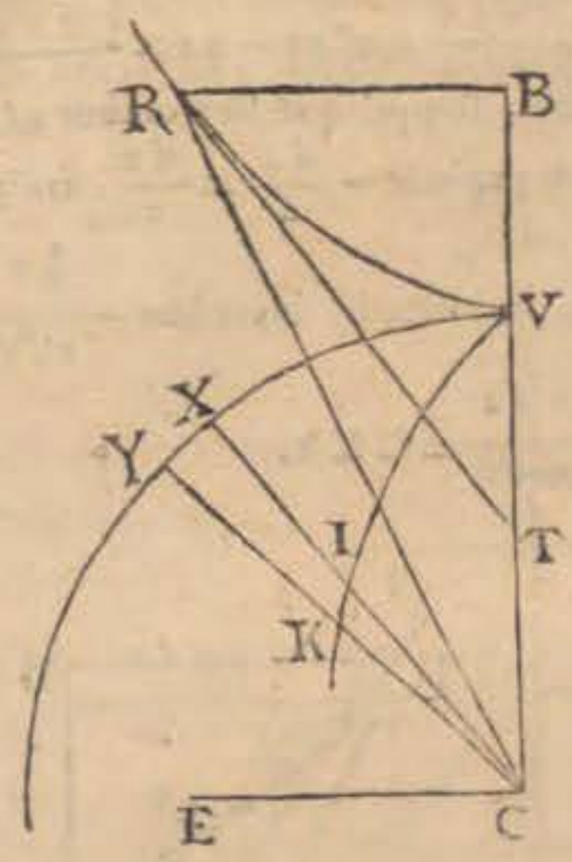
436. Casus secundus. Velocitas projectionis æqualis sit velocitati quam corpus de loco aliquo dato A, cadendo haberet in V, erit $Q=CV\times\sqrt{ABLV}=\frac{ffc}{a}$ (430) $Z=\frac{ffc}{ax}$, $ZZ=\frac{f^4cc}{aaxx}$, $ABFD=\frac{f^4\times aa-xx}{aaxx}$ (431.), undè $ABFD-ZZ=\frac{f^4\times aa-cc-xx}{a^2x^2}=\frac{f^4\times rr-xx}{a^2x^2}$, ob $a^2-cc=rr$ (430) & $\sqrt{ABFD-ZZ}=\frac{ff\sqrt{rr-xx}}{ax}$. Cum igitur (in prop. 41.) sit $A=IC=CD=x$, $DE=IN=dx$, $CX=CV=r$, erit $\frac{Q\times CX^2\times IN}{2AA}=\frac{\frac{1}{2}ffrrcdx}{axx}$ & $\frac{Q\times CX^2\times IN}{2AA\sqrt{ABFD-ZZ}}=\frac{\frac{1}{2}rrcdx}{x\sqrt{rr-xx}}$ = sectori CXY. Quoniam autem crescente IC seu $x$, decrescit sector YXC (434) scribendum est $CXY=-\frac{\frac{1}{2}rrcdx}{x\sqrt{rr-xx}}$ (159).

Ponatur $x=\frac{rr}{z}$, erit $xx=\frac{r^4}{zz}$, $rr-xx=\frac{rrzz-r^4}{zz}$, $\sqrt{rr-xx}=\frac{r\sqrt{zz-rr}}{z}$ & $zx=rr$, sumptisque fluxionibus $zdx+xdz=0$, & proindè $-\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$, hisque valoribus substitutis invenitur $-\frac{\frac{1}{2}rrcdx}{x\sqrt{rr-xx}}=\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz-rr}}=CXY$.




Centro C, semiaxe transverso $CV=r$ semiaxe conjugato $CE=c$, describatur hyperbola VR, ex cujus puncto quovis R, demittatur ad axem perpendiculum RB, & tangens RT, axi occurrens in T, & CB, dicatur $=z$, erit (427) $\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz-rr}}$, fluxio sectoris hyperbolici CRV, & (ex conicis) $CB(z):CV(r)=CV(r):CT=\frac{rr}{z}=x=CI$. Itaque cum sit $CXY=\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz-rr}}$, si sumantur utrinque fluentes additâ constanti Q erit sector circuli CXV, æqualis sectori hyperbolico CRV + Q. invenitur autem $Q=0$. Nam positâ CT seu $x=r$,

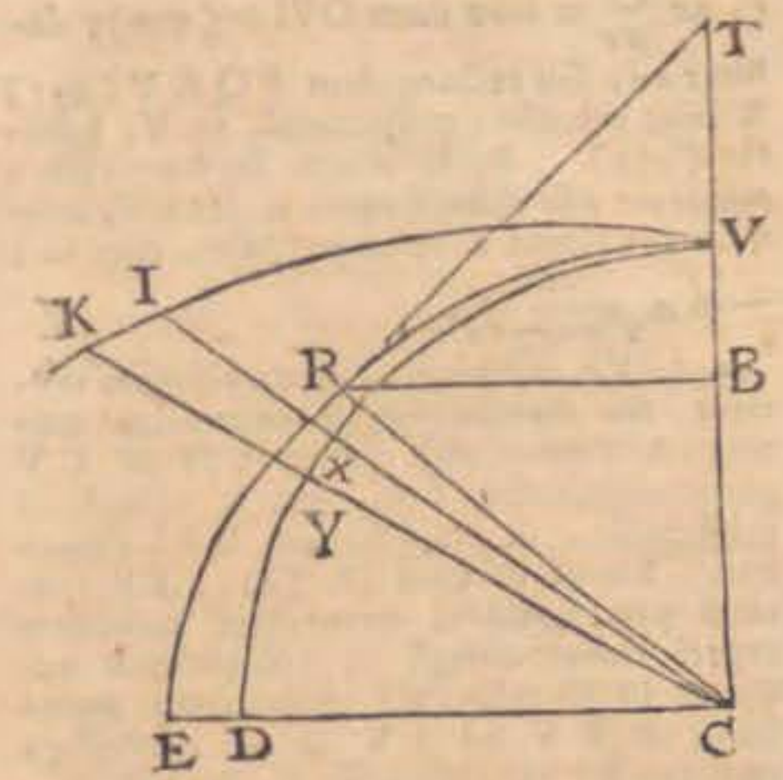
DE MOTU CORPORUM.




$x = r$, fit quoque $z = r$, ob $\frac{rr}{z} = x$, & puncta B & V coeunt, evaneſcitque ſector CRV, & quoniam poſitâ $x = r$ corpus projectum eſt in V, punctum X coincidet quoque in hoc caſu cum puncto V, & fit CXV = o, undè æquatio CXV = CRV + Q, mutatur in hanc o = o + Q. Nulla igitur eſt quantitas conſtans addenda vel ſubducenda, ſed eſt ſemper CXV = CRV. Quare invenitur punctum I in trajectoriâ VIK, capiendo ſectorem CXV = CRV, & in lineâ CX ſumendo CI = CT.

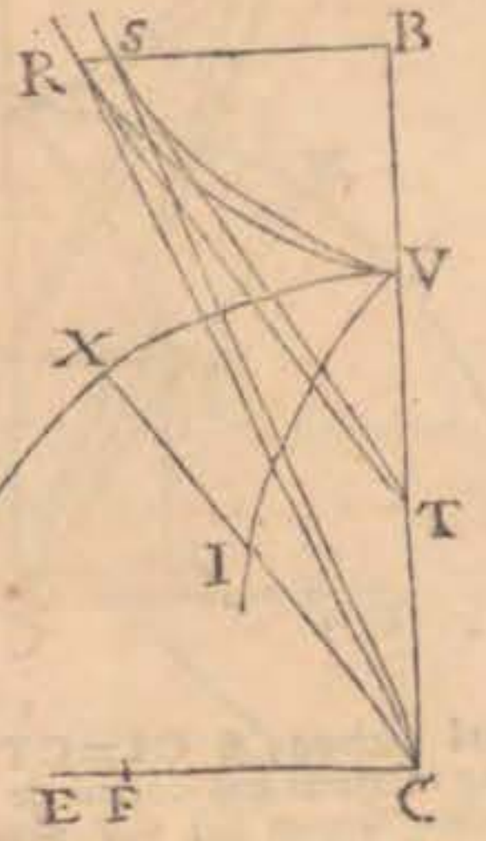
437. Caſus 3^us. Projectionis velocitas major ſit velocitate per ſpatium infinitum cadendo acquiſitâ. Sit P locus de quo corpus cadere debet ut urgente gravitate uniformi velocitatem acquirat in loco V æqualem velocitati projectionis. In perpendiculo VL, capiatur VR ad VL in ratione vis gravitatis uniformis ad vim centripetam variabilem in loco V, & compleatur rectangulum PVRQ cujus latus quadratum dicatur $e$; & velocitas projectionis erit ut $e$, (per cor. 1. prop. 39.) Quarè (430) $Q = re$, $ZZ = \frac{rree}{xx}$; & quoniam velocitas corporis trajectoriam VIK deſcribentis continuò decreſcit atque corpus à centro C perpetuò recedit (434), loco areæ ABFD, (prop. 41.) capienda eſt quantitas $ee - \Delta\phi LV = ee - \frac{f^4xx - rr}{rrxx}$ (431) $= \frac{rreexx - f^4xx + f^4rr}{rrxx}$, & quantitas ABFD − ZZ, (prop. 41.) erit hic $= \frac{r^2e^2xx - f^4xx + f^4rr - r^4ee}{rrxx}$. Eſt autem area rectanguli PVRQ major aream infinitè protensâ OVLo, hoc eſt, quantitas $ee$ major quam $\frac{f^4}{rr}$, & proindè $rree - f^4$, quantitas poſitiva, fiat igitur $rree - f^4 = bbrr$, & quantitas ABFD − ZZ, (prop. 41.) evadet $= \frac{bbrrxx - bbr^4}{rrxx}$, & $\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{b\sqrt{xx - rr}}{x}$; Hinc factis debitis ſubſtitutionibus, formula (prop. 41.) $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$, in hanc mutabitur $\frac{r^3edx}{2xx} \times \frac{x}{b\sqrt{xx - rr}} = \frac{\frac{1}{2}r^3edx}{bx\sqrt{xx - rr}} = \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx - rr}}$ ponendo $\frac{re}{b} = c$. Quarè ſector circuli $CXY = \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx - rr}}$. Fiat $x = \frac{rr}{z}$ & erit $\frac{dx}{x} = \frac{-dz}{z}$, ac $\sqrt{xx - rr} = \frac{r\sqrt{rr - zz}}{z}$ atque $\frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx - rr}} = -\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr - zz}} = CXY$. Centro C, ſemiaxe $CV = r$, & altero ſemiaxe $CE = c$, deſcribatur ellipſeos quadrans VE, ex cujus puncto quovis R agatur ad axem CV perpendiculum RB, & tangens RT axi producto occurrens in T, & CB dicatur $= z$, erit (ex conicis) CB $(z) : CV\,(r) = CV\,(r) : CT = \frac{rr}{z} = x = CI$; & (424) $\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr - zz}}$, fluxio ſectoris elliptici CRE; quarè cum ſit $CXY = -\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr - zz}}$ ſi ſumantur utrinque fluentes additâ conſtanti Q, erit ſector circuli $CXV = Q - CRE$. Ut inveniatur valor quantitatis conſtantis Q, ponatur $CXV = o$, & erit $Q = CRE$; ſed ubi $CXV = o$ puncta X & I cum puncto V coeunt, & ſit CT ſeu CI

trum proportionales; undè in superioribus constructionibus loco sectorum circuli, uti possumus angulis qui ad sectores hyperbolicos vel ellipticos datam habeant rationem.




CI=CV, adeóque punctum R coincidit etiam cum puncto V, & sector CER, æqualis fit quadranti CEV; ergò Q=CEV. Est igitur semper CXV=CEV−CRE =CRV. Itaque ut inveniatur trajectoriæ VIK punctum I, capiatur sector circuli CXV, æqualis sectori elliptico CRV, & in lineâ CX, productâ capiatur CI=CT, erit I punctum in trajectoriâ quæsitâ.

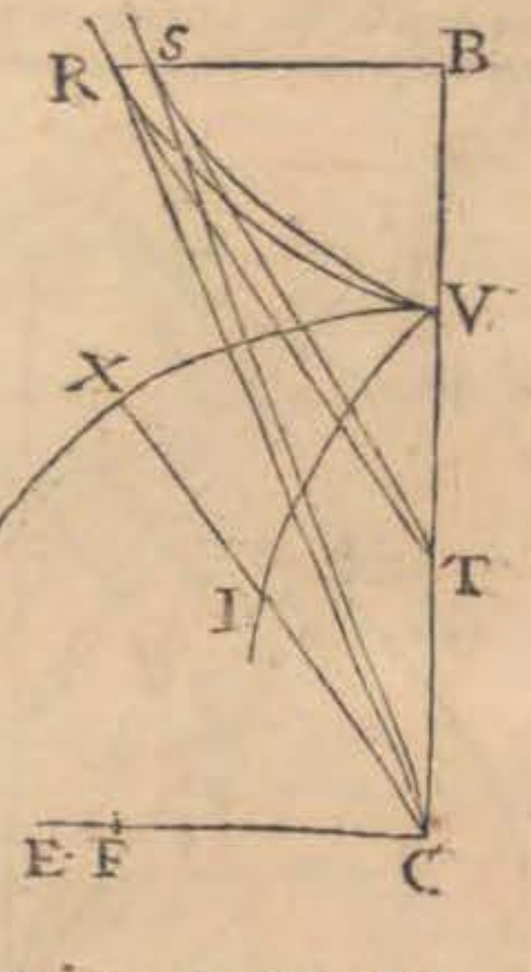
438. Datâ velocitate projectionis & magnitudine vis centripetæ variabilis, hoc est, ipsius ratione ad aliquam vim centripetam uniformem notam in loco dato V, (fig. not. 430.) describi potest trajectoria VIK. Iis enim datis, dabitur locus P ex quo corpus urgente vi centripetâ constante cadere debet ut in loco V datam projectionis velocitatem habeat; & sumptâ VR ad VL in datâ ratione vis centripetæ constantis ad vim centripetam variabilem in loco V, dabitur rectangulum PQRV. Porrò si rectangulum illud æquale fuerit areæ infinitè protensæ OVLo, corpus circulum describet (per cas. 1. not. 433.); si rectangulum minus est areâ OVLo, inveniri poterit punctum A, ex quo ducta perpendicularis AB, abscindat aream ABLV æqualem rectangulo PQRV; & trajectoria VIK, describetur (per constr. cas. 2i.) (436). Si rectangulum PQRV areâ OVLo majus est, adhibenda erit constructio casûs 3i. (437). Observandum autem est sectores circulares esse angulis suis ad centro




439. Casus 2us. & 3us. construi possunt per hyperbolam vel ellipsim, cujus sit semiaxis CV=r, & alter semiaxis quilibet. Nam iisdem positis quæ in constructione casûs 2i., semiaxe transverso CV=r, & semiaxe quovis conjugato CF, describatur hyperbola altera SV, quam in S tetur perpendiculum RB; tangentes RT, cat ST per puncta R, S ductæ axi occurrunt in eodem puncto T, (257) & sector CRV est ad sectorem CSV in datâ ratione CE ad CF (374). Quare cum (per constr. cas. 2i.) sector circuli CXV æqualis sit sectori CRV, erit etiam ad sectorem CSV in datâ ratione CE ad CF, atque ità punctum trajectoriæ I invenietur capiendo sectorem CXV ad sectorem CSV, in datâ ratione CE ad CF, & in radio CX, capiendo CI=CT. Idem eodem modo demonstratur in casu 3o.

440. Hinc si (juxtà constructionem Coroll. 3. prop. 41.) describatur curva VI capiendo angulum VCI sectori conico VCR proportionalem, vel quod in idem recidit, capiendo sectorem circuli CXV ad sectorem conicum VCR

DE MOTU CORPORUM.

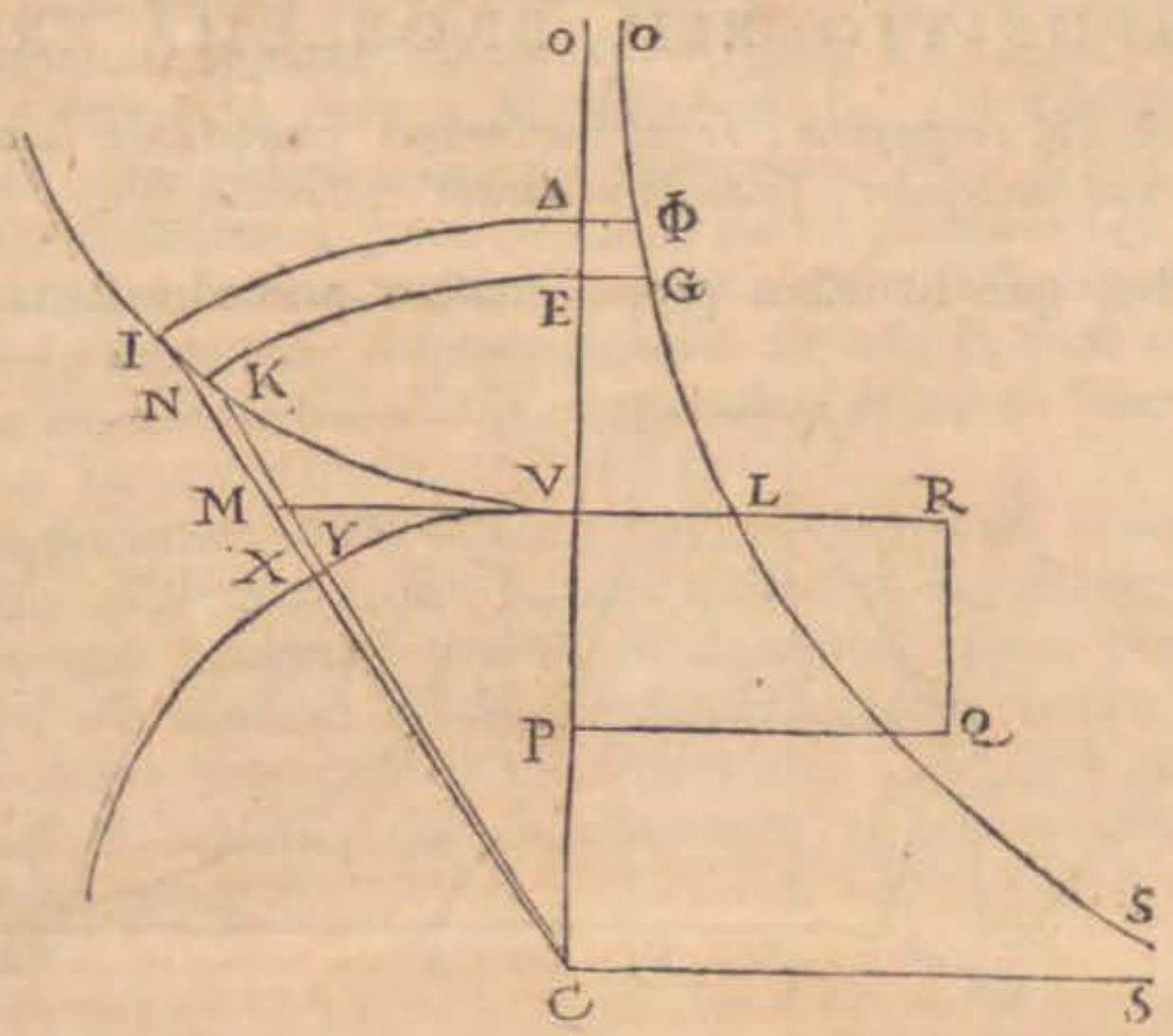



in datâ ratione, & CI=CT, inveniri poterit velocitas quâ corpus de loco V, secundùm lineam ipsi CV perpendicularem projici debet ut in trajectoriâ descriptâ VI progrediatur. Nam sit VS hyperbola quævis, centro C, semiaxe transverso CV=$r$, semiaxe conjugato CF descripta, data erit ratio sectoris circuli CXV, ad sectorem hyperbolicum CSV, (ex hyp.) seu (439) ratio CE ad datam CF; ergò dabitur CE, seu $c$; Est autem in cas. 2°. (430, 436) $cc=aa-rr$ adeóque $aa=rr+cc$; & hinc datis $r$ & $c$, dabitur $a$, seu AC, (fig. not. 428). Dato autem puncto A, & vi centripetâ, datur rectangulum PQRV, æquale areæ ABLV, & indè velocitas projectionis habetur, (438). Si trajectoria VI, per sectores ellipseos descripta fuerit, similiter invenietur $c$; est autem in casu 3°. (437) $c=\frac{re}{b}$, & $rree-f^4=bbrr$, adeóque $b=\frac{re}{c}$, $bb=\frac{rree}{cc}$, & $bb=\frac{rree-f^4}{rr}=\frac{rree}{cc}$; quarè $ccrree-r^4ee=f^4cc$, & $ee=\frac{f^4cc}{ccrr-r^4}=\frac{f^4}{rr}\times\frac{cc}{cc-rr}$, cum igitur datæ sint $c$, & $r$, ac $\frac{f^4}{rr}$ = areæ datæ OVLo (429); dabitur $ee$, seu rectangulum PQRV (437) & hinc velocitas projectionis in V, habetur (438). Patet autem in hoc casu $c$ majorem esse debere radio $r$, seu CV, alioquin problema esset impossibile, cum sit $c=\frac{ff}{r}\times\frac{c}{\sqrt{cc-rr}}$.

441. Vis centripeta in centrifugam vertatur, seu directionem in contrariam mutet, & corpus per rectam VM ad CV perpendicularem cum quâvis velocitate projiciatur, ut trajectoriam VKI describat. Sit ut in casu 3°. (437) PV spatium per quod vi centrifugâ constante urgeri debet corpus ut velocitatem acquirat in V velocitati projectionis æqualem, & RV ad LV ut vis centrifuga constans ad variabilem in V, & rectangulum PRQV, dicatur $ee$; velocitas projectionis in V, erit ut $e$, (per cor. 2. prop. 39.) & quoniam velocitas in recessu à centro semper crescit, erit velocitas in I vel Δ, ut $\sqrt{ee+\Delta\phi LV}$, quæ (in formulâ prop. 41.) substitui debet loco $\sqrt{ABFD}$. Invenietur etiam (430) $Q=re$, $ZZ=\frac{rree}{xx}$, $ee+\Delta\phi LV=ee+\frac{f^4\times xx-rr}{rrxx}$ (431) $=\frac{rreexx+f^4xx-f^4rr}{rrxx}$. Hinc quantitas ABFD−ZZ (propos. 41.) fiet hic $=\frac{rreexx+f^4xx-f^4rr-r^4ee}{rrxx}$ $=\frac{bbrrxx-bbr^4}{xx}$, ponendo $rree+f^4=bbrr$. Quarè $\sqrt{ABFD-ZZ}=\frac{b\sqrt{xx-rr}}{x}$. Factis igitur debitis substitutionibus, formula prop. 41. $\frac{Q\times CX^2\times IN}{2AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$, in hanc mutatur $\frac{\frac{1}{2}r^3edx}{bx\sqrt{xx-rr}}=\frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx-rr}}$, ponendo $\frac{re}{b}=c$. Quarè sector circuli $CXY=\frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{bx\sqrt{xx-rr}}$, ut in cas. 3°. (437). Igitur trajectoria VI constructur per sectores ellipticos prorsus ut in hoc 3°. casu.

442. Schol. Keillius ad calcem intro-

duc-




ductionis ad veram aſtronomiam, inverſum problema virium centripetarum in ratione triplicatâ diſtantiæ à centro decreſcentium generatim ac perſpicuè ſolvit, & trajectoriarum quæ in hâc hypotheſi deſcribuntur plures proprietates demonſtravit, inter alias iſtam, earum omnium, ſi circulum exceperis, areas eſſe perfectè quadrabiles, quæ quidem de omnibus trajectoriis per conſtr. coroll. 3. prop. 41. deſcriptis facilè demonſtratur. Nam (per prop. 41.) arearum illarum fluxio

$$\text{CIK} = \frac{\text{Q} \times \text{IN}}{2\sqrt{\text{ABFD} - \text{ZZ}}} = \frac{-\frac{1}{2} c x dx}{\sqrt{rr - xx}}$$

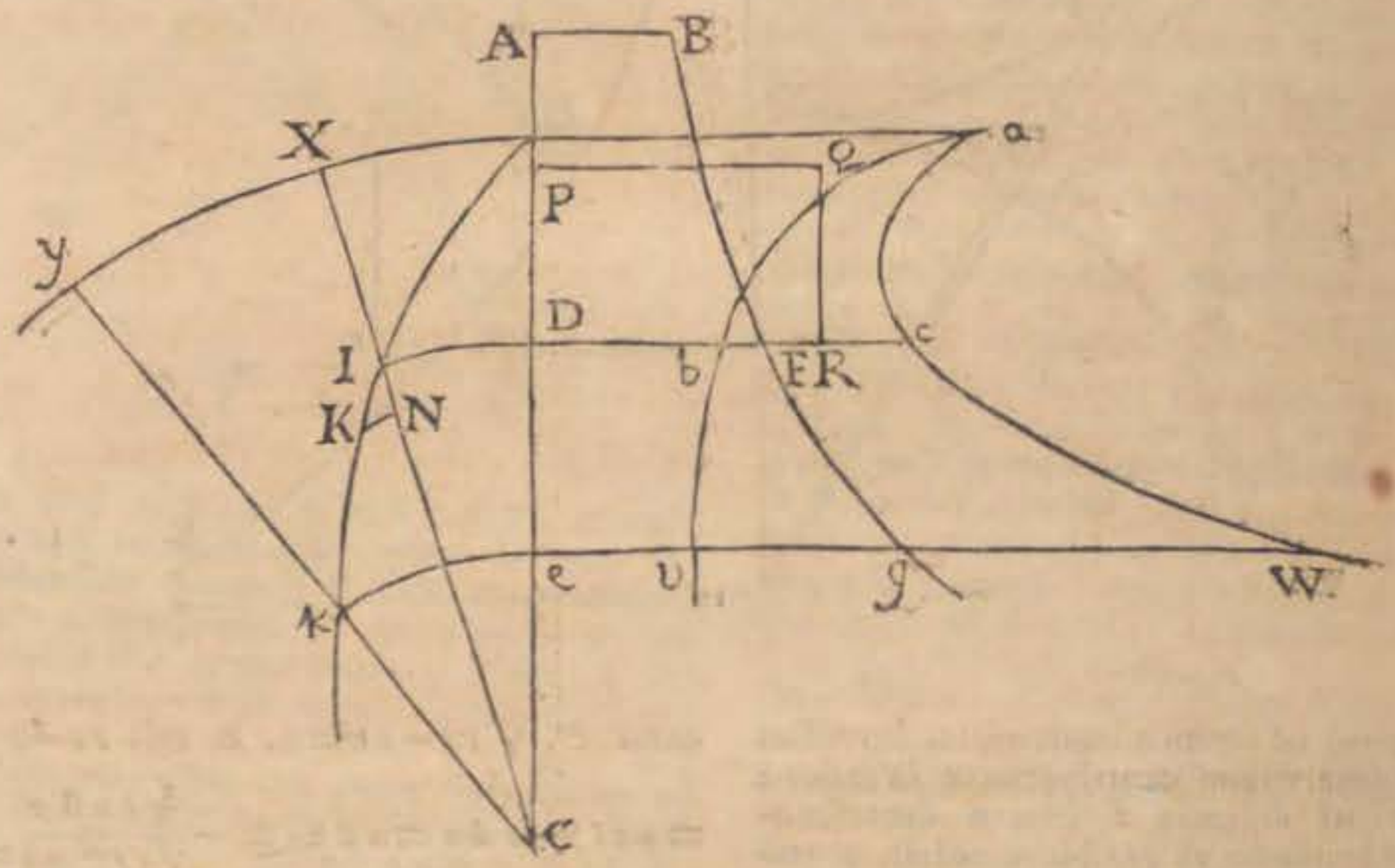
in caſ. 2°. & $\text{CIK} = \frac{\text{Q} \times \text{IN}}{2\sqrt{\text{ABFD} - \text{ZZ}}} = \frac{\frac{1}{2} c x dx}{\sqrt{xx - rr}}$ in caſu 3°. (437. 441.). Ponatur 1°. $\sqrt{rr - xx} = z$; & erit $rr - xx = zz$, $-x dx = z dz$, & $-\frac{\frac{1}{2} c x dx}{\sqrt{rr - xx}} = \text{CIK} = \frac{1}{2} c dz$, & ſumptis fluentibus, ſector $\text{CIV} = \frac{1}{2} cz = \frac{1}{2} c\sqrt{rr - xx}$, nulla enim eſt addenda quantitas conſtans. Ponatur 2°. $\sqrt{xx - rr} = y$, & proindè $xx - rr = yy$, $x dx = y dy$, erit $\text{CIK} = \frac{\frac{1}{2} c x dx}{\sqrt{xx - rr}} = \frac{1}{2} c dy$, & ſector fluens $\text{CIV} = \frac{1}{2} cy = \frac{1}{2} c\sqrt{xx - rr}$.

De Motu Corporum.

## PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

*Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, ſecundum datam rectam egreſſi.*

Stantibus quæ in tribus propoſitionibus præcedentibus: exeat




corpus de loco *I* ſecundum lineolam *IK*, eâ cum velocitate quam corpus aliud, vi aliquâ uniformi centripetâ, de loco *P* cadendo acquirere poſſet in *D*: ſitque hæc vis uniformis ad vim, quâ corpus primum urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus verſus *k*; centroque *C* & intervallo *Ck* deſcribatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *BFg*, *abv*, *acw* ordinatim applicatæ *eg*, *ev*, *ew*. (y) Ex dato

(y) * *Ex dato rectangulo PDRQ &c.* Ex datâ vis centripetæ lege, datur curva linea BFG, (per conſtr. 1ª. partis prop. 39). Dato rectangulo PDRQ, datur locus A, de quo corpus urgente vi centripetâ variabili cadere debet, ut velocitatem acquirat in loco D, æqualem velocitati quam corpus aliud urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ ex loco P cadens acquiſivit eodem loco D, (per cor. 1. prop. 39.) dato autem loco A, & deſcriptâ curvâ BFg, deſcribi poterit altera curva VLM, (per conſtr. & fig. 2ª. ptis. Prop. 39).

dato rectangulo $PDRQ$, datâque lege vis centripetæ quâ corpus primum agitatur, datur curva linea $BFg$, per conſtructionem problematis XXVII, & ejus corol. 1. (z) Deinde ex dato angulo $CIK$ datur proportio naſcentium $IK$, $KN$, & inde, per conſtructionem prob. XXVIII. datur quantitas Q, unà cum curvis lineis $abv$, $acw$: ideoque, completo tempore quovis $Dbve$, datur tum corporis altitudo $Ce$ vel $Ck$, tum area $Dcwe$, eique æqualis ſector $XCy$, anguluſque $ICk$, & locus $k$ in quo corpus tunc verſabitur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his propoſitionibus vim centripetam in receſſu quidem à centro variari ſecundum legem quamcunque, quam quis imaginari poteſt, in æqualibus autem à centro diſtantiis eſſe undique eandem. Atque hactenus motum corporum in orbibus immobilibus conſideravimus. Supereſt ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca.

(z) * *Deinde.* Cum ſit IK ad KN, ut ſinus totus ad ſinum anguli dati NIK, (per cor. 2. prop. 41.) dabitur quantitas conſtans Q, unà cum curvis lineis abu, acw, eſt enim $IK : KN = \sqrt{ABFD} (\text{ſive } \sqrt{PDRQ}) : Z$; eſt ergo data Z (per conſtr. probl. 28. & not. 418). & $Z = \frac{Q}{A}$ ſive $A \times Z = Q$ unde habetur Q, ex quibus habentur quantitates $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX^2}{2A^2 \times \sqrt{ABFD - ZZ}}$ quæ ſunt ordinatæ curvarum abv, acw.

DE MOTU CORPORUM.

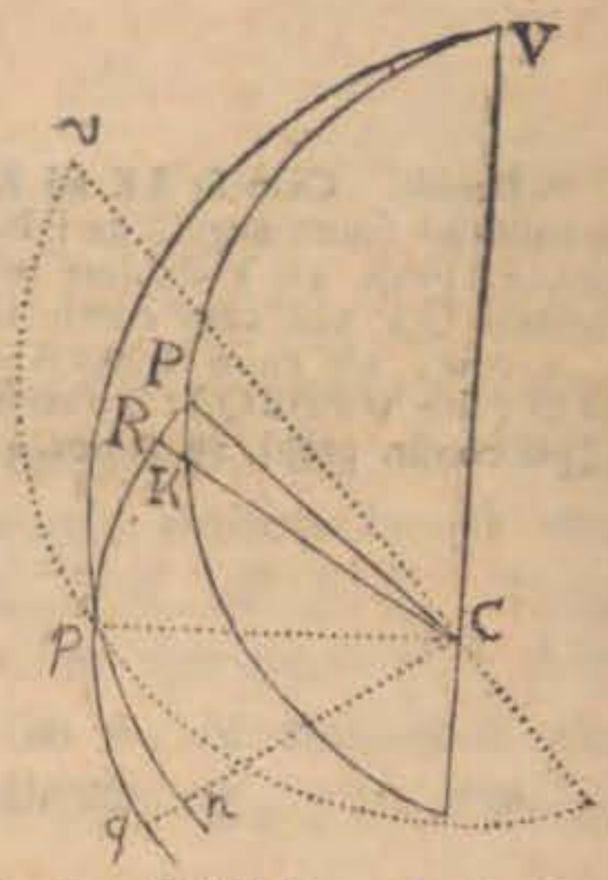
## SECTIO IX.

*De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum.*

### PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

(a) *Efficiendum est ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quiescente.*

In orbe *VPK* positione dato revolvatur corpus *P* pergendo à *V* versus *K*. A centro *C* agatur semper *Cp*, quæ sit ipsi *CP* æqualis, angulumque *VCp* angulo *VCP* proportionalem constituat; & (b) area, quam linea *Cp* describit, erit ad aream *VCP*, quam linea *CP* simul describit; ut velocitas lineæ describentis *Cp* ad velocitatem lineæ describentis *CP*; hoc est, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ideoque in datâ ratione, & prop-



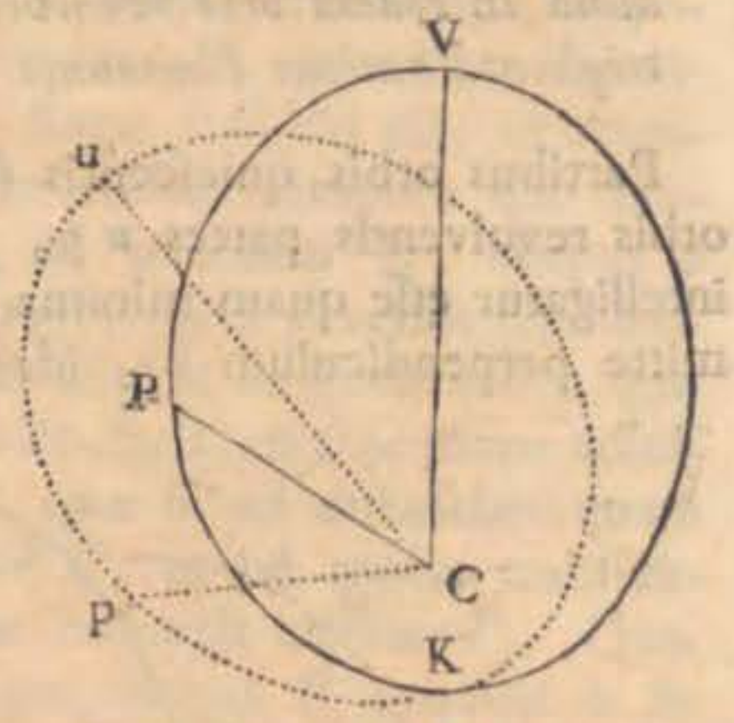

quiescentem VPK secans in K, & radius Cq, trajectoriam V p n, secans in n, sintque K, n, loca in quibus eodem tempore reperiuntur corpora P, p, id est, arcus PK, p n, sint eodem tempore descripti. Nascentibus arcubus PR, pq, sectores PCK, pCn, æquales sunt factis $\frac{1}{2}$PC

(a) * *Efficiendum est.* Sit VPK quælibet immota trajectoria quam corpus P ad centrum virium C tendens describat pergendo ab V versùs K, invenienda est lex vis centripetæ ad C tendentis, quâ urgente corpus aliud p feratur in perimetro figuræ u p, priori similis & æqualis, intereadum hæc ipsa figura u p, circà C revolvitur in uno eodemque plano, ità ut dum corpus P, arcum quemlibet ut V P, percurrit in orbe quiescente V P, aliud corpus p, similem & æqualem arcum u p, percurrat in orbe revolvente u p.

443. Si fuerit C V ad trajectoriam VPK in puncto V perpendicularis, hoc est, si fit C V linea apsidum in orbe quiescente, & correspondens C u linea apsidum in orbe revolvente, motus angularis lineæ C u dicitur apsidum motus, qui in consequentia fit, ubi linea C u, in eandem partem fertur cum corpore P, vel p. In antecedentia verò ubi linea C u, & corpus P, vel p, in plagas contrarias tendunt.

(b) * *Et area quam linea Cp, describit.* Sit V p n curva quam corpus p in orbe mobili u p revolvens describit, centro C, intervallo CP, vel C p, describatur circuli arcus P p q, agatur radius C R orbem

propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis ſit quam linea $Cp$ in plano immobili deſcribit, manifeſtum eſt quod corpus, cogente juſtæ quantitatis vi centripetâ revolvi poſſit unà cum puncto $p$ in curvâ illâ lineâ quam punctum idem $p$ ratione jam expoſitâ deſcribit in plano immobili. Fiat angulus $VCu$ angulo $PCp$, & linea $Cu$ lineæ $CV$, atque figura $uCp$ figuræ $VCP$ æqualis, & corpus in $p$ ſemper exiſtens movebitur in perimetro figuræ revolventis $uCp$, eodemque tempore deſcribet arcum ejus $up$ quo corpus aliud $P$ arcum ipſi ſimilem & æqualem $VP$ in figurâ quieſcente $VPK$ deſcribere poteſt. Quæratur igitur, per corollarium quintum propoſitionis VI., vis centripeta quâ corpus revolvi poſſit in curvâ illâ lineâ quam punctum $p$ deſcribit in plano immobili, & ſolvetur problema. *Q. E. F.*




PRO-

$\frac{1}{2}$ PC×PR, $\frac{1}{2}$ pC×pq, adeóque ob pC=PC ſectores illi ſunt inter ſe ut arcus PR, pq, ſeu ut anguli PCK, pCn; ſed quoniam angulus VCK, eſt ad angulum VCn, in datâ ratione anguli VCP, ad angulum VCp (per hyp.) erit dividendo angulus VCK—VCP, ad angulum VCn—VCp, hoc eſt, angulus PCK, ad angulum pCn, in datâ ratione anguli VCP, ad VCp, atque adeò ſector PCK, ad ſectorem pCn, in eádem ratione datâ. Undè (per cor. Lem. 4.) totus ſector VpC, eſt ad totum ſectorem VPC, eodem tempore deſcriptum in datâ ratione, ſive ſector VpC, eſt ut ſector VPC, proindéque (per prop. 1.) ut tempus quo ſector uterque deſcribitur. Quare manifeſtum eſt (per prop. 2.) quod corpus p, cogente juſtæ quantitatis vi centripetâ revolvi poſſit in curvâ lineâ Vpn, quam punctum p perpetuò tangit. Porrò dato orbe VPK, & virium centro C, datur longitudo & poſitio lineæ CP, per (ſuperiorem Newt. conſtr.) ideoque & lineæ Cp, & hinc datur punctum quodlibet p, in trajectoriâ Vpn, adeóque & ipſa trajectoria datur. Inveniri igitur poteſt (per cor. 5. prop. 6). Lex vis centripetæ quâ corpus p, in trajectoriâ illâ Vpn revolvi poteſt.

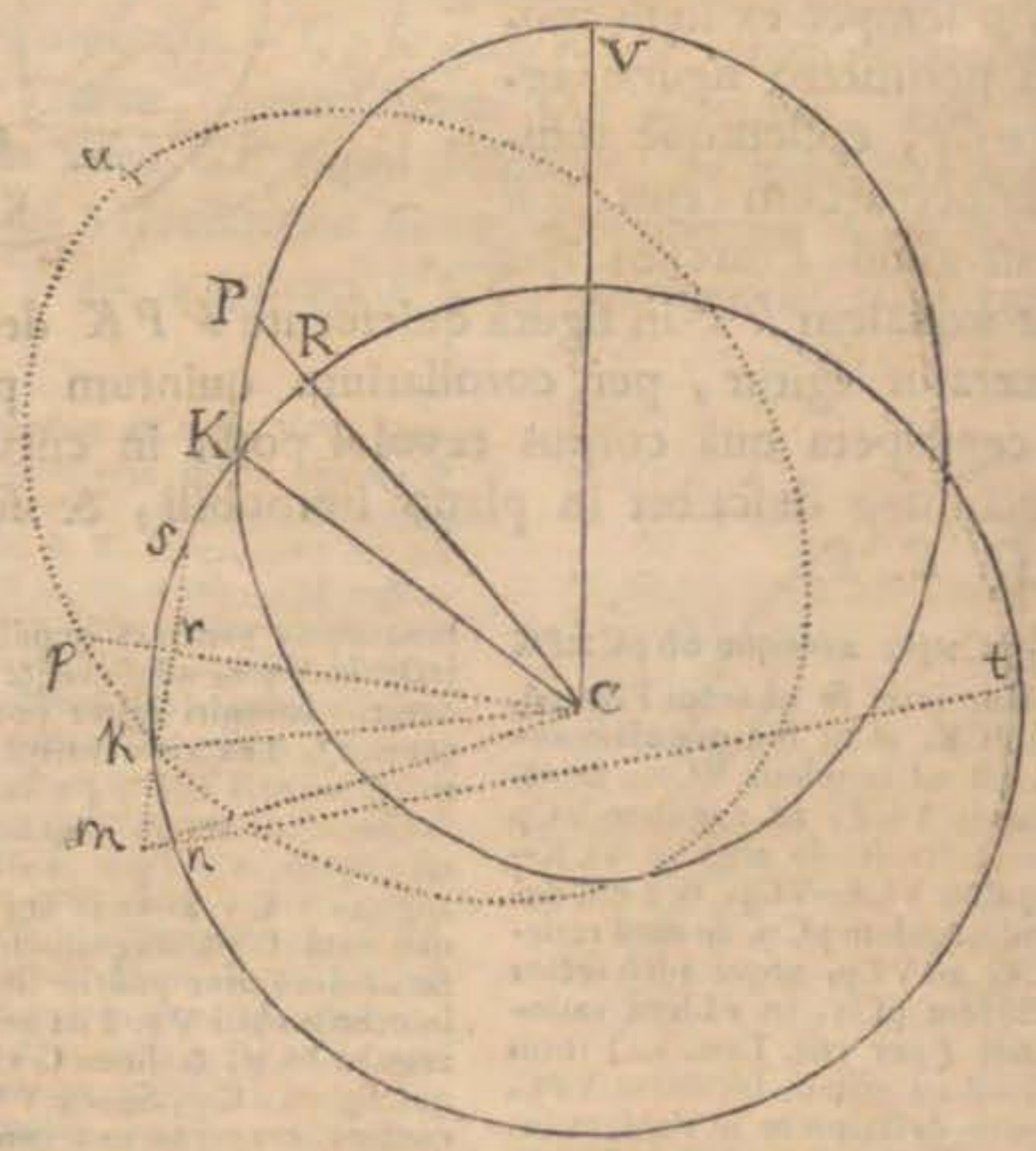
Quoniam autem angulus VCP æqualis eſt angulo vCp (per conſtr.) erit quoque angulus VCv æqualis angulo PCp, adeóque datâ Cp, magnitudine & poſitione, facile invenitur poſitio lineæ apſidum Cv in orbe mobili Vp: Fiat enim angulus VCv angulo PCp, & linea Cv lineæ CV, atque figura uCp, figuræ VCP ſimilis & æqualis, & corpus unà cum puncto p, ſemper latum & figuram immotam Vpn deſcribens, deſcribit etiam perimetrum up, figuræ revolventis uCp, eodemque tempore deſcribit arcum ejus vp, quo corpus aliud P arcum ipſi ſimilem & æqualem VP, in figurâ quieſcente VPK, deſcribere poteſt. Vide Varignonium Legem vis centripetæ in trajectoriâ Vpn determinantem, in Comm. Pariſ. 1705.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

*Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicatâ ratione communis altitudinis inverse.*

Partibus orbis quiescentis $VP$, $PK$ sunto similes & æquales orbis revolventis partes $up$, $pk$; & punctorum $P$, $K$ distantia intelligatur esse quam minima. A puncto $k$ in rectam $pC$ demitte perpendiculum $kr$, idemque produc ad $m$, ut sit $mr$ ad



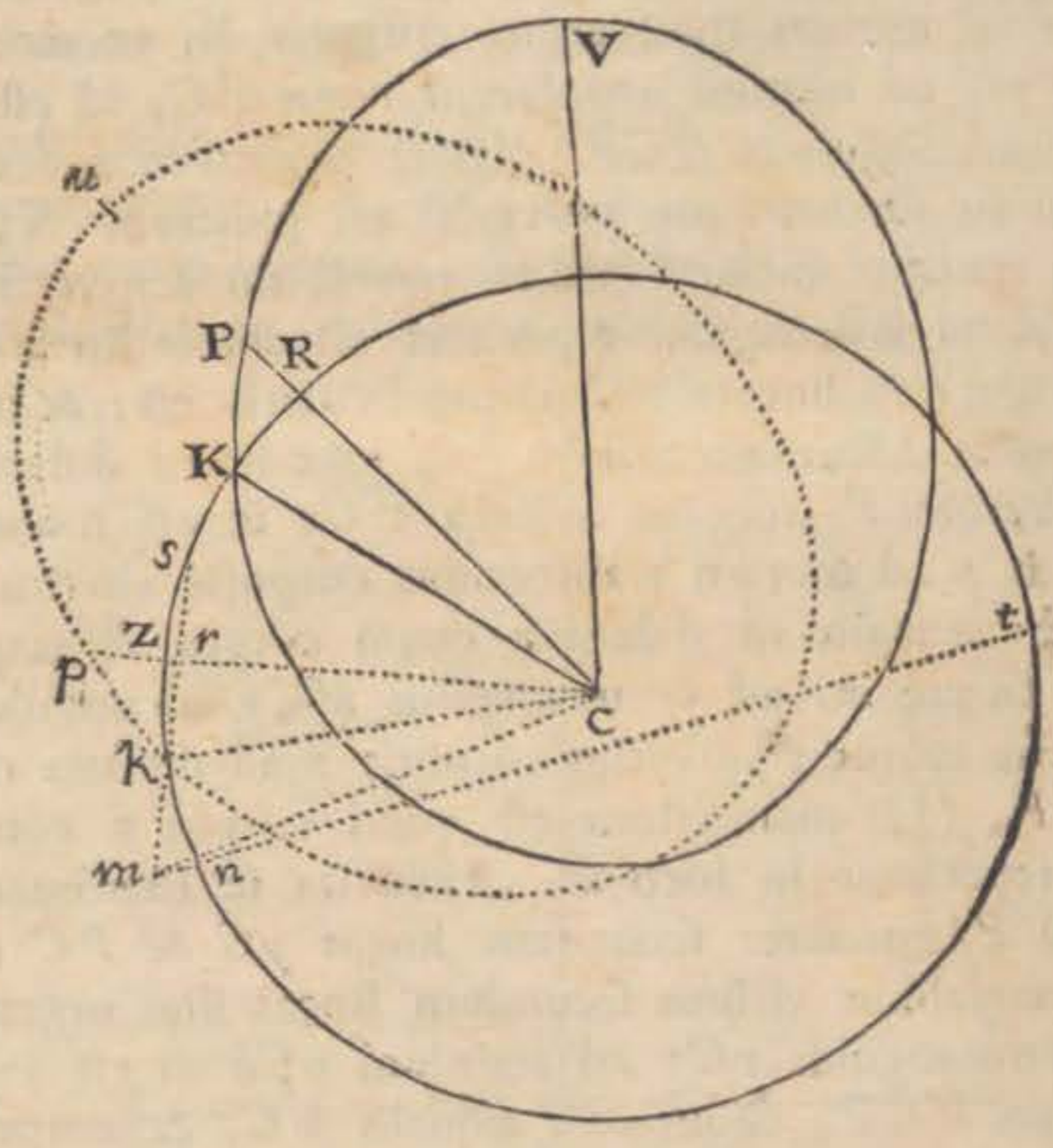

$kr$ ut angulus $VCp$ ad angulum $VCP$. Quoniam corporum altitudines $PC$ & $pC$, $KC$ & $kC$, semper æquantur, manifestum est quod linearum $PC$ & $pC$ incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis $P$ & $p$ existentium distinguantur motus singuli (per legum corol. 2) in binos;

nos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas $PC$, $pC$ determinentur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis $PC$, $pC$ perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis $p$ erit ad motum transversum corporis $P$, ut motus angularis lineæ $pC$ ad motum angularem lineæ $PC$, id est, ut angulus $VCp$ ad angulum $VCP$. Igitur eodem tempore quo corpus $P$ motu suo utroque pervenit ad punctum $K$, corpus $p$ æquali in centrum motu æqualiter movebitur à $p$ versus $C$, ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in lineâ $mkr$, quæ per punctum $k$ in lineam $pC$ perpendicularis est; & motu transverso acquiret distantiam à lineâ $pC$, quæ sit ad distantiam quam corpus alterum $P$ acquirit à lineâ $PC$, ut est motus transversus corporis $p$ ad motum transversum corporis alterius $P$. Quare cum $kr$ æqualis sit distantiæ quam corpus $P$ acquirit à lineâ $PC$, sitque $mr$ ad $kr$ ut angulus $VCp$ ad angulum $VCP$, hoc est, ut motus transversus corporis $p$ ad motum transversum corporis $P$, (c) manifestum est quod corpus $p$ completo illo tempore reperietur in loco $m$. Hæc ita se habebunt ubi corpora $p$ & $P$ æqualiter secundum lineas $pC$ & $PC$ moventur, ideoque æqualibus viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus $pCn$ ad angulum $pCk$ ut est angulus $VCp$ ad angulum $VCP$, sitque $nC$ æqualis $kC$, & corpus $p$ completo

(c) * *Manifestum est quod corpus p* &c. Ex puncto K in rectam PC, demissum intelligatur perpendiculum KR, & erit PR = pr. Fingamus corpus P de loco P ità projici ut vi secundum directionem PC, urgente percurrat spatium PR, eodem tempore quo vi alterâ secundum rectam ipsi RK, parallelam impellente, percurrit spatium æquale rectæ RK, adeò ut eo tempore viribus conjunctis describat diagonalem PK. Fingamus similiter corpus p, de loco p ità projici, ut vi secundùm directionem pC urgente percurrat pr = PR, eodem tempore quo corpus P percurrit PR aut RK vel PK, & vi alterâ secundum directionem rectæ rm, parallelam impellente, corpus p, eodem tempore describat spatium æquale rectæ rm, quæ est ad RK, in ratione velocitatis transversæ corporis p, ad velocitatem transversam corporis alterius P. His positis manifestum est corpora P & p, de locis P, & p, simul egressa, eodem temporis puncto reperiri in locis K, & m.

DE MOTU CORPORUM.

pleto illo tempore (d) reverâ reperietur in $n$; (e) ideoque vi majore urgetur quam corpus $P$, si modo angulus $nCp$ angulo $kCp$ major est, id est si orbis $v\,p\,k$ vel movetur in con-




sequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus quâ linea $CP$ in consequentia fertur; & vi minore si orbis tardius movetur in antecedentia. Estque virium diffe-

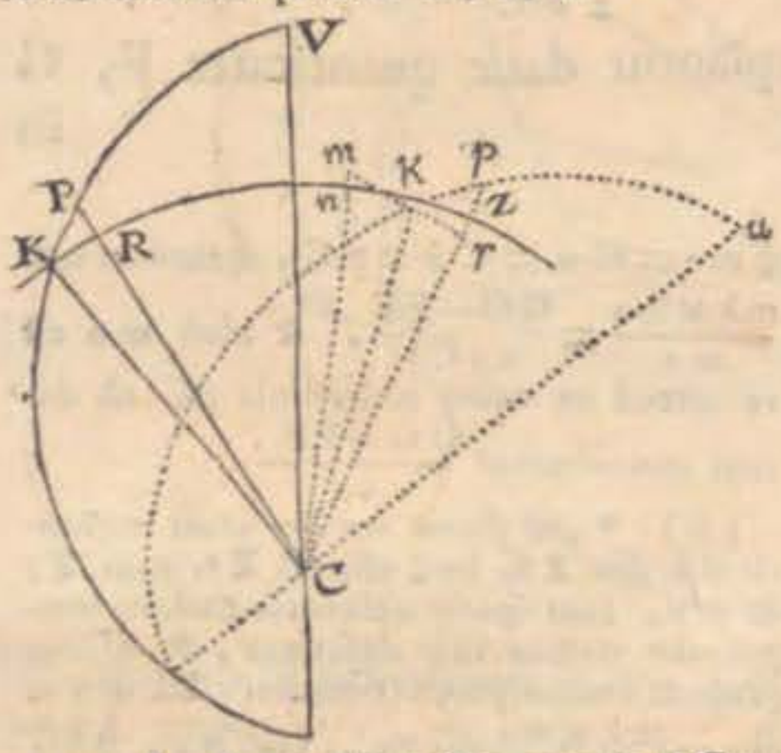
(d) * *Reverà reperitur in punctò n.* Est enim angulus $pCk = PCK$ (per hyp.) & si fuerit n locus corporis p, erit (per prop. 43.) angulus $pCn$, ad angulum $PCk$, ut angulus $VCp$, ad angulum $VCP$, & puncta C, n, m, jacent in unâ rectâ. Nascentibus enim angulis $pCn$, $PCK$, perpendicula rm, RK, sunt ut arcus circulares nascentes radiis æqualibus CR, Cr descripti, seu ut anguli $mCr$, $KCR$, (per Lem. 7.) Est ergò angulus $mCp$, ad angulum $KCP$, seu $kCp$, ut mr, ad KR, seu kr, hoc est, ut angulus $VCp$, ad angulum $VCP$, sive, ut angulus $pCn$, ad angulum $kCp$, (per constr.) quare angulus $mCp = pCn$, & hinc puncta C, n, m, jacent in unâ rectâ.

(e) 444. *Ideoque vi majore urgetur, quam corpus P, si modò angulus* $nCp$, *angulo* $kCp$ *major; vi minore*, si angulus $mCp$, angulo $kCp$ minor; & vi æquali, si angulus $mCp$, angulo $kCp$ æqualis. Nam in 1°. casu linea Cm, major est quam Cn, & punctum m extrà peripheriam

differentia ut locorum intervallum $mn$, per quod corpus illud $p$ ipsius actione, dato illo temporis spatio, transferri debet. Centro $C$ intervallo $Cn$ vel $Ck$ describi intelligatur circulus secans lineas $mr$, $mn$ productas in $s$ & $t$, & (f) erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, ideoque $mn$ æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. (g) Cum autem triangula $pCk$, $pCn$ dato tempore

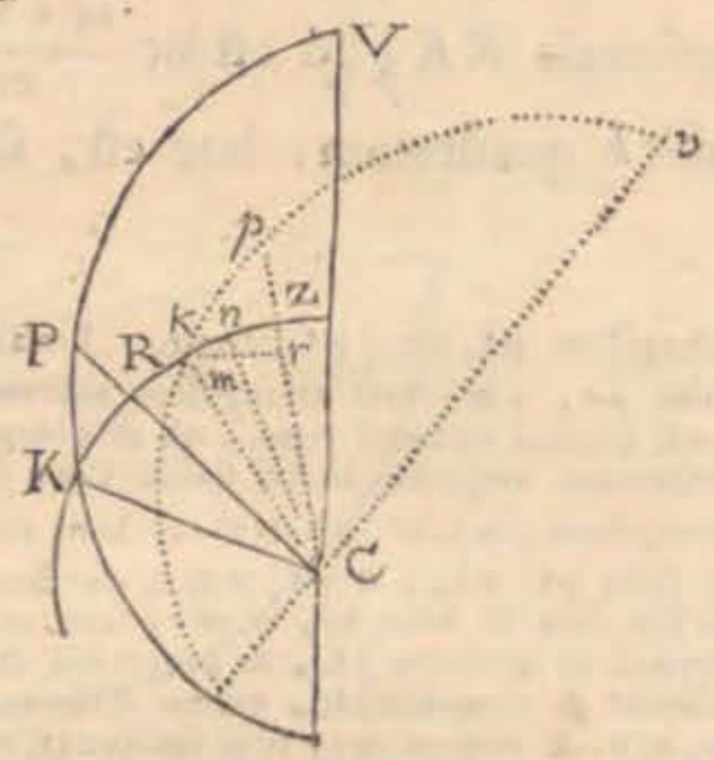
den-

riam circuli radio $Ck$, vel $Cn$, descripti cadit, adeóque præter vim quâ corpus utrumque ad centrum urgetur, requiritur vis altera quâ corpus P, adhuc describat $mn$. In 2° casu $Cm$, minor est quam $Cn$, puncto $m$, cadente inter puncta $k$, & $r$, in lineâ $kr$. In 3°. casu $Cm = Cn$, coincidentibus punctis $m$, $n$, $k$.




445. Porrò angulus $mCp$, angulo $kCp$, seu $kCP$ major est, si orbis $vpk$, vel movetur in consequentia (ut patet) vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus quâ linea CP in consequentia fertur. Nam in hoc casu angulus $vCV$, est plusquam duplo major angulo $VCp$, seu $uCp$, adeóque angulus $VCp$, major angulo VCP, seu $vCp$, & hinc angulus $pCm$, major angulo $pCk$, cum sit angulus $pCm$, ad angulum $pCk$, ut $VCp$, ad VCP.

446. Si orbis $upk$, movetur in antecedentia cum celeritate duplâ ejus quâ linea CP, in consequentia fertur, erit angulus $VCp = VCP$; cumque sit etiam $Cp = CP$, corpus p describet orbem immotum V p, similem & æqualem orbi VPK. In hoc casu corpus p, non fertur ab V, versùs p, sed in partem oppositam ut patet.




447. Si orbis $vpk$ movetur in antecedentia minori celeritate quam sit dupla ejus quâ linea CP in consequentia fertur, erit angulus $mCp$, angulo $kCp$ minor. In hoc enim casu angulus $VCv$ minor est duplo angulo VCP, vel $vCp$, adeóque angulus $VCp$, minor angulo VCP, vel $vCp$, & hinc angulus $mCp$, minor angulo $kCp$ (per constr.)

(f) * *Erit rectangulum* $mn \times mt = rectangulo\ mk \times ms$. Per prop. 35. vel 36. lib. 3. Elem.

(g) *Cum autem triangula* $pCk$, sive $PCK$, *&* $pCn$, *dato tempore describantur* (per hyp.) *dantur magnitudine* (per prop. 1.) Porrò triangulum $PCK = \frac{1}{2} PC \times KR$, &

DE MOTU CORPORUM.

dentur magnitudine, sunt $kr$ & $mr$, earumque differentia $mk$ & summa $ms$ reciprocè ut altitudo $pC$, ideoque rectangulum $mk \times ms$ est reciprocè ut quadratum altitudinis $pC$. Est & $mt$ directè ut $\frac{1}{2}mt$, id est, ut altitudo $pC$. Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id est lineola nascens $mn$, eique proportionalis virium differentia reciprocè ut cubus altitudinis $pC$. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc differentia virium in locis $P$ & $p$, vel $K$ & $k$, est ad vim quâ corpus motu circulari revolvi possit ab $R$ ad $K$ eodem tempore quo corpus $P$ in orbe immobili describit arcum $PK$, ut lineola nascens $mn$ ad (h) sinum versum arcus nascentis $RK$, id est ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad $rk$ quadratum; hoc est, si capiantur datæ quantitates F, G in

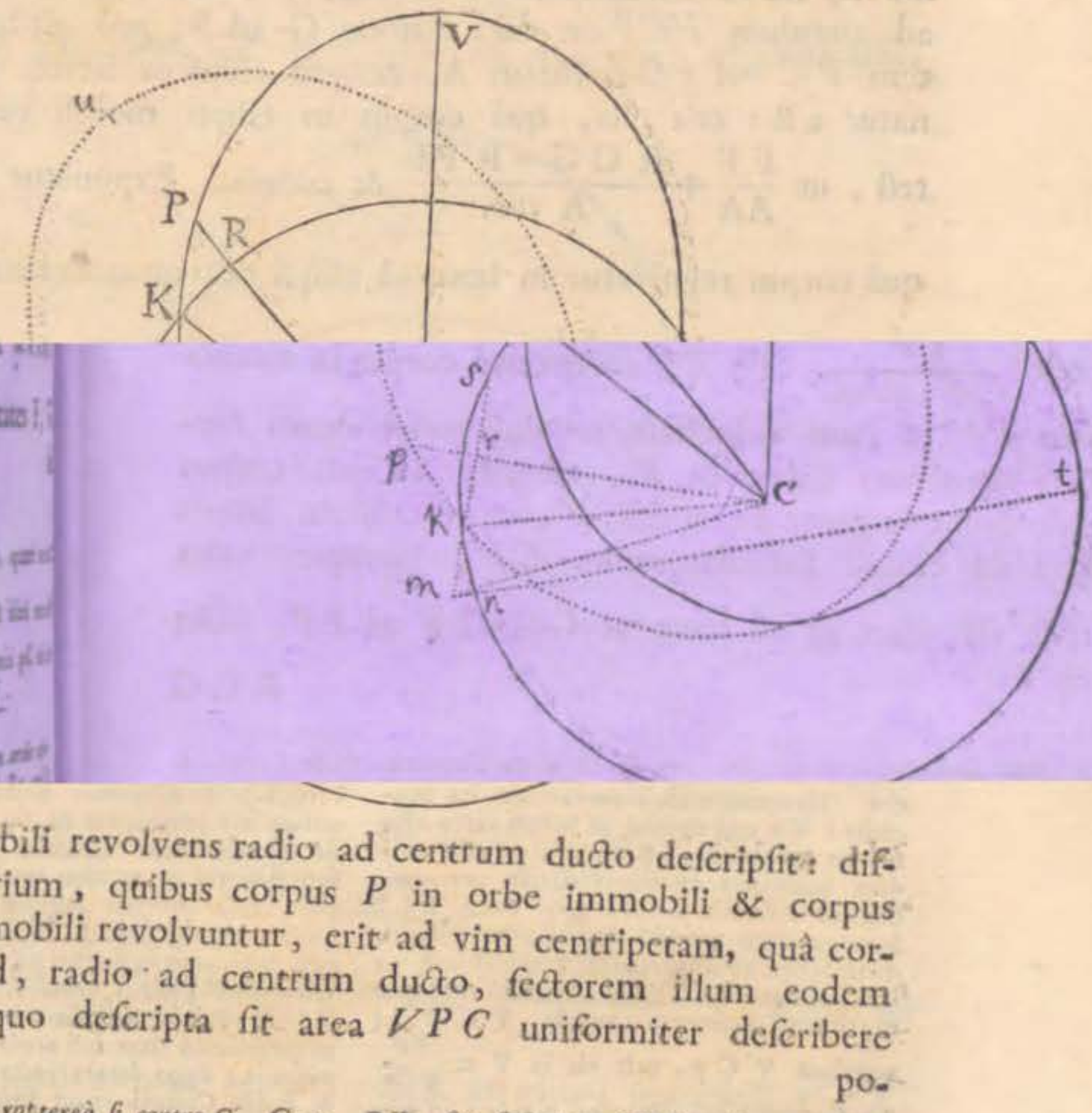
triangulum $pCn = \frac{1}{2}pC \times mr$. Junctis enim $pn$, $pm$, erit triangulum nascens $pnC$ æquale nascenti $pmC$, ob $mn$ evanescentem respectu lineæ finitæ $Cn$, & triangulum $pmC = \frac{1}{2}pC \times mr$. Sunt ergò facta $pC \times kr$, & $pC \times mr$, constantia seu data & hinc $kr$, & $mr$, sunt reciprocè ut altitudo $pC$, & propterea dividendo & componendo, earum differentia; $mk$, & summa $ms$, sunt reciprocè ut eadem altitudo $pC$. Quod ut clariùs intelligatur, supponamus esse $kr = \frac{F}{pC}$, $mr = \frac{G}{pC}$, & F & G esse quantitates datas, erit $mr - kr = mk = \frac{G-F}{pC}$, $mr + kr = ms = \frac{G+F}{pC}$, hoc est, ob quantitates F, G, $G-F$, $G+F$, datas, erunt $kr$, $mr$, $mk$, $ms$, ut $\frac{1}{pC}$. Hinc rectangulum $mk \times ms$, $= \frac{GG-FF}{pC^2}$, est reciprocè ut quadratum altitudinis $PC$; Est & $mt$, directè ut $\frac{1}{2}mt = Cn = Ck = pC$, quarè $mn = \frac{mk \times ms}{mt} = \frac{GG-FF}{2pC^3}$, & ideò $mn$ est reciprocè ut cubus altitudinis $pC$ ob datam quantitatem $\frac{GG-FF}{2}$.

(h) * *Ad sinum versum arcûs nascentis Rk*, seu $Zk$, hoc est, ad $Zr$, nam $Zr$ & $mn$, sunt spatia nascentia eodem tempusculo viribus illis descripta, & iisdem proindè viribus proportionalia. Est autem $mn = \frac{mk \times ms}{mt}$ (ex Dem.) & $Zr = \frac{kr^2}{2kC}$. Nam, ex naturâ circuli $Zr : kr = kr : KC + rC$, hoc est, quia $rC$ usurpari potest pro $ZC$, & quia $ZC = kC$, $Zr : kr = kr : 2kC$, & $Zr = \frac{kr^2}{2kC}$; undè $mn : Zr = mk \times ms : kr^2$, ob $mt = 2kC$. Si verò capiantur duæ quantitates G, F, in eâ ratione ad invicem quam habet angulus $VCp$, ad angulum $VCP$, seu quam habet $mr$, ad $kr$, erit $mk \times ms : kr^2 = GG-FF : FF$; ut ex suprà demonstratis liquet, ergò $mn : Zr = GG-FF : FF$.

* El-

in eâ ratione ad invicem quam habet angulus $VCP$ ad angulum $VCp$, ut GG−FF ad FF. Et (i) propterea, si centro $C$ intervallo quovis $CP$ vel $Cp$ describatur sector circularis æqualis areæ toti $VPC$, quam corpus $P$ tempore quovis in






orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus $P$ in orbe immobili & corpus $p$ in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, quâ corpus aliquod, radio ad centrum ducto, sectorem illum eodem tempore, quo descripta sit area $VPC$ uniformiter describere po-

(i) * *Et propterea si centro C.* Corpus P, in orbitâ V P K revolvens dato tempore datum sectorem P C K, radio ad centrum C ducto describit (per prop. 1.) & corpus in circulo radio C K descripto uniformiter revolvens, & arcum R K, seu sectorem C R K = C P K, describens eodem tempore quo corpus P describit arcum P K, seu sectorem C P K, dato tempore datum quoque sectorem describit. Quare corpus P, in orbitâ V P K, & corpus in circulo prædicto revolventia, radiis ad centrum C ductis, sectores æquales temporibus æqualibus describunt. *Et propterea si centro C, intervallo CP, vel Cp, describatur &c.*

DE MOTU CORPORUM.

potuiſſet, ut GG−FF ad FF. Namque ſector ille & area $pCk$ ſunt ad invicem ut tempora quibus deſcribuntur.

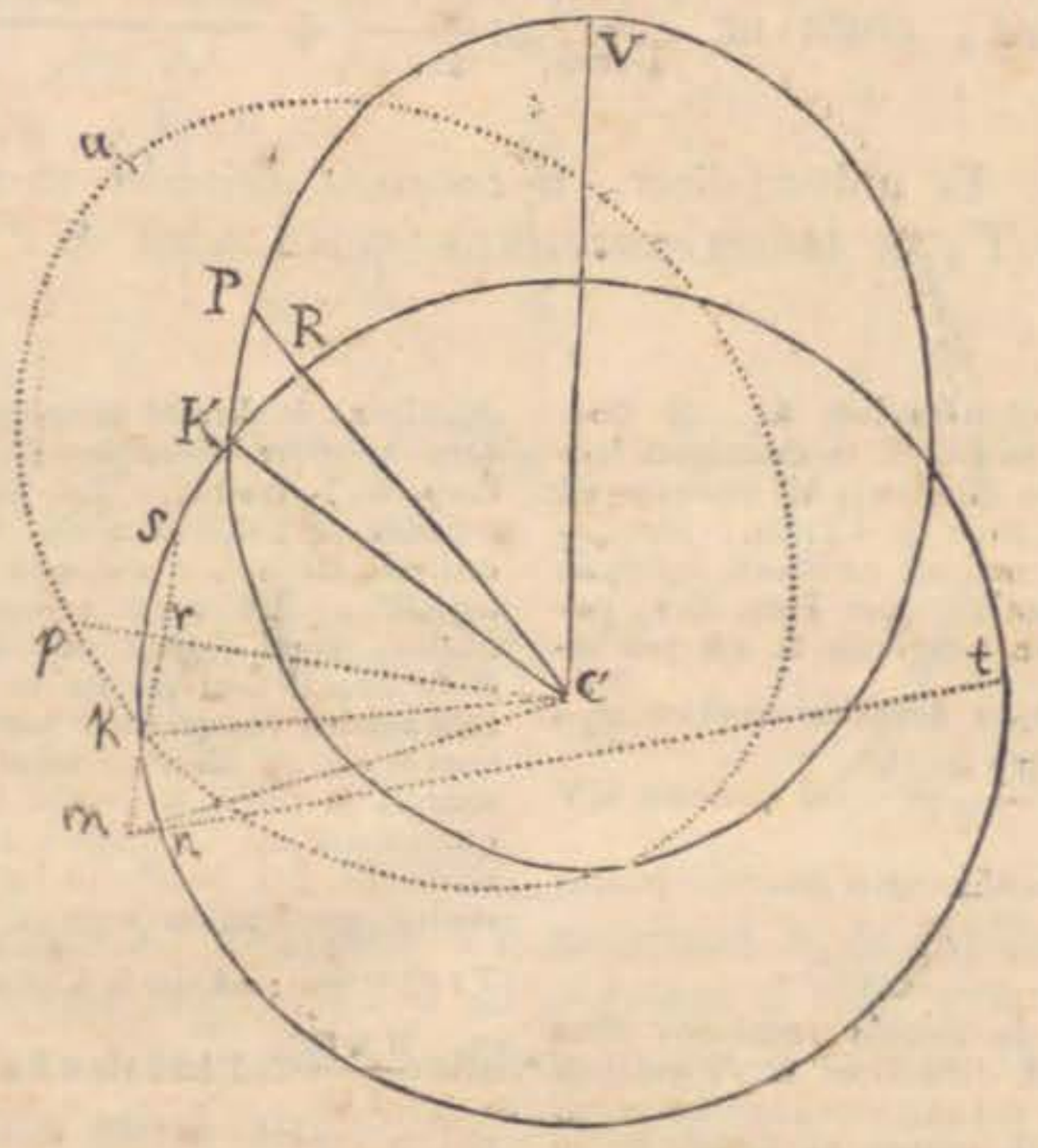
*Corol.* 2. Si orbis $VPK$ ellipſis ſit umbilicum habens $C$ & apſidem ſummam $V$; eique ſimilis & æqualis ponatur ellipſis $upk$, ita ut ſit ſemper $pC$ æqualis $PC$ & angulus $VCp$ ſit ad angulum $VCP$ in datâ ratione G ad F; pro altitudine autem $PC$ vel $pC$ ſcribatur A, & pro ellipſeos latere recto ponatur 2R: erit vis, quâ corpus in ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$ & contra. Exponatur enim vis quâ corpus revolvatur in immotâ ellipſi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in $V$ erit $\frac{FF}{CV\ quad.}$. (k) Vis autem quâ corpus in circulo ad diſtantiam $CV$ eâ cum velocitate revolvi poſſet quam corpus in ellipſi revolvens habet in $V$, eſt ad vim quâ corpus in ellipſi revolvens urgetur in apſide $V$, ut dimidium lateris recti ellipſeos ad circuli ſemidiametrum $CV$, ideoque valet $\frac{RFF}{CV\ cub.}$: & vis, quæ ſit ad hanc ut GG−FF ad FF, valet

RGG

(k) * *Vis autem quâ corpus in circulo &c.* Demonſtratio Newtoniana ita procedit: Vis quâ corpus in Ellipſi circa ejus focum revolvitur, eſt ſemper æqualis cuidam quantitati conſtanti diviſæ per quadratum diſtantiæ à foco (per Prop. XI.) Sumatur ergo pro illâ quantitate conſtanti, quadratum $FF$ cujus latus F eſt primâ ex illis indeterminatis (ſed conſtantibus) quæ exprimunt rationem anguli VCP ad angulum VCp, erit vis in $V = \frac{FF}{VC^2}$.

Sit Corpus circâ centrum quodvis in circulo revolvens, ad diſtantiam CV, eâdem velocitate quâ Corpus in ellipſi revolvens urgetur in apſide V, ſumantur in Circulo & in Ellipſi arcus quamminimi eodem tempore deſcripti, illi arcus erunt inter ſe æquales, ob æquales velocitates (ex Hypoth.) & eorum ſagittæ erunt inter ſe ut vires Centrales (per Corol. 4. Prop. I.): in ellipſibus autem omnibus in quibus vis centripeta ad focum tendit (& iis annumeratur Circulus) latera recta ſunt inverſè ut arcuum quamminimo tempore deſcriptorum ſagittæ & directè ut quadrata perpendiculi ducti ab extremitate eorum arcuum in lineam ad Centrum virium tendentem (per Corol. 2. Prop. XIII.) ſed in apſide Ellipſeos & Circulo, illa perpendicula ſunt ipſi arcûs, ideoque ſunt æqualia; Ergo latera recta hujus Ellipſis & hujus Circuli erunt inverſè ut ſagittæ arcuum ſive inverſè ut vires Centrales; Latus rectum circuli eſt ipſa diameter, ergo ſumendo dimidium utriuſque Lateris recti eſt *vis quâ Corpus in Ellipſi revolvens urgetur* &c. Reliqua demonſtratio eſt plana.

$\frac{RGG-RFF}{CV\ cub.}$: eſtque hæc vis (per hujus corol. 1.) differen- LIBER PRIMUS. PROP. XLIV. THEOR. XIV.
tia virium in $V$ quibus corpus $P$ in ellipſi immotâ $VPK$, & corpus $p$ in ellipſi mobili $upk$ revolvuntur. Unde cum (per hanc prop.) differentia illa in aliâ quâvis altitudine A ſit ad ſeipſam in altitudine $CV$ ut $\frac{1}{A\ cub.}$ ad $\frac{1}{CV\ cub.}$, eadem diffe-




rentiâ in omni altitudine A valebit $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$, quâ corpus revolvi poteſt in ellipſi immobili $VPK$, addatur exceſſus $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$; & componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$ quâ corpus in ellipſi mobili $upk$ iiſdem temporibus revolvi poſſit.

Co-

DE MOTU CORPORUM.

*Corol.* 3. (1) Ad eundem modum colligetur quod, si orbis immobilis *V P K* ellipsis sit centrum habens in virium centro *C*; eique similis, æqualis & concentrica ponatur ellipsis mobilis *u p k*; sitque 2 R ellipseos hujus latus rectum principale, & 2 T latus transversum sive axis major; atque angulus *VCp* semper sit ad angulum *VCP* ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\,cub.}$ & $\frac{FFA}{T\,cub.} + \frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$ respectivè.

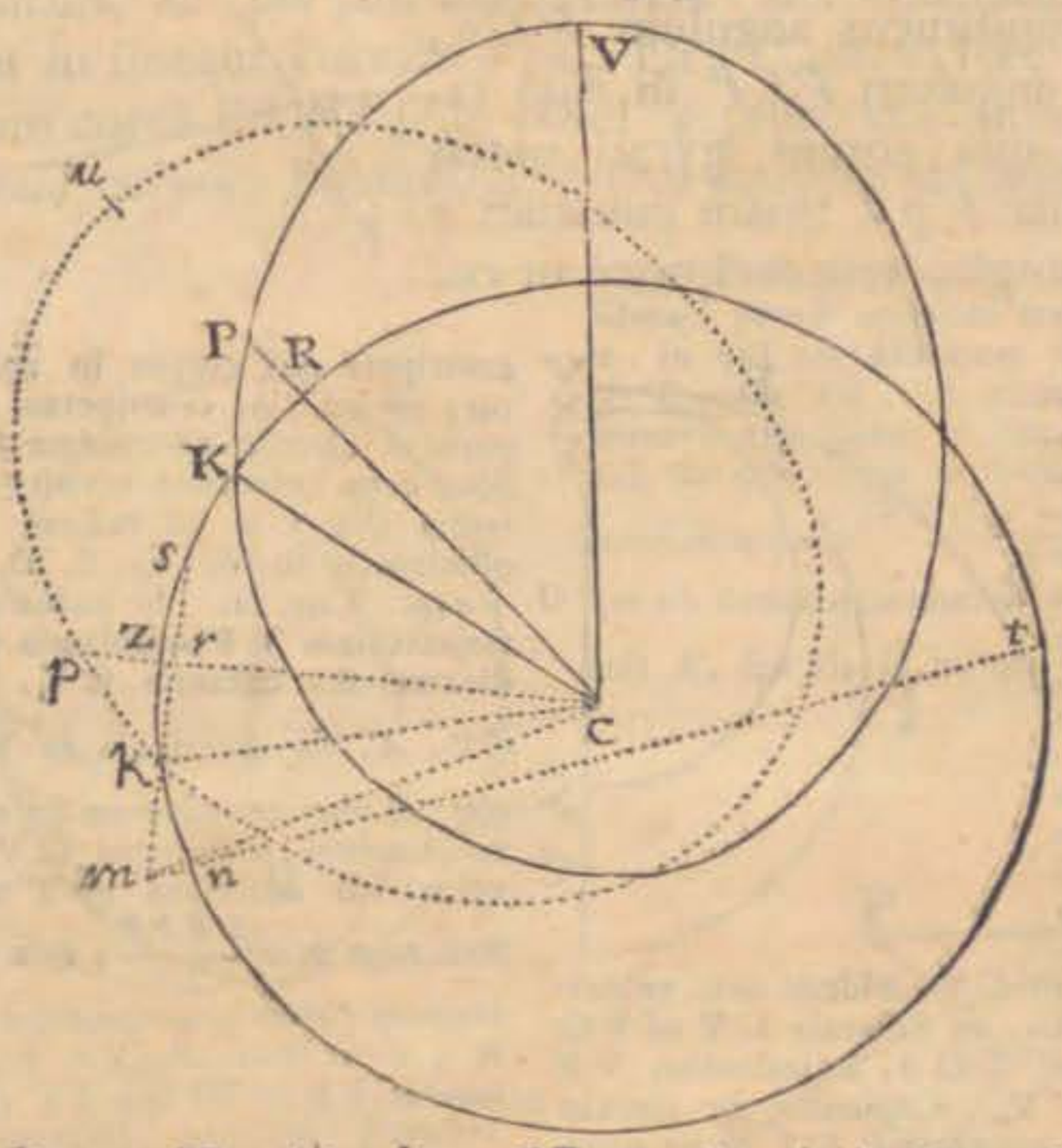
*Corol.* 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima *CV* nominetur T, & radius curvaturæ quam orbis *V P K* habet in

(1) *Ad eundem modum* &c. Si Corpus revolvatur in Ellipsi vi centripetâ tendente ad focum Ellipseos, vis centralis est directè ut distantia à Centro; ideoque erit æqualis quantitati constanti multiplicatæ per distantiam (per Prop. X.), posito 2*T* pro axe transverso & 2*R* pro latere recto, sit ea quantitas constans $\frac{FF}{T^3}$, vis in V erit $\frac{FF \times CV}{T^3}$ vel quoniam CV =*T*, erit $\frac{FF}{TT}$ in aliis verò omnibus punctis erit $\frac{FF \times A}{T^3}$.

Sit Corpus in circulo revolvens circa centrum C ad distantiam CV, quâlibet vi centripetâ, sed tali ut eâdem velocitate feratur quâ corpus in Ellipsi latum urgetur in extremitate axis transversi, sumantur in eo Circulo & in extremitate axis transversi Ellipseos arcus quamminimi eodem tempore descripti illi arcus erunt æquales, ob æquales velocitates, & eorum sagittæ erunt ut vires Centrales quibus corpora in circulo & Ellipsi retinentur (per Cor. 4. Prop. I.); in Ellipsibus autem diversis (& iis annumeratur Circulus) in quibus vis centripeta ad centrum tendit, in distantiis æqualibus à Centro, dupla quadrata facti axium sunt inversè ut sagittæ quam minimo tempore descriptæ, & directè ut quadrata arearum dato tempore descriptarum (per constr. Prop. X.), cum ergo hic sumantur arcus æquales & perpendiculares in lineam ad centrum ductam, & distantiæ à centro sint æquales, illæ areæ utrinque sunt æquales, ergo sagittæ arcuum in Ellipsi & in circulo sunt inverse ut ipsa quadrata facti axium, seu quia axis transversus Ellipseos & circuli diameter idem sunt, sagittæ arcuum in Ellipsi & circulo sunt inverse ut quadratum axis conjugati ad quadratum transversi, sive inverse ut Latus rectum ad Axem transversum ergo 2*T*:2*R* (sive *T*:*R*) = $\frac{FF}{TT}$: ad vim in Circulo quæ itaque erit $\frac{R \times FF}{T^3}$ sed hæc vis est ad differentiam virium in orbe mobili & immobili, ut *FF* ad GG−FF, ergo illa differentia est $\frac{RGG-RFF}{T^3}$, hæc autem differentia in V, est ad differentiam in alio quovis loco inversè ut cubi altitudinum ergo $A^3 : CV^3$ (sive $T^3$) = $\frac{RGG-RFF}{T^3} : \frac{RGG-RFF}{A^3}$, cum ergo Vis in Orbe immobili sit ut $\frac{FFA}{T^3}$ in orbe mobili erit $\frac{FFA}{T^3} + \frac{RGG-RFF}{A^3}$. Q. E. D.

* Et

in $V$, id est radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta, quâ corpus in trajectoriâ quâcunque immobili $VPK$ revolvi potest in loco $V$ dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis $P$ LIBER PRIMUS. PROP. XLIV. THEOR. XIV.



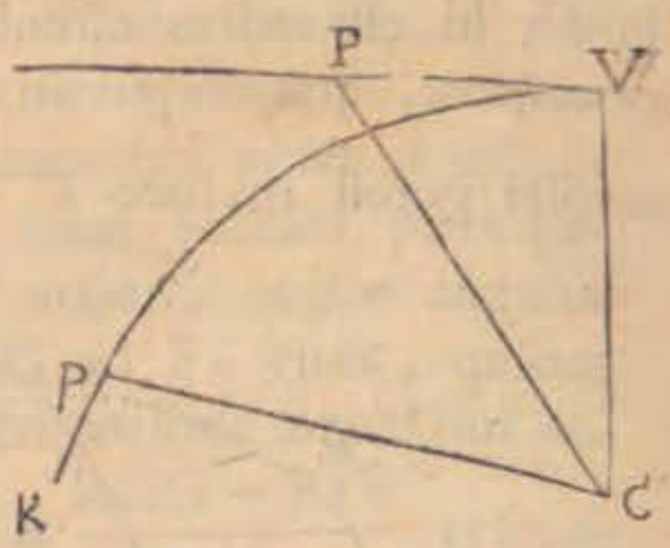

indefinitè dicatur X, altitudine $CP$ nominatâ A, & capiatur G ad F in datâ ratione anguli $VCp$ ad angulum $VCP$: erit (m) vis centripeta, quâ corpus idem eosdem motus in eâdem trajectoriâ $upk$ circulariter motâ temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium $X + \frac{VRGG - VRFF}{A\ cub.}$.

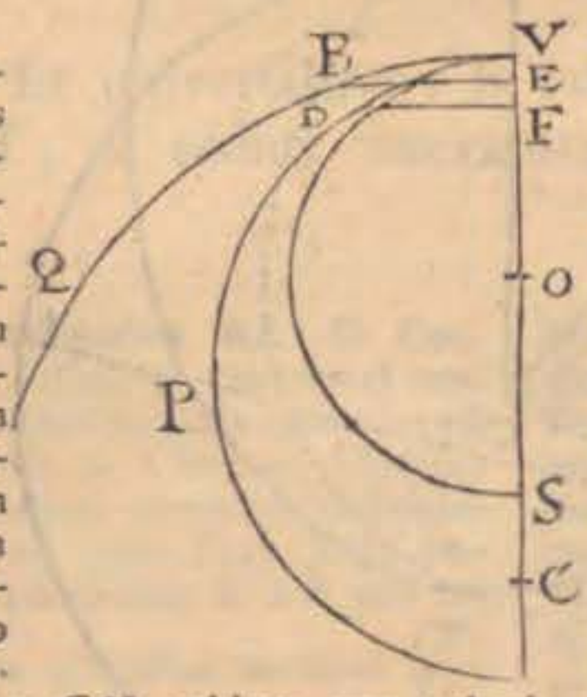
*Corol.* 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione datâ, & inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

(m) * *Erit vis centripeta*, ut hæc commodè demonstrentur adhibendum Lemma sequens.

DE MOTU CORPORUM.

*Corol.* 6. Igitur si ad rectam *CV* positione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipsi æqualis agatur *Cp*, constituens angulum *VCp*, qui sit ad angulum *VCP* in datâ ratione; vis quâ corpus gyrari potest in curva illa *V p k* quam punctum *p* perpetuò tangit, erit reciprocè ut cu-



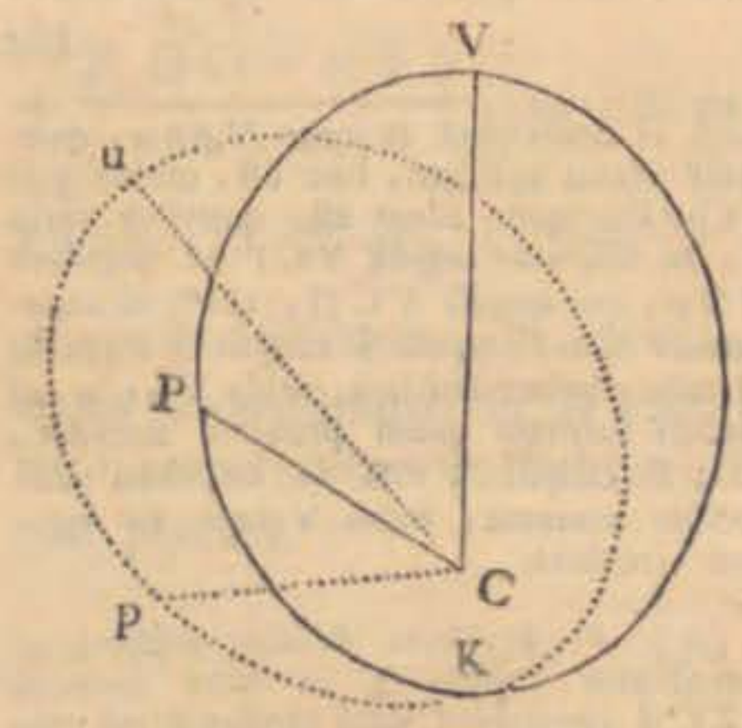

448. Lemma. Si corpus ad centrum virium C tendens describat trajectoriam immotam VP, vis centripeta quâ in apside V urgetur est ad vim centripetam corporis alterius in circulo VBQ, ad eandem distantiam CV, eâdem cum velocitate revolventis, ut distantia CV ad VO radium circuli VDS, trajectoriam VP osculantis in V. Capiantur in circulo VBQ & in trajectoriâ VP arcus quam minimi & æquales VB, VD, & ex punctis B & D ad rectam CV demissa intelligantur perpendicula BE, DF; arcus evanescentes VB, VD eodem tempore à corporibus duobus percurrentur, ob utriusque corporis velocitatem æqualem, eruntque perpendicula BE, DF æqualia (per Lem. VII). Quoniam autem arcus evanescens VD usurpari potest pro arcu circuli curvam VP osculantis in V, erit ex naturâ circuli $VF:DF=DF:VO+FO$, seu $2VO$, adeoque $DF^2=2VO\times VF$, & similiter $BE^2=2VC\times VE=2VO\times VF$; unde $VF:VE=VC:VO$; sed vis centripeta corporis arcum VD describentis, est ad vim centripetam alterius corporis arcum VB describentis ut VF ad VE, quæ sunt spatia viribus illis urgentibus eodem tempusculo descripta, quare vis centripeta quâ corpus in apside V urgetur, est ad vim centripetam alterius corporis in circulo ad eandem distantiam eâdem cum velocitate revolventis, ut distantia illa CV ad radium VO circuli osculatoris in V. Q. E. D.

449. Cor. 1. Si radius VO circuli trajectoriam VP osculantis in apside V dicatur *R*, distantia CV, *T*, distantia CP, *A*, vis centripeta in V, $\frac{VFF}{TT}$, hæc erit ad vim centripetam in circulo VQ, ad eandem distantiam CV eâdem cum velocitate descripto ut *T* ad *R*, (448) hæc ergo erit $\frac{VRFF}{T^3}$, quæ erit ad differentiam virium centripetarum in apsidibus V & u, orbis immobilis VP, & orbis mobilis up, ut FF ad GG−FF (per Cor. I. Newt.) ideoque differentia illa erit $\frac{VRGG-VRFF}{T^3}$ quæ erit ad differentiam in aliis locis P ut $A^3$ ad $T^3$, ideoque in quibusvis locis erit differentia virium in orbe mobili & immobili $\frac{VRGG-VRFF}{A^3}$. Quod aliâ ratione demonstravit Hermannus prop. 25. Lib. 1. Phoronomiæ.

450. Coroll. 2. Hinc si vis centripeta in quovis puncto P, orbitæ immobilis VP, dicatur *X*, vis in puncto æquè alto p, orbitæ mobilis up erit $=X+\frac{VRGG-VRFF}{A^3}$ Q. E. D.

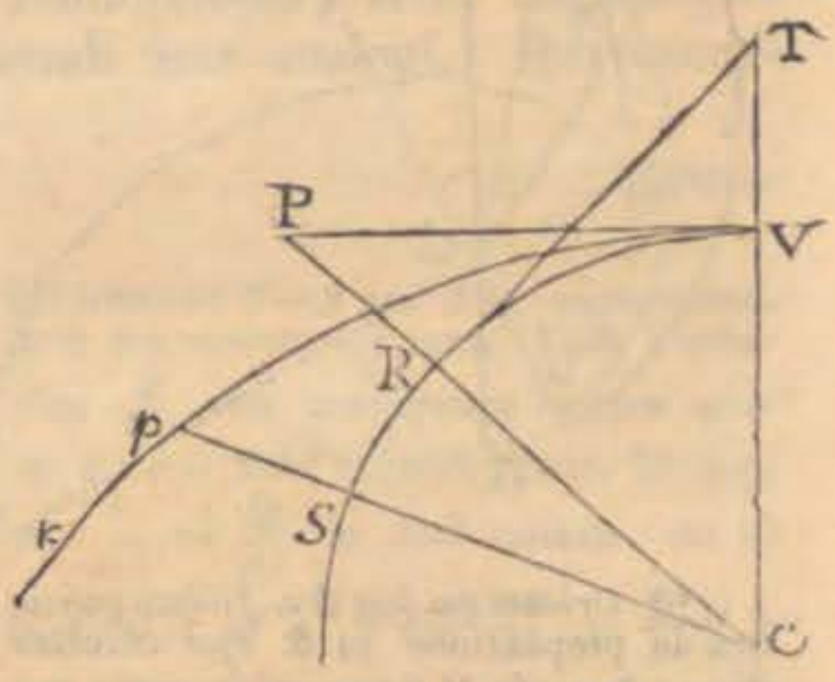
451. Cor. 3. Si orbitæ VP & up sint ellipses quarum umbilicus communis C, erit (240) radius osculi *R* æqualis dimidio lateri recto ellipseos VP, vel up: & (per prop.

bus altitudinis $Cp$. Nam (n) corpus $P$ per vim inertiæ, nullâ aliâ vi urgente, uniformiter progredi poteſt in rectâ $VP$. Addatur vis in centrum $C$, cubo altitudinis $CP$ vel $Cp$, reciprocè proportionalis, & (per jam demonſtrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam $Vpk$. Eſt (o) autem hæc curva $Vpk$ eadem cum curvâ illâ $VPQ$ in corol 3. prop. XLI. inventâ, in quâ ibi diximus corpora hujuſmodi viribus attracta obliquè aſcendere.




prop. XI) $X:\frac{VFF}{TT}=TT:AA$, adeoque $X=\frac{VFF}{AA}$, Ergo (450) vis in Orbitâ mobili erit $\frac{VFF}{AA}+\frac{VRGG-VRFF}{A^3}$, & diviſis omnibus terminis per $V$ ut $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A^3}$; & ſi vis centralis ad centrum Ellipſeos dirigatur erit $X:\frac{VFF}{TT}=A:T$ & $X=\frac{VFF\times A}{T^3}$ & vis in Orbita mobili erit $\frac{VFF\times A}{T^3}+\frac{VRGG-VRFF}{A^3}$ & diviſis terminis per $V$ erit $\frac{FF\times A}{T^3}+\frac{RGG-RFF}{A^3}$; ſicut in Cor. 3. & 4. Newt. inventum fuerat.

(n) * *Nam corpus P.* Linea VP conſiderari poteſt tanquam trajectoria immota, in quâ vis centripeta $X$ in loco quovis P nulla eſt, & radius oſculi $R$ infinitus; erit igitur in hoc caſu (per cor. 4.) vis centripeta in loco p, trajectoriæ mobilis, æqualis $\frac{VRGG-VRFF}{A^3}$, adeóque ob datam quantitatem $VRGG-VRFF$ erit $X$, ſeu vis in p, ut $\frac{1}{A^3}$.



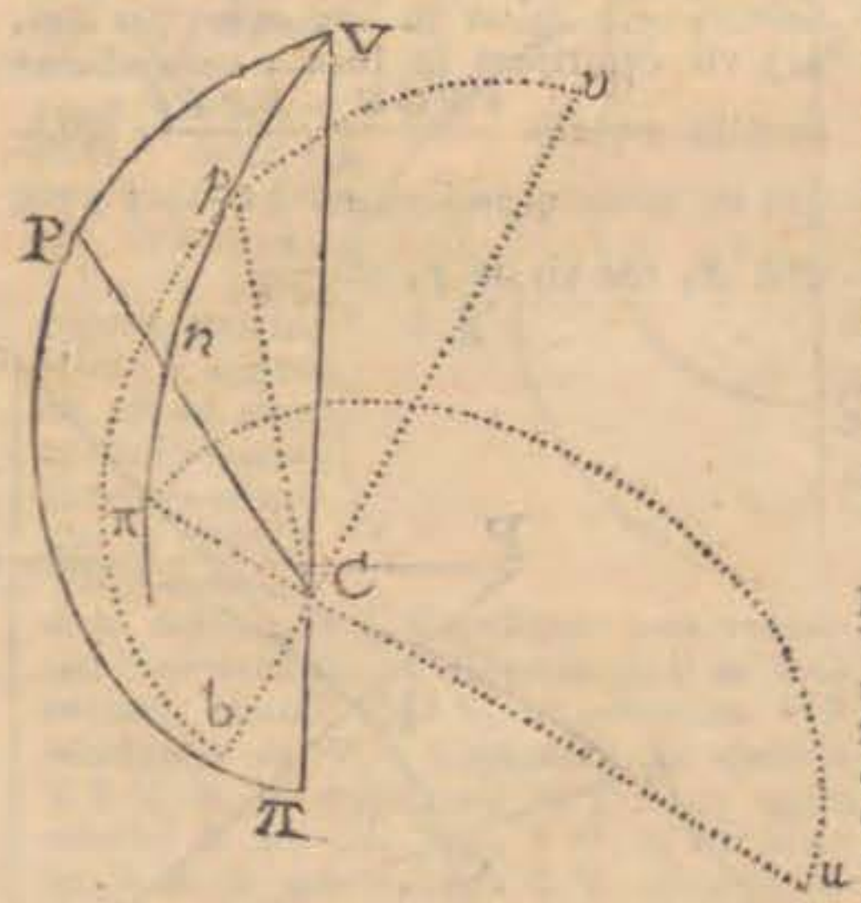

(o) * *Eſt autem hæc curva Vpk eadem &c.* Nam ſi centro C intervallo CV deſcribatur circulus VRS quem recta CP ſecat in R, recta Cp, in S, ſitque angulus SCV ad angulum RCV in datâ ratione, erit quoque ſector SVC ad ſectorem RVC in datâ illâ ratione, & ductâ per punctum R tangente RT, quæ radio CV producto occurrat in T, ejuſdem anguli RCV ſecantes CP, CT erunt æquales, atque adeò curva Vpk, eadem cum curvâ VPQ, in coroll. 3°. prop. 41. inventâ, in quâ *recta Cp eſt ſemper æqualis abſciſſæ CT, & angulus VCp eſt ſemper ſectori VCR proportionali.*

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

(P) *Orbium qui ſunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apſidum.*

(q) Problema ſolvitur arithmeticè faciendo ut orbis, quem corpus in ellipſi mobili (ut in propoſitionis ſuperioris corol. 2. vel 3.) revolvens deſcribit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apſides requiruntur, & quærendo apſides orbis



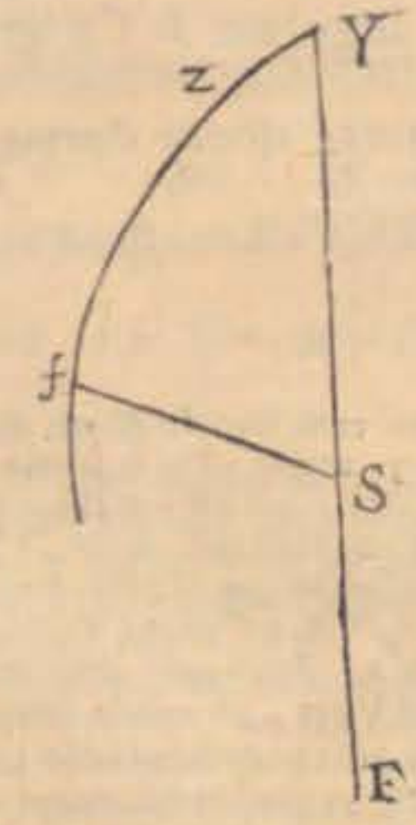

datâ vi centripetâ in orbe V p n π, quæritur motus apſidum, hoc eſt, motus axis u c b, ſeu quod idem eſt, quæritur ratio F, ad G, vel anguli V C P ad angulum V C p, aut anguli V C Π, 180°. ad angulum V C π; quod ſi ellipſis V P Π, fit circulo maximè finitima, orbis V p n π ad circuli formam quam proximè accedet, nam ſi ellipſis V P Π, in circulum perfectum mutetur, orbis V p n π fit quoque circulus.

(p) * *Orbium qui ſunt &c.* Iiſdem poſitis quæ in propoſitione 44 & ejus corollariis 1. & 2. ſit V p n π orbis quem corpus p in ellipſi mobili u p b revolvens deſcribit in plano immobili, & V Π, v b, ellipſeon immobilis & mobilis axes tranſverſi, manifeſtum eſt punctum V eſſe apſidem ſummam tam in ellipſi immotâ V P Π, quam in orbe V p n π, & eſſe π apſidem imam in orbe V p n π ſi fuerit C π = C b = C Π, in quâ hypotheſi corpus p pervenit ad locum π, ubi corpus P, in ellipſi immotâ pervenit ad apſidem imam Π & in ellipſi revolvente corpus p pervenit ad b, ac in orbe V p n π, puncta p, b, π, coincidunt. Jam verò

(q) * *Problema ſolvitur arithmeticè.* Revolvatur corpus Y in orbe immoto Y Z f vi centripetâ datâ tendente ad centrum S, ſitque punctum Y apſis ſumma, f apſis ima in illo orbe. Umbilico S, & axe tranſverſo Y S F = Y S + S f, deſcriptæ intelligantur ellipſes immobilis & mobilis, efficiendum eſt ut corpus Y orbem Y Z f deſcribens, ſimul revolvatur in hâc ellipſi mobili, dum corpus aliud ellipſim immotam deſcribit eâ ratione quam expoſuimus prop. 43. & inveniendus eſt apſidum motus. Id autem abſolvitur faciendo ut orbis V p n π (fig. ſuperiori) qui omnes orbes ut Y Z f quæcumque ſit in illis vis centripetæ lex generaliter exhibet accedat ad formam orbis Y Z f, ſive ei ſimilis & æqualis fiat, ac quærendo apſides V π, vel rationem angulorum V C P, V C p, in orbe illo V p n π. Porrò ſi ſupponamus orbem V p n π, ſimilem & æqualem factum eſſe orbi Y Z f, erit vis centripeta in ellipſi immotâ cujus umbilicus S vel C ut $\frac{FF}{AA}$, & vis centripeta in loco quovis Z, orbis Y Z f, vel

bis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum $V$ apsis summa, & scribantur T pro altitudine maximâ $CV$, A pro altitudine quâvis aliâ $CP$ vel $Cp$, & X pro altitudinum differentiâ $CV-CP$; & vis, quâ corpus in ellipsi circa umbilicum suum $C$ (ut in corol. 2.) revolvente movetur, quæque in corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$, id est ut $\frac{FFA+RGG-RFF}{A\ cub.}$, substituendo T−X pro A, erit ut $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A\ cub.}$. Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit A *cub.* & numeratores, factâ homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res exemplis patebit.

*Exem-*




vel in loco P, orbis V p π, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A^3} = \frac{FFA+RGG-RFF}{A^3} = \frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A^3} = \frac{P}{A^3}$, substituendo $T-X$ pro $A$ in numeratore, & $P$ pro numeratore toto. Unde si quantitas $\frac{Q}{A^3}$ vim centripetam in loco quovis Z orbis YZf exponat, eaque sit data, erit $\frac{P}{A^3}$ ad $\frac{Q}{A^3}$ in datâ ratione. Sit illa ratio 1 ad $B$, & erit $\frac{PB}{A^3} = \frac{Q}{A^3}$, & $PB-Q=0$. Loco $A$, in quantitate $Q$, substituatur $T-X$, & æqualitatis $PB-Q=0$, termini omnes analogi se mutuo destruere debent, hoc est, termini omnes dati seu in quibus non reperitur quantitas variabilis $X$ erunt simul nihilo æquales, & termini non dati, seu in quibus variabilis $X$ invenitur, erunt etiam simul nihilo æquales, atque inde determinabitur ratio G ad $F$ seu anguli VCP ad angulum VCp, faciendo ut sint termini dati in quantitate $P$ ad terminos non datos ejusdem quantitatis, ita termini dati in quantitate $Q$, ad terminos non datos ejusdem quantitatis. Quod exemplis patebit.

DE MOTU CORPORUM.

(r) *Exempl.* 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, ideoque ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$, sive (scribendo T−X pro A in numeratore) ut $\frac{T\ cub. - 3\,T\,T\,X + 3\,T\,X\,X - X\ cub.}{A\ cub.}$; & collatis numeratorum terminis correspondentibus; nimirum datis cum datis, & non datis cum non datis, fiet RGG−RFF+TFF ad T *cub.* ut −FFX ad −3TTX+3TXX−X *cub.* sive ut −FF ad −3TT+3TX−XX. Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut −FF ad 3TT, seu GG ad TT ut FF ad 3TT, & vicissim GG ad FF ut TT ad 3TT, id est, ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\surd 3$. Ergo cum corpus in ellipsi immobili, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiat angulum *VCP* (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipsi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiet angulum *VCp* graduum $\frac{180}{\surd 3}$: id ideo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripetâ describit, & orbis illius quem corpus in

(r) * *Exemplum* 1^um. *Ponamus vim centripetam* in orbe Y Z f *uniformem* seu constantem *esse, ideóque ut* 1, seu ut $\frac{A^3}{A^3}$, erit $Q = A^3 = T^3 - 3TTX + 3TXX - X^3$, & $PB = BRGG - BRFF + BTFF - BFFX$ atque adeò $BRGG - BRFF + BTFF - BFFX - T^3 + 3TTX - 3TXX + X^3 = 0$, & termini dati $BRGG - BRFF + BTFF - T^3 = 0$, seu $BRGG - BRFF + BTFF = T^3$, & termini non dati $-BFFX + 3TTX - 3TXX + X^3 = 0$, seu $BFF = 3TT - 3TX + X^2$, undé hæc proportio deducitur $BRGG - BRFF + BTFF : BFF = T^3 : 3TT - 3TX + X^2 = RGG - RFF + TFF : FF$. Jam cum orbis YZf, ponatur circulo quam maximè finitimus, coeat orbis cum circulo & ob factas *R* & *T* æquales, atque $X = 0$, erit $X^2 = 0$, $3TX = 0$, $RFF = TFF$, & hinc $T^3 : 3TT = RGG : FF := TGG : FF$, & $T^2 : 3T^2 = 1 : 3 = GG : FF$, adeóque $G : F = 1 : \surd 3$, hoc est, angulus VCp, est ad angulum VCP, ut 1, ad $\surd 3$. Ergò cum corpus in ellipsi immobili VPΠ, ab apside summâ V ad apsidem imam Π descendendo, conficiat angulum VCΠ grad. 180. corpus aliud in ellipsi mobili upb, atque adeò in orbe immobili V p n π, seu YZf, ab apside summâ V vel Y, ad apsidem imam π vel f, descendendo conficiet angulum VCπ, vel YSf grad. $\frac{180}{\surd 3}$.

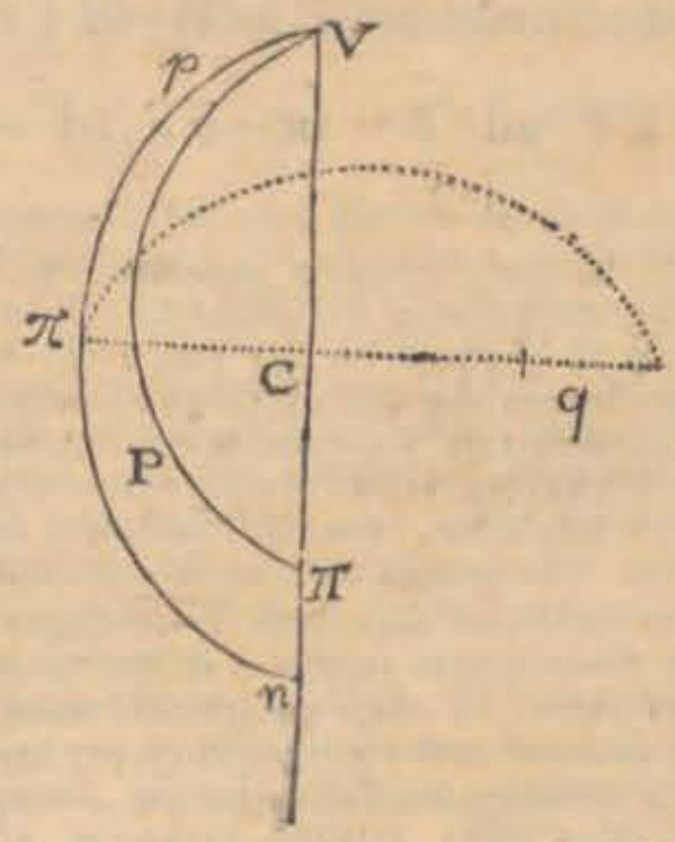
in ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbes, non universaliter sed tunc cum ad formam circularem quam maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter apsidem summam & apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103 *gr.* 55 *m.* 23 *sec.* ad centrum; perveniens ab apside summâ ad apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

*Exempl.* 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet $A^{n-3}$ seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & $n$ significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille $A^n$ seu $\overline{T-X}|^n$ in seriem indeterminatam per (f) methodum nostram serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius $RGG-RFF+TFF-FFX$, fit $RGG-RFF+TFF$ ad $T^n$ ut $-FF$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} XT^{n-2}$ &c.

(f) * *Per methodum nostram.* Vide fragmentum Epistolæ Newtoni ad Oldenburgium & theorematis ibi propositi demonstrationem requiras ex elementis algebræ clarissimorum virorum Wolfii, Abbatis de Molieres, vel ex analysi demonstratâ Patris Reyneau, aut ex aliis passim authoribus. Interim cum hic satis sit duos priores terminos dignitatis $\overline{T-X}^n$ reperire ob evanescentes terminos in quibus reperitur ipsius $X$ dignitas prima altior, facilè demonstratur ex dignitatum per continuam radicis multiplicationem formatione duos illos priores terminos esse $T^{n} - n \times XT^{n-1}$. Ut si fuerit $n=2$, duo priores termini dignitatis $\overline{T-X}^2$, erunt $T^{2-0} \times TX$; si $n=3$, erunt $T^{3-0} \times XT^2$, & ità porrò; atque hinc patet quam compendiosa sit Newtoniana methodus motum apsidum determinandi, nam præterquam quod sufficit duos dignitatum terminos invenire, possunt quoque termini æquales $RFF$, $TFF$, in formulâ $RGG-RFF+TFF-FFX$, deleri; undè tantummodò conferendus terminus datus $RGG$ cum aliis terminis datis, & terminus non datus $-FFX$ cum aliis non datis.

DE MOTU CORPORUM.

Et ſumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, ſit $RGG$ ad $T^n$ ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$, ſeu $GG$ ad $T^{n-1}$ ut $FF$ ad $nT^{n-1}$, & viciſſim $GG$ ad $FF$ ut $T^{n-1}$ ad $nT^{n-1}$ id eſt ut $1$ ad $n$; ideoque $G$ ad $F$, id eſt angulus $VCp$ ad angulum $VCP$, ut $1$ ad $\surd n$. Quare cum angulus $VCP$, in deſcenſu corporis ab apſide ſummâ ad apſidem imam in ellipſi confectus, ſit graduum $180$; conficietur angulus $VCp$, in deſcenſu corporis ab apſide ſummâ ad apſidem imam, in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centripetâ dignitati $A^{n-3}$ proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\surd n}$; & hoc angulo repetito angulus redibit ab apſide imâ ad apſidem ſummam, & ſic deinceps in infinitum. Ut ſi vis centripeta ſit ut diſtantia corporis à centro, id eſt, ut $A$ ſeu $\frac{A^4}{A^3}$, erit $n$ æqualis $4$ & $\surd n$ æqualis $2$; ideoque angulus inter apſidem ſummam & apſidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* ſeu $90$ *gr.* Completâ igitur quartâ parte revolutionis unius corpus perveniet ad apſidem imam, & completâ aliâ quartâ parte ad apſidem ſummam, & ſic deinceps per vices in infinitum. Id (t)




(t) * *Id quod etiam ex prop.* 10. *&c.* Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipſi immobili $V p \pi n$, cujus centrum eſt in centro virium C, axis tranſverſus $V n$, axis conjugatus $\pi q$, apſides ſummæ duæ $V$, $n$, imæ $\pi$, $q$; ellipſeos autem mobilis $V P \Pi$, umbilicus erit C, axis tranſverſus $V \Pi = V C + C \pi$.

* Ideo-

quod etiam ex propositione x. manifestum est. Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciprocè ut distantia, id est directè ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit $n$ æqualis 2, ideoque inter apsidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127 *gr.* 16 *m.* 45 *sec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apside summâ ad imam & ab imâ ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciprocè ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciprocè ut $A^{\frac{11}{4}}$, (u) ideoque directè ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit $n$ æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de apside summâ discedens & subinde perpetuò descendens, perveniet ad apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apsidem summam: & sic per vices in æternum.

*Exempl.* 3. Assumentes $m$ & $n$ pro quibusvis indicibus dignitatum altitudinis, & $b$, $c$ pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{bA^m+cA^n}{A\ cub.}$, id est, ut $\frac{b\text{ in }\overline{T-X}|^m+c\text{ in }\overline{T-X}|^n}{A\ cub.}$ seu (x) (per eandem methodum nostram serierum convergentium) ut $bT$

(u) * *Ideoque directè ut* $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$, *seu ut* $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, cum sit $A^3=A^{\frac{12}{4}}$, & proindè est $\frac{A^3}{A^{\frac{11}{4}}}=A^{\frac{1}{4}}$, atque ità $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}=\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$.

(x) * *Seu per eandem methodum.* Etenim dignitas $\overline{T-X}^m$, evoluta, est $T^m-mXT^{m-1}$ &c. adeóque $b\times\overline{1-X}^m=bT^m-mbXT^{m-1}$ &c. & similiter $c\times\overline{T-X}^n=cT^n-ncXT^{n-1}$ &c. undè $b\times\overline{T-X}^m+c\times\overline{T-X}^n=bT^m+cT^n-mbXT^{m-1}-ncXT^{n-1}$ &c.

De Motu Corporum.

$$\frac{b\,T^m + c\,T^n - mb\,X\,T^{m-1} - nc\,X\,T^{n-1} + \frac{mm-m}{2}\,b\,X\,X\,T^{m-2}}{A\ cub.}$$

$$+\ \frac{\frac{nn-n}{2}\,c\,X\,X\,T^{n-2}\ \&c.}{A\ cub.}$$ & collatis numeratorum terminis, fiet $R\,G\,G - R\,F\,F + T\,F\,F$ ad $b\,T^m + c\,T^n$, ut $-F\,F$ ad $-mb\,T^{m-1} - nc\,T^{n-1} + \frac{mm-m}{2}\,b\,X\,T^{m-2} + \frac{nn-n}{2}\,c\,X\,T^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit $G\,G$ ad $b\,T^{m-1} + c\,T^{n-1}$, ut $F\,F$ ad $mb\,T^{m-1} + nc\,T^{n-1}$, & vicissim $G\,G$ ad $F\,F$ ut $b\,T^{m-1} + c\,T^{n-1}$ ad $mb\,T^{m-1} + nc\,T^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam $CV$ seu T arithmeticè per unitatem, fit $G\,G$ ad $F\,F$ ut $b + c$ ad $mb + nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde est G ad F, id est angulus $VCp$ ad angulum $VCP$, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus $VCP$ inter apsidem summam & apsidem imam in ellipsi immobili sit 180 *gr.* erit angulus $VCp$ inter easdem apsides, in orbe quem corpus vi centripetâ quantitati $\frac{b\,A^m + c\,A^n}{A\ cub.}$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et (y) eodem argumento si vis centripeta sit ut $\frac{b\,A^m - c\,A^n}{A\ cub.}$, angulus

(y) * *Et eodem argumento.* Si vis centripeta sit ut $\frac{b\,A^m - c\,A^n}{A^3}$, id est ut $b \times \overline{T-X}^m - c \times \overline{T-X}^n$, seu ut $\frac{b\,T^m - c\,T^n - mb\,X\,T^{m-1} + nc\,X\,T^{n-1}}{A^3}$ &c. collatis terminis fiet $R\,G\,G$, hoc est $T\,G\,G$ ad $b\,T^m - c\,T^n$, ut $-F\,F$ ad $-mb\,T^{m-1} + nc\,T^{n-1}$, adeóque $G\,G$ ad $b\,T^{m-1} - c\,T^{n-1}$, ut $F\,F$ ad $mb\,T^{m-1} - nc\,T^{n-1}$, & ponendo $T = 1$, erit $G\,G : F\,F = b - c : mb - nc = 1 : \frac{mb-nc}{b-c}$, & $G : F = 1 : \sqrt{\frac{mb-nc}{b-c}}$.

gulus inter apſides invenietur graduum $180\surd\frac{b-c}{mb-nc}$. Nec ſecus reſolvetur problema in caſibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in ſeries convergentes denominatorem habentes A *cub.* Dein pars data numeratoris qui ex illâ operatione provenit ad ipſius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus RGG $-$RFF$+$TFF$-$FFX ad ipſius partem alteram non datam in eâdem ratione ponendæ ſunt: Et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

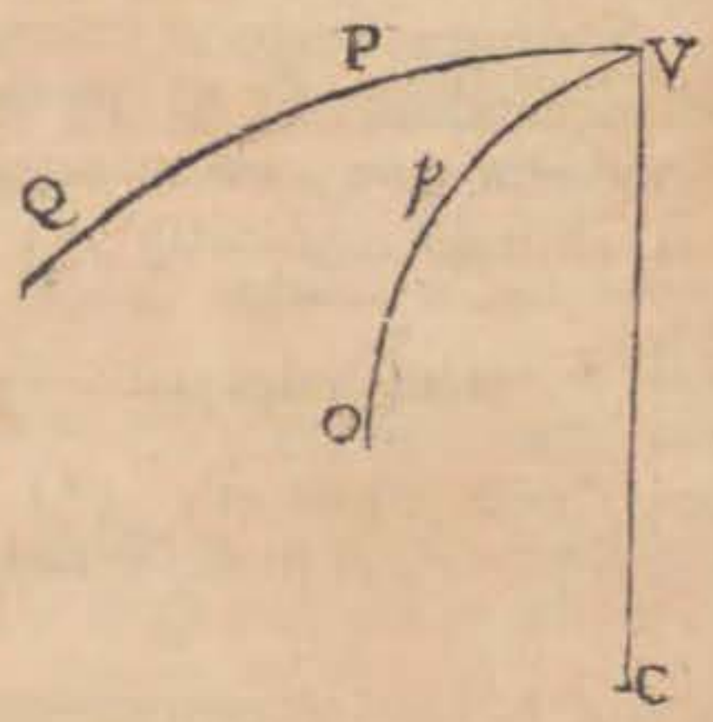
*Corol.* 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu apſidum; & contra. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad apſidem eandem, ſit ad motum angularem revolutionis unius, ſeu graduum 360, ut numerus aliquis *m* ad numerum alium *n*, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus index eſt $\frac{nn}{mm}-3$. Id (z) quod per exempla ſecunda manifeſtum eſt. (a) Unde liquet vim illam in majore quam triplicatâ altitudinis ratione, in receſſu à centro, decreſcere

(z) 452. * *Id quod per exempla ſecunda manifeſtum eſt.* Si in exemplo ſecundo loco indicis n, ad confuſionem tollendam ſcribatur p, erit vis centripeta, ut $A^{p-3}$, & angulus confectus in deſcenſu ab apſide ſummâ ad apſidem imam æqualis angulo $\frac{180^\circ}{\surd p}$, adeóque duplus ille angulus ſeu motus totus angularis quo corpus ab apſide ſummâ redit ad eandem erit $\frac{360}{\surd p}$ in exemplo ſecundo. Eſt autem in caſu corollarii hujus, motus totus angularis quo corpus redit ad apſidem eandem æqualis angulo $\frac{360\,m}{n}$, ergò $\frac{360}{\surd p}=\frac{360\,m}{n}$, & $\frac{1}{\surd p}=\frac{m}{n}$, & $\frac{1}{p}=\frac{mm}{nn}$, & $\frac{nn}{mm}=p$; quare $A^{p-3}=A^{\frac{nn}{mm}-3}$.

(a) 453. *Undè liquet vim illam.* Nam ſi vis eſſet ut $\frac{1}{A^{3+q}}$, ſeu ut $A^{-3-q}$, ſitque $+q$ quantitas poſitiva, eſſet $\frac{nn}{mm}-3=-3-q$, & $\frac{nn}{mm}=-q$, hoc eſt, quadratum quantitatis $\frac{n}{m}$ negativum quod abſurdum eſt: non poteſt igitur vis in majore quam in triplicatâ altitudinis ratione ſeu in ratione $\frac{1}{A^{3+q}}$, in receſſu à centro decreſcere.

DE MOTU CORPORUM.

cere non poſſe: (b) Corpus tali vi revolvens deque apſide diſcedens, ſi cœperit deſcendere nunquam perveniet ad apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſque ad centrum, deſcribens curvam illam lineam de quâ egimus in corol. 3. prop. XLI. Sin cœperit illud, de apſide diſcedens, vel minimum aſcendere; aſcendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apſidem ſummam. Deſcribet enim curvam illam lineam de quâ actum eſt in eodem corol. & in corol. VI. prop. XLIV. Sic (c) & ubi vis, in receſſu à centro, decreſcit in majore quam triplicatâ ratione altitudinis, corpus de apſide diſcedens, perinde ut cœperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum




(b) * *Corpus tali vi revolvens*, hoc eſt, vi quæ in receſſu à centro decreſcat in ratione altitudinis triplicatâ deque apſide diſcedens &c. Sint enim ut in coroll. 3°. prop. 41. duæ curvæ V p O, V P Q, quas corpora duo de loco V, ſecundum directionem ad C V perpendicularem egreſſa, vi centripetâ ad C tendente, & in triplicatâ altitudinis ratione decreſcente in receſſu à centro deſcribunt, & corpus in curva V p O, latum ad centrum ſemper accedat, corpus verò in curvâ VPQ, motum à centro ſemper recedat ut in eodem cor. 3°. prop. 41. manifeſtum eſt punctum V eſſe apſidem ſummam in curvâ V p O, & eſſe apſidem imam in curvâ V P Q; Quarè cum in curva VpO, corpus ad centrum ſemper accedat, nunquam pervenire poteſt ad apſidem imam, ſeu altitudinem minimam quæ nulla eſt, ſed gyris infinitis deſcendit uſque ad centrum; in curvâ verò V P Q de apſide imâ deſcedens corpus aſcendit in infinitum, nequè unquam pervenit ad apſidem ſummam quæ nulla eſt. Hæc demonſtrari etiam poſſunt hâc ratione; Si fuerit vis ut $\frac{1}{A^3}$, ſeu ut $A^{-3}$, erit $\frac{nn}{mm}-3=-3$, & $\frac{nn}{mm}=0=p$ (452) & motus totus angularis ab apſide ad eandem apſidem erit $\frac{360^\circ}{\sqrt{p}}=\frac{360}{0}$; motus verò angularis ab apſide ſummâ ad imam, vel ab imâ ad ſummam erit $\frac{180^\circ}{0}$ quæ eſt quantitas infinita, undè liquet in noſtrâ Hypotheſi corpus ab apſide imâ ad ſummam aut à ſummâ ad imam nunquam pervenire poſſe.

(c) * *Sic & ubi vis in receſſu à centro.* Si vis fuerit ut $\frac{1}{A^3+q}$, & q, quantitas poſitiva, erit (453) $\frac{nn}{mm}=-q=p$, & (452) motus totus angularis ab apſide ad apſidem eandem erit $\frac{360^\circ}{\sqrt{-q}}$, & ab apſide unâ ad alteram erit $\frac{180^\circ}{\sqrt{-q}}$: quarè ob ima-

gi-

trum usque vel ascendet in infinitum. At (d) si vis, in recessu à centro, vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quâcunque; corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando perveniet: & (e) contra, si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu à centro aut augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet: & quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel 1 $\frac{1}{2}$ de apside summâ ad apsidem summam alterno descensu & ascensu redierit; hoc est, si fuerit $m$ ad $n$ ut 8 vel 4 vel

ginariam quantitatem $\sqrt{-q}$, impossibile est ut corpus de apside summâ discedens, adeóque ad centrum accedens, ad apsidem imam unquam perveniat, & ut de apside imâ discedens ac proindè à centro recedens unquam perveniat ad apsidem summam.

(d) * *At si vis in recessu à centro.* Sit vis ut $\frac{1}{A^{3-q}}$, & q, quantitas positiva erit $\frac{nn}{mm} - 3 = -3 + q$, & $\frac{nn}{mm} = q = p$ (452). Undè motus totus angularis ab apside ad eandem erit $\frac{360^{o}}{\sqrt{p}} = \frac{360\,m}{n}$, motus angularis ab apside unâ ad alteram $= \frac{180}{\sqrt{p}} = \frac{180\,m}{n}$, quæ sunt quantitates reales & positivæ, quarè in hâc Hypothesi corpus ab apside ad apsidem eandem redire & ab apside summâ ad imam atque ab imâ ad summam pervenire poterit. Est autem $\frac{1}{A^{3-q}}$, altitudinis A dignitas, si fuerit q major quam 3, è contrà $\frac{1}{A^{3-q}}$ est dignitas quantitatis $\frac{1}{A}$, si fuerit q minor quam 3. Liquet igitur, si vis in recessu à centro vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, (quod fit ubi q minor quam 3) vel crescat in altitudinis ratione quâcumque (quod fit ubi q, major quam 3) corpus nunquam descendere ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquandò pervenire.

(e) * *Et contra si corpus de apside ad apsidem &c.* Nam si vis in recessu à centro non augeatur, nec etiam minuatur in minore quam triplicatâ altitudinis ratione, necessariò decrescet vel in triplicatâ vel in majore quam triplicatâ altitudinis ratione, sed supra demonstratum est in his duobus casibus corpus non posse ab apside ad apsidem alternis vicibus descendere & ascendere, ergò si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum, vis in recessu à centro augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet, & quo citiùs corpus de apside ad apsidem redierit, eò longiùs ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Quo enim citiùs corpus de apside ad apsidem redierit, eò minor erit quantitas $\frac{360\,m}{n}$, aut quantitas $\frac{m}{n}$, adeoque eò major erit quantitas $\frac{n}{m}$, ejusque quadratum $\frac{nn}{mm} = p = q$, & hinc eò longiùs quantitas $\frac{1}{A^{3-q}}$ à quantitate $\frac{1}{A^{3}}$ recedet.

4 vel 2. vel 1 $\frac{1}{2}$ ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm} - 3$ valeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$ vel $A^{\frac{1}{16}-3}$ vel $A^{\frac{1}{4}-3}$ vel $A^{\frac{4}{9}-3}$, id est, reciprocè ut $A^{3-\frac{1}{64}}$ vel $A^{3-\frac{1}{16}}$ vel $A^{3-\frac{1}{4}}$ vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad apsidem eandem immotam; erit $m$ ad $n$ ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{-2}$ seu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicatâ altitudinis, ut (f) in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad apsidem eandem redierit; erit $m$ ad $n$ ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9}-3}$ vel $A^{\frac{9}{4}-3}$ vel $A^{9-3}$ vel $A^{16-3}$; & (g) propterea vis aut reciprocè ut $A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directè ut $A^{6}$ vel $A^{13}$. Denique si corpus pergendo ab apside summâ ad apsidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, ideoque apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit $m$ ad $n$ ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* sive ut 121 ad 120, (h) ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit

(f) * *Ut in præcedentibus demonstratum est.* In hoc enim casu corpus describit ellipsim immotam circulo finitimam (per cor. 1. prop. XIII) intereadum æqualiter movetur in ellipsi simili & æquali circa umbilicum revolvente cum celeritate duplâ ejus quâ corpus idem in eâdem ellipsi mobili fertur (446).

(g) * *Et propterea vis aut reciprocè. Ut* $A^{\frac{11}{9}}$, *vel* $A^{\frac{3}{4}}$, *aut directè ut* $A^{6}$, *vel* $A^{13}$. Est enim $A^{\frac{16}{9}-3} = A^{-\frac{11}{9}} = \frac{1}{A^{\frac{11}{9}}}$, & $A^{\frac{9}{4}-3} = \frac{1}{A^{\frac{3}{4}}}$ & $A^{9-3} = A^{6}$ & $A^{16-3} = A^{13}$.

(h) * *Ideóque* $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ *erit æquale* $A^{-\frac{29523}{14641}}$. Erit enim in hâc hypothesi $\frac{nn}{mm} = \frac{14400}{14641}$, & $\frac{nn}{mm} - 3 = \frac{14400}{14641} - 3 = -\frac{29523}{14641}$. Est autem $\frac{29523}{14641} = 2 + \frac{241}{14641} = 2 + \frac{4}{243}$, proximè; nam $241 \times 243 = 58563$, & $4 \times 14641 = 58564$; decrescit igitur vis centripeta in ratione paulò majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$, propiùs ad duplicatam quam ad triplicatam accedit,

erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciprocè ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciprocè ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proximè. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

*Corol.* 2. Hinc etiam si corpus, vi centripetâ quæ sit reciprocè ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illâ extraneâ orietur: & contra. Ut si vis quâ corpus revolvitur in ellipsi sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut $cA$, ideoque vis reliqua ut $\frac{A-cA^4}{A\ cub.}$; erit (in exemplis tertiis) $b$ æqualis 1, $m$ æqualis 1, & $n$ æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apsides æqualis angulo graduum $180 \surd \frac{1-c}{1-4c}$. (i) Ponamus vim illam extraneam esse 357.45 partibus minorem quam vis altera quâ corpus revolvitur

dit, differentia enim inter 2, & $2+\frac{4}{243}$, est $\frac{4}{243}$, differentia verò inter 3 & $2+\frac{4}{243}$ est $1-\frac{4}{243}=\frac{239}{243}$. Porrò $\frac{239}{243}$ est ad $\frac{4}{243}$ seu 239 ad 4 ut $59\frac{3}{4}$ ad 1.

(i) * *Ponamus esse* $c \times A$ ad $\frac{1}{AA}$, hoc est, ponendo A vel $T=1$, c ad 1, ut 100 ad 35745, id est, ut 1 ad 357, 45; & erit $c=\frac{100}{35745}$, $1-c=\frac{35645}{35745}$, $1-4c=\frac{35345}{35745}$; undè $\frac{1-c}{1-4c}=\frac{35645}{35345}$, & hinc $180 \times \surd \frac{1-c}{1-4c}=180 \times \surd \frac{35645}{35345}$ &c.

454. Scholium. Hermannus in scholio ad prop. 25. lib. 1. Phoronomiæ formulam invenit quâ ex datâ vi centripetâ motus apsidum determinatur, & contrà; hanc ipsam ex prius ostensis hic demonstrabimus. Iisdem igitur positis quæ in not. 449, sit vis centripeta in ellipseos mobilis loco quovis p, seu (451) vis $\frac{VFFA+VRGG-VRFF}{A^3}$ $=\frac{y}{A^3}=\frac{y}{z^3}$, ponendo altitudinem $A=z$, & erit (450) $y=VFFz+VRGG-VRFF$; capiantur utrinque fluxiones & invenietur $dy=VFFdz$, & faciendo $Q\,dz=dy$, erit $Q=VFF$. Loco $VFF$, ipsius valor $Q$ substituatur in superiori æquatione, & erit $y=Qz+\frac{QRGG-QRFF}{FF}=Qz-QR+\frac{QRGG}{FF}$

De Motu Corporum.

vitur in ellipsi, id est $c$ esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel T æquali 1, & $180 \surd \frac{1-c}{1-4c}$ evadet $180 \surd \frac{35645}{35345}$, seu 180. 7623, id est, 180 *gr.* 45 *m.* 44 *s.* Igitur corpus de apside summâ discedens, motu angulari 180 *gr.* 45 *m.* 44 *s.* perveniet ad apsidem imam, & hoc motu duplicato ad apsidem summam redibit: ideoque apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *sec.* Apsis lunæ est duplo velocior circiter.

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium transeunt. Supereſt ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam scriptores qui motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuscunque centra petentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolutè lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo describunt. Et eâdem lege motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde determinamus.

SEC-

Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, erit $z = R = T$, & proindè $y = \frac{QTGG}{FF}$ & hinc $GG : FF = y : QT$, ac $G : F = \surd y : \surd QT$ quæ est formula generalis quæsita. Nam sit exempli causâ, vis centripeta ut $\frac{bz^m + cz^n}{z^3}$ hoc est $y = bz^m + cz^n$, erit $dy = Q\,dz = mbz^{m-1}\,dz + ncz^{n-1}\,dz$; unde $Q = mbz^{m-1} + ncz^{n-1}$, atque ità per formulam inventam $GG : FF = bz^m + cz^n : Tmbz^{m-1} + Tncz^{n-1}$, & ponendo $z = T = 1$, $GG : FF = b + c : mb + nc$, ut in exemplis tertiis Newtonus invenit.

Sit nunc data ratio $G$ ad $F$, nempe $m$ ad $n$, & vis centripeta sit ut dignitas aliqua non data altitudinis $z$, illius dignitatis index dicatur $p$, sitque adeò vis centripeta ut $z^p$, & erit $\frac{y}{z^3} = z^p$, ac $y = z^{p+3}$, $dy = Q\,dz = p+3 \times z^{p+2}\,dz$, $Q = p+3 \times z^{p+2}$. Hinc $G^2 : F^2 = m^2 : n^2 = z^{p+3} : p+3 \times Tz^{p+2}$, hoc est, ponendo $z = T = 1$, $mm : nn = 1 : p+3$, atquè ità $\frac{nn}{mm} = p+3$, & $\frac{nn}{mm} - 3 = p$, ut in cor. 1. repertum est.

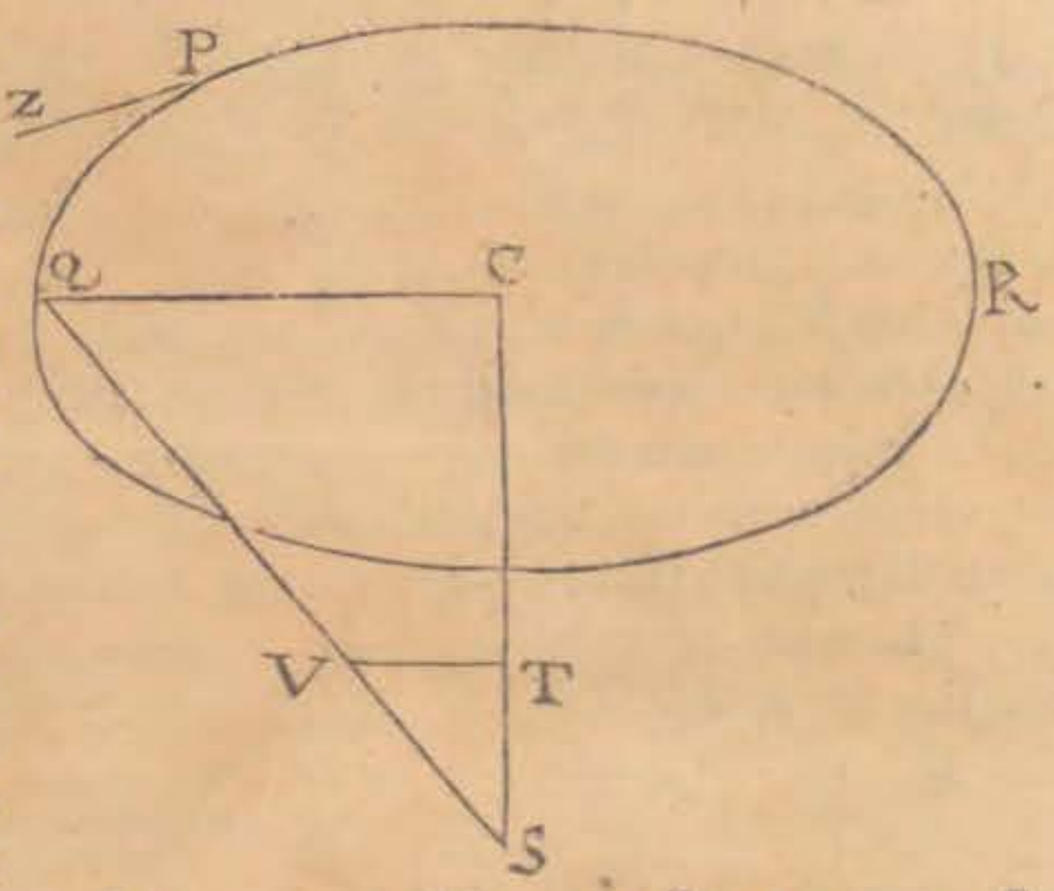
## SECTIO X.

*De motu corporum in ſuperficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.*

LIBER PRIMUS. PROP. XLVI. PROBL. XXXII.

### PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

*Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, ſecundum rectam in plano illo datam egreſſi.*




Sit $S$ centrum virium, $SC$ diſtantia minima centri hujus à plano dato, $P$ corpus de loco $P$ ſecundum rectam $PZ$ egrediens, $Q$ corpus idem in trajectoriâ ſuâ revolvens, & $PQR$ trajectoria illa, in plano dato deſcripta, quam invenire oportet. Jungantur $CQ$, $QS$, & ſi in $QS$ capiatur $SV$ proportionalis vi centripetæ quâ corpus trahitur verſus centrum $S$, & agatur $VT$ quæ ſit parallela $CQ$ & occurrat $SC$ in $T$: Vis $SV$ reſolvetur (per legum corol. 2.) in vires $ST$, $TV$; quarum $ST$ trahendo corpus ſecundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera $TV$, agendo ſecundum poſitionem plani, trahit corpus directè verſus punctum $C$ in plano datum, ideoque efficit, ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac ſi vis $ST$ tolleretur, & corpus vi ſolâ $TV$ revolveretur circa (k) centrum $C$ in ſpatio libero. Datâ autem vi centripetâ $TV$ quâ corpus $Q$ in ſpatio

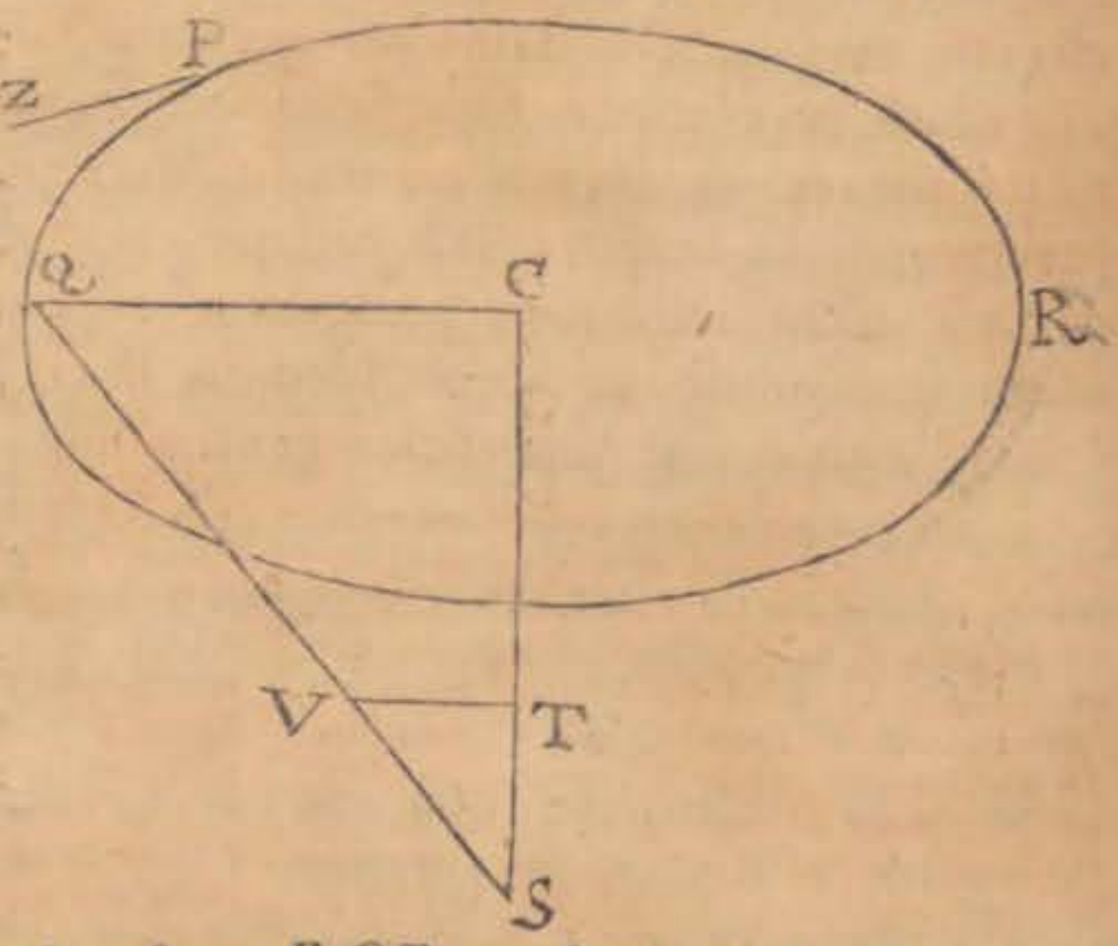
(k) * 455. *Circà centrum C in ſpatio libero.* Vis centripeta SV, ad S tendens in loco quovis Q, dicatur $\frac{Q}{QS}$, & erit ob triangula SVT, SQC ſimilia. SQ : QC

DE MOTU CORPORUM.

libero circa centrum datum $C$ revolvitur, datur (per prop. XLII.) tum trajectoria $PQR$, quam corpus describit, tum locus $Q$, in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo $Q$; & contra. *Q. E. I.*

## PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

*Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantiæ corporis à centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolventia describent ellipses, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citróque discurrendo, singulas eundi & redeundi periodos iisdem temporibus absolvent.*




Nam, stantibus quæ in superiore propositione, vis $SV$, quâ corpus $Q$ in plano quovis $PQR$ revolvens trahitur versus centrum $S$, est ut distantia $SQ$; atque ideo ob proportionales $SV$ & $SQ$, $TV$ & $CQ$, vis $TV$, quâ corpus trahitur versus punctum $C$ in orbis plano datum, est ut distantia $CQ$. Vires igitur, quibus corpora in plano $PQR$ versantia trahuntur versus $C$, sunt ut $\frac{Q \times QC}{SQ}$. Sed ob angulum $QCS$ rectum $SQ^2 = QC^2 + SC^2$, ergò $VT$, seu vis ad $C$ tendens in loco $Q$, sive $\frac{Q \times QC}{SQ}$ erit æqualis $\frac{Q \times QC}{\sqrt{QC^2 + SC^2}}$. Cum igitur data sit $SC$ distantia minima centri $S$ à plano $QPC$ positione dato, si loco $SQ$ in quantitate $Q$, scribatur $\sqrt{QC^2 + SC^2}$, obtinebitur valor vis ad $C$ tendentis in locum $Q$ ex solâ distantiâ $QC$ & quantitatibus datis compositus. Exempli causâ, si vis $SV$, ad $S$ tendens in loco $Q$ fit ut distantia $SQ$, erit $VT$, seu vis ad $C$ tendens in eodem loco $Q$, ut $\frac{SQ \times QC}{SQ}$ hoc est, ut $QC$. Si vis $SV$ fuerit ut $\frac{1}{SQ^2}$, erit $VT$, ut $\frac{QC}{SQ^3}$, hoc est, ut $\frac{QC}{QC^2 + SC^2 \times \sqrt{QC^2 + SC^2}}$, & ità de cæteris suppositionibus.

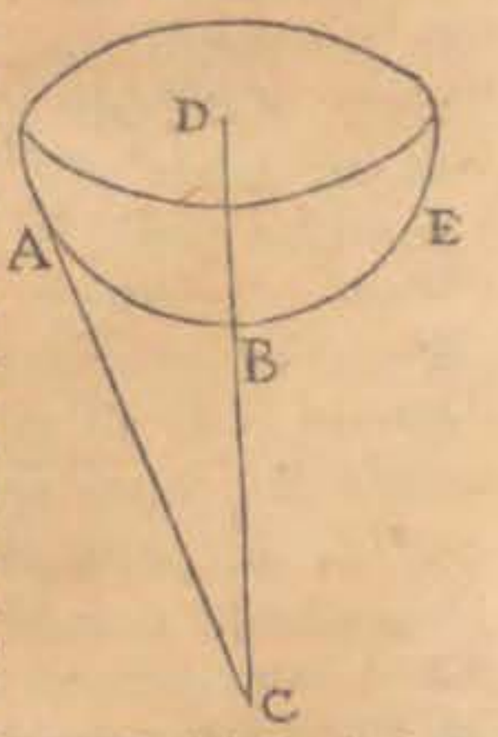
ſus punctum $C$, ſunt (l) pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur verſus centrum $S$; & propterea corpora movebuntur iiſdem temporibus, in iiſdem figuris, in plano quovis $PQR$ circa punctum $C$, atque in ſpatiis liberis circa centrum $S$; ideoque (per corol. 2. prop. x. & corol. 2. prop. XXXVIII) temporibus ſemper æqualibus, vel deſcribent ellipſes in plano illo circa centrum $C$, vel periodos movendi ultrò citròque in lineis rectis per centrum $C$ in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

## *Scholium.*

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. (m) Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circum axes quoſvis datos per centrum virium tranſeuntes revolvi, & eâ revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa obliquè aſcendendo & deſcendendo currant ultrò citròque; peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſi-

(l) * *Sunt pro ratione diſtantiarum &c.* Hoc eſt *vires abſolutæ ad S & C tendentes ſunt æquales, ita ut ſi alicubi* fuerit PC=QS, vis in loco P ad C tendens æqualis erit vi in loco Q ad S tendenti. Nam vis quâ corpus in loco Q ad C trahitur, eſt ad vim quâ versùs S urgetur, ut QC ad QS, & vis in loco Q ad C tendens eſt etiam ad vim in loco P ad idem centrum C urgentem ut QC ad PC ſeu QS; quare vis in loco Q ad S tendens æqualis eſt vi ad C tendenti in loco P; Corpora verò quæ moventur viribus centripetis quæ ſunt ut diſtantiæ, temporibus ſemper æqualibus ellipſes quaſvis, utut inæquales, deſcribent circà ſua centrà (per Prop. X). Si autem ellipſeos PQR quam corpus in plano deſcribit, latitudo in infinitum minuatur, deſcribet corpus rectam aliquam QCR, motu accelerato ad centrum C accedens, & motu retardato ab ipſo recedens uſque ad R, deindè rursùs ex loco R, ad centrum C recidens, & ità circà centrum C, ultrò citróque oſcillabitur.

(m) * *Concipe lineam curvam* AB in plano ACED deſcriptam circà axem datum DBC per centrum virium C tranſeuntem revolvi & eâ revolutione ſuperficiem curvam AEB deſcribi, tùm corpus aliquod A ità moveri, ut illius centrum in hâc ſuperficie perpetuò reperiatur. Si corpus illud obliquè deſcendendo & aſcendendo per ABE, EBA currat ultrò citroque peragetur illius motus in plano ACED per axem CD tranſeunte, atque adeò in lineâ curvâ ABE, cum (ex hyp.) nulla adſit vis quæ corpus à plano illo cogat deflectere; ſuperficies AEB perfectè terſa ac polita ſupponitur.



DE MOTU CORPORUM.

bus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

## PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

*Si rota globo extrinsecus ad angulos* (n) *rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut summa diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.*

## PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

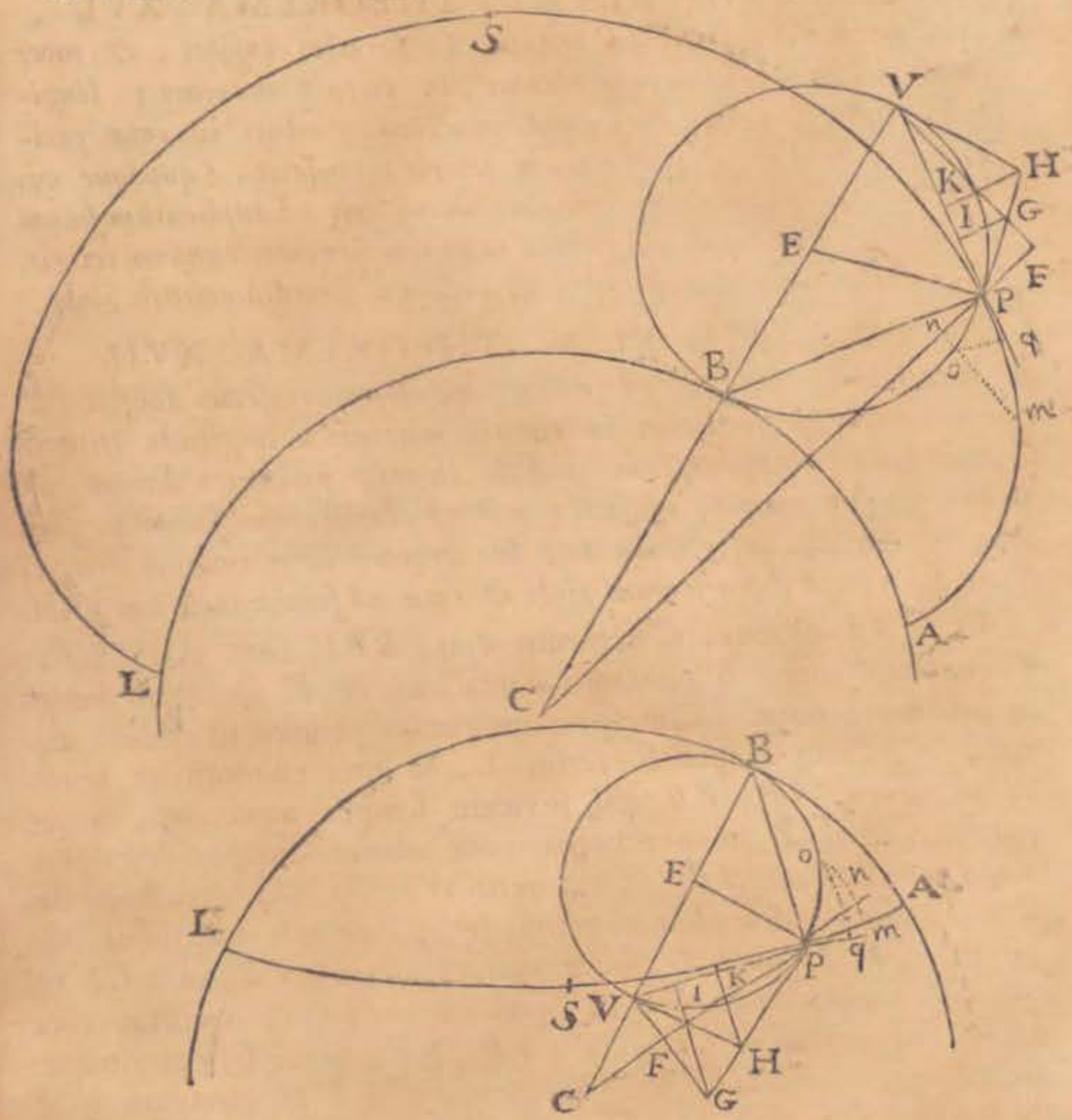
*Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.*

Sit $ABL$ globus, $C$ centrum ejus, $BPV$ rota ei insistens, $E$ centrum rotæ, $B$ punctum contactus, & $P$ punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo $ABL$ ab $A$ per $B$ versus $L$, & inter eundum ita revolvi ut arcus $AB$, $PB$ sibi invicem semper æquentur, atque punctum illud $P$ in perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam $AP$. Sit autem $AP$ via tota curvilinea descripta ex quo rota globum tetigit in $A$, & erit viæ hujus longitudo $AP$ ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}PB$, ut $2CE$ (o) ad $CB$. Nam recta $CE$ (si opus est producta) occurrat rotæ in $V$, junganturque $CP$, $BP$, $EP$, $VP$, & in $CP$ productam demittatur normalis $VF$. Tangant $PH$, $VH$ circulum in $P$ & $V$ concurrentes in $H$, secetque $PH$, ipsam $VF$ in $G$, & ad $VP$ demittantur normales $GI$, $HK$. Centro item $C$ & intervallo quovis describatur circulus $nom$ secans rectam $CP$ in $n$, rotæ peri-

(n) * *Ad angulos rectos*, id est, ità ut planum rotæ productum per centrum globi transeat, illudque proinde in duo hæmisphæria dividat ac circulum maximum in ejus superficie figuet.

(o) * *Ut* $2CE$ *ad* $CB$. Hoc est, ob $2CE = 2CB + 2BE$, vel $2CE = 2CB - 2BE$, ut summa vel differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

metrum $BP$ in $o$, & viam curvilineam $AP$ in $m$; centroque $V$ & intervallo $Vo$ describatur circulus secans $VP$ productam in $q$.

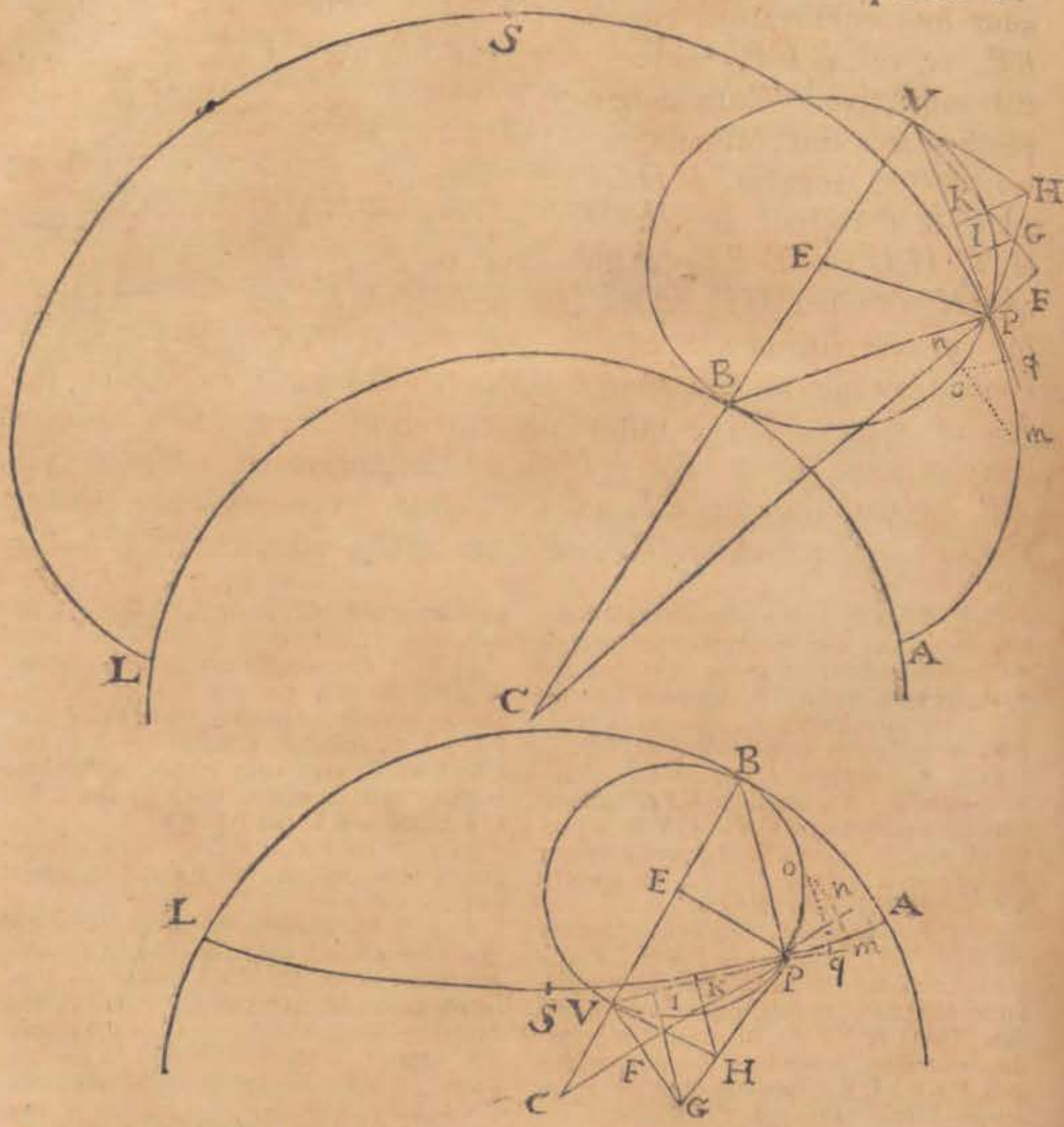



Quoniam rota eundo semper revolvitur circa punctum contactus $B$, (P) manifestum est quod recta $BP$ perpendicularis est ad

(P) * *Manifestum est quod recta BP &c.* Nam evidens est in circuli BPV revolutione, centro B radio BP singulis tempusculis describi arcum circuli seu incrementum nascens curvæ AP, ad quod proindè radius BP perpendicularis est, sed ob angulum VPB in semicirculo rectum, linea VP in eum radium BP est perpendicularis, ergo linea VP est Tangens ejus arcus nascentis seu incrementi curvæ AP, ideoque ipsius curvæ AP.

DE MOTU CORPORUM.

lineam illam curvam $AP$ quam rotæ punctum $P$ describit, atque ideo quod recta $VP$ tanget hanc curvam in puncto $P$.




Circuli $nom$ radius sensim auctus vel diminutus æquetur tandem distantiæ $CP$; &, ob (q) similitudinem figuræ evanescen-

(q) * *Et ob similitudinem figuræ evanescentis.* Hâc figurâ evanescente arcus P o, P q, considerari possunt tanquam lineæ rectæ, seu partes tangentium H P, V P productarum, & arcus m n, o q, tanquam rectæ lineis P n, P q, perpendiculares; Hinc verò anguli ad verticem oppositi n P o & G P F, o P m & G P I, erunt æquales, atque adeò ob angulos o n P & G F P, o q P & G I P, rectos, proindeque æquales, figura evanescens P n o m q, similis erit figuræ P F G V I.

tis $Pnomq$ & figuræ $PFGVI$, ratio ultima lineolarum evanescentium $Pm$, $Pn$, $Po$, $Pq$, id (r) est, ratio mutationum momentanearum curvæ $AP$, rectæ $CP$, arcus circularis $BP$, ac rectæ $VP$, eadem erit quæ linearum $PV$, $PF$, $PG$, $PI$ respectivè. Cum autem $VF$ ad $CF$ & $VH$ ad $CV$ perpendiculares sint, angulique (f) $HVG$, $VCF$ propterea æquales; & (t) angulus $VHG$ (ob angulos quadrilateri $HVEP$ ad $V$ & $P$ rectos) angulo $CEP$ æqualis est, similia erunt triangula $VHG$, $CEP$; & inde fiet ut $EP$ ad $CE$ ita $HG$ ad $HV$ (u) seu $HP$ & ita (x) $KI$ ad $KP$, & (y) compositè vel divisim ut $CB$ ad $CE$ ita $PI$ ad $PK$, & duplicatis consequentibus ut $CB$ ad $2CE$ ita (z) $PI$ ad $PV$, atque ita $Pq$ ad $Pm$. Est (a) igitur decrementum lineæ $VP$, id est, incrementum lineæ $BV-VP$ ad incrementum lineæ curvæ $AP$ in datâ ratione $CB$ ad $2CE$, & propterea (per corol. lem. IV.) longitudines $BV-VP$ & $AP$, incrementis (b) illis

(r) * *Id est ratio mutationum momentanearum*, seu incrementorum vel decrementorum nascentium *curvæ AP*, quæ ex Am fit AP, *rectæ CP*, quæ ex Cm fit CP *arcus circularis BP*, qui ex Bo fit BP, *ac rectæ VP*, quæ ex Vq, fit VP.

(f) * *Angulique HVG, VCF, propterea æquales.* Ob angulum VFC rectum, summa angulorum FCV, CVF æqualis est angulo recto CVH, quare detracto communi angulo CVF, fit angulus FCV=FVH sive HVG.

(t) * *Et angulus VHG &c.* Tangentes HV, HP cum radiis EV, EP angulos rectos constituunt, adeóque quadrilateri HVEP, anguli duo reliqui VHP sive VHG & VEP, sunt simul æquales duobus rectis, quarè cum sint quoque anguli VEP, CEP simul duobus rectis æquales, liquet angulum CEP, æqualem esse angulo VHG, & in secunda figura cum anguli quadrilateri VHPE in V & P sint recti, reliqui anguli VHP, VEP æquales sunt duobus rectis, sed etiam VHP & VHG sunt æquales duobus rectis, ergo detracto communi VHP, VEP sive CEP est æqualis VHG.

(v) * *Ad HV, seu HP.* Nam circuli tangentes HV, HP sunt æquales.

(x) * *Et ita KI ad KP.* Etenim ob parallelas HK, GI, est HG:HP=KI:KP.

(y) * *Et compositè vel divisim.* Cum sit EP, seu BE:CE=KI:KP, si rota globo intrinsecus insistat, erit compositè BE+CE, seu CP:CE=KI+KP; seu PI:PK. Si verò rota globo extrinsecus insistat, erit divisim CE−BE, seu CB:CE=KP−KI, seu PI:PK.

(z) * *Ita PI ad PV.* Nam in triangulo PHV isoscele, est PK=KV, adeóque 2PK=PV.

(a) * *Est igitur decrementum lineæ VP &c.* Dum arcus Am crescit sitque AP, recta Vq decrescit & fit VP; quarè est Pm incrementum curvæ Am seu AP, & Pq decrementum rectæ VP. Cum autem sit BV circuli diameter constans, quantùm decrescit VP, tantùm crescit differentia BV−VP, unde decrementum lineæ VP, æquale est incremento lineæ BV−VP. *Est igitur incrementum lineæ BV−VP, ad incrementum lineæ curvæ AP &c.*

(b) * *Incrementis illis genitæ &c.* Cum punctum P est in A, punctum B est etiam in A, sitque VP=VB, adeóque BV−VP=0. Simul ergò crescere incipiunt lineæ BV−VP & AP; & quoniam in datâ ratione crescunt, erit semper BV−VP ad AP in datâ illâ ratione CB ad 2CE.

DE MOTU CORPORUM.

genitæ, ſunt in eâdem ratione. Sed, (c) exiſtente $BV$ radio, eſt $VP$ coſinus anguli $BVP$ ſeu $\frac{1}{2}BEP$, ideoque $BV-VP$ ſinus verſus eſt ejuſdem anguli; & propterea in hâc rotâ, cujus radius eſt $\frac{1}{2}BV$, erit $BV-VP$ duplus ſinus verſus arcus $\frac{1}{2}BP$. Ergo $AP$ eſt ad duplum ſinum verſum arcus $\frac{1}{2}BP$ ut $2CE$ ad $CB$. *Q. E. D.*

Lineam autem $AP$ in propoſitione priore cycloidem extra globum, alteram in poſteriore cycloidem intra globum diſtinctionis gratiâ nominabimus.

*Corol.* 1. Hinc ſi (d) deſcribatur cyclois integra $ASL$ & biſecetur ea in $S$, erit longitudo partis $PS$ ad longitudinem $VP$ (quæ duplus eſt ſinus anguli $VBP$, exiſtente $EB$ radio) ut $2CE$ ad $CB$, atque ideo in ratione datâ.

*Corol.* 2. Et (e) longitudo ſemiperimetri cycloidis $AS$ æquabitur lineæ rectæ, quæ eſt ad rotæ diametrum $BV$ ut $2CE$ ad $CB$.

(c) *Sed exiſtente BV radio &c.* Ob angulum B P V rectum, eſt B V ad V P ut ſinus totus ad ſinum anguli V B P qui complementum eſt anguli B V P ad rectum. Quarè exiſtente B V radio, eſt V P coſinus anguli B V P æqualis dimidio angulo ad centrum B E P. Eſt autem cujuſvis anguli ſinus verſus æqualis differentiæ inter radium & coſinum ejuſdem anguli, ergò exiſtente B V radio, erit B V − V P ſinus verſus anguli $\frac{1}{2}$ B E P; & quoniam in diverſis circulis æqualium angulorum ſinus omnes ſunt ut circulorum radii, in hâc rotâ cujus radius eſt $\frac{1}{2}$ B V, erit B V − V P, duplus ſinus verſus arcûs $\frac{1}{2}$ B P,

(d) 457. *Hinc ſi deſcribatur &c.* Ubi punctum P pervenit ad S, arcus B P ſemicirculo, arcus $\frac{1}{2}$ B P quadranti, & ſinus verſus arcûs $\frac{1}{2}$ B P radio, æquales fiunt. Quarè in hoc caſu curva A S, eſt ad diametrum B V, ut 2 C E, ad C B; cumque in loco quovis P, ſit etiam curva A P, ad duplum ſinum verſum $\frac{1}{2}$ B P, ſeu ad B V − V P (456) ut 2 C E ad C B, erit A S: B V :: A P : B V − V P, & hinc A S − A P, ſeu P S : B V − B V + V P, ſeu V P = A S : B V = 2 C E : C B.

(e) * *Et longitudo ſemiperimetri.* Patet per notam ſuperiorem.

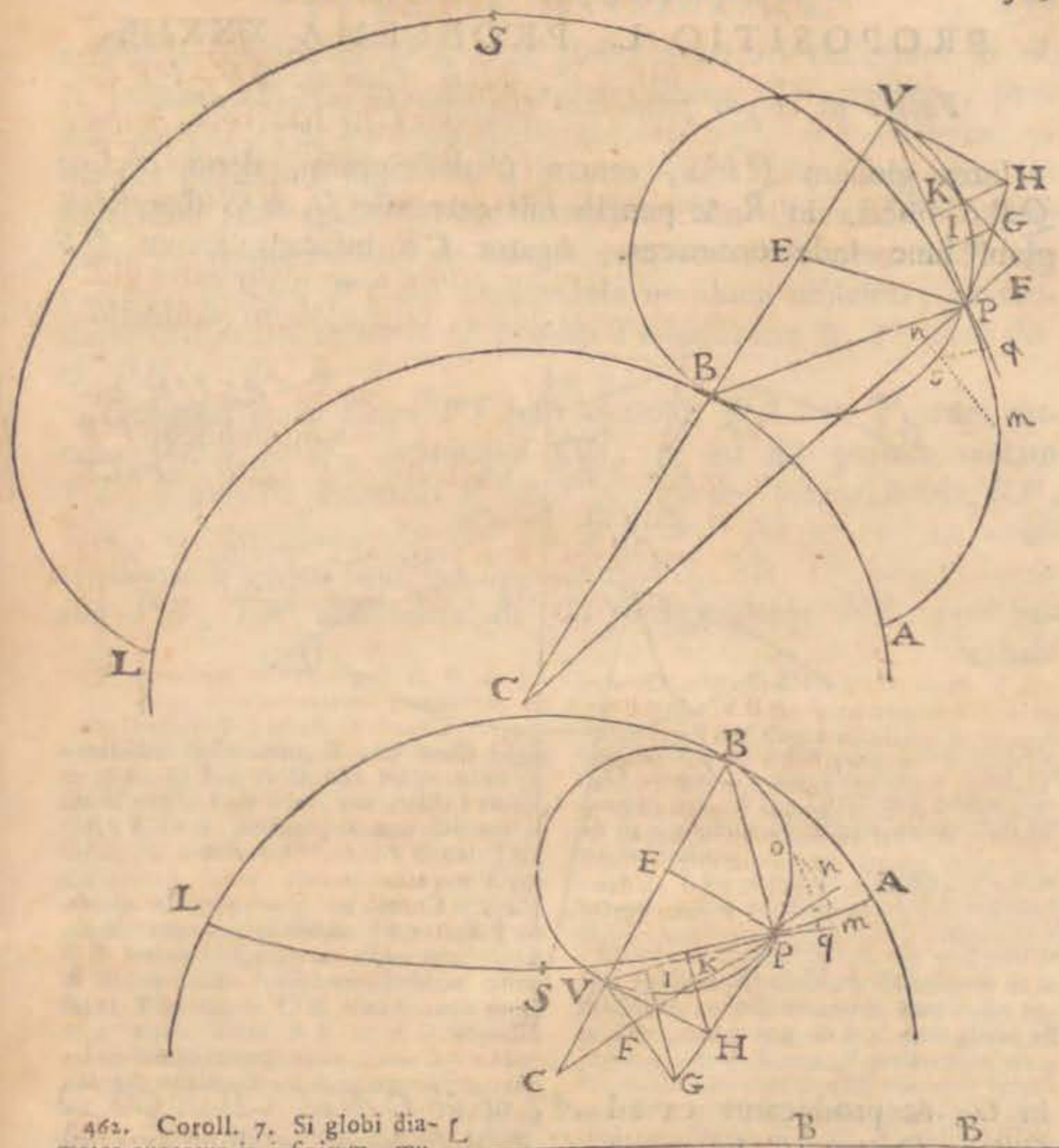
458. Coroll. 3. Recta C S cycloidi perpendicularis eſt, & recta C A eam rangit in A. Eſt enim B P ad cycloidem perpendicularis, & V P tangens ejus in P, at ubi punctum P pervenit in S, B P fit B S, ſeu B V, & ubi punctum B eſt in A, V P coincidit cum V B.

459. Coroll. 4. Si per punctum quodvis P agatur P V cycloidem tangens in P, & ad eam erigatur perpendiculum P B globo occurrens in B, jungaturque C B tangentem ſecans in V, erit B V rotæ diameter.

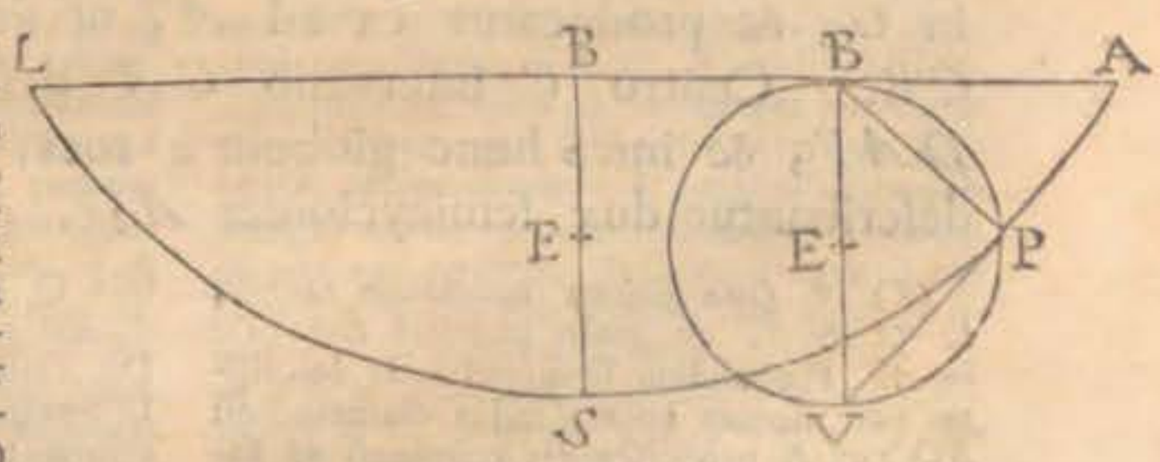
460. Coroll. 5. Ex generi cycloidis liquet arcum globi A B, æqualem eſſe arcui rotæ B P.

461. Coroll. 6. Si rotæ diameter V B æqualis conſtituatur ſemidiametro globi C B, cyclois intrà globum evadet linea recta per centrum globi C tranſiens. Nam in hoc caſu C S = 0, & 2 C E = C B; undè punctum cycloidis medium S, cum centro coincidit, & quia (457) A S : B V = 2 C E : C B, erit A S = B V = C B atque adeò eſt A S linea recta per centrum C tranſiens, nam ſi curva eſſet, major foret ſemidiametro C B.

462.




462. Coroll. 7. Si globi diameter augeatur in infinitum, mutabitur ejus superficies sphærica in planum, fietque A B L linea recta, & B E finitâ manente seu nullâ respectu infinitæ lineæ C B, erit C E = C B, adeóque cycloïs tam intrà quam extrà globum abibit in cycloidem vulgarem, quæ describitur revolutione rotæ in lineâ rectâ progredientis, cumque sit semper (457) A P : B V − V P = 2 C E : C B = 2 : 1, erit A P = 2 × (B V − V P), sed B V − V P, est duplus sinus versus arcûs $\frac{1}{2}$ B P, existente B E radio (456). Ergò in cycloide vulgari A P æquatur quadruplicato sinui versò dimidii arcûs B P, inter planum A B L & punctum describens P intercepti; Hinc etiam erit A S = 4 B E = 2 B S = 2 B V; Est enim B E sinus versus quadrantis.

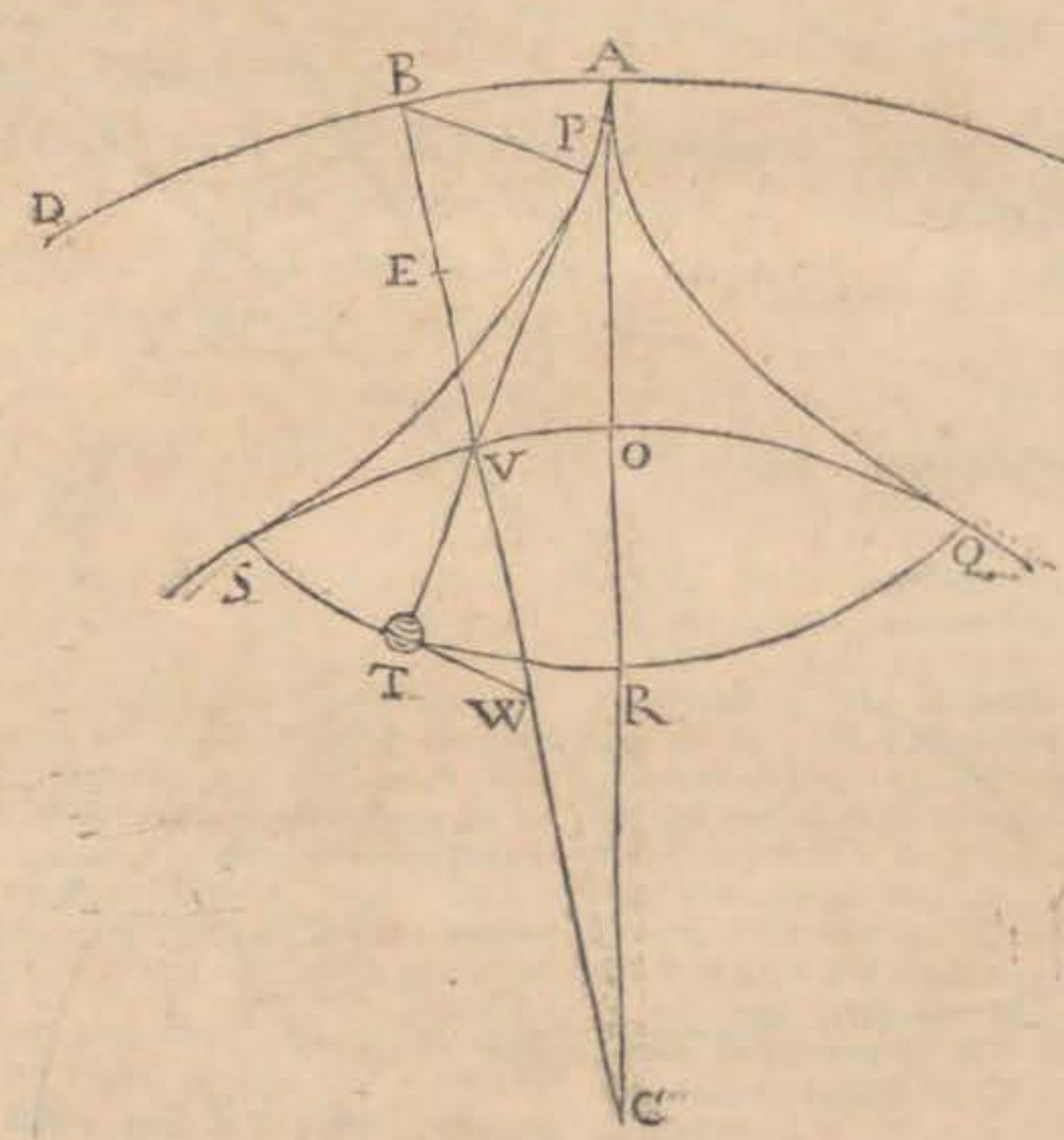


DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

*Facere ut corpus pendulum oſcilletur in cycloide datâ.*

Intra globum $QVS$, centro $C$ deſcriptum, detur cyclois $QRS$ biſecta in $R$ & punctis ſuis extremis $Q$ & $S$ ſuperficiei globi hinc inde occurrens. Agatur $CR$ biſecans arcum $QS$




in $O$, & producatur ea ad $A$, ut ſit $CA$ ad $CO$ ut $CO$ ad $CR$. Centro $C$ intervallo $CA$ deſcribatur globus exterior $DAF$, & intra hunc globum à rotâ, cujus diameter ſit $AO$, deſcribantur duæ ſemicycloides $AQ$, $AS$, quæ (f) globum in-

(f) * *Quæ globum interiorem tangant in Q & S, & globo exteriori occurrant in A.* Probandum ſemicycloides deſcriptas per motum rotæ (cujus diameter eſt AO) ex A proficiſcentis terminari ad ſuperficiem globi interioris in punctis extremis Q & S cycloidis QRS datæ. Producantur itaque lineæ CQ, CS ad F & D, eritque FQ = DS = AO, & ſuper Diametros FQ, DS intelligantur deſcriptæ rotæ quarum motu fiunt ſemicycloides, dicaturque *P* punctum rotæ ſemicy-

teriorem tangant in *Q* & *S* & globo exteriori occurrant in *A*. A puncto illo *A*, filo *APT* longitudinem *AR* æquante, pendeat corpus *T*, & ita intra ſemicycloides *AQ*, *AS* oſcilletur, ut quoties pendulum digreditur à perpendiculo *AR*, filum parte ſui ſuperiore *AP* applicetur ad ſemicycloidem illam *APS* verſus quam peragitur motus, & circum eam ceu obſtaculum flectatur, parteque reliquâ *PT* cui ſemicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus *T* oſcillabitur in cycloide datâ *QRS*. *Q. E. F.*

Occurrat enim filum *PT* tum cycloidi *QRS* in *T*, tum circulo *QOS* in *V*, agaturque *CV*; & ad fili partem rectam *PT*, è punctis extremis *P* ac *T*, erigantur perpendicula *BP*, *TW*, occurrentia rectæ *CV* in *B* & *W*. Patet, (g) ex conſtructione & geneſi ſimilium figurarum *AS*, *SR*, (h) perpendicula illa *PB*, *TW* abſcindere de *CV* longitudines *VB*, *VW* rotarum

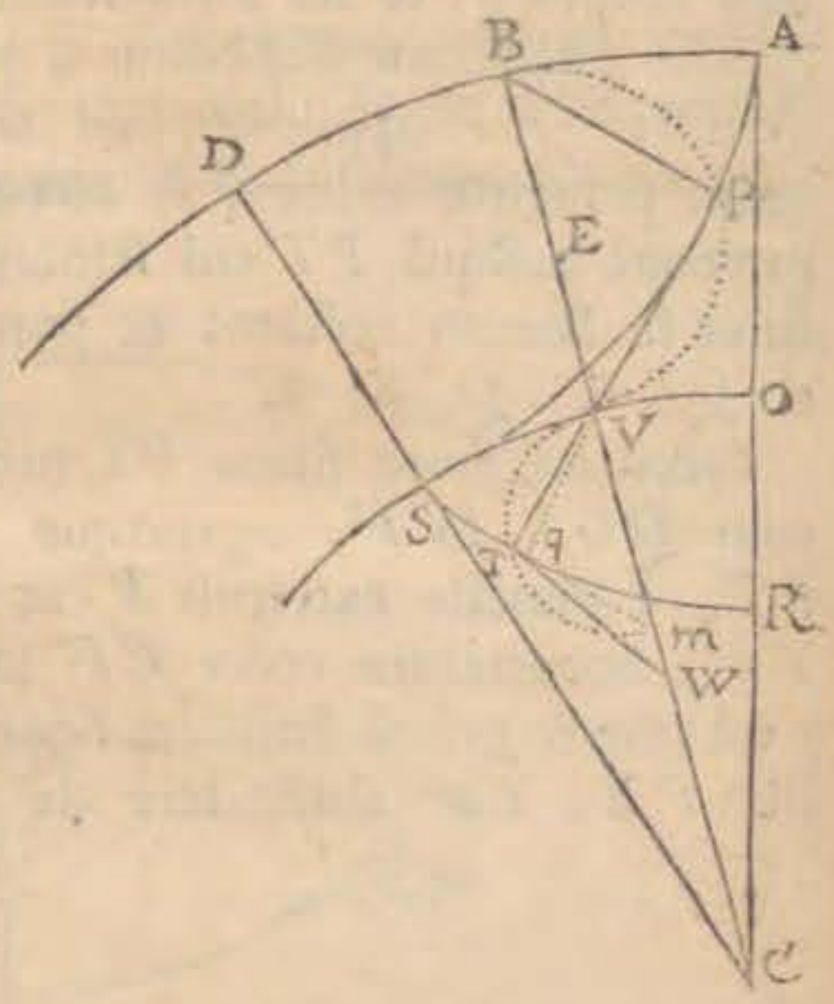
cycloides deſcribens; Liquet arcûs OQ & AF, OS & AD eſſe proportionales radiis CO, CA ſive (per conſt.) radiis CR, CO & diviſim rotarum Diametris OR, AO, ideoque (per nat. circuli) ſemicircumferentiis rotarum ſuper has Diametros deſcriptarum; Sed cum Q & S ſint puncta extrema cycloidis datæ QRS & CO arcum QS biſecet, erunt arcus OQ & OS æquales ſemicircumferentiæ rotæ ſuper Diametrum OR deſcriptæ (460) ergo etiam arcus AF & AD æquales erunt ſemicircumferentiæ rotæ ſuper Diametrum AO deſcriptæ, ſed arcus *FP* aut *DP* eſt ſemper æqualis arcui AF aut AD (460); erunt ergo arcus *FP* & *DP* ſemicirculi, & *P* cadet in extremitatibus Q & S Diametrorum FQ, DS, ſed ubi P ſemicircumferentiam rotæ percurrit ſemicyclois eſt deſcripta, ergo ſemicycloides deſcriptæ per motum rotæ ex A proficiſcentis terminantur in Q & S. Q.E.D.

(g) 463. *Patet ex conſtructione & geneſi ſimilium figurarum AS, SR;* Figuræ illæ dicuntur ſimiles quia AO diameter rotæ quâ deſcribuntur ſemicycloides AS, AQ eſt ad globi DAF radium AC ut diameter OR rotæ quâ deſcribitur cyclois QRS ad globi QOS radium OC, (per conſtr.) unde manifeſtum quod cycloides AS, AQ, QR, quæ eodem modo deſcribuntur ac determinantur ſunt inter ſe ſimiles.

(h) * *Perpendicula illa* &c. 1°. Probandum quod *perpendiculum PB abſcindat de CV longitudinem VB rotæ Diametro OA æqualem.* Fingatur rotam ita poſitam ut ejus punctum Cycloidem deſcribens ſit in P, liquet, ex conſtructione, eam hujus rotæ Diametrum quæ in hoc caſu globo eſt perpendicularis & quæ, ſi producatur, tranſire debet per centrum C, utrinque terminari debere in ſuperficie globorum; Jam verò (per Demonſt. Prop. XLVIII. XLIX.) Tangens Cycloidis tranſit ſemper per unam extremitatem ejus Diametri rotæ quæ globo eſt perpendicularis & perpendiculum in Tangentem è puncto contactus erectum tranſit per alteram ejuſdem Diametri extremitatem, ergo, cum ſit (ex conſt.) filum PT Tangens Cycloidis in puncto P, & PB perpendiculum in illud, interſectiones V & B linearum PT & PB cum globis QOS & DAF erunt extremitates ejus Diametri rotæ quæ ſi producatur tranſit per centrum C, ergo ducta CV,

De Motu Corporum.

tarum diametris $OA$, $OR$ æquales. Eſt (i) igitur $TP$ ad $VP$ (duplum ſinum anguli $VBP$ exiſtente $\frac{1}{2}BV$ radio) ut




erit angulus BVP, æqualis arcui BP, ad diametrum BV, applicato ſeu $= \frac{BP}{BV}$, hoc eſt, ob arcum $BA = BP$ (460) & $BV = AO$, angulus $BVP = \frac{BA}{AO}$. Simili ratione, cum ſit arcus Vq æqualis arcui SV, & ſemirota Vqm æqualis arcui SO, erit arcus $qm = VO$, adeóque angulus $qVm = \frac{VO}{OR}$. Quare angulus $BVP : qVm = \frac{BA}{AO} : \frac{VO}{OR} = OR \times BA : AO \times VO$; ſed $BA : VO = CA : CO = AO : OR$ (per conſtr.) adeóque $OR \times BA = AO \times VO$, Ergò angulus $BVP = qVm$. Cum igitur anguli BVP, TVW ad verticem oppoſiti ſint etiam æquales, perpendicularis Vq coincidit cum VT, tangens qm cum TW, & Vm cum VW, undè tandem eſt $Vm = OR = VW$.

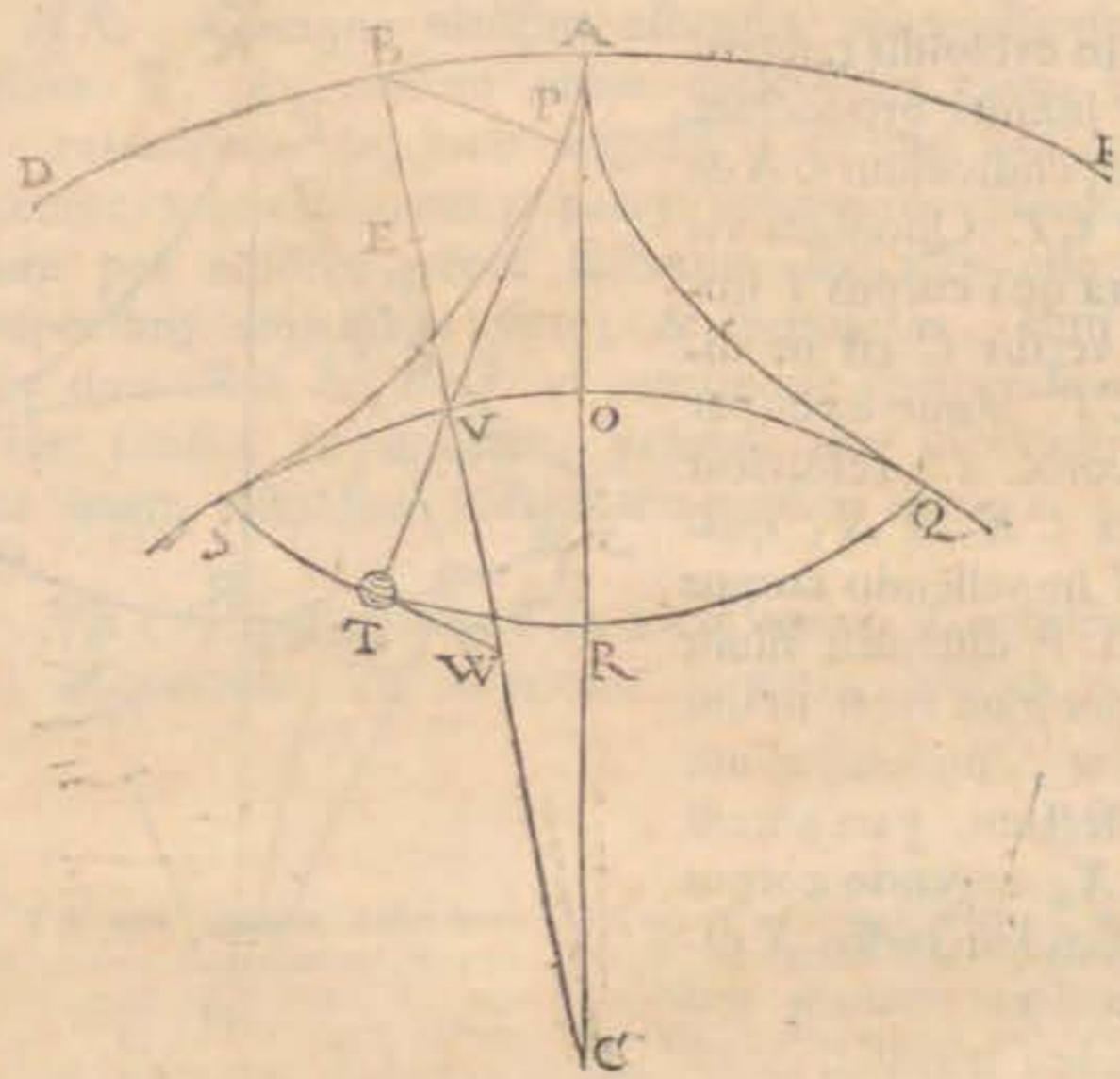
(i) * *Eſt igitur &c.* Ob triangula VPB, VTW ſimilia $TV : VP = VW : VB$, & componendo $TP : VP = BW : BV$.

*perpendiculum PB abſcindet de CV longitudinem VB rotæ Diametro OA æqualem.* Q. E. 1°. D.

2°. *Perpendiculum TW abſcindit de CV longitudinem VW rotæ diametro OR æqualem.* Fingatur rota Cycloidem SRQ deſcribens ita poſita, ut ejus Diameter globo SOQ inſiſtens ſit in lineâ CV globumque tangat in V, dicatur m altera extremitas ejus Diametri, & dicatur q punctum illius rotæ Cycloidem deſcribens: Arcus VS erit æqualis arcui Vq (460) utque totus arcus SO eſt æqualis arcui Vm, erit $VO = qm$, & qm eſt menſura dupli anguli CVq; Sit verò rota deſcribens cycloidem APS poſita ſicut in priore caſu, hoc eſt, ejus Diameter globo DAF inſiſtens ſit in productione lineæ CV, erit arcus BA æqualis arcui BP (460) & eſt BP menſura dupli anguli BVP; Eſt autem arcus VO ſive qm ad BA ſive BP, ut CO ad CA ideoque ut Diametri rotarum OR ad AO (ex conſt.), arcûs verò diverſorum circulorum qui ſunt inter ſe ut ſuorum circulorum Diametri, ſunt ſimiles ideoque ejuſdem numeri graduum, ergo angulus CVq eſt æqualis angulo BVP quoniam arcus qui ſunt menſura eorum dupli, ſunt ejuſdem numeri graduum, ideoque illi anguli CVq, BVP ſunt per verticem oppoſiti & PVq eſt linea recta; itaque, filum PV productum ad T tranſit tàm per extremitatem V Diametri rotæ globo infiſtentis quàm per ejus rotæ punctum q Cycloidem deſcribens; Ergo (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) filum PT eſt perpendiculare in Tangentem Cycloidis in puncto illo q ſive T, ideoque ex conſtructione linea TW erit ea ipſa Tangens, & (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) tranſibit per extremitatem m Diametri rotæ quæ globo inſiſtit, hoc eſt Diametri jacentis in linea CV, *ergo TW abſcindet de CV longitudinem rotæ Diametro OR æqualem.* Q. E. 2°. D.

* *Idem aliter.* Ex puncto V ducatur ad ſemicycloidem SR perpendicularis Vq, & qm tangens in q radio CV occurrens in m, erit (459) $Vm = OR$. Deſcriptis rotis BPV, Vqm,

$BW$ ad $BV$, seu $AO+OR$ ad $AO$, id est (cum sint $CA$ ad $CO$, $CO$ ad $CR$ & divisim $AO$ ad $OR$ proportionales) ut $CA+CO$ ad $CA$, vel, si bisecetur $BV$ in $E$, ut $2CE$ ad $CB$. Proinde (per corol. 1. prop. XLIX.) longitudo partis rectæ fili $PT$ æquatur semper cycloidis arcui $PS$, & filum totum $APT$ æquatur semper cycloidis arcui dimidio $APS$, hoc est



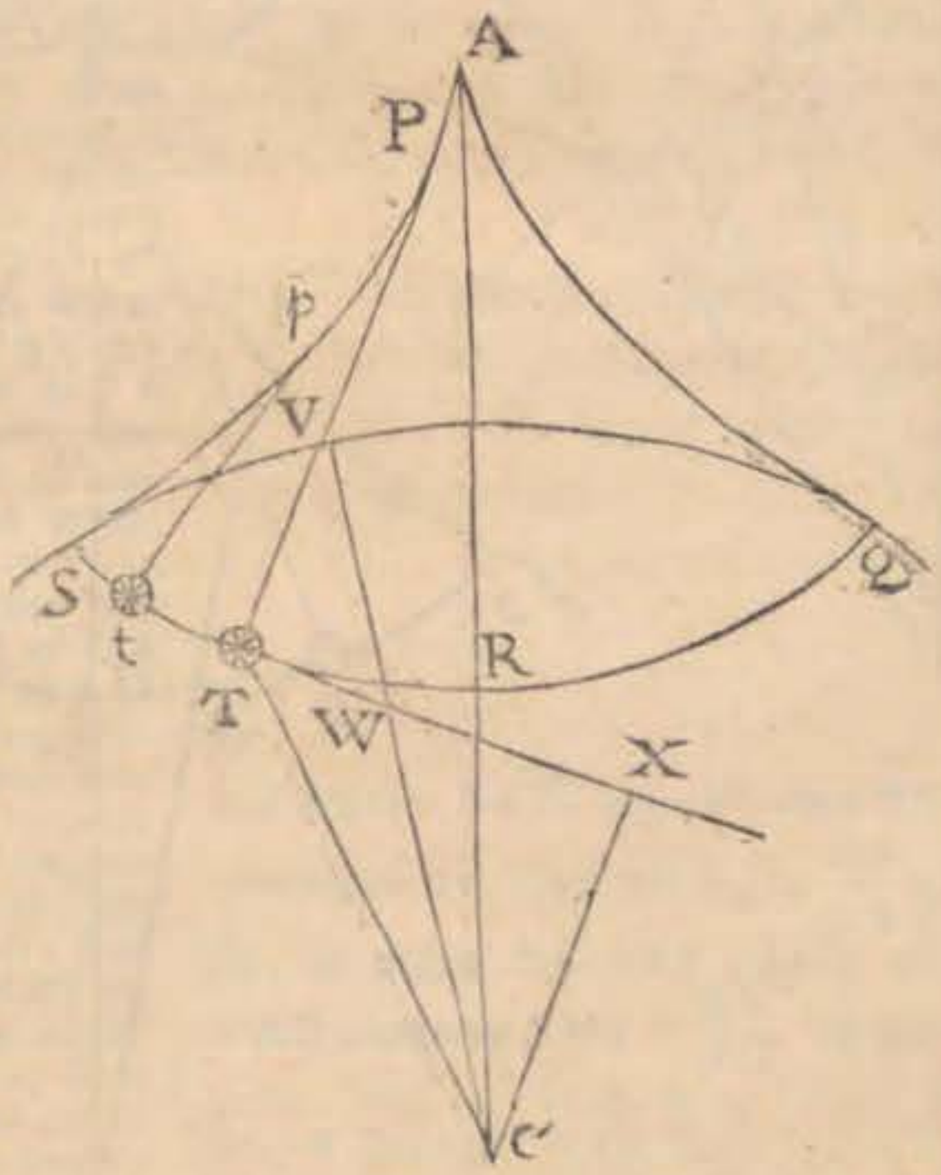

(per corol. 2. prop. XLIX.) longitudini $AR$. Et propterea vicissim si filum manet semper æquale longitudini $AR$ movebitur punctum $T$ in cycloide datâ $QRS$. *Q. E. D.*

*Corol.* Filum $AR$ æquatur semicycloidi $AS$, ideoque ad globi exterioris semidiametrum $AC$ eandem habet rationem quam similis illi semicyclois $SR$ habet ad globi interioris semidiametrum $CO$.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

*Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum* C *ſit in locis ſingulis ut diſtantia loci cujuſque à centro, & hâc ſolâ vi agente corpus* T *oſcilletur (modo jam deſcripto) in perimetro cycloidis* QRS: *dico quod oſcillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.*




Nam in cycloidis tangentem $TW$ infinitè productam cadat perpendiculum $CX$ & jungatur $CT$. Quoniam vis centripeta quâ corpus $T$ impellitur verſus $C$ eſt ut diſtantia $CT$, atque hæc (per legum corol. 2.) reſolvitur in partes $CX$, $TX$, quarum $CX$ impellendo corpus directè à $P$ diſtendit filum $PT$ & per ejus reſiſtentiam tota ceſſat, nullum alium edens effectum, pars autem altera $TX$, urgendo corpus tranſverſim ſeu verſus $X$ directè accelerat motum ejus in cycloide; manifeſtum eſt quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, ſit ſingulis momentis ut longitudo $TX$, id (1) eſt, ob datas $CV$, $WV$ iiſque proportionales $TX$, $TW$, ut longitudo $TW$, hoc eſt (per corol. 1. prop. XLIX.) ut longitudo arcus cycloidis $TR$. Pendulis igitur duobus $APT$, $Apt$ de perpendiculo $AR$ inæqualiter deductis & ſimul dimiſſis, accelerationes eorum ſemper erunt ut arcus deſcribendi $TR$, $tR$. Sunt (m) autem partes ſub

(1) * *Id eſt ob datas.* Ob triangula WXC, WTV ſimilia, eſt CW : WV = WX : TW, & componendo CV : WV = TX : TW; quare ob datas CV, WV, data eſt ratio TX ad TW, id eſt TX eſt ut TW.

(m) 464. *Sunt autem* arcuum tR, TR partes ſub initio eodem tempuſculo deſcriptæ ut acceleraciones, hoc eſt, ut toti arcus tR, TR ſub initio deſcribendi & propterea diviſim, partes arcuum

initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendiculum $AR$. Cumque vicissim ascensus perpendiculorum de loco infimo $R$, per eosdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis à viribus iisdem à quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atque ideo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum cycloidis partes duæ $RS$ & $RQ$ ad utrumque perpendiculi latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. *Q. E. D.*

LIBER PRIMUS. PROP. LI. THEOR. XVIII.

*Corol.* Vis (n) quâ corpus $T$ in loco quovis $T$ acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad totum corporis ejusdem pondus in loco

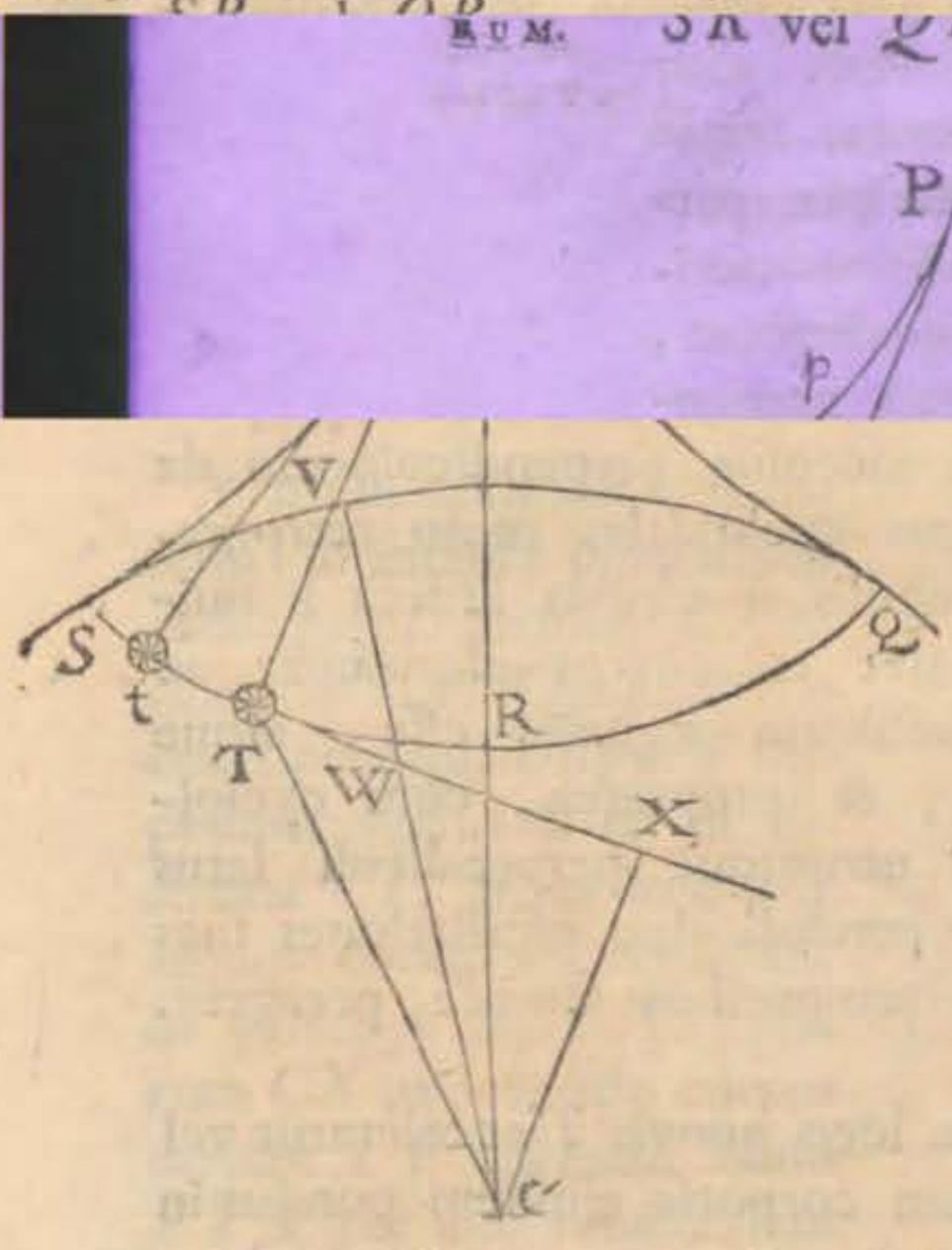
cuum tR, TR quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes his partibus proportionales sunt etiam ut toti arcus tR, TR, & sic deinceps. Quoniam autem velocitates dato tempore genitæ sunt ut accelerationum summæ, quæ ob datam accelerationum rationem sunt in eâdem ratione datâ arcuum tR, TR, liquet accelerationes atque ideò velocitates genitas & partes his velociratibus descriptas, partesque describendas semper esse ut sunt toti arcus tR, TR, & propterea si pars arcûs TR describenda evanescat, quod fit dum corpus pendulum T pervenit ad R, pars arcûs tR, simul evanescet, ob datam harum partium rationem. Unde corpora duo oscillantia t & T ex punctis t & T simul demissa, simul pervenient in R.

(n) * *Vis quâ corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad vim quâ in loco altissimo S, vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, ut arcus TR, ad arcum SR,* (ex demonstr. prop. 51.) sed vis quâ corpus in loco S vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, est vis tota quâ ad centrum C, perpendiculariter urgetur; radius enim CS cycloidem SR tangit in S, (458) adeóque directio vis in loco S in cycloide coincidit cum directione vis rectâ trahentis ad centrum C.

465. Coroll. 1. Si centro A radio AR circulus describatur, cycloidis SRQ arcus nascens in loco infimo R cum circuli illius arcu nascente coincidit. Quare si longitudo penduli AR magna sit, eodem propè modo in exiguis circuli arcubus

DE MOTU CORPORUM.

loco altissimo $S$ vel $Q$, ut cycloidis arcus $TR$ ad ejusdem arcum $SR$ vel $QR$.

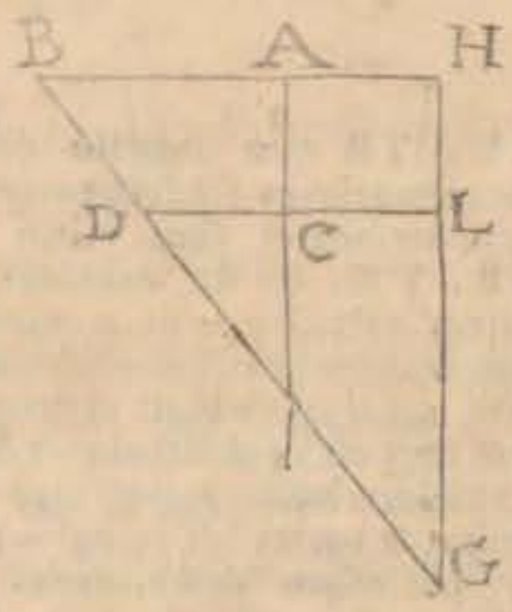



cubus oscillabitur corpus quo in cycloide, & quò major est longitudo penduli minorque circuli arcus in quem excurrit, eò major erit motuum in circulo & in cycloide consonantia, atque hinc, non absimile experientiâ, oscillationes in exiguis circuli arcubus sunt ad sensum isochronæ.

466. Coroll. 2. Ex his deducitur quænam sit æquatio ad hanc Cycloidem intrà globum descriptam pertinens, sive, invenietur æquatio exprimens rationem distantiæ cujusvis puncti T à centro ad perpendiculum in Tangentem ex eo puncto ductam demissum: Dicatur enim globi radius CV, $a$, Diameter rotæ VW, $a-c$, erit distantia CR sive CW, $c$; Ducatur ex puncto quovis T linea TC ad centrum quæ dicatur $x$, ducatur Tangens TX ex eo puncto T & ex centro demittatur in eam Tangentem perpendiculum CX, sit $TX=z$ & $CX=p$. Erit ubique $pp=\frac{aacc-ccxx}{aa-cc}$; Nam ob similia Triangula VTW, WCX est

CW ($c$):VW ($a-c$)=
$=\frac{p}{c}\times a-c$ &
CV ($a$):WV ($a-c$)=
$=\frac{z}{a}\times a-c$; est itaque
$=\frac{p^2}{c^2}\times a-c^2+\frac{z^2}{a^2}\times a-c^2$. Sed
$TV^2+TW^2=VW^2=\overline{a-c^2}$, ergo
$\frac{p^2}{c^2}\times\overline{a-c^2}+\frac{z^2}{a^2}\times\overline{a-c^2}=a-c^2$
& dividendo utrumque membrum æquationis per $\overline{a-c^2}$ erit $\frac{p^2}{c^2}+\frac{z^2}{a^2}\left(\text{sive }\frac{a^2p^2+c^2z^2}{a^2c^2}\right)=1$, & multiplicato utroque membro æq. per $a^2c^2$ est $a^2p^2+c^2z^2=a^2c^2$, sed est $z^2=x^2-p^2$ (per const.) Ergo $a^2p^2+c^2x^2-c^2p^2=a^2c^2$ & factâ transpositione $a^2p^2-c^2p^2=a^2c^2-c^2x^2$, ideoque $p^2=\frac{a^2c^2-c^2x^2}{a^2-c^2}$. Q. E. D.

Simili ratiocinio invenietur æquatio ad epicycloidem sive cycloidem extra globum descriptam inversis solummodo terminis & signis ut fit $pp=\frac{c^2x^2-a^2c^2}{c^2-a^2}$.




467. Lemma. Ad punctum G tendat vis centripeta distantiæ ab illo puncto proportionalis quam in locis H, L exhibeant lineæ HB, LD rectæ GH perpendiculares, sitque recta GDB locus punctorum B, D, capiatur HA ad HB ut vis centripeta constans ad vim variabilem in lo-

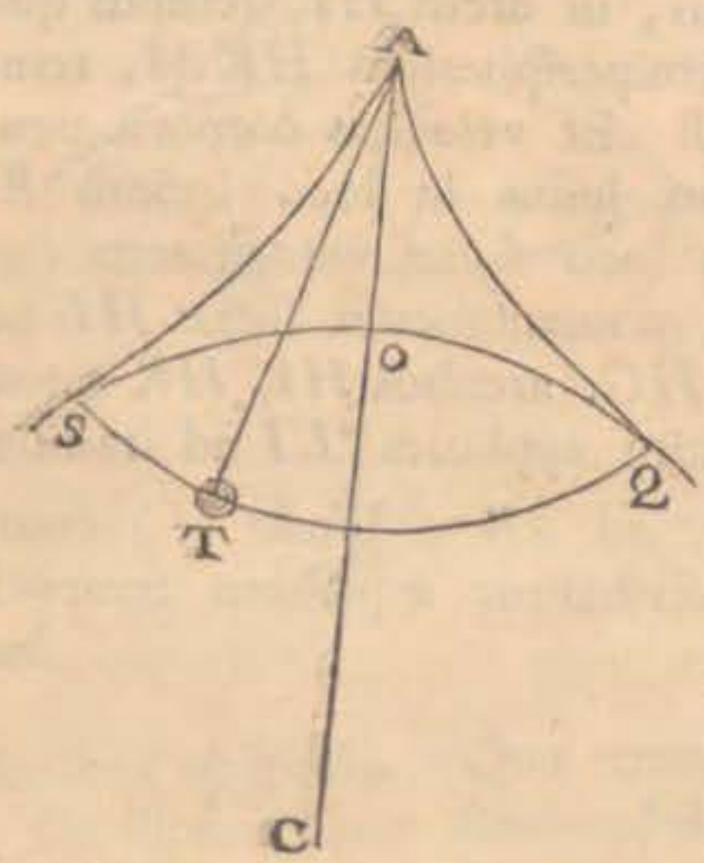
co

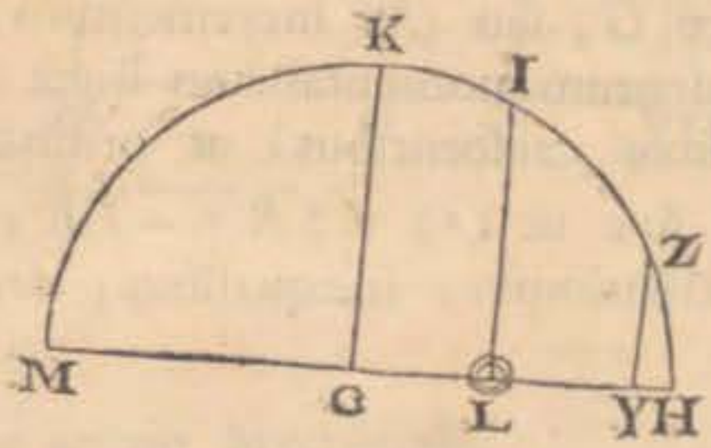
## PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.



*Definire & velocitates pendulorum in locis ſingulis, & tempora quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur.*

Centro quovis $G$, intervallo $GH$ cycloidis arcum $RS$ æquante, deſcribe ſemicirculum $HKM$ ſemidiametro $GK$ biſectum. Et ſi vis centripeta, diſtantiis locorum à centro proportionalis, tendat ad centrum $G$, ſitque ea in perimetro $HIK$ æqualis vi centripetæ in perimetro globi $QOS$ ad ipſius centrum tendenti; & (°) eodem tempore quo pendulum $T$ dimittitur è loco




co dato H, & agatur AC rectæ HG parallela lineam LD ſecans in C, de loco H cadant corpora duo, quorum alterum vi conſtante HA, alterum vi variabili HB vel LD urgeatur, ſintque illorum velocitates in eodem loco L, V, v, & erit $V^2$ ad $v^2$, ut area HACL ad aream HBDL, (per prop. 39. & not. 408.) id eſt $V^2 : v^2 = HL \times HA : HL \times \frac{BH + DL}{2} = 2HA : BH + DL$. Et quoniam in centro G evaneſcit DL erit in illo centro $V^2 : v^2 = 2HA : BH$, & $V : v = \sqrt{2HA} : \sqrt{BH}$. Quare datis in loco H viribus HA, HB, & velocitate in loco quovis L vel G vi conſtante acquiſitâ, datur velocitas vi variabili in eodem loco acquiſita.

(o) * *Et eodem tempore.* Id eſt, ſimul demittantur ex locis S & H corpora *T* & *L*.

DE MOTU CORPORUM.

loco ſupremo $S$, cadat corpus aliquod $L$ ab $H$ ad $G$: quoniam vires quibus corpora urgentur ſunt æquales ſub initio & ſpatiis deſcribendis $TR$, $LG$ ſemper proportionales, atque ideo, ſi æquantur $TR$ & $LG$, æquales in locis $T$ & $L$; patet corpora illa deſcribere ſpatia $ST$, $HL$ æqualia ſub initio, (p) ideoque ſubinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia ſpatia deſcribere. Quare (per prop. XXXVIII.) tempus quo corpus deſcribit arcum $ST$ eſt ad tempus oſcillationis unius, ut arcus $HI$, tempus quo corpus $H$ perveniet ad $L$, ad ſemiperipheriam $HKM$, tempus quo corpus $H$ perveniet ad $M$. Et velocitas corporis penduli in loco $T$ eſt ad velocitatem ipſius in loco infimo $R$, (hoc eſt, velocitas corporis $H$ in loco $L$ ad velocitatem ejus in loco $G$, ſeu (q) incrementum momentaneum lineæ $HL$ ad incrementum momentaneum lineæ $HG$, arcubus $HI$, $HK$ æquabili fluxu creſcentibus) ut ordinatim applicata $LI$ ad radium $GK$, ſive ut (r) $\sqrt{SR\,q. - TR\,q.}$ ad $SR$. Unde (f) cum, in oſcillationibus inæqualibus, deſcribantur æqualibus temporibus

(p) * *Ideóque ſubindè pergere æqualiter urgeri & æqualia ſpatia* iiſdem nempe temporibus *deſcribere.*

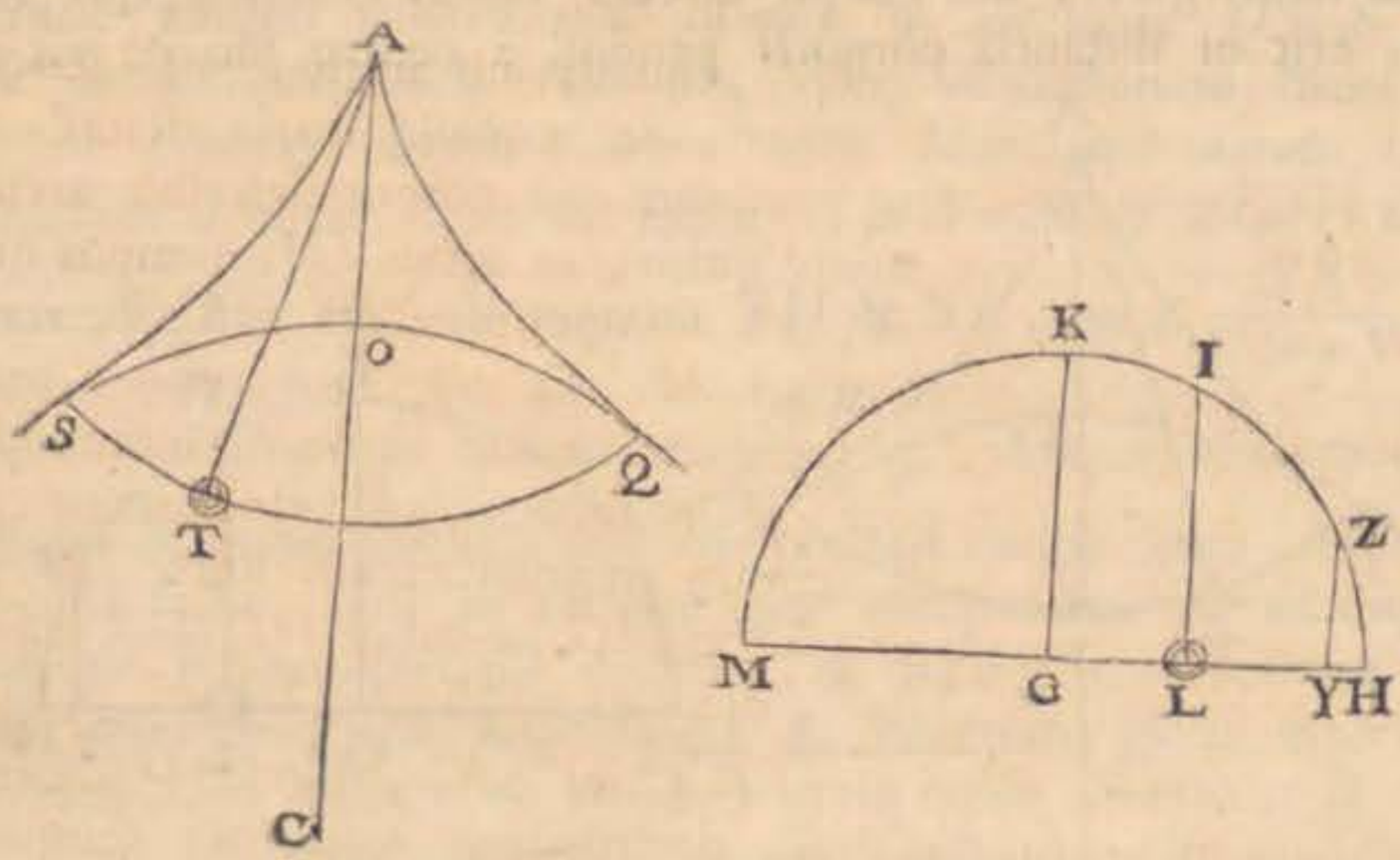
(q) * *Seu incrementum momentaneum &c.* Nam incrementa illa ſunt ſpatia eodem tempuſculo uniformiter deſcripta, quæ proinde ſunt ut velocitates in locis L & G, quibus deſcribuntur, arcus autem HI, HK, quæ tempora exhibent, creſcunt ut tempora, hoc eſt, æquabili fluxu.

(r) *Sivè ut* $\sqrt{SR^2 - TR^2}$ *ad* SR. Eſt enim, ex naturâ circuli $LI^2 = ML \times LH = GH^2 - GL^2 = SR^2 - TR^2$, adeóque $LI = \sqrt{SR^2 - TR^2}$, & $LI : GK = \sqrt{SR^2 - TR^2} : GK$, ſeu SR.

(f) 468. *Undè cum &c.* Datâ vi centripetâ in perimetro globi QOS vel in H datur tum velocitas quâ corpus hâc vi ſollicitatum deſcribit circulum HKM, tum tempus quo ſemiperipheriam HKM percurrit (201) hoc eſt, tempus unius oſcillationis integræ; & contrà, Dato tempore unius oſcillationis integræ, datur vis centripeta in H vel S (202). Porrò dato arcu ST, vel rectâ æquali HL, datur LI ſinus arcus HI, & hinc datur hic arcus, adeóque & ratio HI, ad HKM, id eſt, ratio temporis quo percurritur HL vel ST ad tempus datum oſcillationis integræ. Et contrà dato tempore quo deſcribitur HL vel ST, datur arcus HI, & hinc datur illius ſinus rectus LI ſinuſque verſus HL vel arcus ST. Datâ vi centripetâ in S vel H, datur velocitas corporis de loco S vel H in R vel G pervenientis (467); hinc verò datur velocitas corporis in loco quovis dato T vel L; cum (ex demonſtr.) velocitas in R vel G, ſit ad velocitatem in T vel L, ut GK ad LI, ſeu ut SR ad $\sqrt{SR^2 - TR^2}$. Dato tempore quo deſcribitur ST vel HL, datur arcus HI, & illius ſinus rectus LI, adeóque & velocitas in L & contrà.

Si

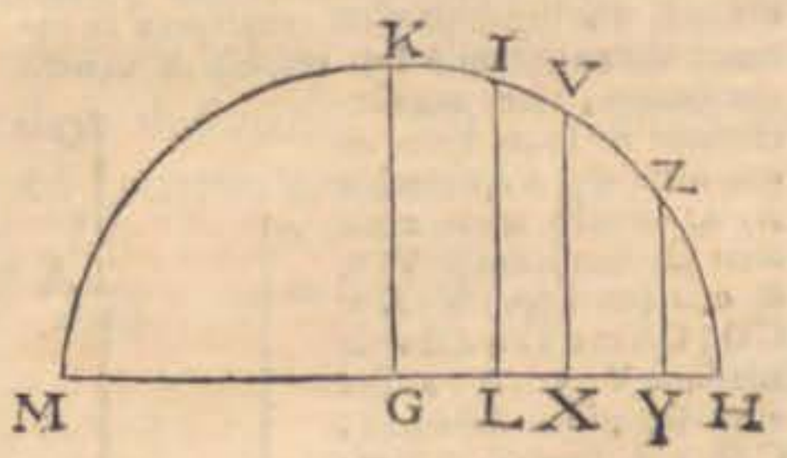
ibus arcus totis oscillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus descripti in oscilla-




tionibus universis. Quæ erant primò invenienda.

Oscillentur jam funipendula corpora in cycloidibus diversis intra

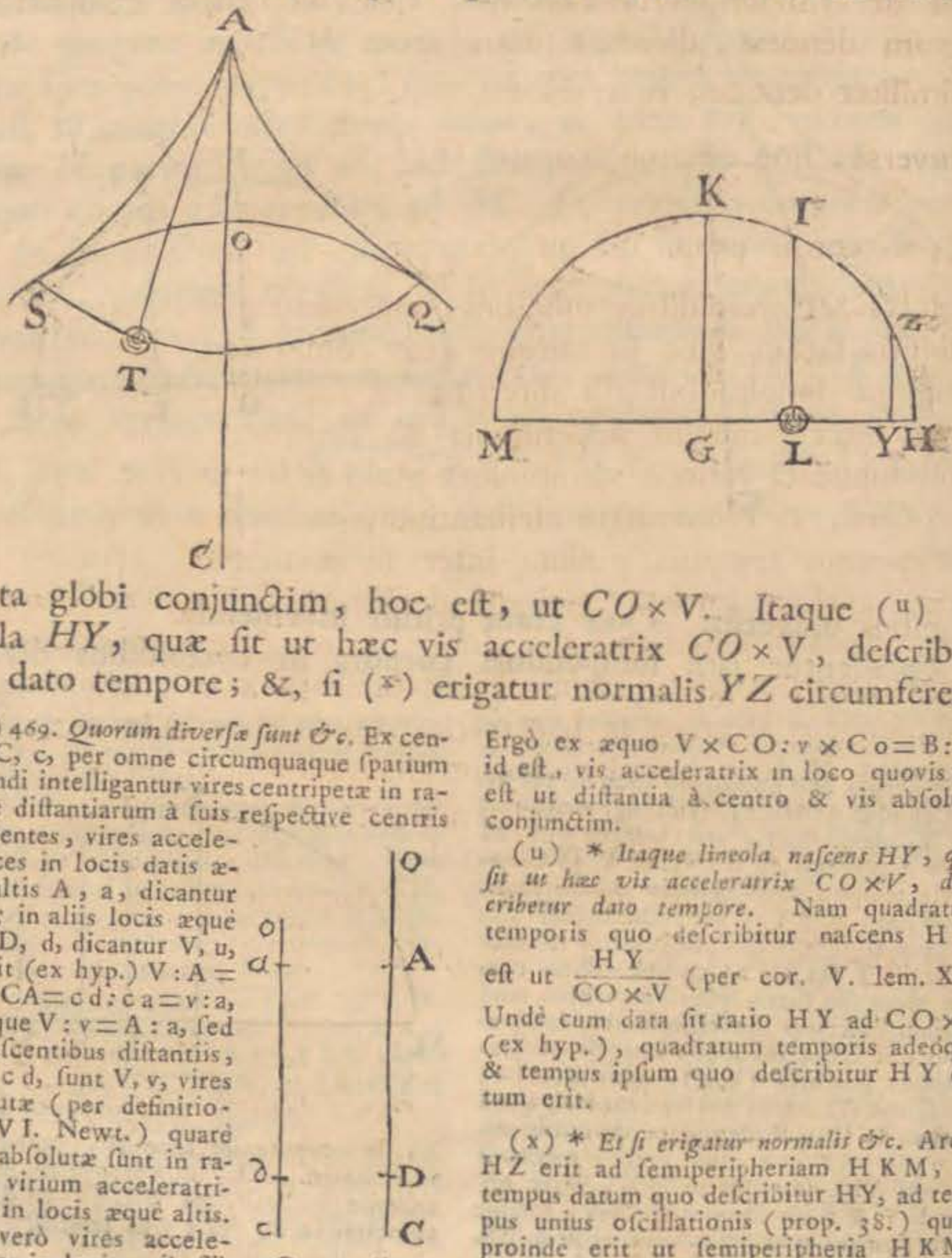
Si corpus non ex summo loco S, vel H, sed ex alio quovis t, (vid. fig. prop. 51.) vel Y, demittatur, erit tempus quo ex loco t pervenit ad R, vel ex Y ad G, æquale tempori dato dimidiæ oscillationis. Hinc dato arcu T t, vel rectâ æquali YL, dabitur & tempus quo describitur & velocitas in T vel L, ac contrà. Nam cum sint arcus seu spatia quævis æqualibus temporibus descripta in oscillationibus inæqualibus, ut arcus vel spatia integris oscillationibus percursa (464), dato arcu T t, vel spatio YL, dabitur spatium HX, quod corpus de loco H demissum describit eodem tempore quo aliud corpus percurrit T t vel YL; dato spatio HX, datur arcus HV & illius sinus rectus XV, & hinc datur tempus quo describitur HX & YL, & velocitas in X; cumque sit velocitas in




X, in corpore de loco H, cadente ad velocitatem in L, in corpore de loco Y cadente ut HG, ad YG (464) dabitur velocitas in L, vel T; Et contrà.

DE MOTU CORPORUM.

intra globos diverſos, quorum (t) diverſæ ſunt etiam vires abſolutæ, deſcriptis: &, ſi vis abſoluta globi cujuſvis *QOS* dicatur V, vis acceleratrix quâ pendulum urgetur in circumferentiâ hujus globi, ubi incipit directè versùs centrum ejus moveri, erit ut diſtantia corporis penduli à centro illo & vis abſoluta globi conjunctim, hoc eſt, ut $CO \times V$. Itaque (u) lineola *HY*, quæ ſit ut hæc vis acceleratrix $CO \times V$, deſcribetur dato tempore; &, ſi (x) erigatur normalis *YZ* circumferen-




(t) 469. *Quorum diverſæ ſunt &c.* Ex centris C, c, per omne circumquaque ſpatium diffundi intelligantur vires centripetæ in ratione diſtantiarum à ſuis reſpective centris creſcentes, vires acceleratrices in locis datis æquè altis A, a, dicantur A, a; in aliis locis æquè altis D, d, dicantur V, u, & erit (ex hyp.) $V : A = CD : CA = c\,d : c\,a = v : a$, adeóque $V : v = A : a$, ſed evaneſcentibus diſtantiis, CD, c d, ſunt V, v, vires abſolutæ (per definitionem VI. Newt.) quarè vires abſolutæ ſunt in ratione virium acceleratricium in locis æquè altis. Jam verò vires acceleratrices in locis quibuſlibet O, o, dicantur B, b, erit (ex Dem.)




$$V : v = A : a$$
Et per hyp. $CO : CA = B : A$
$CA$ vel $ca : Co = a : b$

Ergò ex æquo $V \times CO : v \times Co = B : b$, id eſt, vis acceleratrix in loco quovis O, eſt ut diſtantia à centro & vis abſoluta conjunctim.

(u) * *Itaque lineola naſcens HY, quæ ſit ut hæc vis acceleratrix CO×V, deſcribetur dato tempore.* Nam quadratum temporis quo deſcribitur naſcens HY, eſt ut $\frac{HY}{CO \times V}$ (per cor. V. lem. X.). Undè cum data ſit ratio HY ad $CO \times V$ (ex hyp.), quadratum temporis adeóque & tempus ipſum quo deſcribitur HY datum erit.

(x) * *Et ſi erigatur normalis &c.* Arcus HZ erit ad ſemiperipheriam HKM, ut tempus datum quo deſcribitur HY, ad tempus unius oſcillationis (prop. 38.) quod proindè erit ut ſemiperipheria HKM, ſeu ut radius GH directè, & arcus HZ inversè. Eſt autem arcus naſcens HZ æqualis chordæ HZ (per Lem. 7.) adeóque (ex naturâ circuli) $HZ^2 = HY \times MH = 2\,GH \times HY$; Quarè cum ſit HY ut

tiæ occurrens in $Z$, arcus naſcens $HZ$ denotabit datum illud tempus. Eſt autem arcus hic naſcens $HZ$ in ſubduplicatâ ratione rectanguli $GHY$, ideoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde tempus oſcillationis integræ in cycloide $QRS$ (cum ſit ut ſemiperipheria $HKM$, quæ oſcillationem illam integram denotat, directè; utque arcus $HZ$, qui datum tempus ſimiliter denotat, inversè) fiet ut $GH$ directè & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inversè, hoc eſt, ob æquales $GH$ & $SR$, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, ſive (per corol. prop. L.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque oſcillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuſcunque cum viribus abſolutis factæ, ſunt in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione longitudinis fili directè, & ſubduplicatâ ratione diſtantiæ inter punctum ſuſpenſionis & centrum globi inversè, & ſubduplicatâ ratione vis abſolutæ globi etiam inversè. *Q. E. I.*

*Corol.* 1. Hinc etiam oſcillantium, cadentium & revolventium corporum tempora poſſunt inter ſe conferri. Nam ſi rotæ, quâ cyclois integra globum deſcribitur, diameter conſtituatur æqualis ſemidiametro globi cyclois (y) evadet linea recta per centrum globi tranſiens, & oſcillatio jam erit deſcenſus & ſubſequens aſcenſus in hâc rectâ. Unde datur tum tempus deſcenſus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad diſtantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem deſcribit. Eſt (z) enim hoc tempus (per caſum ſecundum) ad tempus ſemioſcillationis in cycloide quâvis $QRS$ ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Co-

$CO \times V$, erit $HZ^2$ ut $2GH \times CO \times V$, ſeu, ut $GH \times CO \times V$, & hinc tempus unius oſcillationis ut $\frac{GH}{\sqrt{GH \times CO \times V}} = \sqrt{\frac{GH}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{SR}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$ ob $GH = SR$, & $\frac{AR}{AC} = \frac{SR}{CO}$, (per cor. prop. 50.)

(y) * *Cyclois evadet linea recta* (461).

(z) * *Eſt enim hoc tempus &c.* Quoniam cycloide $QRS$ in rectam mutatâ fit $AR = AC$, erit (per caſ. 2.) tum tempus deſcenſus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale (prop. 38.) per circuli quadrantem ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$. Unde erit

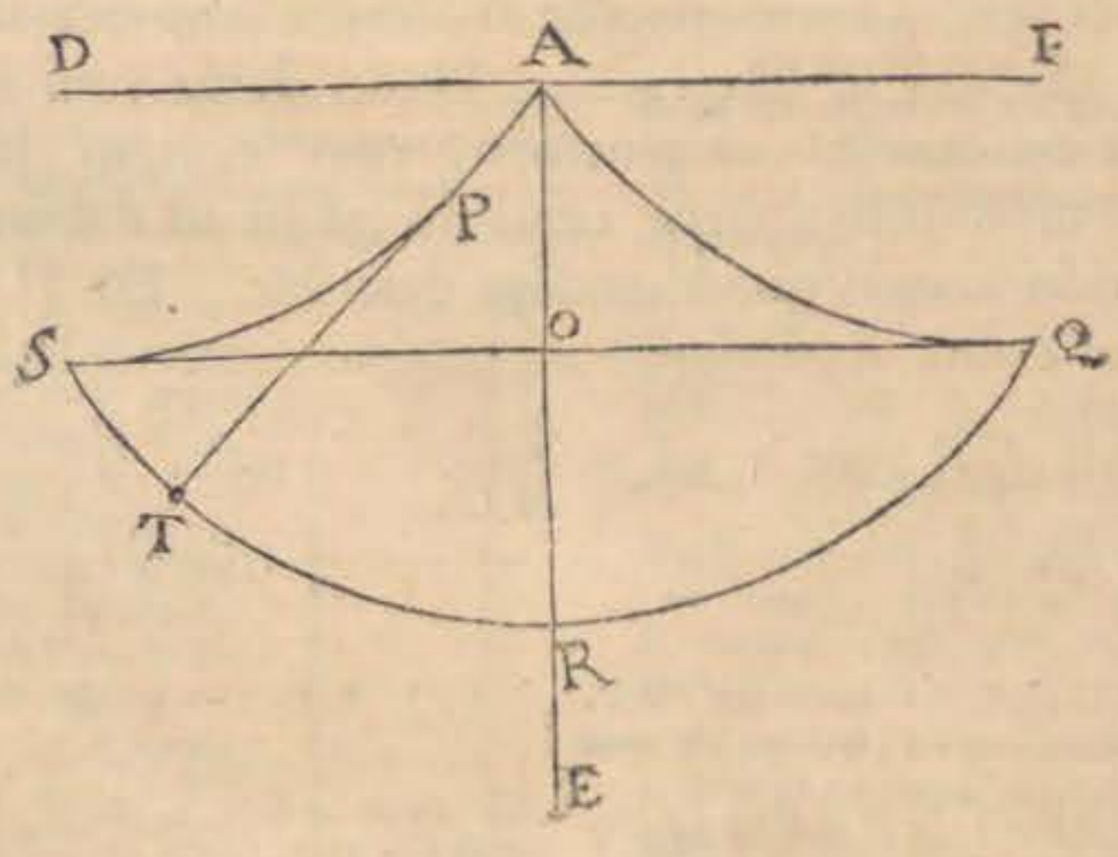
DE MOTU CORPORUM.

*Corol.* 2. Hinc etiam conſectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de cycloide vulgari adinvenerunt. Nam (a) ſi globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus ſuperficies ſphærica in planum, viſque (b) centripeta aget uniformiter ſecundum lineas huic plano perpendiculares, & cyclois noſtra abibit in cycloidem vulgi. Iſto (c) autem in caſu longitudo arcus cycloidis, inter planum illud & punctum deſcribens, æqualis evadet quadruplicato ſinui verſo dimidii arcus rotæ inter idem inter planum & punctum deſcribens; ut invenit *Wrennus:* Et (d) pendulum inter duas ejuſmodi cycloides in ſimili & æquali cycloide temporibus hoc tempus ad tempus ſemioſcillationis in cycloide quâvis Q R S in rectam non mutatâ ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$ ad $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$, hoc eſt, ob datam V, ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$. Quarè dato tempore unius oſcillationis in cycloide quâvis Q R S circa centrum C, dabitur tempus deſcenſus de loco quovis ad idem centrum, & tempus huic æquale per quadrantem circuli ad quamvis diſtantiam deſcripti.

(a) * *Nam ſi globi diameter augeatur* (462).

(b) * *Viſque centripeta* diſtantiæ infinitæ (quæ proinde non mutatur) proportionalis non mutabitur, & quoniam centro in infinitum abeunte, radii qui antè erant ad ſuperficiem ſphæricam perpendiculares fiunt paralleli; vis centripeta aget uniformiter ſecundùm lineas huic ſuperficiei in planum mutatæ perpendiculares.

(c) * *Iſto autem in caſu* (462).




(d) * *Et pendulum inter duas &c.* Erit enim in hoc caſu diameter rotæ O R quâ deſcribitur cyclois Q R S, æqualis diametro A O rotæ quâ deſcribitur cyclois A P S (462.), quarè ſemicycloides S R, A S ſimiles erunt & æquales.

ribus æqualibus oſcillabitur, ut demonſtravit *Hugenius*. Sed (e) & deſcenſus gravium, tempore oſcillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

Aptantur autem propoſitiones à nobis demonſtratæ ad veram conſtitutionem terræ, quâtenus rotæ eundo in ejus circulis maximis deſcribunt motu clavorum, perimetris ſuis infixorum, cycloides extra globum; & pendula inferius in fodinis & cavernis terræ ſuſpenſa, in cycloidibus intra globos oſcillari debent, ut oſcillationes omnes evadant iſochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu à ſuperficie terræ, ſurſum quidem in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro ejus, deorſum vero in ratione ſimplici.

PRO-

470. (e) * *Sed & deſcenſus &c.* Erit in hoc caſu tempus unius oſcillationis ad tempus deſcensûs perpendicularis per diametrum rotæ AO vel OR, ſeu per dimidiam penduli longitudinem ut peripheria circuli ad ejus diametrum. Nam iiſdem poſitis quæ (in prop. 52. & ejus cor. 2°.) erit tempus unius oſcillationis æquale tempori ſemirevolutionis in circulo HKM (prop. 38.). Eſt autem (200.) tempus ſemirevolutionis in circulo HKM, ad tempus deſcenſus uniformiter acceleràti per dimidium radium HG, ut peripheria circuli ad diametrum. Quarè cum ſit $\frac{1}{2}HG=\frac{1}{2}SR=\frac{1}{2}AR=OR$ (462.) erit tempus unius oſcillationis ad tempus deſcenſus perpendicularis per dimidiam penduli longitudinem ut circuli peripheria ad diametrum.

471. Corol. Dimidia penduli longitudo AO, eſt ad ſpatium AE deſcenſu perpendiculari deſcriptum unius oſcillationis tempore in duplicatâ ratione diametri ad peripheriam circuli. Sit enim tempus unius oſcillationis t, diameter circuli ad peripheriam, ut d, ad p, & erit (469) tempus deſcenſus perpendicularis per ſpatium $AO=\frac{dt}{p}$; ſed (27) $\frac{ddtt}{pp}:tt=AO:AE$, ergò $AO:AE=dd:pp$. Hugenius cui pendulorum theoria debetur prop. 25. part. 4. horologii oſcillatorii, longitudinem penduli ſingulas oſcillationes uno minuto ſecundo abſolventis invenit pedum Pariſ. 3. & linearum 8 $\frac{1}{2}$, hoc eſt, linearum $\frac{881}{2}$, & hinc dimidia penduli longitudo erat linearum $\frac{881}{4}=220.\ 25.$ Eſt autem diameter circuli ad peripheriam ut 113, ad 355, quam proxime, & proindè quadratum diametri ad quadratum peripheriæ ut 12769. ad 126025; quarè ſpatium uno minuto ſecundo deſcriptum à corpore gravi perpendiculariter cadente, eſt pedum Pariſ. 15 $\frac{1}{12}$, quam proximè.

472. Coroll. Quoniam propè telluris ſuperficiem gravium directio horizonti ad ſenſum perpendicularis eſt gravitaſque conſtans, atque adeò V gravitas abſoluta, & AC diſtantia à centro telluris datæ ſunt, in pendulis in cycloidem vulgarem aut etiam in exiguos arcus circuli (465) excurrentibus, tempus unius oſcillationis (per caſ. 2. prop. 52.) erit ut $\surd AR$, id eſt, in ratione ſubduplicatâ longitudinis penduli & proindè longitudo penduli in ratione duplicatâ temporis unius oſcillationis.

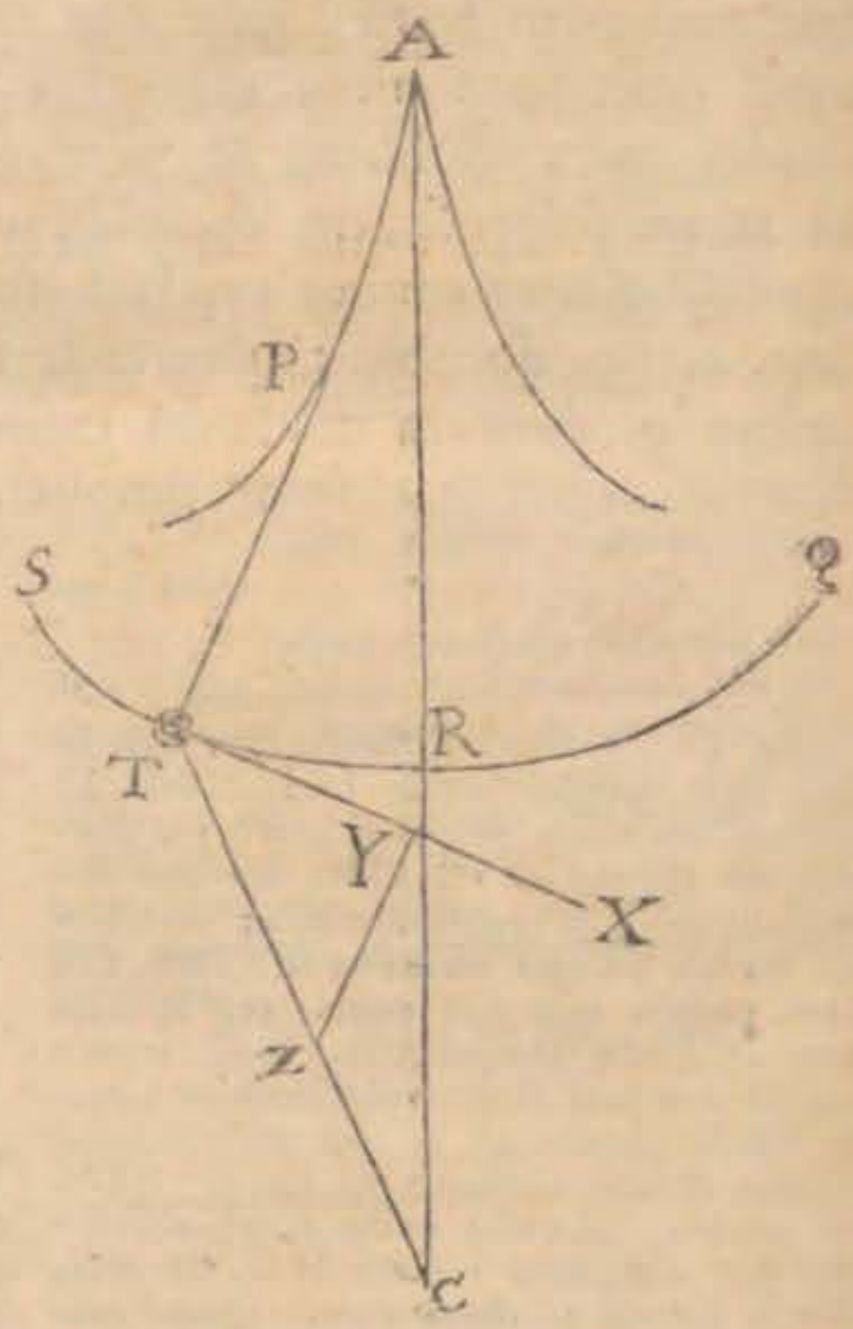
473.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

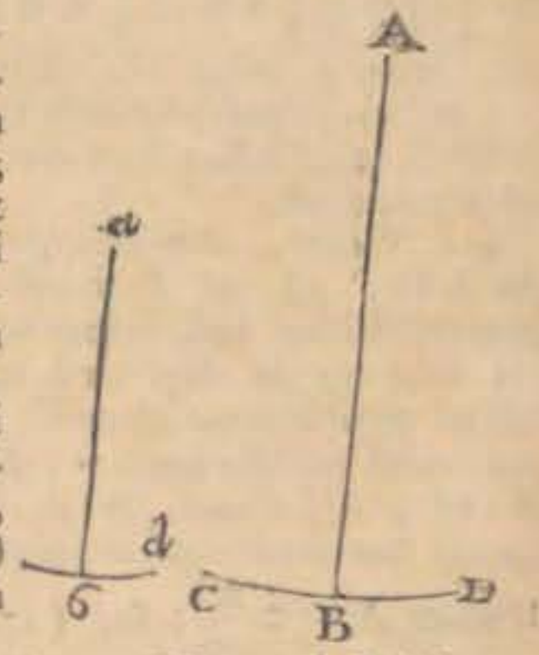
*Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oſcillationes ſemper iſochronas peragent.*

Oſcilletur corpus *T* in curvâ quâvis lineâ *STRQ*, cujus axis ſit *AR* tranſiens per virium centrum *C*. Agatur *TX* quæ curvam illam in corporis loco T quovis contingat, inque hâc tangente *TX* capiatur *TY* æqualis arcui *TR*. Nam (f) longitudo arcus illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innoteſcit. De puncto *Y* educatur recta *YZ* tangenti perpendicularis. Agatur *CT* perpendiculari illi occurrens in *Z*, & erit vis centripeta proportionalis rectæ *TZ*. *Q. E. I.*




Nam ſi vis, quâ corpus trahitur de *T* verſus *C*, exponatur

473. Corol. Numeri oſcillationum iſochronarum à duobus pendulis A B, a b, eodem tempore confectarum ſunt reciprocè ut tempora quibus ſingulæ oſcillationes fiunt. Nam ſi pendulum a b, bis oſcilletur eo tempore quo A B ſemel; a b, quatuor oſcillationes abſolvet, dum A B duas conficit, & ità porrò in aliis ſuppoſitionibus, ut patet. Quare numeri oſcillationum iſochronarum eodem tempore à duobus pendulis confectarum ſunt in ratione ſubduplicatâ longitudinum pendulorum inversè (472).

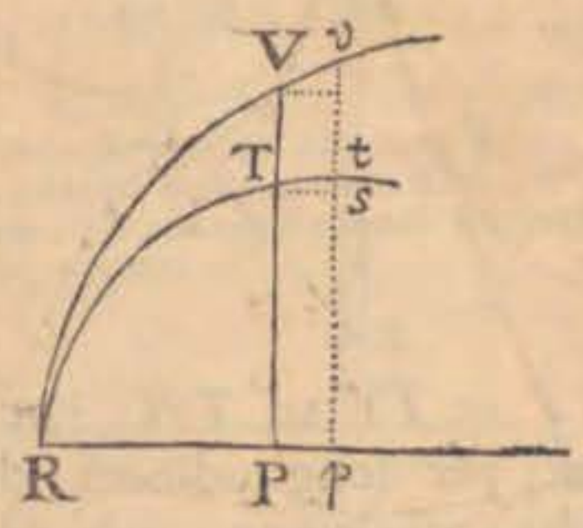



474. Coroll. Hinc ſi tempus unius oſcillationis penduli A B, ſit T, tempus unius oſcillationis penduli a b, ſit t, numeri oſcillationum eodem tempore confectarum N, n, erit $T : t = n : N$ (473), & $TT : tt = AB : ab$ (472) ac propterea $nn : NN = AB : ab$. Datis igitur tribus harum proportionum terminis quartus datus eſt.

(f) 476. *Nam longitudo arcus &c.* Curvæ R T t ſit axis R P, vertex R, ad axem ordinatim applicatæ T P, t p, infinitè propinquæ T s axi parallela & ordinatæ t p occu-

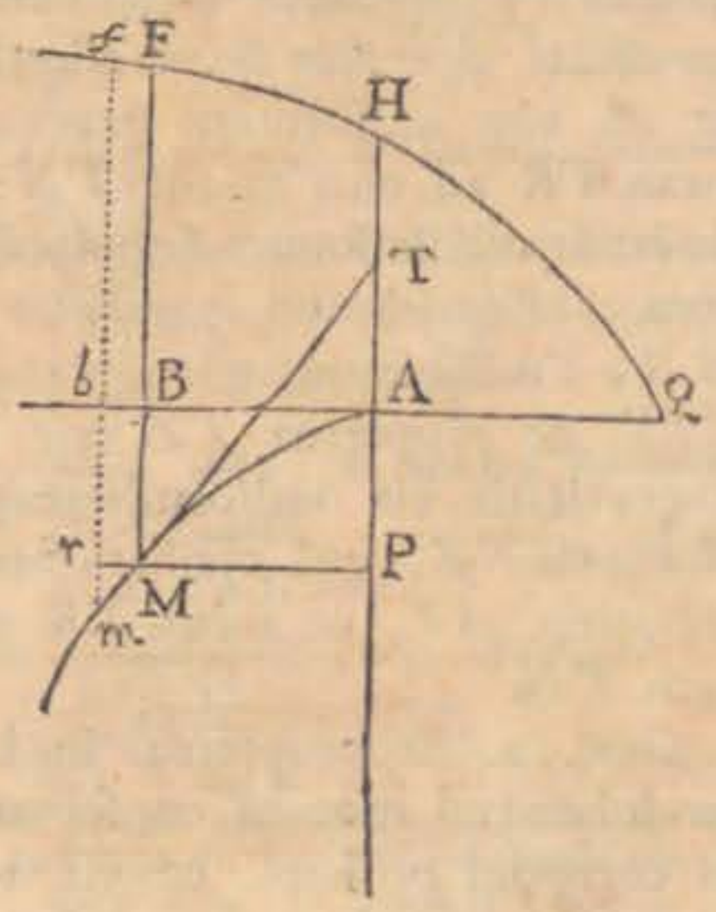
per rectam $TZ$ captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires $TY$, $YZ$; quarum $YZ$ trahendo corpus secundum longitudinem fili $PT$, motum ejus nil mutat, vis autem altera $TY$ motum ejus in curvâ $STRQ$ directè accelerat vel directè retardat. (g) Proinde cum hæc sit ut via describenda $TR$, accelerationes corporis vel retardationes in oscillationum duarum (ma-

LIBER PRIMUS. PROP. LIII. PROBL. XXXV.




occurrens in s. Sit $RP=x$, $PT=y$, & erit $Pp=Ts=dx$, $ts=dy$, $Tt^2=dx^2+dy^2$, $Tt=\sqrt{dx^2+dy^2}$; quare RT, fluens ipsius Tt, æqualis erit fluenti quantitatis $\sqrt{dx^2+dy^2}$. Ex æquatione ad curvam RT, quæratur valor ipsius $dy$ per $dx$ & alias quantitates, sitque $dy=Q\,dx$, $Q$ vero quantitas quælibet constans aut variabilis, erit $\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+QQ}$. In perpendiculo PT, capiatur $PV=A\times\sqrt{1+QQ}$, sitque A quantitas data, & curva RV locus punctorum V, erit areæ RVP elementum $Pp\times PV=A\,dx\sqrt{1+QQ}$, undè $Tt=dx\sqrt{1+QQ}=\frac{Pp\times PV}{A}$, & capiendo utrinque fluentes $RT=$ areæ $\frac{RVP}{A}$, curvæ igitur RT rectificatio ad quadraturam figuræ RVP reducta est.

476. Idem alia methodo fieri potest. Sit curvæ hujus rectificandæ AMm, axis AP, & vertex A. Per punctum quodvis M agatur tangens MT axi occurrens in T, & MF axi parallela rectam AB axi normalem secans in B; capiatur semper



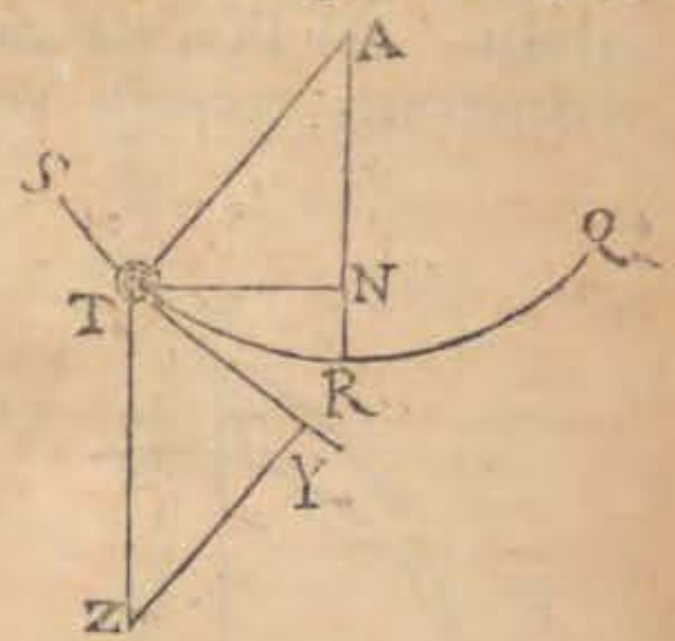

AB ad MT sicut constans quævis A ad BF, & punctum F curvam FHQ perpetuò tangat, erit spatium curvilineum BFHA æquale rectangulo sub arcu AM & constanti $A$ comprehenso, adeóque arcus $AM=\frac{BFHA}{A}$. Nam ductâ mf priori MF parallelâ & infinitè propinquâ, demissoque ad axem AP perpendiculo MP, quod rectam mf, secat in r; erit ob triangula MPT, Mrm similia $Mr:Mm=MP$, vel $BA:MT=A:BF$ (per constr.) Ergò $BF\times Mr$, id est, elementum $BbfF=Mm\times A$, ac proindè spatium fluens AHFB æquale fluenti $AM\times A$.

(g) * *Proindè &c.* Quæ sequuntur manifesta sunt (ex dem. prop. 51.)

DE MOTU CORPORUM.

(majoris & minoris) partibus proportionalibus deſcribendis, erunt ſemper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ ſimul deſcribantur. Corpora autem quæ partes totis ſemper proportionales ſimul deſcribunt, ſimul deſcribent totas. *Q. E. D.* (h).

*Corol.* 1. Hinc ſi corpus *T*, filo rectilineo *AT* à centro *A* pendens, deſcribat arcum circularem *STRQ*, & interea (i) urgeatur ſecundum lineas parallelas deorſum à vi aliquâ, quæ ſit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus *TR* ad ejus ſinum *TN*: æqualia erunt oſcillationum ſingularum tempora. Etenim ob parallelas *TZ*, *AR*, ſimilia erunt triangula *ATN*, *ZTY*; & propterea *TZ* erit ad *AT* ut *TY* ad *TN*; hoc eſt, ſi gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam *AT*; vis *TZ*, quâ oſcillationes evadent iſochronæ, erit ad vim gravitatis *AT*, ut arcus *TR* ipſi *TY* æqualis ad arcûs illius ſinum *TN*.




*Corol.* 2. Et propterea in horologiis, ſi vires à machinâ in pendulum ad motum conſervandum impreſſæ ita cum vi gravitatis componi poſſint, ut vis tota deorſum ſemper ſit ut linea quæ oritur applicando rectangulum ſub arcu *TR* & radio *AR*

(h) 477. *Q. E. D.* Datâ vi centripetâ TZ quâ corpus in datâ curvâ SRQ oſcillationes ſemper iſochronas peragit, velocitates illius corporis in locis ſingulis & tempora quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur eodem modo definiuntur ac in caſ. 1°. prop. 52. Ductâ enim ex centro virium C rectâ quæ curvam tangat in puncto aliquo S, erit in hoc puncto TZ=TY, hoc eſt, vis centripeta in curvâ STR æqualis vi centripetæ ad C perpendiculariter tendenti in S; quare manente conſtructione caſ. 1. prop. 52. & ſupponendo vim centripetam in H, (vid. fig. ibid.) quâ deſcribitur circulus HKM, æqualem vi centripetæ in S, tempus unius oſcillationis & ſingulæ oſcillationum partes, & velocitates in locis ſingulis invenientur prorſus (ut in not. 468.) iiſdemque ratiociniis res omnis demonſtrabitur.

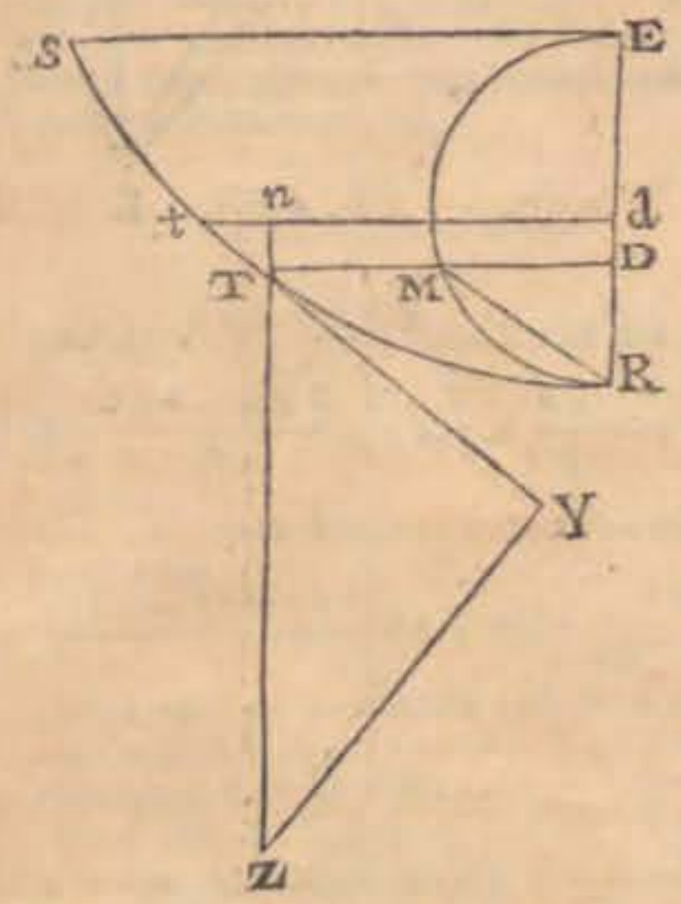
(i) * *Intereà urgeatur ſecundum lineas parallelas &c.* Centro C figuræ ſuperioris in infinitum abeunte.

*AR* ad ſinum *TN*, oſcillationes (k) omnes erunt iſochronæ.

LIBER PRIMUS. PROP. LIII. PROBL. XXXV.

(k) * *Oſcillationes omnes erunt iſochronæ.* Cum enim vis tota TZ quâ oſcillationes reduntur iſochronæ ſit (per cor. 1.) ad vim gravitatis AT ſeu AR, ut TR ad TN, erit $TZ = \frac{AR \times TR}{TN}$, adeóque vis tota TZ, ut $\frac{AR \times TR}{TN}$.

478. Ex demonſtratis ſolvi poteſt hoc problema: Datâ lege vis centripetæ, invenire curvam tautochronam STR, in quâ nimirum, corpus oſcillationes ſemper iſochronas peragat.

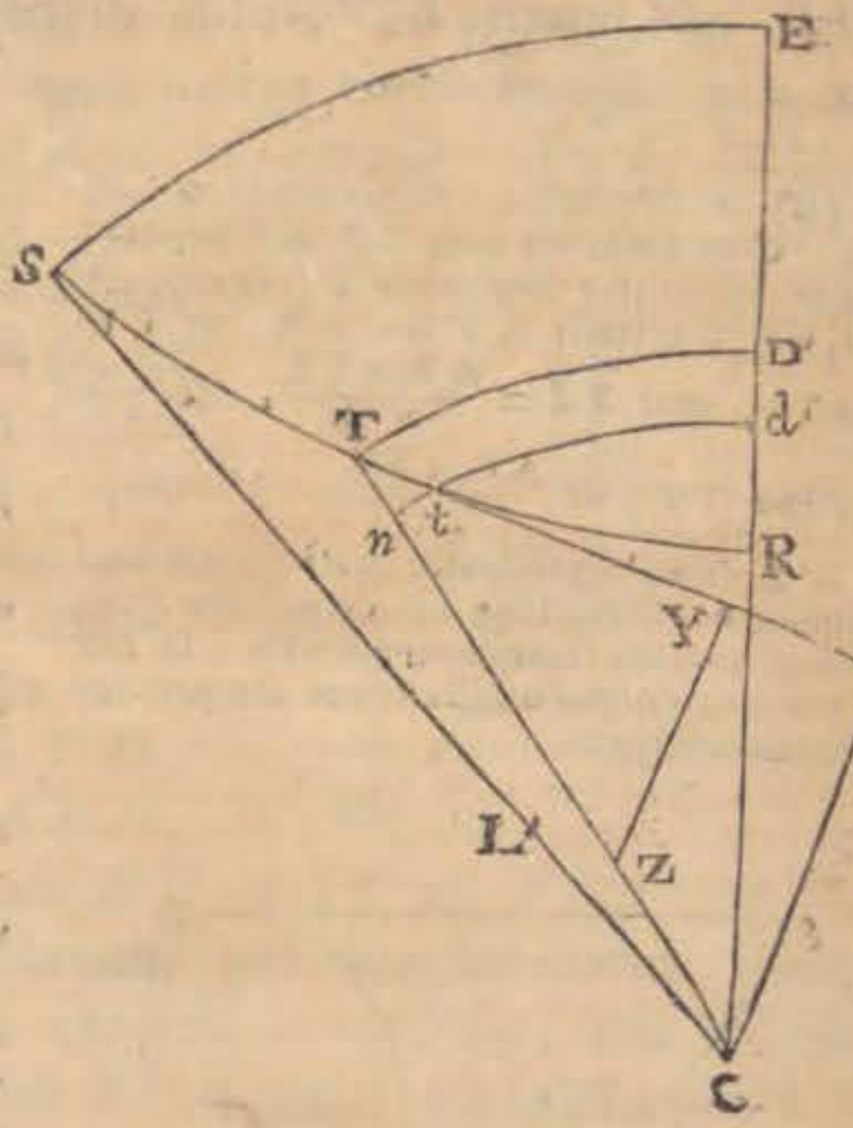



Caſus 1^us. Vis gravitatis directio TZ ſemper ſit parallela axi ER curvæ STR, ſint SE, td, TD ad axem RE ordinatim applicatæ, punctum E datum, puncta D, d infinitè propinqua, tangens TY æqualis arcui TR, YZ ad TY perpendicularis ſecet TZ in Z, & ZT producta ſecet td in n. Dicantur $RE = a$, vis gravitatis in E vel $S = g$, in D vel $T = v$, pars lineæ verticalis per S ductæ determinata ad modum verticalis TZ, ſit $= b$, $RD = x$, $DT = y$, $TR = TY = s$. Ob triangula Tnt, TYZ ſimilia, $Tn\,(dx) : Tt\,(ds) = TY\,(s) : TZ = \frac{s\,ds}{dx}$; ob angulum Tnt rectum $ds^2 = dx^2 + dy^2$; & (per prop. 53.) $g : v = b : TZ\left(\frac{s\,ds}{dx}\right)$, ideoque $s\,ds = \frac{b}{g}\,v\,dx$, & ſumptis fluentibus $\frac{1}{2}\,ss = \frac{b}{g}$ S. $v\,dx$; fluens autem S. $v\,dx$ ita ſumi debet, ut evaneſcente $x$, ea fluens evaneſcat. Erit igitur $ss = \frac{2b}{g}$ S. $v\,dx$, $s = \sqrt{\frac{2b}{g}\text{ S. }v\,dx}$, & ſumptis fluxionibus $ds = \frac{b\,v\,dx}{\sqrt{2bg\text{ S. }v\,dx}}$, proindeque $ds^2 = \frac{bb\,v\,v\,dx^2}{2bg\text{ S. }v\,dx} = dx^2 + dy^2$, & hinc $dx\sqrt{\frac{bvv - 2g\text{ S. }v\,dx}{2g\text{ S. }v\,dx}} = dy$ æquatio ad curvam tautochronam STR, in quâ datâ lege vis gravitatis exterminabitur $v$.

Exemplum. Sit gravitas conſtans, ſeu $v = g$, & erit $v\,dx = g\,dx$, S. $v\,dx = g\,x$, quæ evaneſcit, ubi $x = 0$. Quare æquatio ad curvam SR fiet $dx\sqrt{\frac{b - 2x}{2x}} = dy$. Quoniam vero $ss = \frac{2b}{g}$ S. $v\,dx = 2bx$, ſi ponatur $b = SR$, ut verticalis per S ducta curvam tangat in S, & loco $s$ ſcribatur $b$, ac loco $x$ ſcribatur $a$, erit $bb = 2ba$, & proinde $b = 2a$, atque $ss = 4ax$, hoc eſt, $SR = 2RE$, & $TR^2 = 4RE \times RD$; porrò ſi diametro RE deſcribatur circulus EMR ſecans DT in M, erit $MR^2 = RE \times RD$, $4MR^2 = 4RE \times RD$; ideoque $TR^2 = 4MR^2$, & $TR = 2MR$, quæ eſt proprietas cycloidis vulgaris circulo genitore EMR deſcriptæ.

DE MOTU CORPORUM.

Casus 2. Tendat vis centripeta ad punctum datum C. Centro C, radiis CE, CD, Cd descripti sint arcus circulares ES, DT, dtn, curvæ SR occurrentes in S, T, t, & rectæ CT in n, sintque E punctum in axe CE datum, D, d puncta infinitè propinqua, tangentis TX per T ductæ pars TY æqualis arcui TR, & ZY, CX ad tangentem perpendiculares. Dicantur $CE=a$, $CR=c$, SL pars radii CS eodem modo determinata ac TZ pars radii CT fit $=b$, vis centripeta in E vel $S=g$, in D vel $T=v$, CD vel $CT=x$, TR vel $TY=s$, $CX=p$. Ob similitudinem triangulorum Tnt, TYZ, TXC, est $Tn\ (dx) : Tt\ (ds) = TY\ (s) : TZ = \frac{s\,ds}{dx}$ & $TC(x) : CX\ (p) = Tt\ (ds) : tn = \frac{p\,ds}{x}$, ideoque ob angulum Tnt rectum $ds^2 = dx^2 + \frac{pp\,ds^2}{xx}$, & proinde $ds^2 = \frac{xx\,dx^2}{xx-pp}$.




Verum per prop. 53. $g : v = b : TZ\ \left(\frac{s\,ds}{dx}\right)$, unde $s\,ds = \frac{b}{g} v\,dx$, & sumptis fluentibus $\frac{1}{2} ss = \frac{b}{g}$ S. $v\,dx$. Quoniam autem evanescente $s$, fit $x = c$, fluens S. $v\,dx$ ita accipi debet, ut, posità $x=c$, evanescat. Erit igitur $ss = \frac{2b}{g}$ S. $v\,dx$, $s = \sqrt{\frac{2b}{g}\text{ S. }v\,dx}$, & sumptis fluxionibus $ds = \frac{b v\,dx}{\sqrt{2bg\text{ S. }v\,dx}}$, unde $ds^2 = \frac{bv\,dx^2}{2g\text{ S. }v\,dx} = \frac{xx\,dx^2}{xx-pp}$, atque adeo $\frac{bvv}{2g\text{ S. }v\,dx} = \frac{x^2}{xx-pp}$ æquatio ad tautochronam STR, in quâ datâ lege vis centripetæ delebitur $v$.

Exemplum. Vis centripeta sit ut distantia à centro C, hoc est, $g : v = a : x$, adeoque $v = \frac{gx}{a}$, $v\,dx = \frac{g\,x\,dx}{a}$, S. $v\,dx = \frac{g\,xx}{2a} + Q$ (constantem) & quoniam posità $x=c$, evanescit S. $v\,dx$, erit $Q = \frac{-g\,cc}{2a}$, atque ita S. $v\,dx = \frac{g\,xx - g\,cc}{2a}$. Quarè erit $ss = \frac{2b}{g}$ S. $v\,dx = \frac{b\,xx - b\,cc}{a}$, & æquatio ad tautochronam evadet $\frac{bxx}{axx-acc} = \frac{xx}{xx-pp}$, seu $pp = \frac{b\,xx - a\,xx + acc}{b}$.

Jam si in hac æquatione ponatur $b=a$, erit $p=c$, & $ss = xx = cc$, ideoque tautochrona SR linea recta ad CR perpendicularis in R.

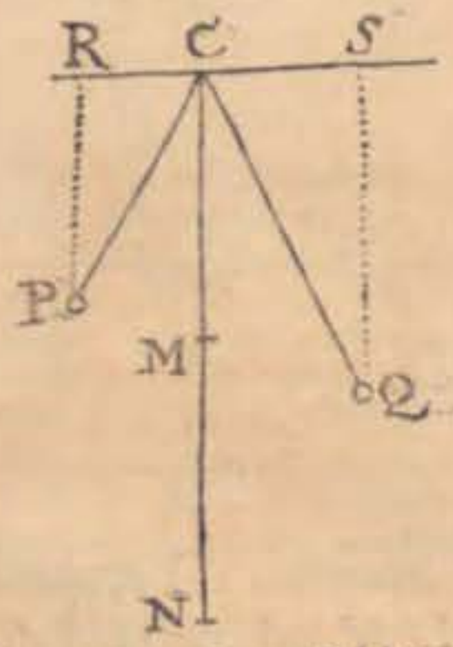
Si ponatur $b$ major quam $a$, & $c=0$, erit $p = x\sqrt{\frac{b-a}{b}}$, adeoque $p$ ad $x$ in ratione datâ, cumque sit $p$ seu CX sinus anguli CTX, existente radio $x$ seu CT, erit angulus CTX constans, & proinde tautochrona SR spiralis logarithmica.

Si fuerit $b$ minor quam $a$, & recta CS curvam SR tangat in S, erit $b = SR$; cumque sit $ss = \frac{b\,xx - b\,cc}{a}$, si ponatur $s = SR = b$, & proinde $x=a$ fiet $bb = :$

$ba$

$\frac{baa-bcc}{a}$, & $b=\frac{aa-cc}{a}$. Jam si in æquatione ad curvam SR loco $b$ scribatur $\frac{aa-cc}{a}$, erit $pp=\frac{aacc-ccxx}{aa-cc}$ æquatio ad cycloidem, quæ describitur rotatione circuli cujus diameter est RE seu $a-c$ super concavam peripheriam circuli centro C radio CE seu $a$ descripti, ut liquet per n. 466.

Schol. In superioribus de pendulorum motu propositionibus corporis penduli gravitatem in centro ceu puncto coactam & filum gravitatis expers supposuimus, quæ pendulum simplex constituunt. Quamobrem ne demonstratæ oscillationum leges in experimentis valde perturbentur, filum usurpandum est tenue cum globo exiguo & ex materiâ gravissimâ conflato. Si verò filum aut virga è quâ globus pendet gravis fuerit & globus major, pendulum non amplius simplex est, sed compositum, quod pluribus ponderibus inter se connexis instructum est.




Pendulum compositum CPQ, onustum quotcumque ponduculis P, Q, &c. quorum commune gravitatis centrum M circà punctum suspensionis C oscilletur. Recta CM per punctum suspensionis C & commune gravitatis centrum M ducta vocatur axis penduli compositi PCQ, recta verò RCS in puncto suspensionis C ad axem penduli CM perpendicularis dicitur axis oscillationis. Si in axe penduli compositi CM, capiatur CN æqualis longitudini penduli simplicis suas oscillationes in circulo eodem tempore quo pendulum compositum CPQ semper absolvens, pendulum illud simplex composito CPQ synchronum vel etiam isochronum dicitur, & punctum N centrum oscillationis penduli compositi CPQ appellatur. Porrò si singulorum ponduculorum P, Q &c. gravitas in punctis P, Q &c. collecta intelligatur, & lineæ PC, QC &c. gravitatis expertes supponantur, sitque M summa ponduculorum omnium P, Q, &c. atque ex punctis P, Q &c. ad axem oscillationis RCS demittantur perpendicula PR, QS &c. erit $CN=\frac{P\times PR^2+Q\times QS^2}{M\times MC}+$ &c. id est, si pondera singula penduli compositi ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis, orietur longitudo penduli simplicis compositi isochroni, sive distantiâ inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi. Hoc pulcherrimum theorema quo linearum ac figurarum omnium oscillantium centrum oscillationis determinatur, primus in horologio oscillatorio invenit ac demonstravit Hugenius. Idem theorema suo quisque modo postea demonstrarunt fratres celeberrimi Jacobus & Joannes Bernoulli, ille in actis Lipsiensibus an. 1691. & commentariis Paris. an. 1703. Hinc verò in actis Lipsiensibus & commentariis Paris. an. 1714, quorum demonstrationes exposuit clariss. Wolfius in elementis Mechanices. Hermannus quoque lib. 1°. Phoron. cap. 5°. & initio tomi 5ti. Acad. Petropol. duas ejusdem theorematis demonstrationes edidit.

Hugenius horologii oscillatorii parte 4ª. prop. 22. distantiam centri oscillationis à puncto suspensionis in sphærâ filo tenui suspensâ æqualem esse invenit longitudini fili cum radio sphæræ atque duabus quintis partibus tertiæ proportionalis ad lineam compositam ex radio sphæræ ac longitudine fili & radium ipsum, hoc est, si filum dicatur L, radius sphæræ R, distantia centri oscillationis à puncto suspensionis D, erit $D=L+R+\frac{2RR}{5(L+R)}$. Sed hæc omnia indicare, non verò demonstrare nobis licet, cum his Propositionibus non utatur autor noster.

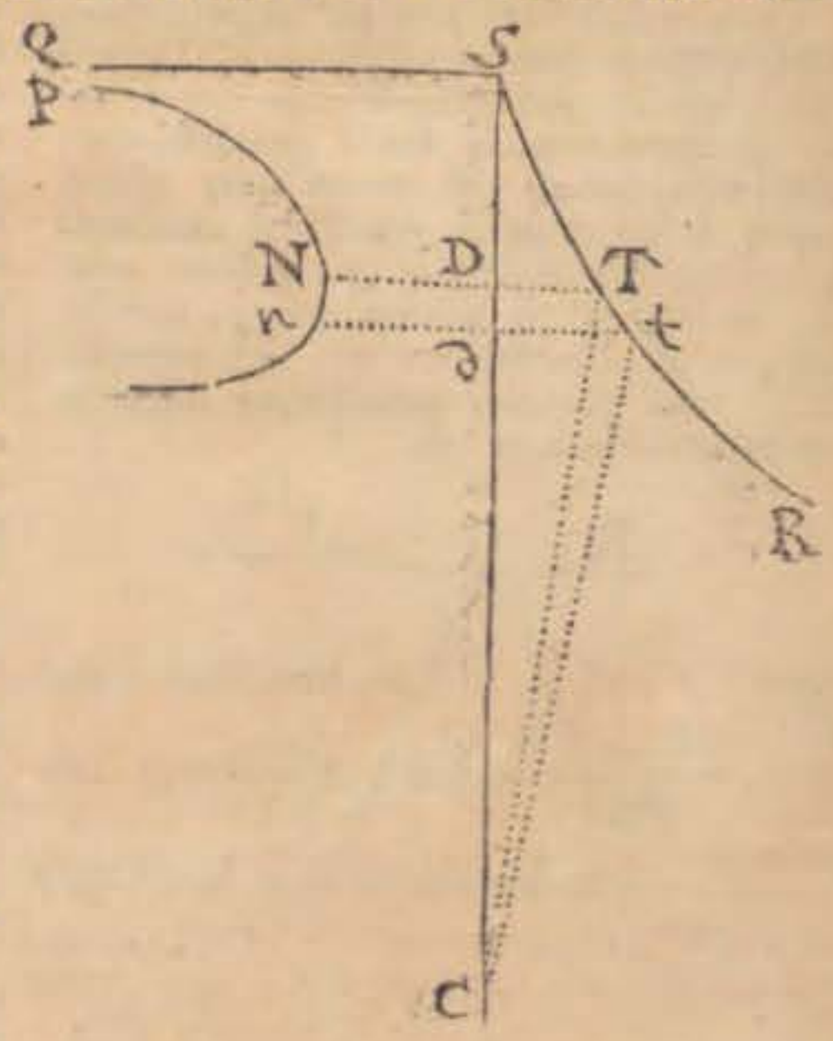
LIBER PRIMUS. PROP. LIII. PROBL. XXXV.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

*Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuſcunque curvis, in plano per centrum virium tranſeunte deſcriptis, deſcendent & aſcendent.*

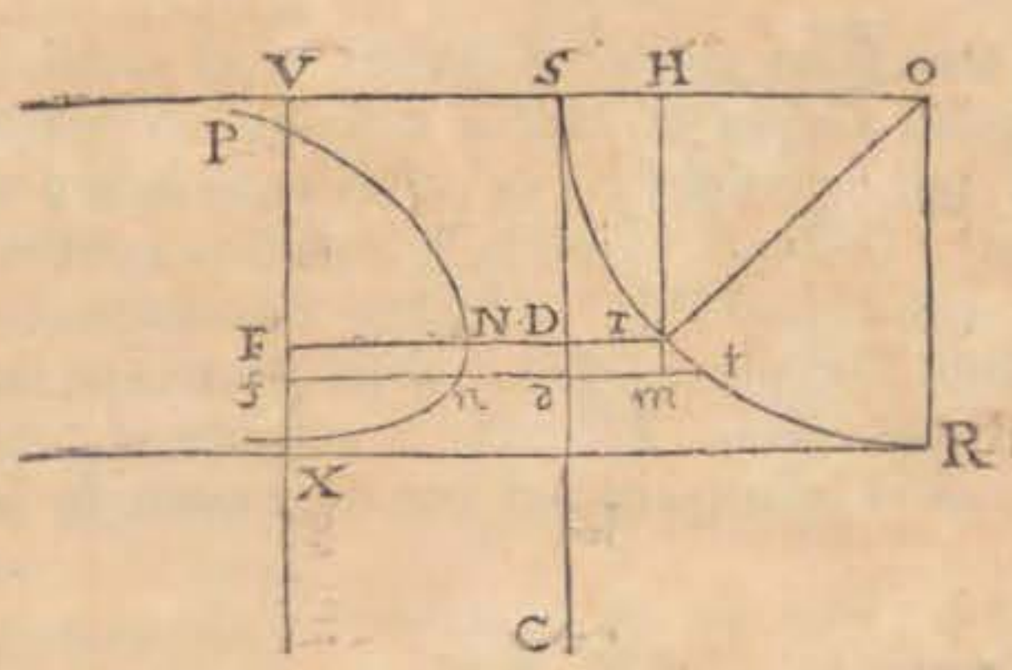
Deſcendat corpus de loco quovis $S$, per lineam quamvis curvam $STtR$ in plano per virium centrum $C$ tranſeunte datam. Jungatur $CS$ & dividatur eadem in partes innumeras æquales, ſitque $Dd$ partium illarum aliqua. Centro $C$ intervallis $CD$, $Cd$ deſcribantur circuli $DT$, $dt$, lineæ curvæ $STtR$ occurrentes in $T$ & $t$. Et ex datâ tum lege vis centripetæ, tum altitudine $CS$ de quâ corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in aliâ quâvis altitudine $CT$ (per prop. XXXIX.) ([1]) Tempus autem, quo corpus deſcribit lineolam $Tt$, eſt ut lineolæ hujus longitudo, id eſt, ut ſecans anguli $tTC$ directè; & velocitas inversè. Tempori huic proportionalis ſit ordinatim applicata $DN$ ad rectam $CS$ per punctum $D$ perpendicularis, & ob datam $Dd$ erit rectangulum $\frac{Dd}{}$




([1]) **Tempus autem quo corpus &c.* Nam, $Tt$, eſt ſpatium naſcens velocitate uniformi deſcriptum, eſt autem tempus quo ſpatium aliquod æquabiliter deſcribitur ut ſpatium illud directè & velocitas inversè (5). Porrò ſi centro $T$ radio dato $Dd$, æquali differentiæ rectarum $TC$, $tC$ circulus deſcribi intelligatur, erit $Tt$ ſecans anguli $tTC$, quarè ob datum radium $Dd$ erit ſemper $Tt$ ut ſecans anguli $tTC$, atque adeò tempus quo deſcribitur $Tt$ erit ut illa ſecans directè & velocitas inversè. Sed datâ tangente curvæ $STR$ in puncto $T$ datur anguli $CTt$ ſecans; undè dabitur $DN$ proportionalis tempori quo deſcribitur $Tt$.

$Dd \times DN$, hoc est area $DNnd$, eidem tempori proportionale. Ergo si $PNn$ sit curva illa linea quam punctum $N$ perpetuo tangit, ejusque asymptotos sit recta $SQ$ rectæ $CS$ perpendiculariter insistens: erit area $SQPND$ proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam $ST$; proindeque ex inventâ illâ areâ dabitur tempus. *Q. E. I.*

PRO-




479. Exemplum. Centrum virium C, in infinitum abeat, ut fit vis centripeta constans, illiusque directio rectæ SDC semper parallela, & arcus DT, dt, in rectas lineas ad SD normales mutentur. Sit curva STR circuli quadrans cujus centrum O & radius OS ad SD perpendicularis; producantur perpendicula TD, OS ad F & V, & DF constans gravitatem exhibeat in loco D, punctum F perpetuò tanget rectam VF lineæ SD parallelam, eritque (408) velocitas in D vel $T = \sqrt{2SD \times FD}$. Ex puncto T ad SO demittatur perpendiculum TH rectam dt secans in m, sitque $SO = a$, $SV = FD = b$, $SD = TH = x$ & ob triangula TOH, tTm, similia, erit $HO (\sqrt{aa - xx})$: $TO (a) = Tm (dx) : Tt = \frac{a\,dx}{\sqrt{aa - xx}}$, velocitas in $T = \sqrt{2SD \times DF} = \sqrt{2bx}$. Quare tempus per arcum nascentem $Tt = \frac{Tt}{\sqrt{2bx}} (5) = \frac{a\,dx}{\sqrt{2aabx - 2bx^3}}$ undè $DN = \frac{a}{\sqrt{2baax - 2bx^3}}$. Si DN dicatur $y$, erit $yy = \frac{aa}{2baax - 2bx^3}$ æquatio ad curvam PNn, in quâ si ponatur $x = o$ vel $x = a$ erit $y$ infinita, & proindè rectæ OV, RX ad SD perpendiculares sunt hujus curvæ asymptoti.

Similiter si corpus de loco R ascendat in semicirculo RTS, sitque ejus velocitas in R illa quâ possit ad altitudinem verticalem $e$ ascendere, dicanturque XV seu $RO = a$, $FX = x$, ideoque velocitas in $T = \sqrt{2be - 2bx}$, & $Tt = \frac{a\,dx}{\sqrt{aa - xx}}$; erit tempus per $Tt = \frac{a\,dx}{\sqrt{2be - 2bx \times aa - xx}}$ & $DN = y = \frac{a}{\sqrt{2be - 2bx \times (aa - xx)}}$, ubi DN per unitatis quadratum, ut servetur homogeneitas, divisa intelligitur. Sche-

DE MOTU CORPORUM.

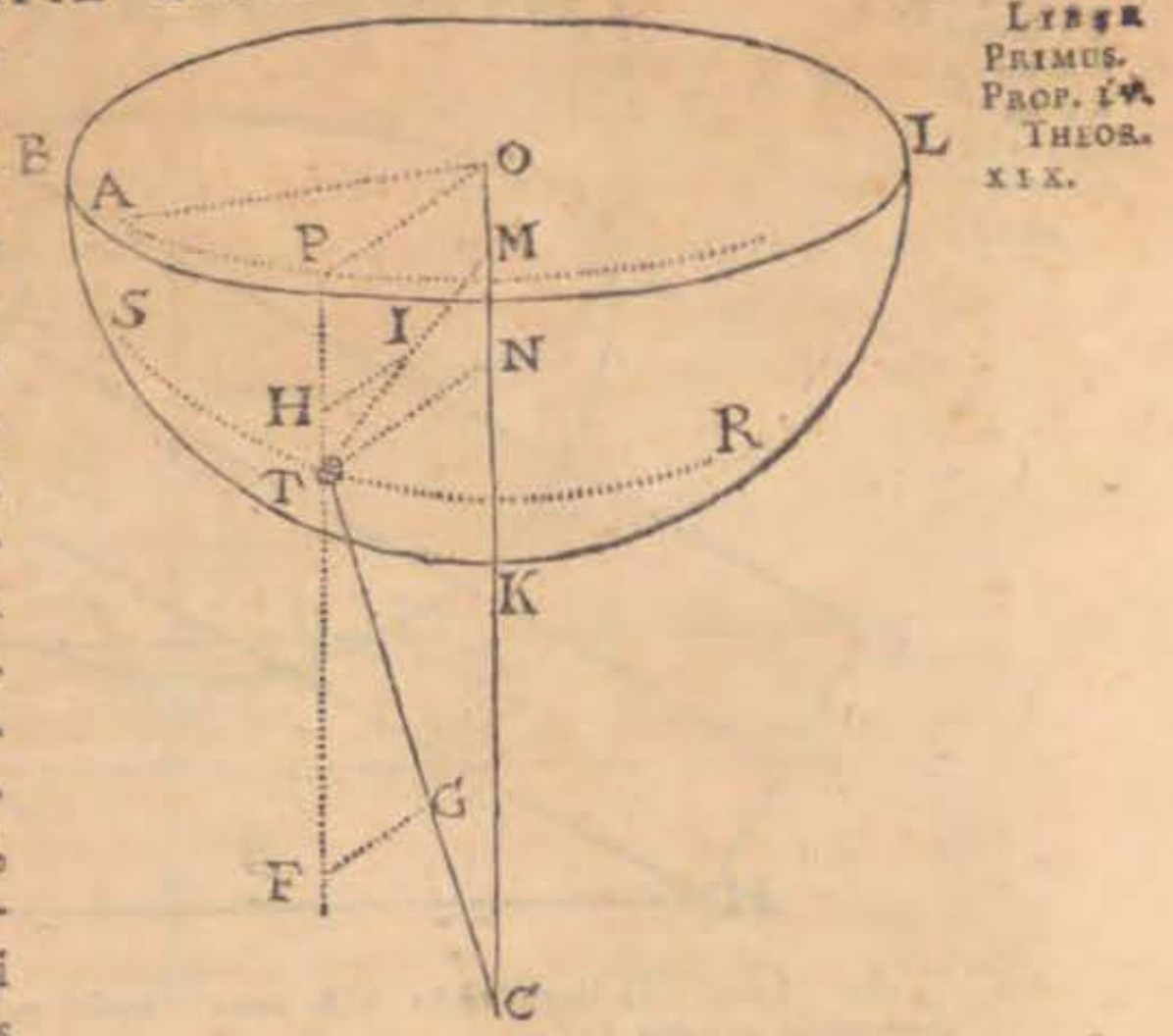
## PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

*Si corpus movetur in ſuperficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium tranſit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem deſcribet.*

Sit $BKL$ ſuperficies curva, $T$ corpus in eâ revolvens, $STR$ trajectoria, quam corpus in eâdem deſcribit, $S$ initium trajectoriæ, $OMK$ axis ſuperficiei curvæ, $TN$ recta à corpore in axem perpendicularis, $OP$ huic parallela & æqualis à puncto $O$, quod in axe datur, educta; $AP$ (m) veſtigium trajectoriæ à puncto $P$ in lineæ volubilis $OP$ plano $AOP$ deſcriptum; $A$ veſtigii initium puncto $S$ reſpondens; $TC$ recta à corpore ad centrum ducta; $TG$ pars ejus vi centripetæ quâ corpus urgetur in centrum $C$, pro-

Scholium. Si ex his tribus, vi centripetâ in ſingulis locis, curvâ in quâ corpus aſcendit vel deſcendit, & tempore quo ſinguli curvæ arcus percurruntur, duo data fuerint, tertium dabitur. Sit enim (in ſuperioribus figuris) $D d = dx$, $T t = dt$, $t m = dy$, velocitas in $T = c$, & erit $dt^2 = dx^2 + dy^2$, & (5) $c\,dt = ds$, ideoque $cc\,dt^2 = dx^2 + dy^2$. Quare ſi, datâ vi centripetâ, ſeu (per prop. 39.) æquatione inter $c$ & $x$, detur etiam æquatio inter $t$ & $x$ vel $y$, dabitur æquatio inter $x$ & $y$, hoc eſt, æquatio ad curvam $STt$, & vice verſâ. Exempli cauſâ, poſitâ vi centripetâ conſtante & ad diſtantiam infinitam tendente, corpus ita deſcendat in curva $STt$, ut tempus per arcum quemvis $ST$ proportionale ſit altitudini correſpondenti $Sd$, dicanturque $Sd = x$, $DT = y$, tempus per $ST = t$, velocitas in $T = c$; & erit $dt$ ut $dx$, & $c$ ut $\sqrt{x}$, ideoque $c\,dt$ ut $dx\sqrt{x}$, & hinc ſi fuerit $a$ quantitas conſtans, $c\,dt = dx\frac{\sqrt{x}}{a}$ & proinde $\frac{x\,dx^2}{a} = dx^2 + dy^2$, & hinc $(x-a)\,dx^2 = a\,dy^2$. Ponatur $x - a = v$, & erit $dx = dv$, & $v^{\frac{1}{2}}dv = a^{\frac{1}{2}}dy$, ſumptiſque fluentibus $\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}}y$, $\frac{4}{9}v^3 = ayy$, $v^3 = \frac{9}{4}ayy$, æquatio ad parabolam ſecundi generis, cujus eſt latus rectum $\frac{9a}{4}$, abſciſſa $v$, & ordinatim applicata $y$. Sed quoniam in illâ parabolâ, poſitâ $y = 0$, fit $v = 0$, adeoque $x - a = v = 0$, & $x = a$, patet corpus de altitudine $a$ cadere debere antequam in parabola deſcendat, capiendamque eſſe $SD = v$, ut tempus per arcum $ST$ ſit proportionale altitudini $v + a$, ſeu $x$.

(m) * *AP veſtigium &c.* Si corpus in ſuperficie quâcunque curvâ moveatur, ſuoque motu curvam deſcribat quæ in plano poſita non ſit, ad planum eſt referenda, idque fit ſi in ſuperficie curvâ aliquod fingatur planum ad quod ex ſingulis curvæ deſcriptæ punctis erigantur perpendiculares, quarum extremitates aliam in plano lineam deſcribent, hæc linea primæ veſtigium ſeu linea projectionis dicitur.

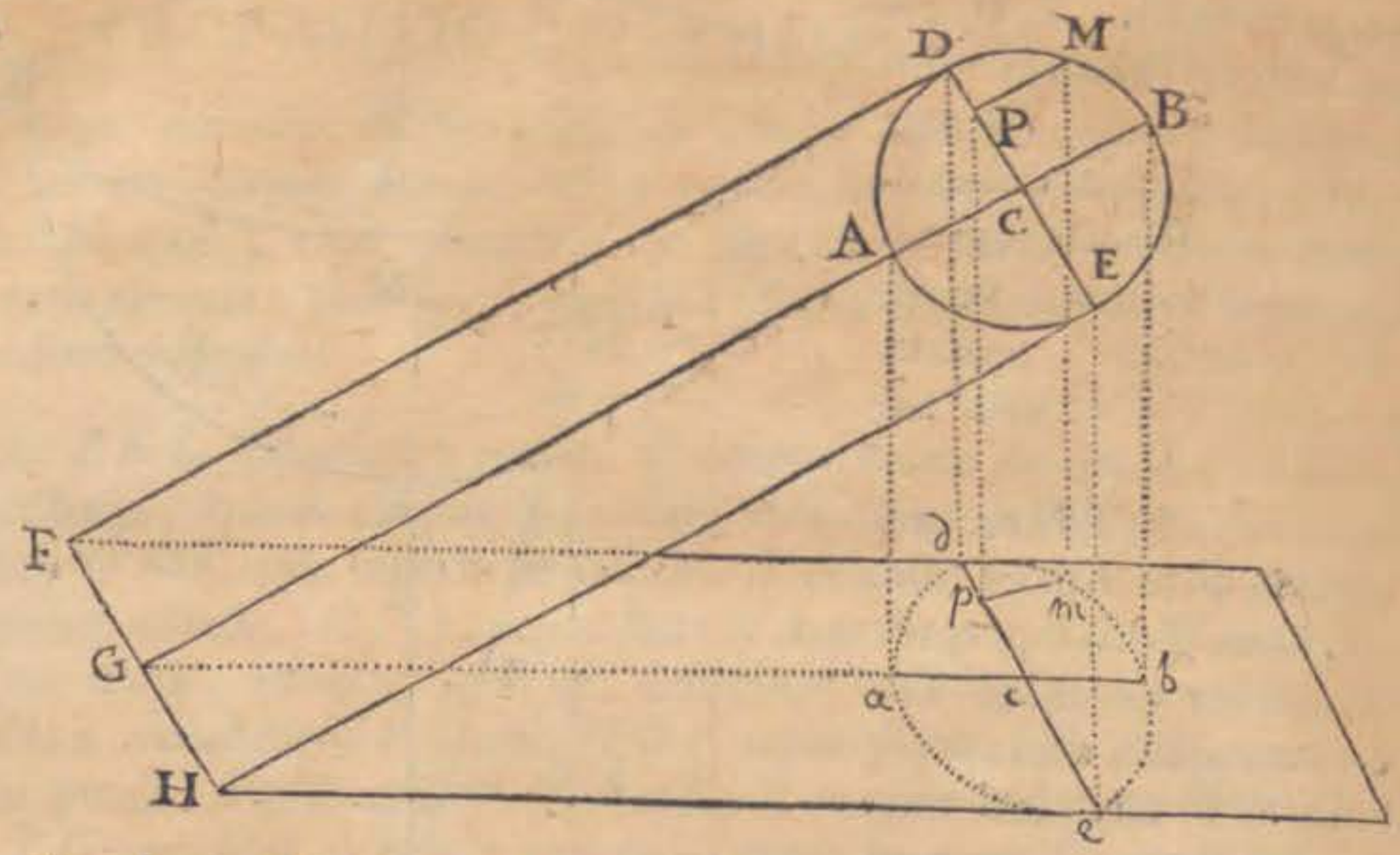



proportionalis; *TM* recta ad superficiem curvam perpendicularis; *TI* pars ejus vi pressionis, quâ corpus urget superficiem viciſſimque urgetur versus *M* à superficie, proportionalis; *PTF* recta axi parallela per corpus transiens, & *GF*, *IH* rectæ à punctis *G* & *I* in parallelam illam *PHTF* perpendiculariter demissæ. Dico jam, quod area *AOP*, radio *OP* ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis *TG* (per legum corol. 2.) resolvitur in vires *TF*, *FG*; & vis *TI* in vires *TH*, *HI*: Vires autem *TF*, *TH* agendo secundum lineam *PF* plano *AOP* perpendicularem mutant solummodo motum corporis quâtenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quâtenus secundum positionem plani factus; hoc est, motus puncti *P*, quo trajectoriæ vestigium *AP* in hoc plano describitur, idem est ac si vires *TF*, *TH* tollerentur, & corpus solis viribus *FG*, *HI* agitaretur; hoc est, idem ac si corpus in plano *AOP*, vi (n) centripetâ ad centrum *O* tendente & summam virium *FG* & *HI* æquante, describeret curvam *AP*. Sed vi tali describitur area *AOP* (per prop. 1.) tempori proportionalis. *Q. E. D.*

*Corol.* Eodem argumento si corpus, à viribus agitatum ad centra duo vel plura in eâdem quâvis rectâ *CO* datâ tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam *ST*; foret area *AOP* tempori semper proportionalis.

(n) * *Vi centripetâ ad centrum O &c.* Nam curva superficies BSKL genita supponitur revolutione curvæ lineæ BSK circa axem suum OC, undè sequitur lineas omnes PO, HI, TM, FG, PF, CO esse in eodem plano, atque ideò vim centripetam agentem in plano illo ad centrum O juxtà lineam PO dirigi.

DE MOTU CORPORUM.

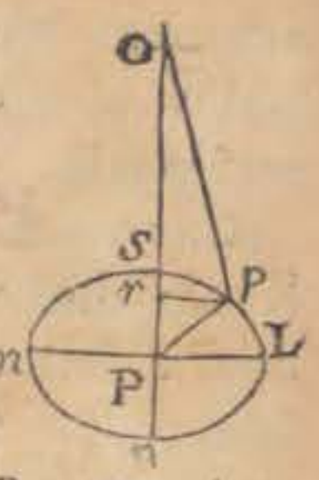



480. Lem. Si linea recta A B projiciatur in planum F H e b d, projectio eſt linea recta a b, quæ eſt ad lineam A B, ut coſinus anguli inclinationis B G b, ad ſinum totum. Nam ſi ex punctis A, B, demittantur ad planum F H e b d, perpendicula duo A a, B b, patet planum a A B b, eſſe ad planum F H e b d normale, adeoque perpendicula omnia ex ſingulis lineæ A B punctis demiſſa, cadere in lineam rectam a b, quæ eſt communis interſectio planorum F H e b d, a A B b. Q. E. 1um. Porrò productis B A, b a ut ſibi occurrant in G, ob parallelas A a, B b, erit a b ad A B, ut G b ad G B, id eſt, ut ſinus anguli G B b ſive Coſinus anguli inclinationis B G b, ad ſinum totum. Q. E. 2um.

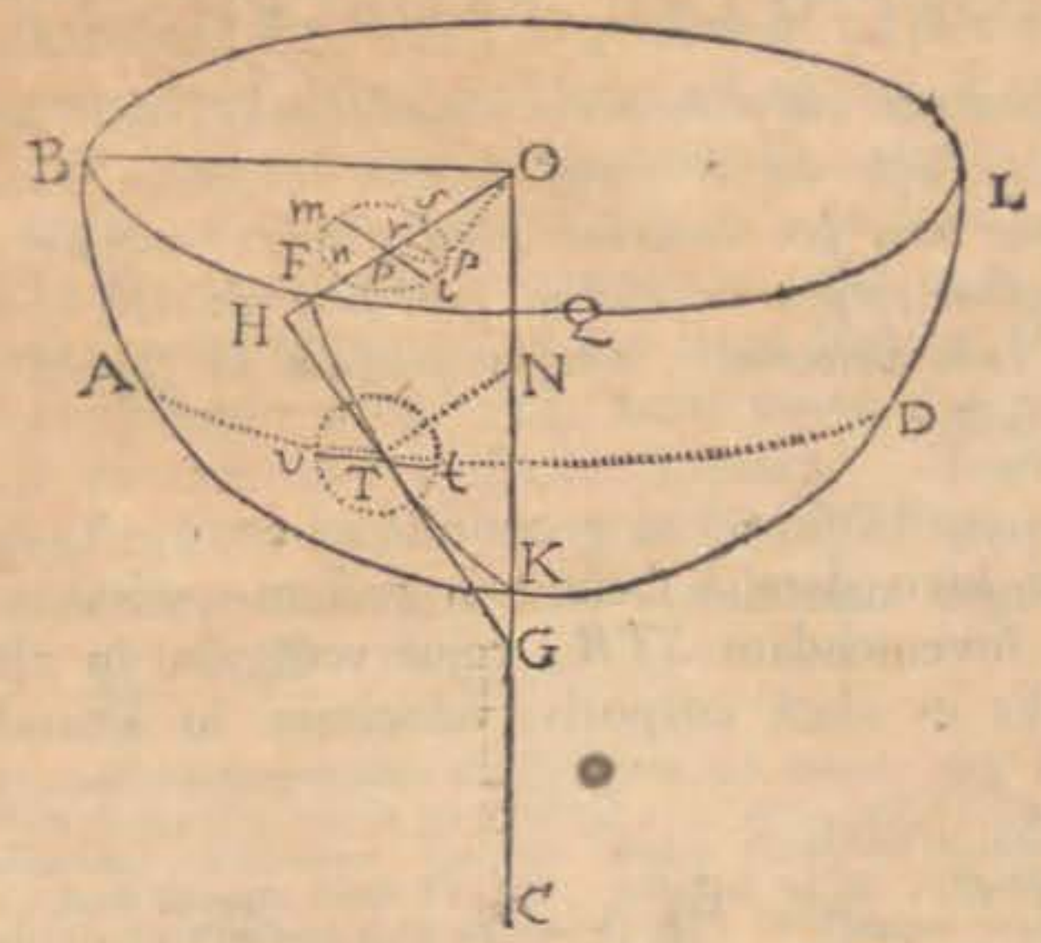
481. Coroll. Si linea projicienda, plano in quod projicitur parallela fuerit projectio erit linea recta lineæ projiciendæ æqualis & parallela; Nam in hoc caſu angulus inclinationis nullus eſt, & ejus coſinus fit radius. Hinc ſi linea E D, ad rectam A B perpendicularis, fuerit plano F H e b d, parallela, projectio illius e d, erit ipſi E D æqualis.

482. Lem. Iiſdem poſitis, ſi in plano D F H E B A, centro C, radio C D, deſcribatur circulus D A E B, illius in planum F H e b d projectio d a e b, erit ellipſis cujus major axis d e æqualis erit diametro circuli D E, & ad minorem axem a b, rationem habebit ſinûs totius ad coſinum anguli B G b, inclinationis planorum. Agatur enim P M ordinatim ad diametrum circuli D E, & projiciatur in rectam P m, erit d p = D P, & p e = P E (481.) atque p m ad P M, ut ſinus anguli P M m, ſeu anguli A B b, ad ſinum totum (480) hoc eſt, ut a b, ad A B ſeu d e, adeoque p m² : P M² = a b² : d e², ſed ex naturâ circuli P M² = D P × P E = d p × p e, Ergo p m² : d p × p e = a b² : d e². Eſt igitur a e b d, ellipſis. Cætera patent per Lemma ſuperius & ejus coroll.

483. Lem. Sint ellipſeos datæ L S m n axes L m, S n, centrum P, O punctum in axe n S producto datum, p punctum perimetri non datum. Datâ areâ trianguli O p P, dabitur perpendiculum p r, ex puncto p, ad trianguli baſim datam P O demiſſum & hinc ex naturâ ellipſeos dabitur r P, atque ob angulum rectum ad r, dabitur P p, & indè punctum p in perimetro cum angulo O P p, & poſitione rectæ O p.




484.




484. Lem. Superficies curva BATKL, deſcribatur revolutione curvæ BAK circà axem ſuum immobilem OC, & ſingula curvæ illius puncta B, A circulos BQL, ATD deſcribent; cum curva BAK pervenit ad ſitum FTK, & punctum A ad T, agantur recta GTH curvam FTK tangens in T & axem ſecans in G, ac recta vTt circulum ATD tangens in eodem puncto T, ſitque GTH, in plano curvæ OFK, & vTt, in plano circuli ATD. Manifeſtum eſt planum quod ſuperficiem curvam BATKL tangit in T, convenire cum plano in quo ſunt rectæ GTH, vTt; & ſi fuerit O centrum circuli BFQL, & ducatur radius OF tangenti GT occurrens in H, angulum GHO fore æqualem angulo inclinationis plani circuli BQLO, ad planum quod ſuperficiem curvam tangit in T; Ducto autem circuli ATD radio TN, fore angulum GTN, æqualem angulo inclinationis GHO.

485. Coroll. 1. Iiſdem poſitis, ſi centro T, radio quam minimo Tt, circellus in ſuperficie curvâ BATL deſcribatur, circellus ille evaneſcens erit in plano ſuperficiem curvam tangente in T, adeóque angulus inclinationis plani BOLQ, ad planum circelli evaneſcentis productum, æqualis erit angulo GTN, (484).

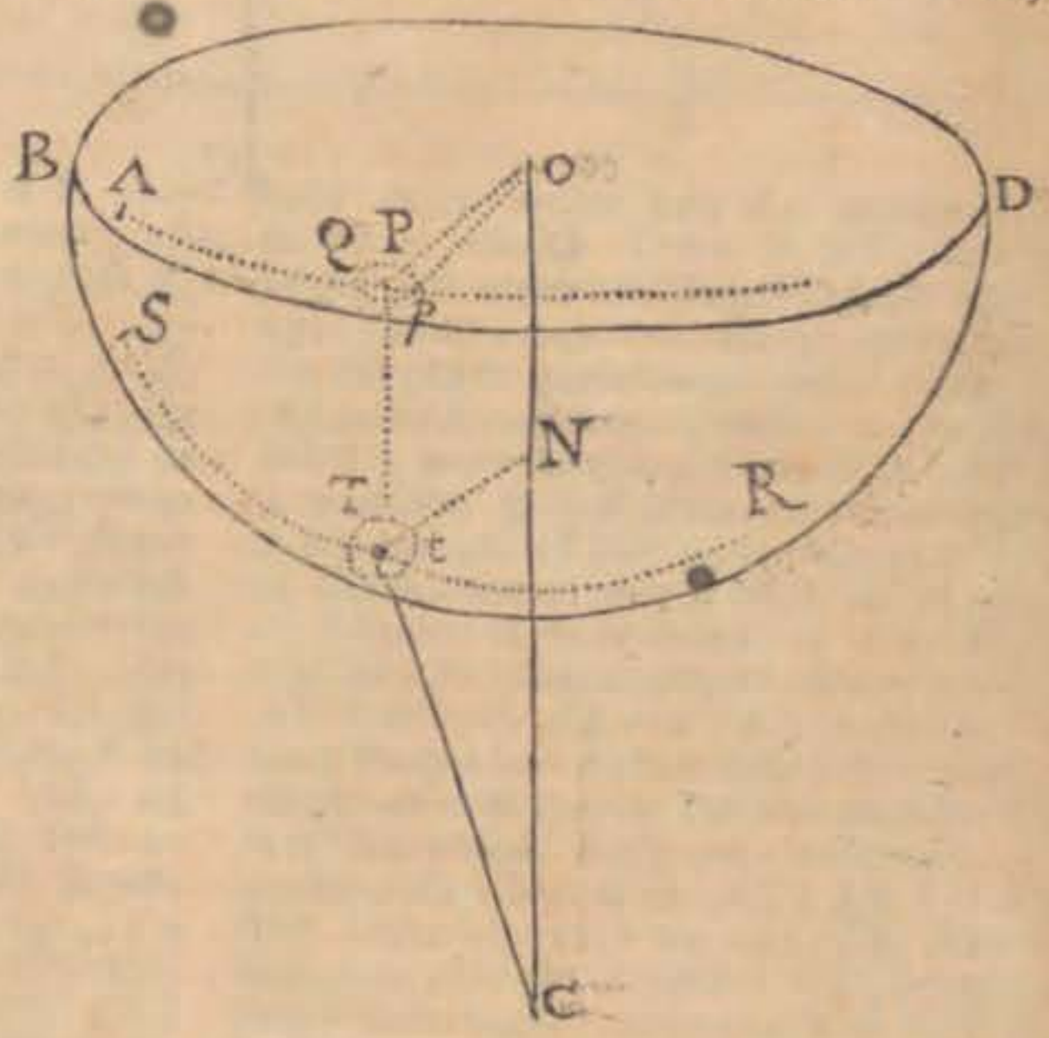
486. Coroll. 2. Si circellus radio Tt deſcriptus projiciatur in planum BOLQ, illius projectio lsmn, erit ellipſis (482) cujus axis major lm æqualis eſt & parallelus circelli diametro vTt, quæ pars eſt evaneſcens circuli ATD, axis minor sn pars radii OF, & lm erit ad sn ut TG ad TN. Eſt enim circuli peripheria ATD adeóque & pars illius vTt, plano BFLO parallela; Quarè (481) diametri vTt projectio ml, erit linea parallela & æqualis ipſi vt; erit quoque lm, ad radium OPF normalis, ob vt ad TN perpendicularem, proindeque axis minor ellipſeos sn erit pars radii OF; Eſt autem (482) lm ad sn, ut ſinus totus ad coſinum anguli inclinationis planorum GHO, ſeu GTN, (484) hoc eſt, ut TG ad TN, ob angulum TNG rectum.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

*Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, datiſque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum ſuperficie curvâ cujus axis per centrum illud tranſit; invenienda eſt trajectoria quam corpus in eâdem ſuperficie deſcribet, de loco dato, datâ cum velocitate, verſus plagam in ſuperficie illâ datam egreſſum.*

Stantibus quæ in ſuperiore propoſitione conſtructa ſunt, exeat corpus $T$ de loco dato $S$ ſecundum rectam poſitione datam in trajectoriam inveniendam $STR$, cujus veſtigium in plano $BDO$ ſit $AP$. Et ex datâ corporis velocitate in altitudine $SC$, (o) dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine $TC$. Eâ cum velocitate dato tempore quam minimo deſcribat corpus trajectoriæ ſuæ particulam $Tt$, ſitque $Pp$ veſtigium ejus in plano $AOP$ deſcriptum. Jungatur $Op$, & circelli centro $T$ intervallo $Tt$ in ſuperficie curva deſcripti veſtigium in plano $AOP$ ſit ellipſis $pQ$. Et




ob

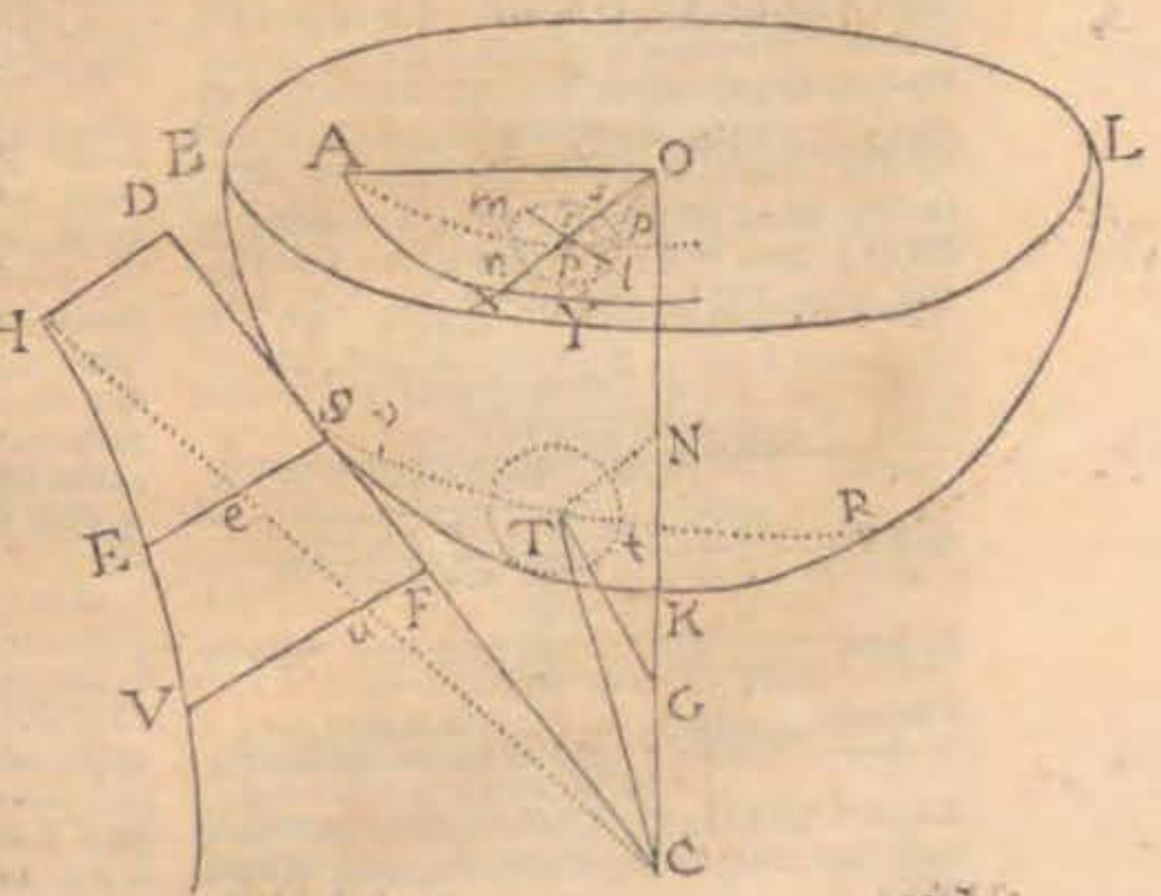
(o) * *Dabitur ejus velocitas in aliâ &c.* Nam (per prop. 40.) velocitas corporis in altitudine $TC$, æqualis eſt velocitati quam corpus haberet ad eandem altitudinem in lineâ rectâ $SC$, ſi de loco $S$, rectâ fuiſſet verſus $C$ projectum cum eâdem velocitate quâ trajectoriam $STR$ incipit deſcribere in $S$; ſed datâ in loco $S$ velocitate corporis per lineam $SC$ verſus centrum $C$ projecti, datur illius velocitas in alio quovis loco lineæ $SC$, (per cor. 2. prop. 39.). Ergo ex datâ corporis velocitate in altitudine $SC$, dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine $TC$.

(p) ob datum magnitudine circellum $Tt$, datamque ejus ab axe $CO$ distantiam $TN$ vel $PO$, dabitur ellipsis illa $pQ$ specie & magnitudine, ut & positione ad rectam $PO$. Cumque (q) area $POp$ sit tempori proportionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus $POp$. Et inde dabitur ellipseos & rectæ $Op$ intersectio communis $p$, unà cum angulo $OPp$ in quo trajectoriæ vestigium $APp$ secat lineam $OP$. (r) Inde verò (conferendo prop. XLI. cum corol. suo 2.) ratio determinandi curvam $APp$ facile apparet. Tum ex singulis vestigiis punctis $P$, erigendo ad planum $AOP$ perpendicula $PT$ superficiei curvæ occurrentia in $T$, dabuntur singula trajectoriæ puncta $T$. $Q$. $E$. $I$.

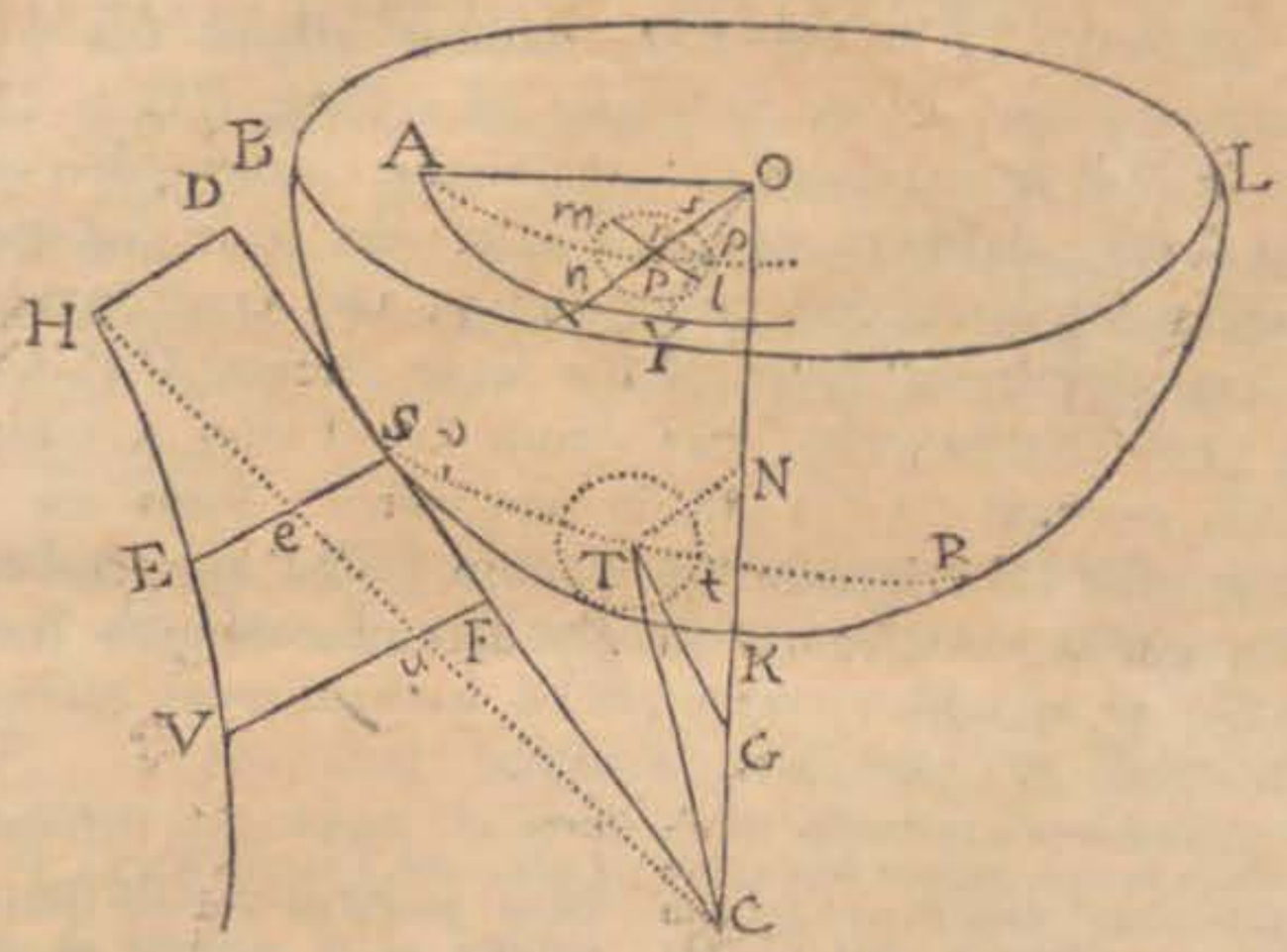
(p) * *Et ob datum magnitudine circellum &c.* Nam datis velocitate & tempore quibus uniformiter describitur spatium nascens T t, datur spatium illud T t, seu radius circelli (5). Præterea datâ altitudine T C, datur tum planum ad axem C O perpendiculare in quo circelli centrum positum est, tum angulus inclinationis plani quod in puncto T curvam superficiem B S T D tangit (484) ad planum B O D P, adeòque datur angulus inclinationis plani in quo est circellus nascens ad planum B O D P (485), undè (482. 486.) ellipsis P p q, in quam circellus projicitur dabitur specie & magnitudine ut & positione ad rectam P O.

(q) * *Cumque area P O p, sit tempori* quo describitur *proportionalis* (prop. 55.) eodemque tempore quo circelli raradius T t describatur, ex hoc tempore dato datur, atque adeò dabitur angulus P O p, & indè dabitur ellipseos & rectæ O p intersectio communis p, unà cum angulo O P p (483).

(r) 487. *Indè verò &c.* Sit D locus in rectâ C S productâ, de quo corpus vi centripetâ ad C tendente cadendo acquirit in loco S velocitatem cum quâ trajectoriam S T R incipit describere. In linea C S, capiatur C F = C T, & per puncta F, S, D, erigantur ad C D perpendicula F V, S E, D H vi centripetæ in illis locis proportionalia, sitque H E V linea quam punctum V perpetuò tangit. Per punctum T, agatur T G, quæ curvam cujus revolutione describitur superficies B S T K L, tangat in T; sitque eadem T G in curvæ illius plano, & producta, axi O C occurrat in G, velocitates in locis S, & T, seu F, erunt ut $\sqrt{DHES}$, & $\sqrt{DHVF}$. (Per 1^am^. partem

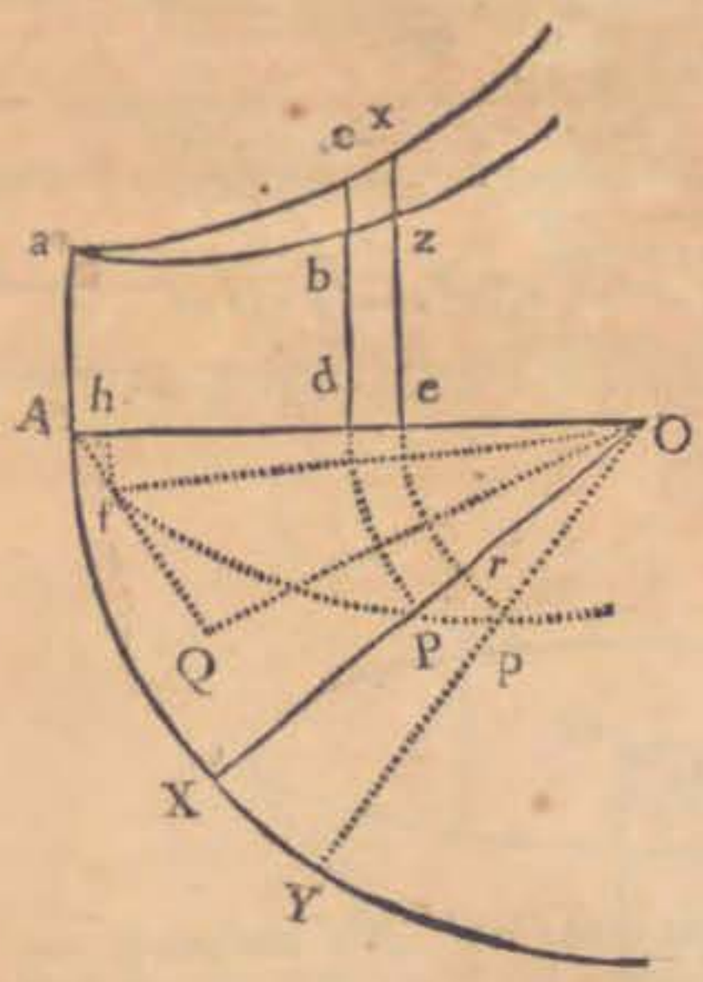


DE MOTU CORPORUM.




prop. 39.) Et quoniam area P O p, seu $\frac{PO \times pr}{2}$ est ut tempus quo describitur T t sive P l, erit P l, ut $PO \times pr \sqrt{DHVF}$ hoc est, spatium uniformiter descriptum ut velocitas & tempus conjunctim (5). Quare si detur quantitas B erit $Pl = B \times PO \times pr \times \sqrt{DHVF}$. Est autem P l semiaxis transversus ellipseos ad P s semiaxem conjugatum ut T G ad T N seu P O (486) quare erit $Ps = \frac{B \times PO^2 \times pr \times \sqrt{DHVF}}{TG}$; sed ex natura ellipseos $Pl^2 : Ps^2 (= TG^2 : PO^2) = pr^2 : nr \times rs$ seu $Ps^2 - Pr^2$, atque adeo $PO^2 \times pr^2 = TG^2 \times Ps^2 - TG^2 \times Pr^2$; & hinc $Pr^2 = Ps^2 - \frac{PO^2 \times pr^2}{TG^2} = \frac{B^2 \times PO^4 \times pr^2 \times DHVF - PO^2 \times pr^2}{TG^2}$, proindeque $Pr = \frac{PO \times pr \times \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}{TG}$, & $pr = \frac{TG \times Pr}{PO\sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$. Quare $\frac{PO \times pr}{2} = POp = \frac{TG \times Pr}{2\sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$. Centro O & radio O A, describatur circuli arcus A X Y, & producantur O P, O p, ut arcui huic occurrant in X & Y, erit PO : OX seu AO = pr : XY = $\frac{AO \times pr}{PO}$, & hinc area O X Y (sive $\frac{AO \times XY}{2}$) = $\frac{AO^2 \times pr}{2PO} = \frac{AO^2 \times TG \times Pr}{2PO^2\sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$. Itaque si in recta d c, ad AO perpendiculari capiantur $db = \frac{TG}{2\sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$ & $dc = \frac{AO^2 \times TG}{2PO^2\sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$, & describantur lineæ curvæ a b z, a c x, quas puncta b, c, perpetuo tangunt, deque puncto A, ad lineam A O, erigatur perpendiculum A a, ponendo d O = P O, patet fore areas A a b d, A a c d, areis A P O, A X O, æquales &c., (ut in prop. 41.)

488. Quantitas constans B, quam in superioribus æquationibus usurpavimus, facilè determinatur. Nam datâ directione corporis trajectoriam S T R, (vid. fig. not. 487.) describere incipientis, datur illius projectio A Q, quæ ut patet, est tangens vestigii A P p in A, quâ vestigium A P p incipit describi; projecto in tangen-




gentem A Q ſpatio quod corpus in S dato tempore deſcriberet ſecundum directionem ſuam in S, ſit O Q perpendiculum ex centro O, in tangentem A Q, demiſſum, velocitas in S ad velocitatem in A ut O Q, ad C quantitatem datam, & ductâ O f, fit area A O f deſcripta eodem tempuſculo quo area naſcens O P p & arcus naſcentes T t, S v trajectoriæ S T R deſcribuntur, & quoniam velocitates uniformes ſunt ut ſpatia eodem tempore percurſa, erit S v : A f = Q O : C, & demiſſo ex puncto f, ad A O perpendiculo f h, erit etiam A f : f h = A O : Q O. Undè ex æquo. S v : f h = A O : C, ſed (ex dem. 487.) T t = P l = $B$ × P O × pr × √ D H V F, adeoque in loco S, S v = $B$ × A O × f h × √ D H E S, ergo S v : f h = $B$ × A O × √ D H E S : 1 = A O : C, proindeque $B = \frac{1}{C\sqrt{DHES}}$, & $B^2 = \frac{1}{CC \times DHES}$. Quo valore in ſuperioribus æquationibus (487) ſubſtituto, invenitur P O p $= \frac{C \times TG \times Pr \times \sqrt{DHES}}{2\sqrt{PO^2 \times DHVF - CC \times DHES}}$ & O X Y $=$

$$\frac{C \times AO^2 \times TG \times Pr \times \sqrt{DHES}}{2PO^2 \times \sqrt{PO^2 \times DHVF - CC \times DHES}}.$$

Harum formularum ope, nullâ ampliùs habitâ ratione circelli ejuſque projectionis ellipſeos, deſcribi poteſt veſtigium A P p, & ex dato tempore inveniri locus P, (ut in prop. 41). Cum autem trajectoria S T R, ſit linea duplicis curvaturæ ad promovendam difficilem theoriam motuum in ſuperficiebus curvis quam hic aperuit Newtonus non parum adjumenti conferre poterit tractatus quem de lineis duplicis curvaturæ an. 1731. Pariſiis edidit Clariſſimus Geometra D. Clairaut. Horum motuum in conoide parabolico, cono, & cylindro exempla dabimus.

489. Exemplum 1. Sit (vid fig. not. 487). curva B S K parabola cujus latus rectum $= l$, dicatur A O $= r$, K C $= a$, D C $= b$, T N, ſeu P O $= x$, & proindè P r $= dx$, erit ex naturâ parabolæ, N K $= \frac{x^2}{l}$, N G $= \frac{2x^2}{l}$, adeóque T G$^2 = \frac{4x^4 + llxx}{ll}$, & T G $= \frac{x\sqrt{4xx + ll}}{l}$; quarè ſi in ſuperioribus formulis (488) ponatur C × √ D H E S $= pp$, erit P O p $= \frac{p^2 x dx \sqrt{4xx + ll}}{2l\sqrt{x^2 \times DHVF - p^4}}$ & O X Y $= \frac{p^2 r^2 dx \sqrt{4xx + ll}}{2lxx\sqrt{x^2 \times DHVF - p^4}}$. Sit vis centripeta ut diſtantia à centro C directè, hoc eſt, in loco quovis T, vel F ſit ut T C ſeu F C, & curva H E V in rectam H e v C mutabitur, & poſitâ D H $= q$, erit D C ($b$) : F C ſeu T C $=$ D H ($q$) : F u $= \frac{q \times TC}{b}$. Quarè cum ſit area D H u F $=$ D H C $-$ F u C $= \frac{1}{2}qb - \frac{1}{2}FC \times Fu$, erit D H u F $= \frac{qbb - q \times TC^2}{2b}$. Eſt autem T C$^2$ $=$ T N$^2$ + N C$^2$ $= xx + \frac{xx}{l} + a^2 = \frac{x^4 + llxx + 2alxx + llaa}{ll}$. Ergò area D H u F $= \frac{qllbb - qx^4 - qllx^2 - 2qalx^2 - qlla^2}{2bll}$; Si itaque hic valor loco D H V F, in ſuperioribus æquationibus ſubſtituatur, crit

DE MOTU CORPORUM.

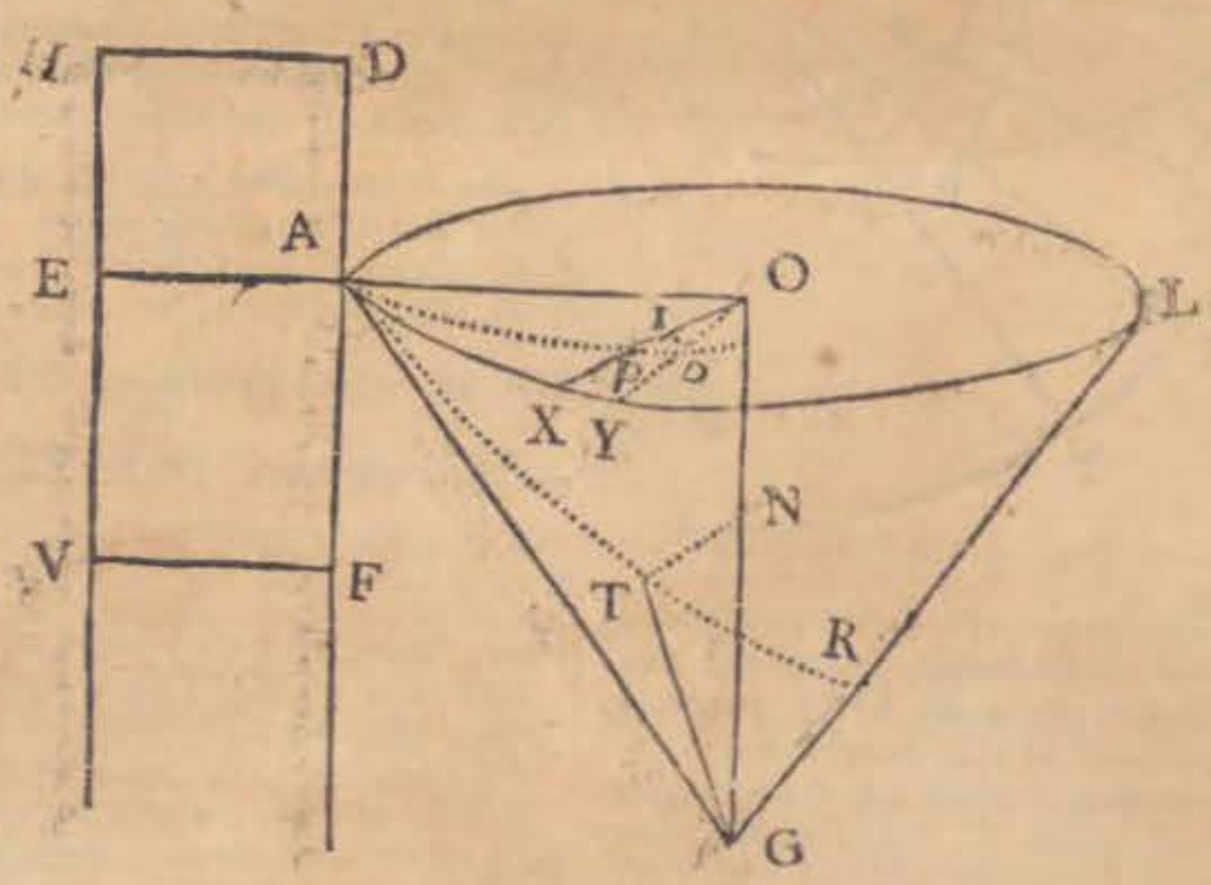
erit $OPp = \frac{f^2 x\,dx\sqrt{4bxx+bll}}{\sqrt{2qllbbx^2-2qx^6-2qllx^4-4qalx^4-2qla^2x^2-4bl^2p^4}}$

& $OXY = \frac{f^2 r^2\,dx\sqrt{4bxx+bll}}{x\sqrt{2ql^2bx^2-2qx^6-2ql^2x^4-4qalx^4-2ql^2a^2x^2-4bl^2p^4}}$.

Si igitur ordinatæ d b, d c, dicantur $y$, $z$, æquationes ad curvas a b, a c, (vid. fig. 2. not. 487.) erunt

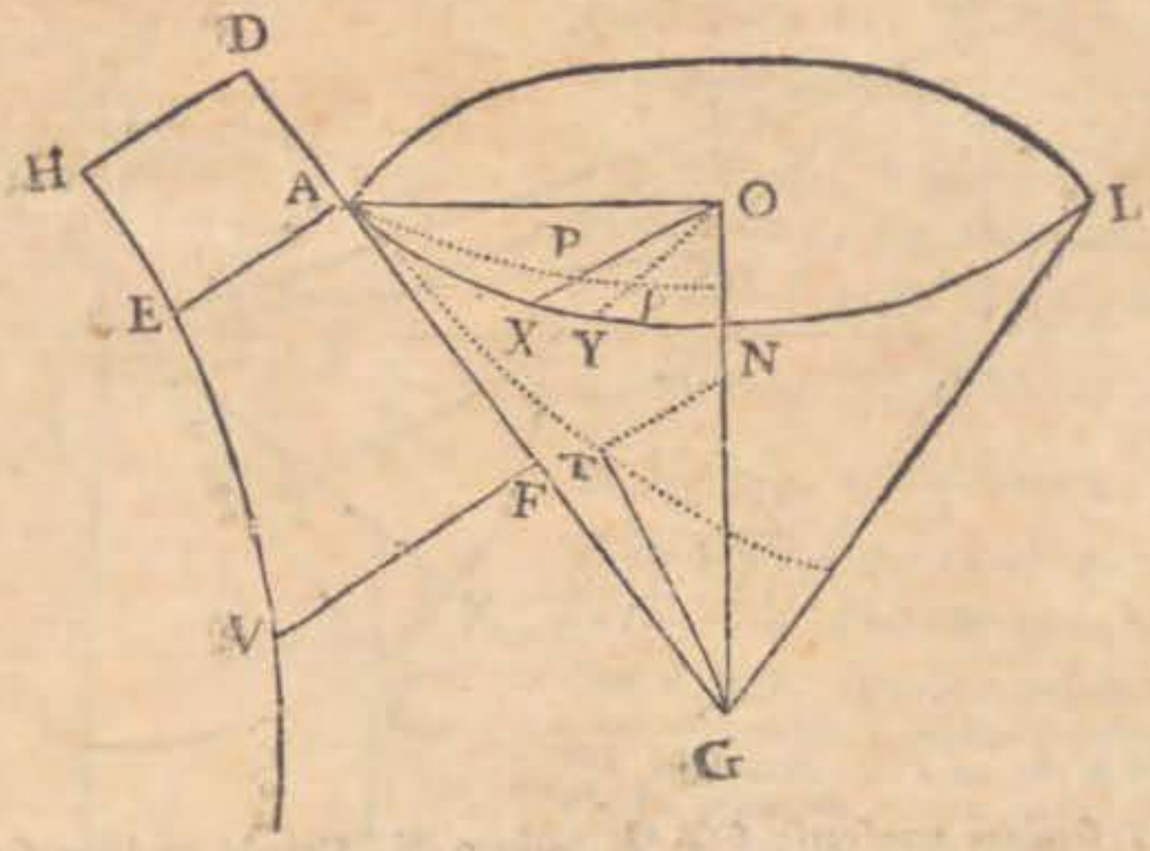
$yy = \frac{4bp^4x^4+bp^4llxx}{2ql^2b^2x^2-2qx^6-2qllx^4-4qalx^4-2qlla^2x^2-4bl^2p^4}$

& $zz = \frac{4bp^4r^4xx+bp^4r^4ll}{2qllbbx^4-2qx^8-2qllx^6-4qalx^6-2ql^2a^2x^4-4bl^2p^4x^2}$.



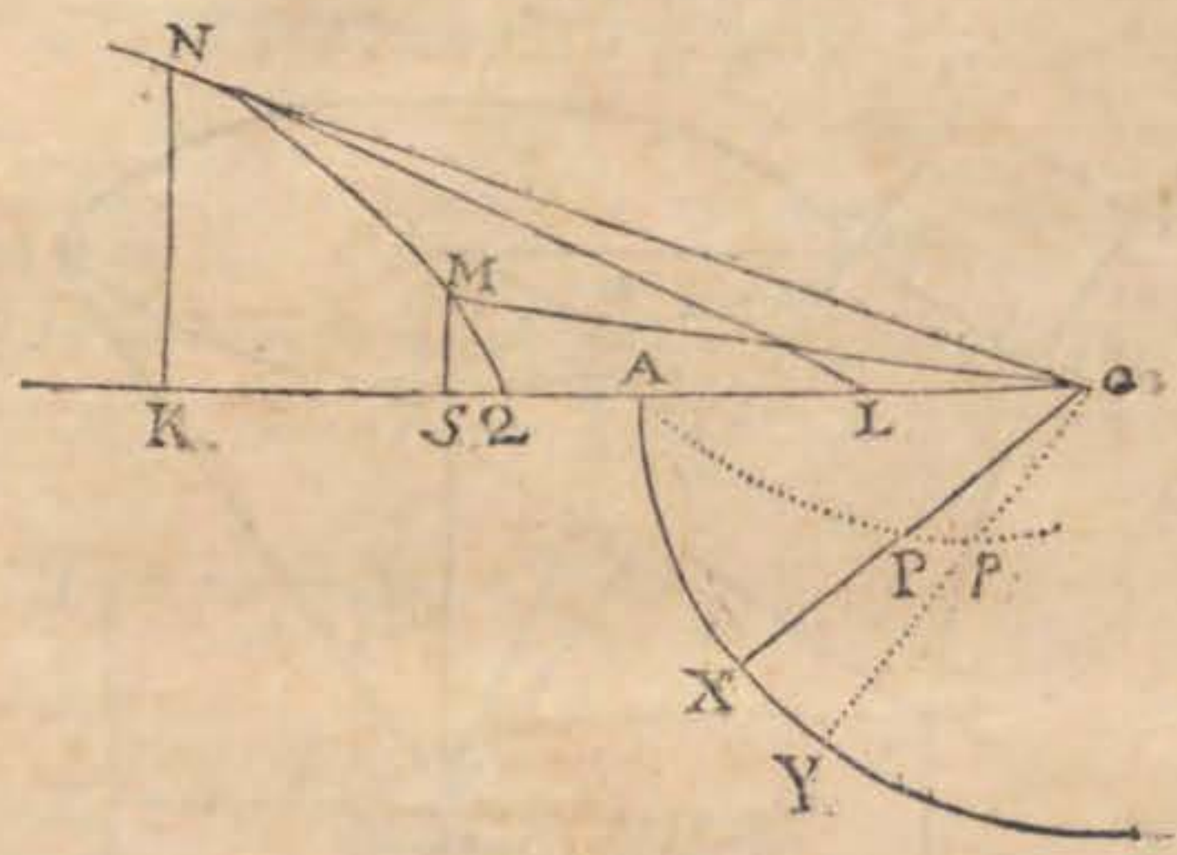

490. Exemplum 2. Sit A T G L, ſuperficies coni recti cujus vertex G, axis G O, baſis A X L O, & corpus de loco A egreſſum moveatur in trajectoriâ A T R, vis centripeta conſtans ſit & juxta directionem axi O G parallelam ſemper agat, illamque in locis D, A, F, ſeu T, exponant rectæ D Q, A E, F V æquales & ad rectam D F axi parallelam perpendiculares, erit punctum V in lineâ rectâ H E V, ipſi D F parallelâ. Sit D locus de quo corpus cadere debet ut habeat in loco A velocitatem cum quâ trajectoriam A T R incipit deſcribere, & ex puncto T, ducatur T G, ſuperficiem conicam tangens in T, & T N = O P ad axem G O perpendicularis. Sit H D = $a$, D A = $b$, O G = $e$, A G = $f$, A O = $r$, P O = T N = $x$, $pr = dx$, erit (ex naturâ coni) A O ($r$) : A G ($f$) = T N ($x$) : T G $\left(\frac{fx}{r}\right)$. Et A O ($r$) : O G ($e$) = T N ($x$) : N G $\left(\frac{ex}{r}\right)$. Undè O N = O G − G N = $\frac{er-ex}{r}$, & D F = D A + O N = $\frac{rb+er-ex}{r} = \frac{hr-ex}{r}$ ponendo $b+e=h$. Quarè area $DHEA = ab$, & D H V F = $\frac{rha-aex}{r}$. Et hinc per formulas (488) $OPp = \frac{Cfx\,dx\sqrt{ab}}{2r\sqrt{haxx-qx^3-CCab}}$ ponendo $\frac{ae}{r} = q$, & $OXY = \frac{Crfdx\sqrt{ab}}{2x\sqrt{haxx-qx^3-CCab}}$, undè facilè inveniuntur æquationes ad curvas A B, A C, ut in exemplo 1°.

491.



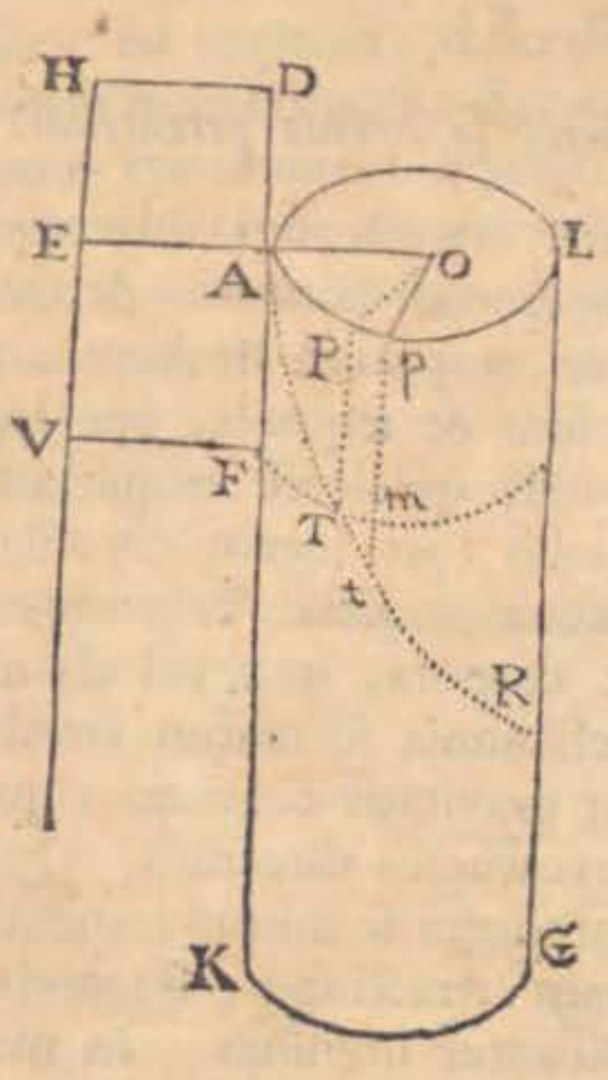

491. Exemplum 3^um. Tendat vis centripeta ad coni verticem G, & in triplicatâ ratione distantiarum ab illo puncto G decrescat, sitque H E V curva ad quam terminantur perpendicula D H, A E, F V vim centripetam in locis singulis D, A, F, vel T, exhibentia, cætera verò maneant ut in exemplo superiori. Quoniam $TG=\frac{fx}{r}$ erit vis centripeta in loco T vel F ut $\frac{r^3}{f^3 x^3}$, adeóque si fuerit $n$ quantitas data, vis centripetâ supponi poterit $=\frac{n^4}{x^3}$. Sit $DG=m$, & erit (431) area $DHVF=\frac{n^4(mm-xx)}{mmxx}=\frac{kkmm-kkxx}{xx}$, ponendo $\frac{n^4}{mm}=kk$. Quare si dicatur area $DHEA=pp$, erit $POp=\frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm-kkxx-llpp}}=\frac{qxdx}{\sqrt{hh-xx}}$ ponendo $kkmm-CCpp=kkhh$, & $\frac{Cpf}{2rk}=q$. Similiter invenietur $OXY=\frac{rrqdx}{x\sqrt{hh-xx}}$. Quoniam autem crescentibus areis APO, AXO, decrescit PO, seu $x$, scribendum est $OPp=\frac{-qxdx}{\sqrt{hh-xx}}$ & $OXY=\frac{-rrqdx}{x\sqrt{hh-xx}}$. Fiat $\sqrt{hh-xx}=z$, & erit $hh-xx=zz$ & $-xdx=zdz$, & $POp=qdz$, sumptisque fluentibus & additâ constanti Q, erit $APO=qz+Q=q\sqrt{hh-xx}+Q$. Porrò area APO evanescit ubi PO, seu $x=AO=r$, quarè $o=q\sqrt{hh-rr}+Q$, & hinc $Q=-q\sqrt{hh-rr}$, proindeque $APO=q\sqrt{hh-xx}-q\sqrt{hh-rr}$. Ex dato igitur tempore quo corpus describit AT, geometricè invenitur longitudo lineæ PO. Ponatur nunc $x=\frac{hh}{y}$ & erit $-dx=\frac{hhdy}{yy}$, $hh-xx=\frac{hhyy-h^4}{y^2}$, $\sqrt{hh-xx}=\frac{h\sqrt{y^2-h^2}}{y}$ atque adeò $OXY=\frac{-rrqdx}{x\sqrt{hh-xx}}=\frac{rrqdy}{h\sqrt{y^2-h^2}}$. Sit $\frac{rrq}{hh}=\frac{1}{2}s$, & erit $OXY=\frac{1}{2}\frac{rhdy}{\sqrt{yy-hh}}$. Unde habetur constructio sequens.

DE MOTU CORPORUM.




Centro O, semiaxe transverso OAQ $= h$, semiaxe conjugato $= s$, describatur hyperbola QMN, ex illius perimetri puncto quovis N, demittatur ad axem OQ, perpendiculum NK, & abscissa OK dicatur $y$, ductâque rectâ NL, quæ hyperbolam tangat in N, & axi occurrat in L, erit (ex conic.) $OK(y) : OQ(h) = OQ(h) : OL = \frac{hh}{y} = x$, & sector hyperbolicus $ONQ = S.\ \frac{1}{2} \frac{shdy}{\sqrt{hy - hh}}$ (427) atque adeò $AXO = ONQ + Q$ constante. Si ponatur $x$, seu $\frac{hh}{y} = OA = r$, hoc est $y = \frac{hh}{r}$ evanescet area AXO, quare si capiatur $OS = \frac{hh}{r}$ & ad axem erigatur perpendiculum SM, hyperbolæ occurrens in M, jungaturque OM, erit $o = OMQ + Q$, & $Q = -OMQ$, unde $AXO = ONQ - OMQ = ONM$. Sumatur itaque sector circuli $OAX =$ sectori hyperbolico ONM, & in radio OX capiatur $OP = OL$, erit P punctum in vestigio seu curvâ APp. Hinc si ex dato tempore quæratur locus T (vid. fig. super.) in trajectoriâ TR, inveniatur primum longitudo OP, seu OL, tum agatur LN tangens hyperbolam in puncto aliquo N; Deindè capiatur sector circularis $AXO =$ sectori hyperbolico ONM, & in radio OX, capiatur $OP = OL$, ac tandem ex puncto P, erigatur ad planum AOP (vid. fig. super.) perpendiculum PT, quod superficiei conicæ occurret in loco quæsito T.

Exempl. 4. Moveatur corpus de loco A per trajectoriam ATR, in superficie concavâ cylindri recti AKGL, in quo sit baseos centrum O, manifestum est vestigium trajectoriæ ATR, coincidere cum baseos peripheriâ circulari APL, quam proinde punctum P, æquabili velocitate describet (per prop. 56.) Sit vis centripeta constans & per lineas lateri cylindri AK parallelas semper agat, dicanturque $HD = a$, $DA = b$, $AF = PT = y$, $mt = dy$, arcus $AP = x$, $Pp = Tm = dx$, $Tt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, erit area $DHEA = ab$, area $DHVF = ab + ay$, velocitas in F vel $T = \sqrt{ab + ay}$, undè tempusculum quo describitur nascens Tt vel Pp erit $= \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{ab + ay}}$. Et sit data velocitas quâ punctum P describit circulum APL dicaturque $c$ erit tempusculum quo describitur $Pp = \frac{Pp}{c} = \frac{dx}{c}$; quarè $\frac{dx}{c} = \frac{\sqrt{dx^2 +}}{}$




$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{ab+ay}}$, & $\frac{dx^2}{cc}=\frac{dx^2+dy^2}{ab+ay}$, & $abdx^2+aydx^2-ccdx^2=ccdy^2$, & $dx=\frac{cdy}{\sqrt{ab-cc+ay}}=\frac{cdy}{\sqrt{aq+ay}}$, ponendo $ab-cc=aq$. fiat jam $\sqrt{q+y}=z$, $q+y=zz$, $dy=2zdz$, $\sqrt{aq+ay}=z\sqrt{a}$ erit $dx=\frac{2czdz}{z\sqrt{a}}=\frac{2c}{\sqrt{a}}\times dz$, & sumptis fluentibus additâ constanti $Q$, erit $x=\frac{2cz}{\sqrt{a}}+Q=\frac{2c\sqrt{q+y}}{\sqrt{a}}+Q$. Ponatur $y=o$, erit etiam $x=o$, adeòque $o=\frac{2c\sqrt{q}}{a}+Q$, & $Q=-\sqrt{\frac{4ccq}{a}}$, undè $x=\sqrt{\frac{4ccq+4ccy}{a}}-\sqrt{\frac{4ccq}{a}}$. Sit $\frac{4cc}{a}=p$, & $\frac{4ccq}{a}=nn$, erit $x=\sqrt{nn+py}-n$, $xx+2nx=py$, $y=\frac{xx+2nx}{p}$. Concessâ igitur quadraturâ circuli facilè invenitur trajectoriæ ATR punctum quodvis T capiendo perpendiculum PT ad arcum AP, ut est AP$+2n$ ad $p$. Ex tempore autem dato datur arcus AP. Si corporis de loco A egredientis velocitas eadem sit ac velocitas puncti P in plano baseos APLO revolventis erit $cc=ab$, & quoniam supposuimus $ab-cc=aq$, esset $q=o$, & proindè $nn=\frac{4ccq}{a}=o$, atque hinc $y=\frac{xx}{q}$, seu $p:x=x:y$. Sive scribendo loco $p$ ejus valorem $\frac{4cc}{a}$, in quo loco $cc$ ponatur $ab$, erit $4b:x=x:y$, hoc est, 4 DA ad arcum AP ut is AP ad PT.

LIBER PRIMUS. PROP. LVI. PROBL. XXXVII.

## SECTIO XI.

De Motu Corporum.

### *De motu corporum viribus centripetis ſe mutuo petentium.*

Hactenus expoſui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum naturâ. Attractiones enim fieri ſolent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones ſemper mutuæ ſunt & æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens poſſit quieſcere neque attractum, ſi duo ſint corpora, ſed (f) ambo (per legum corollarium quartum) quaſi attractione mutuâ, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & ſi plura ſint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, & idem attrahant, vel omnia ſe mutuo attrahant; hæc ita inter ſe moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quieſcat, vel uniformiter moveatur in directum. Quâ de causâ jam pergo motum exponere corporum ſe mutuo trahentium, conſiderando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortaſſe, ſi phyſicè loquamur, verius dicantur impulſus. In mathematicis enim jam verſamur; & propterea, miſſis diſputationibus phyſicis, familiari utimur ſermone, quo poſſimus à lectoribus mathematicis facilius intelligi.

### PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

*Corpora* (t) *duo ſe invicem trahentia deſcribunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum ſe mutuò, figuras ſimiles.*

Sunt (u) enim diſtantiæ corporum à communi gravitatis centro

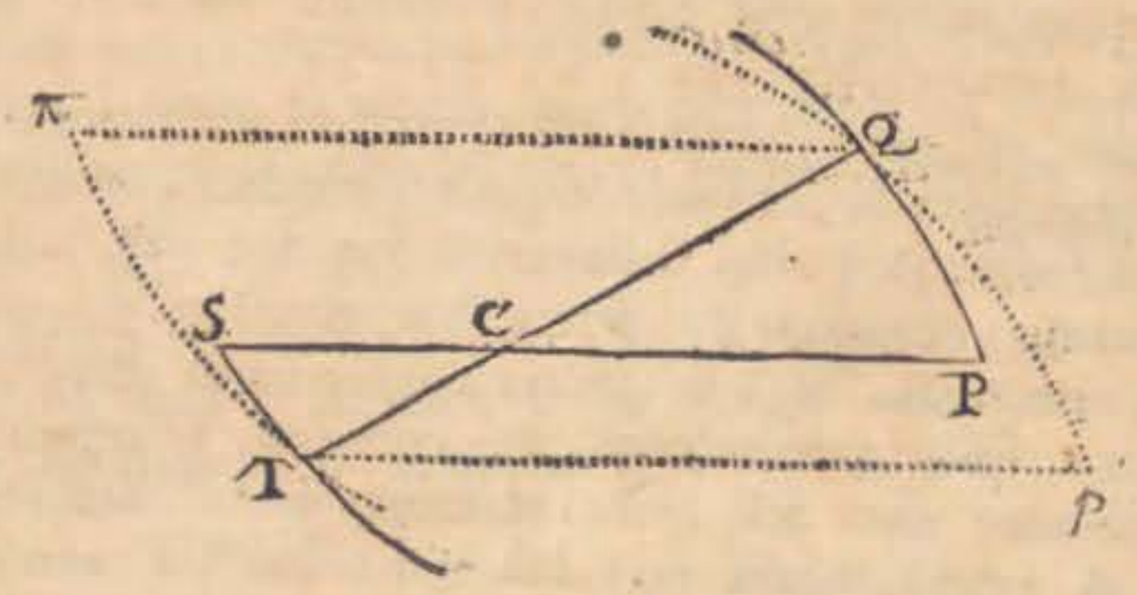
(f) * *Sed ambo* (*per leg. corol.* 4.) *quaſi attractione mutuâ* vel ad ſe invicem rectâ lineâ ferantur, vel, ſi ambo vi impreſſâ oblique projiciuntur, *circum gravitatis centrum commune quieſcens aut uniformiter progrediens revolvantur.*

(t) * *Corpora duo.* Si corpora duo S, P ſe invicem trahentia revolvantur circà commune gravitatis centrum C, pergendo de S ad T & de P ad Q, ſimiles ſunt hæ figuræ quatuor, nimirum PQC, STC, quas corpora S & T circa commune gravitatis centrum C deſcribunt, tum figura PQT quam corpus P deſcribit circa corpus S ſpectatum tanquam immotum, & figura πTQ, quam S circà P ſimiliter ſpectatum deſcribit.

(u) * *Sunt enim diſtantiæ corporum à communi gravitatis centro* QC, CT *reciprocè proportionales corporibus datis* P, S

tro reciprocè proportionales corporibus, atque ideo in datâ ratione ad invicem, & componendo in datâ ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminum suum communem æquali motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuò. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in datâ ratione ad invicem, & æquali

LIBER PRIMUS. PROP. LVII. THEOR. XX.




(60) *atque ideò in datâ ratione ad invicem, & componendo*, QC est ad QT in datâ ratione corporis S ad summam corporum S + P. *Feruntur autem distantiæ* QC, TC, *circa centrum C terminum suum communem æquali motu angulari*, id est, angulus QCP est semper æqualis angulo TCS propterea quod distantiæ QC, TC in directum semper jacent (60). Quare (112) duæ figuræ PQC, STC similes sunt. Quod erat primum.

Agatur per T recta Tp lineæ SP æqualis & parallela, & si corpus S tanquam immotum spectetur, motus corporis P quod in Q pervenit idem erit respectu corporis S seu T, ac si corpus P de loco p translatum esset in locum Q, eritque QT ad Tp seu SP, ut QC ad CP, & angulus QTp=QCP unde figura PQ circa punctum S ut immotum spectatum à corpore P descripta erit similis figuræ PQC ideoque & figuræ STC, simili ratiocinio ostendetur figuram πTQ circa punctum P immotum à corpore S descriptam, esse similem figuræ STC ideoque & figuræ PQC. Quod erat alterum.

Quod forte facilius adhuc intelligetur, si ponamus in corpore S spectatorem qui se & lineam SP tanquam immota habeat, in hâc enim hypothesi, ubi corpus S pervenerit in locum T, linea SP, quæ tanquam immota spectatur erit Tp ipsi SP æqualis & parallela & spectator in T locatus motum corporis P videbit sub angulo QTp=QCP, & ad distantiam TQ. Cum igitur sit semper QC ad CP, ut QT ad SP, seu Tp, & angulus QCP, æqualis angulo QTp; figura pQT, similis erit figuræ PQC, adeóque & figuræ STC. Pariter si per Q agatur Qπ æqualis & parallela PS liquet figuram πTQ quam S circa P spectatum tanquam immotum describit esse similem & æqualem figuræ pQT quam corpus P, circa S spectatum tanquam immotum describit. Patet etiam harum omnium figurarum partes similes eodem tempore describi, ideoque etiam totas figuras æqualibus temporibus percurri.

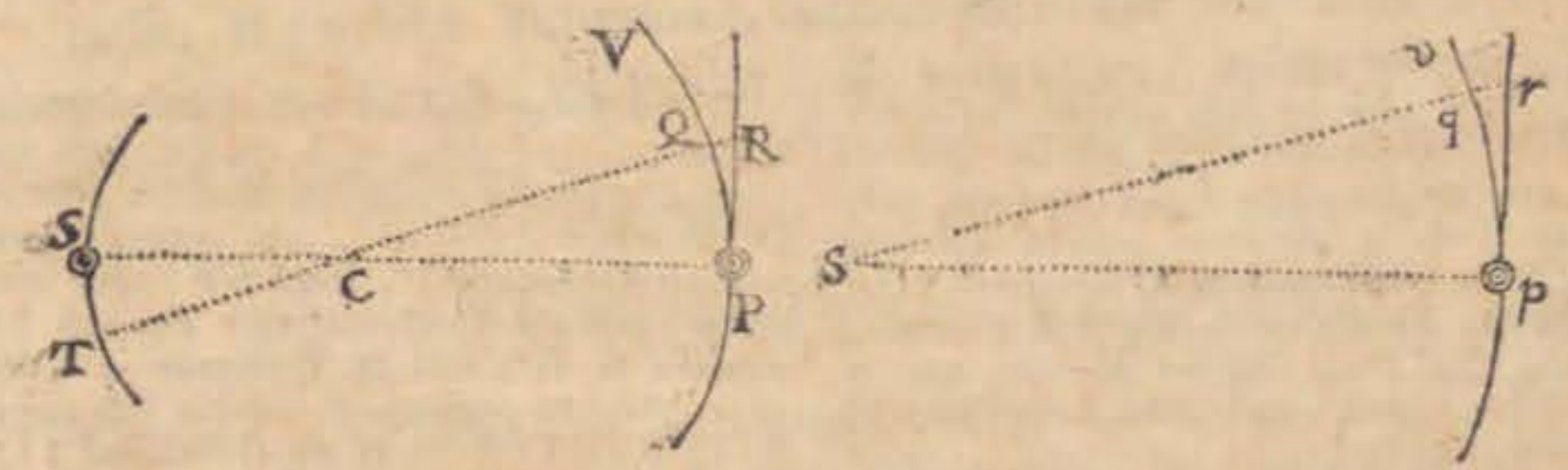
De Motu Corporum.

æquali motu angulari circum terminos ſuos feruntur, figuras circum eoſdem terminos in planis, quæ unà cum his terminis vel quieſcunt, vel (a) motu quovis non angulari moventur, deſcribunt omninò ſimiles. Proinde ſimiles ſunt figuræ, quæ his diſtantiis circumactis deſcribuntur. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

*Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora ſic mota deſcribunt circum ſe mutuò, poteſt figura ſimilis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iiſdem deſcribi.*

Revolvantur corpora $S$, $P$ circa commune gravitatis centrum $C$, pergendo de $S$ ad $T$, deque $P$ ad $Q$. A dato puncto $s$ ipſis $SP$, $TQ$ æquales & parallelæ ducantur




ſemper $sp$, $sq$; & curva $pqv$, quam punctum $p$ revolvendo circum punctum immotum $s$ deſcribit, (b) erit ſimilis & æqualis curvis, quas corpora $S$, $P$ deſcribunt circum ſe mutuò: proindeque (per theor. xx.) ſimilis curvis $ST$ & $PQV$, quas eadem corpora deſcribunt circum commune gravitatis centrum $C$: idque quia proportiones linearum $SC$, $CP$, & $SP$ vel $sp$ ad invicem dantur.

*Caſ.*

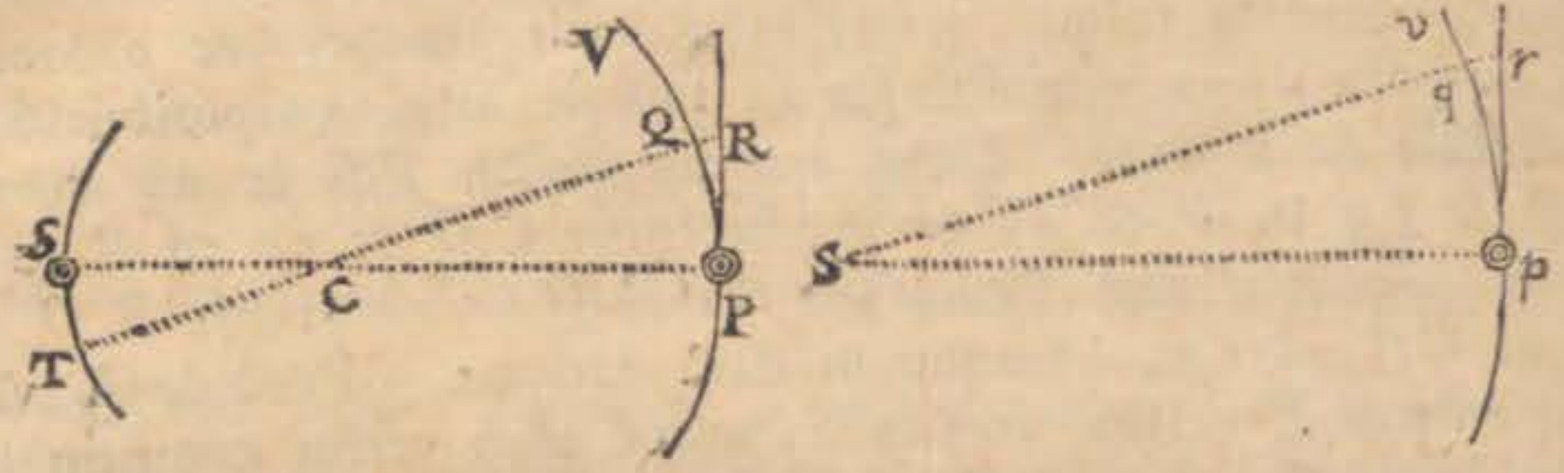
(a) * *Motu quovis non angulari.* Vide Legum coroll. 5. & 6.

(b) * *Erit ſimilis & æqualis curvis,* ut patet ex demonſtratione propoſitionis ſuperioris.

*Caſ.* 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per legum corollarium quartum, vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quieſcit, inque *s* & *p* locentur corpora duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus *S* & *P* ſimilia & æqualia. Dein tangant rectæ *PR* & *pr* curvas *PQ* & *pq* in *P* & *p*, & producantur *CQ* & *sq* ad *R* & *r*. Et ob ſimilitudinem figurarum *CPRQ*, *sprq* erit *RQ* ad *rq* ut *CP* ad *sp*, ideoque in datâ ratione. Proinde ſi vis, quâ corpus *P* verſus corpus *S*, atque ideo verſus centrum intermedium *C* attrahitur, eſſet ad vim, quâ corpus *p* verſus centrum *s* attrahitur, in eâdem illâ ratione datâ; hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus *PR*, *pr* ad arcus *PQ*, *pq* per intervalla ipſis proportionalia *RQ*, *rq*, ideoque vis poſterior efficeret, ut corpus *p* gyraretur in curvâ *pqv*, quæ ſimilis eſſet curvæ *PQV*, in quâ vis prior efficit, ut corpus *P* gyretur; & revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione *CP* ad *sp*, ſed (ob ſimilitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s*, *P* & *p*, & æqualitatem diſtantiarum *SP*, *sp*) ſibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus poſterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, (c) idque in ſubduplicatâ ratione intervallorum; propterea quod (per lemma decimum) ſpatia ipſo motus initio deſcripta ſunt in duplicatâ ratione temporum. Ponatur igitur velociloci-

(c) *Idque in ſubduplicatâ ratione intervallorum.* Naſcentibus arcubus Pq, PQ tempora quibus deſcribuntur intervalla rq, RQ ſunt in ſubduplicatâ ratione eorumdem intervallorum, per Lem. X. Quarè ſi velocitates uniformes quibus ſimiles arcus naſcentes pq, PQ æqualibus viribus centripetis deſcribuntur, dicantur V, v, tempora T, t, erit $T^2 : t^2 = rq : RQ = sp : CP = pq : PQ$, eſt verò (ſ) $V : v = \frac{pq}{T} : \frac{PQ}{t}$ ſive ut $\frac{T^2}{T} : \frac{t^2}{t}$, adeóque $V \sqrt{v} = T : t = \sqrt{sp} : \sqrt{CP}$. Itaque corpora P, p, viribus æqualibus ſemper attracta, circum centra quieſcentia C, s, naſcentes figuras ſimiles PQ, pq, adeóque & figuras quaſvis ſimiles PQV, pqu, deſcribent temporibus & velocitatibus quæ erunt in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum ſimilium CP, sp. Eſt autem (ex Dem.) figura pqu, ſimilis & æqualis figuræ quam corpus P, circum corpus mobile S, (ſpectatum tanquam immotum, ut in propoſitione ſuperiori expoſuimus) deſcribit eodem tempore, quo circà centrum C, deſcribit figuram ſimilem PQV.

De Motu Corporum.




locitas corporis $p$ esse ad velocitatem corporis $P$ in subduplicatâ ratione distantiæ $sp$ ad distantiam $CP$, eo ut temporibus, quæ sint in eâdem subduplicatâ ratione, describantur arcus $pq$, $PQ$, qui sunt in ratione integrâ: Et corpora $P$, $p$ viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia $C$ & $s$ figuras similes $PQV$, $pqv$, quarum posterior $pqv$ similis est & æqualis figuræ, quam corpus $P$ circum corpus mobile $S$ describit. *Q. E. D.*

*Cas.* 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, unà cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; & (per legum corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, ideoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, & propterea figuræ $pqv$ similes & æquales. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc corpora duo viribus distantiæ suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per prop. x.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, ellipses concentricas; & vice versâ, si tales figuræ describuntur, sunt vires (d) distantiæ proportionales.

*Corol.* 2. Et corpora duo, viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus, describunt (per prop. XI. XII. XIII.) &

(d) * *Distantiæ proportionales.* Cum enim (ex Dem.) corpus p, circà s, & corpora duo P, S, circà commune gravitatis centrum C, & circum se mutuò figuras similes vi centripetâ æquali describant, fitque (per prop. X.) figura pqv ellipsis cujus centrum S, liquet veritas corollarii.

& circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo, ſectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ deſcribuntur. Et vice versâ, ſi tales figuræ deſcribuntur, vires centripetæ ſunt quadrato diſtantiæ reciprocè proportionales. LIBER PRIMUS. PROP. LIX. THEOR. XXII.

*Corol.* 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad ſe mutuò ductis, (e) deſcribunt areas temporibus proportionales.

## PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

*Corporum duorum* S *&* P, *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum eſſe ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, & figuris, quæ corpora circum ſe mutuo deſcribunt, figuram ſimilem & æqualem deſcribentis, in ſubduplicatâ ratione corporis alterius* S, *ad ſummam corporum* S+P.

Namque, ex demonſtratione ſuperioris propoſitionis, tempora, quibus arcus quivis ſimiles $PQ$ & $pq$ deſcribuntur, ſunt in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum $CP$ & $SP$ vel $sp$, hoc eſt, in ſubduplicatâ ratione corporis $S$ ad ſummam corporum $S+P$. Et componendo, ſummæ temporum quibus arcus omnes ſimiles $PQ$ & $pq$ deſcribuntur, hoc eſt, tempora tota, quibus figuræ totæ ſimiles deſcribuntur, ſunt in eâdem ſubduplicatâ ratione. *Q. E. D.*

PRO-

(e) * *Deſcribunt areas temporibus proportionales.* Nam tempora quibus deſcribuntur areæ quævis ſimiles spq, CPQ, & spu, CPV, ſunt ſemper in datâ ratione, nimirum, ſubduplicatâ diſtantiarum ſimilium sp, CP (ex Dem.) & proindè tempus quo deſcribitur area spq, eſt ad tempus quo deſcribitur area spu, ut tempus quo deſcribitur area CPQ, ad tempus quo deſcribitur area CPV; ſed (per prop. 1.) tempora quibus deſcribuntur areæ spq, spu, ſunt areis illis adeóque & areis ſimilibus CPQ, CPV proportionalia, ergò areæ CPQ, CPV ſunt ut tempora quibus deſcribuntur; & quoniam areæ quas corpora S, P circum centrum gravitatis deſcribunt ſimiles ſunt areis quas iiſdem temporibus deſcribunt circum ſe mutuò, erunt quoque areæ iſtæ proportionales temporibus quibus deſcribuntur.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

*Si corpora duo* S *&* P, *viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus, se mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos, quam corpus idem* P *circa alterum quiescens* S *eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum* S + P *ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum* S.

([f]) Nam si descriptæ ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per theorema superius) forent in subduplicatâ ratione corporis *S* ad summam corporum *S+P*. Minuatur in hâc ratione tempus periodicum in ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; ellipseos autem axis principalis (per prop. xv.) minuetur in ratione, cujus hæc est sesquiplicatâ, id est in ratione, cujus ratio *S* ad *S+P* est triplicatâ; ideoque erit ad axem principalem ellipseos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter *S+P* & *S* ad *S+P*. Et inversè, axis principalis ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut *S+P* ad primum duorum mediè proportionalium inter *S+P* & *S*. *Q. E. D.*

PRO-

(f) *Nam si descriptæ ellipses &c.* Axis principalis ellipsium æqualium, quas corpora S, P circum se mutuò describunt (ut ad prop. 57. exposuimus) æqualis est axi principali ellipseos, p q u, quam corpus p vel P, circà corpus s vel S, reverâ immotum describit (ut in prop. 58). Hic axis dicatur *A* tempus periodicum quod in ellipsibus quatuor quas corpora S, P circum C & circum se mutuò describunt (ut in prop. 57.) idem est, dicatur *t*, tempus periodicum in ellipsi p q u, quam corpus p, vel P, circà corpus S, vel s, reverâ immotum (ut in prop. 58.) describit dicatur *T*, sitque *X* axis principalis ellipseos quam corpus idem P, vel p, circà alterum S vel s reverâ immotum (ut in prop. 58.) describere posset tempore periodico *t*, erit (per prop. 59.) $T^2 : t^2 = S + P : S$. & (per prop. 15.) $T^2 : t^2 = A^3 : X^3$, quarè $A^3 : X^3 = S + P : S$. Jam si capiantur duæ quantitates *B*, *C* mediæ proportionales inter *S + P* & *S*, erit *S + P* ad *S* in ratione triplicatâ $\overline{S+P}$, ad $B^3$, hoc est $S+P : S = \overline{S+P}^3 : B^3$, ac proindè $A^3 : X^3 = \overline{S+P}^3 : B^3$, ideoque $A : X = S+P : B$. Q. E. D.

## PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

*Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur, motus eorum perinde ſe habebunt, ac ſi non traherent ſe mutuò, ſed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto viribus iiſdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex reſpectu diſtantiæ corporum à centro illo communi atque reſpectu diſtantiæ totius inter corpora.*

Nam vires illæ, quibus corpora ſe mutuo trahunt, tendendo ad corpora, (g) tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eædem ſunt, ac ſi à corpore intermedio manarent. *Q. E. D.*

Et quoniam datur ratio diſtantiæ corporis utriuſvis à centro illo communi ad diſtantiam inter corpora, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex unâ diſtantiâ & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ diſtantiâ, & quantitatibus totidem datis, datamque illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, ſit directè vel inversè ut diſtantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel denique ut quantitas quævis ex hâc diſtantiâ & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directè itidem vel inversè ut corporis attracti diſtantia à centro illo communi, vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas, vel denique ut quantitas ex hâc diſtantiâ & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. (h) Hoc eſt, vis trahentis eadem erit lex reſpectu diſtantiæ utriuſque. *Q. E. D.*

PRO-

(g) * *Tendunt ad commune gravitatis centrum*, eſt enim communis interſectio omnium rectarum quæ corpora revolventia jungunt, & ſecundum quas, vires quibus corpora ſe mutuò trahunt, diriguntur.

(h) * *Hoc eſt vis trahentis eadem erit lex &c.* Sit (in fig. prop. 58.) $TQ=x$, $CQ=y$, & $x$ ad $y$ in ratione datâ $a$ ad $b$, ſeu $x=\frac{ay}{b}$, vis quâ corpora S, P

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

*Corporum duorum, quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.*

Corpora (per theorema novissimum) perinde movebuntur, ac si à corpore tertio in communi gravitatis centro constituto traherentur; & centrum illud ipso motus initio quiescet per hypothesin; & propterea (per legum corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum (per prop. xxv.) perinde ac si à viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuò trahentium. *Q. E. I.*

## PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

*Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.*

(i) Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii, quod unà cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per legum corollarium quintum, & theorema novissi-

in locis T, Q se mutuò trahunt sit ut $x^m$, erit $x^m = \frac{a^m y^m}{b^m}$, adeóque eadem vis etiam ut $y^m$, ob datam rationem $a^m$, ad $b^m$, cumque vis quâ corpora se mutuò trahunt æqualis sit vi quâ ad commune gravitatis centrum C urgentur, erit quoque vis ad C tendens ut $y^m$. Sit nunc vis quâ corpora se mutuò trahunt ut $cx^n + ex^m$, & $c$, $e$ quantitates datæ, erit $cx^n + ex^m = \frac{ca^n y^n}{b^n} + \frac{ea^m y^m}{b^m}$, ideóque vis ad C tendens ut $\frac{ca^n y^n}{b^n} + \frac{ea^m y^m}{b^m}$.

(i) * *Ex datis corporum motibus absolutis sub initio, datur uniformis motus absolutus centri communis gravitatis (67, 68, 69) & hinc datur motus spatii quod unà cum hoc centro & eâdem cum illo celeritate moveretur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii.*

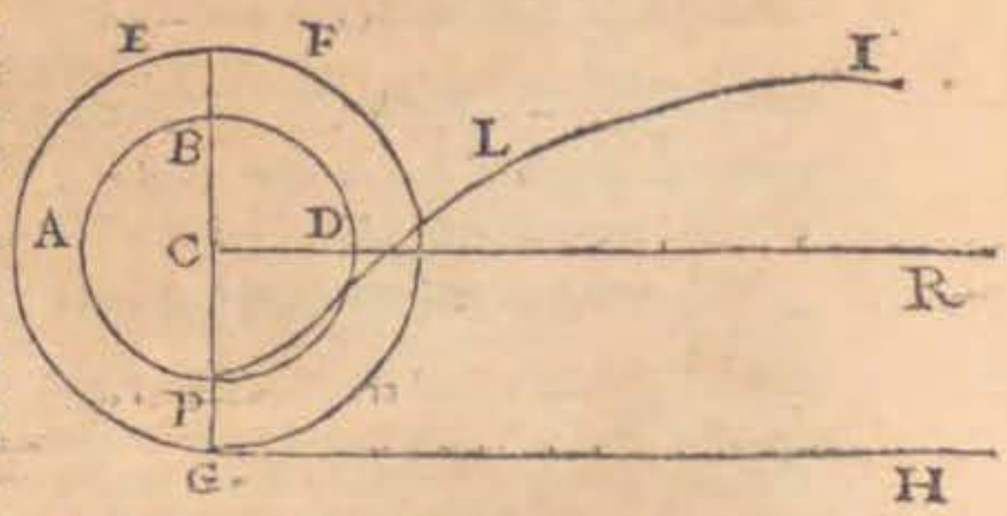
vissimum) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum unà cum communi illo gravitatis centro quiesceret, & corpora non traherent se mutuo, sed à corpore tertio sito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili, de loco dato secundum datam rectam, datâ cum velocitate exeuntis, & vi centripetâ ad centrum illud tendente correpti, (k) determinandus est motus per problema nonum & vicesimum sextum: & (l) habebitur simul motus corporis alterius circum idem centrum. (m) Cum hoc motu componendus est uniformis ille systematis spatii & corporum in eo gyrantium motus progressivus supra inventus, & habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili. *Q. E. I.*

LIBER PRIMUS. PROP. LXIII. PROBL. XXXIX.

(k) * *Determinandus est motus per probl. 9.* si corpora projiciantur secundum directionem quæ cum eorum distantia non coincidat, & *per probl. 26.* si coincidat directio projectionis cum distantiâ corporum.

(l) * *Et habebitur simul motus corporis alterius* è regione, si ex corpore cujus locus inventus est, per centrum gravitatis commune duorum, agatur recta quæ ità determinetur ut sit corpus cujus locus quæritur ad corpus aliud ut distantia data hujus à centro gravitatis communi ad eam rectam, in extremo hujus rectæ erit locus corporis quæsitus (60).

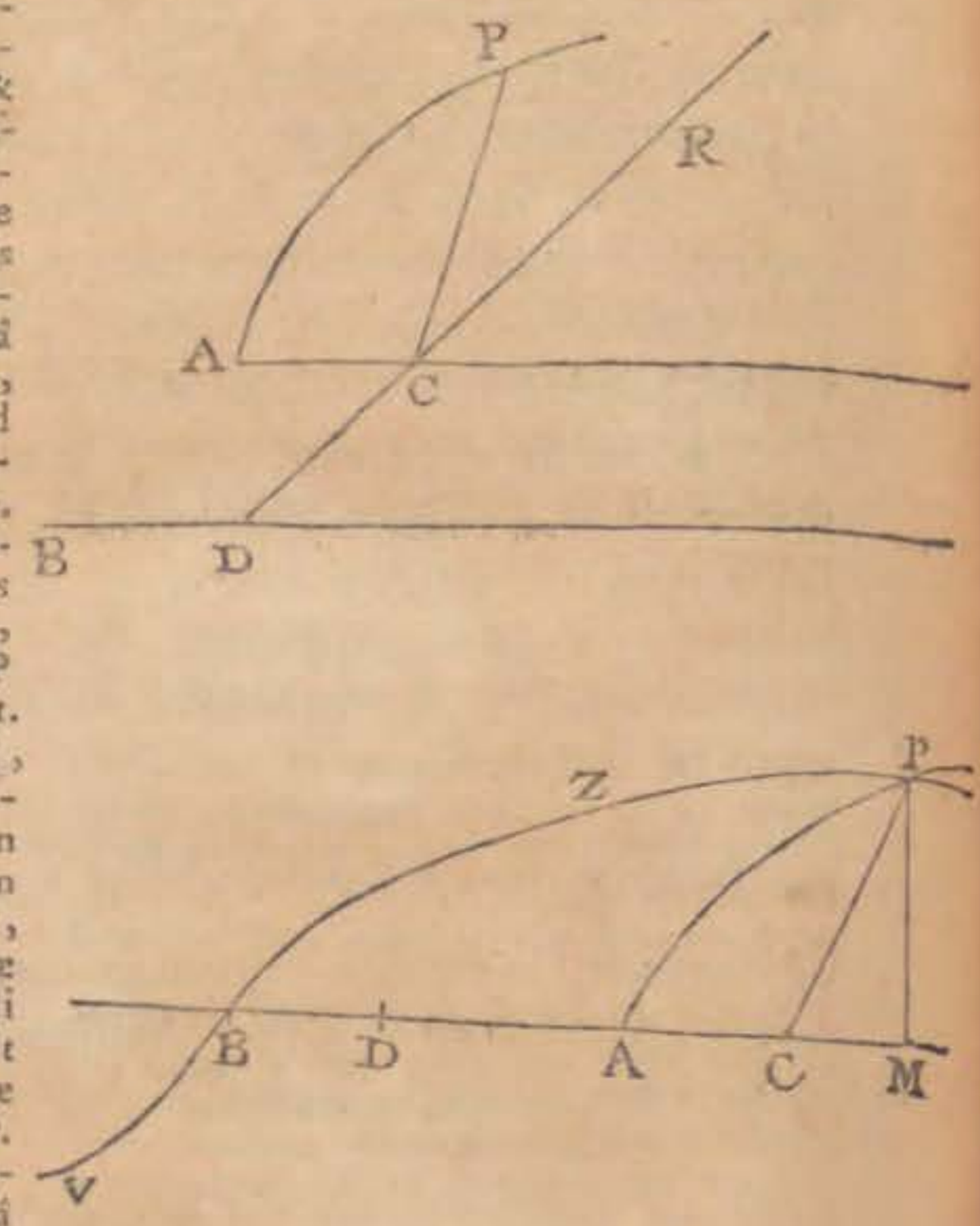
(m) 493. *Cum hoc motu componendus est &c.* In hypothesi hujus problematis, corpora duo circà commune gravitatis centrum seu umbilicum sectiones conicas describunt (per cor. 2. prop. 58.) & satis est (ex notâ superiori) unius corporis motum determinare. Itaque, exempli gratia, corpus P circulum P A B D uniformiter describat interea dum circuli centrum C, cum ipsius circuli plano æquabiliter movetur per rectam C R diametro P B perpendicularem, sitque semper circuli planum mobile in plano hujus schematis immoto. In linea C P capiatur C G ad C P in ratione velocitatis centri C per lineam C R progredientis, ad velocitatem corporis P in circuli peripheriâ revolventis, rota G E F centro C & radio C G descripta super regulam G H ad G C normalem progrediatur revolvendo circà axem suum, & punctum P in plano circuli G E F immotum describet interea trochoidem P L I quæ erit trajectoria quam corpus P motu absoluto describit; (ut patet ex prop 31. & not. 367). Hâc enim ratione centrum C percurret spatium C R = G H = semiperipheriæ rotæ G E F, eodem tempore quo punctum P revolvetur per totam semiperipheriam P A B; erit que proinde velocitas centri C per lineam C R ad velocitatem puncti vel corporis P in peripheriâ circuli P A B ut semirota ad semicirculum; hoc est, ut radius C G ad radium C P. Hinc si velocitas centri C æqualis sit velocitati corporis P in circulo suo revolventis, trochois P L I erit cyclois vulgaris; si velocitas centri C major extiterit, erit P L I trochois oblongata, si velocitas centri C minor, erit P L I trochois decurtata.



DE MOTU CORPORUM.

Sit nunc A P sectio quævis conica cujus vertex A, umbilicus seu virium & gravitatis commune centrum C, axis transversus A C, centrum C uniformiter moveatur in rectâ D R positione datâ, & cum illo planum curvæ A P C, ità transferatur in plano hujus schematis immoto, ut axis A C, rectæ B D, positione datæ sit semper parallelus. Dum corpus P in curvâ A P revolvens est in vertice A, sit C in D & A in B, ex datâ velocitate uniformi centri C in lineâ D R, dabitur spatium D C quod centrum illud C dato tempore describit, nec non positio curvæ A P. capiatur (per prop. 30. vel 31. ejusve scholium) area A P C rectæ datæ D C seu tempori proportionalis & obtinebitur locus absolutus corporis P, hoc est, punctum trajectoriæ quam corpus P in plano hujus schematis immoto describit.

Sit A P parabola, & umbilicus C, cum plano A P C uniformi motu progrediatur in axe B C, dum corpus P est in vertice parabolæ A, sit umbilicus C in D & vertex A in B, & trajectoria B Z P, quam corpus P, in plano hujus chartæ immoto describit erit parabola secundi generis quæ cubica dici solet. Nam sit A C, seu $BD = p$, & proindè parabolæ A P, latus rectum $= 4p$ (per theor. 2^um. de parabola). P M ad axem A B ordinatim applicatâ $= y$, $BM = x$, erit (ex naturâ Parabolæ, per theor. 1^um. de Parabolâ) $AM = \frac{yy}{4p}$, adeóque $BA = DC = x - \frac{yy}{4p} = \frac{4px - yy}{4p}$, CM (sive A M − A C) $= \frac{yy - 4pp}{4p}$. Porrò (ex Archimede prop. 17. de quadr. Parab. quæ est theor. 4^um. de parabolâ) area $APM = \frac{2}{3}$ AM × PM $= \frac{2y^3}{12p}$; area trianguli $CPM = \frac{1}{2}$ CM × PM $= \frac{y^3 - 4ppy}{8p}$; undè area $APC = APM - CPM = \frac{y^3 + 12ppy}{24p}$. Est autem area



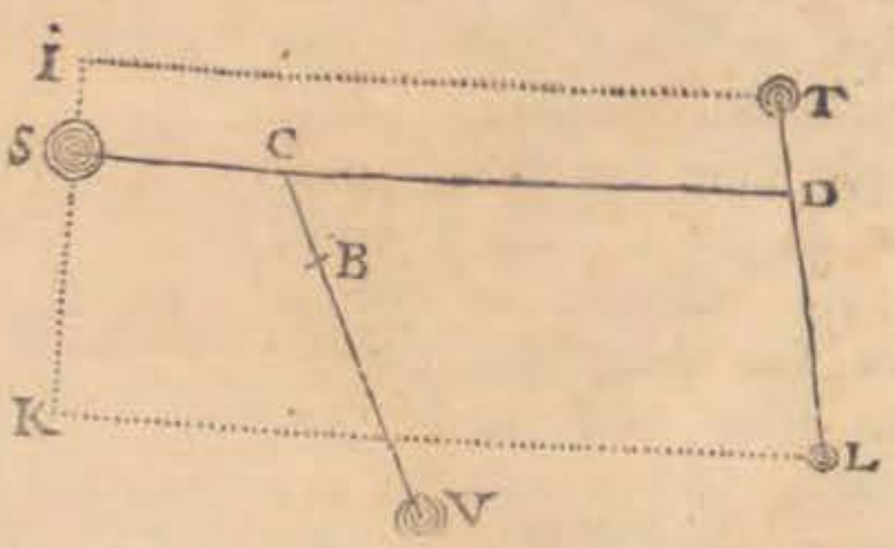

A P C, tempori quo describitur proportionalis, seu ut linea DC vel $BA = \frac{4px - yy}{4p}$, quarè si fuerit $\frac{a}{b}$ quantitas constans, erit $\frac{y^3 + 12ppy}{24p} = \frac{4apx - ayy}{24p}$, hoc est $y^3 + ayy + 12pyy = 4apx$, æquatio ad parabolam cubicam B Z P, quæ crura habet contraria B Z, B V in infinitum progredientia.

PRO-

## PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

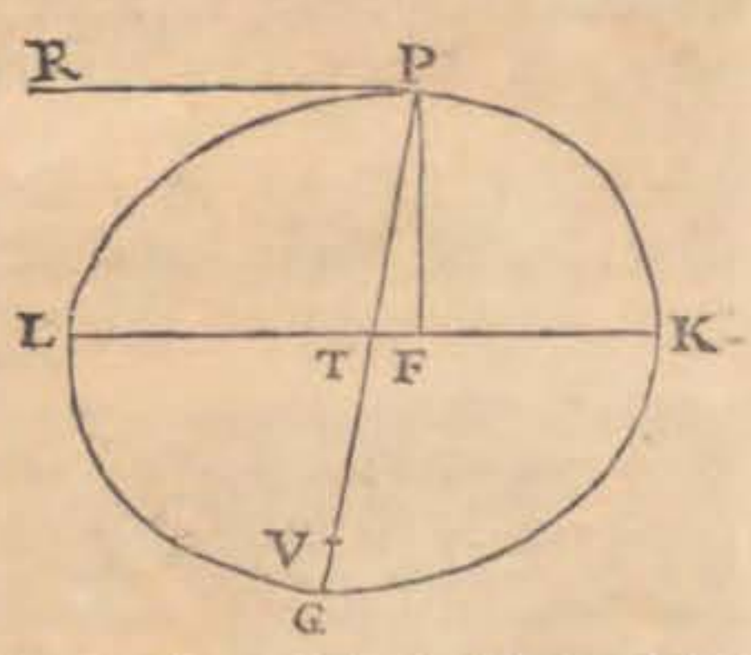
*Viribus quibus corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum à centris: requiruntur motus plurium corporum inter se.*

Ponantur primo corpora duo *T* & *L* commune habentia gravitatis centrum *D*. Describent hæc (per corollarium primum theorematis 21.) ellipses centra habentes in *D*, quarum magnitudo (n) ex problemate v. innotescit.




Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L* viribus acceleratricibus *ST*, *SL*, & ab ipsis vicissim trahatur. Vis *ST*, (per legum corol. 2.) resolvitur in vires *SD*, *DT*; & vis *SL* in vires *SD*, *DL*. Vires (o) autem *DT*, *DL*, quæ sunt

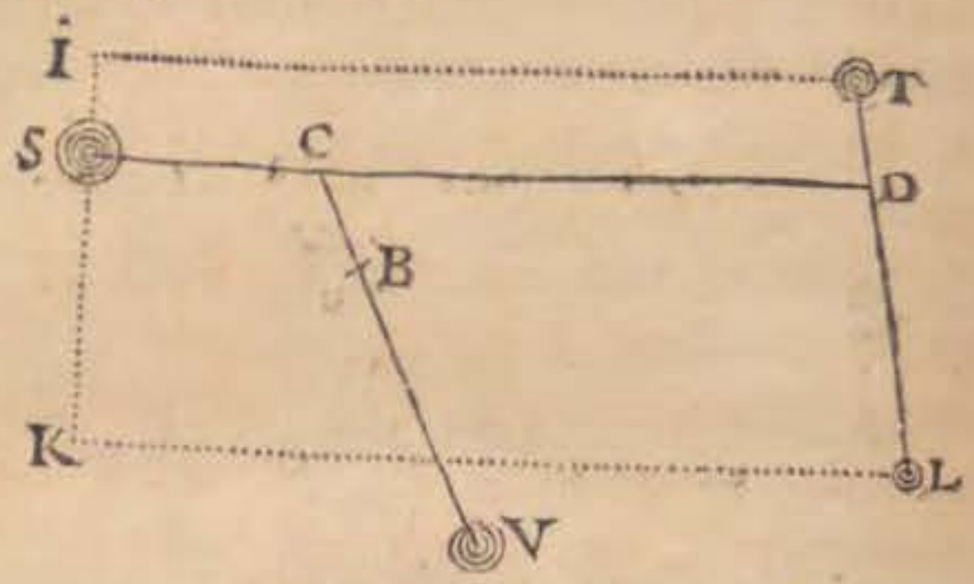
(n) 494. *Ex problemate* 5. *innotescit.* Si enim corpus aliquod de loco dato P exeat cum datâ velocitate & secundum datam directionem P R ut ellipsim PLGK, circà centrum T datum describat, recta P R positione datâ ellipsim tanget in P, ideòque diameter L K, ipsi P R parallela (prop. 32. Lib 1. conic. Appoll. sive Lem. IV. de Conic. & Theor. I. de Ell.) dabitur positione. Præterea, si ex puncto P ad diametrum L K demittatur perpendiculum P F, erit vis centripeta data quâ corpus versus T urgetur secundum directionem P T ad partem vis illius quæ juxtà directionem P F, agit, ut P T ad P F, proindeque pars illa vis centripetæ dabitur. Datâ autem vi centripetâ juxtà directionem P F urgente, datâque corporis de loco P exeuntis velocitate in lineâ P R, ad P F perpendiculâri, dabitur radius circuli ellipsim osculantis in P, quam corpus P cum hâc velocitate atque vi centripetâ potest describere (199.) & hinc dabitur altera diameter conjugata L K, & ellipsis describi poterit (vide Probl. de Ellipsi p. 130).




(o) * *Vires autem DT, DL, quæ sunt ut ipsarum summa TL &c.* Est enim D T ad T L in ratione datâ corporis L ad summam corporum T + L, & D L ad T L, in ratione datâ corporis T ad summam corporum T + L (60); quare vires D T, D L, in quâcumque positione corporum T & L, sunt ut T L.

DE MOTU CORPORUM.

sunt ut ipsarum summa $TL$, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora $T$ & $L$ se mutuo trahunt, additæ his viribus corporum $T$ & $L$, prior priori & posterior posteriori, componunt vires distantiis $DT$ ac $DL$ proportionales, ut prius, sed viribus prioribus majores; ideoque (per corol. 1. prop. x. & corol. 1. & 8. prop. IV.) efficiunt ut corpora illa describant ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices $SD$ & $SD$, (P) actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & secundum lineas $TI$, $LK$, ipsi $DS$ parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam $IK$; quam ductam concipe per medium corporis $S$, & lineæ $DS$ perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam $IK$ accessus (Q) faciendo ut systema corporum $T$ & $L$ ex unâ parte, & corpus $S$ ex alterâ, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum $C$. (R) Tali motu corpus $S$, eo quod summa virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, distantiæ $CS$ proportionalium, tendit versus centrum $C$, describit ellipsin circa idem $C$;




(p) * *Actionibus motricibus* $SD \times T$, *&* $SD \times L$ (per def. 8. & not. 12.) *quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter* ob æqualem vim acceleratricem $SD$, ut fit in corporibus gravibus, quæ licet massis inæqualia, vi tamen gravitatis acceleratrice, cadendo æqualiter acceleran-tur.

(q) * *Faciendo ut systema corporum* $T$, *&* $L$, (seu D centrum gravitatis commune ipsorum) *ex unâ parte, & corpus S ex altera; justis cum velocitatibus in dato* plano secundum directiones parallelas & contrarias impressis *gyrentur circa C commune gravitatis centrum trium corporum.*

(r) * *Tali motu corpus S &c.* Corpus S à corporibus T & L trahitur viribus quæ sunt inter se ut $ST \times T$ & $SL \times L$ (ex hyp.) & per resolutionem virium corpus S a corporibus T & L versus D & C juxtà directionem SD seu SC trahitur viribus quæ sunt inter se ut $SD \times T$ & $SD \times L$, hoc est, vi quæ est ut $SD \times \overline{T+L}$, adeóque ut SD, ob datam corporum summam $T+L$, & ut CS, ob datam rationem SD ad CS, (61). Corpus idem S juxtà directiones ipsis DT, DL parallelas, trahitur inter se ut $DT \times T$ & viribus æqualibus (60)

viribus quæ sunt $DL \times L$, hoc est, quæ proinde nullam

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

*Corpora plura, quorum vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum ab eorundem centris, moveri poſſe inter ſe in ellipſibus; & radiis ad umbilicos ductis areas deſcribere temporibus proportionales quam proximè.*

In propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus ubi motus plures peraguntur in ellipſibus accuratè. Quo magis recedit lex virium a lege ibi poſitâ, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt, ut corpora, ſecundum legem hic poſitam ſe mutuo trahentia, moveantur in ellipſibus accuratè, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multùm ab ellipſibus errabitur.

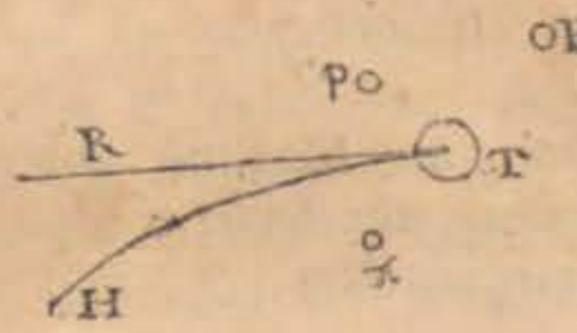
*Caſ.* 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo diſtantias revolvi, tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum, ſine errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; (y) niſi quâtenus errores inducuntur, vel per errorem maximi

ad vim acceleratricem quâ punctum D trahitur versùs C, ut TD ad CD, hoc eſt ut diſtantiæ à punctis ad quæ illæ vires diriguntur. Corpus igitur T ad punctum D, & punctum D ad C trahuntur viribus abſolutis æqualibus, hoc eſt, eodem modo ad ſua reſpective centra D & C trahuntur quo traherentur, ſi circà idem virium centrum ad diſtantias TD, DC revolverentur, ſed in hoc caſu æqualibus temporibus periodicis ellipſes ſuas deſcriberent (per cor. 2. prop. X.) ergò & in illo caſu corpus T circà D & punctum D circà C, æqualibus temporibus periodicis ſuas ellipſes deſcribunt. Idem eodem modo demonſtratur, cùm plura ſunt corpora revolventia.

(y) * *Niſi quatenus errores inducuntur &c.* Nam ſi corpus maximum à communi illo gravitatis centro non erraret, nullaque eſſet actio minorum corporum in ſe mutuò, quodlibet exiguum corpus revolveretur in ellipſi circà maximum, atque radiis ad idem ductis deſcriberet areas temporibus proportionales (per cor. 2. & 3. prop. 58.)

ximi à communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora, usque donec error iste, & (b) actiones mutuæ sint datis quibusvis minores; atque ideo donec orbes cum ellipsibus quadrent, & areæ respondeant temporibus, sine errore, qui non sit minor quovis dato. *Q. E. O.*

*Cas.* 2. (a) Fingamus jam systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum se mutuò revolventium corporum systema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longè maximi & ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut systema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur, efficiunt: manifestum est quod, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorsus orietur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem: secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones




S

(z) * *Et actiones mutuæ sint datis quibusvis minores* respectu actionis corporis maximi in corpora minora; nam cum corporis vis attractiva absoluta hic supponatur materiæ proportionalis, diminutâ corporis massâ, vis attractiva in eâdem ratione minuitur.

(a) * *Fingamus jam corporum minorum*, P, p, π, *modo jam descripto circà maximum* T *revolventium systema progredi uniformiter in directum*, seu totius systematis commune gravitatis centrum T, progredi uniformiter per rectam TR, *& interea vi corporis alterius longè maximi* S, *& ad magnam distantiam siti, urgeri ad latus* secundum rectas PS, ps, πS, TS, atque à rectâ TR retrahi & in curvam TH cogi &c.

DE MOTU CORPORUM.

nes omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; & augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ respectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem minores sint, quam datæ quævis; perseverabunt motus partium systematis inter se sine erroribus, qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hâc attractione ad modum corporis unius; hoc est, (b) centro suo gravitatis describet circa corpus maximum sectionem aliquam conicam (*viz.* (c) Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsin fortiore) & radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, sine ullis erroribus, nisi quas partium distantiæ, perexiguæ sane & pro lubitu minuendæ, valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

*Corol.* 1. (d) In casu secundo, quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium systematis inter se; propterea quod linearum à corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

*Corol.* 2. Maximè autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium systematis, versus corpus omnium maximum, (e) non sint ad invicem reciprocè ut quadra-

(b) * *Hoc est, centro suo gravitatis*, in quo totum systema gravium P, p, $\pi$, T, unitum ac contractum intelligitur (71).

(c) * *Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsim* vel circulum *fortiore*; manente enim velocitate corporis circà centrum virium S projecti, & circulum vel ellipsim describentis minui debet illius ad centrum S attractio, ut ad eandem distantiam possit Parabolam describere, & magis adhuc decrescere illam attractionem oportet, ut describat Hyperbolam (per cor. 7. prop. 16. & Dem. prop. 17).

(d) * *In casu 2°. quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium corporum, eò magis* recedit à casu ubi perturbatio est nulla, nempè quandò corpus S infinitè distat, ergò eò *magis turbabuntur motus partium systematis inter se.*

(e) * *Non sint ad invicem reciprocè &c.* Exempli causâ; Si corpora P, p, diversis legibus traherentur, P, v. gr. in ratione reciprocâ quadrati distantiæ suæ à corpore maximo S; p verò in ratione cubi distantiæ.

* Prax-

ta distantiarum à corpore illo maximo; (f) præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum à corpore maximo. Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, perturbat motus inter se, necesse est, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessariò mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

*Corol.* 3. Unde si systematis hujus partes in ellipsibus, vel circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod eædem à viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissimè, aut urgentur æqualiter, & secundum lineas parallelas quamproximè.

## PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

*Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum, se mutuo trahant; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur, quam si maximum illud vel à minoribus non attractum quiescat, vel multò minus vel multò magis attractum, aut multò minus aut multò magis agitetur.*

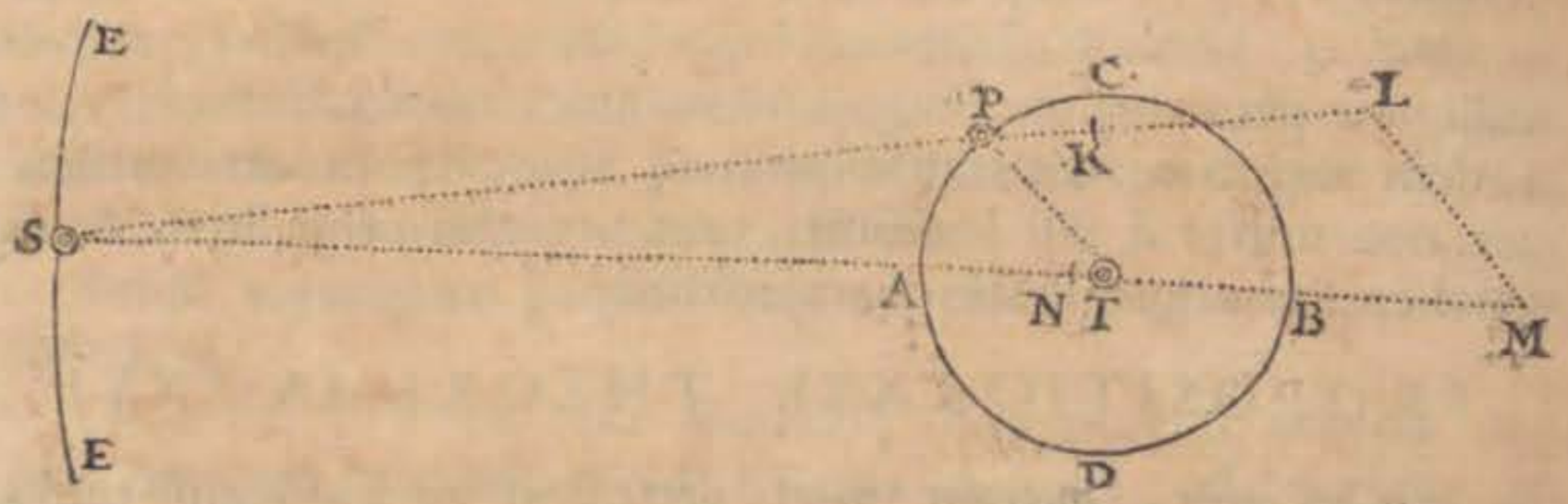
Liquet ferè ex demonstratione corollarii secundi propositionis præ-

(f) * *Præsertim si proportionis hujus inæqualitas &c.* Exempli causâ, si inæqualitas attractionum acceleratricum in corporibus P, p, major sit inæqualitate distantiarum SP, Sp; Nam si illæ inæqualitates attractionum & distantiarum essent in datâ ratione, evanescente distantiarum SP, Sp differentiâ, quando corpus maximum S longissimè distat, evanesceret quoque attractionum acceleratricum inæqualitas.

DE MOTU CORPORUM.

præcedentis; ſed argumento magis diſtincto & latius cogente ſic evincitur.

*Caſ.* 1. Revolvantur corpora minora *P* & *S*, in eodem plano circa maximum *T*, quorum *P* deſcribat orbem interiorem *PAB*, & *S* exteriorem *ESE*. Sit *SK* mediocris diſtantia corporum P & *S*; & corporis *P* verſus *S* attractio acceleratrix, in mediocri illâ diſtantiâ, exponatur per eandem. In duplicatâ ratione *SK* ad *SP* capiatur *SL* ad *SK*, & (g) erit *SL* attractio acceleratrix corporis *P* verſus *S* in diſtantiâ quâvis *SP*. Junge *PT*, eique parallelam age *LM* occurrentem *ST* in *M*;




& attractio *SL* reſolvetur (per legum corol. 2.) in attractiones *SM*, *LM*. Et ſic urgebitur corpus *P* vi acceleratrice triplici. Vis una tendit ad *T*, & oritur à mutuâ attractione corporum *T* & *P*. Hâc vi ſolâ corpus *P* circum corpus *T*, ſive immotum, ſive hâc attractione agitatum, deſcribere deberet & areas, radio *PT*, temporibus proportionales, & ellipſin cui umbilicus eſt in centro corporis *T*. Patet hoc per prop. XI. & corollaria 2. & 3. theor. XXI. Vis altera eſt attractionis *LM*, quæ quoniam tendit à *P* ad *T*, ſuperaddita vi priori coincidet cum ipsâ, & ſic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales deſcribantur per corol. 3. theor. XXI. At (h) quoniam non eſt quadrato diſtantiæ *PT* recipro-

(g) * *Et erit SL attractio acceleratrix &c.* Eſt enim (ex Hyp.) ut $SP^2$ ad $SK^2$ ità attractio acceleratrix in K (quam exhibet linea SK) ad attractionem acceleratricem in P, quam proindè exhibebit linea SL.

(h) 495. *At quoniam non eſt quadrato diſtantiæ PT reciprocè proportionalis*; Eſt enim (ex conſtr.) $SK^2 : SP^2 = SL : SK$, adeóque $SK^3 : SP^3 = SL \times SK : SK \times SP = SL : SP$. Sed ob triangula MLS, TPS ſimi-

cè proportionalis, componet eâ cum vi priore vim ab hâc proportione aberrantem, idque eo magis, quo major eſt proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per prop. XI. & per corol. 2. theor. XXI.) vis, quâ ellipſis circa umbilicum $T$ deſcribitur, tendere debeat ad umbilicum illum, & eſſe quadrato diſtantiæ $PT$ reciprocè proportionalis; vis illa compoſita, aberrando ab hâc proportione, faciet ut orbis $PAB$ aberret à formâ ellipſeos umbilicum habentis in $T$; idque eo magis, quo major eſt aberratio ab hâc proportione; atque ideo etiam quo major eſt proportio vis ſecundæ $LM$ ad vim viribus primam, cæteris paribus. Jamſi vero vis tertia $SM$, trahendo corpus $P$ ſecundum lineam ipſi $ST$ parallelam, componet cum prioribus vim, quæ non amplius dirigitur à $P$ in $T$; quæque ab hâc determinatione tanto magis aberrat, quanto major eſt proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus $P$, radio $TP$, areas non amplius temporibus proportionales deſcribat; atque ut aberratio ab hâc proportionalitate tanto major ſit, quanto major eſt proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero $PAB$ aberrationem à formâ ellipticâ præfatâ hæc vis tertia duplici de causâ adaugebit, tum quod non dirigatur à $P$ ad $T$, (i) tum etiam quod non ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ $PT$. Quibus intellectis, manifeſtum eſt, quod areæ temporibus tum maximè fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod orbis $PAB$ tum maximè accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam ſecunda quam tertia, ſed præcipuè vis tertia fit minima, vi primâ manente.

Exponatur corporis $T$ attractio acceleratrix verſus $S$ per lineam

ſimilia $SL:SP=LM:PT$; ergò $LM:PT=SK^3:SP^3$, & proindè vis $LM$ eſt ut $\frac{SK^3\times PT}{SP^3}$, ſeu datâ $SK$, ut $\frac{PT}{SP^3}$; undè creſcente diſtantiâ $PT$ creſcit vis $LM$.

(i) 496. *Tum etiam quod non ſit reciprocè proportionalis &c.* Nam $PT$ eſt ad $ST$ ut vis $LM$ eſt ad vim $SM$, ſed (495) vis $LM$ eſt ut $\frac{SK^3\times PT}{SP^3}$, & proindè vis $SM$ eſt ut $\frac{SK^3\times ST}{SP^3}$. Quarè vis $SM$, datis $SK$ & $ST$, eſt ut $\frac{1}{SP^3}$.

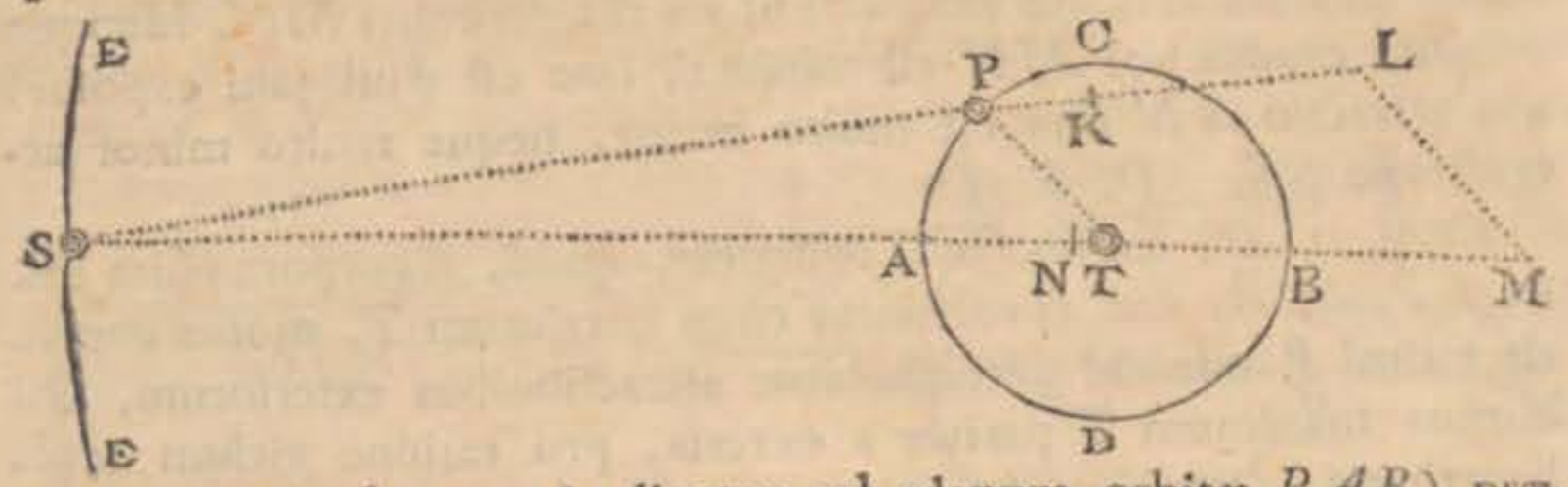
DE MOTU CORPORUM.

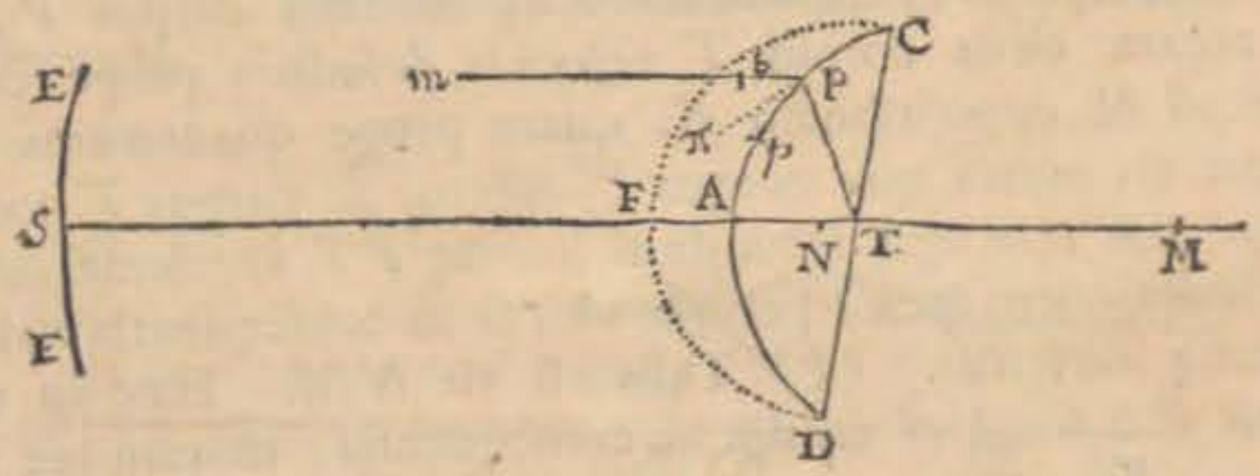
neam $SN$; & si attractiones acceleratrices $SM$, $SN$ æquales essent; hæ, trahendo corpora $T$ & $P$ æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (per legum corol. VI.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio $SN$ minor esset attractione $SM$, tolleret ipsa attractionis $SM$ partem $SN$, & maneret pars sola $MN$, quâ temporum & arearum proportionalitas & orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio $SN$ major esset attractione $SM$, oriretur ex differentiâ solâ $MN$ perturbatio proportionalitatis & orbitæ. Sic per attractionem $SN$ reducitur semper attractio tertia superior $SM$ ad attractionem $MN$, attractione primâ & secundâ manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & orbita $PAB$ ad formam præfatam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio $MN$ vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum $P$ & $T$ attractiones acceleratrices, factæ versùs corpus $S$, accedunt quantùm fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio $SN$ non est nulla, neque minor minimâ attractionum omnium $SM$, sed inter attractionum omnium $SM$ maximam & minimam quasi mediocris; hoc est, non multo major neque multo minor attractione $SK$. *Q. E. D.*

*Cas.* 2. (k) Revolvantur jam corpora minora $P$, $S$ circa maximum $T$ in planis diversis; & vis $LM$, agendo secundum lineam $PT$ in plano orbitæ $PAB$ sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus $P$ de plano orbitæ suæ deturbabit.

(k) 497. *Cas.* 2. Planum TESE cum hujus schematis plano congruere supponatur, orbitæ verò PAB planum alterâ sui parte, v. gr. CAD suprà planum TESE eminere, & altera parte DBC infrà planum TESE deprimi intelligatur, linea recta DC communis planorum TESE & PAB intersectio, linea nodorum dicitur, & illius extrema puncta D & C nodi appellantur. Nodi vel puncta quævis D, C dicuntur esse in quadraturis seu aspectum quadratum obtinere respectu corporis S, dum sunt in lineâ rectâ ad ST in puncto T perpendiculari, quod in hoc casu corpus S & punctum C vel D sub angulo recto de loco T videantur. Si super lineâ ST erectum intelligatur planum plano TESE verticale, sintque puncta A & B in illo plano verticali, A quidem inter corpora S & T; B verò ultrà T, punctum A dicitur esse in conjunctione, & punctum B in oppositione respectu corporum S & T; & loca A & B, communi nomine syzigiæ vocantur. Motus in longitudinem est quo cor-

bit. (1) At vis altera $NM$, agendo secundum lineam quæ ipsi $ST$ parallela est (atque ideo, quando corpus $S$ versatur extra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ $PAB$) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, indu-




corpus revolvens P à puncto suæ orbitæ dato, v. gr. à puncto C recedit per CPADB: motus in latitudinem est is quo corpus revolvens P ad planum immotum TESE accedit vel ab eo recedit. Si corporum revolventium P & S motus inter se conferantur, & utrumque in eandem plagam feratur, v. gr. ab Occidente in Orientem, motus in consequentia fieri dicitur; si verò alterum in unam plagam, alterum in alteram moveatur, motus unius in consequentia alterius vocatur in antecedentia, v. gr. motus ab Oriente in Occidentem in antecedentia fieri dicetur.

(1) * *At vis altera NM &c.* Si orbitæ PAB (vid. fig. Newt.) pars ACB suprà planum TESE elevata, pars verò altera ADB infrà ipsum depressa intelligatur, ita ut linea nodorum AB coincidat cum lineâ TS sitque proinde corpus S in lineâ nodorum productâ, vis NM ut potè quæ in corpus P agit secundùm lineam ipsi TS parallelam, jacebit in plano orbitæ PAB, & motum corporis P in latitudinem non perturbabit, hoc est, non efficiet ut corpus P ad planum TESE magis accedat aut ab eo recedat. Verùm si corpus S versatur extrà lineam nodorum, vis NM inducet perturbationem motûs in latitudinem. Sit enim CADT pars orbitæ quam corpus P exclusâ vi NM describeret suprà planum TESE seu CFD eminens, sit CD linea nodorum, Pm recta æqualis & parallela NM, p locus ad quem corpus P exclusâ vi NM tempusculo minimo perveniret, b locus in lineâ Pm ad quem corpus idem P, solâ vi NM, eodem tempusculo traheretur; corpus illud P duabus viribus impulsum, quarum altera agit secundum directionem Pp in plano CAD altera secundum directionem Pm ad planum CAD inclinatam, motu composito describet lineam Pπ quæ non est in plano CAD.

DE MOTU CORPORUM.

inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus $P$ de plano ſuæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum $P$ & $T$ ad invicem ſitu, erit ut vis illa generans $MN$, ideoque minima evadet ubi $MN$ eſt minima, hoc eſt (uti jam expoſui) ubi attractio $SN$ non eſt multo major, neque multo minor attractione $SK$. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. (n) Ex his facilè colligitur, quod, ſi corpora plura minora $P$, $S$, $R$, &c. revolvantur circa maximum $T$, motus corporis intimi $P$ minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum $T$ pariter à cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur, atque à cætera ſe mutuo.

*Corol.* 2. In ſyſtemate vero trium corporum $T$, $P$, $S$, ſi attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint ad invicem reciprocè ut quadrata diſtantiarum; corpus $P$, radio $PT$, aream circa corpus $T$ velocius deſcribet prope conjunctionem $A$ & oppoſitionem $B$, quam prope quadraturas $C$, $D$. Namque vis omnis qua corpus $P$ urgetur & corpus $T$ non urgetur, quæque non agit ſecundum lineam $PT$ accelerat vel retardat deſcriptionem areæ, perinde ut ipſa in conſequentia vel in antecedentia dirigitur. (o) Talis eſt vis $NM$. Hæc in tranſitu corporis $P$ à $C$ ad $A$ tendit in conſequentia, motumque accele-

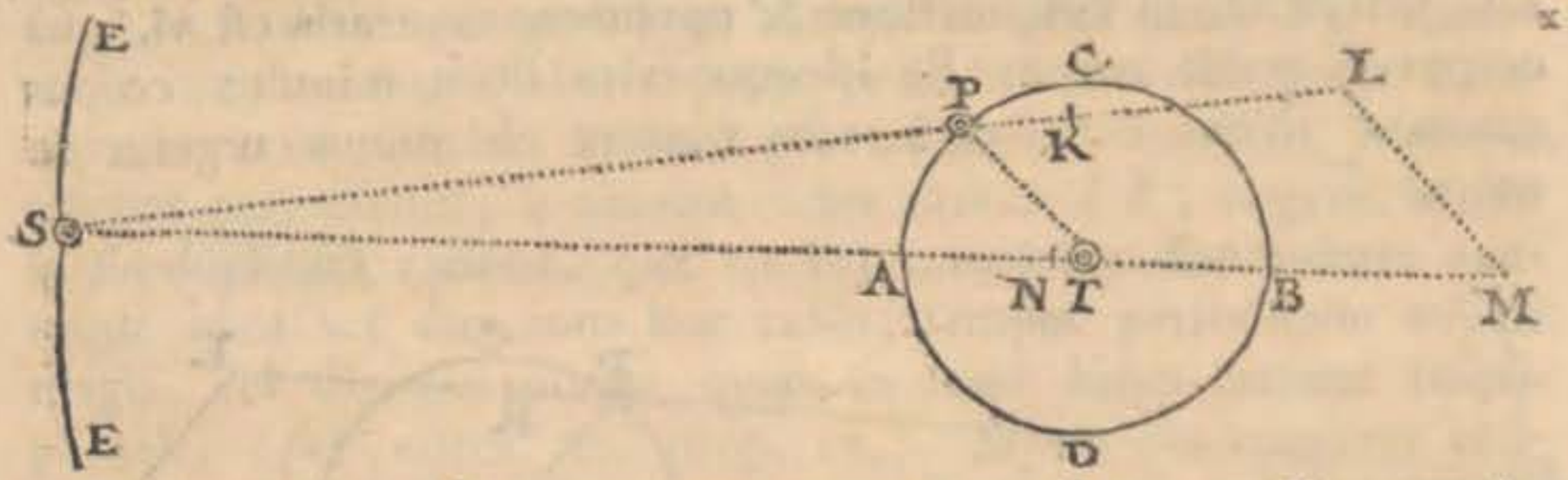
(n) * *Corollarium primum* patet ex demonſtratis cum duo tantum ſunt corpora minora P, S; addatur enim tertium corpus R, eodem modo demonſtrabitur motum corporis intimi P minimè perturbari attractione ipſius R, ubi corpus maximum T pariter attrahitur à corpore illo R, ac corpus P, & ità de pluribus corporibus ratiocinari licet. Quare ex demonſtratis *facilè colligitur quod ſi &c.*

(o) 498. *Talis eſt vis NM:* Si ſupponamus orbem CADB (vid. fig. Newt.) eſſe circulo finitimum, & diſtantiam SD maximam reſpectu radii PT, erit ferè SC=SK=ST=SN, & proindè NM=TM. Porrò corpore P in quadraturis C, D verſante, eſt SC=SP=SK; quarè cum ſit (per conſtr. prop. *66.*) SL:SK=SK²:SP², erit in quadraturis SL=SK=SC, & LM coincidet cum CT ſeu PT, adeóque evaneſcet TM ſeu NM. Nulla igitur erit virium SM, SN, *in* quadraturis differentia, & ideò corpus P reliquis viribus ad centrum T tendentibus agitatum, radio vectore areas ibi deſcribet temporibus proportionales. At ubi corpus P extrà quadraturas eſt in hemiperipheriâ CAD, vis SM major eſt vi SN & corpus P virium differentiâ NM trahitur ſecundùm directionem ipſi TS parallelam.

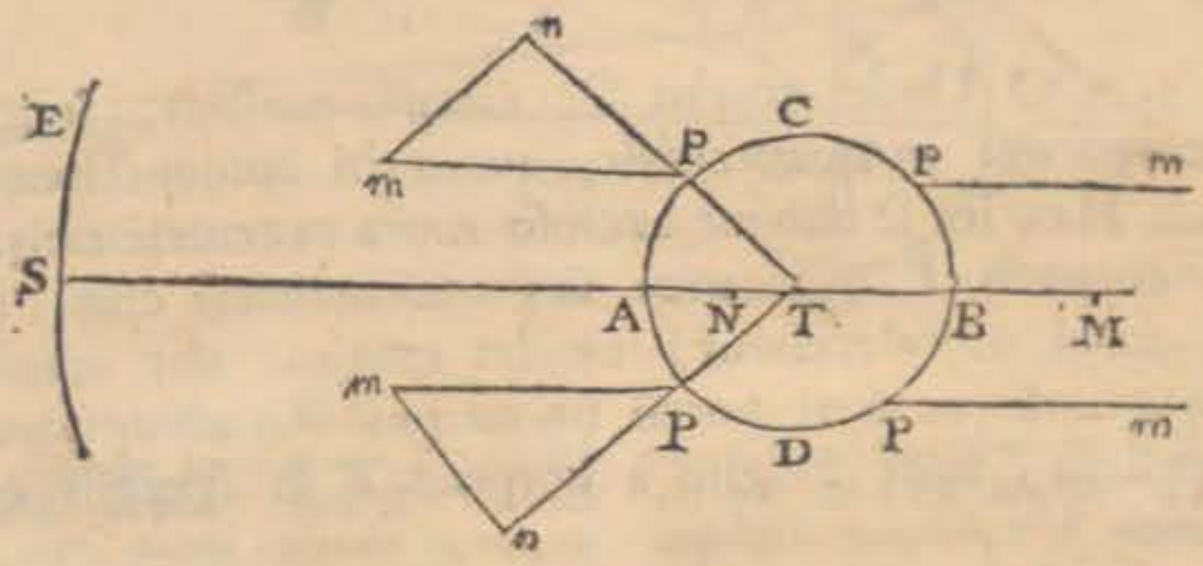
Sit Pm æqualis & parallela ipſi NM, & demiſſo ex m in radium TP productum perpendiculo mn, vis Pm, ſeu NM, in duas vires Pn, nm reſolvitur, quarum altera Pn trahendo ſecundùm directionem radii TP, corporis P motum in longitudinem nihil mutat, nec æquabilem arearum deſcriptionem turbat; altera verò NM, trahendo ſecundum directionem nm, radio TP perpendicularem, hoc eſt, ſecundum directionem tangentis in P, motum in longitudinem accelerat in primo

qua-

rat; dein usque ad *D* in antecedentia, & motum retardat; tum in consequentia usque ad *B*, & ultimo in antecedentia transeundo à *B* ad *C*.




*Corol.* 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione & oppositione quam in quadraturis. *Co-*

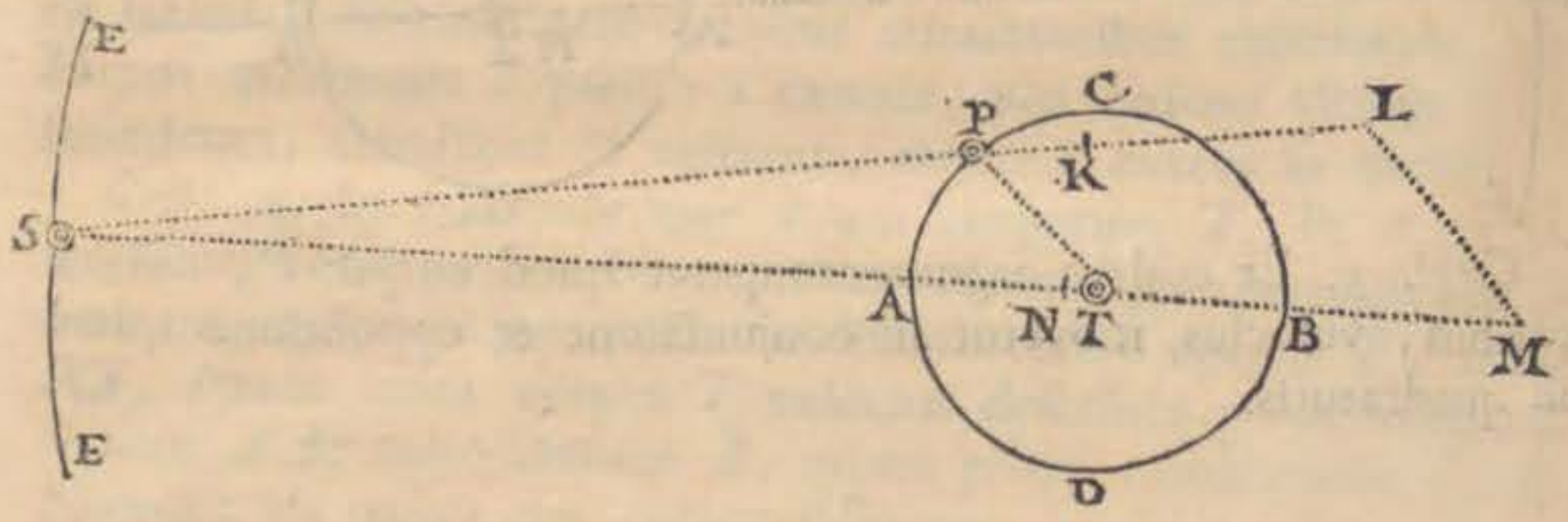



quadrante CA retardat in secundo quadrante AD.

In alterâ hemiperipheriâ DBC, vis SM minor est vi SN, quoniam corpus P à corpore S longius distat quam corpus T, unde si vires perturbantes ad solum corpus P referantur, virium SM, SN differentia NM negativa seu ablatitia erit, aut quod idem est, contrariâ directione aget; Fingatur enim corpora T & P urgeri ambo vi SN ubique æquali & sibi parallela, pergent moveri inter se quasi omnino abesset illa vis per Cor. 6. Legum motûs, tum trahatur corpus P vi NM secundum directionem oppositam vi SN, ex eâ actione mutabuntur motus corporum T & P inter se, sed etiam ex eâ actione vis SN quæ trahere corpus P fingebatur, reducetur ad vim SM quæ est vis revera agens dum vis SN agit in T, ergo si æstimentur motus corporum T & P inter se, quasi corpus P in hemiperipheriâ DBC urgeretur virium differentia NM in contrariam partem agente, obtinebuntur veræ mutationes motuum corporum T & P inter se, ex actionibus SN & SM ortæ, ideoque in posterum considerabitur corpus P in hemiperipheriâ DBC quasi urgeretur vi NM secundum directionem Pm ipsi NM parallelam à P. versùs m agente; atque ideo, si vis Pm in duas vires, ut in alterâ hemiperipheriâ factum est, resolvatur, manifestum erit motum in longitudinem in quadrante DB accelerari & in quadrante BC retardari.

DE MOTU CORPORUM.

*Corol.* 4. Orbita corporis *P*, cæteris paribus, curvior eſt in quadraturis quam in conjunctione & oppoſitione. Nam corpora velociora minus deflectunt à recto tramite. Et (P) præterea vis *KL*, vel *NM*, in conjunctione & opoſitione contraria eſt vi, quâ corpus *T* trahit corpus *P*; ideoque vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet à recto tramite ubi minus urgetur in corpus *T*.



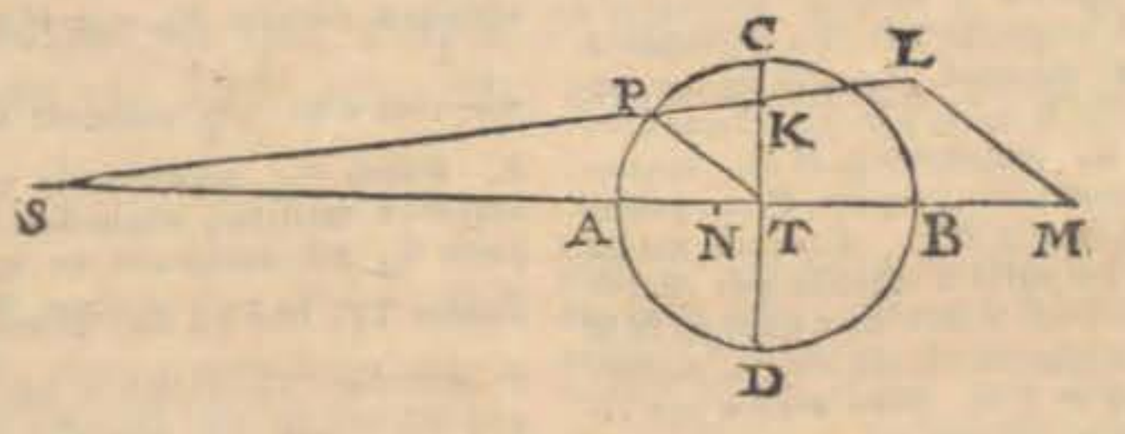

*Corol.* 5. (q) Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet à corpore *T* in quadraturis, quam in conjunctione & oppoſitione. Hæc ita ſe habent excluſo motu excentricitatis. Nam ſi orbita corporis *P* excentrica ſit, excentricitas ejus (ut mox in hujus corol 9. oſtendetur) evadet maxima ubi apſides ſunt in ſyzygiis; indeque fieri poteſt ut corpus *P*, ad apſidem ſummam appellens, abſit longius à corpore *T* in ſyzygiis quam in quadraturis.

*Corol.* 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *T*, quâ corpus *P* retinetur in orbe ſuo, augetur in quadraturis per additio-

(p) 409. *Et præterea vis KL &c.* Iiſdem poſitis quæ in notâ ſuperiori, rectæ SL, SM ſunt ferè parallelæ, ac proindè TM = PL & LM = PT quam proximè; quare coincidente P cum A & K cum T, fit LM = AT = PK, & NM ſeu TM = PL = AT + KL, & NM − LM = KL, hoc eſt, vis tota perturbans quâ corpus P in conjunctione A à corpore T verſus S retrahitur, eſt ut KL quam proximè; vi enim LM trahitur P verſus T & vi NM à corpore T verſus S retrahitur. Idem eodem modo demonſtratur, corpore P in oppoſitione B poſito.

(q) * *Undè corpus P &c.* Nam cum orbita corporis P curvior ſit in quadraturis C vel D quam in ſyzigiis A & B (per cor. 4.) neceſſe eſt, cæteris paribus, ut in ſyzigiis A & B depreſſior ſit quam in quadraturis C & D ad inſtar ellipſeos cujus ſit centrum T axis major CD axis minor AB. Hæc ità ſe habent, ſi, excluſis viribus perturbantibus, orbita corporis P fuerit circulus cujus centrum T.

ditionem vis $LM$, ac diminuitur in ſyzygiis per ablationem vis $KL$, & (r) ob magnitudinem vis $KL$, magis diminuitur quam augetur; eſt autem vis illa vi centripeta (per corol. 2. prop. IV.) in ratione compoſitâ ex ratione ſimplici radii $TP$ directè & ratione duplicatâ temporis periodici inversè: patet hanc rationem compoſitam diminui per actionem vis $KL$; ideoque tempus periodicum, ſi maneat orbis radius $TP$, augeri, idque in ſubduplicatâ ratione, quâ vis illâ centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione ſeſquiplicatâ, (per corol. VI. prop. IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus $P$ minus ſemper & minus attra-




(r) 500. *Et ob magnitudinem vis KL &c.* Si diſtantia mediocris SK vel ST ingens fuerit reſpectu radii TP orbitæ PAB, in loco quovis corporis P, erit vis LM quam proximè ad vim NM ut ſinus totus ad ſinum triplum diſtantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ. Nam ob ingentem diſtantiam corporis S (ex hyp.) lineæ SL, SM ſunt fere parallelæ ac proinde LM=PT, NM ſeu TM=PL, & SP=SK; cumque ſit ST ad lineam quadraturarum CD perpendicularis, erit etiam SK ad eandem normalis, & exiſtente PT radio, erit PK ſinus anguli PTC, hoc eſt, ſinus diſtantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ C. Porrò (per prop. 66.) $SL:SK=SK^2:SP^2$, adeoque $SL-SK:SK=SK^2-SP^2:SP^2$, hoc eſt, $KL:SK=PK\times SK+SP:SP^2=PK\times 2SP:SP^2=2PK:SP=2PK:SK$, ob SK=SP, & SK+SP=2SP. Quarè erit KL=2PK, & PL ſeu NM=3PK, hoc eſt, vis LM ſeu PT ad vim NM ſeu PL ut ſinus totus PT ad 3PK triplum ſinum diſtantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ.

501. Coroll. Vis KL in conjunctione A, eſt ad vim ſimilem in oppoſitione B, ut AT ad TB, & ſi orbita PAB circularis fuerit vel circulo finitima, erit vis KL in ſyzigiis duplo major vi LM in quadraturis quam proximè. Nam corpore P in ſyzigiis verſante, fit PK=AT=PT=LM, & proindè NM ſeu PL fit=3LM, & KL=2LM. Tandem iiſdem poſitis, vis NM maxima eſt in ſyzigiis, quoniam ibi PK fit maxima ſeu evadit=AT, & NM=3AT.

*Unde ob magnitudinem vis KL* (500. 501.) vis centripeta corporis centralis T magis diminuitur quam augetur, ideoque cenſenda eſt pro abſolutè diminutâ ab actione corporis S.

DE MOTU CORPORUM.

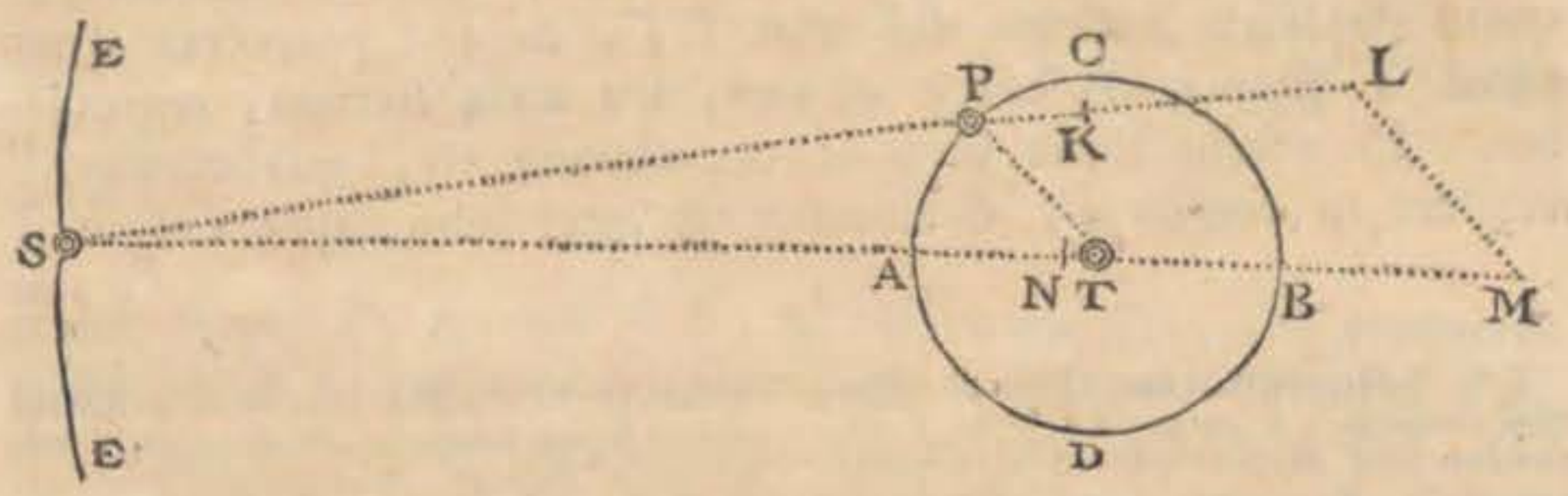
attractum perpetuò recederet longius à centro $T$; & contra, si vis illa augeretur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui $S$, quâ vis illa diminuitur, (f) augeatur ac diminuatur per vices: augebitur simul ac diminuetur radius $TP$ per vices; & (t) tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compositâ ex ratione sesquiplicatâ radii, & ratione subduplicatâ, quâ vis illa centripeta corporis centralis $T$, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui $S$, diminuitur vel augetur.

*Co-*

(f) * *Augeatur ac diminuatur per vices.* Quoniam vis quâ corpus P trahitur à corpore T, est ejusdem corporis P vis centripeta quâ in orbitâ suâ retinetur; si remissior fuerit vis illa, corpus P minus attractum à centro T longius recederet; & contrà, si augeatur vis illa, corpus P ad T propiùs accedet. Auctâ igitur actione corporis S in T per accessum corporis T ad S, augetur vis NM, minuiturque vis centripeta corporis P, ac proindè crescit distantia PT. Econtrà autem decrescente corporis S actione per recessum corporis T ab S decrescit quoque NM & augetur corporis P vis centripeta, minorque fit distantia PT. Hæc omnia per vices contingent, ubi nempe corpus T cori S proximius fuerit, augebitur radius PT, ubi verò remotius evadet minuetur radius.

(t) * *Et tempus periodicum augebitur ac diminuetur &c.* Corpus P circà T, exclusâ corporis longinqui S vi ablatitiâ, in circulo PAD revolvatur, & accedente vi illâ ablatitiâ corporis S quæ, ob ingentem distantiam ST, parva admodum sit respectu vis quâ corpus P à corpore T trahitur, idem corpus P in orbe ferè circulari adhuc revolvetur. Jam verò corporis circulum vel orbem circulo finitimum describentis vis acceleratrix versus T directa est semper (per cor. 2. prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione simplici radii TP qui dicatur $R$ directè & ratione duplicatâ temporis periodici, quod dicatur $t$ inversè, hoc est, vis acceleratrix corporis P versus T, est ut $\frac{R}{t^2}$, & manente radio $\frac{1}{t^2}$; sed vis acceleratrix in distantiâ datâ est ut vis absoluta corporis trahentis, ergò si corporis T trahentis vis absoluta dicatur $V$, erit $V$ ut $\frac{1}{t^2}$ & $t^2$ ut $\frac{1}{V}$, ac $t$ ut $\frac{1}{\sqrt{V}}$ manente radio TP seu $R$. Porrò vis acceleratrix quâ corpus P versus T trahitur, exclusâ vi ablatitiâ corporis S, est reciproce ut quadratum distantiæ TP, hoc est directè ut $\frac{1}{R^2}$ (ex hyp.) Et quoniam vis ablatitia corporis S, exigua admodum est respectu vis acceleratricis quâ corpus P à corpore T trahitur, accedente vi illâ ablatitiâ, vis reliqua acceleratrix in corpore P erit adhuc ut $\frac{1}{R^2}$ quam proximè; quare eâdem manente reliquâ vi centripetâ absolutâ corporis T & mutato utcumque radio $R$, quadratum temporis periodici $t^2$ erit ut distantiæ cubus $R^3$. ac proindè $t$ ut $\sqrt{R^3}$. (per coroll. 6. prop. 4.) hoc est tempus periodicum est in sesquiplicatâ ratione radii TP. Si igitur neque maneat radius idem, neque eadem vis centripeta absoluta in corpore T, sed per actionem corporis longinqui S radius augeatur, & vis centripeta minuatur, aut per diminutionem ejus actionis radius minuatur, & vis centripeta augeatur, quadratum temporis periodici $t^2$ erit in ratione compositâ ex binis rationibus suprà inventis, nimirum ex ratione $\frac{1}{V}$, & ratione $R^3$, hoc est $t^2$ erit

*Corol.* 7. Ex (u) præmiſſis conſequitur etiam, quod ellipſeos à corpore *P* deſcriptæ axis, ſeu apſidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, ſed magis ta- LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.




men progreditur, & per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis quâ corpus *P* urgetur in corpus *T* in quadraturis, ubi vis *MN* evanuit, componitur ex vi *LM* & vi cen-

erit ut $\frac{R^3}{V}$, & proindè *t* ut $\sqrt{\frac{R^3}{V}}$, aut quod idem eſt, tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſitâ ex ratione $\sqrt{R^3}$, ſeſquiplicatâ radii, & ratione $\frac{1}{\sqrt{V}}$ ſubduplicatâ hujus quâ vis illa centripeta corporis centralis T per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S diminuitur vel augetur; nam decreſcente *V* creſcit pariter $\frac{1}{V}$, & contrà creſcente *V* in eâdem ratione decreſcit $\frac{1}{V}$.

502. Scholium. Hinc ut David Gregorius in ſcholio ad prop. 17. Lib. 4. Aſtronomiæ phyſicæ & geometricæ obſervavit, ſi vis centripeta corporis centralis T aliundè quam per vim extraneam corporis S augeatur & minuatur per vices, ut ſi corporis T vis centripeta abſoluta ſupponatur ipſius maſſæ proportionalis & nova ei addatur & detrahatur per vices materia, atque indè ejus vis abſoluta in eâdem ratione augeatur & minuatur, corpus P in minori & majori orbitâ per vices revolvetur, diminuto & aucto per vices radio TP ejuſque tempus periodicum minuetur & augebitur per vices in ratione compoſitâ ex ratione ſeſquiplicatâ radii directè & ratione ſubduplicatâ vis centripetæ abſolutæ corporis T inverſè ut ſupra. Vis enim acceleratrix compoſita & reſidua quâ corpus T auctum & diminutum per vices trahit corpus P eſt hic præcisè in duplicatâ ratione diſtantiæ inverſè, quod in caſu coroll. 6. quam proxime tantùm obtinet.

(u) * *Ex præmiſſis.* Si corpus P circum T ellipſim circulo finitimam deſcribat cujus umbilicus ſit T hujus ellipſeos *axis major ſeu apſidum linea* motu angulari circà umbilicum T *per vices progreditur* ſeu fertur in conſequentia *& regreditur*, ſeu in antecedentia movetur; progreditur nempè, dum corpus P eſt in ſyzygiis A & B, regreditur verò dum corpus P eſt in quadraturis C & D, *ſed magis tamen progreditur quam regreditur, & per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia.*

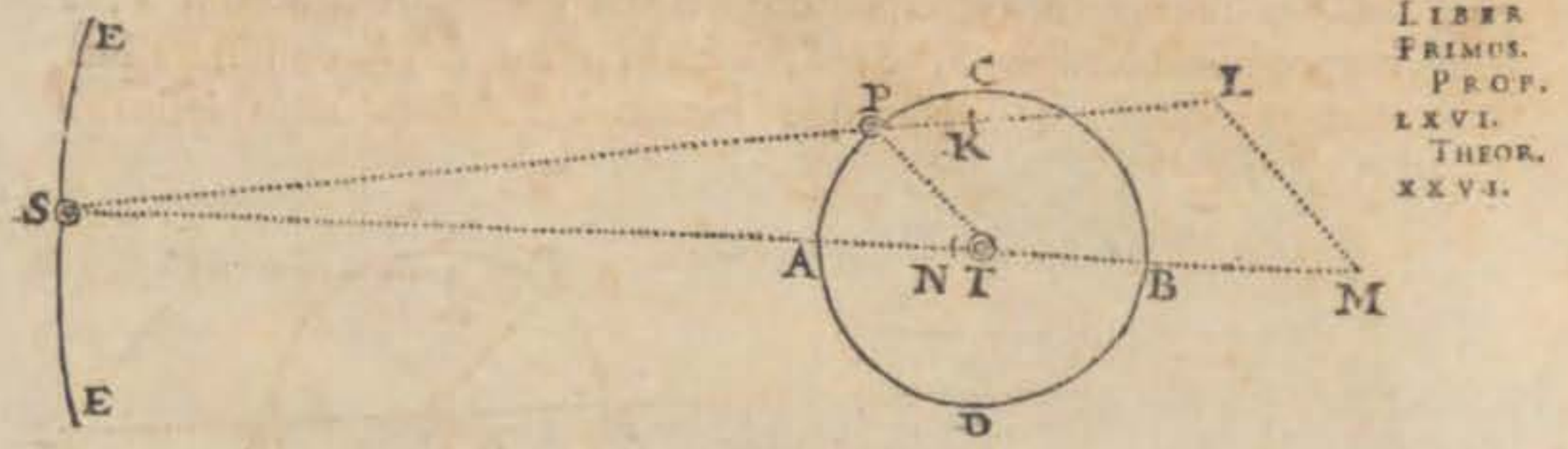
DE MOTU CORPORUM.

centripeta, quâ corpus $T$ trahit corpus $P$. Vis (y) prior $LM$, ſi augeatur diſtantia $PT$, augetur in eâdem fere ratione cum hâc diſtantiâ, & vis poſterior, decreſcit in duplicatâ illâ ratione, idcoque ſumma harum virium (z) decreſcit in minore quam duplicatâ ratione diſtantiæ $PT$, & (a) propterea (per corol. 1. prop. XLV.) efficit ut aux, ſeu apſis ſumma, regrediatur. In conjunctione verò & oppoſitione vis, quâ corpus $P$ urgetur in corpus $T$, differentia eſt inter vim, quâ corpus $T$ trahit

(y) * *Vis prior LM &c.* Nam ob ingentem corporis S à corporibus P & T diſtantiam (ex Hyp.) SL eſt ferè parallela SM, & proindè LM ipſi PT parallela creſcit ubique ut PT, quamproximè; in quadraturis verò LM coincidit cum PT.

(z) * *Decreſcit in minore quam duplicatâ illâ ratione*, hoc eſt, non tantùm minuitur in diſtantiâ majore, nec tantùm augetur in diſtantiâ minore, quantùm minueretur vel augeretur, ſi vis tota acceleratrix, ſeu virium ſumma eſſet ſemper ut quadratum diſtantiæ reciproce.

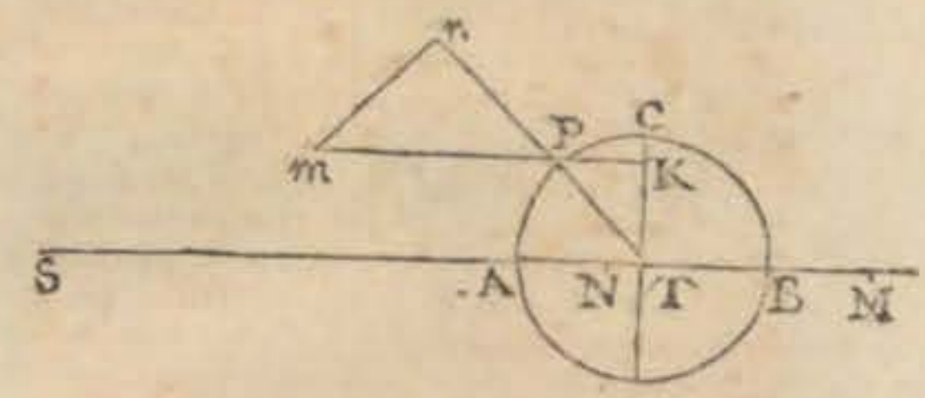
(a) * *Et propterea per cor. 1. prop. 45.* Sit $TP = A$, & $LM = c \times A$; $c$ verò quantitas data, & vis quâ corpus P verſus T excluſâ corporis S actione urgetur, erit (ex Hyp.) ut $\frac{1}{A^2}$, & accedente vi exiguâ LM in quadraturis, harum virium ſumma erit ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, adeóque hæc virium ſumma decreſcet in ratione paulò minore quam in duplicatâ diſtantiæ PT ſeu $A$. Nam ſi diſtantia variabilis $A$ evadat $b \times A$, ſitque $b$ numerus unitate major, erit vis in ſimplici diſtantiâ $A$ ad vim in diſtantiâ majore $b \times A$, ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, ad $\frac{1}{b^2 A^2} + cbA$, hoc eſt, ut $bb + cbbA^3$ ad $1 + cb^3A^3$ ſive ut $bb \times 1 + cA^3$ ad $1 \times 1 + cb^3A^3$, hæc autem ratio minor eſt quam ratio $\frac{1}{A^2}$ ad $\frac{1}{b^2A^2}$, ſeu $b^2$ ad 1, cum $(1 + cA^3)$ minus ſit quàm $1 + cb^3A^3$. Ponamus itaque virium ſummam eſſe ut $\frac{1}{A^2 - q}$, ſeu ut $A^{-2} + q$, & $q$, numerum poſitivum unitate longe minorem, & quoniam ſi motus totus angularis quo corpus P ab apſide unâ ad eandem apſidem redit, ſit ad motum angularem revolutionis unius ſeu 360°. ut numerus aliquis m ad n vis centripeta tota eſt ut $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ (per cor. prop. 45.) erit hic $\frac{nn}{mm} - 3 = q - 2$, $\frac{nn}{mm} = 1 + q$, $\frac{n}{m} = \sqrt{1+q}$, & $m$ ad $n$, ſeu motus totus angularis ab apſide ad eandem apſidem ad 360°. ut 1, ad $\sqrt{1+q}$, adeóque motus ille angularis ab apſide ad eandem $= \frac{360^\circ}{\sqrt{1+q}}$, quarè cum ſit $\sqrt{1+q}$, paulo major unitate, motus totus angularis ab apſide ad eamdem apſidem minor erit 360°. & ideò apſides obviam ibunt corpori P revolventi, ſeu movebuntur in antecedentia, aut quod idem eſt, regredientur. Idem facile demonſtratur (per cor. 2. prop. 45.) vel per exempla tertia. Cum enim vis tota ſit (ex Hyp.) ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, erit (loco citato), angulus revolutionis corporis inter apſides ſummam & imam $= 180^\circ. \times \sqrt{\frac{1+c}{1+4c}}$; ſed quoniam $c$ eſt numerus poſitivus, $\frac{1+c}{1+4c}$, eſt numerus unitate minor, ergò angulus revolutionis corporis P inter apſides minor eſt 180°.




trahit corpus $P$, & vim $KL$; & differentia illa, (b) propterea quod vis $KL$ augetur quamproximè in ratione distantiæ $PT$, decrescit in majore quam duplicatâ ratione distantiæ $PT$, (c) ideoque (per corol. 1. prop. XLV.) efficit ut aux progrediatur. In (d) locis inter syzygias & quadraturas pendet motus augis ex causâ utrâque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis $KL$ in syzygiis sit quasi duplo major quam vis $LM$ in quadraturis, excessus erit penes vim $KL$, transferetque augem in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis corollarii faci-

(b) * *Propterea quod vis KL &c.* Est enim in syzygiis $KL = 2AT$, seu $2PT$ quam proximè (501).

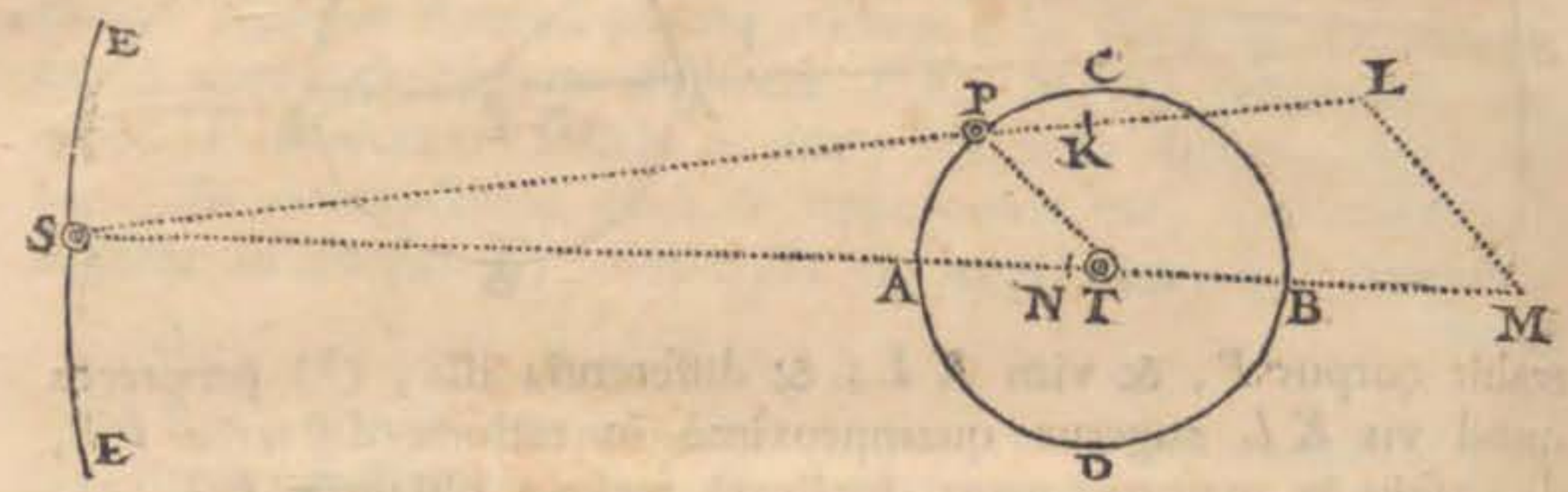
(c) * *Ideóque per cor. 1. prop. 45.* Nam si in superiori calculo loco $+q$ scribatur $-q$, vel loco $+c \times A$, scribatur $-c \times A$, quod vis KL sit ablatitia, invenietur angulus totius revolutionis corporis P ab apside unâ ad eandem apsidem $= \frac{360^\circ}{\sqrt{1-q}}$, vel angulus inter apsides summam & imam $= 180^\circ \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Est autem $\sqrt{1-q}$, numerus unitate minor, & $\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ numerus unitate major, adeóque $\frac{360^\circ}{\sqrt{1-q}}$, arcus major $360^\circ$. & $180^\circ \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$, arcus major $180^\circ$. quarè apsides in hoc casu progrediuntur.




(d) 503. *In locis inter syzygias & quadraturas &c.* Iisdem positis quæ in Lemmate 500. quæritur distantia angularis corporis P à quadraturâ C, v. gr. ubi apsides quiescunt. Per locum corporis P agatur Pm parallela & æqualis NM seu TM, & erit $Pm = 3PK$ (500). Vis Pm, si in radium TP productum demittatur perpendiculum mn, resolvitur in vires Pn, nm, quarum nm agendo secundum lineam radio perpendicularem, vim ac-

DE MOTU CORPORUM.

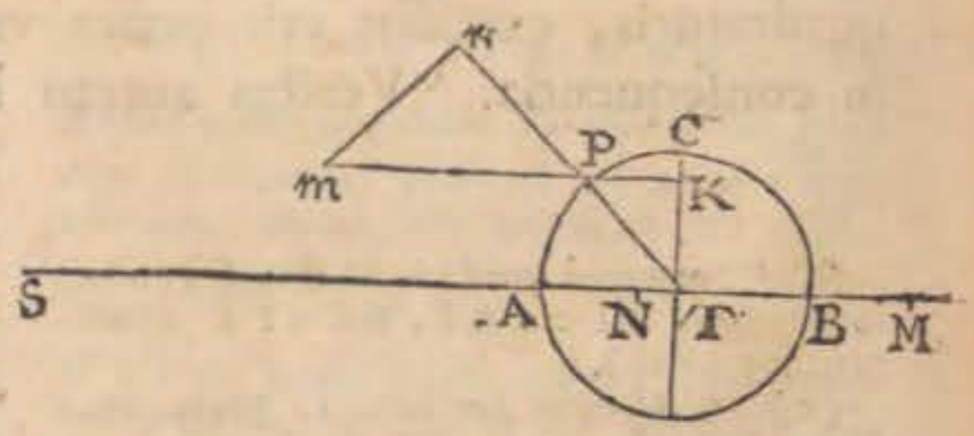
facilius intelligetur concipiendo ſyſtema corporum duorum *T*, *P* corporibus pluribus *S*, *S*, *S*, &c. in orbe *ESE* conſiſtentibus, undique cingi. (e) Namque horum actionibus actio ipſius *T*




minuetur undique, decreſcetque in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiæ.

Co-

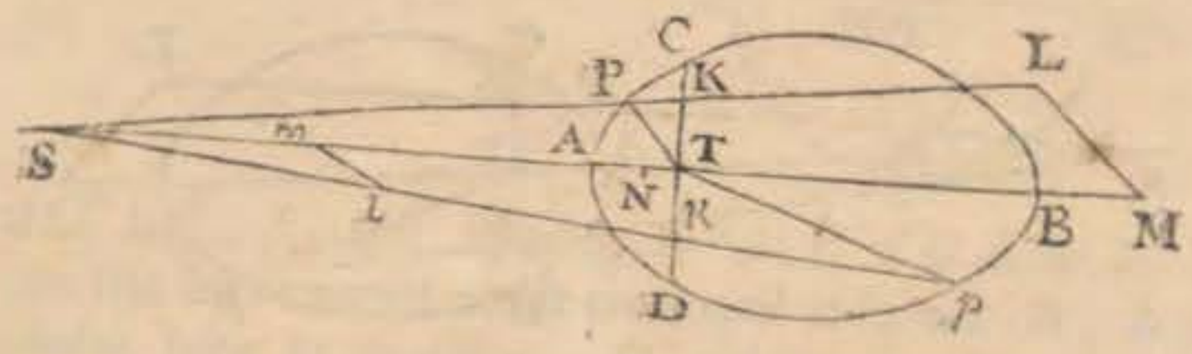
acceleratricem corporis P verſus T nec auget, nec minuit, & P n agendo ſecundum radium T P à P verſus n, vim illam acceleratricem corporis P minuit; vis verò L M ſeu T P vim acceleratricem corporis P verſus T auget. Quare ubi erit P n = P T vis acceleratrix corporis P nec augebitur nec minuetur, & apſides quieſcent. Porrò ob triangula T P K, m P n ſimilia P T : P K = P m, ſeu 3 P K : P n ſeu P T. Eſt igitur in loco quæſito P, $3PK^2 = PT^2$, & proinde P T : P K = $\sqrt{3}$ : 1. hoc eſt ſinus totus ad ſinum diſtantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ ut $\sqrt{3}$ ad 1, ſeu ut 1732. ad 1000. proximè; undè angulus P T C invenitur eſſe 35°. 26'. circiter. Quieſcent igitur apſides in quatuor locis corporis P quæ à quadraturis diſtant angulo 35°. 16'; & hinc in ſingulis corporis P revolutionibus, cæteris paribus, apſides regredientur per gradus revolutionis corporis P, 141°, & progredientur per grad. 219.




504. Iiſdem poſitis, ſi orbita C P D, circulo finitima ſit, erit vis addititia $PT - \frac{3PK^2}{PT}$, quæ quantitas maxima evadet ubi erit P K = 0, quod in quadraturis contingit.

(e) * *Namque horum actionibus &c.* Hâc enim ratione corpus P erit ſemper in quadraturis ſimul & in ſyzygiis corporis, ſeu corporum S, adeóque cum vis ablatitia K L; in ſyzygiis & propè ſyzygias ſit fere duplo major quam vis addititia I M, in quadraturis & propè quadraturas, actio corporis T minuetur undique, decreſcetque proindè in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiæ T P.

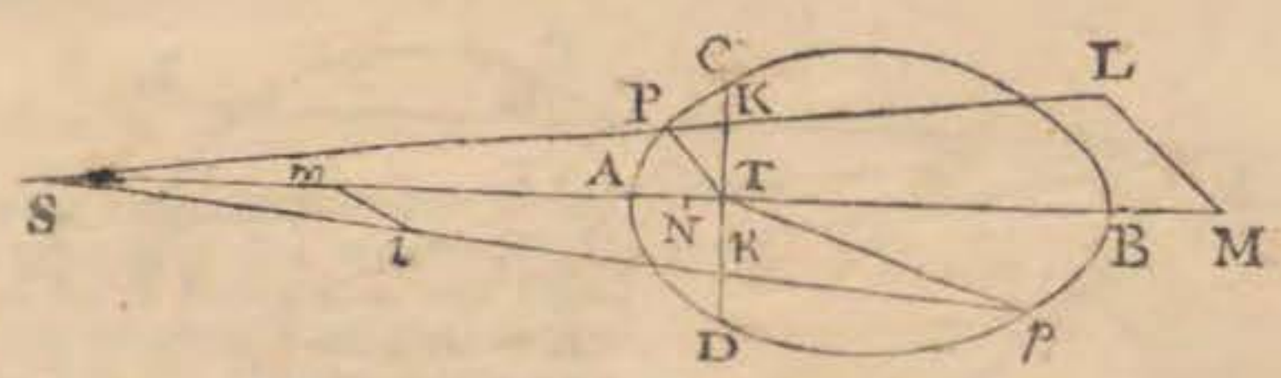
*Corol.* 8. (f) Cum autem pendeat apſidum progreſſus vel regreſſus à decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione diſtantiæ $TP$, in tranſitu corporis ab apſide imâ ad apſidem ſummam; ut & à ſimili incremento in reditu ad apſidem imam; atque ideo maximus ſit ubi proportio vis in apſide ſummâ ad vim in apſide imâ maximè recedit à duplicatâ ratione diſtantiarum inversâ: manifeſtum eſt quod apſides in ſyzygiis ſuis, per vim ablatitiam $KL$ ſeu $NM-LM$, progredientur velocius, inque quadraturis ſuis tardius recedent per vim addititiam $LM$. Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progreſſus vel tarditas regreſſus continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.




(f) * *Cum autem* (per corol 7.) *pendeat apſidum progreſſus vel regreſſus à decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione diſtantiæ TP* quæ augetur in receſſu à centro T, ſive *in tranſitu corporis P ab apſide imâ ad apſidem ſummam, ut & à ſimili incremento* in acceſſu ad centrum, ſivè *in reditu* ab apſide ſummâ *ad apſidem imam, manifeſtum eſt* progreſſum vel regreſſum apſidum maximum eſſe *ubi ratio vis in apſide ſummâ ad vim in apſide imâ maximè recedit à duplicatâ ratione diſtantiarum inversâ*, porrò dum linea apſidum ſeu major axis ellipſeos BCAD, cujus umbilicus eſt T, in ſyzygiis A, B verſatur, ratio vis totius corporis P in apſide ſummâ poſiti ad vim ejus in apſide imâ verſantis, magis recedit à duplicatâ ratione diſtantiarum inversâ quam in alio quovis lineæ apſidum ſitu. Sit enim B apſis ſumma, A apſis ima, & erit TB diſtantia maxima, AT minima (ex naturâ ellipſeos). Undè corpore P in conjunctione A verſante erit vis ablatitia KL (ſeu differentia virium acceleratricium corporum T & P verſus S) omnium minima, & corpore P in oppoſitione B verſante, erit differentia illa KL omnium maxima. Cum autem ob ingentem corporis S diſtantiam (ex Hyp.) ſit fere KL ad kl ut AT ad TB (501) ratio vis corporis P in A verſantis ad vim illius in B poſiti, exprimi hic poterit per rationem $\frac{b}{AT^2}-c\times AT$, ad $\frac{b}{TB^2}-c\times TB$, (ſi ratio b ad c exprimat rationem vis abſolutæ trahentis corpus P verſus T, ad vim abſolutam ablatitiam KL) ſeu reductione ad eundem denominatorem factâ, per rationem $TB^2\times\overline{b-c\times AT^3}$, ad $AT^2\times\overline{b-cTB^3}$, quæ ratio eò magis recedit à ratione $TB^2$ ad $AT^2$, ſeu duplicatâ diſtantiarum inversâ, quo magis ratio quantitatis $b-c\times AT^3$, ad quantitatem $b-c\times TB^3$, recedit à ratione æqualitatis, ſeu quo minor eſt AT reſpectu TB, quare dum linea apſidum eſt in ſyzygiis A, B, ratio vis totius in apſide ſummâ ad vim in apſide imâ maxi-

DE MOTU CORPORUM.

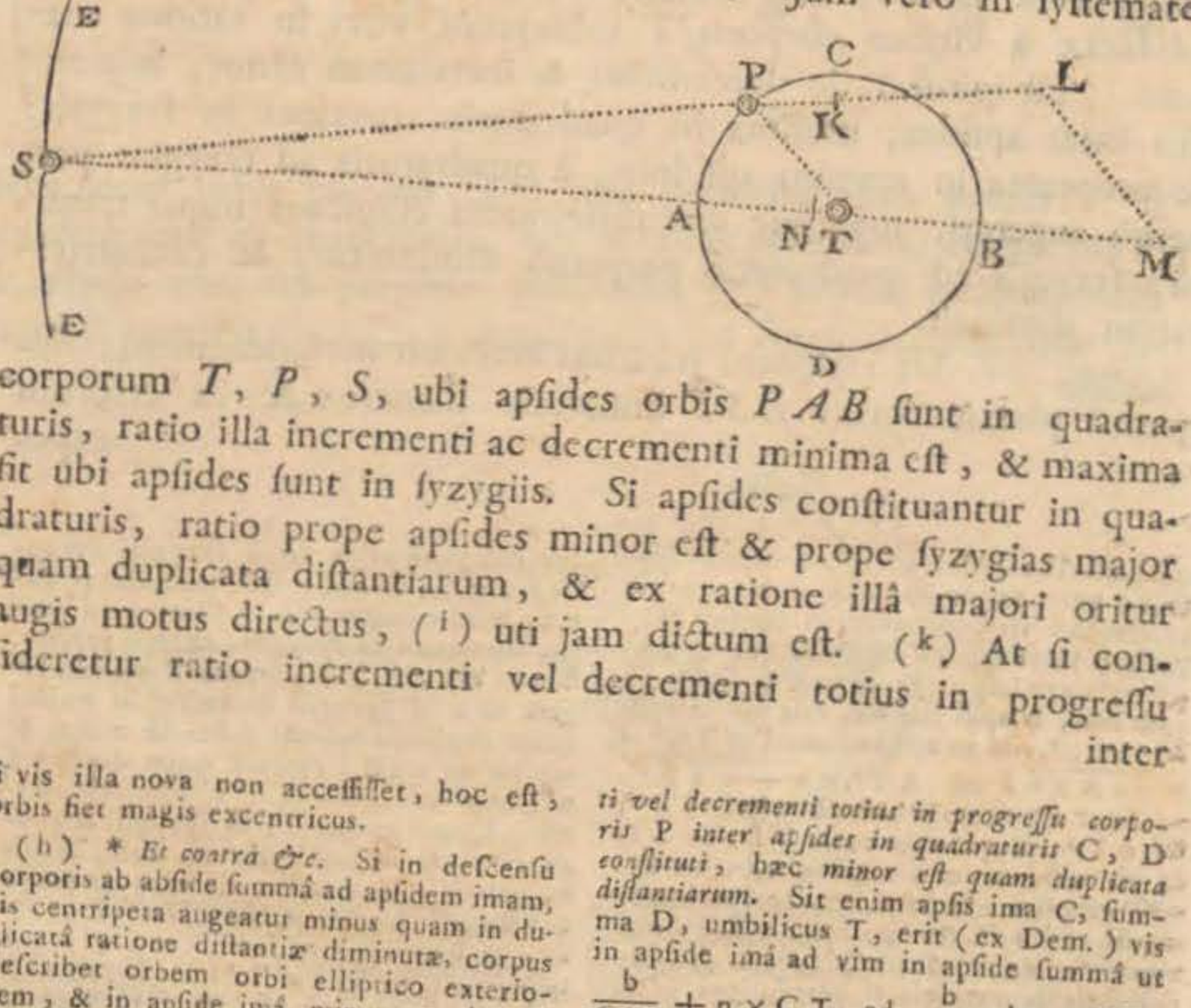
*Corol.* 9. Si corpus aliquod, vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ à centro revolveretur circa hoc centrum in ellipsi; & mox, in descensu ab apside summâ seu auge ad apsidem imam; vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicatâ distantiæ diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuò accessu vis illius novæ impulsum semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum quam si urgeretur vi solâ crescente in duplicatâ ratione distantiæ diminutæ; ideoque orbem describeret orbe elliptico interiorem, & in apside imâ propius accederet ad centrum quam prius. (g) Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis in recessu




mè recedit à ratione duplicatâ distantiarum inversâ. In hoc igitur lineæ apsidum situ apsides celerrimè progrediuntur, corpore P in syzygiis vel prope syzygias versante. Dum vero corpus P est in quadraturis C, D, fit vis LM=CT, vel DT; Est autem ex naturâ ellipseos, summa linearum CT, DT, omnium minima; quare in integrâ corporis P revolutione, apsides virious CT, DT tardissime regrediuntur in quadraturis corporis P, & celerrimè progrediuntur in ipsius syzygiis, atque adeò excessus progressus supra regressum erit in hoc casu omnium maximus, & apsides in integrâ corporis P revolutione celerrimè movebuntur in consequentia. Ob contrarias prorsus causas, si linea apsidum in quadraturis posita sit, apsides velociſſimè regredientur, corpore P in quadraturis versante, & tardissimè progredientur corpore P in syzygiis existente, & ex hâc utrâque causâ fieri poterit ut in integrâ corporis P circum T revolutione, regressus apsidum superet eorum progressum, proindeque ut apsides in antecedentia ferantur; sed quoniam, cæteris paribus, vis ablatitia KL quæ progressum apsidem in syzygiis corporis P inducit est (500) fere duplo major vi adjectitiâ LM quæ apsidum regressum in quadraturis corporis P producit, excessu progressûs suprà regressum, apsides progrediuntur in integrâ sui revolutione circum T, hoc est, eo tempore quo apsides ex T visæ omnes cum corpore S, aspectus subeunt; augetur verò progressus ille, si corpora P & S in suis orbitis ferantur in eandem plagam; In hâc enim hypothesi, apsides diutius hærent in syzigiis quam in quadraturis, quia in syzigiis progrediuntur cum corpore S, atque adeò diutius illud quasi comitantur, in quadraturis verò feruntur in antecedentia & corporis S in consequentia revolventis aspectum quadratum veluti fugiunt; undè fit ut apsides diutius progrediantur in syzigiis suis quam regrediuntur in suis quadraturis.

(g) * *Orbis igitur accessu hujus vis novæ fiet magis excentricus*; manente enim distantiâ apsidis summæ ab orbitæ umbilico, decrescet distantia apsidis imæ ab eodem umbilico, majorque proinde erit ratio prioris distantiæ ad posteriorem, quam

corporis ab apſide imâ ad apſidem ſummam, decreſceret iisdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad diſtantiam priorem, ideoque ſi vis decreſcat in majori ratione, corpus jam minus attractum aſcendet ad diſtantiam majorem & ſic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare ſi ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur ſemper excentricitas; (h) & contra, diminuetur eadem, ſi ratio illa decreſcat. Jam verò in ſyſtemate




corporum $T$, $P$, $S$, ubi apſides orbis $PAB$ ſunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima eſt, & maxima fit ubi apſides ſunt in ſyzygiis. Si apſides conſtituantur in quadraturis, ratio prope apſides minor eſt & prope ſyzygias major quam duplicata diſtantiarum, & ex ratione illâ majori oritur augis motus directus, (i) uti jam dictum eſt. (k) At ſi conſideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreſſu inter-

ſi vis illa nova non acceſſiſſet, hoc eſt, orbis fiet magis excentricus.

(h) * *Et contrà &c.* Si in deſcenſu corporis ab abſide ſummâ ad apſidem imam, vis centripeta augeatur minus quam in duplicatâ ratione diſtantiæ diminutæ, corpus deſcribet orbem orbi elliptico exteriorem, & in apſide imâ, minus accedet ad centrum quam prius, hoc eſt, orbis fiet minus excentricus, & excentricitas adhuc minuetur, ſi in corporis aſcenſu ab apſide imâ ad ſummam, vis centripeta minus decreſcat quam anteà creverat. Quare ſi ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus minuatur, minuetur ſemper excentricitas.

(i) * *Uti jam dictum eſt* (Cor. 7.).

(k) * *At ſi conſideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreſſu corporis P inter apſides in quadraturis C, D conſtituti, hæc minor eſt quam duplicata diſtantiarum.* Sit enim apſis ima C, ſumma D, umbilicus T, erit (ex Dem.) vis in apſide imâ ad vim in apſide ſummâ ut $\frac{b}{CT^2} + n \times CT$, ad $\frac{b}{TD^2} + n \times TD$, (ſi ratio b ad n exprimat rationem vis abſolutæ trahentis corpus P verſus T ad vim abſolutam addititiam LM) & reductione ad eamdem denominationem factâ ut $TD^2 \times \overline{b+nCT^3}$ ad $CT^2 \times b + n\,TD^3$, quæ ratio minor eſt quam ratio $TD^2$, ad $CT^2$, ob TD, majorem quam CT; & quoniam in hoc lineæ apſidum ſitu ratio TD ad CT ſeu ratio diſtantiarum umbilici T à

DE MOTU CORPORUM.

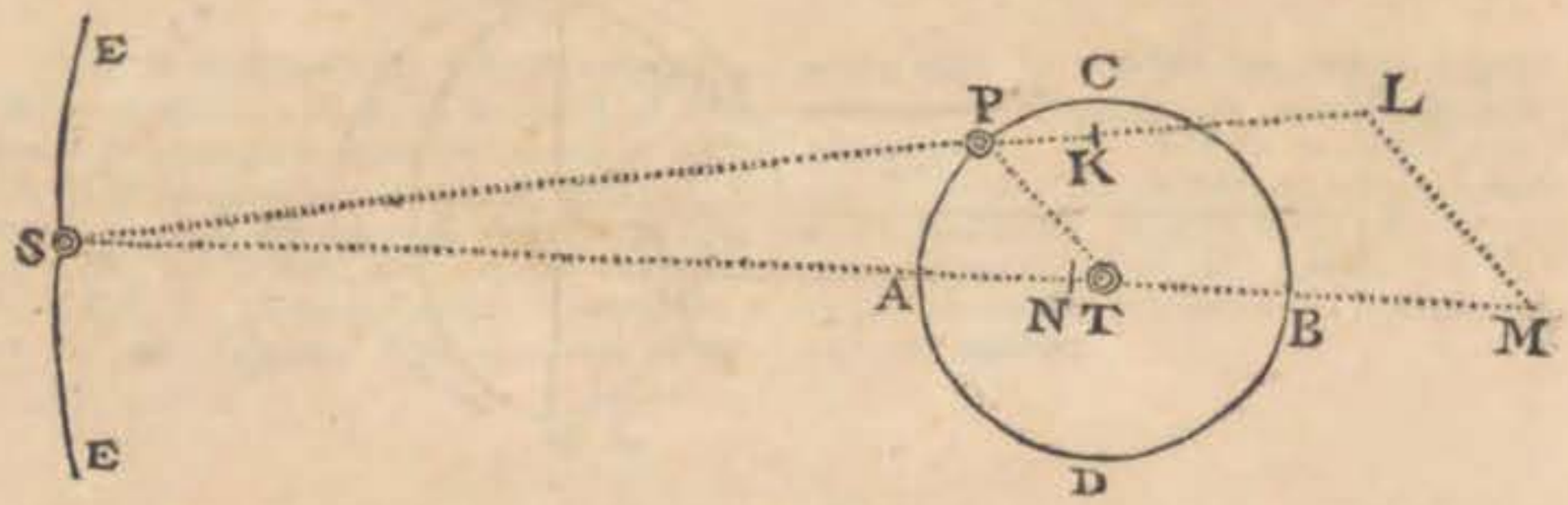
inter apſides, hæc minor eſt quam duplicata diſtantiarum. Vis in apſide imâ eſt ad vim in apſide ſummâ in minore quam duplicatâ ratione diſtantiæ apſidis ſummæ ab umbilico ellipſeos ad diſtantiam apſidis imæ ab eodem umbilico, & contra, ubi apſides conſtituuntur in ſyzygiis, vis in apſide imâ eſt ad vim in apſide ſummâ in majore quam duplicatâ ratione diſtantiarum. Nam vires $L M$ in quadraturis additæ viribus corporis $T$ componunt vires in ratione minore, & vires $K L$ in ſyzygiis ſubductæ à viribus corporis $T$ relinquunt vires in ratione majore. Eſt igitur ratio decrementi & incrementi totius, in tranſitu inter apſides, minima in quadraturis, maxima in ſyzygiis: & propterea in tranſitu apſidum, à quadraturis ad ſyzygias perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipſeos; inque tranſitu à ſyzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit.

*Corol.* 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis $E S T$ immobile manere; & ex errorum expo-

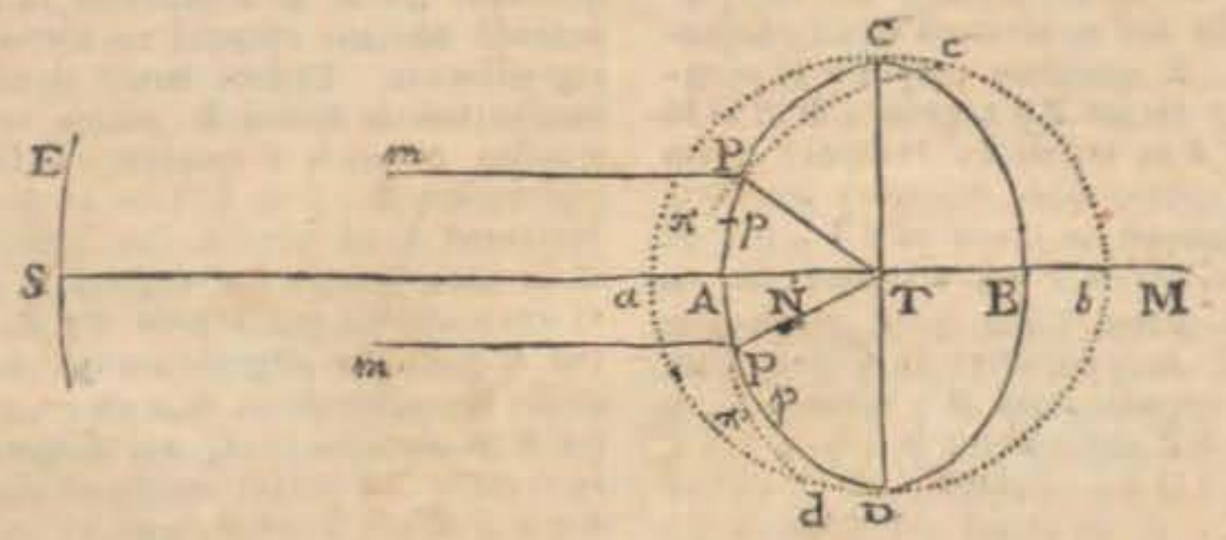
quadraturis maxima eſt, (ex naturâ ellipſeos) patet rationem totius decrementi & incrementi vis centripetæ in tranſitu corporis P inter apſides minimam eſſe in quadraturis apſidum. Et contrà ſi fuerit A apſis ima, B apſis ſumma, erit vis in apſide imâ ad vim in apſide ſummâ ut $\frac{TB^2 \times b - cAT^3}{b - cAT^3}$, ad $AT^2 \times b - cTB^3$, adeóque in majori ratione quam $TB^2$, ad $AT^2$, & quoniam ratio $TB$, ad $AT$, in his apſidum locis maxima eſt, ex naturâ ellipſeos, ratio decrementi & incrementi totius in tranſitu inter apſides, maxima eſt in ſyzygiis apſidum, & propterea ſingulis corporis P revolutionibus in tranſitu apſidum à quadraturis ad ſyzygias, hæc ratio perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipſeos, & in tranſitu apſidum à ſyzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit. Maxima ergò eſt orbis excentricitas, ubi apſides ſunt in ſyzygiis, minima ubi ſunt in quadraturis.

505. Ex his etiam ſequitur in unâquâque corporis P circum T revolutione excentricitatem orbis circà ſyzygias corporis P augeri, & circà ejus quadraturas minui, minimamque eſſe in illius quadraturis, maximam in ſyzygiis, cæteris paribus. Nam (per cor. 7.) corporis P vis centripeta tota in ſyzygiis decreſcit in majori quam duplicatâ ratione diſtantiæ auctæ, & creſcit in majori ratione quam duplicatâ diſtantiæ diminutæ, & in quadraturis contrà. Quare corpus P, in ſyzygiis & propè ſyzygias deſcribit partem orbis magis excentrici, in quadraturis verò & propè quadraturas partem orbis minus excentrici (ex demonſtratis initio cor. 9.) Et quoniam vis addititia $LM$ in quadraturis corporis P maxima eſt, & vis ablatitia $KL$ in ſyzygiis ejus etiam maxima, vis autem addititia excentricitatem diminuit & ablatitia auget, manifeſtum eſt quod (cæteris paribus) in unâ corporis P revolutione, excentricitas orbis minima ſit in quadraturis corporis P, & maxima in illius ſyzygiis, atque adeò quod à quadraturis ad ſyzygias perpetuò augeatur, & à ſyzygiis ad quadraturas perpetuò minuatur.

expositâ causâ manifestum est, quod ex viribus $NM$, $ML$, quæ sunt causa illa tota, vis $ML$ agendo semper secundum planum orbis $PAB$, nunquam perturbat motus in latitudinem; quodque vis $NM$, ubi nodi sunt in syzygiis, agendo etiam secun-




dum idem orbis planum, (l) non perturbat hos motus; (m) ubi verò sunt in quadraturis, eos maximè perturbat, corpusque $P$ de plano orbis sui perpetuò trahendo, (n) minuit inclinationem plani in transitu corporis à quadraturis ad syzygias, augetque vicissim:



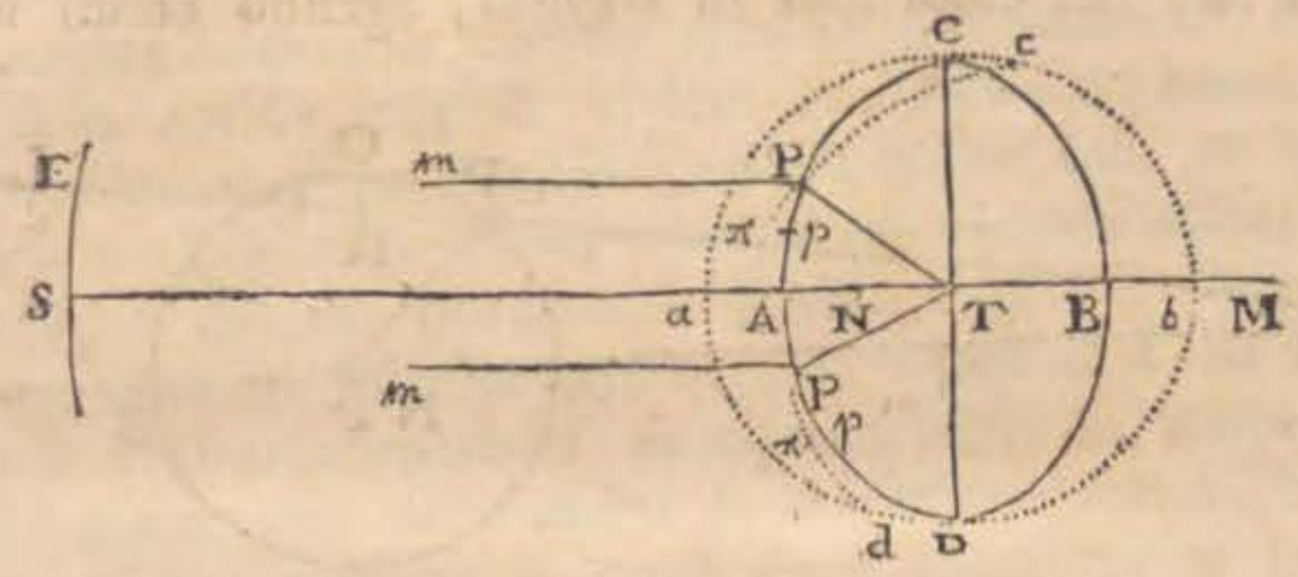

(l) * *Non perturbat hos motus.* Patet per cas. 2. prop. 66.

(m) 506. *Ubi verò sunt in quadraturis eos maximè perturbat*; Ubi nodi sunt in quadraturis C & D inclinatio directionis vis N M (quæ lineâ P m exhibetur) ad planum orbitæ corporis P maxima est, ut potè æqualis planorum CAD, E S T inclinationi & proinde, cæteris paribus, maxime potenter agit; in alio enim lineæ nodorum situ, minor est inclinatio directionis vis N M ad planum orbitæ corporis P; & evanescit cum nodi sunt in syzygiis; crescitque adeò in transitu nodorum à syzygiis ad quadraturas, & contrà decrescit in eorum transitu à quadraturis ad syzygias.

(n) 507. *Minuit inclinationem plani &c.* Si orbitæ corporis P nodi in quadraturis C, D constituantur, angulus inclinationis orbitæ ad planum immotum E S T perpetuò minuitur in transitu corporis P à quadraturis

DE MOTU CORPORUM.

cissim eandem in transitu à syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut (o) corpore in syzygiis existente inclinatio evadat omnium mi-



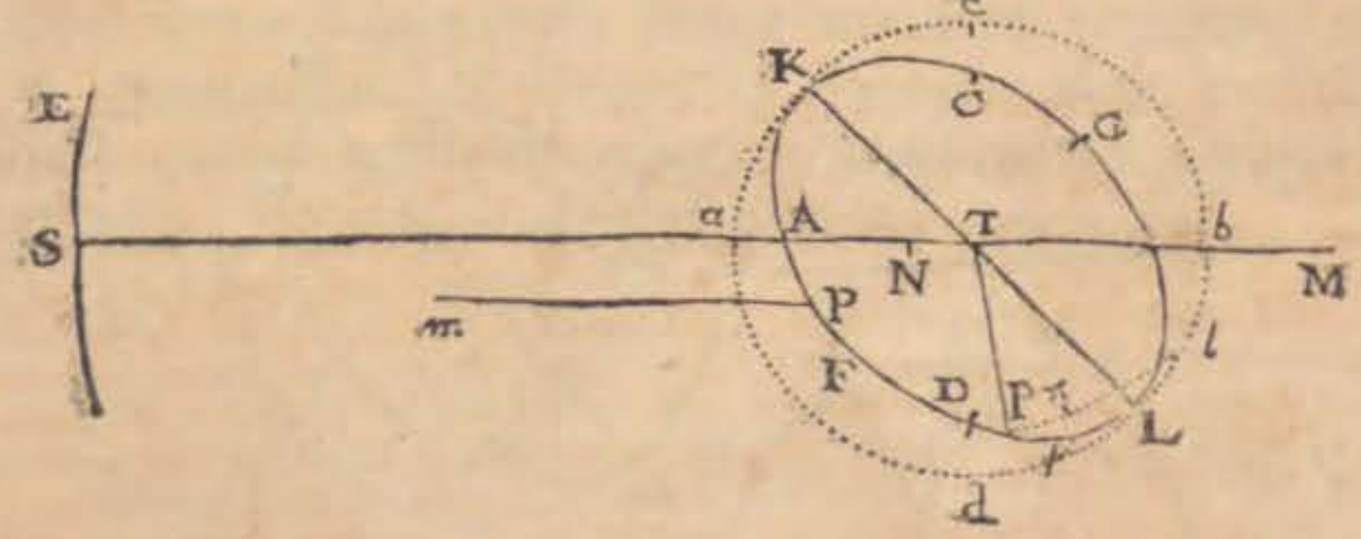

turis ad syzygias, augetur verò in transitu corporis à syzygiis ad quadraturas, & in utroque transitu nodi regrediuntur. Sit enim orbitæ PAB pars CAD suprà planum immotum EST elevata altera, verò pars CBD infrà illud depressa intelligatur; per locum corporis P agatur recta Pm parallela lineæ TS, exhibens directionem vis NM, & corpus P feratur primum à nodo seu quadraturâ C ad conjunctionem A, & quoniam corpus P vi revolutionis per arcum Pp urgetur, & vi NM per rectam Pm trahitur, tempore quam minimo, vi compositâ, describet lineolam Pπ quæ non est in plano CPT, sed ab eo deflectit versus Pm, adeóque corpus movetur in plano TPπ quod productum plano EST non occurret in C sed ultra C versus oppositionem B. Centro T & intervallo TP describatur in plano EST circulus CaDb, in plano CPD circuli arcus PC, & in plano πPT arcus Pc circulo CaDb, occurrens in c. Et quoniam vis NM minima est respectu vis revolutionis corporis P, angulus CPc, inclinationis planorum CPT & cPT minimus est seu infinitesimus, & arcus Pc ab arcu PC nonnisi minimâ seu infinitesimâ quantitate differt; quare cum (ex hyp.) arcus PC à quadrante CA differat finitâ quantitate PA, summa arcuum PC, Pc semicirculo minor est, & hinc in triangulo spherico CPc, angulus externus PCa (per prop. 13. sphæricorum Menelai, vel per theor. 33. Sphæricorum Clariss. Wolfii), major est angulo interno opposito PcC, hoc est, inclinatio plani cPT ad planum immotum EST minor est inclinatione plani CPT ad idem planum EST. In transitu igitur corporis P à quadraturâ C ad conjunctionem A orbitæ inclinatio perpetuò minuitur, & quoniam nodus C transfertur in c, fitque proindè obviam corpori revolventi, nodi regrediuntur. Eodem modo demonstratur inclinationem minui & nodos regredi in transitu corporis à quadraturâ D ad oppositionem B. Jam feratur corpus à conjunctione A ad quadraturam proximam D, & in loco quovis P, duplici vi, nempè vi revolutionis per arcum Pp & vi NM per rectam Pm urgetur, atque adeò describit lineolam Pπ, quæ ab arcu Pp versus Pm declinat. Quarè si centro T & intervallo TP describantur ut suprà tres arcus PD, aD, Pd, eodem modo demonstrabitur nodum D transferri in antecedentia in d, & angulum Pda majorem esse angulo interno opposito PDd, hoc est, inclinationem orbitæ augeri in transitu corporis P, à conjunctione ad quadraturam proximam, & eadem eodem modo ostenduntur fieri in transitu ab oppositione B ad quadraturam C. Q. E. D.

(o) * *Corpore in syzygiis existente.* Vis enim NM, cæteris paribus maxima est in syzigyis (501).

minimâ, (p) redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad nodum proximum accedit. (q) At ſi nodi conſtituantur in octantibus poſt quadraturas, id eſt in locis K & L ità ut anguli K T c, K T a ſint æquales, ſeu 45°. 1°. *Inclinatio plani perpetuò minuitur in tranſitu corporis* P *à nodo ad gradum indè nonageſimum* F vel G. 2°. *Augetur in tranſitu à gradu illo* 90°. *ad quadraturam proximam.* 3°. In utroque tranſitu regrediuntur nodi. 4°. *In tranſitu* à quadraturâ *ad nodum proximum inclinatio minuitur* & nodi progrediuntur. 1um. 2um. & 3um. Eodem modo demonſtrantur ac ſuperius (505). Quartum ità oſtenditur. Dum corpus P à quadraturâ D ad nodum proximum L fertur, directio vis N M, quæ antè dirigebatur à P verſus m in contrariam mutatur; Quarè corpus P inter D & L poſitum vi revolutionis urgetur per arcum P p & vi N M ab illo arcu retrahitur verſus M atque vi utrâque fertur tempore minimo per lineolam P π quæ ab arcu P p in plagam M a deflectit. Si itaque centro T & intervallo T P deſcribantur tres arcus circulares P L, P π, L l b a, in planis T P L, T P π, E S T eodem modo ac in notâ 507. patet angulum P l L minorem eſſe angulo P L a. Undè in tranſitu corporis à quadraturâ D ad nodum proximum L inclinatio orbitæ minuitur & nodus progreditur; eadem fieri in tranſitu corporis à quadraturâ C ad nodum proximum K, eodem modo demonſtratur. Q. E. D.

LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

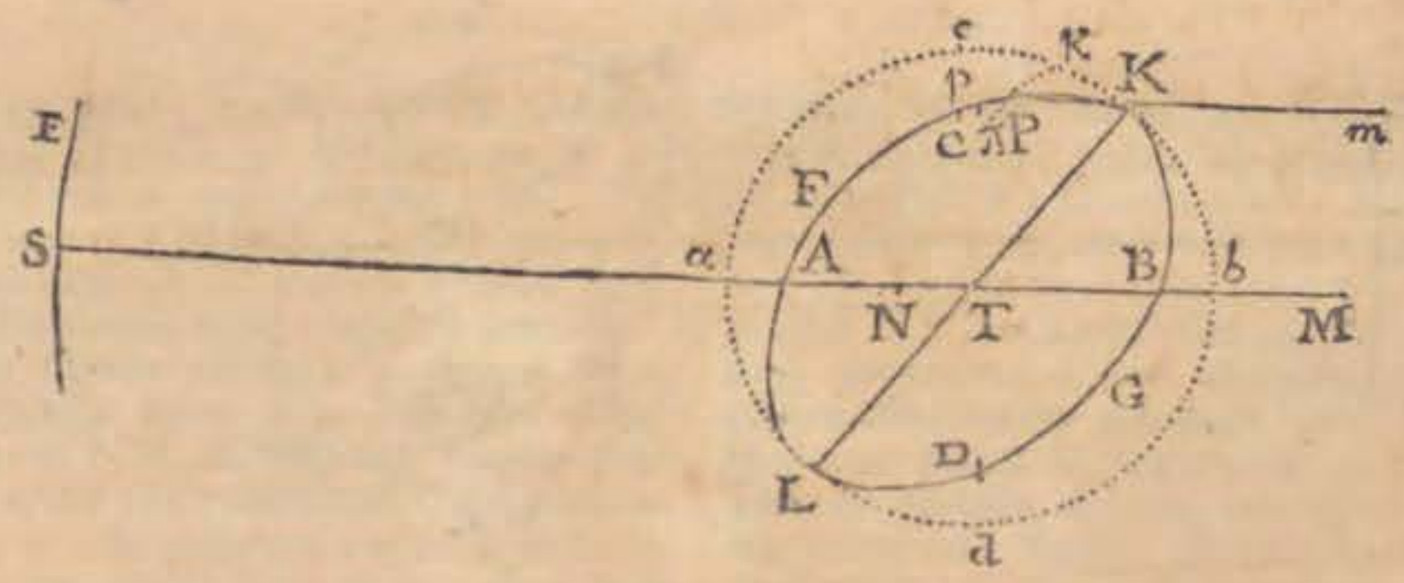
(p) * *Redeatque ad priorem magnitudinem circiter.* Si enim orbita C A D B perfectè circularis maneret, æqualis eſſet vis N M in paribus corporis P diſtantiis à nodis C & D, in utroque quadrante C A & A D, vel D B & B C; quarè cum orbita C A D, circulo finitima ſupponatur, & per vim exiguam N M minuatur inclinatio plani in tranſitu corporis P à quadraturis ad ſyzygias, & contrà augeatur per æqualem vim N M in tranſitu corporis P à quadraturis ad ſyzygias; liquet quod inclinatio redeat ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus P à ſyzygiâ ad nodum proximum in quadraturâ poſitum accedit.




(q) 508. *At ſi nodi conſtituantur in octantibus poſt quadraturas, id eſt* in locis K & L ità ut anguli K T c, K T a ſint æquales, ſeu 45°. 1°. *Inclinatio plani perpetuò minuitur in tranſitu corporis* P *à nodo ad gradum indè nonageſimum* F vel G. 2°. *Augetur in tranſitu à gradu illo* 90°. *ad quadraturam proximam.* 3°. In utroque tranſitu regrediuntur nodi. 4°. *In tranſitu* à quadraturâ *ad nodum proximum inclinatio minuitur* & nodi progrediuntur. 1um. 2um. & 3um. Eodem modo demonſtrantur ac ſuperius (505). Quartum ità oſtenditur. Dum corpus P à quadraturâ D ad nodum proximum L fertur, directio vis N M, quæ antè dirigebatur à P verſus m in contrariam mutatur; Quarè corpus P inter D & L poſitum vi revolutionis urgetur per arcum P p & vi N M ab illo arcu retrahitur verſus M atque vi utrâque fertur tempore minimo per lineolam P π quæ ab arcu P p in plagam M a deflectit. Si itaque centro T & intervallo T P deſcribantur tres arcus circulares P L, P π, L l b a, in planis T P L, T P π, E S T eodem modo ac in notâ 507. patet angulum P l L minorem eſſe angulo P L a. Undè in tranſitu corporis à quadraturâ D ad nodum proximum L inclinatio orbitæ minuitur & nodus progreditur; eadem fieri in tranſitu corporis à quadraturâ C ad nodum proximum K, eodem modo demonſtratur. Q. E. D.

DE MOTU CORPORUM.

tuantur in octantibus poſt quadraturas, id eſt, inter *C* & *A*, *D* & *B*, intelligitur ex modo expoſitis, quod, in tranſitu corporis *P* à nodo alterutro ad gradum inde nonageſimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in tranſitu per proximos 45 gradus, uſque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & poſtea denuò in tranſitu per alios 45 gradus, uſque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, (r) & propterea minor eſt ſemper in nodo ſubſequente quam in præcedente. (f) Et ſimili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quam diminuitur, ubi nodi ſunt



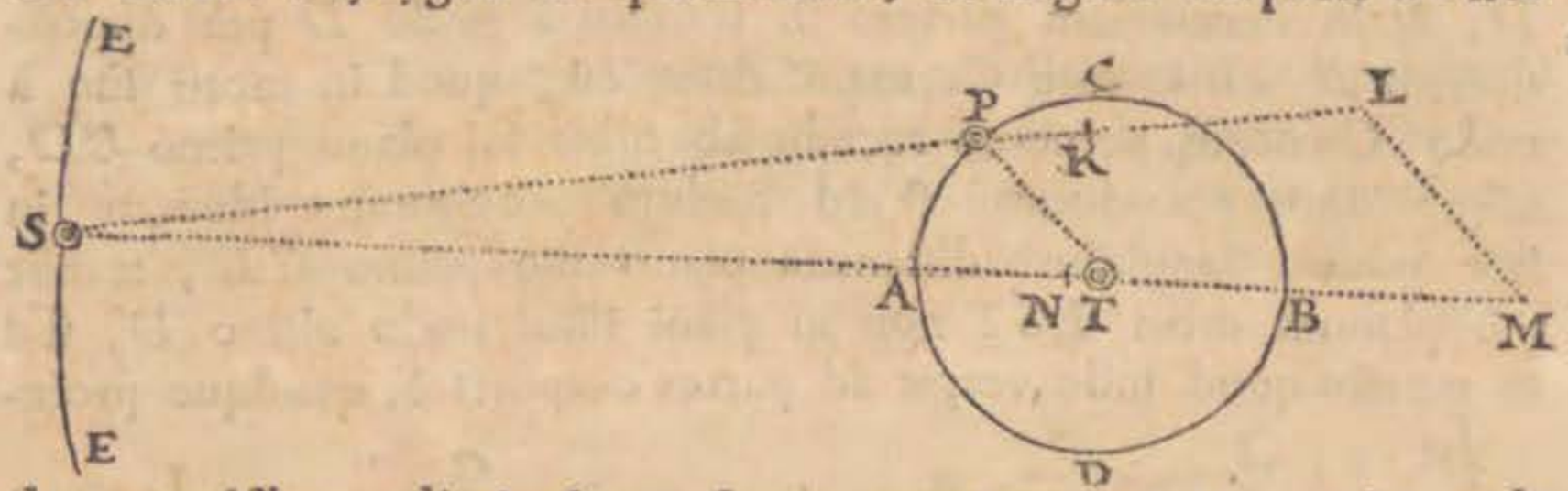

(r) * *Et propterea minor eſt ſemper inclinatio in nodo ſubſequente quam in præcedente*, quod verum quoque eſt, ubicumque conſtituatur nodus K inter c & a, ut patet ex ipſis demonſtrationibus in notis 507. & 508. traditis.

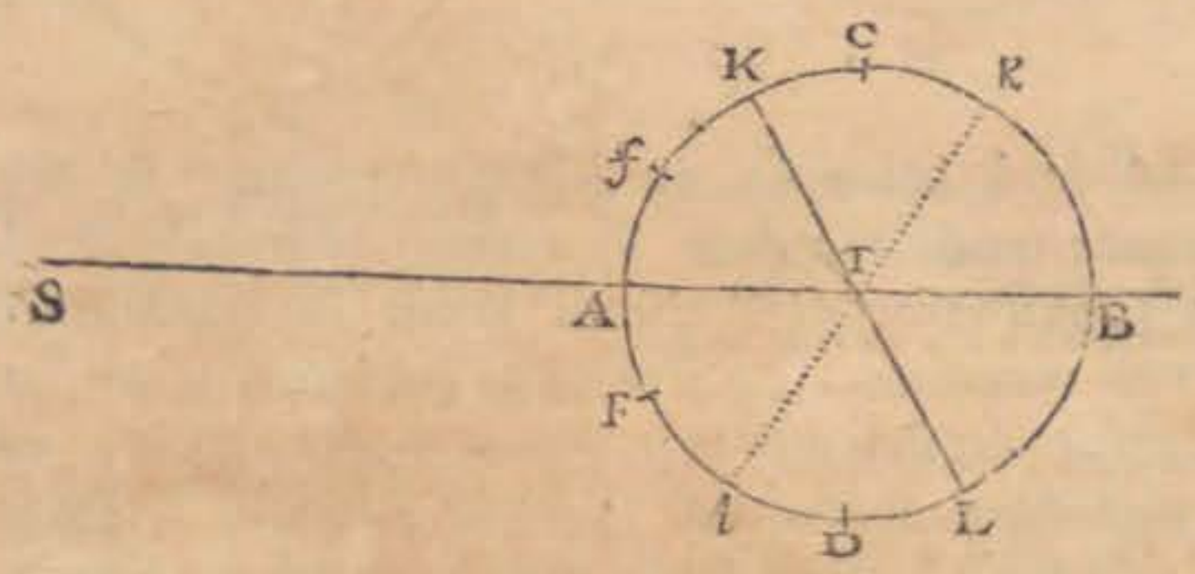
(f) 509. *Et ſimili ratiocinio &c.* Si nodus K conſtituatur inter quadraturam C vel c & oppoſitionem B vel b, & nodus oppoſitus L inter quadraturam D vel d, & conjunctionem A ſeu a, feraturque corpus à nodo K per C ad alterum nodum L. 1°. In tranſitu corporis à nodo ad quadraturam proximam inclinatio plani perpetuò augetur & nodi progrediuntur. 2°. In tranſitu a quadraturâ C vel D ad gradum à nodo nonageſimum F vel G inclinatio minuitur & nodi regrediuntur. 3°. In tranſitu à gradu illo 90°. ad nodum proximum inclinatio augetur & nodi regrediuntur. 1^um^. & 3^tium^. demonſtrantur prorſus ut in notâ 507. 1^um^. verò ità oſtenditur. Dum corpus P verſatur inter nodum K & quadraturam C, vi revolutionis urgetur per arcum P p, & vi N M trahitur ſecundum directionem P m in plagam M, adeóque vi utrâque deſcribet tempuſculo minimo lineolam P π, quæ ab arcu P p deflectet verſus P m; quare ſi centro T, radio T P, deſcribantur ut ſuprà arcus P K, π P K, K k c a in planis T P π, T P k, E S T patet propoſitum, ut in notâ 507.

510. Coroll. Ex tribus ſuperioribus demonſtrationibus (507. 508. 509.) inter ſe collatis manifeſtum eſt nodos progredi quamdiu corpus P inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum verſatur; eos verò regredi, dum corpus P in aliis quibuſlibet locis verſatur. Undè ſequitur in ſingulis corporis P à nodo ad nodum revolutionibus nodos magis regredi quam progredi, adeóque abſolutè regredi niſi fuerint in ſyzygiis.

sunt in octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. (t) Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum à syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad nodos appulsibus, diminuitur; sitque omnium minima, ubi nodi sunt in quadraturis, & corpus in syzygiis: dein crescit iisdem gradibus, quibus antea decreverat, nodisque ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur. *Co-*

LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

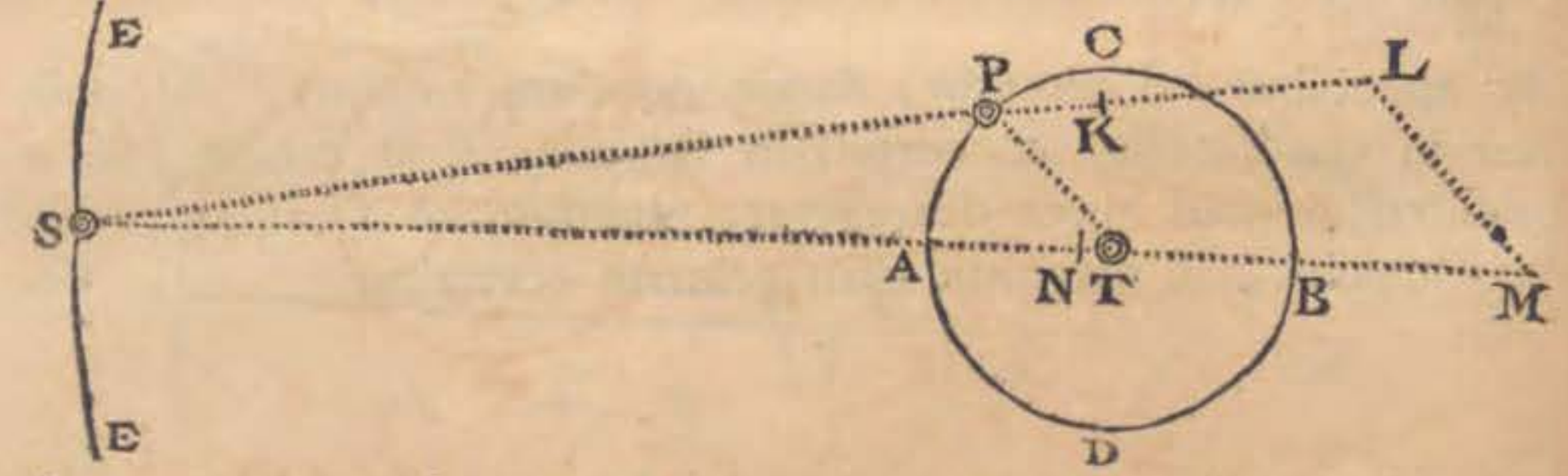



(t) * *Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis &c.* Quoniam in singulis corporis P à nodo ad nodum revolutionibus, linea nodorum regreditur (510) & in transitu nodorum à syzygiis A & B ad quadraturas C & D, inclinatio orbitæ perpetuò minuitur (508.) deindè verò in transitu nodorum à quadraturis C & D, ad syzygias B, & A, perpetuò augetur (509), manifestum est inclinationem minimam esse ubi nodi sunt in quadraturis & corpus P in syzygiis (in quibus vis NM, cæteris paribus, maxima est) & maximam inclinationem esse ubi nodi sunt in syzygiis. Porrò sint nodi K & L inter C & A, D & B primum, deindè regrediendo transeant in loca k & l, inter C & B, D & A, sintque arcus CK & Ck, æquales. In primo casu inclinatio minuitur in transitu corporis P, per quadrantem KF, (509.) & in secundo casu æqualibus viribus augetur per quadrantem fl, (509). In primo casu inclinatio augetur per arcum FD (508.), & in secundo casu æqualibus viribus minuitur per arcum cf=FD (509.) Tandem in primo casu, inclinatio minuitur per arcum DL, (508.) & in secundo casu augetur æqualibus viribus per arcum æqualem kC, (509) Quare, cæteris paribus, in transitu nodorum à quadraturis ad syzygias inclinatio planorum iisdem gradibus crescit quibus antea decreverat in transitu nodorum à syzygiis ad quadraturas, ideoque nodis ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur.

DE MOTU CORPORUM.

*Corol.* II. Quoniam corpus *P*, ubi nodi ſunt in quadraturis, perpetuò trahitur de plano orbis ſui, idque in partem verſus *S* in tranſitu ſuo à nodo *C* per conjunctionem *A* ad nodum *D*; & in contrariam partem in tranſitu à nodo *D* per oppoſitionem *B* ad nodum *C*: manifeſtum eſt, quod in motu ſuo à nodo *C* corpus perpetuò recedit ab orbis ſui plano primo *CD*, uſque dum perventum eſt ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longiſſimè diſtans à plano illo primo *CD*, tranſit per planum orbis *EST* non in plani illius nodo altero *D*, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *S*, quodque proinde novus eſt nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent nodi recedere in tranſitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. (u) Nodi igitur in quadraturis conſtituti perpetuò recedunt; in ſyzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quieſcunt; in locis intermediis, conditionis utriuſque participes, recedunt tardius: ideoque, ſemper vel retrogradi, vel ſtationarii ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia.



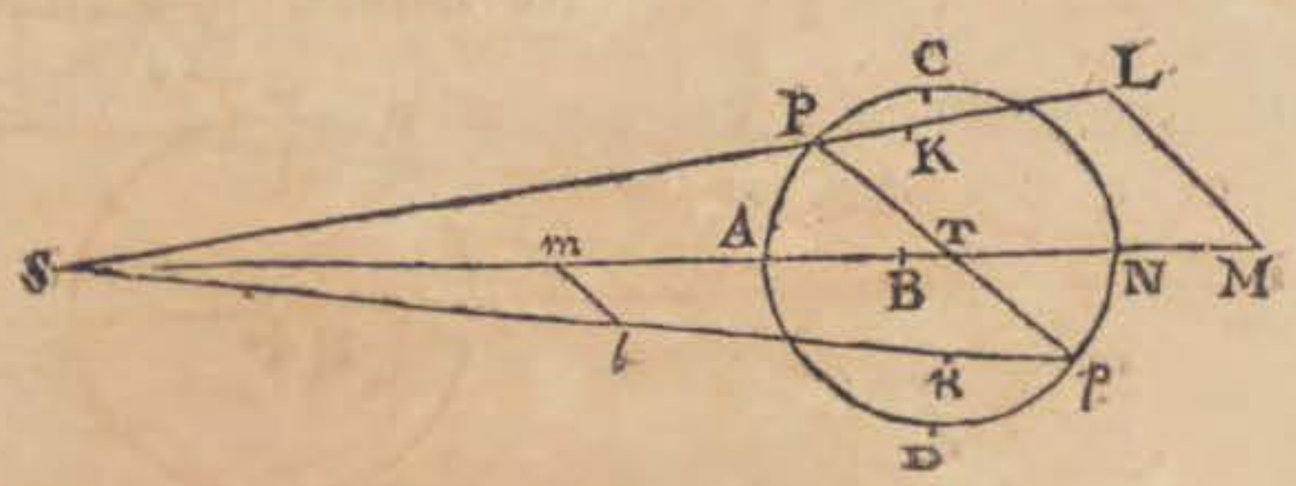

Co-

(u) * *Nodi igitur in quadraturis conſtituti &c.* In integrâ corporis P revolutione, nodi partim regrediuntur, partim progrediuntur, niſi fuerint in quadraturis vel in ſyzygiis conſtituti (510); dum autem in quadraturis verſantur, vis NM, quæ eorum regreſſum producit, maxime potenter agit (506); quare nodi in quadraturis conſtituti celerrime regrediuntur; in ſyzygiis ubi motus in latitudinem nihil perturbatur quieſcunt, in locis intermediis recedunt quidem ſingulis revolutionibus corporis P, (509), ſed tardius quam in quadraturis, *ideoque ſemper &c.*

511. Lemma. Si fuerint tres quantitates $a$, $a+b$, $a+2b$ in continuâ proportione arithmeticâ, ratio $2^{æ}$. ad $1^{am}$. (quæ è tribus eſt minima) major erit quam ratio $3^{æ}$. (quæ eſt maxima) ad $2^{am}$. Eſt enim $a+b:a=\overline{a+b}\times\overline{a+b}:aa+ab=aa+2ab+bb:aa+ab$; ſed eſt $a+2b:a+b=aa+2ab:aa+ab$. Ergo cum ratio $aa+2ab+bb$ ad $aa+ab$ major ſit quam ratio $aa+2ab$ ad $aa+ab$, erit ratio $a+b$ ad $a$ major ratione $a+2b$ ad $a+b$.

*Corol.* 12. Omnes illi in his corollariis deſcripti errores ſunt paulò majores in conjunctione corporum *P*, *S*, quam in eorum oppoſitione; (x) idque ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

*Corol.* 13. Cumque rationes horum corollariorum non pendeant à magnitudine corporis *S*, obtinent præcedentia, omnia ubi corporis *S* tanta ſtatuitur magnitudo, (y) ut circa ipſum revolvatur corporum duorum *T* & *P* ſyſtema. Et ex aucto corpore *S* auctâque




(x) * *Idque ob majores vires generantes* NM & ML. Vis LM in conjunctione eſt ut $\frac{AT}{SA^3}$, & vis lm in oppoſitione eſt ut $\frac{TB}{SB^3}$ (495). Quarè (cæteris paribus) hoc eſt, ſi fuerit AT = TB vis ML in conjunctione major erit vi ml in oppoſitione propter $SA^3$ minorem quam $SB^3$. Quod erat unum. Porrò ſi AT & BT ſint æquales, tres lineæ SA, ST, SB erunt in continuâ proportione arithmeticâ & proindè SK mediocris diſtantia corporis P ab S erit æqualis ST; & quoniam SK exhibet vim acceleratricem corporis P verſus S in mediocri diſtantiâ SK, & SN exponit vim acceleratricem corporis T verſus S, (prop. 66.) erit SN = ST, atque adeò NM = TM, & mN = Tm. Sed quoniam PT, ſeu AT : ST = LM : SM, erit $SM = \frac{ST \times LM}{AT}$, & ſimiliter invenietur $Sm = \frac{ST \times lm}{AT}$, adeóque $TM = SM - ST = \frac{ST \times LM - ST \times AT}{AT}$, & $Tm = ST - sm = \frac{ST \times AT - ST \times lm}{AT}$; undè differentia TM − Tm, erit ut ST × LM + ST × lm − ST × 2AT, hoc eſt, ut LM + lm − 2AT; Eſt autem ſumma LM + lm, major quam 2AT. Nam cum ſit (495) $LM = \frac{ST^3 \times AT}{SA^3}$, & $lm = \frac{ST^3 \times AT}{SB^3}$, recta LM major eſt rectâ AT, in ratione $ST^3$ ad $SA^3$, & lm minor eſt AT in ratione $SB^3$ ad $ST^3$. Eſt verò ratio $ST^3$ ad $SA^3$, major ratione $SB^3$ ad $ST^3$ (511.) & proindè differentia rectarum LM & AT major erit quam differentia rectarum AT & lm, & ideò ſumma LM + lm major eſt quam 2AT; Quarè tandem erit TM major quam Tm, ſeu vis NM major in conjunctione quam in oppoſitione; Quod erat alterum.

(y) * *Ut circà ipſum revolvatur &c.* Demonſtrationes enim ſunt eædem, ſive corpus S moveatur circum T, ſeu corpus T revolvatur circum S.

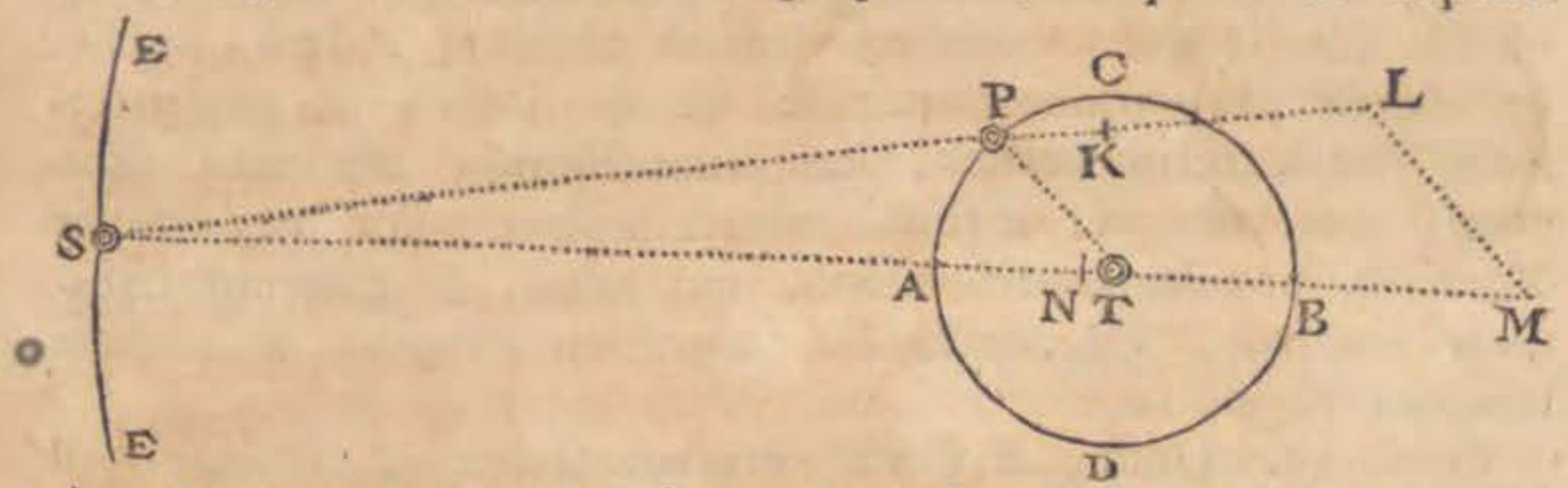
DE MOTU CORPORUM.

tâque ideo ipsius vi centripetâ à quâ errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes, paribus distantiis, majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus *S* circum systema corporum *P* & *T* revolvitur.

*Corol.* 14. (z) Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *S* longinquum est, sint quamproximè ut vis *SK* & ratio *PT* ad *ST* conjunctim, hoc est, si detur tum distantia *PT*, tum corporis *S* vis absoluta, ut *ST cub.* reciprocè; sint autem vires illæ *NM*, *ML* causæ errorum & effectuum omnium, de quibus actum est in præcedentibus corollariis: manifestum est, quod effectus illi omnes, stante corporum *T* & *P* systemate, & mutatis tantum distantiâ *ST* & vi absolutâ corporis *S*, sint quamproximè in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ

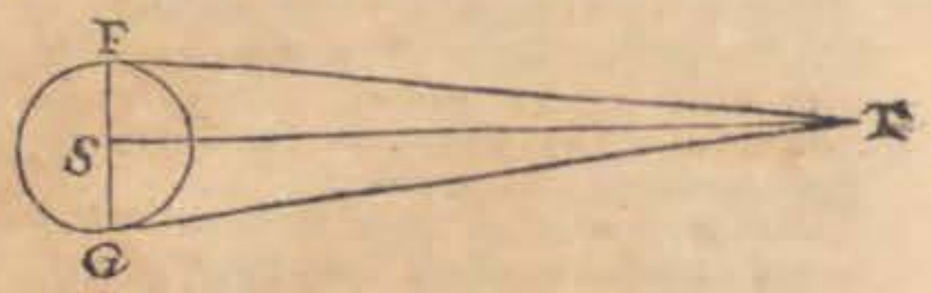
(z) 512. * *Cum autem vires NM, ML &c.* Ob magnam distantiam corporis S, erit ferè L S parallela M S, & S N = S T = S K, ac M L = P T; & quoniam N M in syzygiis est ut M L in quadraturis (501). Si auctâ vel diminutâ actione corporis S, orbita C A D B unà cum lineis hinc pendentibus P T, N M, M L augeatur vel diminuatur (cor. 6. hujus prop. 66.) tres illæ lineæ in eâdem ferè ratione inter se (cæteris paribus) augebuntur vel diminuentur. Est autem vis M L ad vim S K ut recta M L ad rectam S K, seu quam proximè ut P T ad S T; Quarè vis M L (adeóque & vis N M) est quam proximè ut vis S K & ratio P T, ad S T, conjunctim, hoc est, si vis acceleratrix S K dicatur *A* ut $\frac{A \times PT}{ST}$. Porrò datâ vi absolutâ corporis S, vis acceleratrix *A* in distantiâ S K seu S T est ut $\frac{1}{ST^2}$, (ex hyp.) Quarè vires N M, M L, datâ vi absolutâ corporis S, sunt ut $\frac{PT}{ST^3}$; hoc est (si detur distantia P T) ut $ST^3$ reciprocè. Verùm si variabilis sit vis absoluta *V* corporis S, erit vis acceleratrix *A* in distantiâ S T, ut vis absoluta *V* directè & quadratum distantiæ S T inversè, (nam manente vi absolutâ corporis S, vis acceleratrix est ut $ST^2$ inversè, & manente distantiâ S T vis acceleratrix est ut vis absoluta directè, proindéque variantibus vi absolutâ & distantiâ simul, vis acceleratrix est ut vis absoluta directè & quadratum distantiæ inversè); Quarè si loco vis acceleratricis *A* ratio illa composita in facto $\frac{A \times PT}{ST}$ ponatur, vires NM, ML erunt quam proximè ut $\frac{V \times PT}{ST^3}$, seu datâ P T, ut $\frac{V}{ST^3}$, hoc est in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis S, & ratione triplicatâ inversâ distantiæ S T. Vis autem absoluta corporis S, est (ex Dem.) in ratione compositâ vis acceleratricis A & quadrati distantiæ S T, & vis acceleratrix *A* in distantiâ S T est (per coroll. 2. prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione directâ distantiæ S T & ratione duplicatâ inversâ temporis periodici corporis T circum S ad distantiam S T circulum describentis, adeóque vis absoluta corporis *S* est ut cubus distantiæ S T directè, & quadratum temporis periodici corporis T inverse. Quarè vires N M, M L (earumque effectus) quæ sunt directè ut vis absoluta, & inverse ut cubus distantiæ, sunt reciprocè in duplicatâ ratione temporis periodici corporis T.

lutæ corporis $S$, & ratione triplicatâ inversâ distantiæ $ST$. Unde si systema corporum $T$ & $P$ revolvatur circa corpus longinquum $S$; vires illæ $NM$, $ML$, & earum effectus erunt (per corol. 2. & 6. prop. IV.) reciprocè in duplicatâ ratione temporis periodici. Et inde etiam, (a) si magnitudo corporis $S$ proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ $NM$, $ML$, & earum effectus directè ut cubus diametri apparentis longinqui corporis $S$ è corpore $T$ spectati, & vice versâ. Namque hæ rationes eædem sunt, atque ratio superior composita. LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.




*Corol.* 15. (b) Et quoniam si, manentibus orbium $ESE$ & $PAB$ formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur

(a) * *Si magnitudo* seu massa *corporis S proportionalis sit ipsius vi absolutæ*, dato corpore S dabitur vis illius absoluta; unde si prætereà data sit distantia PT, *vires NM, ML & earum effectus erunt*, ex suprà demonstratis, ut cubus distantiæ ST inversè; sed diameter apparens FG corporis longinqui S ex T visi, hoc est, angulus FTG sub quo diameter FG de loco T videtur, est ut distantia ST inversè; nam cum globi S diameter parva admodum supponatur respectu distantiæ ST, angulus FTG, erit admodum exiguus, & globi radius SF ad ST normalis usurpari poterit pro arcu circuli centro T & intervallo TS descripti, adeóque (154) angulus $FTS = \frac{FS}{ST}$, hoc est, ob datum radium SF, angulus FTS & ipsius duplus FTG erit ut ST inversè. *Vires igitur NM, ML earumque effectus, erunt ut cubus diametri apparentis corporis longinqui S è corpore T spectati.*




(b) * *Et quoniam si manentibus &c.* Hoc est, si corporum S & T vel maneant vel mutentur vires absolutæ in datâ quâvis ratione, & orbium ESE & PAB, magnitudo ità mutetur, ut orbis ESE sibi similis semper maneat, sicut & orbis PAB sibi, & horum orbium inclinatio non mutetur, nec proportio seu ratio axium unius orbis ad axes alterius aut linearum quarumvis in uno orbe ad lineas homologas in altero orbe.

DE MOTU CÓRPORUM.

tetur corum magnitudo, & si corporum $S$ & $T$ vel maneant, vel mutentur vires in datâ quâvis ratione; (c) hæ vires (hoc est, vis corporis $T$, quâ corpus $P$ de recto tramite in orbitam $PAB$ deflectere, & vis corporis $S$, quâ corpus idem $P$ de orbitâ illâ deviare cogitur) agunt semper eodem modo, & eâdem proportione: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes, & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut orbium diametri, angulares verò iidem, qui prius, & errorum linearium similium, vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica.

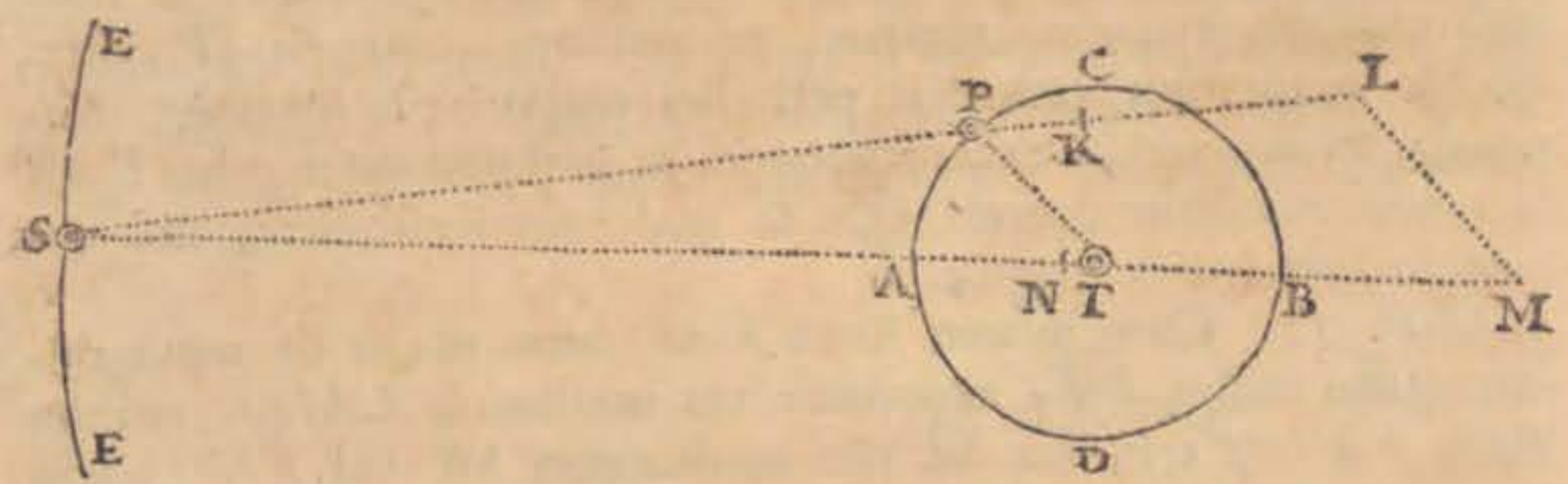
*Corol.* 16. Unde, si dentur orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & distantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno casu, colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proximè: sed brevius hâc methodo. (d) Vires $NM$, $ML$, cæteris stantibus, sunt ut radius $TP$, & harum effe-

(c) * *Hæ vires &c.* Vis acceleratrix quâ corpus $P$ in loco P versùs T trahitur, est (512) ad vim acceleratricem quâ versus S urgetur, in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis T ad vim absolutam corporis S, & ratione inversâ duplicatâ distantiæ PT ad distantiam PS. Quare si vires absolutæ & distantiæ in datis rationibus mutentur, manebit eadem virium acceleratricium ratio, & ob figurarum similitudinem, in similibus corporum $P$, $T$, $S$ positionibus, antè & post distantias virésque mutatas omnium linearum SP, SK, ML, SM, NM, &c. eadem manet ratio, atque adeo vires agunt semper eodem modo & eâdem proportione. Necesse igitur est ut antè & post distantias, & vires mutatas in datis rationibus, similes ac proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora (196) hoc est, errores omnes lineares similes à viribus ML, NM producti, seu deviationes corporis $P$ in longitudinem & latitudinem à locis illis in quibus versaretur, si viribus perturbantibus ML, NM non agitaretur, sunt ut orbium diametri, & anguli sub quibus è centro T deviationes illæ similes videntur, semper manent æquales, ut patet ex naturâ figurarum similium (Lem. V. & not. 112), & errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora, sunt ut orbium tempora periodica (196). Hæc omnia etiam obtinent, ubi corporum duorum $T$, & $P$ systema circà corpus S revolvitur, ut patet, si loco orbis ESE in demonstratione ponatur orbis quem corpus $T$ circum S describit.

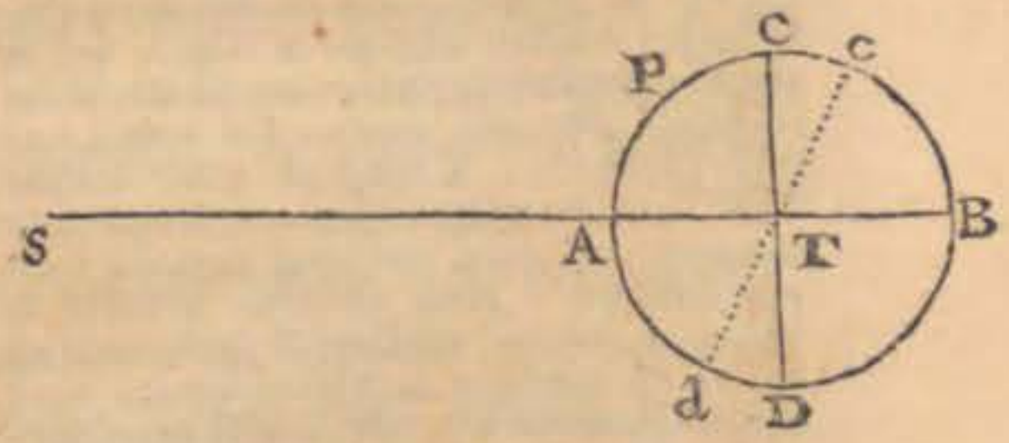
(d) * *Vires NM, ML &c.* Quoniam vires NM, ML sunt (cor. 14.) ut vis SK & ratio PT ad ST conjunctim, manentibus vi SK & ST erunt vires illæ ut radius TP & proinde aucto vel diminuto radio illo TP, manent in datâ inter se ratione, & quoniam ob longinquitatem corporis S ad similes orbis variabilis PAB (sed sibi semper similis & æquè inclinati) partes similiter applicantur quamproximè, illarum effectus periodici (per coroll. 2. Lem. X.) sunt ut vires ipsæ & quadratum temporis periodici corporis $P$ circum T con-

effectus periodici (per corol. 2. lem. x.) ut vires, & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares è centro *T* spectati (id est, tam motus augis & nodorum, quàm omnes






in longitudinem & latitudinem errores apparentes) sunt, in quâlibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutionis quam proximè. Conjungantur hæ rationes cum rationibus corollarii XIV. & in quolibet corporum *T*, *P*, *S* systemate, ubi *P* circum *T* sibi propinquum, & *T* circum *S* longinquum revolcè ut quadratum temporis periodici corporis *T* circum *S*, quarè variantibus tum radio TP, & tempore periodico corporis *P*, tum radio ST, atque vi absolutâ corporis *S*, errores angulares corporis P de centro T apparentes, erunt in singulis revolutionibus corporis illius *P* circum T, in ratione ex binis superioribus rationibus compositâ, seu erunt ut quadratum temporis periodici corporis P, directe & quadratum temporis periodici corporis T, inversè.




conjunctim, hoc est, ut radius TP, & quadratum temporis periodici corporis P quamproximè. Porrò si in orbitâ circulari vel circulo finitima P A B, sit arcus D d error linearis periodicus v. gr. nodi D in antecedentia ad d regressi tempore unius revolutionis corporis *P* circum T, angulus D T d, sub quo error ille D d è centro T videtur, hoc est, error angularis periodicus erit $= \frac{Dd}{TD}$ (154). Errores igitur angulares periodici sunt ut errores lineares directe & radius T D vel T P inversè, adeóque ut quadratum temporis periodici corporis *P* quamproximè. Et hæc quidem vera sunt, stantibus vi absolutâ corporis *S* & distantiâ S T & variantibus radio T P ac tempore periodico corporis *P*; verum stantibus radio T P & tempore periodico corporis *P* & variantibus vi absolutâ corporis *S* atque distantiâ S T, errores periodici tum lineares, tum angulares sunt (coroll. 14.) recipro-

DE MOTU CORPORUM.

volvitur, errores angulares corporis $P$, de centro $T$ apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius $P$, ut quadratum temporis periodici corporis $P$ directè, & quadratum temporis periodici corporis $T$ inversè. (e) Et inde motus medius augis erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis $P$ directè & quadratum temporis periodici corporis $T$ inversè. Augendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis $PAB$ (f) non mutantur motus augis & nodorum ſenſibiliter, niſi ubi eædem ſunt nimis magnæ.

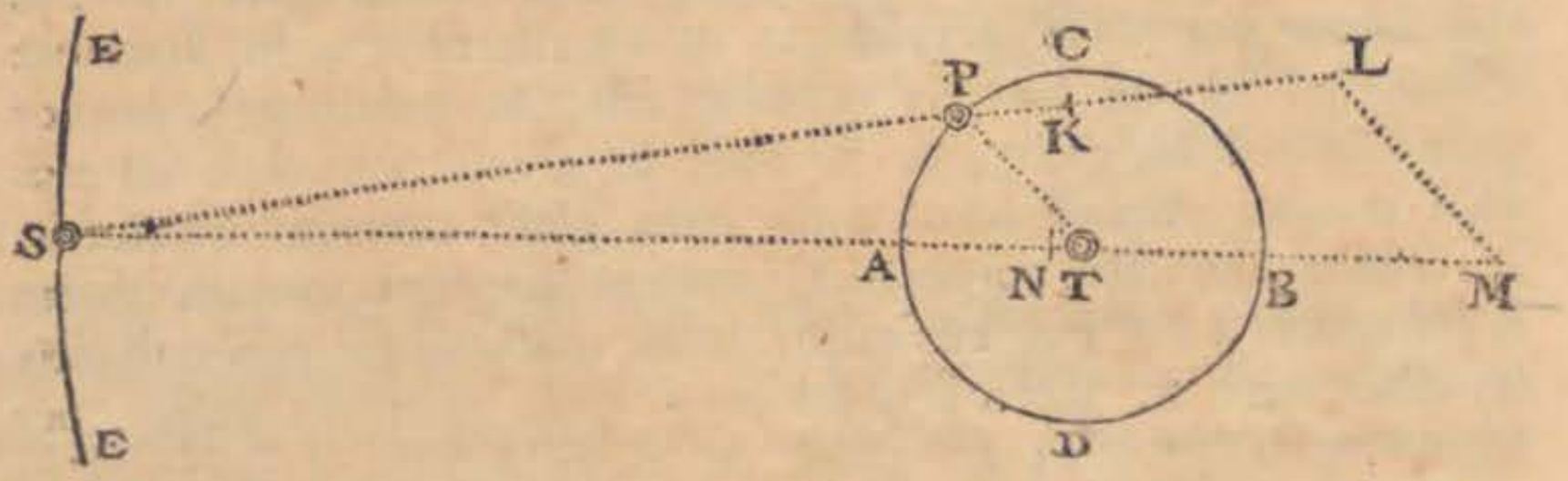
*Corol.* 17. Cum autem linea $LM$ nunc major ſit nunc minor quam radius $PT$, exponatur vis mediocris $LM$ per radium illum $PT$; & erit hæc ad vim mediocrem $SK$ vel $SN$ (quam exponere licet per $ST$) ut longitudo $PT$ ad longitudinem $ST$. Eſt autem vis mediocris $SN$ vel $ST$, quâ corpus $T$ retinetur in orbe ſuo circum $S$, ad vim, quâ corpus $P$ retinetur in orbe ſuo circum $T$, (g) in ratione compoſitâ ex ratione radii $ST$, ad radium $PT$, & ratione duplicatâ temporis periodici cor-

(e) * *Et indè motus medius augis &c.* Si corpus quodvis celeriùs & tardiùs vel in plagas oppoſitas per vices moveatur, illius velocitas æquabilis media, ſeu motus medius obtinetur, ſi ſpatium quod corpus illud in unam plagam latum, longo ſatis tempore percurrit, per illud notabile tempus dividatur. Hinc quoniam apſidum & nodorum motus tardior & celerior eſt per vices, nuncque in antecedentia, nunc in conſequentia fit, invenitur illorum motus medius angularis, ſi ſpatium angulare totum, quod plurium revolutionum corporis $P$ tempore deſcribunt, per illud tempus dividatur. Quare cum motus angularis periodicus augis & nodorum ſit (ex Dem.) ut quadratum temporis periodici corporis $P$ directè, & quadratum temporis periodici corporis $T$ inversè, ſi ratio hæc compoſita per tempus periodicum corporis $P$ pluries ſumptum dividatur, erit quotiens ſeu motus medius angularis augis & nodorum ut tempus periodicum corporis $P$ directè & quadratum temporis periodici corporis $T$ inversè; & indè motus medius augis & nodorum, qui ſunt ambo ut eadem quantitas, ſeu ut tempus periodicum corporis $P$ directè & quadratum temporis periodici corporis $T$ inversè, datam habent ad ſe mutuò rationem.

(f) * *Non mutantur &c.* Nam vires $ML$, $NM$ motuum augis & nodorum productrices, cæteris ſtantibus, non multum mutantur, ſi augeatur vel minuatur excentricitas & inclinatio orbis $PAB$, niſi magna ſatis fuerit illa mutatio, ut patet ex ratione quâ vires illæ $ML$, $NM$ prop. 66. determinantur.

(g) * *In ratione compoſitâ ex ratione radii ST &c.* Nam (per cor. 2. prop. 4.) vis acceleratrix mediocris $ST$ quâ corpus $T$ circum $S$ ad diſtantiam $ST$ circulum vel orbem circulo finitimum deſcribere ſupponitur, eſt ad vim ſimilem quâ corpus $P$ in orbitâ ſuâ circulari vel circulo finitimâ retinetur in ratione compoſitâ ex ratione radii $ST$ ad radium $PT$ directè, & ratione duplicatâ temporis periodici

corporis $P$ circum $T$ ad tempus periodicum corporis $T$ circum $S$. Et ex æquo, vis mediocris $LM$ ad vim, quâ corpus $P$ retinetur in orbe suo circum $T$ (quâve corpus idem $P$, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile $T$ ad distantiam $PT$ revolvi posset) est in ratione illâ duplicatâ periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis unà cum distantia $PT$, datur vis mediocris $LM$; (h) & eâ datâ, datur etiam vis $MN$ quam proximè per analogiam linearum $PT$, $MN$.




*Corol.* 18. Iisdem legibus, quibus corpus $P$ circum corpus $T$ revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem $T$ ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori $T$ concentricum; & singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis $P$ peragendo, propius accedent ad corpus $T$, & celerius movebuntur in conjunctione & oppositione ipsarum & corporis $S$, quam in quadraturis. Et nodi annuli hujus, seu intersectiones ejus cum plano orbitæ corporis $S$ vel $T$, quiescent. Et vis qua corpus $P$ retinetur in orbe suo circum $T$, major erit in quadraturis quam in conjunctione & oppositione, nisi forte motus nodorum sit valde velox. Et vis qua corpus $P$ retinetur in orbe suo circum $T$, major erit in conjunctione & oppositione quam in quadraturis, si motus nodorum sit velocissimus, & in consequentia. Et vis qua corpus $P$ retinetur in orbe suo circum $T$, major erit in quadraturis quam in conjunctione & oppositione, si motus nodorum sit velocissimus, & contra consequentia. Et vis qua corpus $P$ retinetur in orbe suo circum $T$, æqualis erit in quadraturis & in conjunctione & oppositione

DE MOTU CORPORUM.

quiescent in syzygiis; extra syzygias verò movebuntur in antecedentia, & velocissimè quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, (i) & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completâque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quâtenus per præcessionem nodorum circumfertur.

*Corol.* 19. Fingas jam globum corporis *T*, ex materiâ non fluidâ constantem, ampliari & extendi usque ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore corollario) (k) in syzygiis velocior erit, in quadraturis tardior quam superficies globi, & sic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis *S*, nullum acquiret motum fluxus & refluxus. (l) Par est ratio globi uniformiter progredientis in directum, & interea revolventis circa centrum suum (per legum corol. v.) ut & globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, (per legum corol. 6.) Accedat autem corpus *S*, & ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. (m) Vis autem *L M* trahet aquam deorsum in quadraturis, facietque ipsam

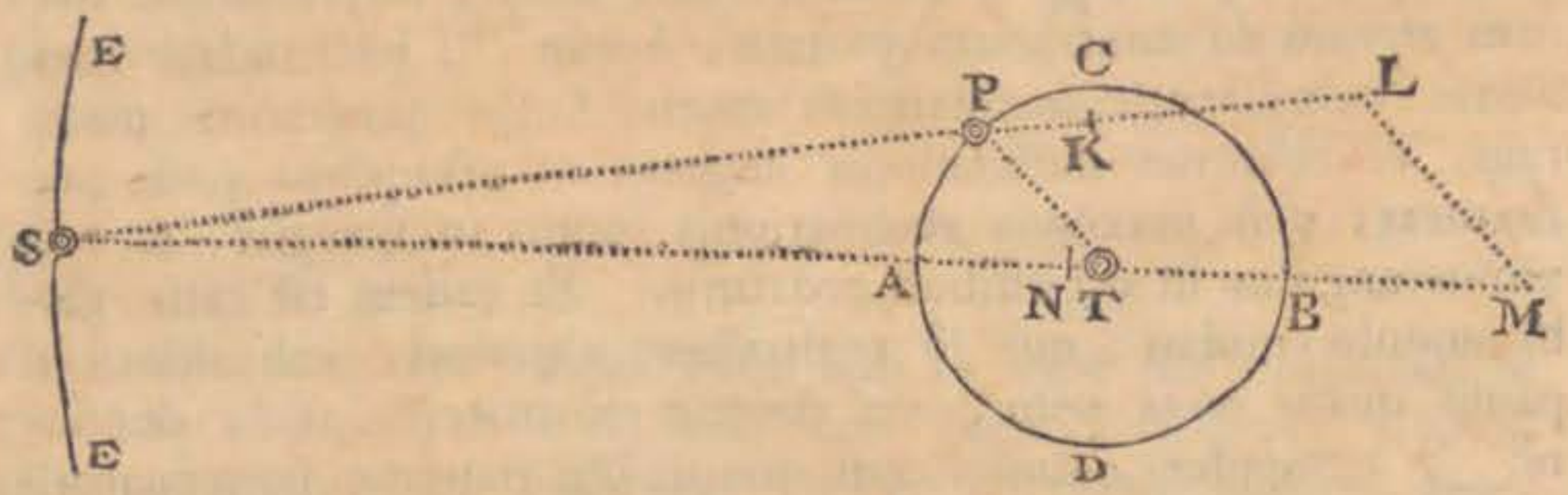
(i) * *Et axis ejus* seu recta per centrum annuli ducta ad planum ejus perpendiculariter, cum plano illo *singulis revolutionibus oscillabitur*, hoc est, ad planum E S T magis & minus per vices inclinabitur (cor. 10.) *completaque* &c. totum verò corollarium patet ex coroll. 3. 5. 10. 11. 13.

(k) * *In syzygiis velocior erit &c.* Per cor. 18. & 3. Nam velocitas uniformis quâ globus circà axem suum revolvitur eodem tempore periodico quo pars quælibet fluidi suam revolutionem absolvit, media erit inter maximam velocitatem fluidi in syzygiis & minimam in quadraturis.

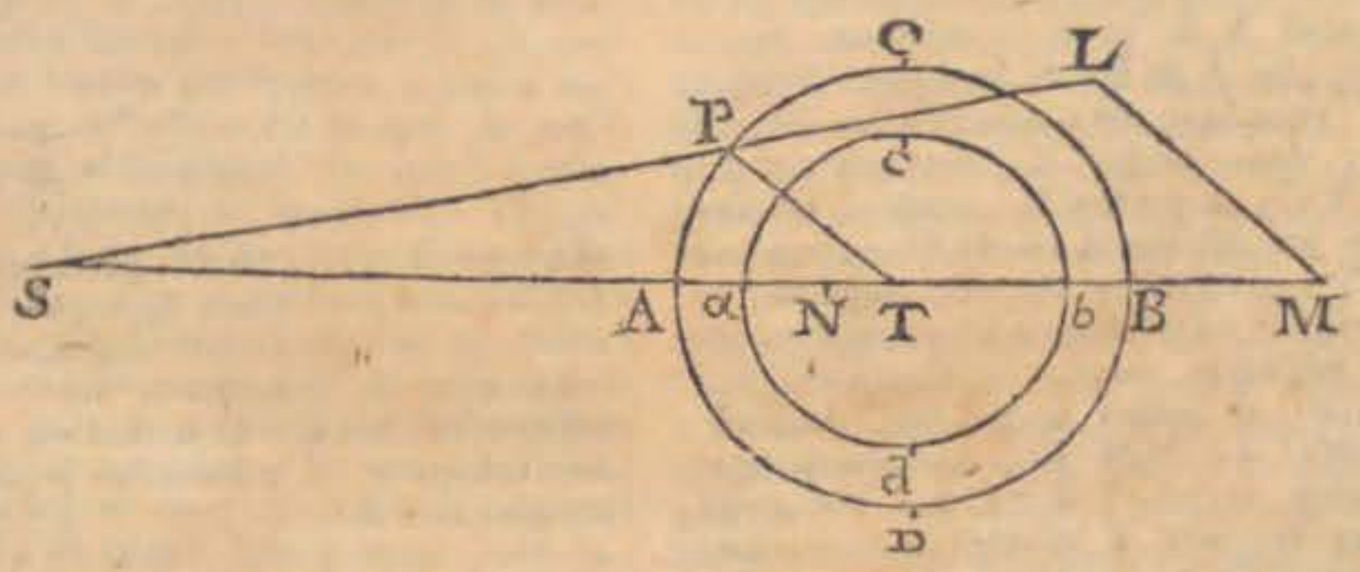
(l) * *Par est ratio &c.* Id est, exclusâ actione corporis S aqua uniformiter revolvendo circum centrum globi vel uniformiter moti in directum vel de cursu rectilineo per lineas parallelas uniformiter tracti, nullum acquiret motum fluxûs & refluxûs, *accedat autem* &c.

(m) * §14. *Vis autem L M &c.* Patet per coroll. 5. Verum ut totum hoc corollarium 19^um^. clarius intelligatur, sit c a d b globi solidi æquator hoc est, circulus globi maximus ad axem rotationis globi perpendicularis CADB zona fluida satis profunda, seu annulus fluidus globo circumpositus, & supponendo quod centrum gravitatis globi solidi accurate vel quamproximè concidat cum figuræ centro T, globus eodem quamproximè modo trahetur à corpore longinquo S, & trahet ipse particulam P fluidi (71) ac si tota illius

ipſam deſcendere uſque ad ſyzygias; & vis *KL* trahet eandem ſurſum in ſyzygiis, ſiſtetque deſcenſum ejus & faciet ipſam aſcendere uſque ad quadraturas: niſi quâtenus motus fluendi & refluendi ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquâtenus retardetur.




*Corol.* 20. Si annulus jam rigeat, & minuatur globus, ceſſabit motus fluendi & refluendi; (n) ſed oſcillatorius ille inclinationis motus & præceſſio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyroſque compleat iiſdem temporibus, & ſuperficie ſuâ contingat ipſum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriuſque oſcillabitur, & nodi regredientur. (o) Nam globus, ut mox dicetur, ad




illius maſſa eſſet in centro T coacta (quod quidem accurate verum eſſe quibuſdam in caſibus poſteà demonſtrabitur), ſed hic approximatio ſufficit; quare fluidi particula quævis P à corpore S inæqualiter attracta totuſque proinde annulus movebuntur, ut in coroll. 19°. ex corollariis præcedentibus determinatum eſt.

(n) * *Sed oſcillatorius ille &c.* Patet per cor. 18. & not. ſuperiorem.

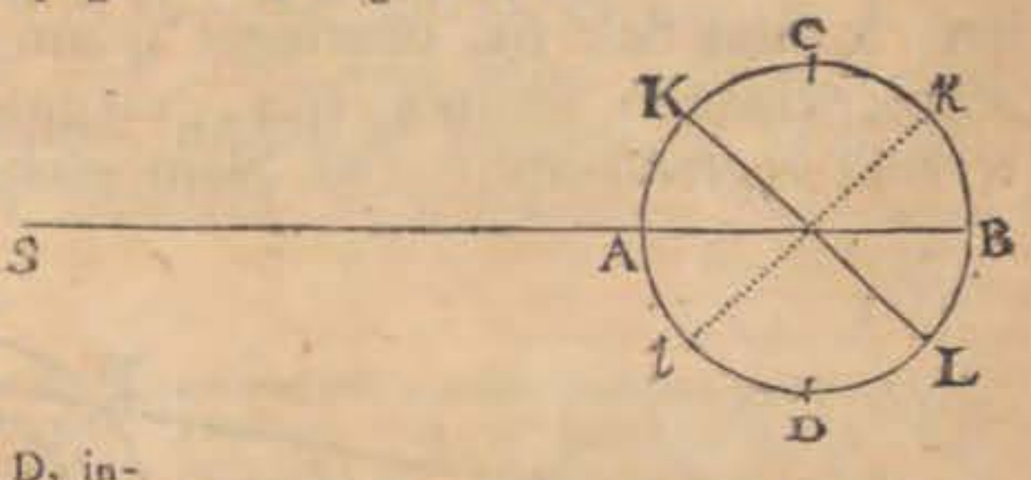
(o) * *Nam globus indifferens eſt &c.* Liquet etiam ex legibus 1ª. & 2ª. & not. 9ª.

DE MOTU CORPORUM.

ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli globo orbati maximus inclinationis angulus eſt, ubi nodi ſunt in ſyzygiis. Inde in progreſſu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit globo toti. (P) Retinet globus motum impreſſum, uſque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque (Q) hâc ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus poſt quadraturas; dein maximus reclinationis motus in ſyzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem eſt ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulò quam juxta polos, vel conſtat ex materiâ paulo denſiore. (R) Supplet enim vicem annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, auctâ utcunque globi hujus vi centripetâ, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum,

(p) * *Retinet globus motum impreſſum.* Per Leg. 1. & 2.

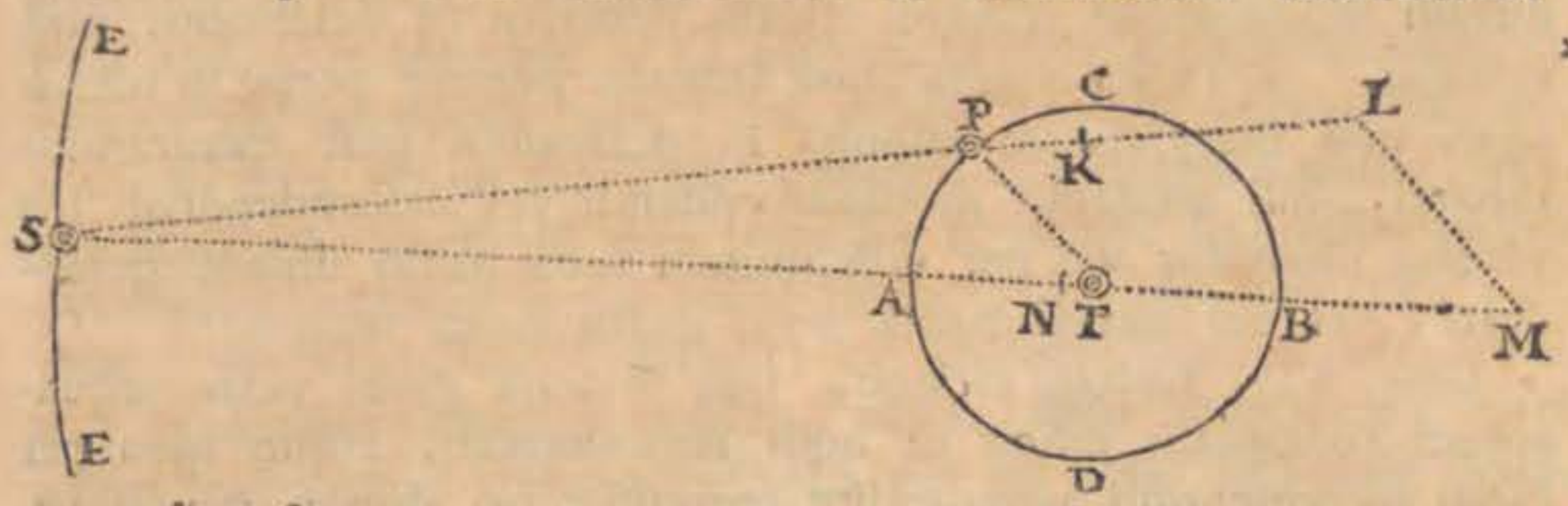
(q) * *Atque hâc ratione maximus inclinationis motus fit in quadraturis nodorum* (per coroll. 18. & 10.) non ideò tamen ibidem fit minimus inclinationis angulus, ſed in octantibus poſt quadraturas. Sint enim nodi K & L in octantibus poſt ſyzygias A & B, & retrogrediendo accedant ad quadraturas C, D; dum nodus K percurrit arcum KC, & nodus L, arcum LD, inclinatio per actionem vis NM, continuò decreſcit, cumque nodus K, pervenit in C, & tranſit ad octantem k perſeverat, ex inertiâ materiæ, motus inclinationis decreſcentis per totum arcum KC impreſſus; Licet vis NM in contrarium agat per totum arcum Ck = CK; vis enim NM per arcum Ck motum inclinationis decreſcentis iiſdem gradibus diminuit, quibus per arcum KC productus & acceleratus eſt. Quare ille decreſcentis inclinationis motus penitùs non deſtruitur, niſi nodus K pervenerit in k tumque vis NM planum reclinat, hoc eſt, nodo exiſtente in k incipit motus reclinationis ſive motus




inclinationis creſcentis & perſeverat uſque ad octantem proximum L atque ibi ceſſat. Liquet igitur minimum angulum inclinationis fieri in octantibus nodorum k, l poſt quadraturas C, D maximum verò dum nodi verſantur in octantibus K & L poſt ſyzygias A, B.

(r) * *Supplet enim vicem annuli &c.* Patet per not. 514. Si materiæ in æquatoris regionibus exceſſus per annulum CcADb, (vid. fig. not. 514) exhibeatur & reliqua globi materia in centro T coacta intelligatur.

ſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcedentis corollarii (f) vix inde mutabuntur; niſi quod loca maximarum & minimarum altitudinum




aquæ diverſa erunt. Aqua enim jam in orbe ſuo ſuſtinetur & permanet, non per vim ſuam centrifugam, ſed per alveum in quo fluit. Et præterea vis $LM$ trahit aquam deorſum maxime in quadraturis, & vis $KL$ ſeu $NM-LM$ trahit

(f) * *Vix indè mutabuntur.* Nam major partium globi in centrum T gravitas non impedit quin annulus fluidus vel ſolidus, impreſſiones virium LM, NM ſuſcipiat, loca tamen maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. Hucuſque enim ſuppoſuimus particulas aquæ ex virium centripetæ & centrifugæ æquilibrio, in orbe ſuo ſuſtineri & permanere inſtar corporis ſolitarii *P* circum T in ſpatio libero revolventis; atque indé ex cor. 5. oſtenſum eſt in cor. 18. maximam aquæ altitudinem in quadraturas incidere, minimam in ſyzygias. Verùm ſi manente eâdem vi centrifugâ augeatur vis centripeta, ſeu gravitas particularum aquæ, particulæ illæ non vi ſua centrifugâ, ſed alvei parietibus, ut in mari atque fluminibus telluris contingit, ſuſtinentur & in orbe ſuo permanent ac proinde non amplius ad legem corporis ſolitarii circum centrum T, in ſpatio libero revolventis à centro illo T recedunt, vel ad illud accedunt. Loca igitur maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. velocitas tamen partium aquæ, cæteris paribus, maxima erit in ſyzygiis, minima in quadraturis (per cor. 3). Præterea vis LM addititia trahit aquam deorſum, ſeu ad centrum T, maximè in quadraturis (513.) & vis ablatitia KL trahit eandem ſurſum, maximè in ſyzygiis (501) & ideò ſi globus cum aquâ circumpoſitâ non revolveretur circà centrum T, minimæ aquarum altitudines in quadraturis C & D, maximæ in ſyzygiis A & B eſſent; verum revolvente cum globo aquâ à C ad A, vis addititia poſt quadraturas agens, aquam deorſum ſemper urget, donec vi ablatitiâ vincatur; & ſimiliter hæc vis ablatitia poſt ſyzygias ſurſum trahit aquas, quarum proinde minimæ altitudines non incident in quadraturas, ſed poſt quadraturas, maximæ verò poſt ſyzygias. Inſuper rotatio globi circà proprium axem maximas aquarum altitudines à ſyzygiis A & B verſus quadraturas D & C transfert, intereadum vires LM, NM ſimul junctæ maximas eas aquarum altitudines in ſyzygiis inſtaurare perpetò nituntur, aqua autem à C & D continuò fluit verſus A & B, cum elevatio ab A verſus D & à B verſus C transfertur, & ideò inter A & D ut & inter B & C dantur duo motus contrarii quibus aqua accumulatur ità ut altitudines maximæ inter hæc puncta incidant fere circà octantes.

DE MOTU CORPORUM.

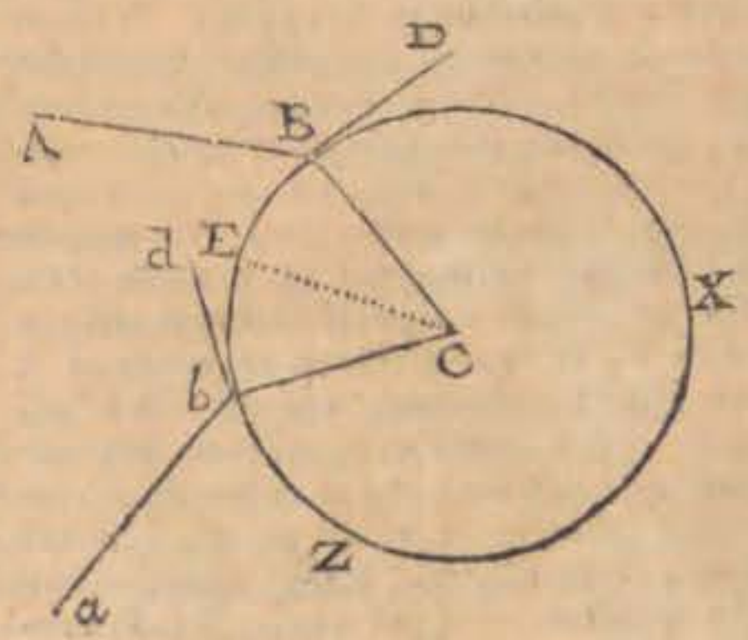
hit eandem ſurſum maximè in ſyzygiis. Et hæ vires conjunctæ deſinunt trahere aquam deorſum & incipiunt trahere aquam ſurſum in octantibus ante ſyzygias, ac deſinunt trahere aquam ſurſum incipiuntque trahere aquam deorſum in octantibus poſt ſyzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire poteſt in octantibus poſt ſyzygias, & minima in octantibus poſt quadraturas circiter; niſi quâtenus motus aſcendendi vel deſcendendi ab his viribus impreſſus vel per vim inſitam aquæ paulò diutius perſeveret, vel per impedimenta alvei paulò citius ſiſtatur.

*Corol.* 21. Eâdem ratione, quâ materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iſte regreſſus, per diminutionem verò diminuitur, & per ablationem tollitur; (t) ſi materia pluſquam redundans tollatur, hoc eſt ſi globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur, vel rarior quam juxta polos, orietur motus nodorum in conſequentia.

*Corol.* 22. Et inde viciſſim, ex motu nodorum innoteſcit conſtitutio globi. Nimirum ſi globus polos eoſdem conſtanter ſervat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; ſi in conſequentia, deficit. Pone globum uniformem & perfectè circinatum in ſpatiis liberis primo quieſcere; dein impetu quocunque obliquè in ſuperficiem ſuam facto propelli, & motum inde concipere (u) partim circularem, partim in directum

(t) * *Si materia pluſquam redundans tollatur*, ſeu ſi materia redundans negativa fiat, motus nodorum qui erat in antecedentia, negativus evadet, hoc eſt, orietur motus nodorum in conſequentia.

(u) * *Partim circularem, partim in directum.* Vis AB quâ globus BXZ obliquè impellitur, ſecundum directionem AB, in duas vires reſolvitur, quarum altera ad centrum C juxta radium BC dirigitur, ei motum globi in directum producit; altera ſecundum tangentem BD radio BC normalem agit, & motum rotationis circà axem plano ABDXC perpendicularem inducit.



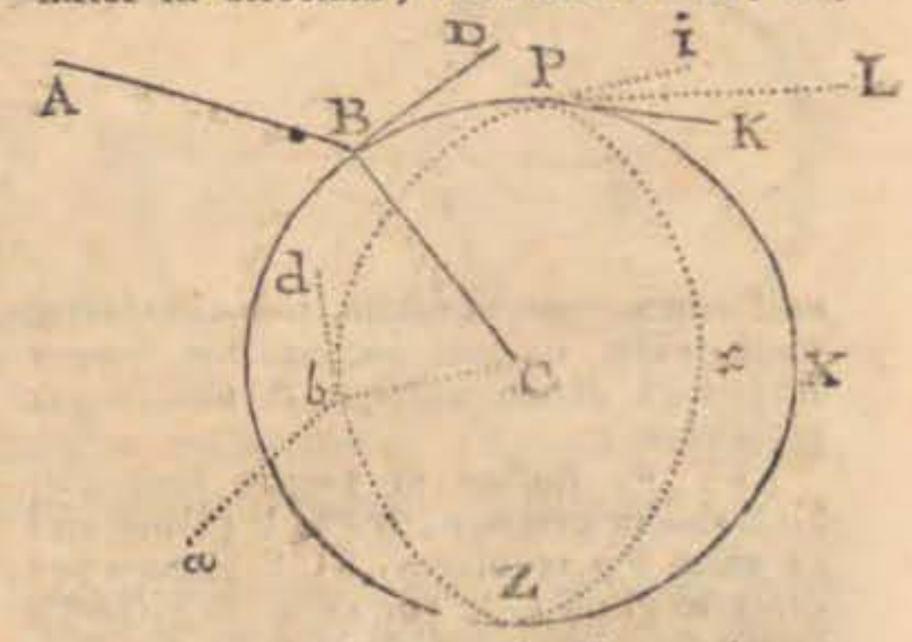
rectum. Quoniam globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum, (x) quam in alium quemvis; perſpicuum eſt, quod is axem ſuum, axiſque inclinationem vi propriâ nunquam mutabit. (y) Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ ſuperficiei parte, quâ prius, impulſu quocunque novo; & cùm citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt, quod hi duo impulſus ſucceſſivè impreſſi eundem producent motum, ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt, eundem, ac ſi globus vi ſimplici ex utroque (per legum corol. 2.) compoſitâ impulſus fuiſſet, atque ideo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. (z) Et par eſt ratio impulsûs ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulſus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſecundus ſine primo generaret; atque ideo impulſuum amborum factorum in loca quæcunque: (a) genera-

(x) * *Quam in alium quemvis*; antequam motus imprimatur, perſpicuum eſt quod is axem ſuum rotationis axiſque inclinationem ad planum quodvis poſitione datum vi propriâ nunquam mutabit.

(y) * *Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ ſuperficiei parte* B *quâ prius &c.*

(z) * *Et par eſt ratio impulsûs ſecundi facti in locum alium quemvis b, in æquatore BXZ motûs primi.* Reſolvitur enim vis a b in duas vires, quarum una ad centrum C dirigitur per radium b C; alia ſecundùm tangentem b d agit; & vires duæ utriuſque impulſus ad centrum C per radios B C, b C directæ in unam componentur ſecundùm directionem radii alicujus E C agentem, quâ globus in directum movebitur uniformiter; vires autem B D, b d quæ rotationem globi producunt, eodem modo componuntur ad unicum rotationis motum efficiendum ac ſi fuiſſet vis B D in loco b impreſſa, aut vis b d, in loco B æquatoris B X Z motûs primi; vis enim B D eundem rotationis motum inducit, ſivè imprimatur in B, ſivè in b.

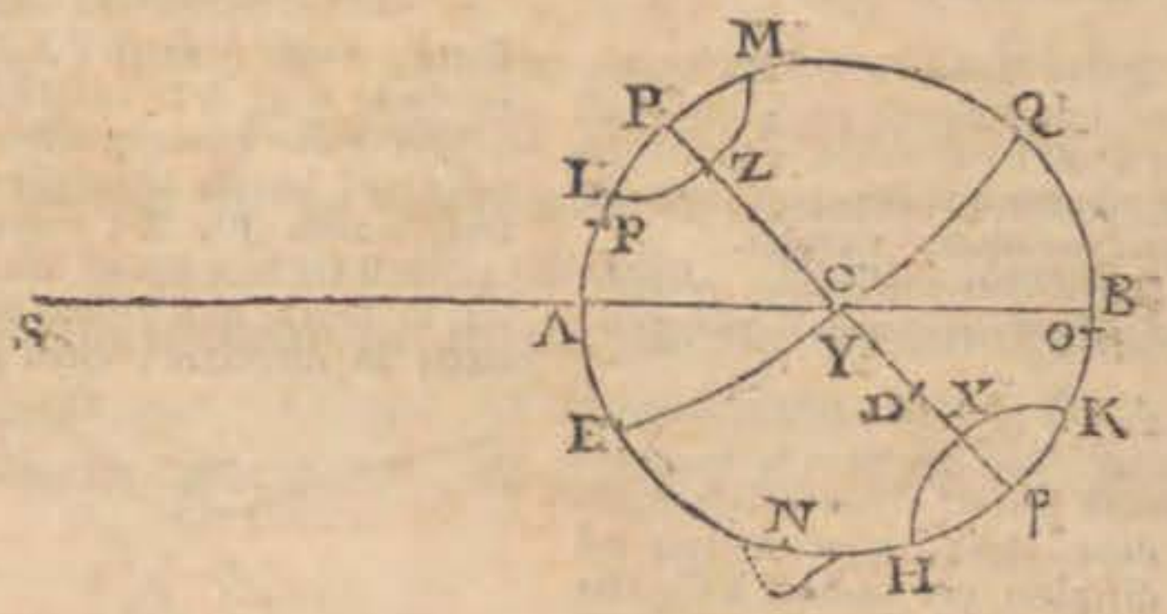
(a) * *Generabunt hi &c.* Globus BPXZb duabus viribus A B, a b obliquè impellatur, iiſque ſingulis in duas alias vires, ſecundùm directiones B C, B D; b c, b d ut ſuprà diviſis, ſit B P X Z æquator quem punctum B vi B D deſcribit, & b P x Z æquator alter quem punctum b vi b d deſcriberet, horum æquatorum communes interſectiones P, Z; vires quæ ſecundum radios B C, b c, agunt in unam componentur, ut ſuprà, quâ globus movebitur uniformiter in directum; vires autem B D, b d,




eoſdem rotationis motus ſeorſim producunt quos producerent, ſi in punctum P ſingulæ agerent ſeorſim, forentque P K, P i; ſed vires duæ P K, P i, in unam P L componuntur quâ globus circà æquatorem unicum rotatur. Quare vires ſeu impulſus A B, a b generabunt motum unicum ſimplicem ac

DE MOTU CORPORUM.

bunt hi eundem motum circularem ac ſi ſimul & ſemel in locum interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit & ad unum reducit, & quâtenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare poteſt. Si globus plano quocunque, per centrum ſuum & centrum in quod vis dirigitur ttanſeunte, dividi intelligatur in duo hemiſphæria; urgebit ſemper vis illa utrumque hemiſphærium æqualiter, & propterea globum, quoad motum rotationis, (b) nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi à centro ſui motus, turbabit mo-



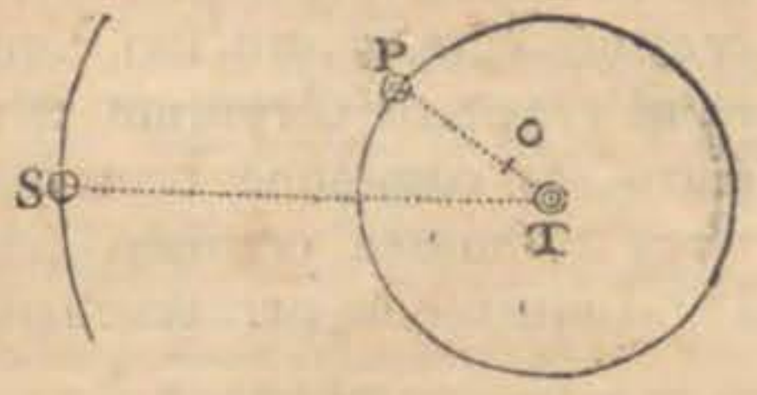

uniformem, tum directum, tum circularem circà axem unicum inclinatione ſemper invariabili datum adeóque & ſibi ſemper parallelum.

(b) * *Nullam in partem inclinabit.* Sit S virium centrum, A P Q E globus circà axem P p revolvens, S C B planum per centrum globi C & per centrum virium S tranſiens, globumque dividens in duo hemiſpheria A P B, A p B, vis centripeta urgebit ſemper utrumque hemiſpherium æqualiter versùs S, & propterea globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit, manebitque proinde eadem axis P p inclinatio. Addatur verò alicubi, v. gr. in N, inter polum p & æquatorem E Y Q materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi à centro ſui motûs D, turbabit motum globi, quod partem globi N, cui adhæret validius trahat quam vis centrifuga partem oppoſitam O, magis depreſſam; & ideò faciet ut poli P, p, errent per ſuperficiem globi & circulos L Z M, H X K, circum ſe punctumque ſibi oppoſitum deſcribant. Nam cum materia illa eſt in loco N, ſuâ majori vi centrifugâ facit ut polus p accedat ad H & polus P ad M, ſublato partium globi æquilibrio; unde materiâ illâ revolvente, poli H & M cir-

tum globi, facietque ut poli ejus errent per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuò describant. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in casu (per corol. XXI.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, quâ ratione (per corol. XX.) nodi regredientur; vel denique ex alterâ axis parte addendo materiam novam, quâ mons inter movendum libretur, & hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

## PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

*Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius* S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipsum ductis, describere potest.*




Nam corporis *S* attractiones versus *T* & *P* componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum *T* & *P* commune gravitatis centrum *O*, quam in corpus maximum *T*, quæque quadrato distantiæ *SO* magis est proportionalis reciprocè, quam quadrato distantiæ *ST*: (c) ut rem perpendenti facile constabit.

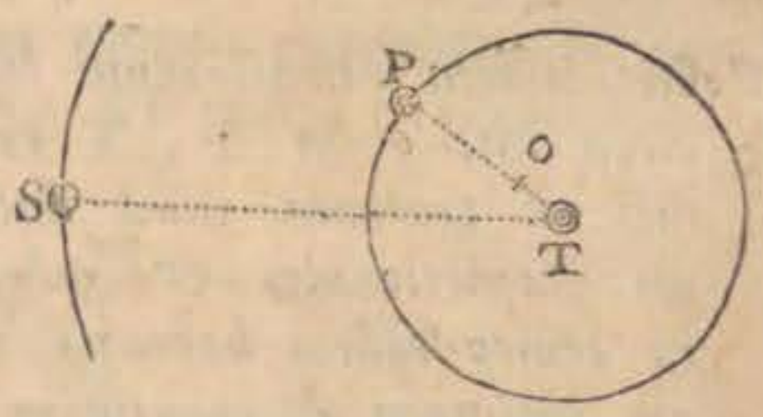
circulos H X K H, M Z L M describunt in superficie globi circà puncta P, p, sive circa loca polorum antequam materia in N addita esset. *Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro* p vel P ubi polum non magis in unam partem trahit quam in alteram; *vel in æquatore* E Y Q, ubi polum unum non magis trahit quam alterum, *vel ex alterâ axis parte* in O *addendo materiam novam quâ motus* in N *inter movendum libratur*, seu quâ axis in partes oppositas æque trahatur, vel etiam addendo materiam novam ex alterâ æquatoris parte in R, quâ polus P tantum trahatur quantum polus p à materiâ in N positâ.

(c) * *Ut rem perpendenti facilè constabit.* Nam vis acceleratricis compositæ quâ corpus *S* à corporibus *T* & *P* trahi-

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

*Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum* P *&* T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multò magis aut multò minus attractum aut multò magis aut multò minus agitetur.*




(d) Demonstratur eodem fere modo cum prop. LXVI. sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem sic æstimare. Ex demonstratione propositionis novissimæ liquet centrum, in quod corpus *S* conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus *S* ex unâ parte, & commune centrum aliorum duorum ex alterâ parte, circa commune omnium centrum quiescens, ellipses accuratas. (e) Liquet hoc per corollarium secundum propositionis LVIII. col-

tur directio cadit inter lineas SP, ST, & cæteris paribus, magis accedit ad ST, quam ad SP (si modò corpus majus *T* cæteris paribus magis trahat quam corpus minus *P*) quemadmodum centrum gravitatis O, propius est corpori *T* quam corpori P; prætereà manente distantiâ ST, vis acceleratrix corporis *S* versùs *P* augetur vel diminuitur, dum decrescit vel crescit distantia SP, & similiter distantia SO, augetur vel diminuitur, prout crescit vel decrescit SP. Quare attractio absoluta (seu tota) corporis *S* quadrato distantiæ SO magis proportionalis est reciprocè, quam quadrato distantiæ ST; insuper commune gravitatis centrum O ferè spectari potest tanquam punctum in quo corporum *T* & *P* vires physicè uniuntur.

(d) * *Demonstratur eodem ferè modo &c.* Nimirum resolvendo singulas attractiones corporis *S* versùs P & T in alias quarum duæ ad centrum O dirigantur & aliæ duæ directiones habeant rectæ TP parallelas.

(e) * *Liquet hoc &c.* Nam si centrum in quod corpus S conjunctis viribus urgetur

collatum cum demonſtratis in prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iſte motus ellipticus aliquantulum per diſtantiam centri duorum à centro, in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima eſt perturbatio, ubi commune trium centrum quieſcit; hoc eſt, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major ſemper, ubi trium commune illud centrum, (f) minuendo motum corporis *T*, moveri incipit, & magis deinceps magiſque agitatur.

*Coroll.* Et hinc, ſi corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod orbitæ deſcriptæ propius accedent ad ellipticas, & arearum deſcriptiones fient magis æquabiles, ſi corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt ut eorum vires abſolutæ directè & quadrata diſtantiarum inversè, ſe mutuo trahant agitentque, & orbitæ cujuſque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum ([g] nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ ſecundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iſte ter-

tur coincideret cum centro O gravitatis communi duorum corporum *P* & *T* hæc duo corpora *P* & *T* ellipſes accuratas ſeorſim deſcriberent circum ſe mutuò & circum centrum illud O (per coroll. 2. prop. 58). Et præterea corpus S ex una parte & duorum aliorum ſyſtema tanquam unum corpus conſideratum, hoc eſt, eorum commune gravitatis centrum O ex altera parte ellipſes accuratas deſcriberent circum commune trium *S*, *T*, *P* centrum gravitatis quieſcens (per coroll. 2. prop. 58.). Quod adhuc clarius intelligetur, ſi legantur propoſitiones 64. 65. Perturbatur iſte motus ellipticus aliquantulum per diſtantiam centri O, duorum *P* & *T* à centro in quod tertium *S* trahitur. *Detur præterea motus* non uniformis in directum *communi trium centro*, (quod continget, ſi corpus intimum & maximum *T*, lege cæterorum non attrahitur, ut ex dictis patet) *& augebitur perturbatio, proindè &c.*

(f) * *Minuendo motum corporis T &c.* Quâ ratione fit ut centrum commune trium corporum, intereà dum corpora *S* & *P* moventur, nunc accedat ad corpus *T* nunc ab illo recedat, pro mutatâ corporum illorum diſtantiâ, & hinc magis ac magis perturbabitur motus ellipticus & magis ac magis deinceps agitabitur centrum commune gravitatis trium corporum.

(g) * *Nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ*, quam v. gr. corpus parvum *P* hic deſcribit *in centro gravitatis corporis maximi & intimi T* quod ferè coincidit cum communi centro O gravitatis duorum *P* & *T* (per caſ. 1. prop. 65.); umbilicus *orbitæ ſecundæ* quam v. gr. corpus *S* deſcribit *in communi centro gravitatis* O, *corporum duorum intimorum P* & *T*; umbilicus *tertiæ* orbitæ quam aliud corpus longius diſtans deſcriberet *in communi centro gravitatis trium interiorum P, T, S* &c. Nam idem eſt ratiocinium ſeu tria ſeu quatuor aut plura ſint corpora (ut in prop. 64. 65.)

DE MOTU CORPORUM.

tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & ſic deinceps) quam ſi corpus intimum quieſcat & ſtatuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

## PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

*In ſyſtemate corporum plurium* A, B, C, D, *&c. ſi corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente: erunt abſolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora* A, B, *quorum ſunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* verſus *A*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur ex hypotheſi; & ſimiliter attractiones acceleratrices corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur. Eſt autem abſoluta vis attractiva corporis *A* ad vim abſolutam attractivam corporis *B*, (h) ut attractio acceleratrix corporum omnium verſus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis; (i) & ita eſt attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A* eſt ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per definitionem ſecundam, ſeptimam & octavam) ſunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hic ſunt (per motus legem tertiam) (k) ſibi invicem æquales. Ergo abſoluta vis attractiva corporis *A* eſt ad abſo-

(h) * *Ut attractio acceleratrix corporum omnium*, ſeu ut attractio acceleratrix uniuſcujuſque corporis verſus A &c. Patet enim quod ſi vis abſoluta dupla vel tripla &c. ſit, actio quoque acceleratrix in diſtantiâ datâ dupla vel tripla erit.

(i) * *Et ita eſt attractio acceleratrix corporis B verſus A, ad attractionem acceleratricem corporis A verſus* B, ob diſtantiam inter B & A, & A & B eandem.

(k) * *Sibi invicem æquales.* Si enim attractio acceleratrix corporis B verſus A dicatur *V* & attractio acceleratrix corporis A verſus B dicatur *v*; vis motrix in B, erit B × *V*; in A erit A × *v*; & (per leg. 3^am.) B × *V* = A × *v*. Unde *V* : *v* = A : B. Ergò *abſoluta* &c.

* *Vi-*

lutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc si singula systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

*Corol.* 2. Eodem argumento, si singula sistematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciprocè, vel directè in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum à trahente, quæve secundum legem quamcunque communem ex distantiis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires (l) absolutæ sunt ut corpora.

*Corol.* 3. In systemate corporum quorum vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum, si minora circa maximum in ellipsibus, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, (m) quam fieri potest accuratissimis revolvantur; & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; & (n) contra. Patet per corol. prop. LXVIII. collatum cum hujus corol. 1.

*Scho-*

(l) * *Vires absolutæ sunt ut corpora.* Omnia enim ratiocinia eadem manent in hujus corollarii hypothesi ac in demonstratione & hypothesi propositionis.

(m) * *Quam fieri potest accuratissimis revolvantur*, ut in duobus casibus prop. 65. expositum est.

(n) * *Et contrà.* Si vires corporum illorum absolutæ sint ad invicem in ratione corporum, & minora corpora circà maximum in ellipsibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, quam fieri potest, accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales, corporum illorum seorsim spectatorum vires acceleratrices decrescent in ratione duplicatâ distantiarum aut accuratè aut quam proximè; ut liquet ex coroll. 2°. prop. 58. collato cum prop. 64. 65.

DE MOTU CORPORUM.

## *Scholium.*

His propoſitionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi ſolent. Rationi enim conſentaneum eſt, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem naturâ & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujuſmodi caſus incidunt, æſtimandæ erunt corporum attractiones, aſſignando ſingulis eorum particulis vires proprias, & colligendo ſummas virium. Vocem attractionis hic generaliter uſurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: ſive conatus iſte fiat ab actione corporum vel ſe mutuo petentium, vel per ſpiritus emiſſos ſe invicem agitantium; ſive is ab actione ætheris, aut aëris, mediive cujuſcunque ſeu corporei ſeu incorporei oriatur corpora innatantia in ſe invicem utcunque impellentis. Eodem ſenſu generali uſurpo vocem *impulſus*, non ſpecies virium & qualitates phyſicas, ſed quantitates & proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens ut in definitionibus explicui. In matheſi inveſtigandæ ſunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuſcunque poſitis conſequentur: deinde, ubi in phyſicam deſcenditur conferendæ ſunt hæ rationes cum phænomenis; ut innoteſcat quænam virium conditiones ſingulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium ſpeciebus, cauſis & rationibus phyſicis tutius diſputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora ſphærica, ex particulis modo jam expoſito attractivis conſtantia, debeant in ſe mutuò agere; & quales motus inde conſequantur.

SEC-

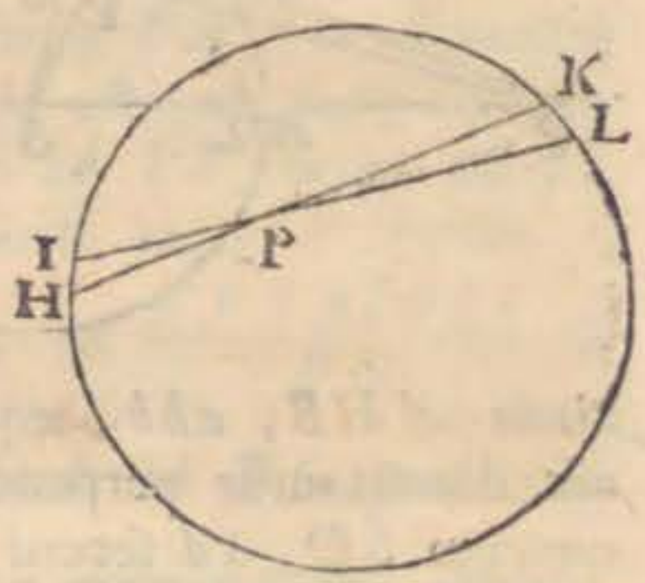
## SECTIO XII.

*De corporum ſphæricorum viribus attractivis.*

## PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

*Si ad ſphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quod corpuſculum intra ſuperficiem conſtitutum his viribus nullam in partem attrahitur.*

Sit *HIKL* ſuperficies illa ſphærica, & *P* corpuſculum intus conſtitutum. Per *P* agantur ad hanc ſuperficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes; &, ob triangula *HPI*, *LPK* (per corol. 3. lem. VII.) (o) ſimilia, arcus illi erunt diſtantiis *HP*, *LP* proportionales; & ſuperficiei ſphæricæ particulæ quævis ad *HI* & *KL*, rectis per punctum *P* tranſeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicatâ illâ ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ ſunt inter ſe æquales. Sunt enim ut particulæ directè, & quadrata diſtantiarum inverſe. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, ſe mutuo deſtruent. Et ſimili argumento, attractiones omnes per totam ſphæricam ſuperficiem à contrariis attractionibus deſtruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*




PRO-

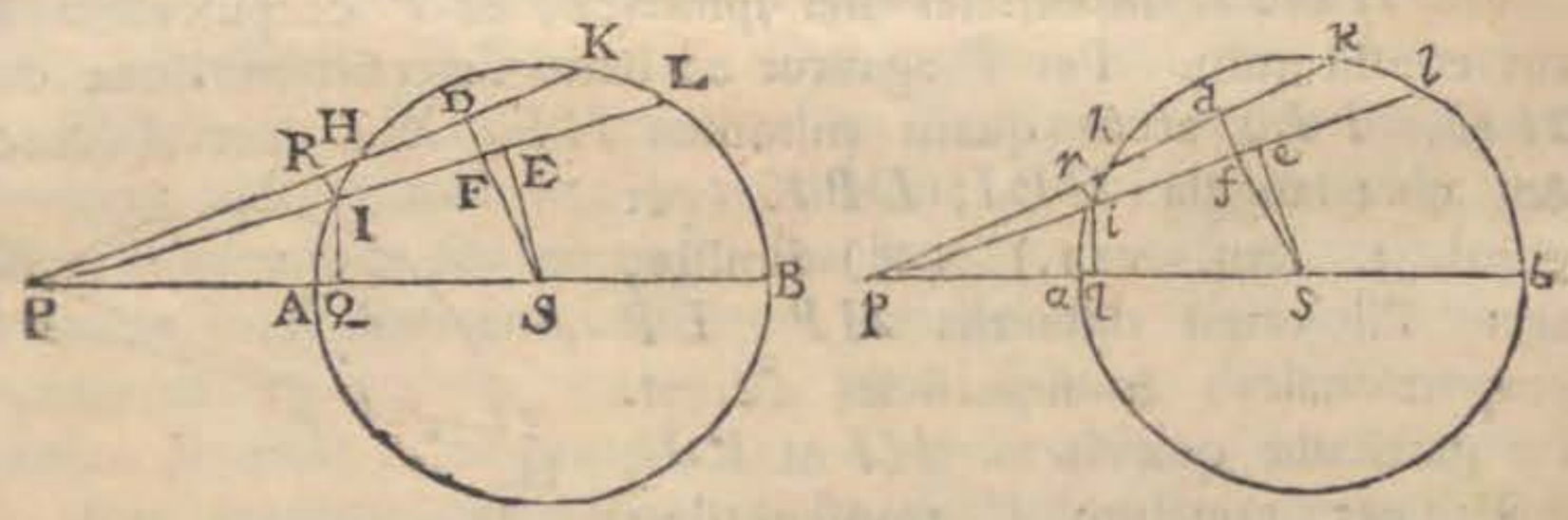
(o) * *Similia &c.* Anguli enim HPI, IPK ad verticem oppoſiti, & anguli HIL, LKH eidem arcui inſiſtentes æquantur (per prop. 27. Lib. 3. Elem.) Nam arcus evaneſcentes IH, KL, pro ipſorum chordis uſurpari poſſunt (per cor. 3. Lem. 7.) Quare arcus HI, KL diſtantiis HP, LP proportionales ſunt, & hinc ſi ad ſuperficiem ſphæricam per punctum P ductæ intelligantur innumeræ rectæ ad arcus quamminimos ut HI, KL terminatæ, rectæ illæ figuras ſolidas (pyramides vel conos) ſimiles formabunt quorum baſes in ſuperficie ſphæricâ ſimiles erunt, & proindè (per Lem. 5.) rationem habebunt duplicatam laterum HI, HL ſeu diſtantiarum HP, LP. *Ergo vires* &c.

De Motu Corporum.

## PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

*Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphæræ; vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.*

Sint *AHKB*, *ahkb* æquales duæ superficies sphæricæ, centris *S*, *s*, diametris *AB*, *ab* descriptæ, & *P*, *p* corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur à corpusculis lineæ *PHK*, *PIL*, *phk*, *pil*, auferentes à circulis maximis *AHB*, *ahb*, æquales arcus *HK*, *hk* & *IL*, *il*: Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *sd*; *SE*, *se*; *IR*, *ir*; quorum *SD*, *sd* secent *PL*, *pl* in *F* & *f*: Demittantur etiam ad diametros perpendicula *IQ*, *iq*. Evanescant anguli *DPE*, *dpe*: & (p) ob æquales *DS* & *ds*, *ES* & *es*, lineæ *PE*, *PF* & *pe*, *pf* & lineola *DF*, *df* pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis *DPE*, *dpe* simul evanescentibus, (q) est æqualitatis. His itaque constitutis, (r) erit *PI* ad *PF* ut *RI* ad *DF*, & *pf* ad *pi* ut *df*, vel *DF* ad *ri*; & ex æquo *PI*×*pf* ad *PF*×*pi* ut *RI* ad *ri*, hoc est




(per

(p) * *Et ob æquales DS & ds, ES & es* &c. (Per Prop. 14. Lib. 3. Elem.).

(q) * *Est æqualitatis.* Nam evanescentibus DPE, dpe angulis, puncta F, f coincidunt cum punctis E, e, & iis punctis coincidentibus, æquales sunt lineæ PE, PF & pe, pf, & lineolæ DF, df fiunt differentiæ linearum DS & ES, ds & es, ac proindè (ob æquales DS & ds, ES & es) æquantur.

(r) * *Erit PI ad PF &c.* Ob parallelas RI, DF & ri, df.

(per corol. 3. lem. VII.) (f) ut arcus $IH$ ad arcum $ih$. (t) Rursus $PI$ ad $PS$ ut $IQ$ ad $SE$, & $ps$ ad $pi$ ut $se$ vel $SE$ ad $iq$; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut $IQ$ ad $iq$. Et conjunctis rationibus $PI$ *quad.* $\times pf \times ps$ ad $pi$ *quad.* $\times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc (u) est, ut superficies circularis, quam arcus $IH$ convolutione semicirculi $AKB$ circa diametrum $AB$ describet, ad superficiem circularem, quam arcus $ih$ convolutione semicirculi $akb$ circa diametrum $ab$ describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula $P$ & $p$, sunt (per hypothesin) ut ipsæ superficies directè, & quadrata distantiarum superficierum à corporibus inversè, hoc est, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipsarum partes obliquas, quæ (factâ per legum corol. 2. resolutione virium) secundum lineas $PS$, $ps$ ad centra tendunt, ut $PI$ ad $PQ$, & $pi$ ad $pq$; id est (ob similia triangula $PIQ$ & $PSF$, $piq$ & $psf$) ut $PS$ ad $PF$, & $ps$ ad $pf$. Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus $P$ versus $S$ ad attractionem corpusculi $p$ versus $s$, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc (x) est, ut $ps$ *quad.* ad $PS$ *quad.* Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum $KL$,

(f) *Ut arcus IH ad arcum ih.* Nam triangula evanescentia RHI, rhi similia sunt ob angulos ad R & r rectos (ex hyp.) & angulos ad H & h æquales, quos nempe metiuntur dimidii arcus æquales HK, hk (per prop. 32. lib. 3. Elem.) arcus enim HI, hi pro tangentibus in H & h usurpari possunt (per Cor. 3. Lem. 7.). Quare RI est ad ri, ut arcus IH ad arcum ih.

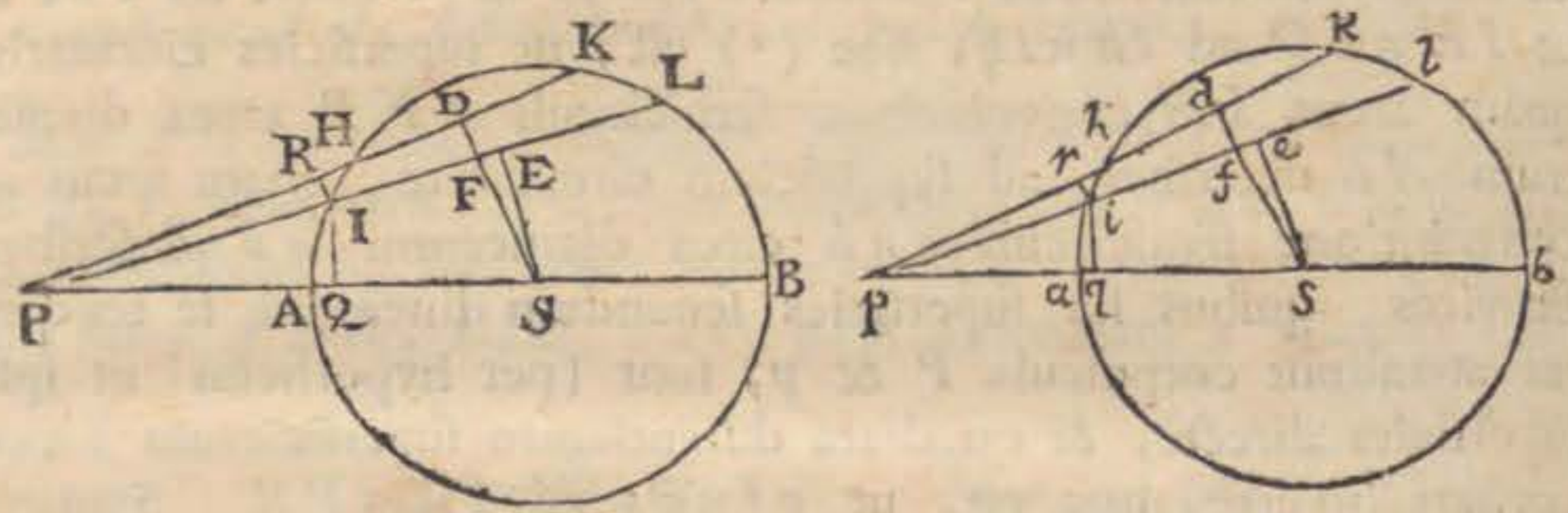
(t) * *Rursus &c.* Ob triangula PQI, PES & pqi, pes similia, est PI:PS = IQ:SE.

(u) 515 * *Hoc est, ut superficies circularis, quam arcus IH convolutione semicirculi AKB circà diametrum AB describet.* Nam circularis illa superficies æqualis est facto ex peripheriâ circuli cujus radius IQ in arcum evanescentem IH, & similiter superficies circularis quam arcus ih, convolutione semicirculi akb circà diametrum ab, describet, æquatur facto ex peripheriâ circuli cujus radius iq, in arcum evanescentem ih, (152). Cum igitur peripheriæ circulorum sint ut radii, facta illa erunt inter se ut $IH \times IQ$, ad $ih \times iq$.

(x) * *Hoc est &c.* Deleto in utrâque quantitate facto $PF \times pf$, erunt attractiones ut $\frac{ps}{PS}$ ad $\frac{PS}{ps}$, seu reducendo ad eundem denominatorem, ut $\frac{ps^2}{PS \times ps}$ ad $\frac{PS^2}{ps \times PS}$, hoc est, ut $ps^2$ ad $PS^2$.

DE MOTU CORPORUM.

*K L*, *k l* descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut *p s quad.* ad *P S quad.* inque eâdem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies sphærica, capiendo sem-

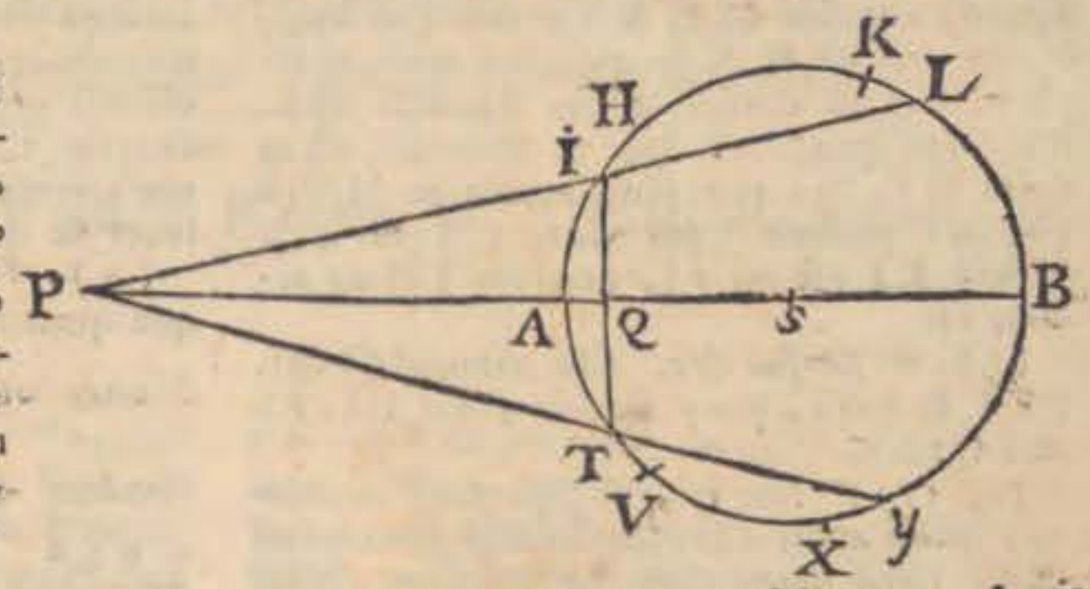



per *s d* æqualem *S D* & *s e* æqualem *S E*, distingui potest. Et, per compositionem, vires totarum superficierum sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eâdem ratione. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

*Si ad sphæræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; ac detur tum sphæræ densitas, tum ratio diametri sphæræ ad distantiam corpusculi à centro ejus: dico quod vis quâ corpusculum atttrahitur, proportionalis erit semidiametro sphæræ.*

Nam concipe corpuscula duo seorsim à (*y*) sphæris duabus attrahi, unum ab unâ & alterum ab alterâ, & distantias eo-




516. Scholium. Si ex alterâ parte diametri A B capiatur arcus A T = A I, & arcus T V = I H, vires obliquæ & æquales I Q, T Q sibi mutuò opponentur, nullumque motum in corpusculo *P* producent. Undè patet vires integras in corpusculum *P* ab utroque hemisphærio A H B, A T B seu à totâ superficie sphæricâ exercitas esse omninò viribus ad centrum S tendentibus æquales.

(*y*) * *A sphæris duabus* homogeneis, ejusdemque densitatis ità nempe ut sub æqualibus voluminibus æquales materiæ quantitates ubique contineantur, & vis absoluta attrahens sit semper ut quantitas materiæ.

rum à ſphærarum centris proportionales eſſe diametris ſphærarum reſpectivè, ſphæras autem reſolvi in particulas ſimiles & ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Et attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas ſphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas ſphæræ alterius, in ratione compoſitâ ex ratione particularum directè & ratione duplicatâ diſtantiarum inversè. Sed particulæ ſunt ut ſphæræ, hoc eſt, in ratione triplicatâ diametrorum, & diſtantiæ ſunt ut diametri; & ratio prior directè unà cum ratione poſteriore bis inversè eſt ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc ſi corpuſcula in circulis, circa ſphæras ex materiâ æqualiter attractivâ conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ à centris ſphærarum proportionales earumdem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

*Corol.* 2. Et vice versâ, ſi tempora periodica ſunt æqualia, diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per corol. 3. prop. IV.

*Corol.* 3. Si ad ſolidorum duorum quorumvis, ſimilium & æqualiter denſorum, punctâ ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; vires, quibus corpuſcula, (z) ad ſolida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iiſdem, erunt ad invicem ut diametri ſolidorum.

PRO-

(z) * *Ad ſolida illa duo ſimiliter ſita*, ità ut diſtantiæ corpuſculorum à ſimilibus ſolidorum duorum particulis ſint ut eorum ſolidorum diametri.

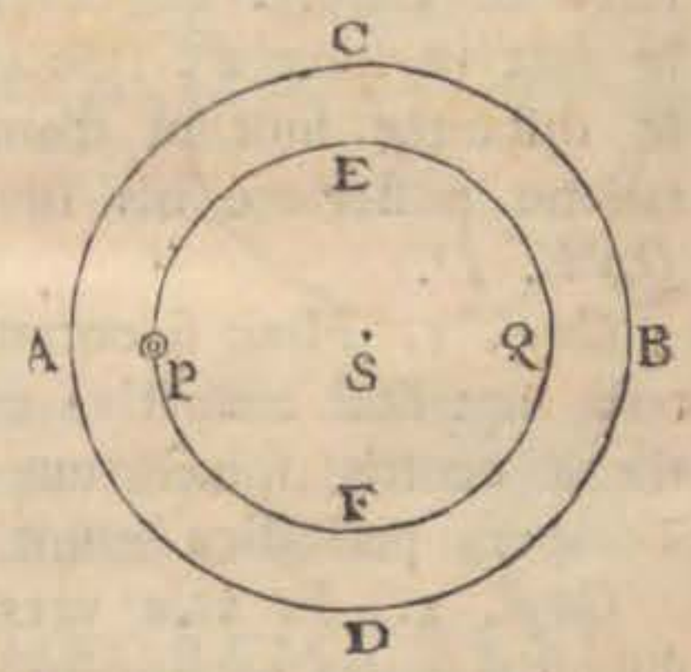
517. Scholium. Hinc ſi hujuſmodi ſphæra per centrum perforetur, æqualia erunt tempora omnia, quibus corpus de locis quibuſvis ad centrum uſque cadit, (per cor. 1. prop. 38.) & corpuſculorum in hujuſmodi ſphærâ per ſparia libera minima revolventium tempora periodica erunt æqualia (per cor. 3. prop. 4.) atque ad hujus generis ſphæras pertinent quæ in prop. 51. 52. hujuſque corollariis demonſtrata ſunt.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

*Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quod corpuſculum intra ſphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.*

In ſphærâ *ABCD*, centro *S* deſcriptâ, locetur corpuſculum *P*; & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe ſphæram interiorem *PEQF* deſcribi. Manifeſtum eſt, (per prop. LXX.) quod ſphæricæ ſuperficies concentricæ, ex quibus ſphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus ſuis per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus *P*. Reſtat ſola attractio ſphæræ interioris *PEQF*. Et (per prop. LXXII.) hæc eſt ut diſtantia *PS*. *Q. E. D.*




### *Scholium.*

Superficies, ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt purè mathematicæ, ſed orbes adeo tenues, ut eorum craſſitudo inſtar nihili ſit; nimirum orbes evaneſcentes, ex quibus ſphæra ultimò conſtat, ubi orbium illorum numerus augetur & craſſitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, ſuperficies & ſolida, componi dicuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

## PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

*Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra ſphæram conſtitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.*

Nam diſtinguatur ſphæra in ſuperficies ſphæricas innumeras concen-

centricas, & attractiones corpuſculi à ſingulis ſuperficiebus oriundæ erunt reciprocè proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi à centro (per prop. LXXI.) Et componendo fiet ſumma attractionum, hoc eſt attractio corpuſculi in ſphæram totam, in eâdem ratione. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc in æqualibus diſtantiis à centris homogenearum ſphærarum attractiones ſunt ut ſphæræ. Nam (per prop. LXXII.) ſi diſtantiæ ſunt proportionales diametris ſphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur diſtantia major in illâ ratione; &, diſtantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicatâ illâ ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicatâ illâ ratione, hoc eſt, in ratione ſphærarum.

*Corol.* 2. In diſtantiis quibuſvis attractiones ſunt ut ſphæræ applicatæ ad (a) quadrata diſtantiarum.

*Corol.* 3. Si corpuſculum, extra ſphæram homogeneam poſitum, trahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem ſphæra ex particulis attractivis; (b) decreſcet vis particulæ cujuſque in duplicatâ ratione diſtantiæ à particula.

## PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

*Si ad ſphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; dico quod ſphæra quævis alia ſimilaris ab eâdem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.*

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciprocè ut quadratum diſtan-

(a) * *Ad quadrata diſtantiarum.* Nam æqualibus diſtantiis, attractiones ſunt ut ſphæræ (per cor. 1.) & æqualibus ſphæris, attractiones ſunt ut quadrata diſtantiarum à centris reciprocè (per prop. 74.). Quarè variantibus ſphæris & diſtantiis ſimul, attractiones ſunt ut ſphæræ ad quadrata diſtantiarum applicatæ.

(b) * *Decreſcet vis particulæ cujuſque &c.* Nam cum vis attractrix abſoluta quantitati materiæ proportionalis ſupponatur, ſi vis particularum ſphæræ in majori vel minori ratione quam duplicatâ diſtantiarum à particulis decreſceret, corpuſculum extrà ſphæram conſtitutum majori vel minori vi traheretur quam reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ à centro ſphæræ.

DE MOTU CORPORUM.

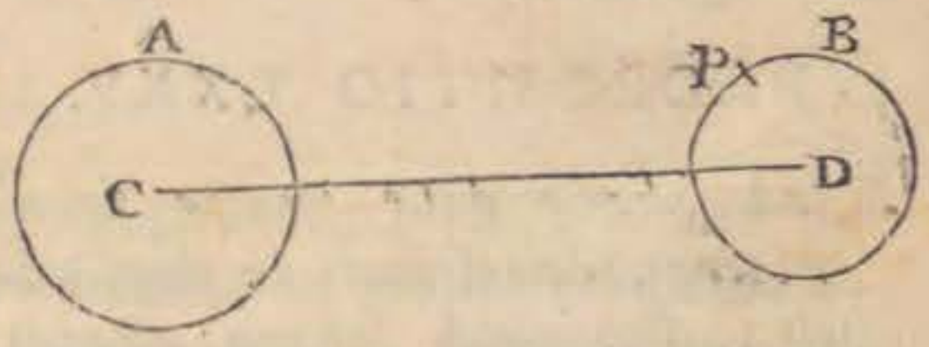
distantiæ suæ à centro sphæræ trahentis, (per prop. LXXIV.) & propterea eadem est, ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus sphæræ. Hæc autem attractio tanta est, quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud à singulis sphæræ attractæ particulis eâdem vi traheretur, quâ ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per prop. LXXIV.) reciprocè proportionalis quadrato distantiæ suæ à centro sphæræ; ideoque huic æqualis attractio sphæræ est in eâdem ratione. (c) *Q. E. D.*

(d) *Corol.* 1. Attractiones sphærarum, versus alias sphæras homogeneas, sunt ut sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum à centris earum, quas attrahunt.

*Corol.* 2. Idem valet, ubi sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius eâdem vi, quâ ab ipsis vicissim trahuntur; ideoque cum in omni attractione urgeatur (per legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum

(c) * *Q. E. D.* Demonstratio clarius intelligitur appositâ figurâ. Sphæra *A* sphæram similarem *B* attrahat, & vis acceleratrix quâ sphæræ *B* particula quævis *P* in centrum C sphæræ *A* urgetur est reciprocè ut quadratum distantiæ P C à centro sphæræ trahentis (per prop. 74.) & propterea eadem est ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico *C* sito in centro sphæræ trahentis *A*; vis autem tota acceleratrix quâ sphæra integra *B* à corpusculo *C* trahitur, tanta est quanta foret vicissim attractio ejusdem corpusculi *C* versùs centrum D sphæræ *B*, si modò illud corpusculum C à singulis sphæræ *B* particulis eâdem vi traheretur quâ ipsas attrahit, ut manifestum est. Foret autem (in hâc hyp.) illâ corpusculi *C* versus centrum D attractio (per prop. 74.) reciprocè proportionalis quadrato distantiæ suæ C D à centro D sphæræ *B*; Quarè attractio sphæræ *B* versus C ut potè æqualis attractioni suppositæ corpusculi *C* versus D, est in eâdem ratione inversâ quadrati distantiæ C D. Q. E. D.

(d) * *Cor.* 1. Vis acceleratrix quâ




sphæræ *B* particula quævis *P* versus centrum C sphæræ *A* urgetur, est ut sphæra *A* applicata ad quadratum distantiæ C P, (per cor. 2. prop. 74.) & propterea eadem est ac si vis tota attrahens quæ esset ut sphæra *A* manaret de corpusculo unico *C* sito in centro sphæræ trahentis *A*; & similiter sphæra tota *B* ad centrum C trahitur ut corpusculum unicum in centro D situm (per prop. 75.) vis autem acceleratrix quâ corpusculum in centro D positum versus C trahitur, est ut vis absoluta corpusculi C seu ut sphæra *A* directè & quadratum distantiæ C D inversè. Quare *attractiones sphærarum* acceleratrices *versùs alias sphæras homogeneas sunt ut sphæræ trahentes applicatæ* &c.

tum attractum, (e) geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus. LIBER PRIMUS. PROP. LXXV. THEOR. XXXV.

*Corol.* 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum conicarum sectionum (f) demonstrata sunt, obtinent, ubi sphæra attrahens locatur in umbilico: & corpora moventur extra sphæram.

*Corol.* 4. Ea vero, quæ de motu corporum circa centrum conicarum sectionum (g) demonstrantur, (h) obtinent ubi motus peraguntur intra sphæram.

PRO-

(e) * *Geminabitur vis attractionis mutuæ* &c. Si sphæra *A* sphæram *B* vi propriâ attrahente destitutam trahat, erit vis acceleratrix sphæræ *B* versùs centrum C sphæræ trahentis *A*, ut $\frac{A}{CD^2}$, (per cor. 2. prop. 75.) jam si sphæræ *B* vis propria attrahens tribuatur, vis acceleratrix sphæræ *A* versùs *B* indè genita, erit ut $\frac{B}{CD^2}$, & vis illius motrix (15) ut $\frac{B \times A}{CD^2}$, quæ (per Leg. 3.) æquatur vi motrici sphæræ *B* versùs sphæram *A* ex reactione sphæræ *A* genitæ. Quarè dividendo per *B*, vis acceleratrix sphæræ *B*, versùs centrum C sphæræ *A*, rursùs erit ut $\frac{A}{CD^2}$, ideóque attractio tota acceleratrix sphæræ *B*, versùs centrum sphæræ *A*, erit in distantiâ datâ ut sphæra ipsa *A*, & in distantiâ variabili ut sphæra *A* ad quadratum distantiæ applicata. Quod similiter dicendum est de attractione sphæræ *A* versùs centrum sphæræ *B*. Observandum verò est quod si sphæræ *A* & *B* æquales sint & utraque vi propriâ attractivâ quantitati materiæ proportionali prædita sit, attractio mutua dupla evadit; Si verò sphærarum una alterâ major sit vel minor, ver. gr. sphæra *B* minor quam sphæra *A*, dum vis attractrix propria sphæræ *B* accedit, geminatur quidem attractio mutua, sed non idcircò tamen duplicatur; nam attractio indè genita, cæteris paribus, sphæræ *B* proportionalis est.

(f) * *Demonstrata sunt.* (In Sect. 3ª. 6ª. 7ª. 9ª. 11ª.)

(g) * *Demonstrantur.* (Prop. 10. 38. 47. 51. 52. 64.)

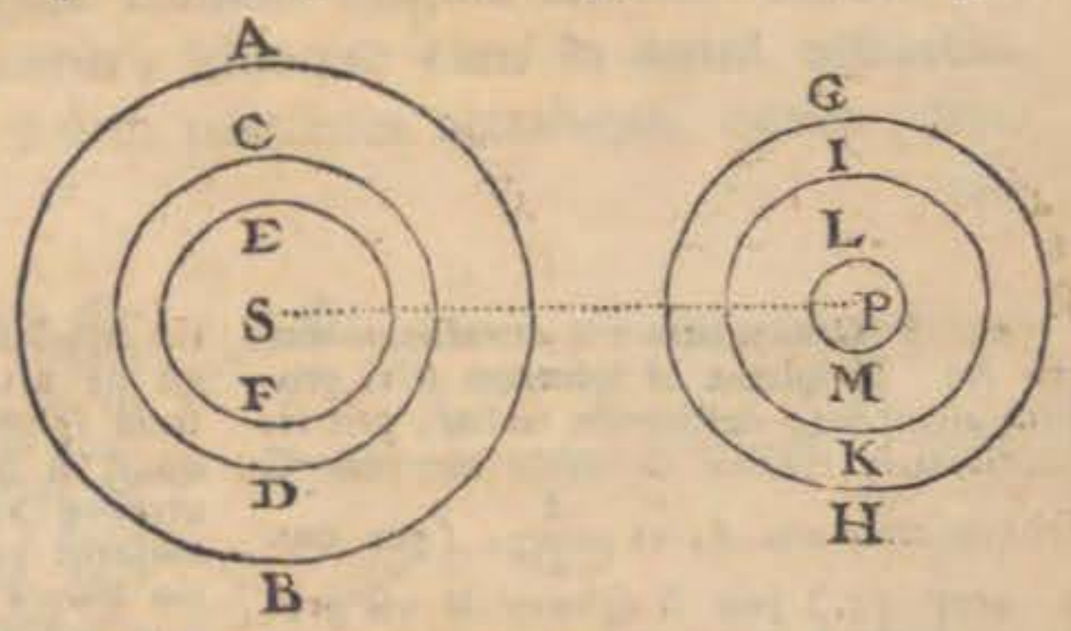
(h) * *Obtinent &c.* (per prop. 73.) ubi motus peraguntur intrà sphæram, hoc est, ubi intrà sphæram solidam via corporibus motis libera conceditur.

De Motu Corporum.

## PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

*Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſunt undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiæ corporis attracti: dico quod vis tota, quâ hujuſmodi ſphæra una attrahit aliam, ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.*

Sunto ſphæræ quotcunque concentricæ ſimilares *AB*, *CD*, *EF*, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per prop. LXXV.) trahent ſphæras alias quotcunque concentricas ſimilares *GH*, *IK*, *LM*, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciprocè proportionalibus quadrato diſtantiæ *SP*. Et (i) componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias; hoc eſt, vis, quâ ſphæra tota, ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſitam *GH*; erit in eâdem ratione. Augeatur




(i) * *Et componendo vel dividendo &c.* Hoc eſt, in datâ diſtantiâ centrorum communium S, P, ſit attractio ſphærarum GH, IK, LM à ſphærâ AB, *a*, *b*, *c*; à ſphærâ CD, *d*, *e*, *f*; à ſphærâ EF, *g*, *h*, *i*: variante verò illâ diſtantiâ communium centrorum S, P vires omnes illæ mutabuntur reſpectivè ſecundum rationem illam inverſam quadrati diſtantiæ Centrorum, ergò ſumma vel differentia virium quibus omnes ſphæræ GH, IK, LM à ſphæris AB, CD, EF attrahuntur in primâ diſtantiâ, erit ad ſummam vel differentiam virium in altero caſu inversè ut quadrata diſtantiarum.

tur numerus ſphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas unà cum vi attractivâ, in progreſſu à circumferentiâ ad centrum, ſecundum legem quamcunque creſcat vel decreſcat; &, additâ materiâ non attractivâ, compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut ſphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum ſuperius, in eâdem illâ diſtantiæ quadratæ ratione inversâ. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc ſi ejuſmodi ſphæræ complures ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuò trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes.

(k) *Corol.* 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut ſphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

*Corol.* 3. Attractiones verò motrices, ſeu pondera ſphærarum in ſphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta.

(l) *Corol.* 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa directè & quadrata diſtantiarum inter centra inversè.

*Corol.* 5. Eadem valent, ubi attractio oritur à ſphæræ utriuſque virtute attractivæ mutuo exercita in ſphæram alteram.

(k) * *Cor.* 2. Attractiones acceleratrices ſphærarum GH, IK, LM &c. in ſphæras AB, CD, EF, &c. ſingularum versùs ſingulas ſunt (per cor. 1. prop 75.) ut ſphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra S, P. Quarè componendo vel dividendo ſumma attractionum illarum omnium vel exceſſus aliquarum ſuprà alias, hoc eſt, tota attractio acceleratrix ſphæræ compoſitæ GIMH versùs ſphæram compoſitam ACFB erit ut ſumma vel differentia ſphærum concentricarum ſimilarium AB, CD, EF, &c. ad quadratum diſtantiæ SP applicata. Sed ſi ſphæræ trahentes ſunt ſibi invicem per omnia ſimiles, ſummæ illæ vel differentiæ ſunt ut ſphæræ ipſæ. Quarè patet veritas Coroll. 1. & 2.

(l) * *Cor.* 4. Corollaria 3^um. & 4^um. ex corollariis 1°. & 2°. manifeſta ſunt; Nam attractionis quantitas motrix, ſeu pondus ſphæræ attractæ in ſphæram trahentem æquipollet facto ex vi acceleratrice ductâ in quantitatem materiæ, ſeu in maſſam ſphæræ attractæ; vis autem acceleratrix (per cor. 2. prop. hujus) eſt ut ſphæra attrahens applicata ad quadratum diſtantiæ inter centra, & quantitates materiæ in ſphæris per omnia ſimilibus, ſunt ut volumina, ſeu ut ſphæræ ipſæ. Quare attractiones motrices ſeu pondera ſphærarum in ſphæras, ſunt ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta directè & quadrata diſtantiarum inter centra inverse.

DE MOTU CORPORUM.

ram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione ſervatâ.

*Corol.* 6. Si hujuſmodi ſphæræ aliquæ circa alias quieſcentes revolvantur, ſingulæ circa ſingulas; ſintque diſtantiæ inter centra revolventium & quieſcentium proportionales quieſcentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

*Corol.* 7. Et viciſſim, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt (m) proportionales diametris.

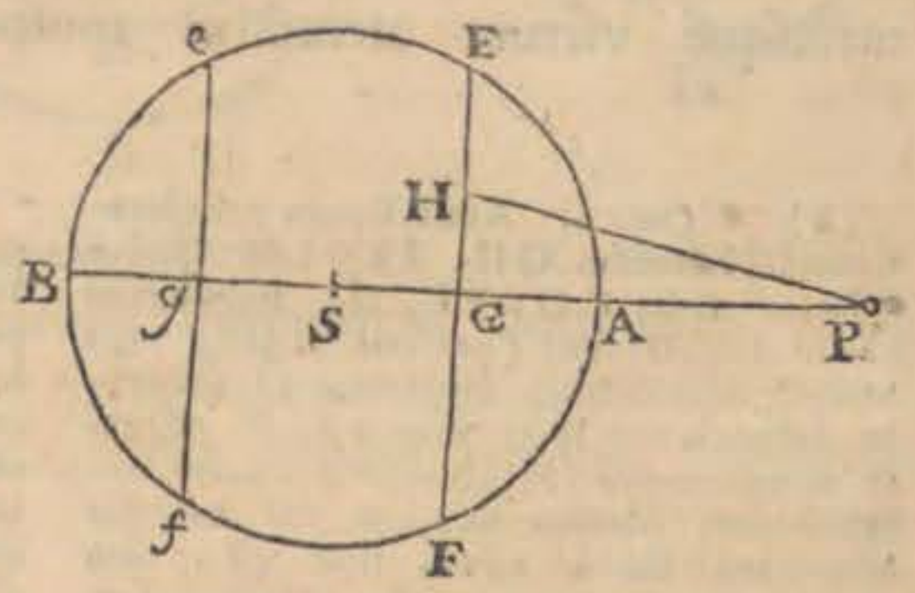
*Corol.* 8. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicos conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent; ubi ſphæra attrahens formæ & conditionis cujuſvis jam deſcriptæ locatur in umbilico.

*Corol.* 9. (n) Ut & ubi gyrantia ſunt etiam ſphæræ attrahentes, conditionis cujuſvis jam deſcriptæ.

## PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

*Si ad ſingula ſphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales diſtantiis punctorum à corporibus attractis: dico quod vis compoſita, quâ ſphæræ duæ ſe mutuo trahent, eſt ut diſtantia inter centra ſphærarum.*

*Caſ.* 1. Sit *AEBF* ſphæra; *S* centrum ejus; *P* corpuſculum attractum, *PASB* axis ſphæræ per centrum corpuſculi tranſiens; *EF*, *ef* plana duo, quibus ſphæra ſecatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter diſtantia à centro ſphæræ; *G*, *g* interſectiones planorum & axis; & *H* punctum quodvis in plano *EF*. Puncti *H* vis contripeta in corpuſculum *P*, ſecundum lineam *PH* exercita, eſt ut diſtantia *PH*; & (per le-




(m) * *Proportionales diametris.* Cor. 6. & 7. conſtant per cor. 3. prop. 4ᵃᵉ.

(n) * *Ut & ubi gyrantia &c.* Patet per Cor. 2. Prop. 58.

legum corol. 2.) ſecundum lineam $PG$, ſeu verſus centrum $S$, ut longitudo $PG$. Igitur punctorum omnium in plano $EF$, hoc eſt plani totius vis, quâ corpuſculum $P$ trahitur verſus centrum $S$, eſt ut diſtantia $PG$ multiplicata per numerum punctorum, id eſt, ut ſolidum quod continetur ſub plano ipſo $EF$ & diſtantia illa $PG$. Et ſimiliter vis plani $ef$, quâ corpuſculum $P$ trahitur verſus centrum $S$, eſt ut planum illud ductum in diſtantiam ſuam $Pg$, ſive ut huic æquale planum $EF$ ductum in diſtantiam illam $Pg$; & ſumma virium plani utriuſque ut planum $EF$ ductum in ſummam diſtantiarum $PG+Pg$, id eſt, ut planum illud ductum in duplam centri & (o) corpuſculi diſtantiam $PS$, hoc eſt, ut duplum planum $EF$ ductum in diſtantiam $PS$, vel ut ſumma æqualium planorum $EF+ef$ ducta in diſtantiam eandem. Et ſimili argumento, vires omnium planorum in ſphærâ totâ, hinc inde æqualiter à centro ſphæræ diſtantium, ſunt ut ſumma planorum ducta in diſtantiam $PS$, hoc eſt, ut ſphæra tota & ut diſtantia $PS$ conjunctim. *Q. E. D.* (p)

*Caſ.* 2. Trahat jam corpuſculum $P$ ſphæram $AEBF$. Et eodem argumento probabitur quod vis, quâ ſphæra illa trahitur, erit ut diſtantia $PS$. *Q. E. D.*

*Caſ.* 3. Componatur jam ſphæra altera ex corpuſculis innumeris $P$; & quoniam vis, quâ corpuſculum unumquodque trahitur, eſt ut diſtantia corpuſculi à centro ſphæræ primæ, & (q) ut ſphæra eadem conjunctim, atque ideo eadem eſt, ac ſi prodiret tota de corpuſculo unico in centro ſphæræ; vis tota, quâ corpuſcula omnia in ſphæra ſecunda trahuntur, hoc eſt, quâ ſphæra illa tota trahitur, eadem erit, ac ſi ſphæra illa traheretur vi prodeunte de corpuſculo unico in centro ſphæræ primæ, & (r) propterea proportionalis eſt diſtantiæ inter centra ſphærarum. *Q. E. D.*

*Caſ.*

(o) * *Et corpuſculi diſtantiam PS.* Eſt enim $Pg=PG+2GS$, adeoque $Pg+PG=2PG+2GS=2PS$.

(p) * *Q. E. D.* Obſervandum eſt vires obliquas $GH$, in plano quovis $EF$, ex utrâque axis $PB$ parte in æqualibus diſtantiis ſumptas eſſe æquales & oppoſitas, nullumque proindè motum producere.

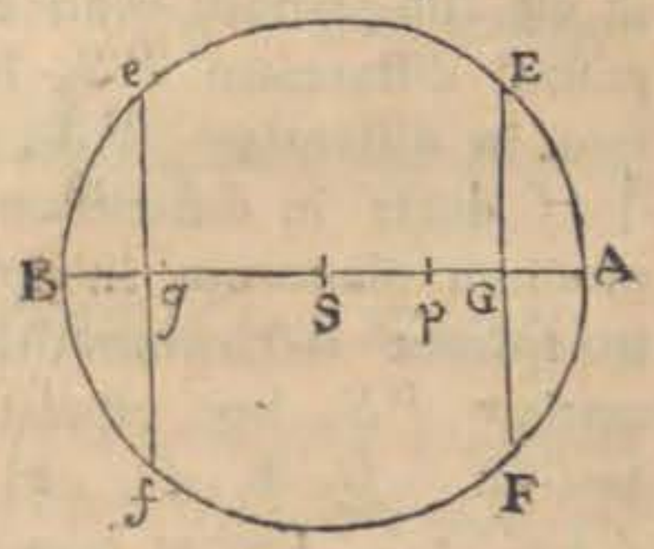
(q) * *Et ut ſphæra eadem conjunctim,* per caſ. 1.

(r) * *Et propterea proportionalis eſt diſtantiæ &c.* Si data eſt ſphæra prima trahens per caſ. 2.

DE MOTU CORPORUM.

*Caſ.* 4. Trahant ſphæræ ſe mutuo, & vis geminata proportionem priorem ſervabit. *Q. E. D.*

*Caſ.* 5. Locetur jam corpuſculum *p* intra ſphæram *AEBF*; & quoniam vis plani *ef* in corpuſculum eſt ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantiâ *pg*; & vis contraria plani *EF* ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantiâ *pG*; (f) erit vis ex utrâque compoſita ut differentia ſolidorum, hoc eſt, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, id eſt, ut ſumma illa ducta in *pS* diſtantiam corpuſculi à centro ſphæræ. Et ſimili argumento, attractio planorum omnium *EF*, *ef* in ſphærâ totâ, hoc eſt, attractio ſphæræ totius, eſt conjuctim ut ſumma planorum omnium, ſeu ſphæra tota, & ut *pS* diſtantiâ corpuſculi à centro ſphæræ. *Q. E. D.*




*Caſ.* 6. Et ſi ex corpuſculis innumeris *p* componatur ſphæra nova, intra ſphæram priorem *AEBF* ſita; probabitur ut prius quod attractio, ſive ſimplex ſphæræ unius in alteram, ſive mutua utriuſque in ſe invicem, erit ut diſtantia centrorum *pS*. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

*Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujuſmodi ſphæræ duæ ſe mutuo trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra ſphærarum.*

Demonſtratur ex propoſitione præcedente eodem modo,

(f) * *Erit vis ex utrâque compoſita ut differentia ſolidorum, hoc eſt, ut* $ef \times pg - EF \times pG$. Eſt autem $Sg = SG$, adeóque $pg - pG = pS + SG - pG = 2pS$; Quare cum ſit etiam $EF = ef$, erit $ef \times pg - EF \times pG = ef \times \overline{pg - pG} = 2ef \times pS = \overline{ef + EF} \times pS$. Si punctum G eſt inter p & S ſitum, vis tota erit ut $ef \times pg + EF \times pG$, & quoniam eſt ſemper $Sg = SG$, atque in hoc caſu $pg + pG = pS + SG + pG = 2pS$, ſimiliter invenietur vis tota ut $\overline{ef + EF} \times pS$.

quo propoſitio LXXVI. ex propoſitione LXXV. demonſtrata fuit. (§)

LIBER PRIMUS. PROP. LXXVIII. THEOR. XXXVIII.

*Corol.* Quæ ſuperius in propoſitionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum ſphæricorum conditionis jam deſcriptæ, & attracta corpora ſunt ſphæræ conditionis ejuſdem.

## *Scholium.*

Attractionum caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi vires centripetæ decreſcunt in duplicatâ diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroque caſu ut corpora gyrentur in conicis ſectionibus, & componentes corporum ſphæricorum vires centripetas eâdem lege, in receſſu à centro, decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis: Quod eſt notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minus elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet. Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determinare ut ſequitur.

LEM-

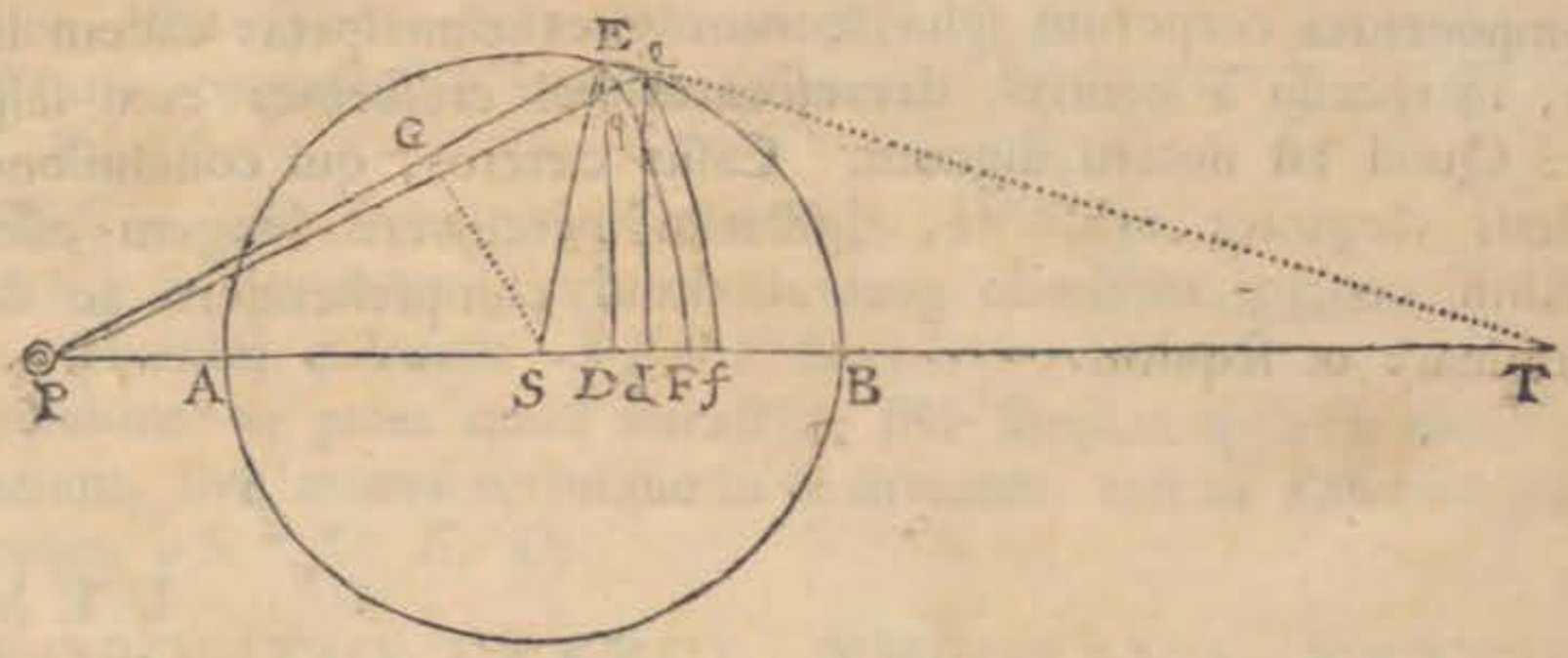
(§) Quæ in corollariis prop. 76. ubi attractio ſphæræ versùs ſphæram erat quadrato diſtantiæ centrorum reciproce proportionalis, demonſtrata ſunt, ea, mutatis mutandis, ad caſum hujus propoſitionis 78. transferri poſſunt. Nimirum ſi ejuſmodi ſphæræ complures per omnia ſimiles ſe mutuò trahant, attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt ut ſphæræ trahentes & diſtantiæ inter centra conjunctim; attractiones verò motrices ut ſphæræ attrahentes & attractæ & diſtantiæ inter centra conjunctim, eademque valent ubi attractio oritur à ſphæræ utriuſque virtute attractivâ mutuò exercitâ in ſphæram alteram.

DE MOTU CORPORUM.

## LEMMA XXIX.

*Si deſcribantur centro S circulus quilibet* AEB, *& centro* P *circuli duo* EF, ef, *ſecantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; *& ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, ſi diſtantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evaneſcentis* Dd *ad lineam evaneſcentem* Ff *ea ſit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam ſi linea *Pe* ſecet arcum *EF* in *q*; & recta *Ee*, quæ cum arcu evaneſcente *Ee* coincidit, producta occurrat rectæ *PS* in *T*; & ab *S* demittatur in *PE* normalis *SG*: ob (t) ſimilia triangula *DTE*, *dTe*, *DES*; erit *Ed* ad *Ee*, ut *DT*




ad *TE*, ſeu *DE* ad *ES*; & ob (u) triangula *Eeq*, *ESG* (per lem. VIII. & corol. 3. lem. VII.) ſimilia, erit *Ee* ad *eq* ſeu *Ff* ut *ES* ad *SG*; & ex æquo, *Dd* ad *Ff* ut *DE* ad *SG*; hoc eſt (ob ſimilia triangula *PDE*, *PGS*) ut *PE* ad *PS*. *Q. E. D.*

PRO-

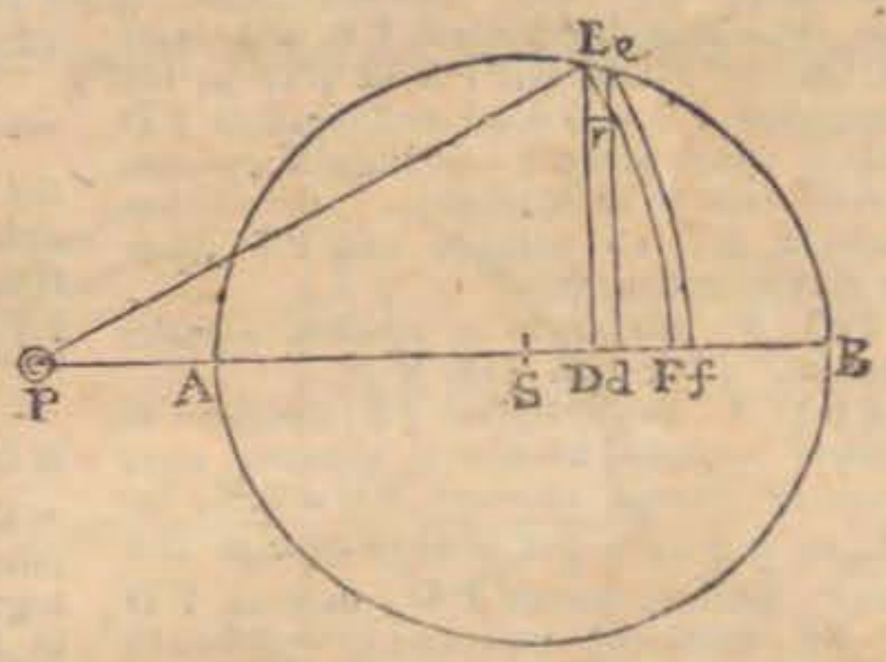
(t) * *Obſimilia triangula DTE, dTe, DES.* Ob parallelas DE, de, triangula DTE, dTe ſimilia ſunt; & quoniam recta TE circulum AEB tangit in E, erit angulus SET rectus, & proinde demiſſo ex puncto E ad baſim ST perpendiculo ED, erit triangulum DES ſimile triangulo DTE (prop. 8. Lib. 6. Elem.).

(u) * *Et ob triangula Eeq, ESG &c.* Anguli ad G & q recti ſunt & proinde æquales; & quoniam anguli PEq, SEe ſunt quoque recti & æquales, (ex naturâ circuli) detracto communi angulo SEq, anguli reſidui GES, qEe, erunt etiam æquales. Quare triangula Eeq, ESG ſunt ſimilia (prop. 4. lib. 6. Elem.).

## PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

*Si ſuperficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evaneſcens* EFfc, *convolutione ſui circa axem* PS, *deſcribat ſolidum ſphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in* P, *eſt in ratione compoſitâ ex ratione ſolidi* DE*q*×Ff, *& ratione vis quâ particula data in loco* Ff *traheret idem corpuſculum.*

Nam ſi primò conſideremus vim ſuperficiei ſphæricæ *FE*, quæ convolutione arcus *FE* generatur, & à linea *de* ubivis ſecatur in *r*; erit ſuperficiei pars annularis, convolutione arcus *rE* genita, ut lineola *Dd*, manente ſphæræ radio *PE* (uti (x) demonſtravit *Archimedes* in lib. de *Sphærâ & Cylindro.*) Et hujus vis, ſecundum lineas *PE* vel *Pr* undique in (y) ſuperficie conicâ ſitas exercita, ut hæc ipſa ſuperficiei pars annularis; hoc eſt, ut lineola *Dd*, vel, quod perinde eſt, ut rectangulum ſub dato ſphæræ radio *PE* & lineola illa *Dd*: at ſecundum lineam *PS* ad centrum *S* tendentem minor in ratione *PD* ad *PE*, (z) ideoque ut *PD*×*Dd*. Dividi jam intelliga-

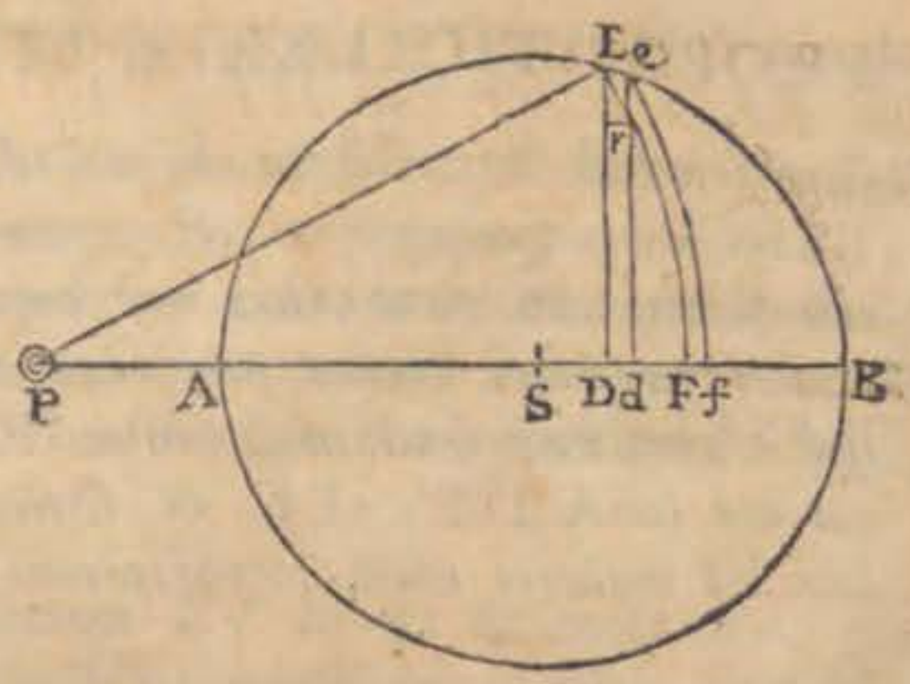



(x) 518. *Uti demonſtravit Archimedes &c.* Facilis eſt demonſtratio. Quoniam enim angulus PEr rectus eſt (ex naturâ circuli) erit angulus DEr æqualis angulo DPE, ob ſummam angulorum DPE+PED recto PEr æqualem. Undè ſi ex puncto r in lineam DE demiſſum intelligatur perpendiculum quod æquale erit lineæ Dd, conſtituetur triangulum evaneſcens ſimile triangulo EPD, eritque adeò $DE:PE=Dd:Er=\frac{PE\times Dd}{DE}$, ſed (515) zona circularis convolutione arcûs rE genita, eſt ut rectangulum rE×DE; Quare ſi in hoc rectangulo loco rE ſubſtituatur valor ipſius modò inventus, erit zona ut PE×Dd, hoc eſt, ob datum radium PE, ut Dd. Q. E. D.

(y) * *In ſuperficie conicâ.* Nam in convolutione puncti E, linea PE ſuperficiem conicam deſcribit.

(z) * *Ideóque ut PD×Dd.* Nam ſi vis ſecundum directionem PE agens per lineam PE exponatur, vis illius pars quæ agit

DE MOTU CORPORUM.




tur linea $DF$ in particulas innumeras æquales, quæ ſingulæ nominentur $Dd$; & ſuperficies $FE$ dividetur (a) in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut ſumma omnium $PD \times Dd$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}PFq - \frac{1}{2}PDq$, ideoque ut (b) $DE$ *quad.* Ducatur jam ſuperficies $FE$ in altitudinem $Ff$; & fiet ſolidi $EFfe$ vis exercita in corpuſculum $P$ ut $DEq \times Ff$: putâ ſi detur vis quam particula aliqua data $Ff$ in diſtantia $PF$ exercet

agit ſecundùm directionem PS, exponetur per lineam PD; erit PE ad PD ut rectangulum PE × Dd ad rectangulum PD × Dd, quod proindè vim illam ſecundùm directionem PD exhibebit, vires autem obliquæ ED ab utráque axis PB parte ſe mutuò deſtruunt.

(a) * *Dividetur in totidem æquales annulos.* (Per not. 518.).

(b) * *Et ſuperficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut ſumma omnium PD × Dd, hoc eſt, ut* $\frac{1}{2}PFq - \frac{1}{2}PDq$, *ideoque ut DE quad.* Scilicet omnes PD, dum ex PD in PF mutantur uniformiter creſcendo progreſſionem Arithmeticam faciunt, quoniam omnes particulæ Dd quibus lineæ PD ſucceſſive augentur ſunt æquales: ergo omnium PD ſumma eâ ratione invenitur quâ ſummæ progreſſionum Arithmeticarum obtinentur, nempe primum & ultimum progreſſionis terminum ſimul junctos multiplicando per numerum terminorum progreſſionis, & dimidium facti ſumendo; Progreſſionis verò hujuſce primus terminus eſt PD, ultimus PF numerus vero terminorum DF, ſiquidem DF eſt ſumma incrementorum æqualium evaneſcentium lineæ PD, ergo ſumma omnium PD eſt $\frac{\overline{PF+PD} \times DF}{2}$ ſive (quia DF eſt differentia linearum PF & PD) eſt ſumma omnium $PD = \frac{\overline{PF+PD} \times \overline{PF-PD}}{2}$ ſed (per 6. 2. Elem.) factum ſummæ & differentiæ duarum linearum æquatur differentiæ quadratorum ipſorum, ergo $\frac{\overline{PF+PD} \times \overline{PF-PD}}{2} = \frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$ & ſumma omnium $PD \times Dd = \frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2 \times Dd$, ſed Dd eſt particula quæ in omnibus hiſce caſibus ut eadem aſſumitur, ergo vires totius ſuperficiei FE quæ ſunt ut ſumma omnium PD × Dd ſunt ut $\frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$ ſive ut $PF^2 - PD^2$ ſed $PF^2$ eſt æquale $PE^2$ per conſtr. & $PE^2 - PD^2 = DE^2$ (per 47. 1. El.) ergo vires ſuperficiei FE, ſunt ut $DE^2$. Q. E. D.

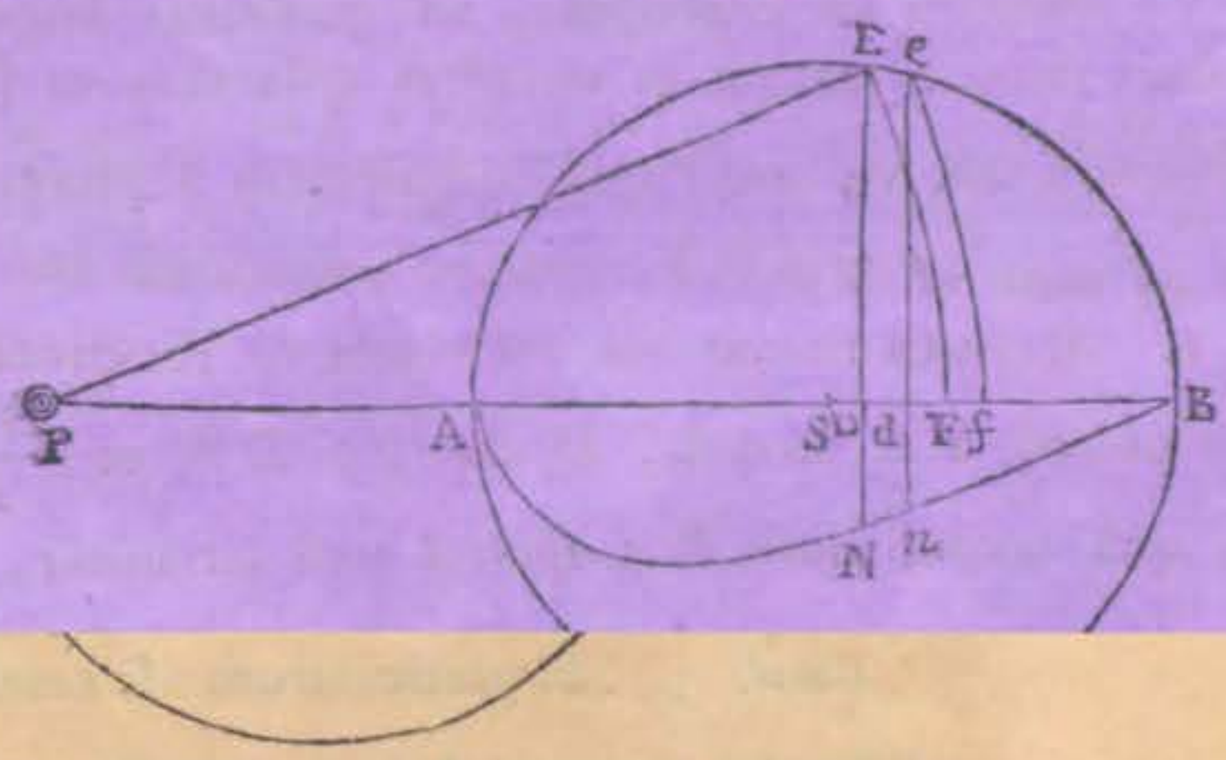
Idem aliter. Sit radius datus $PE = a$, variabilis $FD = x$, erit fluxio $Dd = dx$, & $PD = a - x$, atquè adeò $PD \times Dd = adx - xdx$, & ſumptis utrinque fluentibus (165) S. $PD \times Dd = ax - \frac{1}{2}xx = \frac{2ax - xx}{2} = \frac{DE^2}{2}$, (prop. 13. lib. 6. Elem.). Quarè vis ſuperficiei convolutione arcûs FE genitæ erit ut $DE^2$.

cet in corpuſculum *P*. (c) At ſi vis illa non detur, fiet vis ſolidi *EFfe* ut ſolidum $DEq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*



## PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

*Si ad ſphæræ alicujus* ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad ſphæræ axem* AB, *in quo corpuſculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis ſingulis* D *perpendicula* DE, *ſphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitas* $\frac{DE^{o} \times PS}{PE}$ *& vis, quam ſphæræ particula ſita in axe ad diſtantiam* PE *exercet in corpuſculum* P, *conjunctim: dico quod vis tota, quâ corpuſculum* P *trahitur verſus ſphæram, eſt ut area* ANB *comprehenſa ſub axe ſphæræ* AB, *& lineâ curvâ* ANB, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*




Etenim ſtantibus quæ in lemmate & theoremate noviſſimo

(c) * *At ſi vis illa non detur &c.* Zona convolutione arcûs E genita ducatur in datam altitudinem F f, & erit annuli ſolidi inde geniti vis ſecundum lineam PE undique exercita ut hic ipſe annulus & vis lineolæ F f conjunctim, hoc eſt, ſi vis lineolæ F f dicatur *V*, ut $PE \times Dd \times Ff \times V$ (518). At vis annuli ſecundum lineam PS minor erit in ratione PD ad PE, ideòque erit ut $PD \times Dd \times Ff \times V$. Et quoniam variante ED, manet factum $Ff \times V$ quod nimirum vis *V* in ſingulis particulis datis F f, æqualis ſupponatur; Si ſumantur fluentes, ut ſupra, erit vis tota ſolidi EFfe, in corpuſculum P ſecundùm lineam PS exercita ut $DE^{2} \times Ff \times V$.

DE MOTU CORPORUM.

constucta sunt, concipe axem sphæræ $AB$ dividi in particulas innumeras æquales $Dd$ & sphæram totam dividi in totidem laminas sphæricas concavo-convexas $EFfe$; & erigatur perpendiculum $dn$. Per theorema superius vis, quâ lamina $EFfe$ trahit corpusculum $P$, est ut $DEq \times Ff$ & vis particulæ unius ad distantiam $PE$ vel $PF$ exercita conjunctim. Est autem (per lemma novissimum) $Dd$ ad $Ff$ ut $PE$ ad $PS$, & inde $Ff$ æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale $Dd$ in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ est ut $Dd$ in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad distantiam $PF$ exercita conjunctim, hoc est (ex hypothesi) ut $DN \times Dd$, seu area evanescens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus $P$ exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc est, sphæræ vis tota ut area tota $ANB$. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiis, & fiat $DN$ ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$; erit vis tota, quâ corpusculum à sphæra attrahitur, (d) ut area $ANB$.

*Corol.* 2. Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut distantia corpusculi à se attracti, & fiat (e) $DN$ ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$; erit vis, quâ corpusculum $P$ à sphærâ totâ attrahitur, ut area $ANB$.

*Corol.* 3. Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut cubus distantiæ corpusculi à se attracti, & fiat $DN$ ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$; erit vis, quâ corpusculum à totâ sphærâ attrahitur, ut area $ANB$.

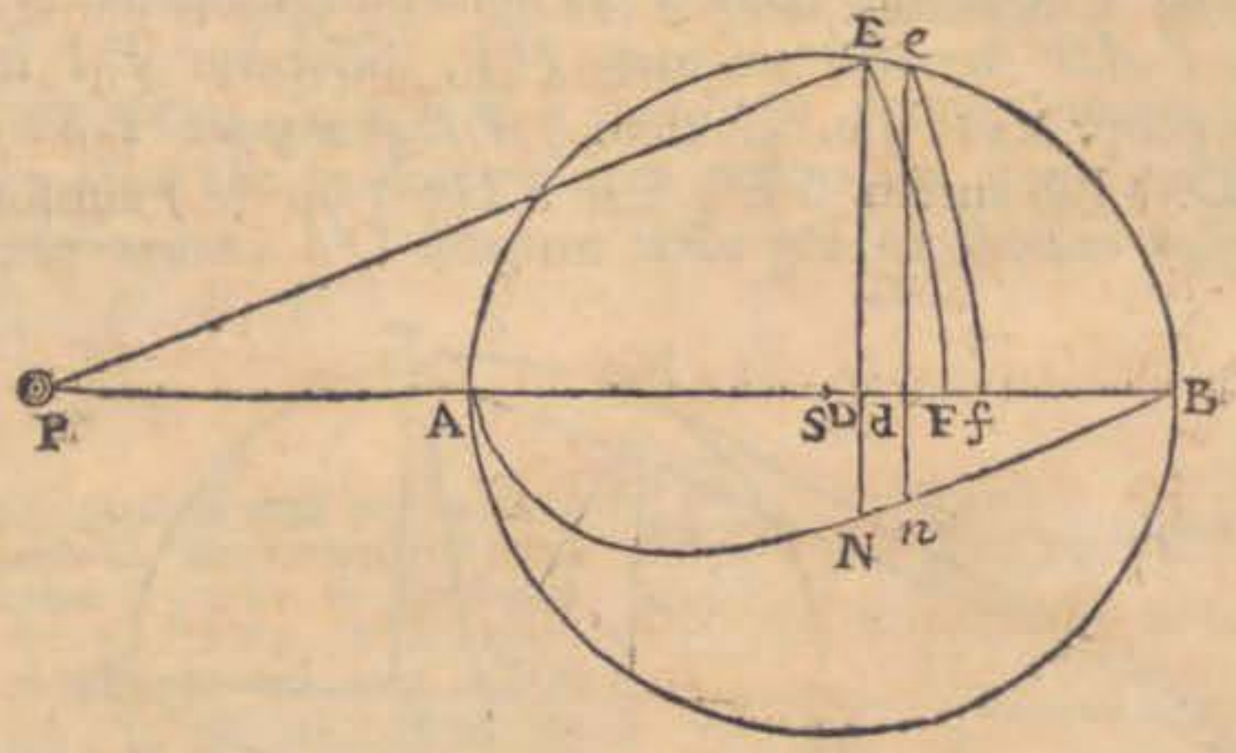
*Co-*

(d) * *Ut area ANB.* Nulla enim habenda est ratio vis particulæ Ff quæ eadem in omnibus distantiis manet ex hyp.

(e) * *Fiat DN &c.* Substitutâ quantitate $\frac{1}{PE}$ loco vis particulæ Ff.

*Corol.* 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens ponatur esse reciprocè ut quantitas V, fiat






autem $DN$ ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis, quâ corpusculum à sphærâ totâ attrahitur, ut area $ANB$.

quartum propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ $DN$, resolvet sese in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PF \times V} - \frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro $PE$ medium proportionale inter $PS$ & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, (h) quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt. *Q. E. F.*

*Exem-*

(h) 519. *Quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt.* Sint variabiles $PE=z$, $LD=x$, adeoque $Dd=dx$, sint constantes $PA=a$, $PB=b$, $PS=c$, & $LS=m$, $LA=p$, $LB=q$, & erit areæ AND fluxio $DN \times dx$ ut $\frac{2mcxdx}{zV} - \frac{cxxdx}{zV} - \frac{pqcdx}{zV}$: quoniam verò $PE^2$ $(zz) = 2PS \times LD$ $(2cx)$, est $x = \frac{zz}{2c}$ & $dx = \frac{2dz}{c}$, quibus valoribus loco $x$ & $dx$ in formula substitutis illa in hanc mutatur $\frac{mz^2dz}{cV} - \frac{z^4dz}{4c^2V} - \frac{pqdz}{V}$.

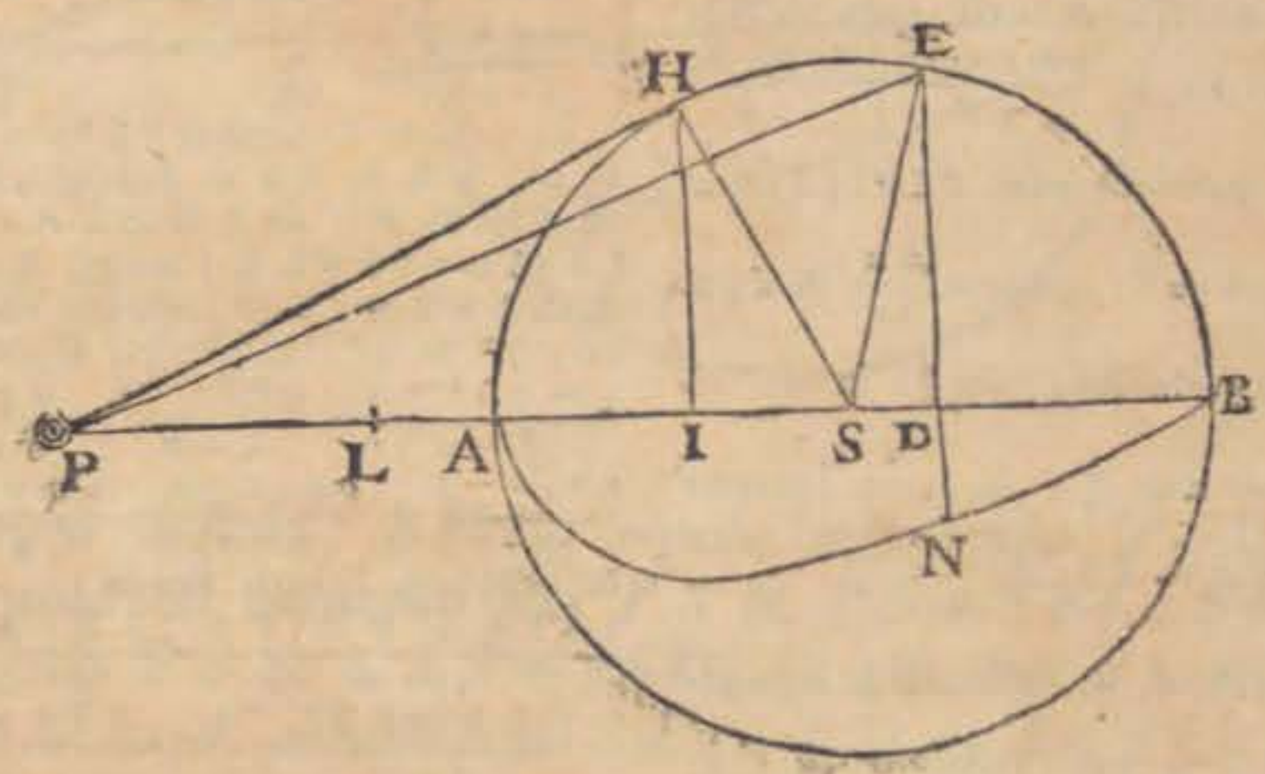
Sit vis attractiva ut distantiæ $z$ dignitas $\frac{1}{z^n}$ erit $V=z^n$, quo valore loco $V$ in formulâ posito, fiet $DN \times dx$ ut $\frac{mz^{2-n}dz}{c} - \frac{z^{4-n}dz}{4c^2} - pqz^{-n}dz$, unde sumptis singulorum terminorum fluentibus (165) erit S. $DN \times dx$, seu area AND, ut $\frac{mz^{3-n}}{3-n \times c} - \frac{z^{5-n}}{5-n \times 4c^2} - \frac{pqz^{1-n}}{1-n} +$ *Q. constans.* Sed fluens illa evanescere debet dum fit $PE$ $(z)=PA(a)$ est ergo $Q = \frac{a^{5-n}}{5-n \times 4c^2} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{ma^{3-n}}{3-n \times c}$ ac proinde fluens accurata ubi $PE$ $(z)=PB$ $(b)$ erit $\frac{mb^{3-n}}{3-n \times c} - \frac{b^{5-n}}{5-n \times 4c^2} - \frac{pqb^{1-n}}{1-n} + \frac{a^{5-n}}{5-n \times 4c^2} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{ma^{3-n}}{3-n \times c}$:

520. Cum sit semper $PE^2=2PS \times LD$; & ubi $PE$ fit $PB$ fit $LD=LB$, ubi verò $PE$ fit $PA$ fit $LD=LA$, erit $PB^2$ $(b^2)=2PS \times LB$ $(2cq)$ & $PA^2$ $(a^2)$ $=2PS \times LA$ $(2cp)$ quibus valoribus loco, $b^2$ & $a^2$ substitutis, formula fit $\frac{2mqb^{1-n}}{3-n} - \frac{q^2b^{1-n}}{5-n} - \frac{pqb^{1-n}}{1-n} + \frac{p^2a^{1-n}}{5-n} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{2mpa^{1-n}}{3-n}$. & restitutis litteris figuræ $\frac{2SLB \times PB^{1-n}}{3-n} - \frac{LB^2 \times PB^{1-n}}{5-n} - \frac{ALB \times PB^{1-n}}{1-n} + \frac{AL^2 \times PA^{1-n}}{5-n} + \frac{ALB \times PA^{1-n}}{1-n} - \frac{2SLA \times PA^{1-n}}{3-n}$.

521. Cor. 1. Hinc liquet aream ANB, seu attractionem cui proportionalis est, semper posse algebraice inveniri, tribus tantum casibus exceptis in quibus est $n-1$ vel 3, vel 5, seu in quibus vis attractiva decrescit in ratione distantiæ simplici, vel triplicatá vel quintuplicatá. In his enim casibus tribus divisores $1-n$, $3-n$, $5-n$, evanescunt; sed tum fluens per logarithmos, aut quod idem est, per quadraturam hyperbolæ obtinetur, ut exemplis infrà positis patebit.

DE MOTU CORPORUM.

*Exempl.* 1. Si vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ſit reciprocè ut diſtantia; pro V ſcribe diſtantiam $PE$; dein $2PS \times LD$ pro $PEq$, & fiet $DN$ ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone $DN$ æqualem ejus duplo $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem $AB$ deſcribet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita $LD$ ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, eâ lege ut inter movendum creſcendo vel decreſcendo æquetur ſemper longitudini $LD$, (i) deſcribet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, (†) id eſt, aream $SL \times AB$; quæ ſubducta de areâ

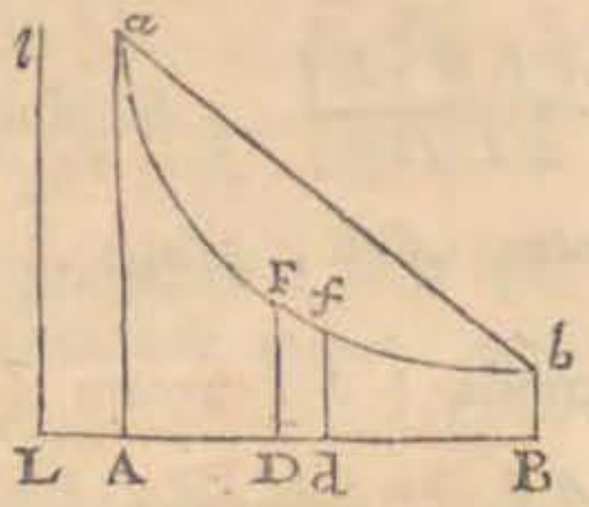



(i) 522. *Deſcribet aream* $\frac{LBq - LAq}{2}$. Area quam deſcribet erit trapezium, nam ſi à puncto L in longitudinem AB ſemper erigantur perpendicula æqualia LD, omnes terminabuntur in recta linea ducta à puncto L in terminum perpendiculi in B erecti & æquali LB, ſicque formabitur Triangulum cujus pars ſecundum AB ſita eſt area quæſita, & ea erit Trapezium cujus latera in A & B perpendicularia, inter ſe parallela ſunt, & latus puncto A inſiſtens erit æquale LA, latus verò oppoſitum in B erectum erit æquale LB, hujus ergo trapezii ſuperficies erit $\frac{LA+LB}{2} \times AB$, ſed $AB = LB - LA$, ergo per 6. 2. El. $\frac{LA+LB}{2} \times LB - LA = \frac{LB^2 - LA^2}{2}$; (quod trapezium eſt æquale Trapezio A a b B in figura Newtoniana deſcripto ut liquet per ejus figuræ conſt.).

(†) *Id eſt, aream* $SL \times AB$, cum enim hæc area

ſit

priore $2SL \times LAB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$, ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream hyperbolicam; quæ subducta de areâ $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam $ANB$. Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta $L$, $A$, $B$ erige perpendicula $Ll$, $Aa$, $Bb$, quorum $Aa$ ipsi $LB$, & $Bb$ ipsi $LA$ æquetur. Asymptotis $Ll$, $LB$ per puncta $ab$ describatur hyperbola $ab$. Et acta chorda $ba$ claudet aream $aba$ areæ quæsitæ $ANB$ æqualem.



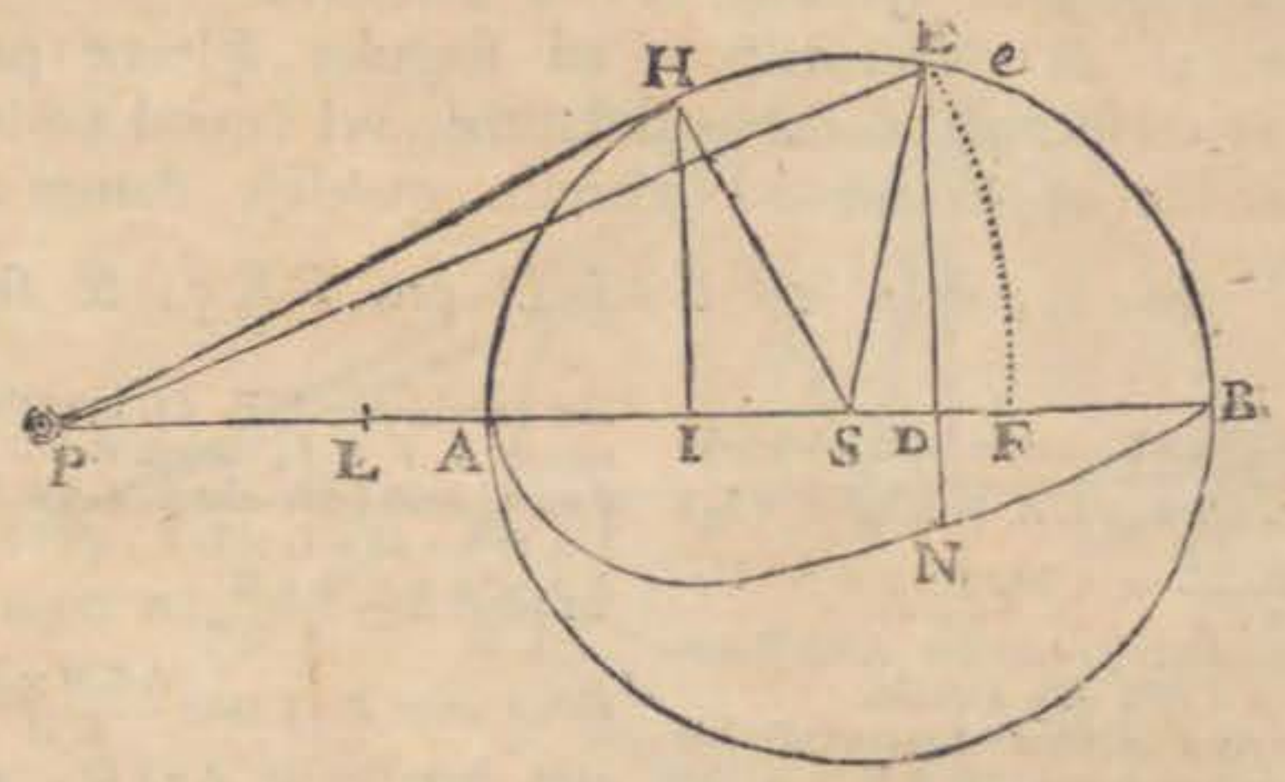

*Exempl.* 2. Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciprocè ut cubus distantiæ, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE\ cub.}{2ASq}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro $PEq$; & fiet $DN$ sit $= \frac{LA+LB}{2} \times AB$, sitque $LB = LA + 2AS$ erit $LA + LB = 2LA + 2AS = 2LS$ unde $\frac{LA+LB}{2} \times AB = LS \times AB$. Unde etiam sequitur Trapezium $AabB$ rectangulo $LS \times AB$ esse æquale.

Cæterum per methodos vulgares casus iste sequenti ratione solvitur. Sit $AD = x$, $Dd = dx$ erit areæ $AND$ fluxio $DN \times Dd = 2SL \times dx - LA \times dx - x\,dx - \frac{ALB \times dx}{LD}$. Primi termini $2SL \times dx$, fluens (165) est $2SL \times x = 2SL \times AB$, ubi $AD$, seu $x = AB$. Secundi termi $LA \times dx + x\,dx$, fluens est $LA \times x + \frac{1}{2}xx = \frac{2LA+AB \times AB}{2} = LS \times AB$, quandò $x$, seu $AD$, fit $AB$. Quare duorum priorum terminorum fluens est $2SL \times AB - SL \times AB$ sive $SL \times AB$. Jam ut tertii termini $\frac{ALB \times dx}{LD}$ fluens inveniatur describatur hyperbola $AB$, prout Newtonus præscribit, & super asymptoto $LB$ erigantur perpendicula duo infinitè propinqua, $DF$, $df$, hyperbolæ occurrentia in $F$ & $f$, sitque $AD = x$, $Dd = dx$, & erit (per theor. 4. de hyperbolâ) $LA \times Aa = LD \times DF$, adeóque $DF = \frac{LA \times Aa}{LD} = \frac{ALB}{LD}$, & $DF \times Dd$, seu fluxio areæ $AaFD = \frac{ALB \times dx}{LD}$. Quarè area hyperbolicâ $AaFD$, æqualis est fluenti tertii termini, & area hyperbolica $AabB$, est ejusdem termini fluens, ubi $x$, seu $AD = AB$. Hæc igitur subducta de rectangulo $SL \times AB$, sive de trapezio $AabB$ ipsi æquali, relinquet aream quæsitam $ANB$. Relinquitur autem area $aFba$; undè patet constructio.

523. Cor. 1. Si distantia corpusculi $P$ à sphærâ evanescat, erit $Bb = LA = o$ ideoque hyperbola $AFb$ cum suis asymptotis $Ll$, $LB$ congruet nullaque erit ejus area. Quarè corpusculo posito in $A$, seu in contactu sphæræ attractio erit ut rectangulum $SL \times AB = 2AS^2$, ut etiam demonstrari posset eodem modo ac demonstrata fuit Prop. 72.

DE MOTU CORPORUM.

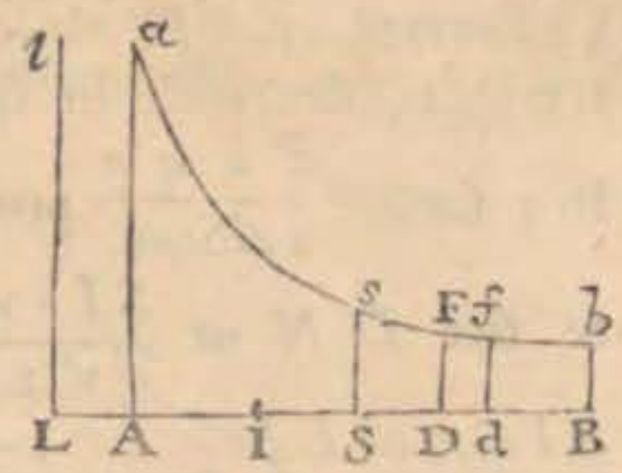
ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id (k) est (ob continuè proportionales $PS$, $AS$, $SI$) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem $AB$, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream hyperbolicam; secunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id est $\frac{1}{2}AB \times SI$. De primâ subtractâ




524. Cor. 2. Vis quâ corpusculum P, versùs portionem sphæræ convolutione superficiei A E F, genitam trahitur est ut $LB - \frac{1}{2}x \times x - AaFD$; Nam (per not. 522.) vis illa est ut $2SL \times x - LA \times x - \frac{1}{2}xx - AaFD$, & $2SL = 2LA + 2AS$ & $2SL - LA = LA + 2AS = LB$, unde vis illa est $LB - \frac{1}{2}x \times x - AaFD$; sed P posito in contactu sphæræ est $LB = AB$ & areâ hyperbolicâ evanescit, vis ergo fit in contactu $AB - \frac{1}{2}x \times x$, sive $AB - \frac{1}{2}AD \times AD$.

525. Cor. 3. Quoniam attractio corpusculi P versùs sphæram totam est ut $SL \times AB - AabB$, ejusdem attractio versùs portionem sphæræ convolutione superficiei F E e B (fig. prop. 80.) genitam, erit ut $SL \times AB - LB \times x + \frac{1}{2}xx + AaFD - AabB = SL \times AB - LB \times AD + \frac{1}{2}AD^2 - DFbB$, sive substitutis $LA + \frac{1}{2}AB$ pro $SL$, $LA + AB$ loco $LB$, & pro $AB - AD$ posito $BD$ fiet ut $LA + \frac{1}{2}BD \times BD - DFbB$, & corpusculo in contactu posito, erit ut $\frac{1}{2}BD^2$.

(k) * *Id est, ob continuè proportionales* &c. Per prop. 8. l. 6. El. unde $AS^2 = PS \times SI$.




ducatur ſumma ſecundæ & tertiæ, & manebit area quæſita $ANB$. (1) Unde talis emergit problematis conſtructio. Ad puncta $L$, $A$, $S$, $B$ erige perpendicula $Ll$, $Aa$, $Ss$, $Bb$, quorum $Ss$ ipſi $SI$ æquetur, perque punctum $s$ aſymptotis $Ll$, $LB$ deſcribatur hyperbola $asb$ occurrens perpendiculis $Aa$, $Bb$ in $a$ & $b$; & rectangulum $2ASI$ ſubductum de area hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæſitam $ANB$.

*Exem-*

(1) 526. * *Unde talis emergit problematis conſtructio.* Sit, ut ſuprà $AD=x$, $Dd=dx$, erit areæ $AND$, fluxio $DN\times Dd$, ut $\frac{LSI\times dx}{LD}-\frac{1}{2}SI\times dx-\frac{ALB\times SI\times dx}{2\overline{LA+x}^2}$.

Jam ut primi termini $\frac{LSI\times dx}{LD}$, fluens habeatur, deſcribatur hyperbola $aSb$, eo modo quo jubet Newtonus, erectiſque perpendiculis $DF$, $df$, ſit $AD=x$, $Dd=dx$, & quoniam (per theor. 4. de hyperbolâ) $LS\times SI=LD\times DF$, erit $DF=\frac{LSI}{LD}$, & $DF\times Dd=\frac{LSI\times dx}{LD}$. Patet igitur (ut in not. 522.) aream Hyperbolicam $AasbB$, æqualem eſſe fluenti primi termini, dum $AD$ ſeu $x=AB$; ſecundi termini $\frac{1}{2}SI\times dx$, fluens eſt $\frac{1}{2}SI\times AD=\frac{1}{2}SI\times AB$, dum fit $AD=AB$; tertii tandem termini fluens hoc modo invenitur. Quantitatis $\frac{dx}{(LA+x)^2}$ fluens (165) eſt $-\frac{1}{LA+x}+Q$ *conſtans*; & quoniam fluens illa evaneſcere debet ubi $x=0$, erit $Q=\frac{1}{LA}$. Quarè fluens accurata! eſt $\frac{1}{LA}-\frac{1}{LD}=\frac{1}{LA}-\frac{1}{LB}$, ubi $x=AB$. Eſt igitur tertii termini $\frac{1}{2}ALB\times SI\times\frac{dx}{\overline{LA+x}^2}$ fluens $=\frac{ALB\times SI}{2LA}-\frac{ALB\times SI}{2LB}=\frac{1}{2}LB\times SI-\frac{1}{2}LA\times SI=\frac{1}{2}AB\times SI$, undè ſumma $2^i$ & $3^i$ termini eſt $AB\times SI=2AS\times SI$. Quarè rectangulum $2ASI$ ſubductum de aream hyperbolicâ $AasbB$ relinquet aream quæſitam $ANB$.

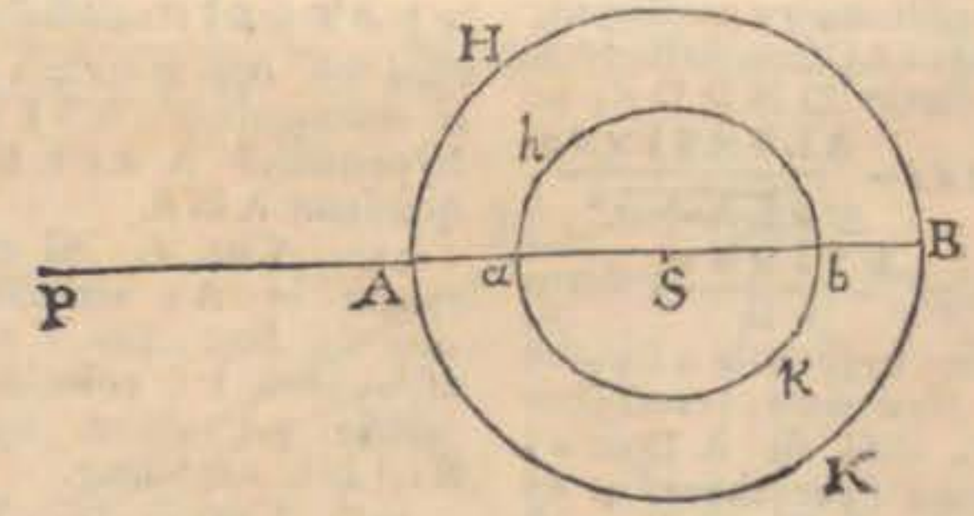
527. Cor. 1. Si corpus P ſphæram tangat in A, attractio evadet infinita, nam in hoc caſu $LA=0$ & $Aa$ cum aſymptoto $Ll$ coincidit, ac proindè attractio per aream hyperbolæ infinitam $BLlasb$ exponitur.

528. Coroll. 2. Vis quâ corpuſculum P in ſphæræ portionem convolutione ſuperficiei $AEF$, genitam trahitur, eſt ut $AaFD-\frac{1}{2}SI\times AD-\frac{1}{2}LB\times SI+\frac{ALB\times SI}{2LD}$, ut ex notâ 526. manifeſtum eſt. Quarè in contactu ubi $LA=0$, erit vis illa ut area infinita $AaFD$, cujus reſpectu aliæ finitæ quantitates evaneſcunt.

529. Cor. 3. Et quoniam corpuſculi P attractio in ſphæram totam eſt ut area hyperbolica $AasbB-2ASI$, ejuſdem attractio versùs portionem concavo convexam, convolutione ſuperficiei $FEeB$, genitam, erit ut $AasbB-AaFD-2ASI+\frac{1}{2}AD\times SI+\frac{1}{2}LB\times SI-\frac{ALB\times SI}{2LD}=DFbB+\frac{1}{2}\overline{LA-\frac{1}{2}BD}\times SI-\frac{ALB\times SI}{2LD}$, ponendo $AB$ pro $2AS$, $\frac{1}{2}LA+\frac{1}{2}AB$ pro $\frac{1}{2}LB$, & $\frac{1}{2}BD$ pro $\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}AD$.

DE MOTU CORPORUM.

*Exempl.* 3. Si vis centripeta, ad ſingulas ſphæræ particulas tendens, decreſcit in quadruplicatâ ratione diſtantiæ à particulis; ſcribe $\frac{PEqq}{2ASc\overline{ub.}}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ (m) pro $PE$, & fiet $DN$ ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2}SI} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2}SI} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2}SI} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$. (n) Cujus tres partes ductæ ſin longi-



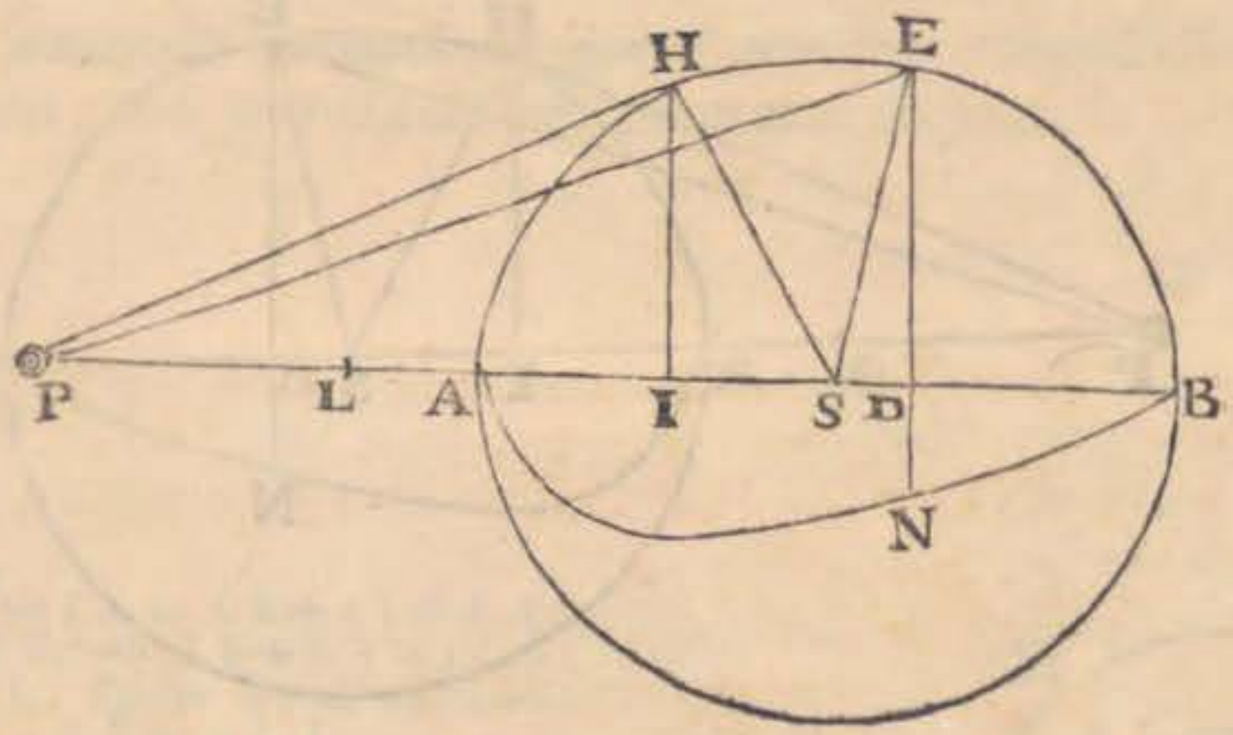

530. Cor. 4. Simili modo inveniri poteſt vis quâ corpus P trahitur versùs ſphæram concavam A a H B K a, ſi ex attractione in ſphæram totam ſolidam detrahatur attractio in ſphæram interiorem a h b k. Patet autem corpuſculi P in A, ſeu in contactu poſiti attractionem versùs ſphæram cavam A a H B K a, interiori concentricam, infinitam eſſe; Nam ſi ex vi infinitâ quâ versùs ſphæram ſolidam A H B K S, trahitur, ſubducatur vis finita quâ versùs ſphæram interiorem a h b k s urgetur, relinquetur attractio infinita versùs ſphæram concavam A a H B K a; quin imò, ſi ex ſphærâ concavâ detrahatur pars quævis à contactu remota ut H h B K k, attractio corpuſculi in contactu A poſiti versùs reſiduam H h A a K k, adhuc infinita erit, ut patet (per cor. 2. & 3.).

(m) * *Pro PE.* Erit $PE^5 = 4PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2PS \times LD}$, & $AS^3 = PS \times SI \times \sqrt{PS \times SI}$. Undè fiet $\frac{SI\,D \times PS}{PE \times V} = \frac{4SLD \times PS \times AS^3}{PE^5} = \frac{4SL \times LD \times PS^2 \times SI\sqrt{PS \times SI}}{4PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2PS \times LD}} = \frac{SL \times SI\sqrt{SI}}{LD\sqrt{2}LD} - \frac{SL \times SI^2}{LD\sqrt{2}SI \times LD} = \frac{SI^2 \times SL}{2\sqrt{2}SI} \times \frac{1}{\sqrt{LD^3}}$. Et ità de cæteris terminis.

(n) * *Cujus tres partes &c.* Sit $AD = x$ fluxio $AD = dx$, & erit areæ A N D fluxio $DN \times dx$, ut $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2}SI} \times \frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{3}{2}}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2}SI} \times \frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{1}{2}}} - \frac{SI^2 \times ALB}{2\sqrt{2}SI} \times \frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{5}{2}}}$, quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{3}{2}}}$, ſeu $\overline{LA+x}^{-\frac{3}{2}}\,dx$ fluens eſt

LA

longitudinem $AB$, producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$ LIBER PRIMUS. PROP. LXXXI. PROBL. XLI.



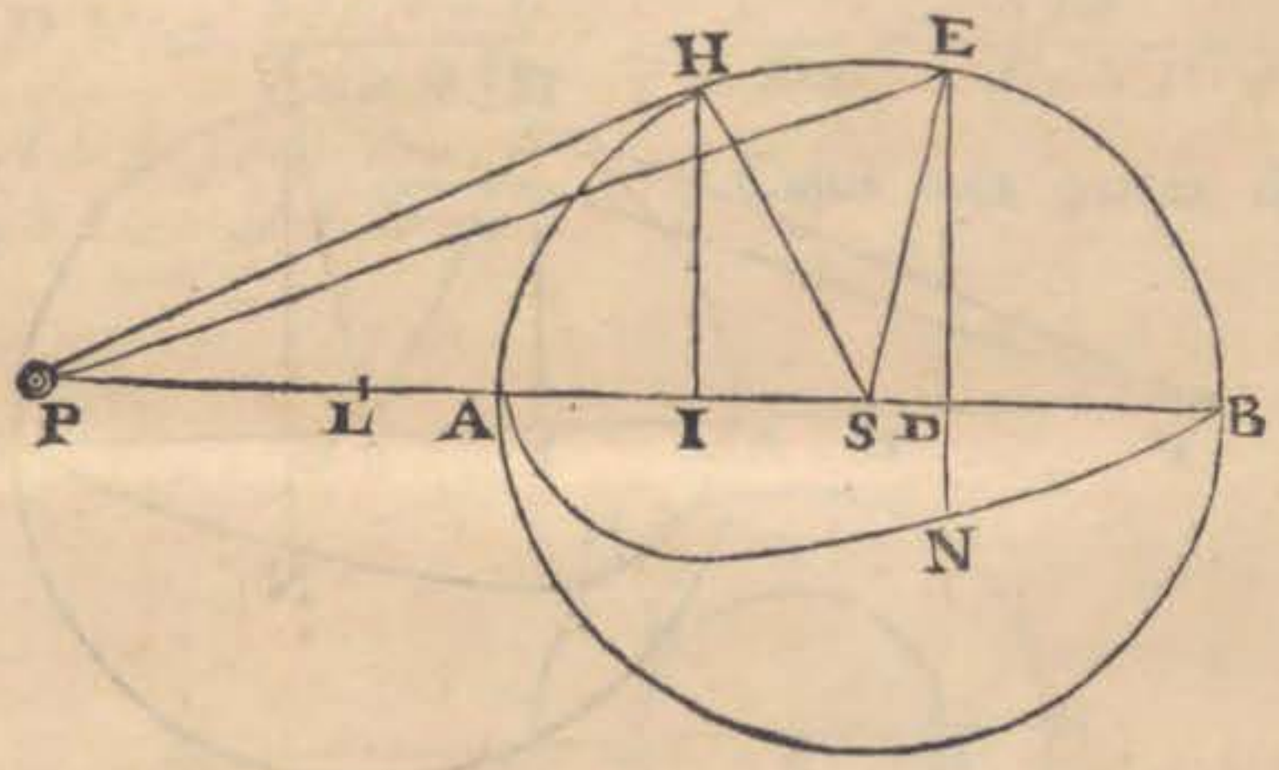

in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in $\sqrt{LB - \sqrt{LA}}$; & $\frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}}$ in

$\frac{-2}{LA+x^{\frac{1}{2}}} + Q$ *conſt.* (165) quæ evanescere debet ubi $x = 0$; Quare erit $Q = \frac{2}{\sqrt{LA}}$, & fluens accurata $= \frac{2}{\sqrt{LA}} - \frac{2}{\sqrt{LB}}$, dum fit $x = AB$. Primi igitur termini fluens erit $\frac{2SI \times SL}{\sqrt{2SI}}$, in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$. Quantitatis $\frac{dx}{LA+x^{\frac{1}{2}}}$, fluens eſt $2(LA+x)^{\frac{1}{2}} + Q$ *conſt.* & factâ $x = 0$, invenitur $Q = -2\sqrt{LA}$; quare fluens accurata eſt $2\sqrt{LB} - 2\sqrt{LA}$, dum $x = AB$. Secundi igitur termini fluens erit $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}}$, in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$.

Quantitatis $\frac{dx}{LA+x^{\frac{5}{2}}}$, fluens eſt $\frac{-2}{3(LA+x)^{\frac{3}{2}}} + Q$, & $Q = \frac{2}{3\sqrt{LA^3}}$, undè fluens integra erit $\frac{2}{3\sqrt{LA^3}} - \frac{2}{3\sqrt{LB^3}}$, ubi $x = AB$, & proindè tertii termini fluens eſt $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA^3}} - \frac{1}{\sqrt{LB^3}}$,

DE MOTU CORPORUM.

in $\frac{1}{\sqrt{LA\ cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB\ cnb.}}$. Et (°) hæ poſt debitam re-




ductionem fiunt $\frac{2\,SI\,q \times SL}{LI}$, $SI\,q$, & $SI\,q + \frac{2\,SI\,cub.}{3\,LI}$. Hæ vero, ſubductis poſterioribus de priore, evadunt $\frac{4\,SI\,cub.}{3\,LI}$. Proin-

(o) * *Et hæ poſt debitam reductionem &c.* Eſt $PS \times SI = AS^2$ (per prop. 8. Lib. 6. Elem.) ſed $PS = LS + LI$, ob $PL = LI$, (per conſtr.) & $SI = LS - LI$, ergò $PS \times SI = LS^2 - LI^2 = AS^2$, & hinc $LI^2 = LS^2 - AS^2 = \overline{LS + AS} \times \overline{LS - AS} = LB \times LA$. Quarè LI ſive $LS - LI = \sqrt{LA \times LB}$, & $2LS - 2SI = 2\sqrt{LA \times LB}$, & $2SI = 2LS - 2\sqrt{LA \times LB} = LB - 2\sqrt{LB \times LA} + LA$, & extractâ utrinque radice quadratâ $\sqrt{2SI} = \sqrt{LB} - \sqrt{LA}$. His poſitis, facilis eſt terminorum reductio; erit enim $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}} = \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{\sqrt{LB \times LA}} = \frac{\sqrt{2SI}}{LI}$. Quarè patet primum fluentis terminum eſſe $\frac{2SI^2 \times SL}{LI}$; ſecundum verò eſſe $SI^2$. Tertius terminus, reductione ad communem denominatorem factâ, eſt $\frac{SI^2 \times LA \times LB}{3\sqrt{2SI}} \times \frac{\sqrt{LB^3} - \sqrt{A^3}}{LA \times LB\sqrt{LA \times LB}}$. $= \frac{SI^2 \times \sqrt{LB^3} - \sqrt{LA^3}}{3LI \times \sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$. Peractâ divisione invenitur $\frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} = LB +$

LB

Proinde vis tota, quâ corpuſculum $P$ in ſphæræ centrum trahitur, eſt ut $\frac{SI\,cub.}{PI}$, (p) id eſt, reciprocè ut $PS\,cub. \times PI$. *Q. E. I.*

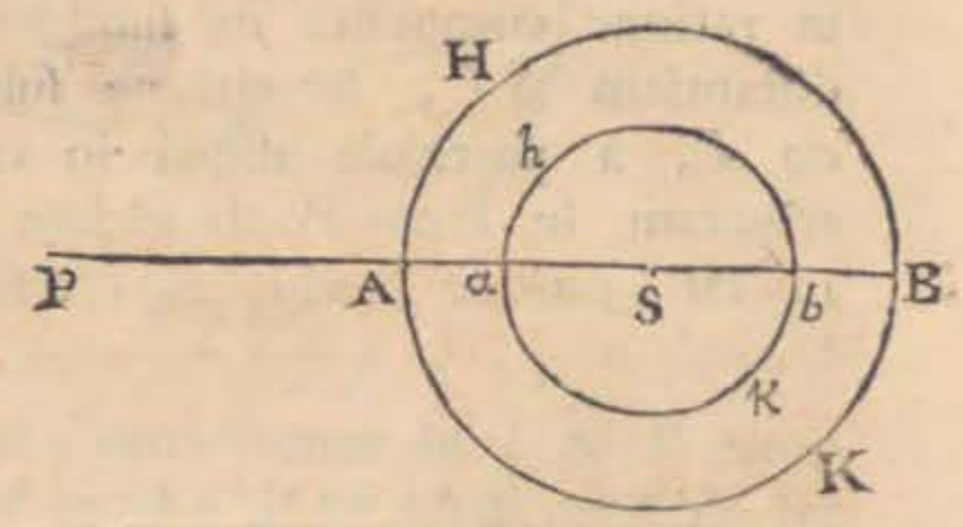
Eâdem methodo determinari poteſt attractio corpuſculi ſiti intra ſphæram, ſed expeditius per theorema ſequens.

PRO-

$LB^{\frac{1}{2}} \times LA^{\frac{1}{2}} + LA = LB + LI + LA = 2SI + 3LI$, ob $LB + LA = 2LS = 2SI + 2LI$. Quare tertius terminus eſt $\frac{SI^2 \times 2SI + 3LI}{3LI} = SI^2 + \frac{2SI^3}{3LI}$, unde tres fluentes ad communem denominatorem reducti fiunt $\frac{6SI^2 \times SL - SI^2 \times 3LI - SI^2 \times 3LI - 2SI^3}{3LI} = \frac{6SI^2 \times \overline{SL - LI} - 2SI^3}{3LI}$, ſed quia $SL - LI = SI$ fiunt $\frac{6SI^3 - 2SI^3}{3LI} = \frac{4}{3}\frac{SI^3}{LI}$.

(p) * *Id eſt reciprocè ut* $PS^3 \times PI$. Nam cum ſit $PS \times SI = AS^2$, ideóque $SI = \frac{AS^2}{PS}$, hinc, dato radio $AS$, eſt $SI$ ut $\frac{1}{PS}$, $SI^3$, ut $\frac{1}{PS^3}$; Eſt verò $= \frac{1}{2}PI$ ideóque etiam & $LI$ ut $PI$, unde erit $\frac{4SI^3}{3LI}$ ut $\frac{1}{PS^3 \times PI}$, neglectâ fractione $\frac{4}{3}$.

531. Cor. 1. In acceſſu corporis P ad ſphæram, ità creſcit illius attractio, ut in contactu infinita evadat, dum enim coincidit P cum A, puncta H & I cum eodem puncto A coincidunt, fitque $PI = 0$, & proindè quantitas $\frac{1}{PS^3 \times PI}$ infinita.




532. Cor. 2. Attractio corpuſculi in contactu A poſiti versùs ſphæram cavam AaHBKa, infinita eſt. Hæc enim attractio habetur, ſi ex attractione infinitâ versùs ſphæram ſolidam AHBKS, ſubducatur attractio finita versùs ſphæram interiorem ahbkS.

533. Hic adjungemus ſolutionem casûs tertii qui pendet à quadraturâ hyperbolæ, ubi nempe vis eſt ut $PE^5$ reciprocè (520). Scribe igitur $\frac{PE^5}{2AS^4}$, pro $V$; dein $8PS^3 \times LD^3$ pro $PE^6$, & $PS \times SI$ pro $AS^2$, unde eſt $\frac{PS}{PE \times V} = \frac{SI^2}{4LD^3}$ & fiet $DN$, ut $\frac{SL \times SI^2}{2LD^2} - \frac{SI^2}{4LD} - \frac{ALB \times SI^2}{4LD^3}$ ſeu, ut $\frac{SL \times SI^2}{LD^2} - \frac{1}{2}\frac{SI^2}{LD} - \frac{1}{2}\frac{ALB \times SI^2}{LD^3}$; undè fluxio $DN \times Dd$, erit ut $\frac{SL \times SI^2 \times dx}{\overline{LA + x}^2}$ —

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

*In ſphærâ centro* S *intervallo* S A *deſcriptâ, ſi capiantur* S I, S A, S P *continuè proportionales: dico quod corpuſculi intra ſphæram, in loco quovis* I, *attractio eſt ad attractionem ipſius extra ſphæram, in loco* P, *in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro* I S, P S, *& ſubduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut, ſi vires centripetæ particularum ſphæræ ſint reciprocè ut diſtantiæ corpuſculi à ſe attracti; vis, quâ corpuſculum ſitum in *I* trahitur à ſphærâ totâ, erit ad vim, quâ trahitur in *P*, in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiæ *S I* ad diſtantiam *S P*, & ratione ſubduplicatâ vis centripetæ in loco *I*, à particulâ aliquâ in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eâdem in centro particulâ oriundam, id eſt, ratione ſubduplicatâ diſtantiarum *S I*, *S P* ad invicem reci-

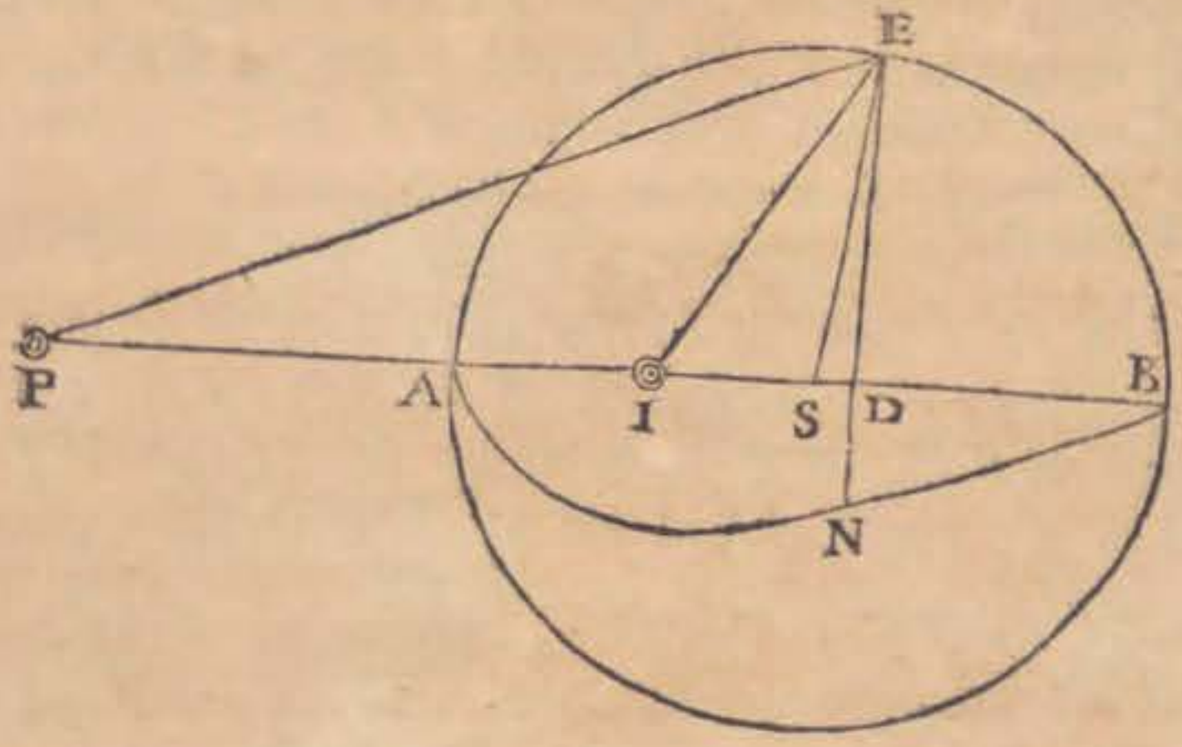
$-\frac{1}{2}\frac{SI^2\times dx}{LA+x}-\frac{1}{2}\frac{ALB\times SI^2\times dx}{\overline{LA+x}^3}$, poſitâ $AD=x$.

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^2}$, fluentem ſuprà (526) invenimus eſſe $\frac{1}{LA}-\frac{1}{LB}=\frac{LB-LA}{LA\times LB}=\frac{AB}{LI^2}$ ubi $x$ ſeu $AD=AB$. Quarè primi termini fluens erit $\frac{SL\times SI^2\times AB}{LI^2}$.

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^3}$ fluens $=\frac{-1}{2\overline{LA+x}^2}+Q$ *conſt.* quæ evaneſcere debet poſitâ $x$, ſeu $AD=0$, quarè erit $Q=\frac{1}{2LA^2}$ & fluens accurata, ubi $AD=AB$, erit $\frac{1}{2LA^2}-\frac{1}{2LB^2}=\frac{LB^2-LA^2}{2LA^2\times LB^2}=\frac{2SL\times AB}{2LI^4}=\frac{SL\times AB}{LI^4}$; undè tertii termini fluens erit $\frac{1}{2}\frac{ALB\times SI^2\times SL\times AB}{LI^4}=\frac{1}{2}\frac{SL\times SI^2\times AB}{LI^2}$, & differentia fluentium primi & tertii termini erit $\frac{1}{2}\frac{SL\times SI^2\times AB}{LI^2}$. Secundi termini $\frac{1}{2}SI^2\times\frac{dx}{LA+x}$, fluens eſt area hyperbolæ quæ ità deſcribitur. Ad puncta L, A, B, vid. (fig. exempli 2i.) erige perpendicula L l, A a, B b, & aſymptotis L l, LB, deſcribe Hyperbolam æquilateram cujus ſit dignitas $\frac{1}{2}SI^2$, & quoniam eſt (theor. 4. Hyp.) $LD\times DF=\frac{1}{2}SI^2$ ideóque $DF=\frac{1}{2}\frac{SI^2}{LD}$, erit $DF\times Dd=\frac{1}{2}\frac{SI^2\times dx}{LA+x}$ poſitâ $AD=x$. Quapropter area hyperbolica A a b B, æqualis eſt fluenti ſecundi termini ubi $AD=AB$. Hæc igitur area ſubducta de rectangulo $\frac{1}{2}\frac{SL\times SI^2\times AB}{LI^2}$ relinquet aream quæſitam A N B.

rectiprocè. Hæ duæ rationes ſubduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* à ſphærâ totâ factæ æquantur. Simili computo, ſi vires particularum ſphæræ ſunt reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum, colligetur quod attractio in *I* ſit ad attractionem in *P*, ut diſtantia *SP* ad ſphæræ ſemidiametrum *SA*: ſi vires illæ ſunt reciprocè

LIBER PRIMUS. PROP. LXXXII. THEOR. XIV.




in triplicatâ ratione diſtantiarum, attractiones in *I* & *P* erunt ad invicem ut *SP quad.* ad *SA quad.*: Si in quadruplicatâ, ut *SP cub.* ad *SA cub.* Unde cum attractio in *P*, in hoc ultimo caſu, inventa fuit reciprocè ut $PS\ cub. \times PI$, attractio in *I* erit reciprocè ut $SA\ cub. \times PI$, id eſt (ob datum *SA cub.*) reciprocè ut *PI*. Et (q) ſimilis eſt progreſſus in infinitum. Theorema verò ſic demonſtratur.

Stan-

(q) * *Similis eſt progreſſus in infinitum.* Vires centripetæ acceleratrices à particulâ aliquâ in centro poſitâ oriundæ, ſint inter ſe in diſtantiis IS, PS reciprocè ut harum diſtantiarum poteſtates $IS^n$, $PS^n$, & vis quâ corpuſculum ſitum in I trahitur à ſphærâ totâ, erit ad vim quâ trahitur in loco P ut $IS^{\frac{1}{2}}$ ad $PS^{\frac{1}{2}}$ & $PS^{\frac{n}{2}}$ ad $IS^{\frac{n}{2}}$ conjunctim, hoc eſt, ut $PS^{\frac{n-1}{2}}$ ad $IS^{\frac{n-2}{2}}$. Quarè cum ſit, (ex Hyp.) $PS:AS=AS:SI$, adeóque $IS=\frac{AS^2}{PS}$, & $IS^{\frac{n-1}{2}}=\frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$, vires illæ erunt ad invicem ut $PS^{\frac{n-1}{2}}$ ad $\frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$, ſeu ut $PS^{n-1}$ ad $AS^{n-1}$. Hinc ſi $n=1$, vires erunt in ratione æqualitatis, ſi $n=2$, erunt ut PS ad AS; Si $n=3$ ut $PS^2$ ad $AS^2$, ſi $n=4$ ut $PS^3$ ad $AS^3$, & ità porrò in infinitum.

DE MOTU CORPORUM.

Stantibus jam ante conſtructis, & exiſtente corpuſculo in loco quovis $P$, ordinatim applicata $DN$ (r) inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo ſi agatur $IE$, ordinata illa pro alio quovis corpuſculi loco $I$, (f) mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, è ſphæræ puncto quovis $E$ manantes, eſſe ad invicem in diſtantiis $IE$, $PE$, ut $PE^n$ ad $IE^n$ (ubi numerus $n$ deſignet indicem poteſtatum $PE$ & $IE$) & (t) ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem eſt ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob continuè proportionales $SI$, $SE$, $SP$, (u) ſimilia ſunt triangula $SPE$, $SEI$, & inde fit $IE$ ad $PE$ ut $IS$ ad $SE$ vel $SA$; pro ratione $IE$ ad $PE$ ſcribe rationem $IS$ ad $SA$; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. (x) Sed $PS$ ad $SA$ ſubduplicata eſt ratio diſtantiarum $PS$, $SI$; &

(r) * *Ordinatim applicata DN inventa fuit &c.* (cor. 4. prop. 80.)

(f) * *Mutatis mutandis.* Nempè corpore in I ſito, radio IE, deſcribendus arcus circuli, & in formulâ attractionis $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, loco PS & PE, ſcribe IS, & IE.

(t) * *Et ordinatæ illæ &c.* Si loco V ſcribantur $PE^n$, & $IE^n$, quæ ſunt reciprocè ut vires acceleratrices in locis P & I, (per cor. 4. prop. 80.)

(u) * *Similia ſunt triangula SPE, SEI*, per prop. 6. Lib. 6. Elem.

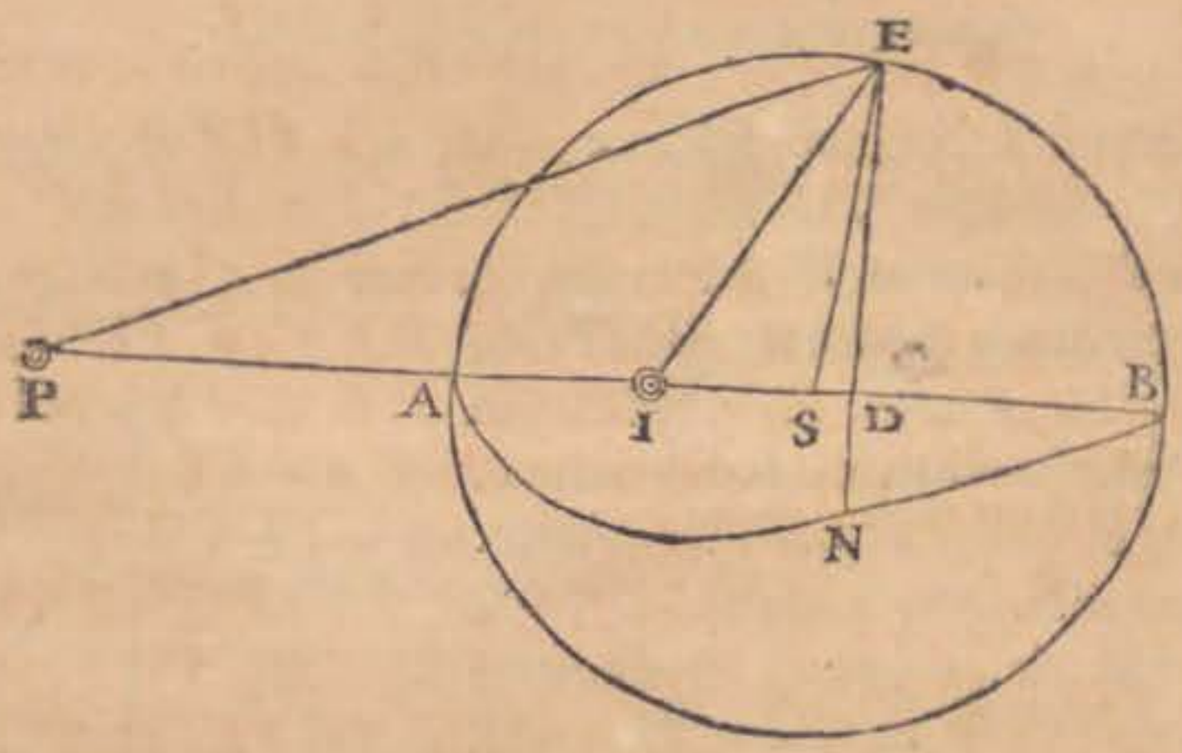
(x) * *Sed PS ad SA ſubduplicata eſt ratio diſtantiarum PS, SI*, ob continuè proportionales PS, SA, SI. Porrò vires in diſtantiis PS, IS, ſunt ad invicem ut $IS^n$, ad $PS^n$ (ex Hyp.) & $IS : PS = IS^2 : AS^2 = IE^2 : PE^2$, (ob proportionales $IE : PE = IS : AS$), atque adeò $IS^n : PS^n = IE^{2 \cdot \frac{n}{2}} : PE^{2 \cdot \frac{n}{2}}$, & $PS^{\frac{n}{2}} = IE^n : PE^n$. Quarè $IE^n$ eſt ad $PE^n$ in ratione ſubduplicatâ virium in diſtantiis PS, IS, & ordinatarum ratio $PS \times IE^n$, ad $SA \times PE^n$ æqualis eſt rationi $PS^{\frac{1}{2}} \times IS^{\frac{n}{2}}$, ad $IS^{\frac{1}{2}} \times PS^{\frac{n}{2}}$.

534. Scholium. Iiſdem poſitis quæ in prop. 81. ſi centro I radio IA ſphæra ACMD deſcripta ſit, vis quâ corpuſculum in I ſitum à totâ ſphærâ majore AHBK versùs centrum S trahitur, æqualis eſt vi quâ ſubductâ ſphæra minore ACMD traheretur. Nam corpuſculum in centro I ſphæræ ACMD poſitum, æqualiter undiquè ab hujus ſphæræ minoris partibus trahitur.

535. Cor. 1. Si centro S radio SI deſcripta ſit ſphæra Ihbk, & vis centripeta in receſſu corporis attracti decreſcat in triplicatâ ratione diſtantiarum à particulis materiæ trahentibus, corpuſculum in I ſitum ſeu in contactu ſphæræ cavæ AIHBKI, ſubductâ ſphærâ interiore Ihbk, vi infinitâ retrahitur à centro S versùs A. Nam vis quâ corpuſcu-

lum

& $IE^n$ ad $PE^n$ (ob proportionales $IE$ ad $PE$ ut $IS$ ad $SA$) ſubduplicata eſt ratio virium in diſtantiis $PS$, $IS$. Ergo ordina- LIBER PRIMUS. PROP. LXXXII. THEOR. XLI.

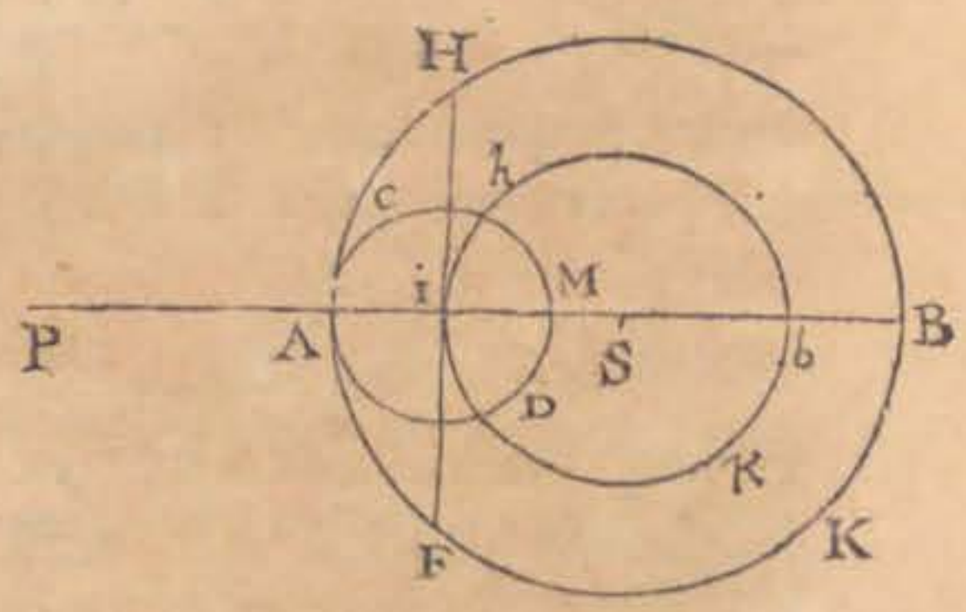



tæ, & propterea areæ quas ordinatæ deſcribunt hiſque proportionales attractiones, ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatis illis rationibus. *Q. E. D.*

PRO-

lum in contactu I à ſphærâ interiore I h b k versùs centrum S trahitur, infinita eſt (520. 527.) reſpectu vis illius quâ extrà contactum traheretur. Sed vis quâ à ſphærâ totâ ſolidâ A H B K S, verſus idem centrum S trahitur finita eſt, ut poté quæ rationem finitam habeat ad vim finitam, quâ corpuſculum in loco P urgeretur (prop. 82.) ergò vis quâ à ſphærâ cavâ AIHBKI, retrahitur à centro versùs A infinita eſt; vis enim quâ in centrum S, à ſphærâ ſolidâ A H B K S in centrum trahitur, æqualis eſt vi ſphæræ interioris I h b k s, demptâ vi contrariâ ſphæræ cavæ A I H B K I.

536. Cor. 2. Ductâ per I rectâ H F ad A B perpendiculari & ſphæræ occurrente in H & F vis quâ ſphæræ ſegmentum A H F corpuſculum in contactu, I ſitum verſus A trahit, eſt etiam infinita in eâdem virium hypotheſi. Nam partes omnes ſegmenti cavi I H b B K F I, corpus in I po



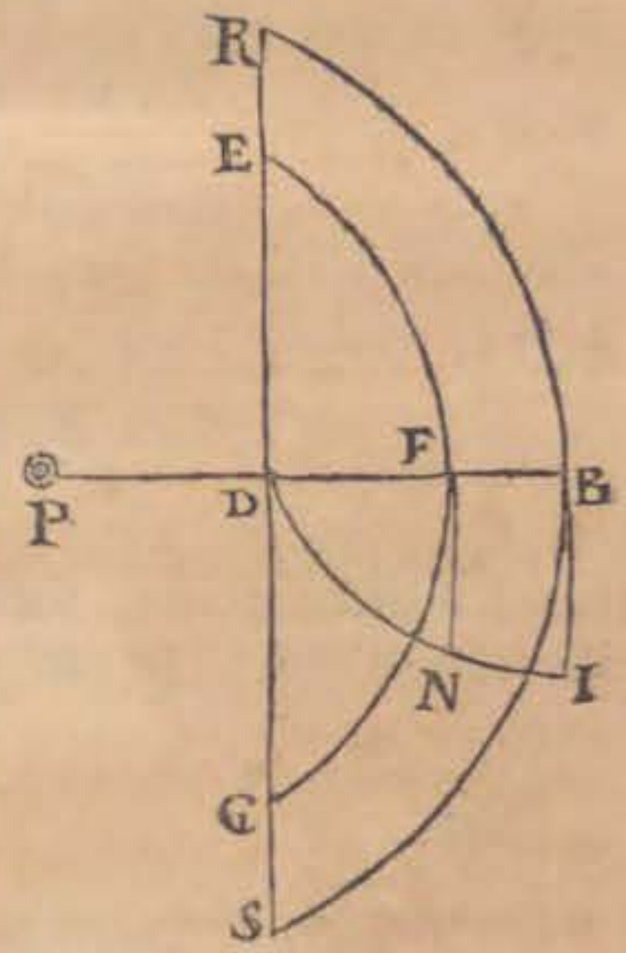

ſitum ad centrum S trahunt, ideóque à ſolo ſegmento A H F à centro verſus A retrahitur, ſed vi infinitâ à centro retrahitur 535. Ergo &c.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

*Invenire vim quâ corpuſculum in centro ſphæræ locatum ad ejus ſegmentum quodcunque attrahitur.*

Si $P$ corpus in centro ſphæræ, & $RBSD$ ſegmentum ejus plano $RDS$ & ſuperficie ſphæricâ $RBS$ contentum. Superficie ſphæricâ $EFG$ centro $P$ deſcriptâ ſecetur $DB$ in $F$, ac diſtinguatur ſegmentum in partes $BREFGS$, $FEDG$. Sit autem ſuperficies illa non purè mathematica, ſed phyſica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur iſta profunditas O, & erit hæc ſuperficies (per (y) demonſtrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum ſphæræ eſſe reciprocè ut diſtantiarum dignitas illa, cujus index eſt $n$; & vis, quâ ſuperficies $EFG$ trahit corpus $P$, erit (per prop. LXXIX.) ut $\frac{DEq \times O}{PF^n}$, id (z) eſt, ut $\frac{2\,DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DFq \times O}{PF^n}$.




Huic proportionale ſit perpendiculum $FN$ ductum in O; & (a) area curvilinea $BDI$, quam ordinatim applicata $FN$ in

(y) * *Per demonſtrata Archimedis.* Nam (515) elementum ſuperficiei EFG, eſt ut PF ducta in elementum lineæ DF, adeóque ob datam PF, reſpectu ſuperficiei totius EFG, ſuperficies illa (165.) erit ut PF×DF, & proindè lamina ex hâc ſuperficie & profunditate O, genita erit ut PF×DF×O.

(z) * *Id eſt* &c. Nam (per prop. 13. Lib. 6. Elem.) $DE^2 = 2PF - DF \times DF = 2PF \times DF - DF^2$. Quarè $\frac{DE^2 \times O}{PF^n} = \frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$.

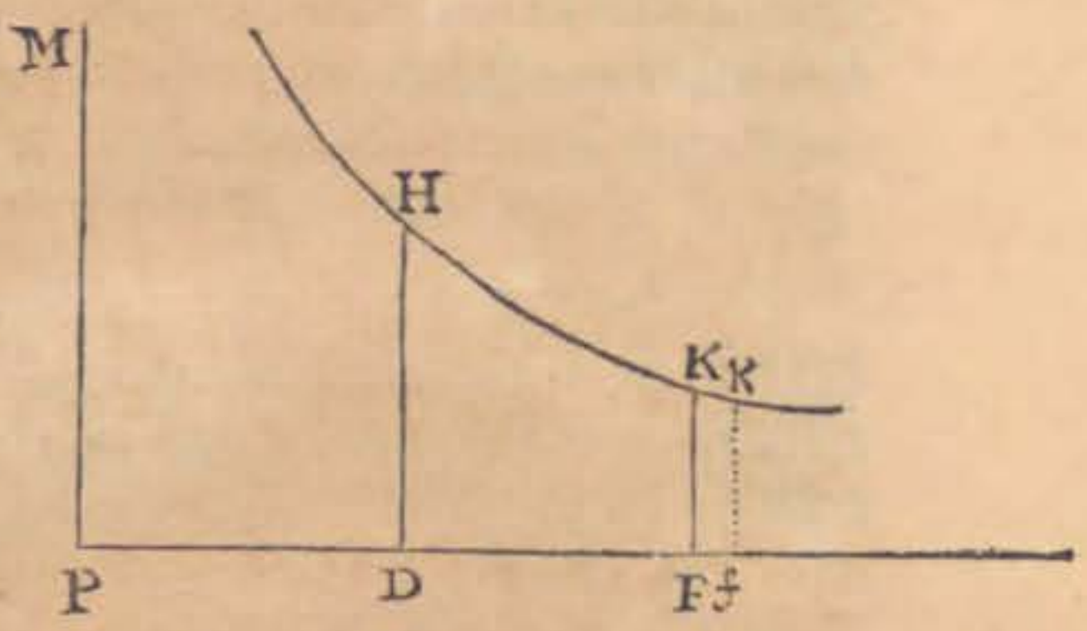
(a) 537. * *Et area curvilinea &c.* Si ſegmentum RBSDR, in laminas innumeras profunditatis evaneſcentis O diviſum intelligatur, & capiatur ſemper perpendiculum FN, vi ſingularum laminarum proportionale; manifeſtum eſt (per Lem. 4.) ſummam elementorum FN×O, ſeu aream curvilineam DNIB, proportionalem fore ſummæ virium. Sit igitur PD=$a$, PF=$x$,

in longitudinem $DB$ per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota quâ segmentum totum $RBSD$ trahit corpus $P$. $Q.E.I.$

$=x$, $DF=x-a$, & erit laminæ sphæricæ EFG vis attractiva ut $\frac{2xdx-2adx}{x^{n-1}} = \frac{xxdx-2axdx+aadx}{x^n} = \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{aadx}{x^n} = x^{2-n}dx - aax^{-n}dx$, cujus fluens $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{aax^{1-n}}{1-n} + Q$ *const.* Sed posita $x=a$, segmentum & vis illius evanescunt, ergò erit $Q = -\frac{a^{3-n}}{3-n} + \frac{a^{3-n}}{1-n} = \frac{2a^{3-n}}{3-n \times 1-n}$, & fluens accurata $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{aax^{1-n}}{1-n} + \frac{2a^{2-n}}{3-n \times 1-n}$.

538. Cor. Hinc patet vim quâ corpus in P locatum, à segmento trahitur semper posse algebraicè exponi, duobus casibus exceptis in quibus n est 1 vel 3. tùm autem per logarithmos vel areas hyperbolicas habetur. In 1°. casu areæ DNI, fluxio erit $xdx - \frac{aadx}{x}$. Primi termini fluens est $\frac{1}{2}xx+Q$, quæ evanescere debet posità $x=a$, quare erit $Q=-\frac{1}{2}aa$, & fluens accurata $=\frac{1}{2}xx-\frac{1}{2}aa$. Ut secundi termini fluens obtineatur, per punctum P agatur PM ad PF normalis, & asymptotis PM, PF, describatur Hyperbola æquilatera cujus sit dignitas $PD^2$; per puncta D, F, f erigantur perpendicula DH, FK, fk hyperbolæ occurrentia in H, F, f, sintque puncta F, f, infinitè propinqua, & erit area hyperbolica DHKF, æqualis fluenti secundi termini; nam (per theor. 4. de hyperbolâ) $PD \times DH = PD^2 = PF \times FK$, & ideò $FK = \frac{PD^2}{PF}$, ac $FK \times Ff = \frac{PD^2 \times dx}{x}$ & area DHKF evanescit, ubi PF seu $x=PD$.

In 2°. casu areæ DNI, fluxio est $\frac{dx}{x} - \frac{aadx}{x^3}$. Secundi termini fluxio est $\frac{aa}{2xx} + Q$, & invenitur $Q=-\frac{1}{2}$, posità $x=a$, atque adeò fluens accurata, erit $\frac{aa}{2ax} - \frac{1}{2}$. Ponatur $a=1$, & primi termini $\frac{dx}{x}$, fluens, erit area hyperbolica



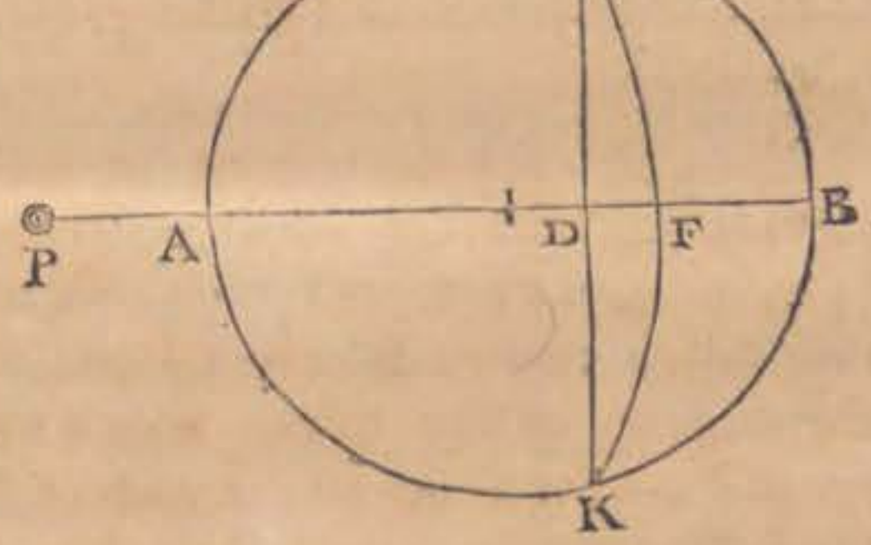

DHKF $= S.\frac{aadx}{x}$. Quarè area DNI est ut, DHKF $+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}xx$.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

*Invenire vim, quâ corpuſculum, extra centrum ſphæræ in axe ſegmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem ſegmento.*

A ſegmento *E B K* trahatur corpus *P* in ejus axe *A D B* locatum. Centro *P* intervallo *P E* deſcribatur ſuperficies ſphærica *E F K*, quâ diſtinguatur ſegmentum in partes duas *E B K F E* & *E F K D E*. (b) Quæratur vis partis prioris per prop. LXXXI. & vis partis poſterioris per prop. LXXXIIII.; & ſumma virium erit vis ſegmenti totius *E B K D E*. *Q. E. I.*




### *Scholium.*

Explicatis attractionibus corporum ſphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis ſimiliter conſtantium corporum; ſed iſta particulatim tractare minus ad inſtitutum ſpectat. Suffecerit propoſitiones quaſdam generaliores de viribus hujuſmodi corporum deque motibus inde oriundis, ob (c) earum in rebus philoſophicis aliqualem uſum, ſubjungere.

SEC-

(b) * *Quæratur vis partis prioris.* 525. 529.

(c) * *Ob earum in rebus philoſophicis aliqualem uſum.* Vide quæſtiones Lib 4. optices Newtoni. 30 theoremata ad calcem aſtronomiæ clariſſ. Keillii, Phyſicam Clariſſ. s'Graveſandii, Diſſertationem Clariſſ. De Maupertuis in commentariis Pariſ. 1732. ubi has Newtoni ſectiones clare exponit.

## SECTIO XIII.

*De corporum non ſphæricorum viribus attractivis.*

LIBER PRIMUS. PROP. LXXXV. THEOR. XLII.

## PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

*Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum eſt, attractio longè fortior ſit, quam cum vel minimo intervallo ſeparantur ab invicem: vires particularum trahentis, in receſſu corporis attracti, decreſcunt in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiarum à particulis.*

Nam ſi vires decreſcunt in ratione duplicatâ diſtantiarum à particulis; attractio verſus corpus ſphæricum, propterea quod (per. prop. LXXIV.) ſit reciprocè ut quadratum diſtantiæ attracti corporis à centro ſphæræ, haud ſenſibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, ſi attractio in receſſu corporis attracti decreſcat in ratione minore. Patet igitur propoſitio de ſphæris attractivis. Et (d) par eſt ratio orbium ſphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res conſtat in orbibus corpora interius conſtituta trahentibus, cum attractiones paſſim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipſo contactu nullæ ſunt. Quod ſi ſphæris hiſce orbibuſque ſphæricis partes quælibet à loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari poſſunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel ſubductæ, cum ſint à loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis exceſſum, qui ex contactu oritur. Conſtat igitur propoſitio de corporibus figuratarum omnium. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

*Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in receſſu corporis attracti decreſcunt in triplicatâ vel pluſquam triplicatâ ratione diſtantiarum à particulis, attractio longe fortior erit in contactu, quam cum trahens & attractum intervallo vel minimo ſeparantur ab invicem.*

Nam attractionem in acceſſu attracti corpuſculi ad hujuſ-

(d) * *Et par eſt ratio orbium ſphæricorum concavorum,* (Per prop. LXXI.). * *Au-*

De Motu Corporum.

modi ſphæram trahentem (e) augeri in infinitum, conſtat per ſolutionem problematis XLI. in exemplo ſecundo ac tertio exhibitam. Idem, per exempla illa & theorema XLI. inter ſe collata, facile (f) colligitur de attractionibus corporum verſus orbes concavo-convexos, ſive corpora attracta collocentur extra orbes, ſive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his ſphæris & orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant figuram quamvis aſſignatam, conſtabit propoſitio de corporibus univerſis. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

*Si corpora duo ſibi invicem ſimilia, & ex materiâ æqualiter attractivâ conſtantia, ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: attractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis ſimiliter poſitas.*

Nam ſi corpora diſtinguantur in particulas, quæ ſint totis proportionales, & in totis ſimiliter ſitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correſpondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas ſingulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas ſingulas correſpondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus (g) ad attractionem in totum ſecundum. *Q. E. D.*

*Co-*

(e) * *Augeri in infinitum conſtat &c.* (521. 527. 531.).

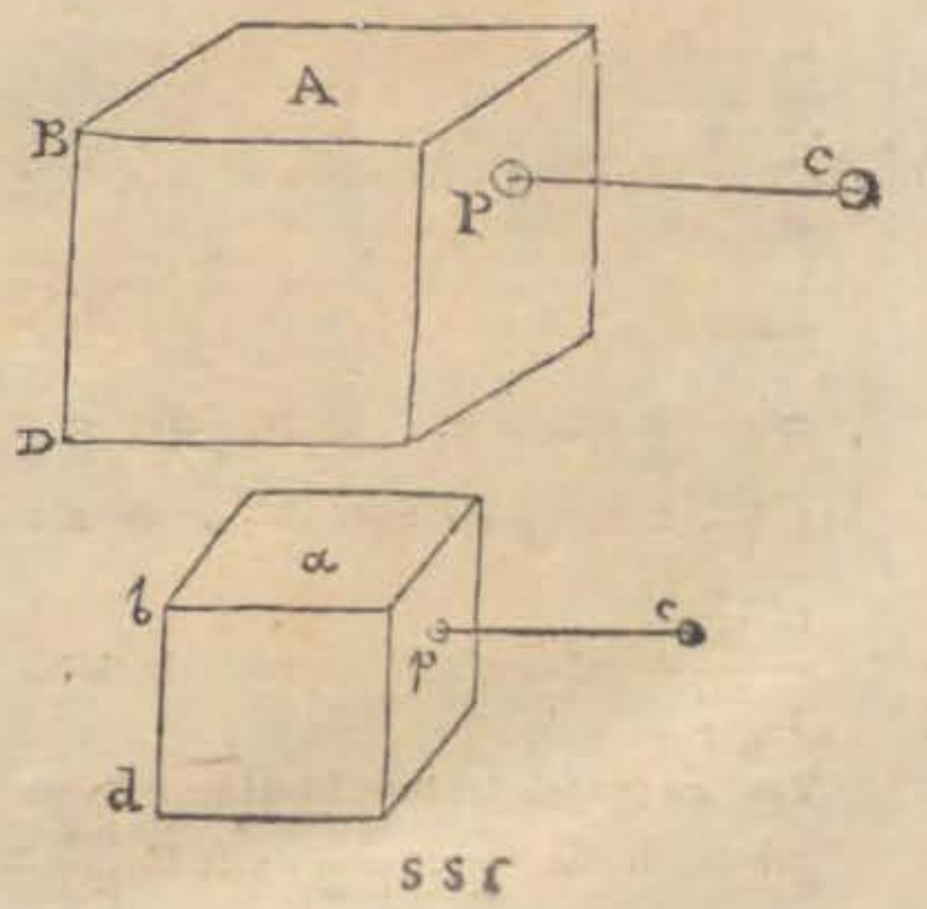
(f) * *Facilè colligitur de attractionibus &c.* 528. 530. 532. 535. 536.

(g) 539. * *Ad attractionem in totum ſecundum.* Corpora ſimilia A, a, ſeorſim attrahant corpuſcula C, c ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita, ſintque P, p particulæ totis A, a, proportionales & in totis ſimiliter ſitæ & attractio decreſcat in ratione dignitatis diſtantiarum, cujus ſit index n; erit attractio corpuſculi C in particulam P ad attractionem corpuſculi c in particulam p, ut $P \times pc^n$, ad $p \times PC^n$. Unde ſi corpora A & a in particulas innumeras ut P & p divisâ intelligantur, erit, componendo, attractio corpuſculi C in totum corpus A ad attractionem corpuſculi c in totum corpus a, ut $P \times pc^n$ ad $p \times PC^n$, quod par-

*Corol.* 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis cujusvis distantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directè, & distantiarum dignitates illæ inversè. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicatâ distantiarum à corpusculis attractis, corpora autem sint ut *A cub.* & *B cub.* ideoque tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantiæ à corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ quad.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ quad.}$, id est, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decrescant in ratione triplicatâ distantiarum à corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ cub.}$, id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicatâ; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ q\ q.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ q\ q.}$, id est, reciprocè ut latera cubica *A* & *B*. Et sic in cæteris.

*Co-*

particulæ omnes P, p sint ubique totis similes & in iis similiter sitæ, & distantiæ earum à corpusculis C, c semper maneant proportionales distantiis P C, p c. Cum igitur sit P ad p ut A ad a, & distantiæ p c, P C sint lateribus homologis b d, B D proportionales (ex Hyp.) erit attractio corpusculi C, in totum corpus A, ad attractionem corpusculi c in totum corpus a, ut $A \times p c^n$ ad $a \times P C^n$, atque etiam ut $A \times b d^n$ ad $a \times B D^n$, & ut $B D^3 \times b d^n$, ad $b d^3 \times B D^n$, hoc est, ut $b d^{n-3}$ ad $B D^{n-3}$, ob proportionales $A : a = B D^3 : b d^3$, (per Hyp.) ex quibus patet corollarium 1^um. quod sequitur; Nam si $n = 2$, erunt attractiones ut B D ad b d; si $n = 3$, erunt æquales; si, $n = 4$, erunt ut b d, ad B D, hoc est, reciproce ut latera cubica corporum.



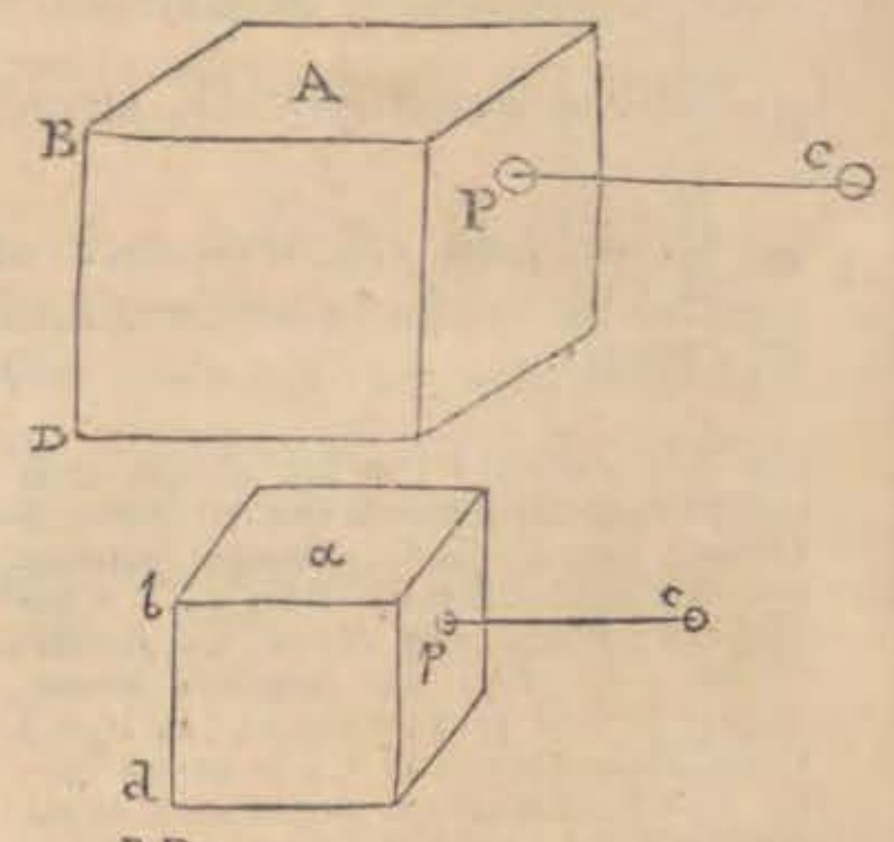
DE MOTU CORPORUM.

*Corol.* 2. (h) Unde viciſſim, ex viribus, quibus corpora ſimilia trahunt corpuſcula ad ſe ſimiliter poſita, colligi poteſt ratio decrementi virium particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti; ſi modo decrementum illud ſit directè vel inversè in ratione aliquâ diſtantiarum.

## PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

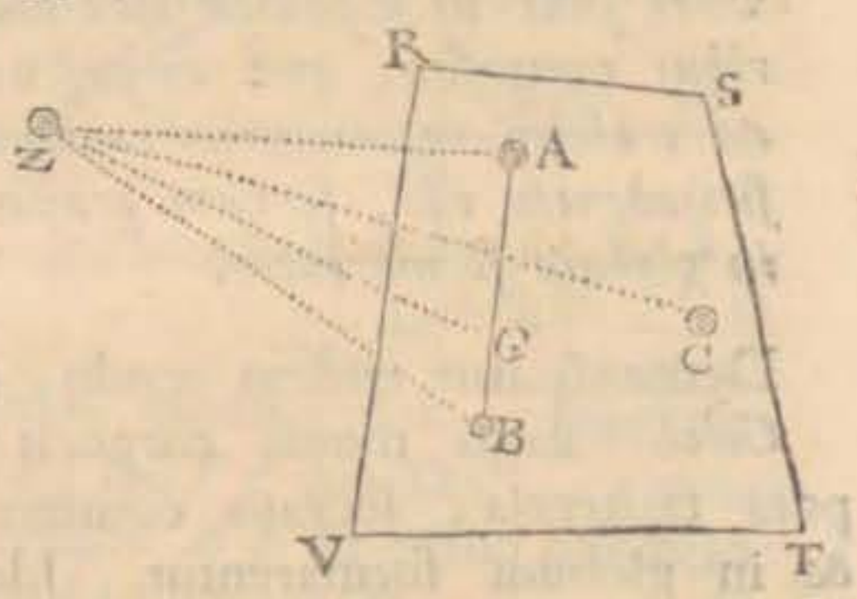
*Si particularum æqualium corporis cujuſcunque vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipſius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materiâ conſimili & æquali conſtantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.*

Corporis $RSTV$ particulæ $A$, $B$ trahant corpuſculum aliquod $Z$ viribus, quæ, ſi particulæ æquantur inter ſe, ſint ut diſtantiæ $AZ$, $BZ$; ſin particulæ ſtatuantur inæquales, ſint ut hæ particulæ & ipſarum diſtantiæ $AZ$, $BZ$ conjunctim,




(h) 540. * *Undè viciſſim &c.* Nam ſi experimentis inventum ſit attractionem corpuſculi C in corpus A, eſſe ad attractionem corpuſculi c, in corpus a, ut eſt B D ad b d, vel ut 1 ad 1, vel ut b d ab B D, vires particularum attractivarum decreſcunt in ratione diſtantiarum duplicatâ, vel triplicatâ, vel quadruplicatâ (539). Et generatim, ſi experimentis inventa fuerit attractio corpuſculi C in A ad attractionem corpuſculi c in a, ut numerus N ad numerum n, ponaturque vim particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti decreſcere in ratione dignitatis diſtantiarum cujus ſit index $x$ erit (539) $n : N = BD^{x-3} : bd^{x-3}$, adeóque (ſi L logarithmum ſignificet quantitatis cui præponitur) erit $L.\frac{n}{N} = L.\frac{BD^{x-3}}{bd^{x-3}} = \overline{x-3} \times L.\frac{BD}{bd}$. Quarè erit $x \times L.\frac{BD}{bd} = L.\frac{n}{N} + 3.L.\frac{BD}{bd}$, & $x = \frac{L.\frac{n}{N}}{L.\frac{BD}{bd}} + 3$. Invenietur itaque dignitatis index $x$, per tabulas logarithmicas. Exempli causâ. Si $\frac{n}{N} = \frac{bd}{BD}$, erit $L.\frac{bd}{BD} = -L.\frac{BD}{bd}$, & ideò $x = -1+3 = 2$. Si $\frac{n}{N} = 1$, erit $L.\frac{n}{N} = 0$, & proindè $x = 3$. Si $\frac{n}{N} = \frac{BD}{bd}$, erit $x = 4$, prorsùs ut ſuprà. Si $\frac{n}{N} = \frac{BD^p}{bd^p}$, erit $L.\frac{n}{N} = p \times L.\frac{BD}{bd}$, & $x = p+3$. Sed ſi $\frac{n}{N} =$

ſive (ſi ita loquar) ut hæ particulæ in diſtantias ſuas $AZ$, $BZ$ reſpectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur $AB$, & ſecetur ea in $G$ ut ſit $AG$ ad $BG$ ut particula $B$ ad particulam $A$; & erit $G$ commune centrum gravitatis particularum $A$ & $B$. Vis $A \times AZ$ (per legum corol. 2.) reſolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$, & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales $A$ ad $B$ & $BG$ ad $AG$, æquantur; ideoque cum dirigantur in partes contrarias, ſe mutuo deſtruunt. Reſtant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab $Z$ verſus centrum $G$, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc eſt, vim eandem ac ſi particulæ attractivæ $A$ & $B$ conſiſterent in eorum communi gravitatis centro $G$, globum ibi componentes.




Eodem argumento, ſi adjungatur particula tertia $C$, & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum $G$; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in $G$ & particulæ $C$; hoc eſt, ad commune centrum gravitatis trium particularum $A$, $B$, $C$; & eadem erit, ac ſi globus & particula $C$ conſiſterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et ſic pergitur in infinitum. Eadem eſt igitur vis tota particularum omnium corporis cujuſcunque $RSTV$, ac ſi corpus illud, ſervato gravitatis centro, (i) figuram globi indueret. *Q. E. D.*

*Corol.* Hinc motus corporis attracti $Z$ idem erit, ac ſi corpus attrahens $RSTV$ eſſet ſphæricum: & propterea ſi corpus il-

(i) * *Figuram globi indueret.* Per prop. 77.

$\frac{b\,d\,p}{B\,D\,p}$, invenietur $x = 3 - p$. Si $\frac{BD}{bd} = 10$, erit $x = \frac{L\frac{n}{N}}{1,0000000} + 3 = L\frac{n}{N} + 3$.

DE MOTU CORPORUM.

lud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum (k) movebitur in ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

## PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

*Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum à singulis: vis ex omnium viribus composita, quâ corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit, ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.*

Demonstratur eodem modo, atque propositio superior.

*Corol.* Ergo motus corporis attracti idem erit, ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

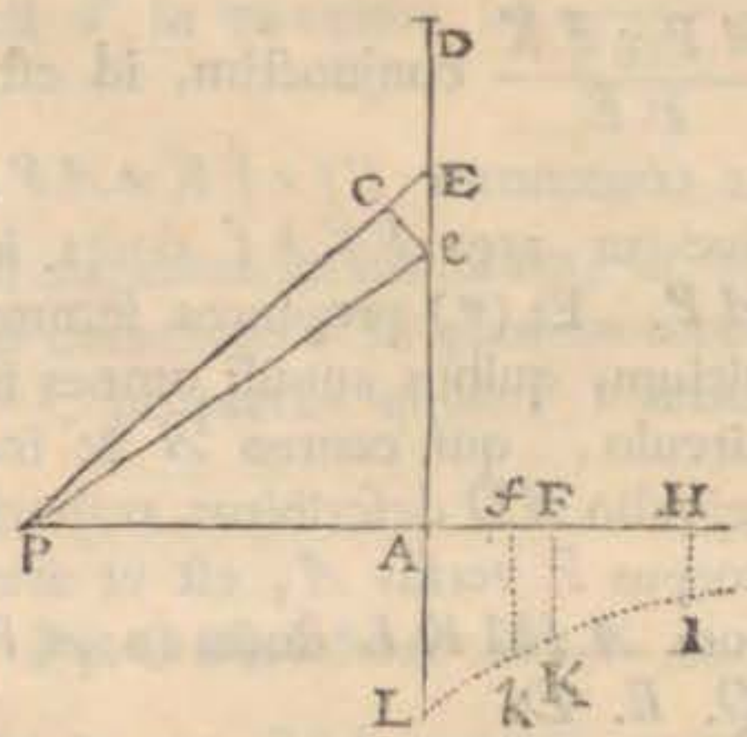
## PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

*Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescentes in quâcunque distantiarum ratione: invenire vim, quâ corpusculum attrahitur ubivis positum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.*

Centro $A$ intervallo quovis $AD$, in plano, cui recta $AP$ perpendicularis est, describi intelligatur circulus; & invenienda sit vis, quâ corpusculum quodvis $P$ in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis $E$ ad corpusculum attractum $P$ agatur recta $PE$. In rectâ $PA$ capiatur $PF$ ipsi $PE$ æqualis, &

(k) * *Movebitur in ellipsi &c.* Per cor. prop. 78. & per cor. 1. prop. 10.

& erigatur normalis $FK$, quæ fit ut vis quâ punctum $E$ trahit corpusculum $P$. Sitque $IKL$ curva linea quam punctum $K$ perpetuò tangit. Occurrat eadem circuli plano in $L$. In $PA$ capiatur $PH$ æqualis $PD$, & erigatur perpendiculum $HI$ curvæ prædictæ occurrens in $I$; & erit corpusculi $P$ attractio in circulum ut area $AHIL$ ducta in altitudinem $AP$. *Q. E. I.*

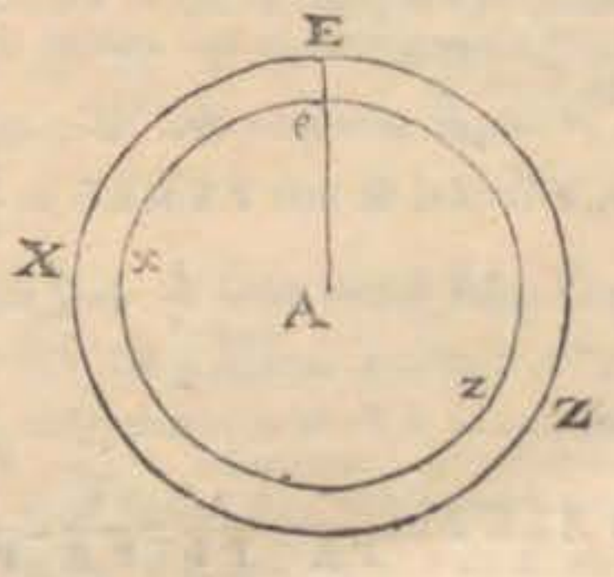



Etenim in $AE$ capiatur linea quam minima $Ee$. Jungatur $Pe$ & in $PE$, $PA$ capiantur $PC$, $Pf$ ipsi $Pe$ æquales. Et quoniam vis, quâ annuli centro $A$ intervallo $AE$ in plano prædicto descripti punctum quodvis $E$ trahit ad se corpus $P$, ponitur esse ut $FK$, & inde vis quâ punctum illud trahit corpus $P$ versus $A$, (l) est ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis, quâ annulus totus trahit corpus $P$ versus $A$, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; (m) annulus autem iste est ut rectangulum sub radio $AE$ & latitudine $Ee$, & hoc (n) rectangulum (ob proportionales $PE$ & $AE$, $Ee$ & $CE$) æquatur rectangulo $PE \times CE$ seu $PE \times Ff$; erit vis, quâ annulus iste trahit corpus $P$ versus $A$, ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP}{}$

(l) * *Est ut* $\frac{AP \times FK}{PE}$, per leg. cor. 2.

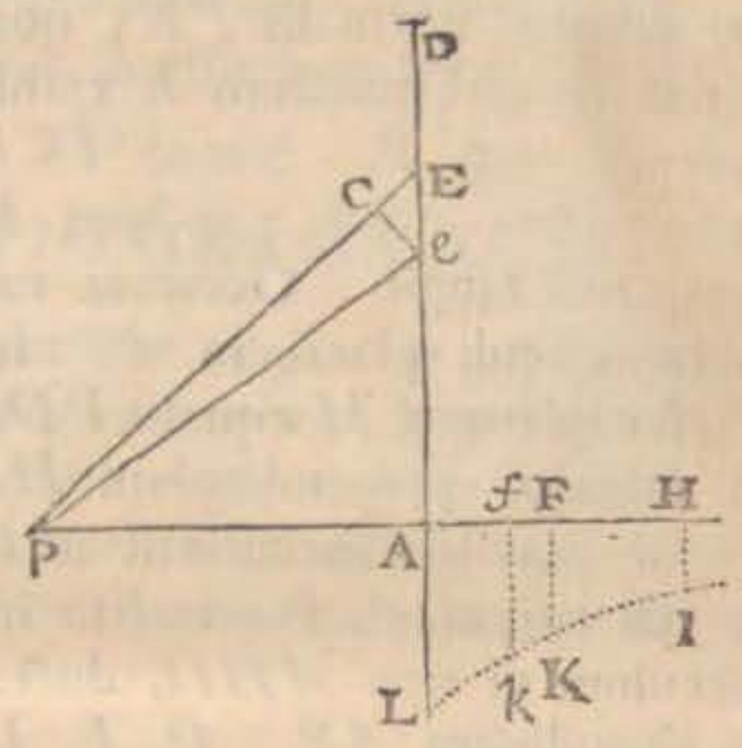
(m) * *Annulus autem iste &c.* Nam annulus E Z X e, æqualis est differentiæ circulorum A E Z X, A e z x, hoc est, $\frac{AE \times EZXE - Ae \times ezxe}{2}$, & quoniam evanescente Ee, fit E Z X E = e z x e, erit annulus evanescens ut $\overline{AE - Ae} \times EZXE$, hoc est, ut $Ee \times EZXE$ sive quia radius AE est ut peripheria EZXE, ut $Ee \times AE$.

(n) * *Et hoc rectangulum &c.* Anguli enim ad C & A recti æquantur, &



DE MOTU CORPORUM.

$\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, sive ut area $FKkf$ ducta in $AP$. Et (o) propterea summa virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro $A$ & intervallo $AD$ describitur, trahunt corpus $P$ versus $A$, est ut area tota $AHIKL$ ducta in $AP$. *Q. E. D.*




*Corol.* 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, hoc est, si sit $FK$ ut $\frac{1}{PF\ quad.}$, (p) atque ideo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi $P$ in circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

*Corol.* 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciprocè ut distantiarum dignitas quælibet $D^n$, hoc est, si sit $FK$ ut $\frac{1}{D^n}$, (q) ideoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}}$

angulus PEA utrique triangulo CEc, AEP communis est, adeóque triangula hæc similia sunt, & latera habent proportionalia. (Per prop. 4. lib. 6. Elem.)

(o) * *Et propterea summa virium &c.* Per cor. lem. 4.

(p) * *Atque ideò area &c.* Sit enim $PF = x$, $Ff = dx$, & erit $FK \times Ff$, ut $\frac{dx}{xx}$ (ex hyp.) cujus fluens est $-\frac{1}{x} + Q$ *const.* (165); Et quoniam area ALKF evanescere debet, ubi $PF = PA$, erit $Q = \frac{1}{PA}$ & area ALKF ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PF} = \frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$ ubi $PF = PH$. Cùm igitur attractio corpusculi P, in circulum sit ut AHIKL $\times PA$, erit quoque ut $1 - \frac{PA}{PH} = \frac{PH-PA}{PH} = \frac{AH}{PH}$.

(q) * *Ideóque area &c.* Si enim D dicatur $x$, erit $PK \times Ff$ ut $\frac{dx}{x^n}$, (ex hyp.) & (165.) area AFKL, ut $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + Q$ *const.* positâ $x$ seu $PF = PA$, invenitur $Q = \frac{1}{(n-1)PA^{n-1}}$, ideóque area AFKL, ut $\frac{1}{(n-1)PA^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ hoc

$-\frac{\overset{n-2}{\cdot}\ 1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpusculi $P$ in circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}}$ $-\frac{PA}{PH^{n-1}}$.

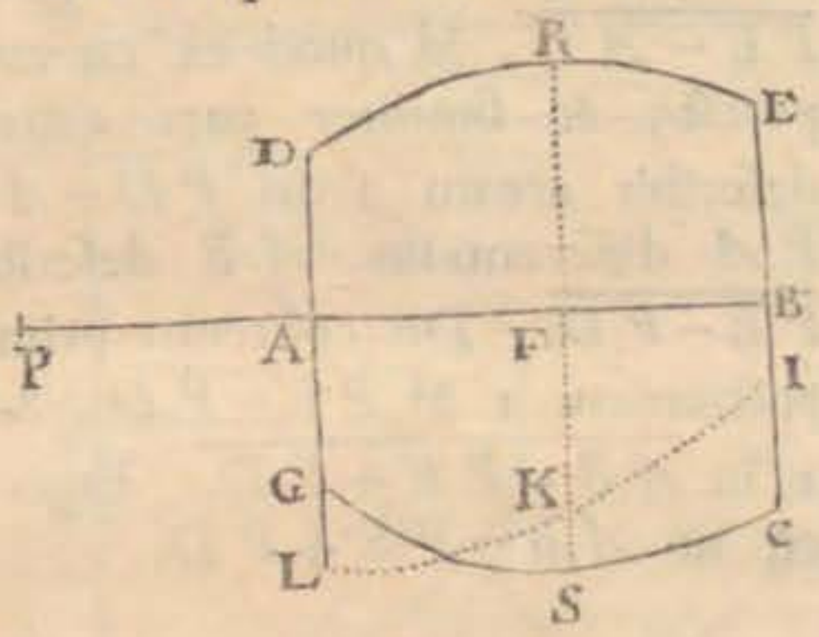
LIBER PRIMUS. PROP. XC. PROBL. XLIV.

*Corol.* 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus $n$ sit unitate major; attractio corpusculi $P$ in planum totum infinitum erit reciprocè ut $PA^{n-2}$, propterea quod (r) terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

## PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

*Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quácunque distantiarum ratione decrescentes.*

In solidum (f) $DECG$ trahatur corpusculum $P$, situm in ejus axe $AB$. Circulo quolibet $RFS$ ad hunc axem perpendiculari secetur hoc solidum, & in ejus semidiametro $FS$, in plano aliquo $PALKB$ per axem transeunte, capiatur (per prop. xc.) longitudo $FK$ vi, quâ corpusculum $P$ in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum $K$ curvam lineam $LKI$, planis extimorum circulorum $AL$ & $BI$ occurrentem in $L$ & $I$; & erit attractio corpusculi $P$ in solidum ut (t) area $LABI$. *Q. E. I.*




*Co-*

hoc est, ob datam quantitatem $n-1$, ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$ ubi $PF = PH$.

(r) * *Terminus alter evanescet.* Ob $PH$, infinitam.

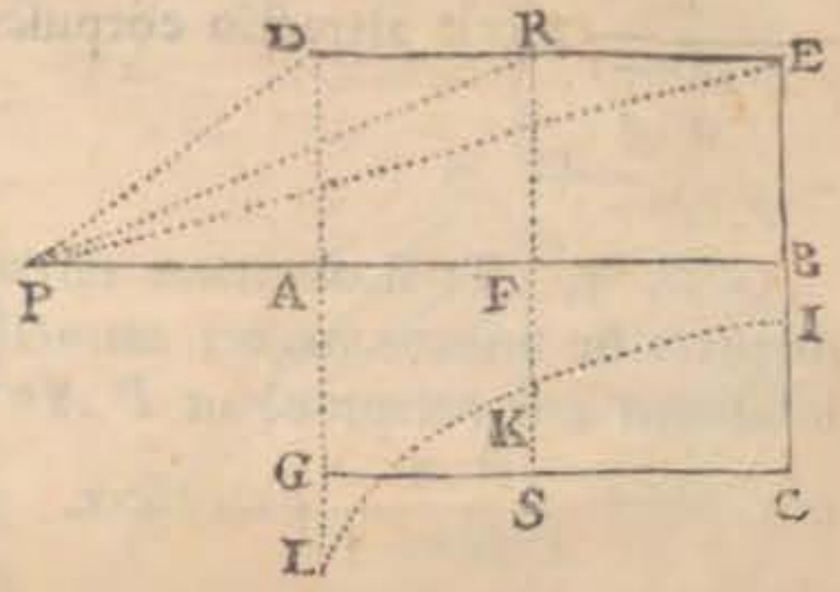
(f) * *In solidum DECG &c.* Convolutione superficiei $ADREB$ circà axem $AB$ genitum.

(t) * *Ut area LABI.* Patet per cor. lem. 4. Nam area illa est ut summa virium singulorum circulorum, qui per omnia puncta lineæ $AB$ describi possunt.

541. Scholium. Sit abscissa $PF = x$, ejus fluxio $dx$, ordinatim applicata $FR = y$, $PR = \sqrt{yy + xx}$, & vis reciprocè

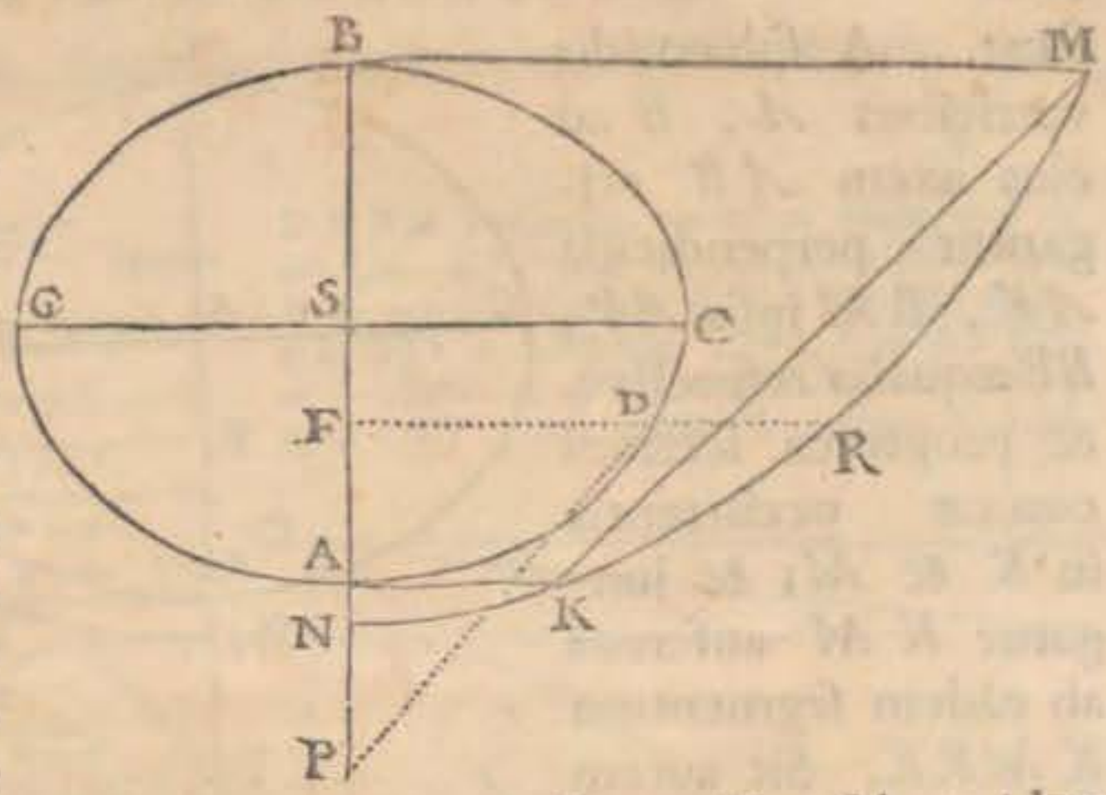
DE MOTU CORPORUM.

*Corol.* 1. Unde si solidum cylindrus sit, parallelogrammo *A D E B* circa axem *A B* revoluto descriptus, & vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciprocè ut quadrata distantiarum à punctis: (u) erit attractio corpusculi *P* in hunc cylindrum ut $AB - PE + PD$. Nam ordinatim applicata *F K* (per corol. 1. prop. xc.) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem *A B*, describit aream $1 \times AB$: & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem *P B*, describit aream 1 in $\overline{PE - AD}$, id quod ex curvæ *L K I* quadraturâ facilè ostendi potest; & similiter pars eadem ducta in longitudinem *P A* describit aream 1 in $\overline{PD - AD}$, ductaque in ipsarum *P B*, *P A* differentiam *A B* describit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum postremum 1 in $\overline{PE - PD}$, & restabit area *L A B I* æqualis 1 in $\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, est ut $AB - PE + PD$. *Co-*




ut distantiæ dignitas cujus index $n$, erit FK ut $\frac{1}{PF^{n-2}} - \frac{PF}{PR^{n-1}} = \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{x}{(yy+xx)^{\frac{n-1}{2}}}$ (per cor. 2. prop. 90.) Quarè areæ AFKL fluxio erit ut $\frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{-x\,dx}{(yy+xx)^{\frac{n-1}{2}}}$, & hujus fluens ut vis quâ corpusculum P in solidum DRSG trahitur. Datâ verò curvæ DRE naturâ, inveniendus est valor ordinatæ $y$ per abscissam $x$, & indè fluens determinanda.

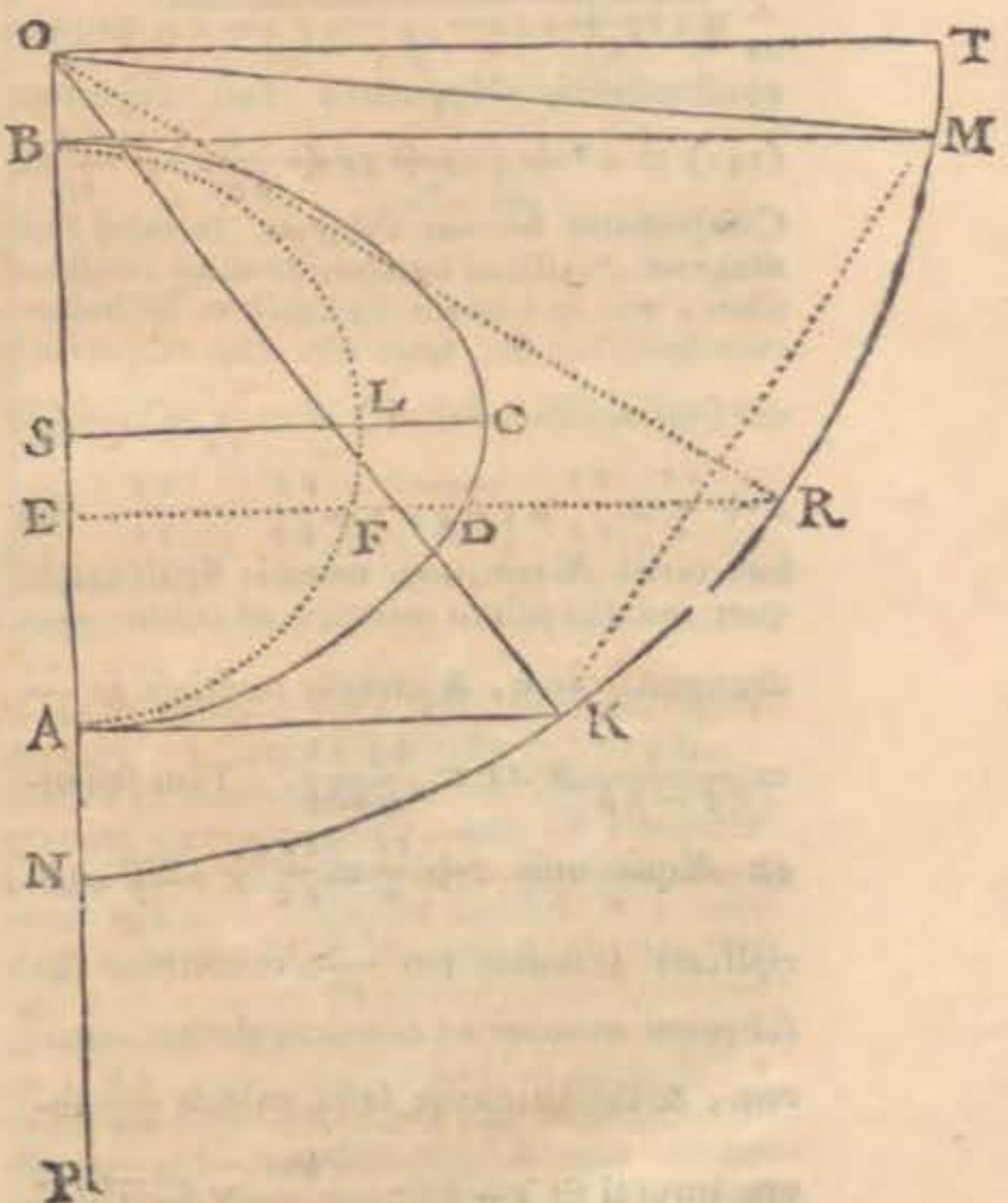
(u) * *Erit attractio corpusculi P &c.* Si ordinatim applicata FR, dicatur $b$, patet (429) areæ AFKL, elementum fore ut $dx - \frac{x\,dx}{(bb+xx)^{\frac{1}{2}}}$. Fiat $bb + xx = zz$, & erit $x\,dx = z\,dz$, & proindè elementum prædictum ut $dx - dz$. Quarè AFKL erit ut $x - z + Q$, & quoniam hæc area evanescit, ubi PF, seu $x = PA$, & PR seu $z = PD$, erit $Q = PD - PA$, & area AFKL, seu attractio corpusculi P, in cylindrum DRSG, ut $PF - PR + PD - PA = AF - PR + PD = AB - PE + PD$, ubi fit $PF = PB$, & $PR = PE$.




*Corol.* 2. Hinc etiam vis innotescit, quâ sphærois *AGBC* attrahit corpus quodvis *P*, exterius in axe suo *AB* situm. (x) Sit *NKRM* sectio conica cujus ordinatim applicata *ER*, ipsi *PE* perpendicularis, æquetur semper longitudini *PD*, quæ ducitur ad punctum illud *D*, in quo applicata ista sphæroidem secat.

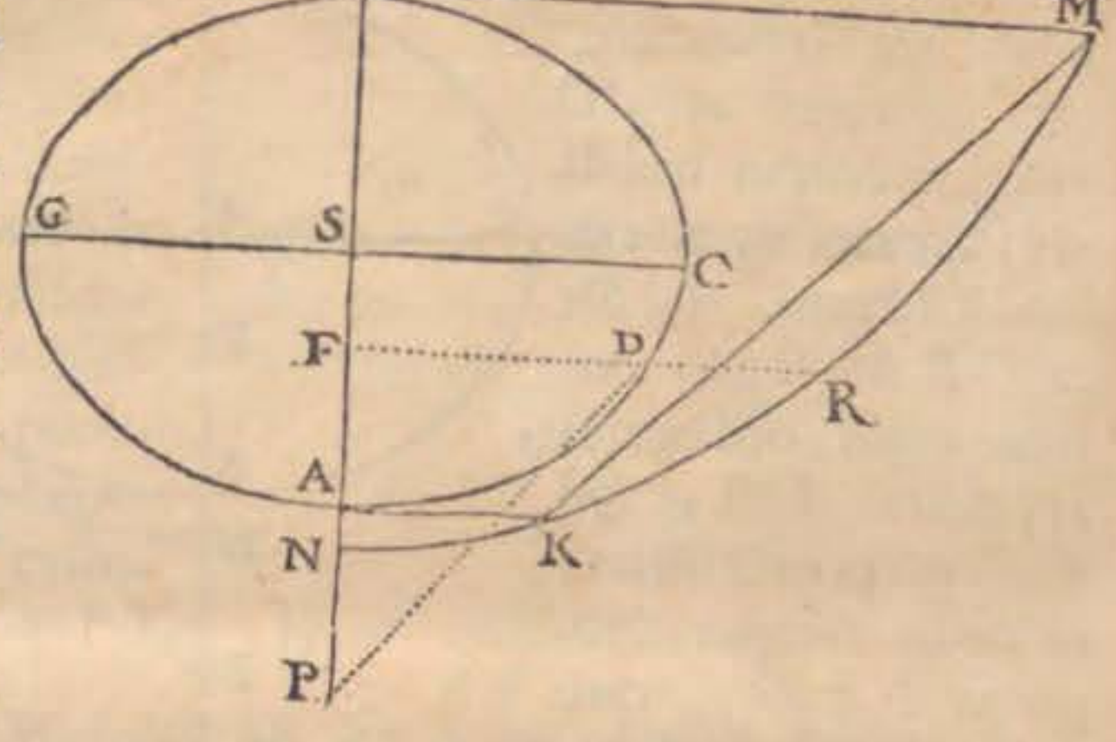
(x) 542. *Sit NKRM sectio conica cujus ordinatim applicata ER æquetur semper longitudini PD &c.* Sit $AP=a$, curvæ datæ ACB cujus convolutione generatur sphærois sit semiaxis $AS=b$; alter semiaxis $SC=c$, $AE=x$, erit $PE=a+x$, & (ex naturâ Ellipseos) erit $ED^2=\frac{cc}{bb}\times 2bx-xx$; unde quadratum ER ordinatæ ad curvam NKRM sive $PD^2=PE^2+ED^2=a^2+2ax+xx+\frac{cc}{bb}\times 2bx-\frac{cc}{bb}xx$; cum ergo hæc Æquatio ad curvam NKRM, ultrà secundum gradum non assurgat constat eam curvam esse ex Sectionibus Conicis: erit autem Ellipsis si quantitas $xx-\frac{cc}{bb}xx$ sit negativa, quod evenit ubi SC (sive $c$) major est quàm AS (sive $b$); Erit verò Parabola si ea quantitas evanescat, ideoque si $c=b$ quod evenit ubi curva ACB est circulus; Denique erit Hyperbola si ea quantitas sit positiva, hoc est, si AS sit longior axis.

543. Sit ACB Ellipsis cujus axis CS sit major axi AS, quo casu curva NKRM erit Ellipsis, hac ratione ejus curvæ NKRM determinabuntur Axes & Vertex. Dicatur ejus Ellipseos NKRM semiaxis ON=*s*, alter semiaxis OT dicatur *t*, distantia verticis N à vertice A curvæ ACB, dicatur



DE MOTU CORPORUM.

secat. A sphæroidis verticibus $A$, $B$ ad ejus axem $AB$ erigantur perpendicula $AK$, $BM$ ipsis $AP$, $BP$ æqualia respectivè, & propterea sectioni conicæ occurrentia in $K$ & $M$; & jungatur $KM$ auferens ab eâdem segmentum $KMRK$. Sit autem




sphæ-

$p$, abscissa NE erit $= p + x$, & ordinatæ ER quadratum erit ex Ellipseos natura $\frac{tt}{ss} \times 2sp + 2sx - pp - 2px - xx$, quod ex constructionis Hypothesi fuit repertum (542) $= aa + 2ax + xx + \frac{cc}{bb} 2bx - \frac{cc}{bb}xx$. Conferantur horum valorum termini homogenei, scilicet constantes cum constantibus, eos qui unam variabilem includunt cum similibus &c. fient tres istæ Æquationes (variabilibus deletis) $aa = \frac{tt}{ss} \times 2sp - pp$; $a + \frac{cc}{b} = \frac{tt}{ss} \times s - p$; $1 - \frac{cc}{bb} = -\frac{tt}{ss}$. Ex hac tertiâ Æquatione, mutatis signis utrinque, reducto primo membro ad communem denominatorem, & inversis terminis fit $\frac{ss}{tt} = \frac{bb}{cc - bb}$ & $ss = \frac{bbtt}{cc - bb}$. Tum secundæ Æquationis $a + \frac{cc}{b} = \frac{tt}{ss} \times s - p$ multiplicatis terminis per $\frac{ss}{tt}$, reductione factâ primi membri ad eundem denominatorem, & substitutione factâ valoris $\frac{ss}{tt}$ supra inventi fit $s - p = \frac{b}{cc - bb} \times ba + cc$.

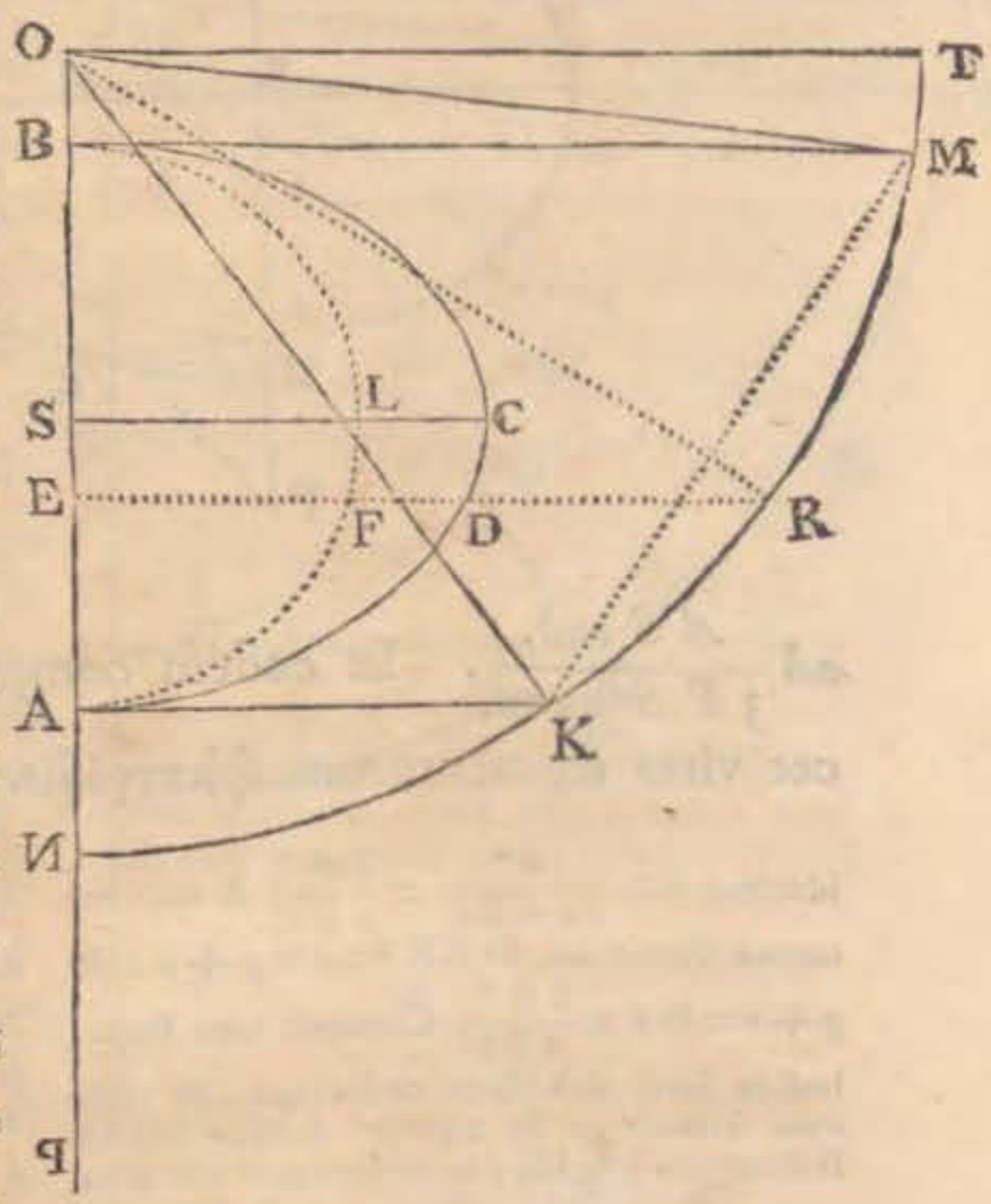
Denique, primæ Æquationis $aa = \frac{tt}{ss} \times 2sp - pp$ multiplicatis membris per $\frac{ss}{tt}$, substituto ejus valore, utrinque mutatis signis & addito $ss$, fit tandem $ss - \frac{bb}{cc - bb}aa = ss - 2sp + pp$, in quâ novâ Æquatione cum secundum membrum sit ipsum quadratum quantitatis $s - p$, substituto ejus valore prius reperto, & loco $ss$ in primo membro substituto etiam ejus valore, fit $\frac{bb}{cc - bb} \times tt - aa = \frac{bb}{cc - bb} \times ba + cc$ & diviso utroque membro per $\frac{bb}{cc - bb}$ transponendo $aa$, & reducendo secundum membrum ad communem denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus est $tt = \frac{cc}{cc - bb} \times aa + 2ab + cc$, sive quia PS $= a + b$ est PS$^2 - b^2 = aa + 2ab$, ideoque est $tt = \frac{cc}{cc - bb} \times$ PS$^2 - bb + cc$ nempe OT$^2 = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times$ PS$^2 - AS^2 + CS^2$ qui termini sunt omnes dati, hoc ergo invento cætera ad Ellipsim pertinentia commodè invenientur.

In gratiam notæ sequentis, ex his valorem

ſphæroidis centrum $S$ & ſemidiameter maxima $SC$: & vis, quâ ſphæ-

lorem quantitatis $\frac{t^2+s^2-PO^2}{t^2}$ determinabimus, quam eſſe æqualem quantitati $\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$, ita ex valoribus ſupra inventis ſtatuitur; Eſt $ss=\frac{bbt^2}{c^2-b^2}$ ex tertiâ Æquatione, unde erit $s^2+t^2=\frac{b^2t^2+c^2t^2-b^2t^2}{c^2-b^2}=\frac{c^2t^2}{c^2-b^2}$, ideoque $\frac{s^2+t^2}{t^2}=\frac{c^2}{c^2-b^2}=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}$. Eſt verò $AO=s-p$, & $PO=PA+AO=a+s-p$, & cum ſit $s-p=\frac{b}{cc-bb}\times\overline{ba+cc}$ (ex ſecundâ Æquatione) eſt $PO=a+\frac{b}{cc-bb}\times\overline{ba+cc}$, quo valore reducto ad communem denominatorem, deletiſque terminis ſeſe deſtruentibus eſt $PO=\frac{cc}{c^2-b^2}\times a+b$ ſive $=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times PS$, cumque ſit $t^2=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times\overline{PS^2-AS^2+CS^2}$ eſt $\frac{PO}{t^2}=\frac{PS}{PS^2-AS^2+CS^2}$ & $\frac{PO^2}{t^2}=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times\frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$. Unde tandem eſt $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2}=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}-\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times\frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ ſive $=\frac{CS^2}{CS^2-AS}\times1-\frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ reducendoque ad eumdem denominatorem, deletiſque terminis ſeſe deſtruentibus $=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times\frac{-AS^2+CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}=\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ diviſo numeratore & denominatore per $CS^2-AS^2$. Eſt ergo $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2}=\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ Q. E. D.

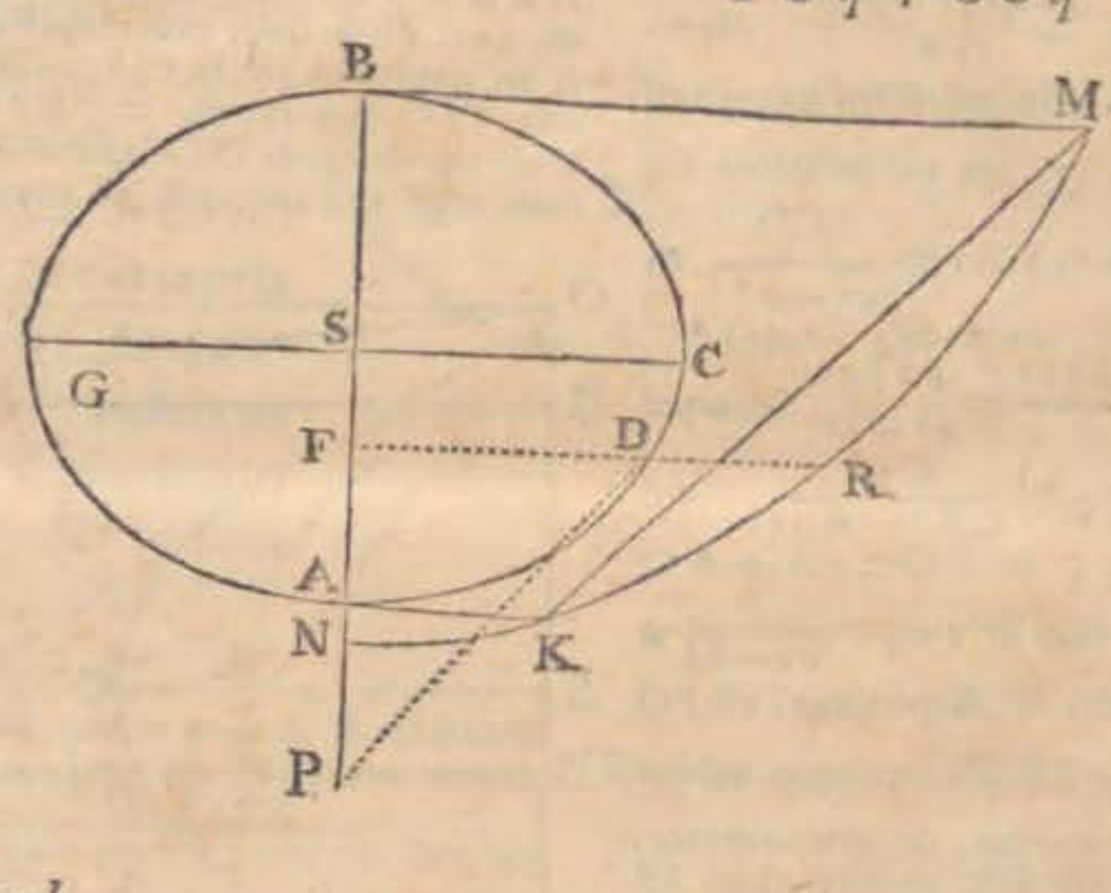
544. Sit autem curvâ data ACB circulus, ita ut ſphæroïs ejus convolutione genita, ſit accurata ſphæra, erit curva NKRM Parabola, ſtantibus enim quæ in nº. 542. dicta ſunt, erit ut prius $PE=a+x$, & ex naturâ Circuli $EF^2=2bx-xx$, unde erit $PF^2$ quadratum $=PE^2+EF^2=a^2+2ax+xx+2bx-xx=a^2+2ax+2bx$; cum ergo ordinata ER ad curvam NKRM




ſumatur æqualis PF, ejus ordinatæ quadratum erit æquale abſciſſæ ipſi per quantitates conſtantes ductæ, ſed ultra primum gradum non aſſurgenti, quæ eſt Parabolæ proprietas. Dicatur ergo ejus Parabolæ latus rectum $l$, diſtantiâ verticis N à vertice A curvæ ACB dicatur $p$, abſciſſa NE erit $p+x$ & ex Parabolæ natura erit ordinatæ ER quadratum $=lp+lx$ conferatur hic valor cum valore ejuſdem $ER^2$ ſupra invento $a^2+2ax+2bx$, termini conſtantes cum conſtantibus & qui variabilem includunt cum ſimilibus, fient duæ Æquationes $lp=a^2$, & $l=2a+2b=2PS$,

DE MOTU CORPORUM.

sphærois (†) trahit corpus $P$, erit ad vim, quâ sphæra diametro $AB$ descripta trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$




ad $\frac{AS\ cub.}{3\ PS\ quad.}$. Et eodem computandi fundamento invenire licet vires segmentorum sphæroidis.

ideoque $p = \frac{a^2}{2a+2b} = \frac{PA^2}{2PS}$; & cum ex natura Parabolæ, sit $ER^2 = l \times p + x$ erit $p + x = NE = \frac{ER^2}{2PS}$; Cumque area Parabolica inter abscissam, ordinatam, & curvam intercepta sit æqualis duobus tertiis Rectanguli abscissæ per ordinatam, erit area Parabolica $NER = \frac{\frac{2}{3}ER^3}{2PS} = \frac{ER^3}{3PS}$, & quoniam, ex constructione, ordinatæ in A & B erectæ sunt æquales PA & PB, erit area Parabolica $PAK = \frac{PA^3}{3PS}$ & area Parabolica $PBM = \frac{PB^3}{3PS} = \frac{PA+2AS^3}{3PS}$ & differentia harum arearum AKRMB respondens axi Sphæræ AB, erit $\frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$, & denique dempto trapezio AKMB, segmentum Parabolicum residuum KRM erit æquale $\frac{2AS^3}{3PS}$, trapezium enim AKMB est æquale $\frac{1}{2}AB \times \overline{AK + BM}$ sive (quia $\frac{1}{2}AB = AS$, $AK = PA$ & $BM = PB = PA + 2AS$) est æquale $2AS \times PA + 2AS^2$, & reducendo ad denominatorem $3PS$ sive $3PA + 3AS$ est æquale $\frac{6AS \times PA^2 + 12AS^2 \times PA + 6AS^3}{3PS}$ quod deductum ex area $AKRMB = \frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$ remanet $\frac{2AS^3}{3PS}$. Q. E. D.

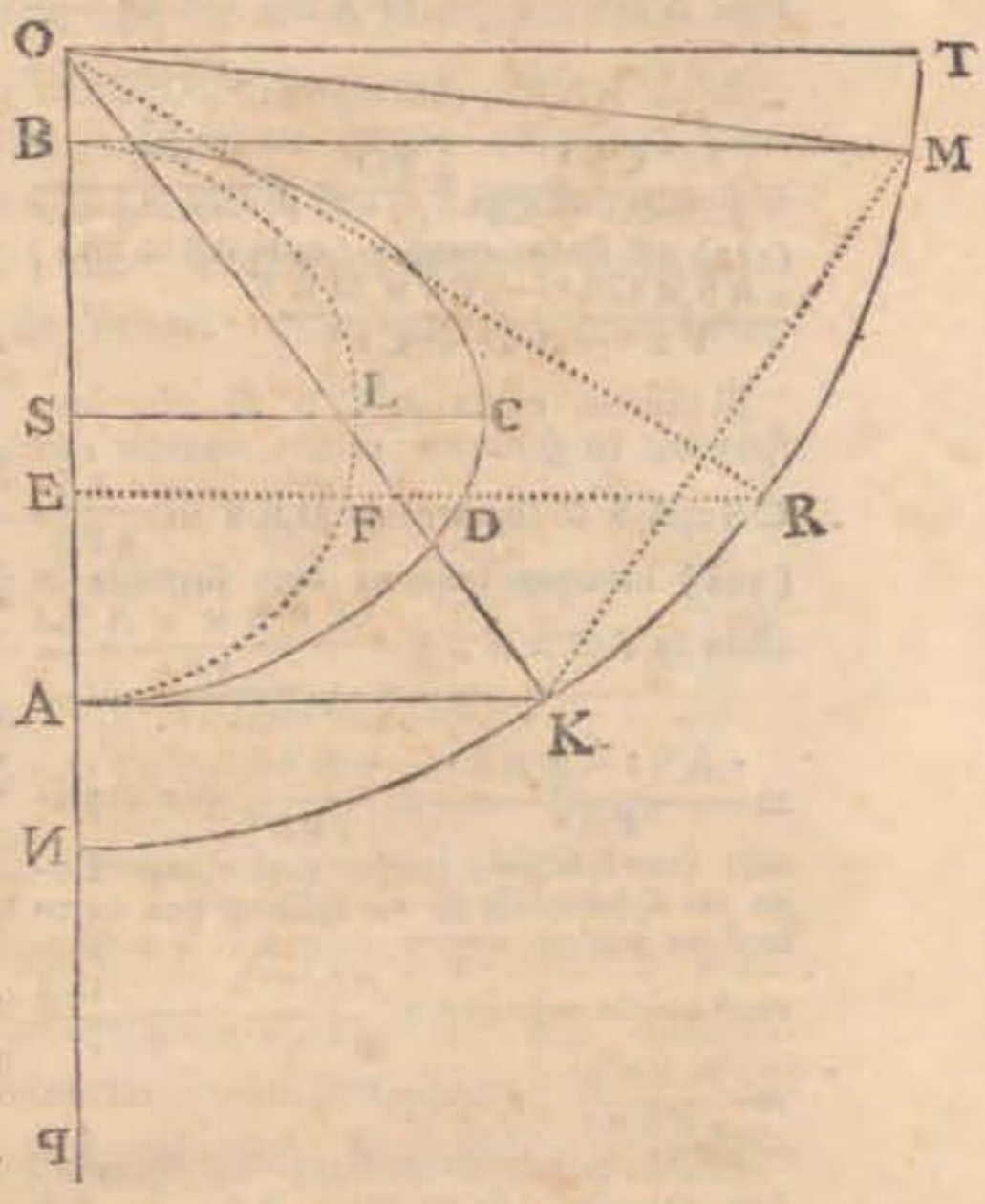
(†) 545. *Vis quâ sphæris trahit corpus P est ad vim quâ sphæra Diametro AB descripta trahit idem corpus ut* $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ ad $\frac{AS^3}{3PS^2}$.

Supponatur juxta solutionem hujusce Problematis, curvam describi secundum AB, cujus

jus ordinatæ singulo puncto E applicatæ sint æquales vi quâ corpus P à circulo cujus radius est E D trahitur; ea vis est per Cor. 1. Prop. XC. ut $1-\frac{PE}{PD}$, sit OE hujus curvæ abscissa sumpta à puncto O (centro curvæ N K R M juxta notam 543. determinatæ) dicaturque $z$, ejus fluxio erit $dz$, fluxio itaque areæ curvæ quæ exhibet vim sphæroidis erit $dz-\frac{PE}{PD}dz$, cumque sit PE = PO − OE = PO − $z$ & PD = ER ordinatæ curvæ N K R M, per constructionem, sitque ER (ut facile deducitur ex n°. 543) $=\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}$, fluxio ejus areæ erit $dz-\frac{PO\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}+\frac{z\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$.

Terminorum positivorum $dz+\frac{z\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ fluens est $z-\frac{s}{t}\sqrt{ss-zz}$ (165) sed ut $z$ = OE & $\frac{s}{t}\sqrt{ss-zz}=\frac{ss}{tt}\times\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}$ $=\frac{ss}{tt}$ ER fluxio terminis positivis respondens est OE $-\frac{ss}{tt}$ ER, & area toti lineæ OA respondens est OA $-\frac{s^2}{t^2}$ AK, ex quâ demenda area parti OB respondens secundum quam curva quæ vim sphæroidis exprimit non ducitur quæque est OB $-\frac{s^2}{t^2}$ BM, utque per constructionem AK = AP, & BM = PB = BA + AP erit vera fluens OA − OB − $\frac{s^2}{t^2}\times\overline{AP-BA-AP}=AB+\frac{s^2}{t^2}AB$ $=AB\times\frac{s^2+t^2}{t^2}$.

Tertii termini $\frac{PO\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ fluens sic invenitur, Sectoris Elliptici TOK fluxio est (424) $\frac{\frac{1}{2}\,ss\,dz}{\sqrt{ss-zz}}$ multiplicetur per $\frac{2PO}{tt}$ nascetur terminus propositus $\frac{PO\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ unde fluens termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per $\frac{2PO}{t^2}$ multiplicatus, sed quoniam area quæsita non respondet toti OA, sed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quæsitæ ex tertio termino inveniendo est sector TOK $\times\frac{2PO}{t^2}$ demp-



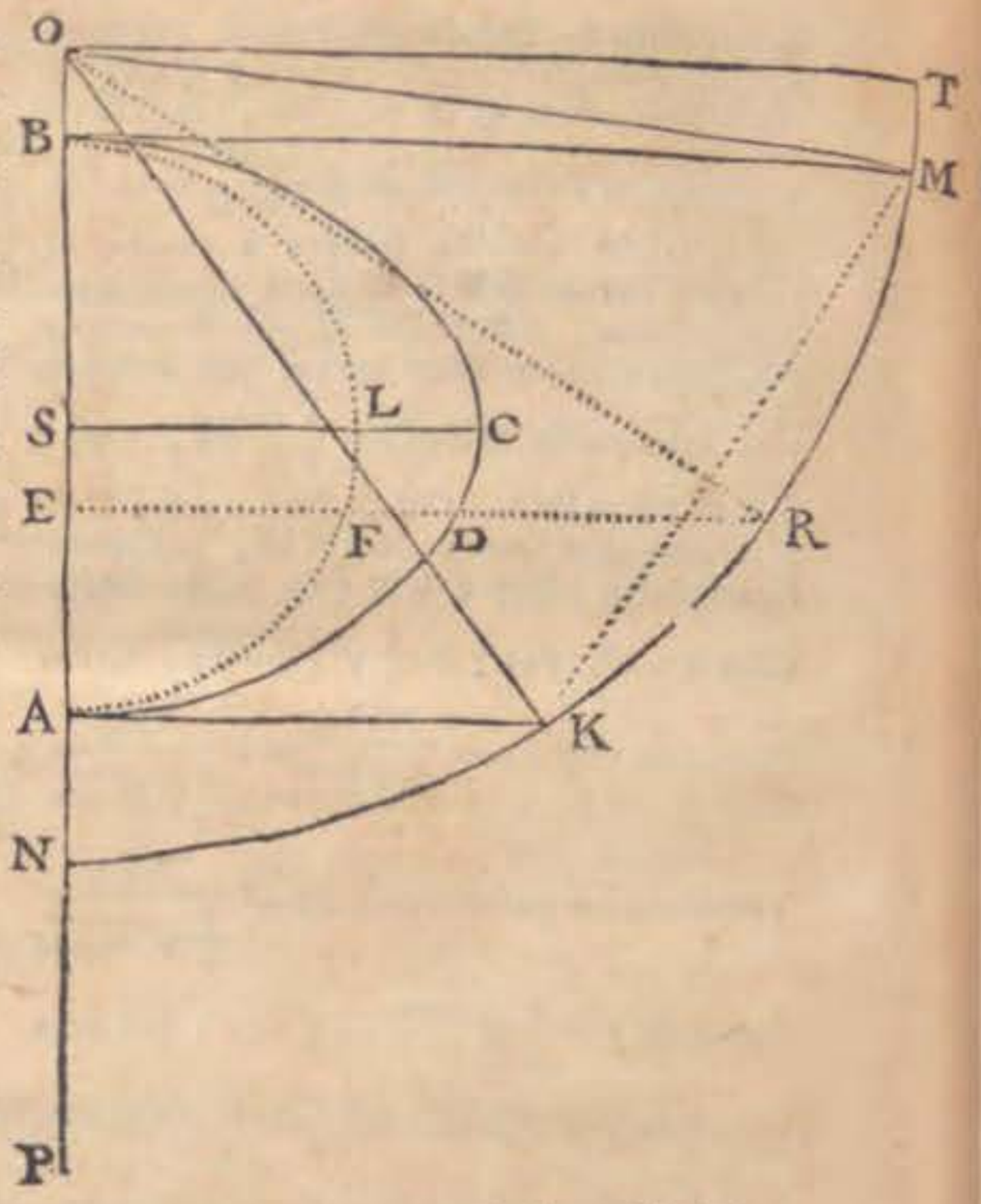

to sectore TOM $\times\frac{2PO}{t^2}$ sive sector MOK $\times\frac{2PO}{t^2}$; Dividitur autem sector MOK in figuram rectilineam MOK & mixtilineam MRK; Triangulum MOK valet $\frac{1}{2}$ PO $\times$ AB, nam producatur recta MK pertinget ad P, propter PA = AK & PB = BM, totum verò Triangulum OMP $=\frac{1}{2}$ OP $\times$ BM $=\frac{1}{2}$ OP $\times$ PB, & Triangulum OKP $=\frac{1}{2}$ OP $\times$ AK $=\frac{1}{2}$ OP $\times$ AP, unde sublato Triang. OKP ex Triang. OMP, remanet Triang. OMK

DE MOTU CORPORUM.

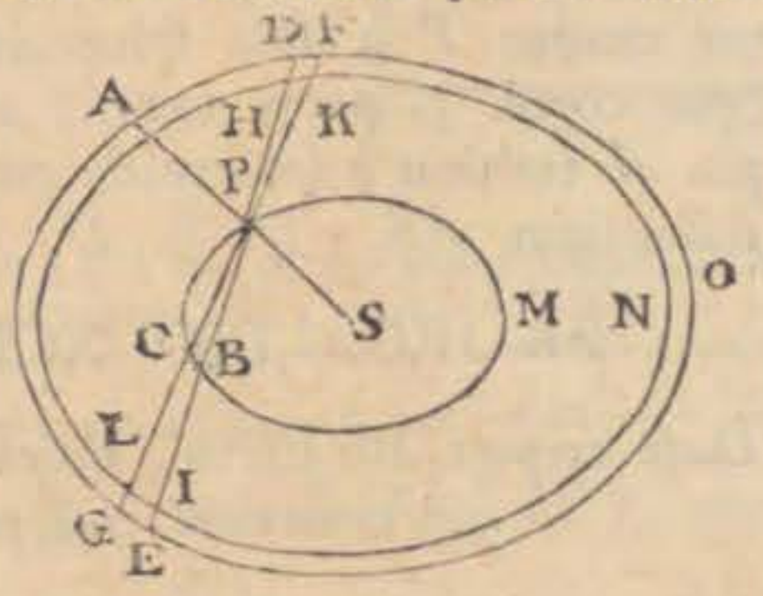
$= \frac{1}{2} OP \times PB - AP = \frac{1}{2} OP \times AB$. Unde tandem fluens quæsita hujus tertii termini est $\frac{2PO}{t^2} \times \frac{1}{2} OP \times AB + \frac{2PO}{t^2} \times MRK = \frac{PO^2}{t^2} \times AB + \frac{2PO}{t^2} \times MRK$, quæ detracta ex fluente terminorum positivorum $AB \times \frac{s^2+t^2}{t^2}$ fit $AB \times \frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2} - \frac{2PO}{t^2} \times MRK$, cum ergo fit $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ & $\frac{PO}{t^2} = \frac{PS}{PS^2-AS^2+CS^2}$ (543) est fluens quæsita (quia $AB = 2AS$) $\frac{2AS \times CS^2 - 2PS \times MRK}{PS^2-AS^2+CS^2}$.

Si autem curva A C B sit circulus, sphærois in sphæram veram mutatur, fit $CS = AS$ & segmentum MRK fit $\frac{2AS^3}{3PS}$ (544) ideoque mutatur hæc formula in istam $\frac{2AS \times AS^2 - \frac{2PS \times 2AS^3}{3PS}}{PS^2-AS^2+AS^2}$. $= \frac{2AS^3 - \frac{4}{3}AS^3}{PS^2} = \frac{2AS^3}{3PS^2}$ quæ exprimet vim sphæræ; itaque divisa expressione vis sphæroidis & vis sphæræ per communem multiplicatorem 2; Erit *vis sphæroidis ad vim sphæræ ut* $\frac{AS \times CS^2 - PS \times MRK}{PS^2-AS^2+CS^2}$ *ad* $\frac{AS^3}{3PS^2}$. Q. E. D.

Potest etiam determinari vis sphæræ, hoc calculo, fit ut prius $PA = a$, $AB = 2b$, abscissa $AE = x$, $PF = v$, erit $PE^2 = a^2 + 2ax + xx$, & $EF^2 = 2bx - xx$ (ex naturâ circuli) ideoque $PF^2 (vv) = a^2 + 2ax + 2bx$, unde invenitur $x = \frac{vv-a^2}{2 \times a+b}$ & $dx = \frac{2v\,dv}{2 \times a+b} = \frac{v\,dv}{a+b}$ & $PE = a + x = \frac{a^2+2ab+vv}{2 \times a+b}$ & $\frac{dx}{PF} = \frac{dv}{a+b}$. Itaque, cum fluxio areæ quæ exprimit vim sphæræ fit per Cor. 1. Prop. xc. ut $dx - \frac{PE\,dx}{PF}$, erit ea fluxio ut $dx - \frac{a^2+2ab+vv}{2 \times a+b^2} dv$ cujus fluens est $x - \frac{a^2v+2abv+\frac{1}{3}v^3}{2 \times a+b^2} + Q$ *const.*, quæ evanescere debet ubi $x = o$ & $v = a$ ideoque est $- \frac{a^3+2a^2b+\frac{2}{3}a^3}{2 \times a+b^2} + Q = o$, & $Q = \frac{\frac{4}{3}a^3+2a^2b}{2 \times a+b^2}$: Vis autem totius Sphæræ obtinetur si fiat $x = AB$ $(2b)$ & $v = PB$ $(a+2b)$, estque ideo $2b + \frac{\frac{4}{3}a^3+2a^2b-a^3-4a^2b-4ab^2-\frac{1}{3}a^3-2a^2b-4ab^2-\frac{8}{3}b^3}{2 \times a+b^2} = 2b - \frac{4a^2b+8ab^2+\frac{8}{3}b^3}{2 \times a+b^2} = 2b \times 1 - \frac{2a^2+4ab+\frac{4}{3}b^2}{2 \times a+b^2}$, & reducendo ad eumdem denominatorem $= 2b \times \frac{2a^2+4ab+2b^2-2a^2-4ab-\frac{4}{3}b^2}{2 \times a+b^2} = 2b \times \frac{\frac{2}{3}b^2}{2 \times a+b^2}$ sive ponendo AS pro $b$, & PS pro $a+b$ dividendoque numeratorem & denominatorem per 2, vis tota Sphæræ est $\frac{2AS^3}{3PS^2}$. Q. E. I.



*Corol.* 3. Quod ſi corpuſculum intra ſphæroidem in axe collocetur, attractio erit ut ipſius diſtantia à centro. Id quod facilius hoc argumento colligitur, ſive particula in axe ſit, ſive in aliâ quâvis diametro datâ. Sit *AGOF* ſphærois attrahens, *S* centrum ejus, & *P* corpus attractum. Per corpus illud *P* agantur tum ſemidiameter *SPA*, tum rectæ duæ quævis *DE*, *FG* ſphæroidi hinc inde occurrentes in *D* & *E*, *F* & *G*; ſintque *PCM*, *HLN* ſuperficies ſphæroidum duarum interiorum, exteriori ſimilium & concentricarum, quarum prior tranſeat per corpus *P*, & ſecet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, poſterior ſecet eaſdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem ſphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* ſibi mutuò æquales; (y) propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG* deſignare conos oppoſitos, angulis verticalibus *DPF*, *EPG* infinitè parvis deſcriptos, & lineas etiam *DH*, *EI* infinitè parvas eſſe; & conorum particulæ ſphæroidum ſuperficiebus abſciſſæ *DHKF*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, (z) erunt ad invicem ut quadrata diſtantiarum ſuarum à corpuſculo

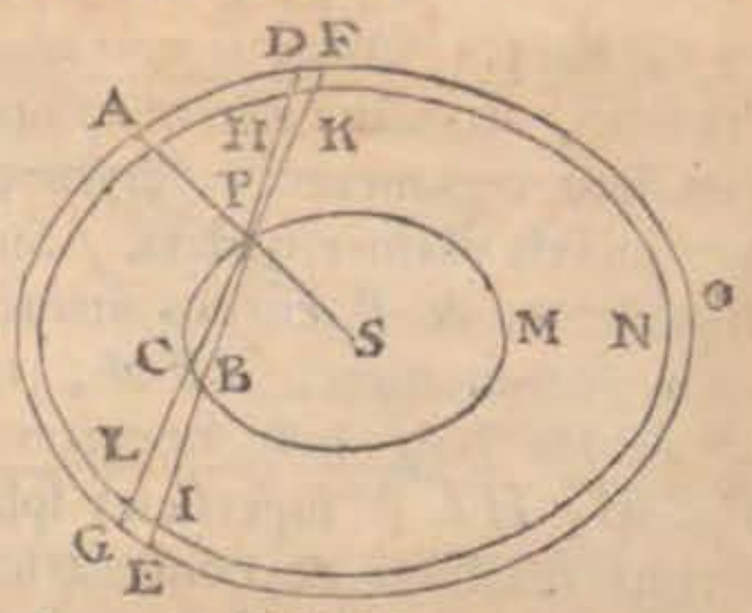



(y) * *Propterea quod rectæ DE, PB, &c.* Cum enim tres ellipſes AGO, HLN, PCM ſimiles ſint, idemque centrum & axes communes ac proinde communes etiam diametros homologas habeant, patet lineas DE, HI, PB eſſe in tribus illis ellipſibus ad communem diametrum ordinatas, idemque dicendum eſſe de tribus lineis FG, KL, PC. Nam ſi per punctum A, in ellipſi AGO homologum puncto P in ellipſi PCM ducta intelligatur recta ipſi PB, ſeu DE parallela, hæc linea ordinata erit ad eandem ellipſeos AGO diametrum ad quam in ellipſi PCM ordinata eſt linea PB, atque adeò rectæ DE, PB ſunt ad eandem diametrum ordinatæ, idemque eodem modo de cæteris lineis oſtendi poteſt. Quare ab illâ communi diametro rectæ DE, PB, & HI, biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, PC, & KL a ſuâ communi diametro.

(z) * *Erunt ad invicem &c.* Si ex punctis D & E in lineam FG demiſſa intelligantur perpendicula infinite parva p, & P, hæc, ob angulos DPF, FPG, æqua-

DE MOTU CORPORUM.

culo $P$, & propterea corpuſculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, ſi ſuperficiebus ſphæroidum innumerarum ſimilium concentricarum & axem communem habentium dividantur ſpatia $DPF$, $EGCB$ in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus $P$ in partes contrarias. Æquales igitur ſunt vires coni $DPF$ & ſegmenti conici $EGCB$, & per contrarietatem ſe mutuo deſtruunt. Et par eſt ratio virium materiæ omnis extra ſphæroidem intimam $PCBM$. Trahitur igitur corpus $P$ à ſola ſphæroide intimâ $PCBM$, & propterea (per corol. 3. prop. LXXII.) attractio ejus eſt ad vim, quâ corpus $A$ trahitur à ſphæroide totâ $AGOD$, ut diſtantia $PS$ ad diſtantiam $AS$. *Q. E. D.*




## PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

*Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta ſingula tendentium.*

E corpore dato formanda eſt ſphæra vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) (a) inveniri poteſt. Dein factis experimentis invenienda eſt vis attractionis in diverſis

æquales, erunt ut diſtantiæ DP, EP, Sed quoniam evaneſcentibus angulis DPF, EPG, lineæ DH, FK & GL, EI, fiunt parallelæ, erit ſuperficies DHKF, ad ſuperficiem GLIE, ut rectangulum $p \times \frac{DH+FK}{2}$, ad rectangulum $P \times \frac{GL+EI}{2}$, hoc eſt, (ob $DH+FK=LG+EI$) ut $p$ ad $P$, ſeu ut DP ad EP. Quarè ſi DPF, EPG conos vel pyramides in ſphæroide AGO deſignent, ſolida DHKF, GLIE erunt ut ſuperficies prædictæ in perpendicula perpendiculis $p$, $P$, ſimilia ductæ, hoc eſt, ut quadrata diſtantiarum DP, EP. Quoniam igitur vis quâ particula ſolida DHFK trahit corpuſculum P eſt ad vim quâ illud trahitur à particulâ ſolidâ GLIE, ut ſolidum $\frac{DHKF}{DP^2}$, ad ſolidum $\frac{GLIE}{EP^2}$, hoc eſt, ut $\frac{DP^2}{DP^2}$, ad $\frac{EP^2}{EP^2}$, manifeſtum eſt corpuſculum P utrinque æqualiter attrahi.

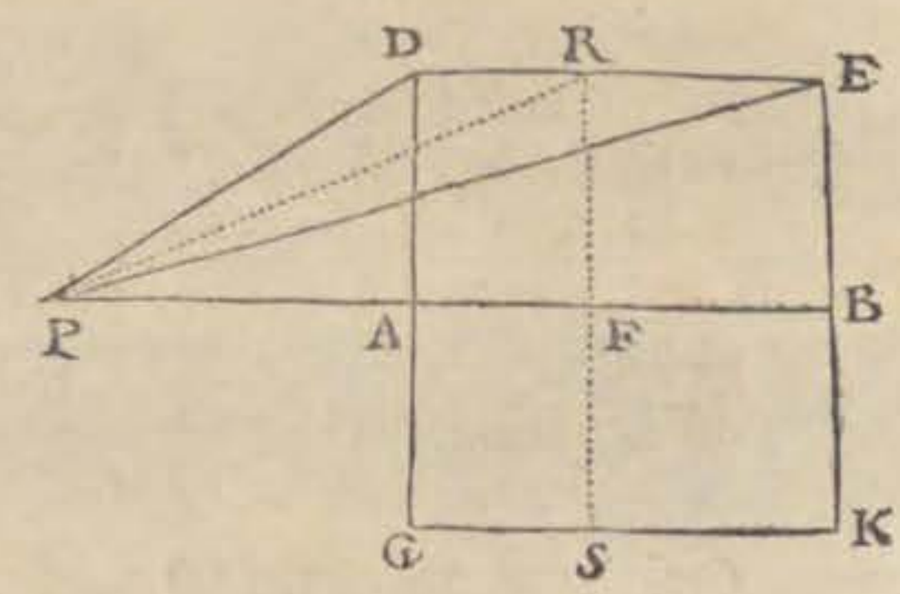
(a) * *Inveniri poteſt.* Hoc eſt per propoſitiones citatas inveniri poteſt generalis expreſſio ſeu formula attractionis corpuſcu-

fis diſtantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium ſingularum, quam invenire oportuit. LIBER PRIMUS. PROP. XCII. PROBL. XLVI.

## PRO-

puſculi in ſphæram vel cylindrum aliamve figuram regularem, & lex attractionis corpuſculi in eandem figuram experimentis inventa conferri debet cum generali illâ formulâ, & indè habebitur æquatio cujus ope determinari poterit formulæ generalis exponens indeterminata, quæ exhibebit attractionem in ſingulas particulas materiæ.

Exemplum. In cylindrum ADEKG trahatur corpuſculum P, ſitum in ejus axe AB, ut in prop. XCI; ſupponaturque vis in ſingulas cylindri particulas tendens reciprocè ut diſtantiæ dignitas cujus index n, & dicatur $PA=a$, $PD=b$, $PB=c$, $PE=e$, $RF=g$, $PF=x$, $PR=y$, eritque $yy=xx+gg$, ideoque $y\,dy=x\,dx$. Quare fluxio vis quâ corpuſculum P in cylindrum ADRSG trahitur, erit (541) ut $\frac{dx}{x^{n-2}}-\frac{x\,dx}{y^{n-1}}=\frac{dx}{x^{n-2}}-\frac{y\,dy}{y^{n-1}}=x^{2-n}\,dx-y^{2-n}\,dy$; cujus fluens $=\frac{x^{3-n}-y^{3-n}+Q\ conſt.}{3-n}$; hæc autem evaneſcit, ubi $x=a$, & $y=b$; Quare erit $Q=b^{3-n}-a^{3-n}$, & fluens accurata $=\frac{b^{3-n}-a^{3-n}+c^{3-n}-e^{3-n}}{3-n}$, ubi $x=c$, & $y=e$. Jam verò vis quâ corpuſculum P in totum cylindrum ADEKG trahitur, experimentis inventa ſit ut $b-a+c-e$, & habebitur æquatio $b-a+c-e=\frac{b^{3-n}-a^{3-n}+c^{3-n}-e^{3-n}}{3-n}$, ex quâ determinandus eſt valor indicis generalis $n$. Porro poſito $n=2$, æqualia fiunt æquationis membra ergo vis in ſingulas cylindri particulas tendens erit reciprocè ut quadratum diſtantiæ à particulâ, quemadmodum in cor. I. prop. XCI. poſitum eſt. Verum ſi hâc ratione, varios tentando numeros, non poteſt indicis generalis $n$ valor inveniri, ponatur $3-n=z$, & vis corpuſculi in cylindrum experimentis reperta ſit ut quantitas $q$; & erit $qz=b^z-a^z+c^z-e^z$. Fiat $a^z=p$, $b^z=v$, $c^z=r$,



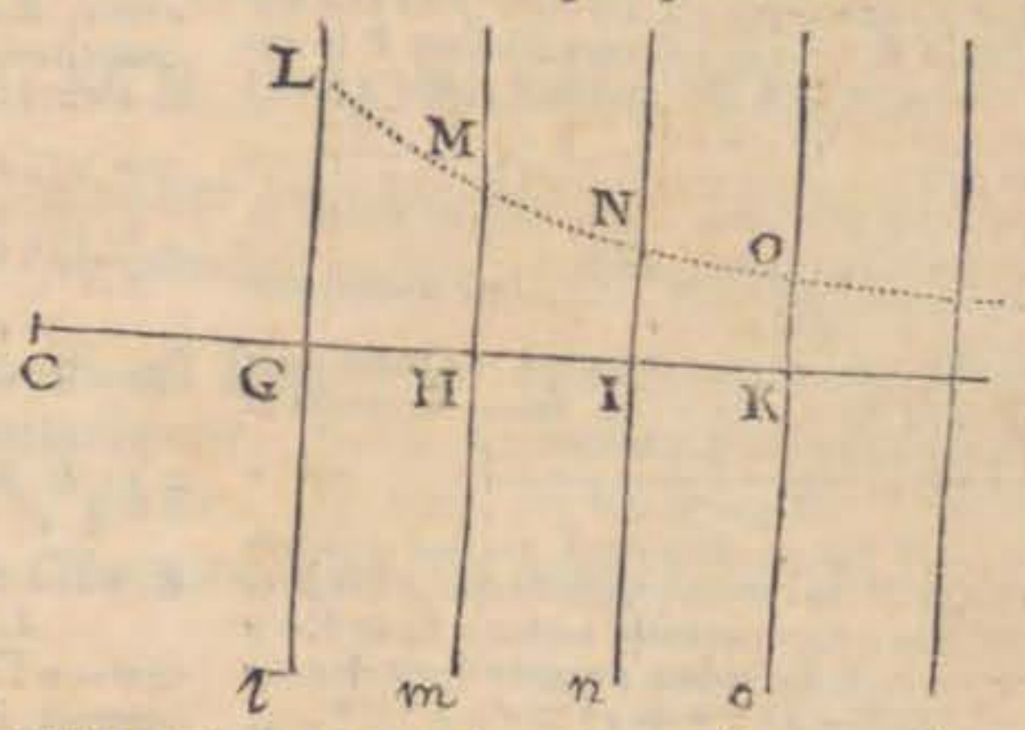

$e^z=s$, & erit (L ſignificante Logarithmum quantitatis cui præfigitur) $L.\,a^z=L.\,p$, $L.\,b^z=L.\,v$, $L.\,c^z=L.\,r$, $L.\,e^z=L.\,s$, adeoque $z\,L.\,a=L.\,p$, & $z=\frac{L.\,p}{L.\,a}=\frac{L.\,v}{L.\,b}=\frac{L.\,r}{L.\,c}=\frac{L.\,s}{L.\,e}$. Unde $\frac{L.\,a\times L.\,v}{L.\,b}=L.\,p$, atque adeo $L.\,v\frac{L.\,b}{L.\,a}=L.\,p$, proindeque $v\frac{L.\,b}{L.\,a}=p$, & ſimili modo invenietur $v\frac{L.\,c}{L.\,b}=r$, & $v\frac{L.\,e}{L.\,b}=s$. Quare æquatio erit $\frac{q.\,L.\,v}{L.\,b}=v-v\frac{L.\,a}{L.\,b}+v\frac{L.\,c}{L.\,b}-v\frac{L.\,e}{L.\,b}$, quæ ab exponente indeterminata libera eſt. Ut autem tollatur etiam $L.\,v$, ponatur $v=t+1$, & (383) erit $L.\,v=L.\,t+1=t-\frac{1}{2}tt+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{5}t^5-$&c. in infinit. Si itaque in æquatione modo inventa loco $v$ ſcribatur $t+1$, & loco $L.\,v$ ſeries $t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3-$&c., obtinebitur æquatio ab exponentibus & logarithmis indeterminatis libera, ex quâ per reverſionem ſerierum inveniretur valor quantitatis $t$, & indè reperietur $L.\,v$, atque per $L.\,v$ habebitur valor

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

*Si ſolidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus infinitum, conſtet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in receſſu à ſolido decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis diſtantiarum pluſquam quadraticæ, & vi ſolidi totius corpuſculum ad utramvis plani partem conſtitutum trahatur: dico quod ſolidi vis illa attractiva, in receſſu ab ejus ſuperficie planâ, decreſcet in ratione poteſtatis, cujus latus eſt diſtantia corpuſculi à plano, & index ternario minor quam index poteſtatis diſtantiarum.*

*Caſ.* 1. Sit $LGl$ planum quo ſolidum terminatur. Jaceat ſolidum autem ex parte plani hujus verſus $I$, inque plana innumera $mHM$, $nIN$, $oKO$, &c. ipſi $GL$ parallela reſolvatur. Et primo collocetur corpus attractum $C$ extra ſolidum. Agatur autem $CGHI$ planis illis innumeris perpendicularis, & decreſcant vires attractivæ punctorum ſolidi in ratione poteſtatis diſtantiarum, cujus index ſit numerus $n$ ternario non minor. Ergo




(per

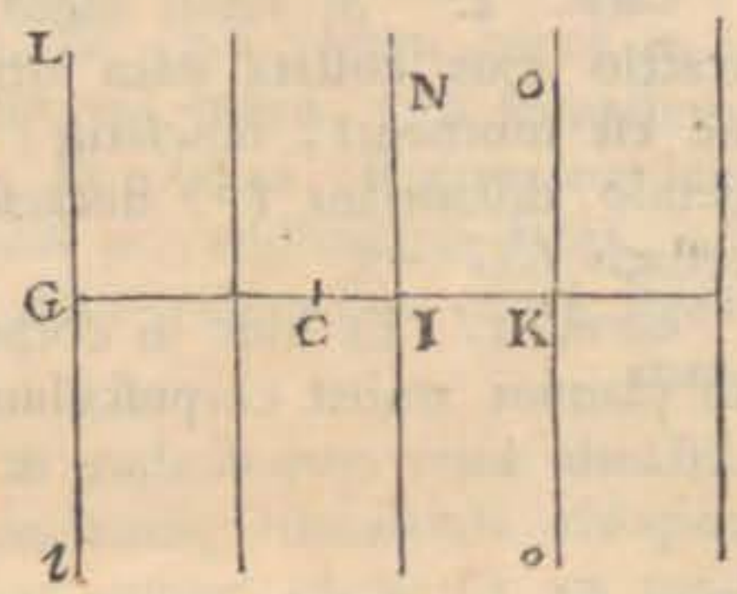
lor indicis $z$, & inde valor ipſius $n$. Nam cum ſit $z = \frac{L.v}{L.a}$, & $L.v = L.t + 1$, erit $z = \frac{L.t+1}{L.a}$, & $n = 3 - z = 3 - \frac{L.t+1}{L.a}$.

Si in æquatione vel quantitate exponentiali propoſita, indeterminata $z$ in ſolis quantitatum datarum exponentibus reperiretur, hæc æquatio vel quantitas ſuperiori methodo poſſet ad aliam reduci numero terminorum finitam, in quâ nulla eſſet amplius exponens vel logarithmus indeterminata. Nam ſi $q = fa^z + gb^{2z} + hc^{4z}$ + &c., ſitque $v = a^z$ erit $q = fv +$

2 L.

(per corol 3. prop. xc.) vis, quâ planum quodvis $mHM$ trahit punctum $C$, (b) est reciprocè ut $CH^{n-2}$. In plano $mHM$ capiatur longitudo $HM$ ipsi $CH^{n-2}$ reciproce proportionalis, & erit vis illa ut $HM$. Similiter in planis singulis $lGL$, $nIN$, $oKO$, &c. capiantur longitudines $GL$, $IN$, $KO$, &c. ipsis $CG^{n-2}$, $CI^{n-2}$, $CK^{n-2}$, &c. reciprocè proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, ideoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area $GLOK$ in infinitum versus $OK$ producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciprocè ut $CG^{n-3}$, & propterea vis solidi totius est reciprocè ut $CG^{n-3}$. *Q. E. D.*

*Cas.* 2. Collocetur jam corpusculum $C$ ex parte plani $lGL$ intra solidum, & capiatur distantia $CK$ æqualis distantiæ $CG$. Et solidi pars $LGloKO$, planis parallelis $lGL$, $oKO$ terminata, corpusculum $C$ in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuò per æqualitatem tollentibus. Proinde corpusculum $C$ solâ vi solidi ultra planum

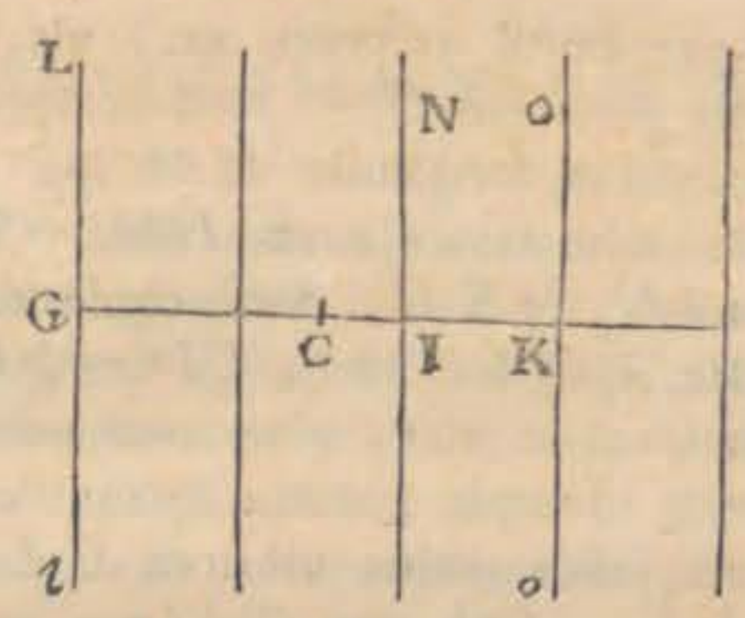



$\frac{2L.b}{L.a}gv + \frac{4L.c}{L.a}hv +$ &c. erit enim $z = \frac{L.v}{L.a}$ & $b^{2z} = b^2\frac{L.v}{L.a}$ & $Lb^{2z} = \frac{2L.v}{L.a}L.b = \frac{2L.b}{L.a}L.v$, unde est $b^{2z} = v^{\frac{2L.b}{L.a}}$ & sic de cæteris.

(b) * *Est reciprocè &c.* Sit $CH = x$, erit $MH$ ut $\frac{1}{x^{n-2}}$, (Hyp.) & areæ $GLMH$, elementum ut $\frac{dx}{x^{n-2}}$, adóque (165) area ipsa ut $Q$ *const.* $-\frac{1}{(n-3)x^{n-3}}$, quæ evanescit ubi $x = CG$. Quare $Q = \frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$, & area $GLMH$, ut $\frac{1}{(n-3)CG^{n-3}} - \frac{1}{(n-3)CH^{n-3}}$. At cum $CH$ infinita evadit, terminus $\frac{1}{(n-3)CH^{n-3}}$ evanescit fitque area infinita $GLOK$, ut $\frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$, seu ob datam $n-3$ ut $CG^{n-3}$, reciprocè.

DE MOTU CORPORUM.

num $OK$ siti trahitur. Hæc autem vis (per casum primum) est reciprocè ut $CK^{n-3}$, hoc est (ob æquales $CG$, $CK$) reciprocè ut $CG^{n-3}$. *Q. E. D.*




*Corol.* 1. Hinc si solidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis $LG$, $IN$ utrinque terminetur; (c) innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractivâ solidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NIKO$, in infinitum versus $KO$ productæ.

*Corol.* 2. Si solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo distantiam (d) decrescet quam proximè in ratione potestatis $CG^{n-3}$.

*Corol.* 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex unâ parte planum trahat corpusculum è regione medii illius plani, & distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum; vis attractiva corporis totius decrescet quamproximè in ra-

(c) * *Innotescit ejus vis &c.* Ex demonstratis attractio solidi totius LGKO, in infinitum versus O producti, est ut $\frac{1}{CG^{n-3}}$ solidi verò infiniti NICO, ut $\frac{1}{CI^{n-3}}$. Quare attractio solidi LGIN, est ut $\frac{1}{CG^{n-3}} - \frac{1}{CI^{n-3}}$.

(d) * *Decrescet quam proximè &c.* Vis enim attractiva, si corpus infinitum sit, est ut $\frac{1}{CG^{n-3}} - \frac{1}{CI^{n-3}}$; sed si perexigua sit distantia CG respectu CI, terminus $\frac{1}{CI^{n-3}}$, minimus erit respectu termini $\frac{1}{CG^{n-3}}$ & negligi poterit, ideóque attractio erit quam proximè ut $CG^{n-3}$ reciprocè. Quod tamen verum esse non potest, si fuerit $n=3$; Nam in hoc casu $\frac{1}{CH^{n-2}} = \frac{1}{CH}$, ideoque MH erit ut $\frac{1}{CH}$ & rectangulum $MH \times CH$ datum, proindeque curva LMO hyperbola, cujus asymptotus CK, & area illius finita LMNIG vim exponit solidi LGIN; area verò infinita NOKI, vim solidi infiniti NIKO.

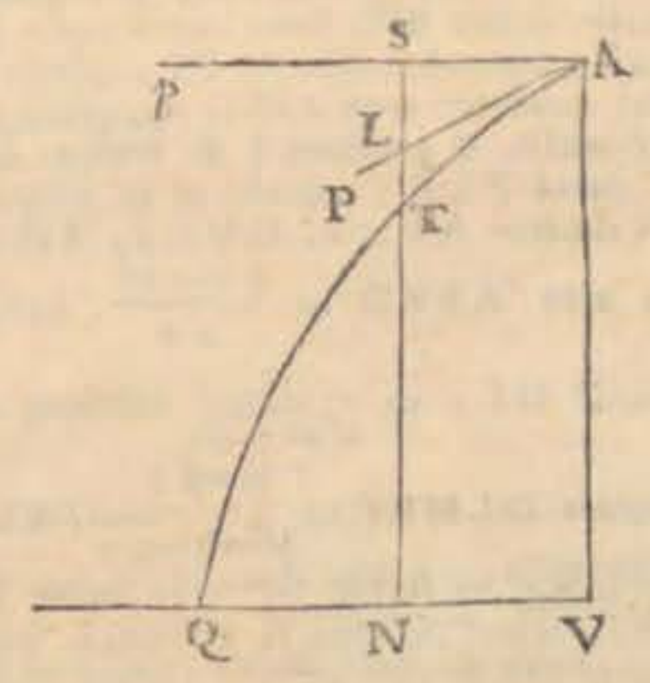
ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, & index ternario minor quam index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet; propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in corollario secundo, semper est infinitè major quam attractio partis citerioris.



## *Scholium.*

Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, & ex datâ lege attractionis quæratur motus corporis: solvetur problema quærendo (per prop. XXXIX.) motum corporis rectâ descendentis ad hoc planum, & (per legum corol. 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, (a) secundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, si quæratur lex attractionis in planum secundum lineas perpendiculares factæ, eâ conditione ut corpus attractum in datâ quâcunque curvâ lineâ mo-

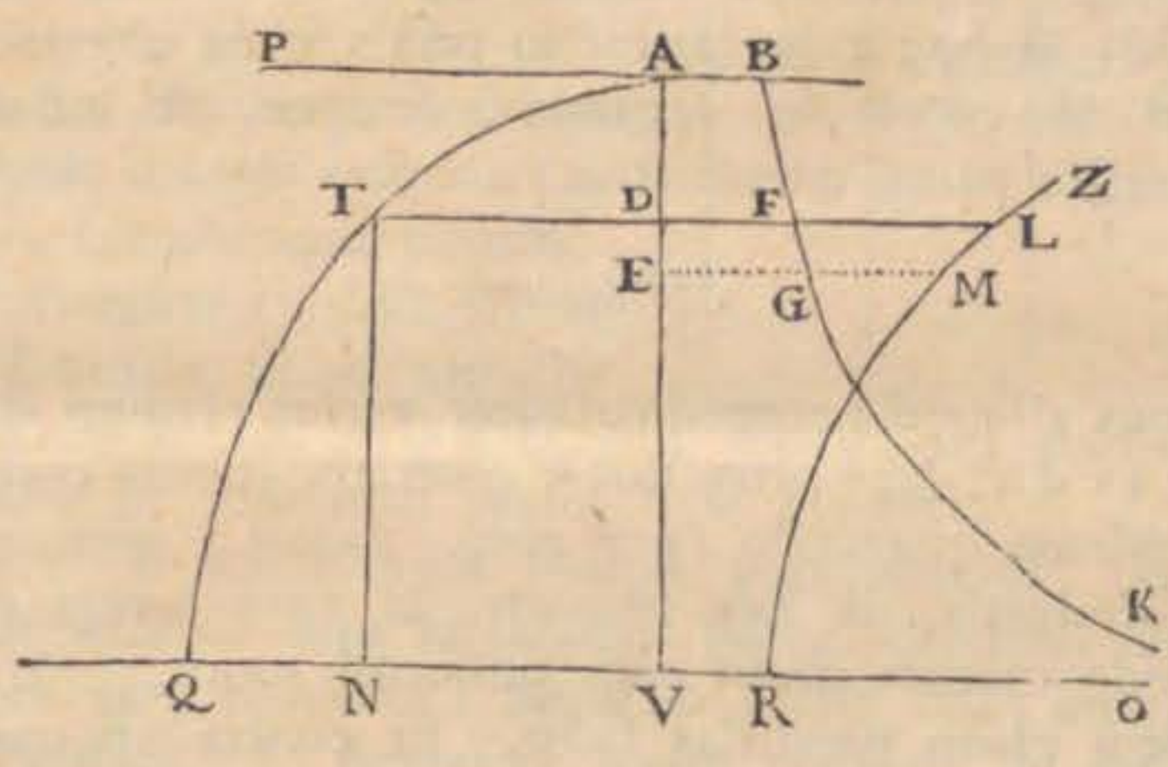
(a) 546. *Secundum lineas eidem plano parallelas &c.* Corpus A quod ad planum VQ perpendiculariter & secundum lineas lineæ AV parallelas trahitur, exeat de loco A juxtâ directionem quamlibet AP. 1°. Si projectionis directio AP plano VQ parallela fierit, dabitur tempus quo corpus, datâ velocitate uniformi projectionis, percurreret lineam AS, & per prop. 39. inveniretur in lineâ SN lineæ AV parallelâ spatium ST quod corpus vi attractrice eodem tempore describit, & hinc habebitur punctum T in trajectoriâ ATQ, quam corpus utroque motu, impresso nimirum & ex vi attractrice genito describit. 2°. Si directio projectionis AP plano trahenti VQ parallela non est, ductâ AS plano VQ & SL rectæ AV parallelis, motus projectionis AL resolvatur in motus AS & SL, & datis velocitatibus uniformibus AS & SL, dabuntur tum tempus quo percurritur AS, tum spatium ST quod corpus hoc eodem tempore describit ex vi attractrice & motu impresso SL simul (per cor. 3. prop. 39.) unde habebitur punctum T trajectoriæ ATQ cujus omnia puncta eodem modo possunt inveniri.



DE MOTU CORPORUM.

moveatur, (b) ſolvetur problema operando ad exemplum problematis tertii.

Ope-



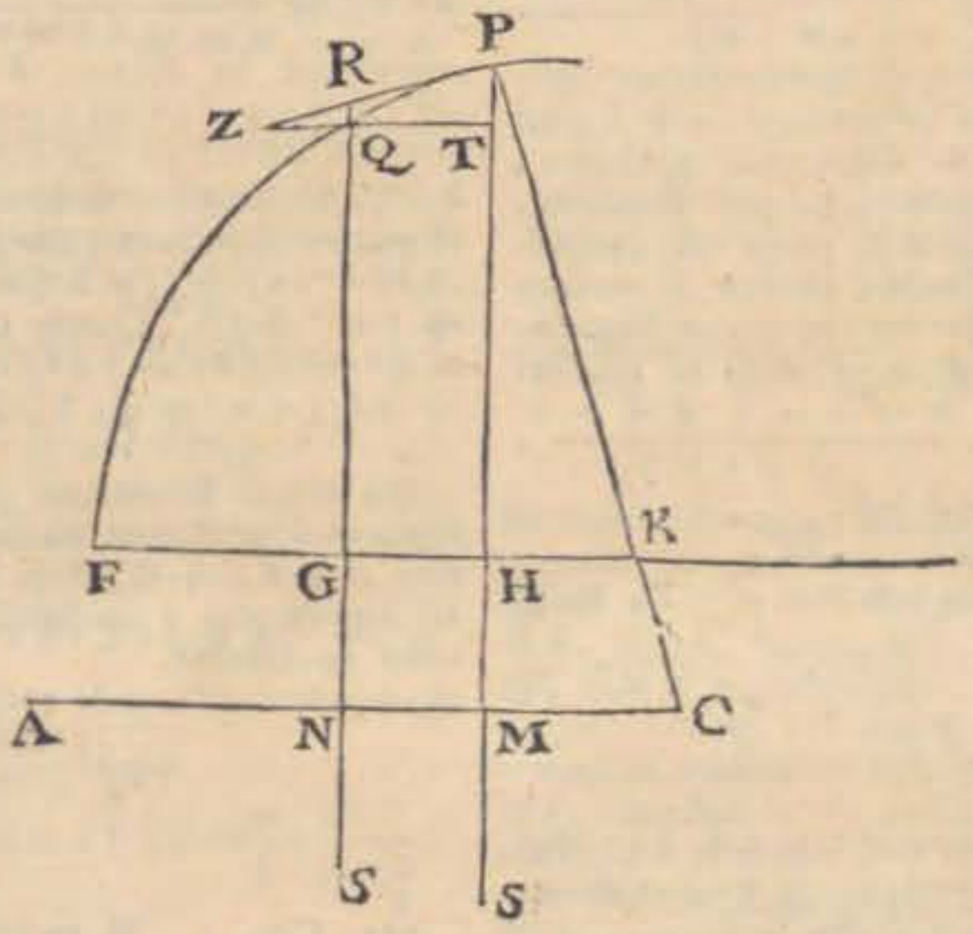

Exemplum. Exeat corpus de loco A ſecundum directionem A P plano trahenti V Q parallelam, & ductâ DT eidem plano parallelâ, ſit vis trahens in totâ lineâ D T, ut D V cubus reciprocè. De loco D, erigatur ſemper D F perpendicularis ad A V & vi trahenti in lineâ D T proportionalis, ſitque BFG linea curva quam punctum G perpetuò tangit. In DF capiatur DL lateri quadrato areæ ABFD reciprocè proportionalis, & punctum L ſit ſemper in lineâ curvâ Z L R, prorsùs ut in prop. 39. Jam dicatur $AV=a$, $DV=x$, $TD=y$, erit area ABFD ut $\frac{aa-xx}{xx}$ (430) & proindè DL, ut $\frac{x}{\sqrt{aa-xx}}$ adeóque elementum DLME, ut $\frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}}$, & area VDLR, ut hujus elementi fluens $Q-\sqrt{aa-xx}$ (165 166), evaneſcit autem area VDLR ubi $x=0$. Quare $Q=a$, & area VDLR, ut $a-\sqrt{aa-xx}$. Hinc poſitâ $x=a$, erit area VABZR, ut $a$, & area DABZL, ut $\sqrt{aa-xx}$. Porrò ſi punctum T eſt in trajectoriâ ATQ erit DT ſeu $y$ proportionalis tempori quo uniformiter deſcribitur D T, & quo motu accelerato percurritur A D ſeu (per prop. 39.) erit $y$, ut $\sqrt{aa-xx}$, adeóque $yy$ ut $aa-xx$. Unde patet trajectoriam ATQ eſſe ellipſim cujus centrum V, ſemiaxis unus V A, alter conjugatus V Q. Iiſdem poſitis & vi ad planum V Q trahente in vim repellentem mutatâ corpus deſcribet hyperbolam cujus centrum V ſemiaxis VA vertex A.

(b) 547. *Solvetur problema &c.* Moveatur corpus P in curvâ P Q F vi perpendiculariter tendente ad planum F K, ſint P & Q puncta infinite propinqua, P Z tangens in P, P C radius circuli curvam PQF oſculantis in P; PH, QG perpendicula ex punctis P, Q in planum F K demiſſa, C A recta lineæ F K parallela & ſecans perpendicula P H, Q G producta in M & N; producatur G Q, ut tangenti P Z occurrat in R, & per Q agatur recta ZQT plano F K parallela, ac tangenti occurrens in Z rectæ verò P H in T. Jam ob ſimilia triangula CPM, PZT & RZQ, eſt $CP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, & ex naturâ circuli oſculatoris $PR^2 = QR \times RN + QN$ (per prop. 36. lib. 3. Elem.) ſive coeuntibus punctis P & Q, $PR^2 = QR \times 2PM$.

Er-

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in ſeries convergentes. Ut ſi ad baſem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis quâ corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ, vel in baſem attractum vel à baſi fugatum, moveri poſſit in curvâ lineâ, quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit: Suppono baſem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam

A +




Ergò $CP^2, PM^2 = QR \times 2PM : QT^2$, ideóque $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$, conſideretur vis centripeta ut tendens ad centrum S infinite diſtans, & erit SP quantitas conſtans, ac $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$. Eſt igitur (per cor. 1. & 5. prop. 6.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, hoc eſt, ob conſtantem quantitatem $2SP^2$, reciprocè ut $\frac{PM^3}{CP^2}$, ſeu in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione radii oſculatoris CP directè & triplicatâ perpendiculi PM inverſè. Porrò datâ curvâ PQF invenietur in ſingulis locis radius oſculi CP (214) & punctum K ubi plano occurrit ac proindè invenietur PM, per proportionem: $PK : PH = PC : PM$, vel etiam per proportionem $PR$ vel $PQ : QT = PC : PM$. Quare dabitur lex vis centripetæ.

DE MOTU CORPORUM.

$\overline{A+O|}^{\frac{m}{n}}$ resolvo (†) in seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo

O

(†) 548. *Resolvo in seriem infinitam &c.* Ut hæc liqueant sequentia de dignitatum formulis sunt memoriæ revocanda.

Lemma. Binomii $a+b$, dignitas $\overline{a+b}^n$ cujus index $n$, est $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^{n-4} b^4$ + &c. Satis patet ex potentiarum formatione. Si enim binomium $a+b$, ad $2^{am}$. $3^{tm}$. $4^{tm}$. &c. dignitates evehatur, in singulis dignitatis cujusque terminis, index litteræ $a$ unitate perpetuò decrescit, dum contrà index litteræ $b$ unitate crescit, & coefficientes seu unciæ singulorum terminorum progrediuntur ut numeri $\frac{n}{1}$, $\frac{n \times n-1}{1 \times 2}$, $\frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3}$, $\frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ &c.

549. Cor. 1. Si ponatur $a = P$, & $\frac{Q}{b} = \frac{b}{a}$, adeóque $a^n = P^n$, $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$, $\frac{b^3}{a^3} = Q^3$, $\frac{b^4}{a^4} = Q^4$, his valoribus in lemmatis formulâ substitutis erit $\overline{a+b}^n = P^n + \frac{n}{1} P^n Q + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} P^n Q^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3$ + &c. & si rursùs ponatur $P^n = A$; $\frac{n}{1} P^n Q = B$; $\frac{n \times n-1}{1 \times 2} P^n Q^2 = C$; $\frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3 = D$, & ità porrò, erit $\overline{a+b}^n = P\overline{+PQ}^n = P^n + \frac{n}{1} AQ + \frac{n-1}{2} BQ + \frac{n-2}{3} CQ + \frac{n-3}{4} DQ +$ &c.

550. Cor. 2. Iisdem formulis uti possumus pro polynomio quovis ad datam dignitatem evehendo, si pars una polynomii litteræ $a$ binomii ponatur æqualis, cæteræ verò partes omnes supponantur æquales litteræ $b$. Exempli causâ. Sit trinomium $d+e+f$ ad tertiam dignitatem elevandum, pone $n=3$, $d=a$, $e+f=b$, & formula $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3$, mutabitur in seriem $d^3 + 3d^2(e+f) + 3d(e+f)^2 + (e+f)^3$; cum enim perventum est ad coefficientem in quâ est $n-3$, abrumpitur series ob $n-3=0$. Porrò per eandem formulam generalem $(e+f)^2 = ee + 2ef + ff$, & $(e+f)^3 = e^3 + 3e^2f + 3ef^2 + f^3$. Quare tandem $(d+e+f)^3 = d^3 + 3d^2e + 3d^2f + 3de^2 + 6def + 3dff + e^3 + 3e^2f + 3ef^2 + f^3$.

Ita etiam formulam pro dignitate infinitinomii possumus obtinere, fit enim series $A + BZ + CZ^2 + DZ^3 + EZ^4$ &c. ad dignitatem $p$ evehenda sub ducto calculo invenietur.

$$A^p + pA^{p-1}BZ + pA^{p-1}CZ^2 + pA^{p-1}DZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2}B^2Z^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2 + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A$$

551. Cor. 3. Si ex binomio $a+b$, extrahenda sit radix cujus index $\frac{m}{p}$, loco $n$, in formulâ generali scribatur $\frac{m}{p}$, & erit $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b^1 + \frac{m \times m-p}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2 + \frac{m \times m-p \times m-2p}{1 \times 2 \times 3 p^3} a^{\frac{m-3p}{p}} b^3 + \frac{m \times m-p \times m-2p \times m-3p}{1 \times 2 \times 3 \times 4 p^4} a^{\frac{m-4p}{p}} b^4$ + &c. vel etiam erit $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}} = P$

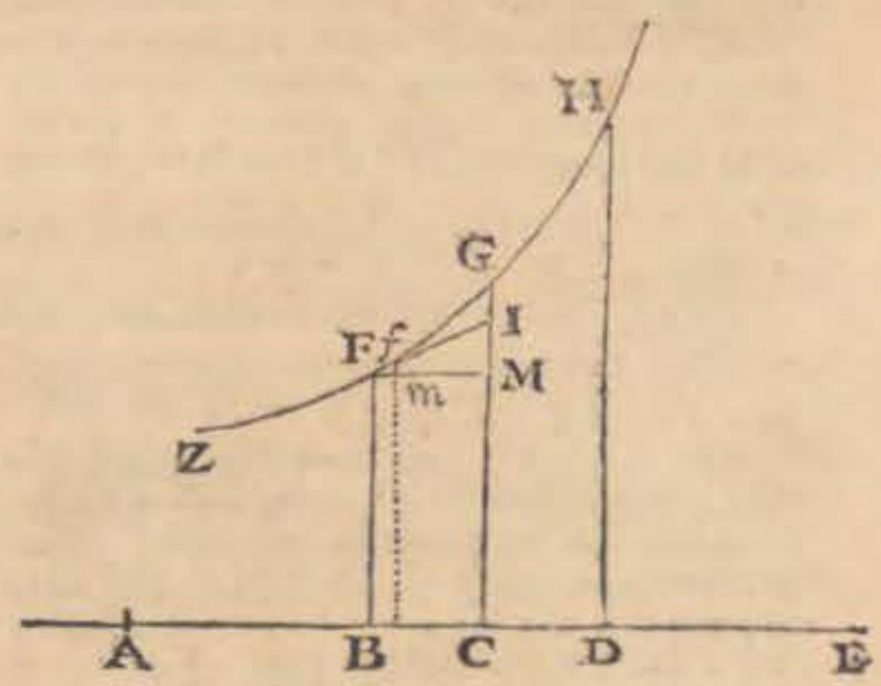
O duarum eſt dimenſionum, id eſt, termino $\frac{mm-mm}{2nn}$ OOA $^{\frac{m-2n}{n}}$

$= P\overline{+PQ}^{\frac{m}{p}} = P^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p}AQ + \frac{m-p}{2p}BQ + \frac{m-2p}{3p}CQ + \frac{m-3p}{4p}DQ$ + &c.

Nam ſit Radix quæſita $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}}$ æqualis ſeriei infinitæ $A+BZ+CZ^2+DZ^3$ &c. erit $\overline{a+b}^m$ æqualis huic ſeriei ad dignitatem $p$ evectæ, ſumatur ergo ſeries potentiæ $\overline{a+b}^m$ quæ erit $a^m + ma^{m-1}b + m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2}b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3}b^3$ & conferantur cum terminis dignitatis infinitinomii $A+BZ+CZ^2+DZ^3$ &c. ad dignitatem $p$ evecti, (n°. 550) invenieturque $AP = a^m$; $pAP^{-1}BZ = ma^{m-1}b$; $pAP^{-1}CZ^2 + p \times \frac{p-1}{2} AP^{-2}B^2Z^2 = m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2}b^2$; $pAP^{-1}DZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} AP^{-2} \times 2BCZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} AP^{-3}B^3Z^3 = m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3}b^3$ &c.

Unde invenietur $A = a^{\frac{m}{p}}$, $BZ = \frac{m}{p} \times \frac{a^{m-1}}{a^{m-\frac{m}{p}}} b = \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b$; $CZ^2 = \frac{m \times m-p}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2$ &c.

552. Lemma. Si in rectâ AE poſitione datâ, ad quam curva ZFH refertur, capiatur abſciſſa quævis AB, ſitque ordinata correſpondens FB æqualis dignitati abſciſſæ $AB^q$, in datam quantitatem 1 ductæ, & deinde capiantur intervalla æqualia BC, CD, & agantur ordinatæ CG, DH, ac per punctum F ducatur tangens FI ordinatæ CG occurrens in I, & recta FM parallela lineæ AE, eidem ordinatæ occurrens in M, ac tandem ordinata CG, ſeu $AB + \overline{BC}^q$, elevetur ad dignitatem cujus eſt index $q$ atque ità in ſeriem infinitam convergentem reſolvatur, hujus ſeriei primus terminus erit ſemper




æqualis ordinatæ FB, inſiſtenti ad initium quantitatis conſtantis BC; ſecundus terminus æqualis erit differentiæ inter FB & CI, id eſt, lineæ MI, & tertius terminus unà cum ſequentibus in infinitum æquabitur lineæ CI quæ jacet inter tangentem & curvam.... Dem. ſit $AB = x$, $FB = y$, data $BC = O$, ducta intelligatur ordinata fb, alteri FB infinite propinqua quæ lineam FM ſecet in m, & punctis F, f, coeuntibus erit $Fm = dx$, $fm = dy$, ac triangula Fmf, FMI ſimilia, ideoque $dx : dy = O : MI$, ſed quoniam $y = x^q$ (ex hyp.) & proindè $dy = qx^{q-1}dx$, eſt $dx : dy = 1 : qx^{q-1}$; ergò $MI = qx^{q-1} \times O$ & $CI = FB + MI = x^q + qx^{q-1} \times O$. Prætereà (ex hyp.) eſt $GC = x\overline{+O}^q = x^q + qx^{q-1}O + \frac{q \times q-1}{1 \times 2} x^{q-2}O^2 + \frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3} x^{q-3}O^3 +$ &c. in infinitum (548). Quarè erit $GI = GC - CI = \frac{q \times q-1}{1 \times 2} x^{q-2}O^2 + \frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3} x^q$

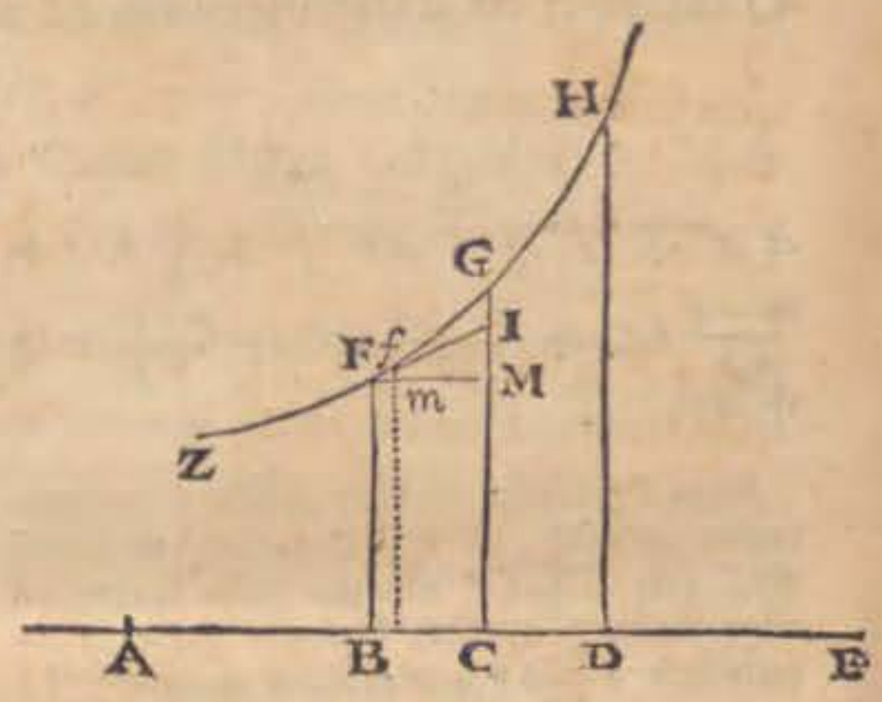
DE MOTU CORPORUM.

$x^{q-1}O^1 +$ &c. in infinitum. Ergò seriei in quam resolvitur $x+O^q$, terminus primus $x^q$, æqualis est ordinatæ F B, secundus terminus $qx^{q-1}O$, æqualis differentiæ inter F B & C I, & tertius terminus unà cum sequentibus in infinitum æqualis lineæ GI. Eadem est demonstratio, si curva Z F H concavitatem lineæ AE obvertat. Q. E. D.

553. Cor. 1. Si quantitas $O$, seu B C, in infinitum minuatur ut fiat $=dx$, termini omnes in seriæ subsequentes sunt infinite minores quovis termino antecedente, quod quantitatis $O$ index in singulis terminis unitate crescat, ideóque termini illi subsequentes negligi possunt, & proindè in hac hypothesi $MI=dy=MG$, $GI=\frac{q\times q-1}{1\times 2}x^{q-2}O^2=\frac{q\times q-1}{1\times 2}x^{q-2}dx^2$ $=\frac{1}{2}ddy$. Nam cum sit $dy=qx^{q-1}dx$ & $dx$, constans, erit sumptis fluxionibus, $ddy=q\times q-1x^{q-2}dx^2$.

554. Cor. 2. In eâdem Hypothesi erit $ddddy$ ut quartus seriei terminus, $ddddy$, ut quintus, & ità porro in infinitum. Nam quia est $ddy=q\times q-1x^{q-2}dx^2$, erit $dddy=q\times q-1\times q-2x^{q-3}dx^3$, & $ddddy=q\times q-1\times q-2\times q-3x^{q-4}dx^4$, & ità deinceps. Quartus autem seriei terminus positâ $O=dx$, est $\frac{q\times q-1\times q-2}{1\times 2\times 3}x^{q-3}dx^3$. Quintus $\frac{q\times q-1\times q-2\times q-3}{1\times 2\times 3\times 4}x^{q-dx^4}$; Ergò ob datos numeros $1\times 2\times 3$ & $1\times 2\times 3\times 4$. &c. patet corollarium.

555. Cor. 3. Eadem omnia vera sunt, si fuerit ordinata B F seu $y$ æqualis seriei cuivis potentiarum quarumlibet abscissæ A B in datas quantitates ductarum, hoc est $y=ex^h\mp fx^m\mp gx^p+$ &c. Eadem enim demonstratio. Observandum tamen est in hoc casu primum seriei terminum dici in quo quantitas $O$, seu B C, non extat, secundum terminum in quo quantitas illa est unius dimensionis, tertium in quo extat duarum dimensionum & sic in infinitum, licet in singulis terminis ità definitis plures contineantur quantitates signis + vel − conjunctæ. Exempli causâ. Positâ $y=ex^n+fx^m=BF$, erit $GC=e(x+O)^n+f(x+O)^m=ex^n+fx^m+\frac{m}{1}ex^{n-1}O+\frac{n}{1}ex^{m-1}O+$ &c. in infinitum. Primus seriei terminus est $ex^n+fx^m$, secundus $\frac{n}{1}ex^{n-1}\times O+\frac{m}{1}ex^{m-1}\times O$ & ità de cæteris.




556. Cor. 4. Hinc sequitur eadem omnia valere, si fuerit ordinata B F seu $y$ æqualis cuilibet functioni ipsius abscissæ A B, seu $x$, hoc est $y=Q$, & $Q$ quantitas ex abscissâ $x$, ipsiusque potentiis ac aliis quantitatibus datis quomodolibet compositâ. Nam quantitas illa $Q$ poterit semper vel (per Lemma 548.) ejusque corollaria vel per divisionem in seriem aliquam resolvi, cujus singuli termini erunt vel ipsius abscissæ $x$ potentiæ in quantitates datas ductæ, vel quantitates omnino datæ, omnis verò quantitas data $=ex^0$. Quarè æquatio $y=Q$, semper reduci poterit in formam æquationis cor. 3. (555.) $y=ex^n\mp fx^m\mp gx^p\mp$ &c. Exempli causâ: Sit $y=g+\frac{ee}{b+x}+(ff+xx)^{\frac{1}{2}}$.

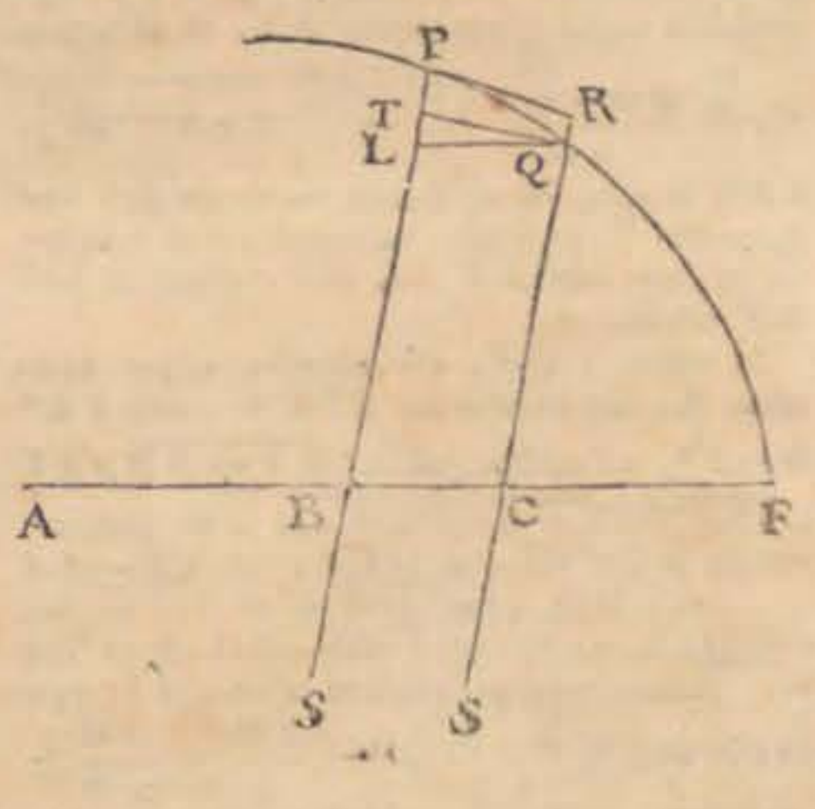
Peractâ divisione in infinitum, erit $\frac{ee}{b+x}=\frac{ee}{b}-\frac{eex}{b^2}+\frac{eex^2}{b^3}-\frac{eex^3}{b^4}+\frac{eex^4}{b^5}$ &c. in infinitum; & $\overline{ff+xx}^{\frac{1}{2}}=f+\frac{x^2}{2f}-\frac{x^4}{8f^3}+\frac{x^6}{16f^5}$ &c. in infinitum. Nam in hoc casu erit in formulâ $P\frac{m}{p}+\frac{m}{p}AQ+\frac{m-p}{2p}BQ$ &c. (551.)

vim proportionalem esse suppono. (c) Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm-nn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut $\frac{mm-nn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata parabolam attingat, existente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^{\circ}$, ideoque dabitur. Datâ igitur vi corpus movebitur in parabolâ, quemadmodum

LIBER PRIMUS. PROP. XCIII. THEOR. XLVII.

$m=1$, $p=2$, $P=ff$, $Q=\frac{x^2}{ff}$ $A=P^{\frac{m}{p}}=ff^{\frac{1}{2}}=f$. $B=\frac{m}{p}\times AQ=\frac{x^2}{2f}$, & sic deinceps, ergò erit $y=g+\frac{ee}{b}+f-\frac{eex}{b}+\left(\frac{ee}{b^3}+\frac{1}{2}f\right)x^2-\frac{eex^3}{b^4}+\left(\frac{ee}{b^5}-\frac{1}{8f^3}\right)x^4$, &c. in infinitum.

(c) 557. * *Est igitur vis quæsita &c.* Moveatur corpus in curvâ PQF, vi tendente ad planum seu basim AF, secundum lineas PB, QC cum basi AF angulum datum constituentes. Producatur ordinata CQ ut tangenti per P ductæ occurrat in R, & ex puncto curvæ Q ad ordinatam PB agantur QL parallela AF, & QT ad PB perpendicularis. Jam si vis centripeta fingatur ad punctum S infinitè distans tendere, coeuntibus punctis P & Q vis illa in puncto P erit (per cor. 1. prop. 6.) directè ut $\frac{QR}{SP^2\times QT}$, hoc est, ob constantem SP, ut $\frac{QR}{QT}$. Porrò ob angulum QLT datum, & angulum QTL rectum, datur specie triangulum LQT, & ideò datâ QL, datur etiam QT, ergò datâ BC seu QL, vis erit ut QR. Sed si abscissa AB dicatur $=A$, ordinata $BP=B$, & $BC=O$; cum sit (ex Hyp.) $B$, ut $A^{\frac{m}{n}}$, erit ordinata CQ, ut $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ & (553), QR, ut tertius terminus seriei in quam resolvitur $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$, hoc est, (550) ut $\frac{m\times m-n}{1\times 2\times n^2}A^{\frac{m-2n}{n}}\times OO$ $=\frac{mm-mn}{2n^2}A^{\frac{m-2n}{n}}\times OO$, seu ut $\frac{mm-mn}{n^2}\times A^{\frac{m-2n}{n}}$, ob datam quantitatem $\frac{OO}{2}$. Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm-mn}{1\times 2\times n^2}\times A^{\frac{m-2n}{n}}$ vel ut $\frac{mm-mn}{nn}B^{\frac{m-2n}{m}}$; quia cum sit $B$, ut $A^{\frac{m}{n}}$, erit $B^{\frac{n}{m}}$ ut $A$, &



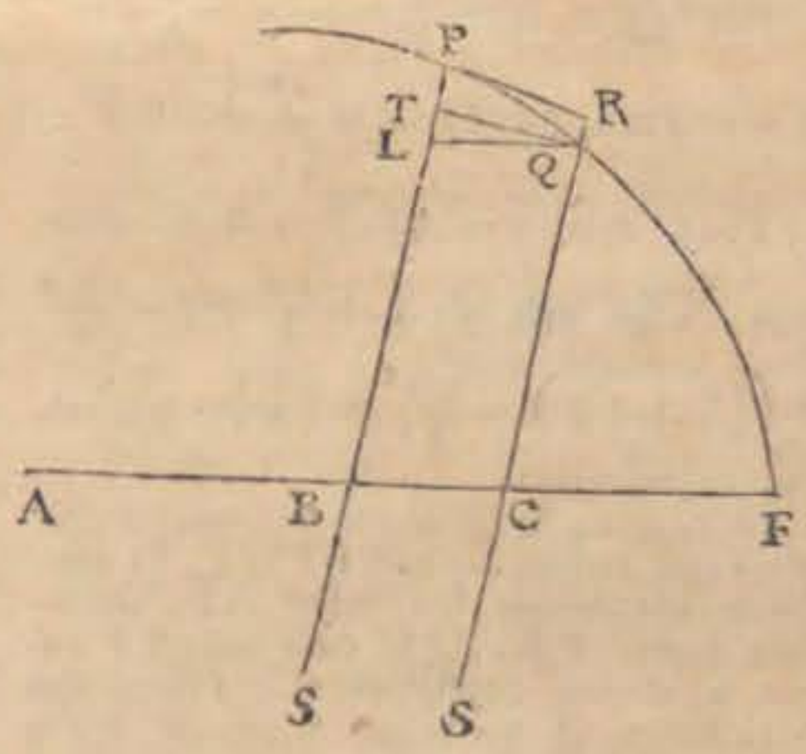
DE MOTU CORPORUM.

modum *Galilæus* demonſtravit. Quod ſi ordinatim applicata hyperbolam attingat, exiſtente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A-3$ ſeu $2B3$: ideoque vi, quæ ſit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in hyperbolâ. Sed miſſis hujuſmodi propoſitionibus, pergo ad alias quaſdam de motu, quas nondum attigi.

SEC-

$B\frac{n}{m}\times\frac{m-2n}{n}$, ſeu $B\frac{m-2n}{m}$, ut $A\frac{m-2n}{n}$. Itaque ſi ponatur $m=2$, $n=1$, erit $B$, ut $A^2$, & curva PF parabola, & $\frac{mm-mn}{nn}$ $B\frac{m-2n}{m}=2B^0$, adeóque vis ut data $2B^0=2$. Quod ſi ponatur $m=-1$, & $n=1$, erit $B$, ut $\frac{1}{A}$ hoc eſt B × A rectangulum datum, & proindè curva PF hyperbola cujus aſymptotus AF, & centrum $A$; & $\frac{mm-mn}{nn}$ $A^{\frac{m-2n}{n}}=2A^{-3}=\frac{2}{A^3}$ $2B^3$, & ideò vis ut cubus ordinatæ $B$. Sed quoniam hyperbola convexitatem obvertit aſymptoto AF, vi illâ corpus à baſi AF repelletur.

Si curva PQF, eſt ellipſis cujus centrum A, ſemidiameter $AF=C$, erit $PB^2$ ſeu $B^2$, ut rectangulum $\overline{AF+AB}\times BF=\overline{C+A}\times\overline{C-A}=CC-AA$, & ponendo $BC=O$, erit $QC^2$, ut $CC-AA-2AO-OO$, fiat $CC-AA=DD$, erit $QC^2$, ut $DD-2AO-OO$, & radice per formulam generalem extractâ (550 551) erit $QC$, ut $D-\frac{AO}{D}-\frac{OO}{2D}-\frac{AAOO}{2D^3}-\frac{AO^3}{2D^3}-\frac{A^3O^3}{2D^5}$, &c. tertius ſeriei terminus eſt $\frac{OO}{2D}+\frac{AAOO}{2D^3}=\frac{\overline{DD+AA}\times OO}{2D^3}=\frac{CCOO}{2D^3}$, erit igi-




tur QR (552. 556) ſeu vis ut $\frac{CC}{2D^3}$, hoc eſt, ob datam quantitatem $\frac{CC}{2}$, ut $\frac{1}{D^3}$, ac proindè quoniam $BB$ eſt ut $CC-AA$ ſeu $DD$, vis erit ut $\frac{1}{B^3}$, hoc eſt, ut cubus ordinatim applicatæ reciprocè, quod convenit cum ſolutione Problematis III. Eodem modo demonſtratur vim à plano AF repellentem decreſcere in ratione triplicatâ ordinatim applicatæ PB ſi corpus moveatur in hyperbolâ, cujus diameter una ſit in plano AF, altera conjugata in lineâ parallelâ ordinatis PB, QC, & convexitas plano AF obverſa.

LIBER PRIMUS, PROP. XCIV. THEOR. XLVIII.

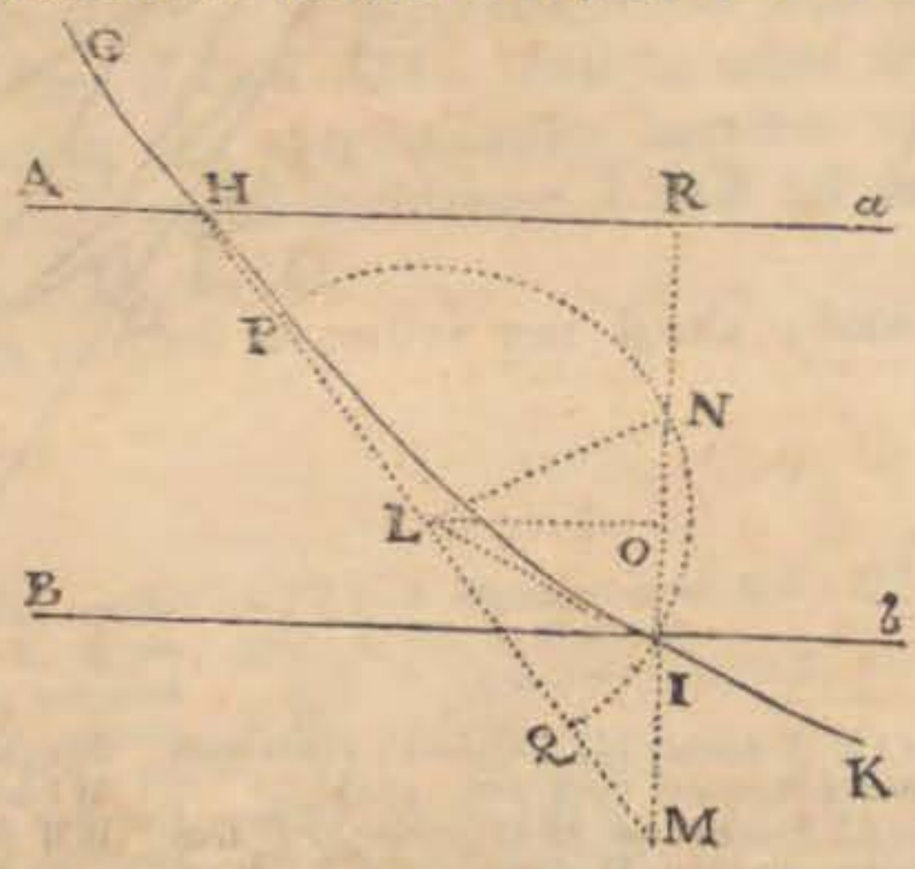
## SECTIO XIV.

*De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.*

## PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

*Si media duo ſimilaria, ſpatio planis parallelis utrinque terminato, diſtinguantur ab invicem, & corpus in tranſitu per hoc ſpatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter verſus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; ſit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano diſtantiis ad eandem ipſius partem captis, ubique eadem: dico quod ſinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad ſinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ.*

*Caſ.* 1. Sunto *Aa*, *Bb* plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *Aa* (d) ſecundum lineam *GH*, ac toto ſuo per ſpatium intermedium tranſitu attrahatur vel impellatur verſus medium incidentiæ, eâque actione deſcribat lineam curvam *HI*, & emergat (e) ſecundum lineam *IK*. Ad planum emergentiæ *Bb* erigatur perpendiculum *IM*, occurrens tum lineæ incidentiæ *GH* productæ in *M*, tum plano incidentiæ *Aa* in *R*; & linea emergentiæ *KI* producta occurrat *HM* in



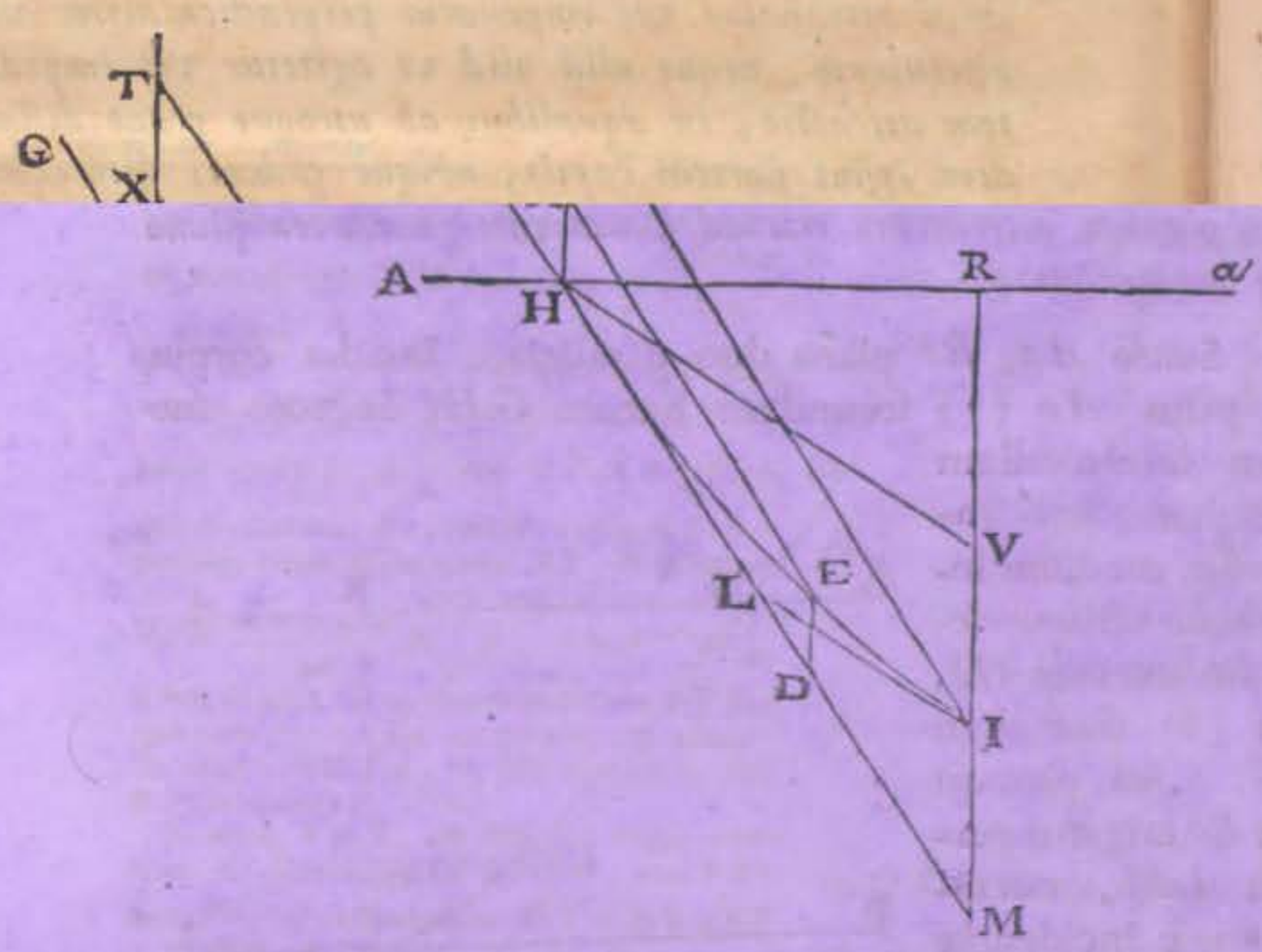

*L.*

(d) 558. * *Secundum lineam GH.* Angulus incidentiæ hic dicitur complementum anguli GHA ad rectum, ſeu angulus quem linea GH conſtituit cum rectâ ad planum incidentiæ Aa perpendiculariter erectâ in H. Angulus emergentiæ eſt etiam angulus KIM, quem linea directionis corporis emergentis, efficit cum rectâ IM ad planum emergentiæ Bb, perpendiculari in I.

(e) * *Et emergat ſecundum lineam.* Patet rectas GH, IK ſeu corporis in H & I directiones, curvam HI in punctis H, I contingere.

DE MOTU CORPORUM.

*L*. Centro *L* intervallo *LI* deſcribatur circulus, ſecans tam *HM* in *P* & *Q*, quam *MI* productam in *N*; & primò ſi attractio vel impulſus ponatur uniformis, erit (ex demonſtratis *Galilæi*) (f) curva *HI* parabola (g) cujus hæc eſt proprietas, ut rectangulum ſub dato latere recto & lineâ *IM* æquale ſit *HM* quadrato; ſed & linea *HM* biſecabitur in *L*. Unde ſi




ad

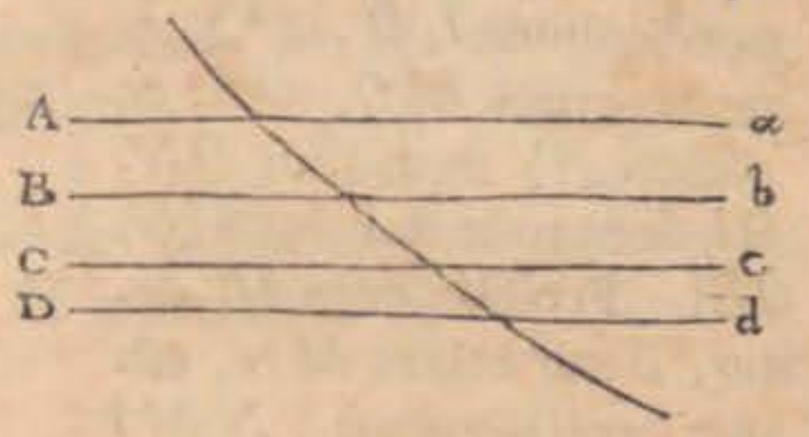
(f) * *Curva HI parabola*, cujus diameter IR, patet (per not. 40.).

(g) * *Cujus hæc eſt proprietas &c.* Ductis per punctum H diametro HT, & rectâ HV ad alteram diametrum IR ordinatim applicata, atque ex puncto I ad diametrum HT ordinatâ IT, erit ob parallelas MI, HT (per th. 1. de parabolâ) & parallelas MH, IT (per lem. 4. de conic.) MI = HT & IT = MH (per 34. 1. Elem.); ſed (per theor. 1. de parabolâ) quadratum ordinatæ TI æquale eſt rectangulo ſub dato latere recto diametri HT & abſciſſâ HT, ergò rectangulum ſub dato latere rec
MI æquale eſt HM quadrato;
HM paraboiam tangit in H eſte
(per cor. 1. lem. 5. de conic.
& HV parallela LI, erit qu
LM. Q. E. D.

559. Ut latus rectum diam
variis angulis incidentiæ datu
ter corporis parabolam deſcri
citatem in puncto H, & plan
A a vim attractricem eſſe data
tem datis, datum eſſe hoc latu
demonſtratur. Per punctum

De Motu Corporum.

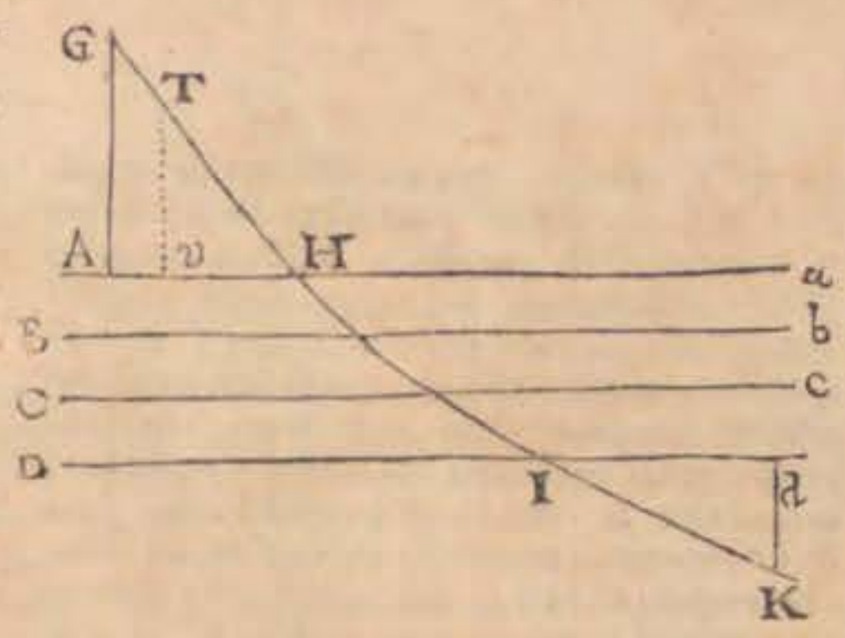
rallelis planis terminata, *A a b B*, *B b c C*, &c. & agitetur vi quæ ſit in ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum *A a* erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo *B b*, in datâ ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum *B b*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio *C c*, in datâ ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto *D d*, in datâ ratione; & ſic in infinitum: & (m) ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in datâ ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eò ut attractionis vel impulſus actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*




## PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

*Iiſdem poſitis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.*

Capiantur *A H*, *I d* æquales, & erigantur perpendicula *A G*, *d K* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *G H*, *I K*, in *G* & *K*. In *G H* capiatur *T H* æqualis *I K*, & ad planum *A a* demittatur normaliter *T v*. Et (per legum corol 2.) diſtinguatur motus corporis in duos,



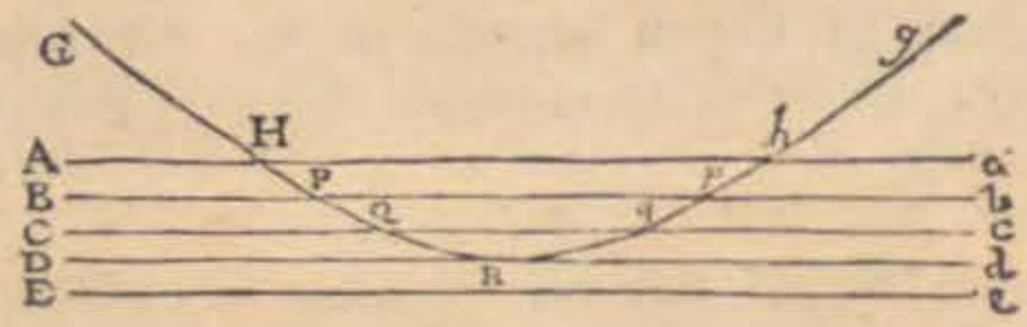

(m) * *Et ex æquo.* Sint quantitates datæ A, B, C, D, &c. Sinus incidentiæ in planum primum S, ſinus emergentiæ ex ſecundo plano, idem qui ſinus incidentiæ in ſecundum planum T, & ità porrò ſinus ſint S, T, V, X, &c. ponaturque S: T = A: B, T: V = B: C, V: X = C: D, & erit, ex æquo, S: X = A: D.

unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. perpendicularem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus, agendo secundum lineas perpendiculares, nil mutat motum secundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interque punctum *I* & lineam *dK*; (n) hoc est, æqualibus temporibus describet lineas *GH*, *IK*. Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id (o) est, ut *AH* vel *Id* ad *vH*, hoc est (respectu radii *TH* vel *IK*) (p) finus emergentiæ ad sinum incidentiæ. *Q. E. D.*

LIBER PRIMUS. PROP. XCVI. THEOR. L.

## PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

*Iisdem positis, & (q) quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea, dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.*




Nam concipe corpus inter parallela plana *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. describere arcus parabolicos, ut supra; sintque arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c. Et sit ea lineæ incidentiæ *GH* obliquitas ad planum primum *Aa*, ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in eâ ratione quam habet idem sinus

(n) * *Hoc est, æqualibus temporibus.* Quoniam motu composito corpus fertur per lineas GH & IK, eodem tempore describit GH quo AH, & IK quo ID, sed (ex Dem.) tempora quibus conficiuntur intervalla parallela & æqualia AH, ID æquantur, ergo corpus æqualibus temporibus describit lineas GH & IK.

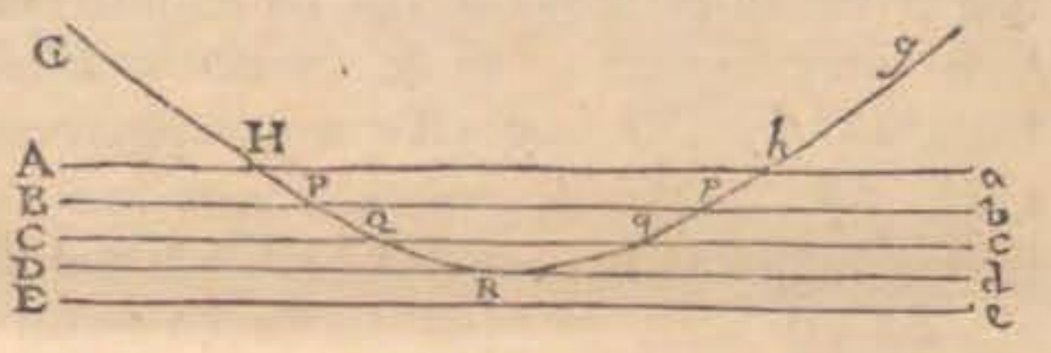
(o) * *Id est ut AH vel Id ad vH.* Per prop. 2. lib. 6. Elem.

(p) * *Ut sinus emergentiæ.* Est enim angulus vTH anguli THv, & angulus IKd anguli KId, complementum ad rectum, & proinde (558) prior est æqualis angulo incidentiæ, posterior est æqualis angulo emergentiæ.

(q) * *Et quod motus antè incidentiam &c.* Ut angulus emergentiæ semper crescat (prop. 95.) & ipsius proinde complementum ad rectum semper decrescat in transitu corporis per diversa media.

DE MOTU CORPORUM.

sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano $Dd$, in spatium $DdeE$: & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergentiæ coincider cum plano $Dd$. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto $R$; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum $Ee$. Sed nec potest idem pergere in lineâ emergentiæ $Rd$, propterea quod perpetuò attrahitur vel impellitur (r) versus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana $Cc$, $Dd$, describendo arcum parabolæ $QRq$, (f) cujus vertex principalis (juxta demonstrata *Galilæi*) est in $R$; secabit planum $Cc$ in eodem angulo in $q$, ac prius in $Q$; dein pergendo in arcubus parabolicis $qp$, $ph$, &c. arcubus prioribus $QP$, $PH$ similibus & æqualibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in $p$, $h$, &c. ac prius in $P$, $H$, &c. emergetque tandem eâdem obliquitate in $h$, quâ incidit in $H$. Concipe jam planorum $Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$, $Ee$, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*



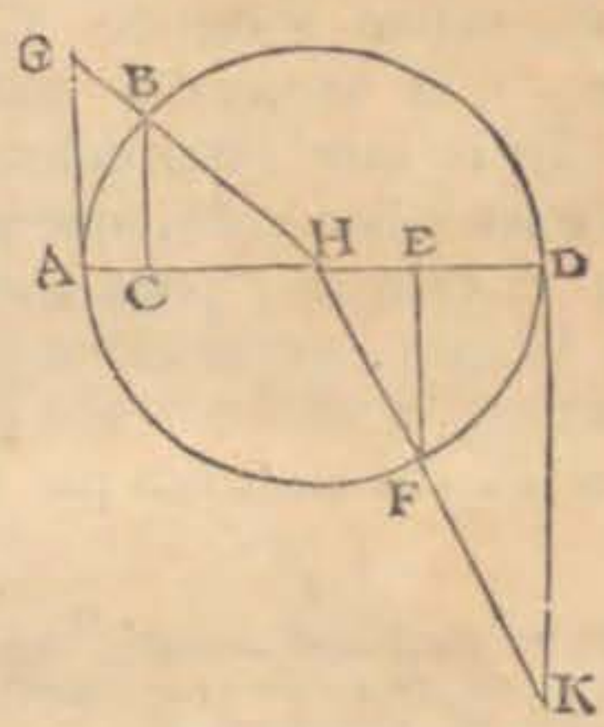

*Scho-*

(r) * *Versus medium incidentiæ* v. gr. C c.

(f) * *Cujus vertex principalis.* Quoniam enim (ut patet ex not. 40.) omnes diametri parabolæ Q R q sunt ad basim Q q perpendiculares, erit Q q ad axem ordinatim applicata, cumque recta D R d ipsi Q q parallela parabolam tangat in R, (40) erit R vertex principalis (per lem. 5. de conic.) & propterea velocitates corporis in locis Q & q à vertice R æquè remotis æquales erunt, & directiones illius ad lineam Q q æque inclinatæ: Insuper velocitas perpendicularis quâ corpus ex solâ vi attractrice ad planum P p urgetur, iisdem gradibus crescit per totum spatium q p, quibus antè decreverat per spatium æquale P Q. Quarè corpus *pergendo in arcubus parabolicis* &c.

## *Scholium.*

Harum attractionum haud multum diſſimiles ſunt lucis reflexiones & refractiones, factæ ſecundum datam ſecantium rationem, ut invenit *Snellius*, (t) & per conſequens ſecundum datam ſinuum rationem, ut expoſuit *Carteſius*. Namque lucem ſucceſſivè propagari & ſpatio quaſi ſeptem vel octo minutorum primorum à ſole ad terram venire, (u) jam conſtat per phænomena ſatellitum *Jovis*, obſervationibus diverſorum aſtronomorum confirmata. Radii autem in aëre exiſtentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebroſum cubiculum admiſsâ, invenit, & ipſe quoque expertus ſum) in tranſitu ſuo prope corpo-



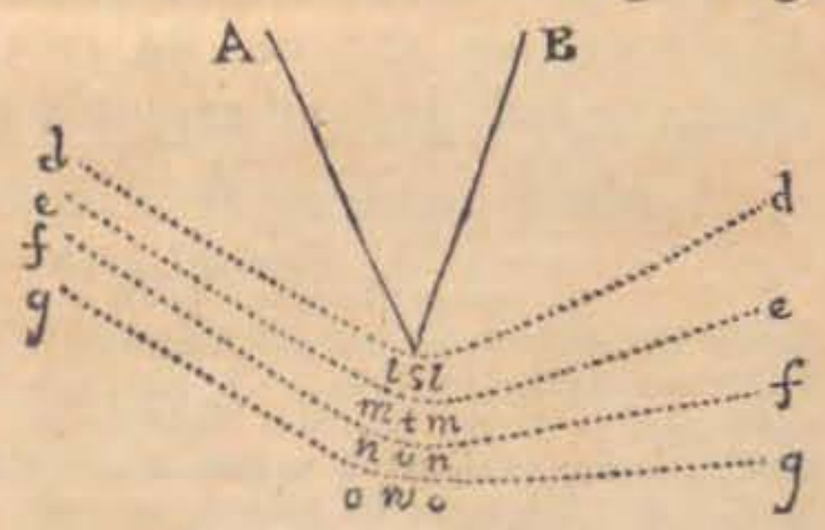

trum ſenſibili aliquo tempore diffundatur, neceſſe eſt ut ſatellitis Eccliſis, quæ contingit dum Jovis umbram ſubit, tardiùs à nobis videatur in majori illâ Jovis diſtantiâ, citiùs in minori, atque ità rem ſe habere Roemerus aliique deindè plures aſtronomi obſervarunt. Cæterum alii cauſæ præter ſucceſſivam lucis propagationem inæqualitatem illam ſatellitum tribuendam eſſe contendit Clariſſ. Maraldus in comm. Pariſ. 1707. quod etiam jam antea Magno Caſſino viſum fuerat. Sed Clariſſimus Granjean ejus argumentis reſpondet in comm. Pariſ. 1732. horum diſſertationes videſis.

(t) * *Et per conſequens.* Lucis radius G H incidat in planum refringens A D, ſitque radius refractus H K. Centro H & radio quovis H A, circulus deſcribatur planum ſecans in A & D radioſque lucis in B & F. Erigantur ad planum perpendicula A G, C B, E F, D K. Villebrordus Snellius, referente Iſaaco Voſſio in ſuâ diſſertatione de lucis naturâ & proprietate, invenerat ſecantes G H, H K angulorum G H A, K H D, eſſe in datâ ratione. Verùm indè ſequitur quod Carteſius poſteà vulgavit, datam quoque eſſe rationem linearum C H, H E quæ ſunt ſinus angulorum incidentiæ C B H, & emergentiæ H F E (558). Nam B H : G H = C H : A H (ſeu B H) & K H : F H (ſeu B H) = H D (ſeu B H) : H E, & ex æquo, K H : G H = C H : H E. Quare datâ ratione G H ad K H, datur quoque ratio H E ad C H.

(u) * *Jam conſtat per phænomena.* Jupiter cum ſuis quatuor ſatellitibus circà ſolem ceù centrum revolvitur in trajectoriâ quæ tellurem ambitu ſuo complectitur, undè fit ut perpetuò mutetur Jovis à tellure diſtantia, quæ, cæteris paribus, minima eſt, tellure ſolem inter & Jovem poſitâ, maxima verò, ſole inter Jovem & tellurem locato, atque harum diſtantiarum differentia orbis magni diametro, ſeu duplæ diſtantiæ ſolis à terrâ æqualis eſt. Si igitur lucis propagatio inſtantanea non eſt, ſed ſucceſſiva, & per orbis magni diame-

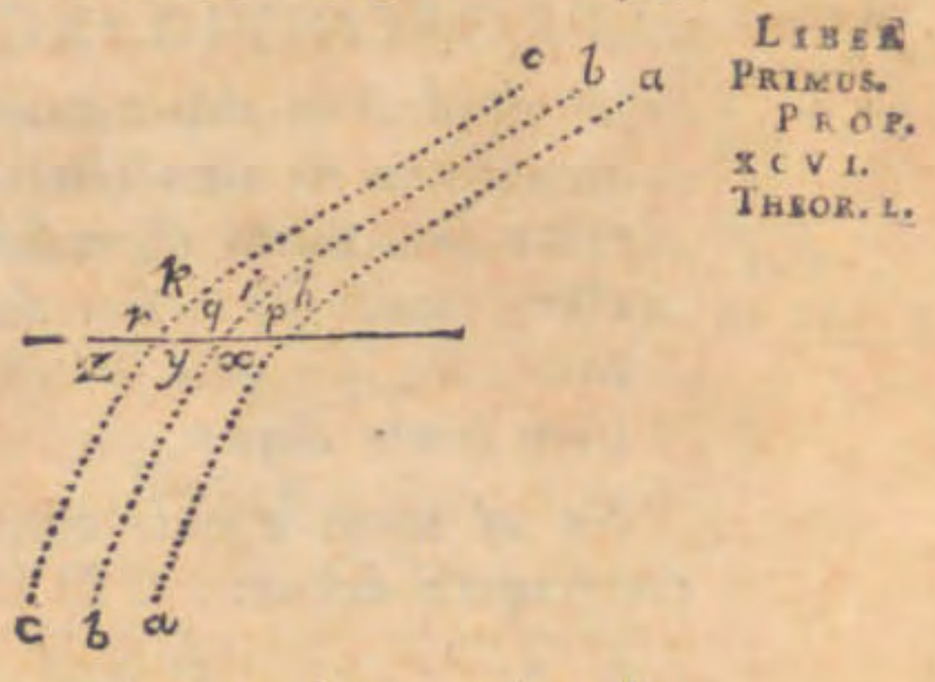
DE MOTU CORPORUM.

porum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære cuſorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora quaſi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in tranſitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, (x) quaſi magis attracti, ut ipſe etiam diligenter obſervavi. Et qui tranſeunt ad majores diſtantias minus incurvantur; & ad diſtantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, & tres colorum faſcias efformant. In figura deſignat *s* aciem cultri vel cunei cujuſvis *AsB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld* ſunt radii, arcubus *owo*, *mtm*, *lsl* verſus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro diſtantia eorum à cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par eſt ratio incidentium in vitrum. (z) Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, ſed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam



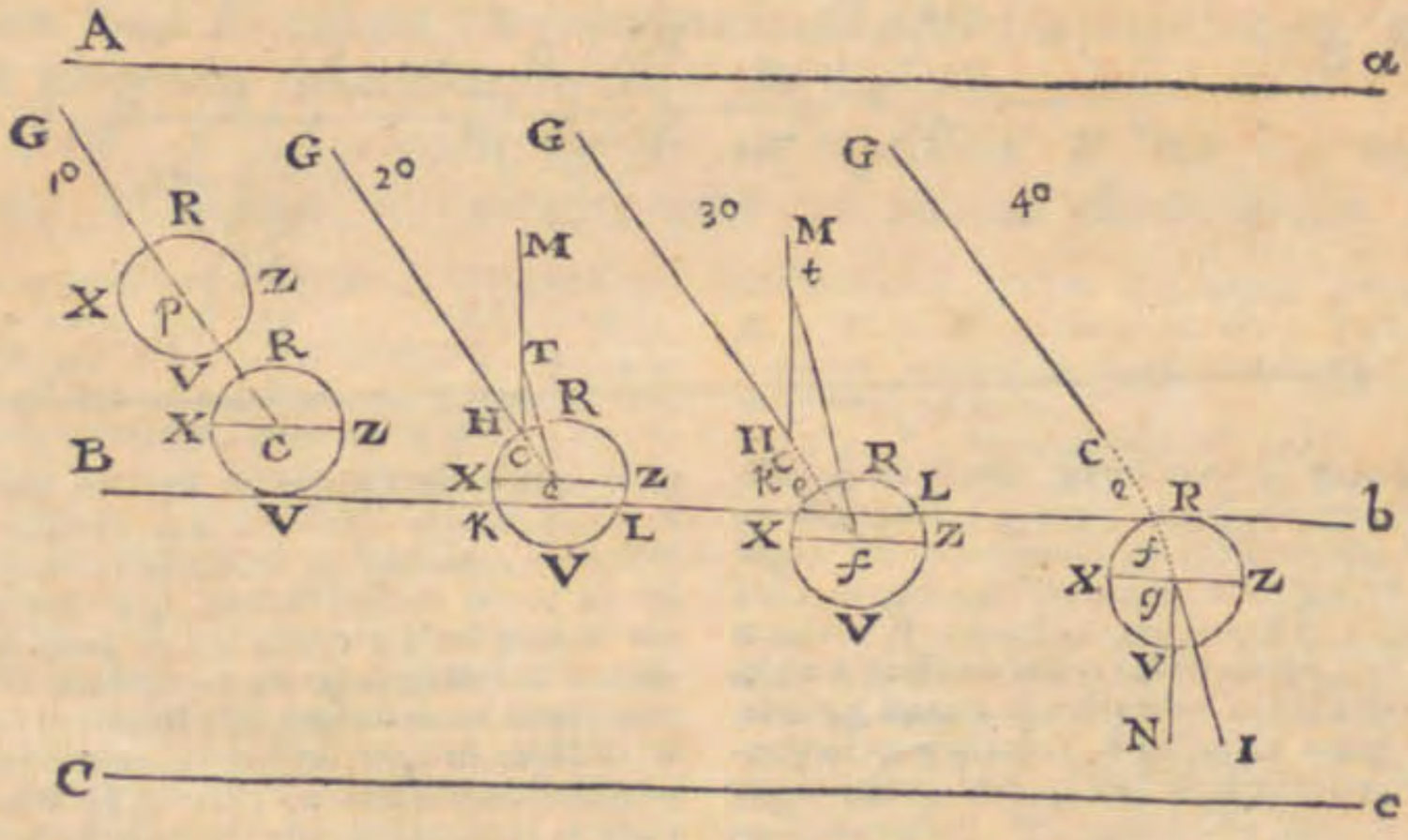

(x) * *Quaſi magis attracti.* Alia egregia experimenta vide in Newtoni optica initio lib. 3. & quæſt. 29.

(z) * *Fit igitur refractio & reflexio.* Vide Prop. 8. & 9. Partis 3ᵃ. Lib. opticæs Newtoni. Sed ut res clariùs intelligatur, ſint media duo contigua, A a b B, B b c C, planis paralleliſ terminata, & quorum talis ſit attractionis lex ut ultrà diſtantiam p R à medio alterutro evaneſcat ejus medii attractio. Itaque centro p & radio pR (fig. 1.) deſcribatur circulus vel potiùs ſphæra RZVX quæ planum B b non attingat, corpus p verſus omnia hujus ſphæræ puncta æqualiter attractum, nullam in partem inflectetur, ſed manebit in lineâ rectâ G C, ſecundum quam moveri ſupponitur. Si in eâdem rectâ G C, capiatur punctum C, à plano B b remotum diſtantiâ C V = P R, ſitque vis attractiva verſùs medium B b c C, major vi attractivâ medii A a b B, in eo ipſo loco c corpus a rectâ viâ G c deflectere curvamque lineam deſcribere incipiet. Perveniat (2°.) corpus ex C in e, per curvam c e, & ductâ H M ad plana A a, B b perpendiculari, ac per punctum e, rectâ e T, quæ curvam c e tangat in e, & perpendiculo H M occurrat in T, erit angulus e T c minor angulo incidentiæ G H M; nam cum ſegmentum K V L, in hemiſphærio XVZ magis trahat verſùs planum B b, quam ſegmentum ipſi æquale in hemiſphærio XRZ, (ex hyp.) verſùs planum A a, manifeſtum eſt curvam deorſum inflecti, ideóque tangentem e T à radio inciden-




factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, poſtquam illud ingreſſi ſunt: uti in radiis *ckzc*, *biyb*, *ahxa* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x*, incurvatis, delineatum eſt. Igitur ob analogiam quæ eſt inter propagationem radiorum lucis & progreſſum corporum, viſum eſt propoſitiones ſequentes in uſus opticos ſubjungere; interea de naturâ radiorum (utrum ſint corpora necne) nihil omnino diſputans, ſed trajectorias corporum trajectoriis radiorum perſimiles ſolummodo determinans.

PRO-



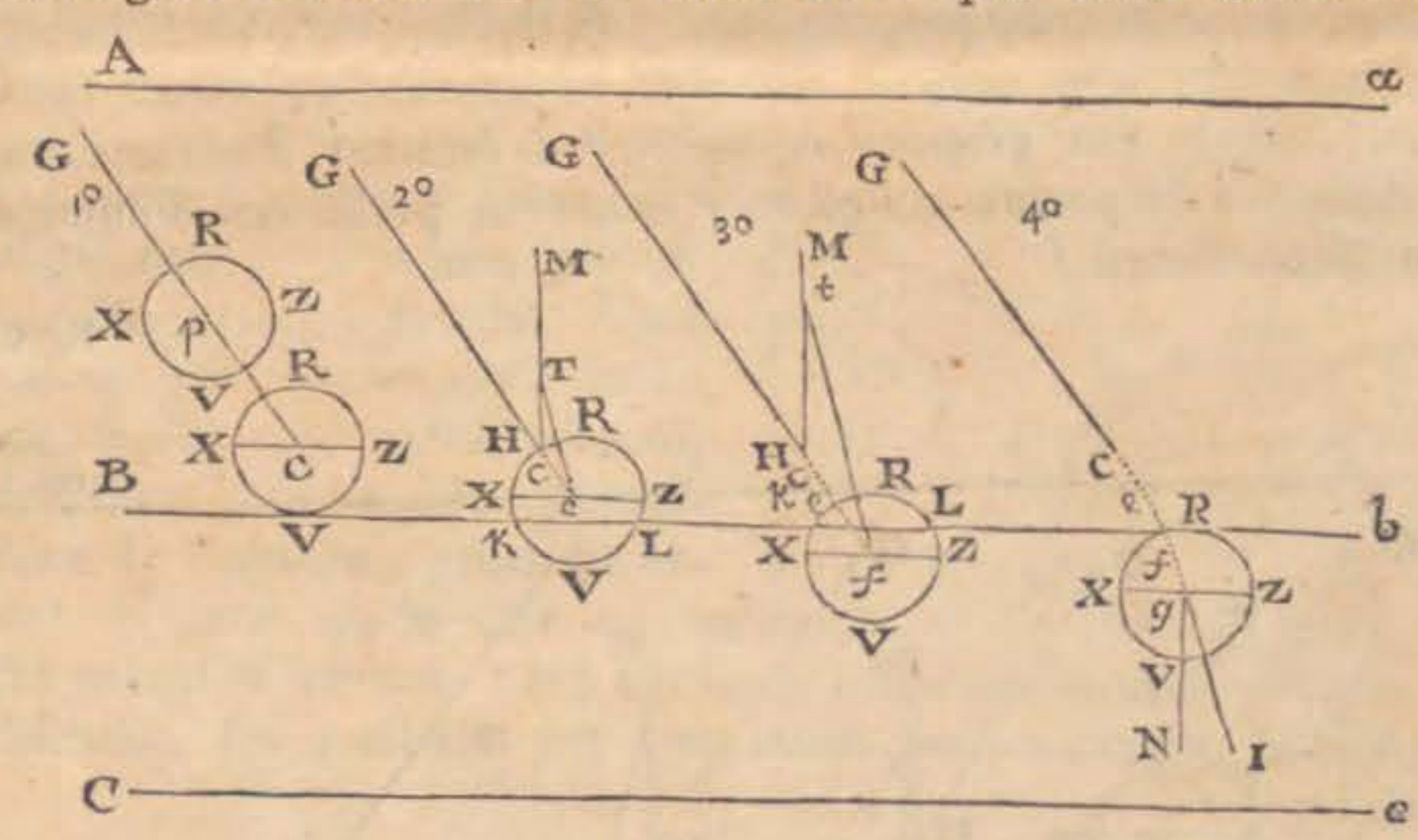

te GC, versùs ſuperiora M recedere. Similiter ubi corpuſculum C eſt in f (3°) intrà medium Bbc C, magis trahitur versùs planum Cc, ab hemiſpherio XVZ, quam retrahitur versùs planum Bb, ab altero hemiſpherio kRZ, cujus ſegmentum kRL, minus trahit, quam æquale ſegmentum in hemiſpherio XVZ; quare angulus Htf, quem tangens ft cum perpendiculo HM efficit, adhuc minor eſt quam angulus HTe (2°). Sed cum tandem corpuſculum c pervenit in g (4°), locum à plano Bb remotum diſtantiâ maximâ gR = pR, tum corpus p, æqualiter undique attractum (ex hypotheſi) ſemitam non ampliùs mutat, ſed rectâ movetur per

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

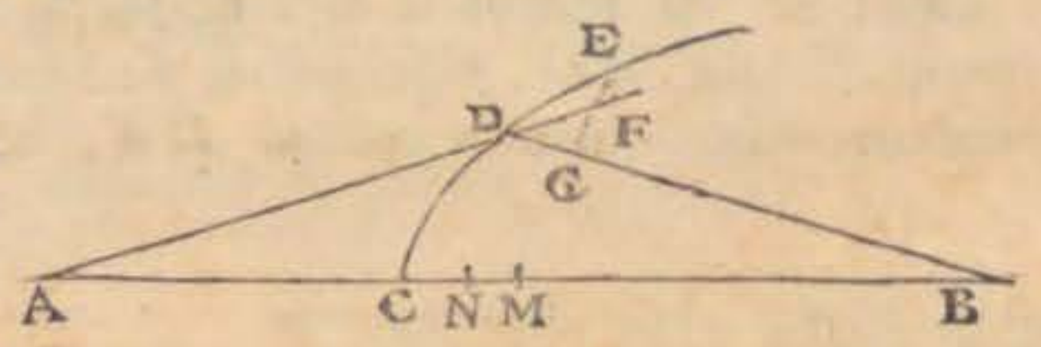
*Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.*

Sit *A* locus à quo corpuscula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *C D E* curva linea quæ circa axem *A B*




*g I*, quæ curvam *c e f g* tangit in *g*, estque angulus *N g I*, quem *g I* cum *g N* ad *B b* perpendiculari constituit, seu angulus emergentiæ minor adhuc angulo *H t f* (3°). Oppositum eveniet, si medium *B b c C*, minus trahat quam medium *A a b B*, & refractio in reflexionem mutari poterit. Fit igitur refractio & reflexio non in puncto incidentiæ *R* (4°). Sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, ut Newtonus docet. Quod si itaque certissimis experimentis constet radios lucis à corporibus quasi attrahi in minimis distantiis, Newtonus veram hic demonstravit causam illarum lucis affectionum, quibus contingit ut radii incidentes in superficiem corporis refiliant in plano ad eam verticali, sub angulis reflexionis æqualibus angulis incidentiæ, atque ut ex uno medio in aliud diversæ densitatis aut diversæ vis trahentis, obliquè penetrantes refranguntur in plano ad superficiem, quæ duo media dirimit itidem recto, ità ut sinus incidentiæ & emergentiæ datam servent rationem. Satis enim liquet plana linearum GHI & GHRh, in superioribus propositionibus, perpendicularia esse ad plana A a, B b, ut planum parabolæ quam gravia in hypothesi Galilæi describunt perpendiculare est ad horizontem. Quænam verò causa sit attractionis aut tendentiæ vel impulsûs radiorum lucis in corpora: alia quæstio est quam hic agitare minimè necesse est, quâque sepositâ, interim ex certis experimentis mathematicâ demonstratione, ostensa est reflexionis & refractionis lex & causa; quem-

revoluta deſcribat ſuperficiem quæſitam; *D*, *E* curvæ illius puncta duo quævis; & *EF*, *EG* perpendicula in corporis vias *AD*, *DB* demiſſa. Accedat punctum *D* ad punctum *E*; & lineæ *DF*, quâ *AD* augetur, ad lineam *DG*, quâ *DB* diminuitur, (y) ratio ultima erit eadem, quæ ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ *AD* ad decrementum lineæ *DB*; & propterea ſi in axe *AB* ſumatur ubivis punctum *C*, per quod curva *CDE* tranſire debet, & capiatur ipſius *AC* incrementum *CM* ad ipſius *BC* decrementum *CN* in datâ illâ ratione, centriſque *A*, *B*, & intervallis *AM*, *BN* deſcribantur circuli duo ſe mutuo ſecantes in *D*; (a) punctum illud *D* tanget curvam quæſitam *CDE*, eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*




*Coroll.* 1 Faciendo autem ut punctum *A* vel *B*, nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti *C*,

quemadmodum ſemel cognitis (per experientiam) gravitate atque elaterio aëris, recte quis aſcenſus & deſcenſus liquorum in tubis vacuis cauſam atque legem demonſtraſſe cenſetur, dum ex iis aeris proprietatibus quarum cauſas ignorat, hæc phænomena accurate deduxit. Nam juxtà rectam philoſophandi rationem, in naturæ phænomena primum debemus diligenter inquirere, ut poſteà motus corporum eorumque leges & cauſas accuratius inveſtigare & cognoſcere poſſimus. Cæterum in phænomena reflexionis ac refractionis lucis eorumque cauſas inquiſierunt philoſophi ac Mathematici celeberrimi, Carteſius cap. 2°. dioptrices per leges generales reſolutionemque motuum, & ſupponendo lumini minorem reſiſtentiam in denſioribus quam in rarioribus mediis objici; Leibnitzius in Actis eruditorum Lipſienſibus an. 1682. pag. 185. hâc factâ hypotheſi, quod lumen à puncto radiante ad punctum illuſtrandum viâ omnium facillimâ perveniat, quâ etiam uſus erat anteà Fermatius; Hugenius in tractatu de lumine per naturam undularionis luminis rem totam explicat, & Joannes Bernoullius in Actis Lipſ. an. 1701. ex æquilibrii fundamento eam ingenioſiſſime deduxit.

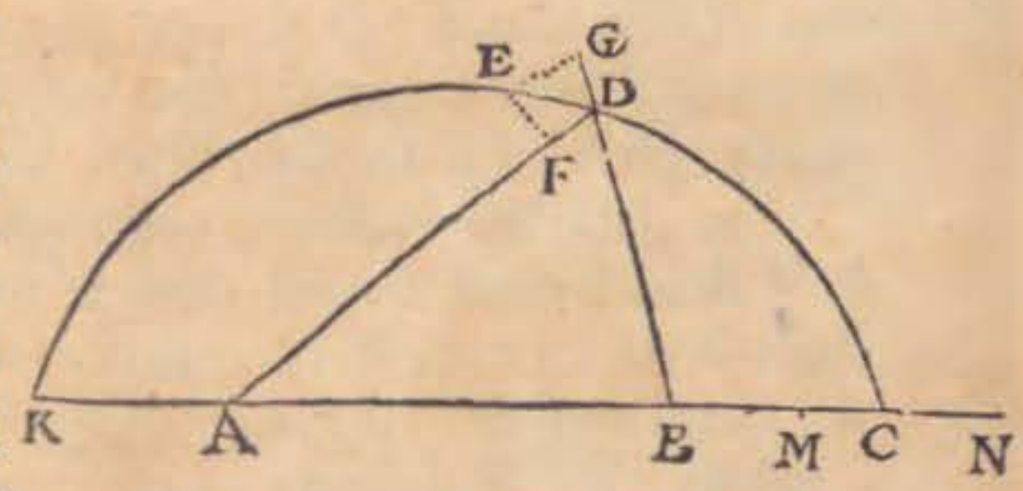
(y) * *Ratio ultima erit eadem.* Nam lineolâ DE pro radio ſeu ſinu toto uſurpatâ, lineolæ DF, DG ſunt ſinus angulorum DEF, DEG; ſed angulus DEF eſt complementum ad rectum anguli EDF, ſeu ADC, ideoque æqualis eſt angulo incidentiæ, & angulus DEG eſt complementum ad rectum anguli EDG, ideoque æqualis eſt angulo emergentiæ (558). Ergò lineæ DF ad lineam DG ratio ultima erit eadem quæ ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ, ideóque data. Et hinc (per cor. Lem. 4.) datur ratio incrementi totius finiti lineæ AD, ad decrementum totum finitum lineæ DB.

(a) * *Punctum illud D.* Atque eodem modo, aſſumendo varia incrementa CM, & decrementa CN, puncta diverſa lineæ CDE determinabuntur. Si verò centro B & radio quovis deſcribatur circulus, curvam CE ſecans in E, & lineam AB in

DE MOTU CORPORUM.

(b) habebuntur figuræ illæ omnes, quas *Carteſius* in optica & geometria ad refractiones expoſuit. Quarum inventionem cum *Carteſius* celaverit, viſum fuit hâc propoſitione exponere.

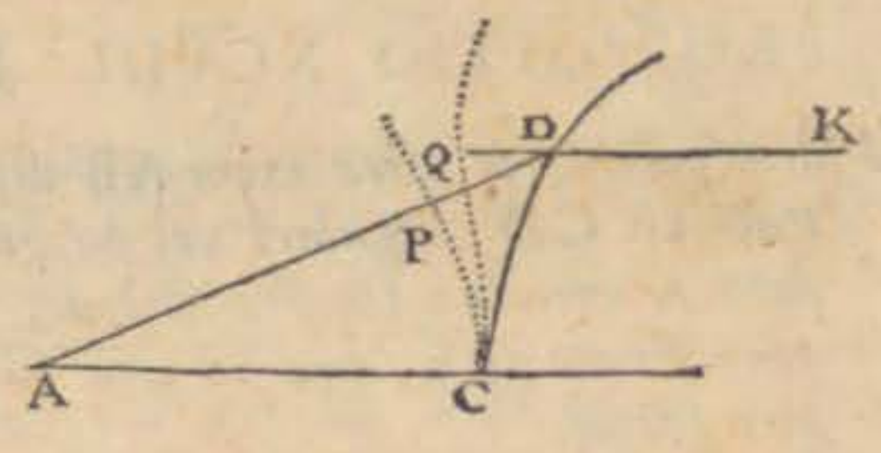
*Corol.* 2. Si corpus in ſuperficiem quamvis $CD$, ſecundum lineam rectam $AD$, lege quâvis ductam incidens, emergat ſecundum aliam quamvis rectam $DK$, & à puncto $C$ duci intel-




in N, & indè convolutione ſuperficiei CEN, circà axem CN ſolidum corpus conficiatur, corpuſculum ex D, per lineam DB ad centrum B circuli deſcripti tendens, non refrangetur, dum ex ſuperficie circulari concavâ EN egreditur, quod corpuſculi directio DB, ſit ad illam ſuperficiem perpendicularis, atque ita corpuſculum ſemper perveniet ad punctum B.

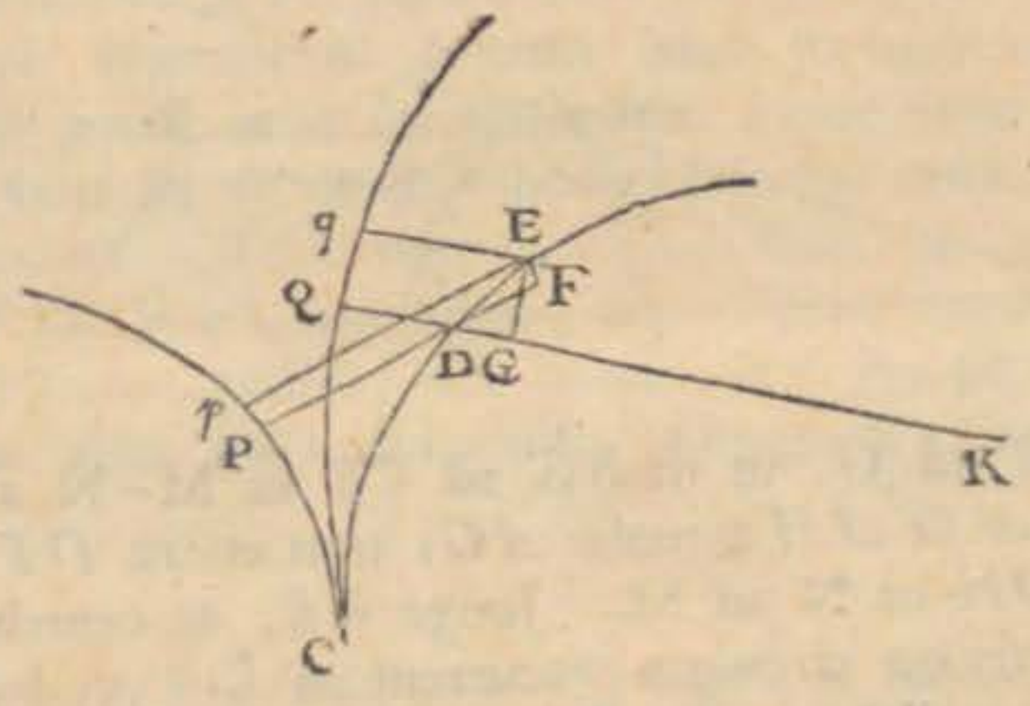
(b) * *Habebuntur figuræ illæ omnes.* Quas enim lineas Carteſius Geometriæ lib. 2°. Pag. 50. & ſeq. dicit A 5, A 6, vel A 7., A 8, eas Newtonus hic vocat CM, CN, & de cætero eadem eſt utriuſque authoris conſtructio. Undè manifeſtum eſt, ſi punctum C, inter puncta A & B, & punctum N inter C & M, ſita ſint, primam Carteſii ovalem Newtonianâ conſtructione deſcribi; ſi manentibus punctis A, C, B, M. punctum N, inter C & A locetur, 2^am. ovalem Carteſianam obtineri; ſi vero punctum B ad ad alteras partes puncti C migret ultrà A, & punctum C ſit inter A & N, atque M, 3^am. Carteſii ovalem haberi, iiſdemque poſitis, ſi punctum N ſit inter C, & A, 4^am. ovalem Carteſii delineari. Porrò, ſi punctum A vel B in infinitum abeat ut radii incidant vel refringantur paralleli, tum per punctum M vel N erigendum erit perpendiculum, quod circulus centro B vel A, & radio BN, vel AM, deſcriptus ſecabit in puncto quæſito D, curvæ CDE, quæ erit ellipſis vel hyperbola, ut calculo inito facilè patet, atque hæ ſunt figuræ quibus Carteſius cap. 8°. dioptrices uſus eſt.

Eadem eſt demonſtratio, ſi ſuperficies CDE incidentes radios reflectit, quo caſu ſit CN=CM, ob angulum incidentiæ æqualem angulo emergentiæ (per prop. 96.) & curva CDE erit ſectio conica, videlicet hyperbola, ſi punctum C inter A & B ſitum; ellipſis, ſi extrà poſitum ſit; Parabola, ſi ellipſeos focus B in infinitum abeat, & circulus, ſi puncta A & B coeant. Nam ſi punctum C inter A & B ſitum ſit, & N inter A & C, cum ſit AD=AM, & BD=BN (per conſtr.) rectarum AD, BD differentia data erit, ut potè æqualis AM−BN=AC+CM−BC−CN=AC−BC, ob CM=CN, ideòque curva CDE erit hyperbola cujus foci A & B, (per theor. 3. de hyperbolâ). Si punctum C inter puncta A & B poſitum non eſt, ut in hâc figurâ, rectarum AD, BD ſumma data erit, in hoc enim caſu punctum C, eſt inter N, & M, atque AD+BD=AC−CM+BC+CN=AC+BC. Eſt igitur CDE ellipſis cujus foci A & B, (Theor. 3. de Ellipſi) quæque foco alterutro in infinitum abeunte mutatur in paraboiam & focis coeuntibus mutatur in circulum.




telligantur lineæ curvæ $CP$, $CQ$ ipſis $AD$, $DK$ ſemper perpendiculares: (c) erunt incrementa linearum $PD$, $QD$, atque ideo lineæ ipſæ $PD$, $QD$, incrementis iſtis genitæ, ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.

## PRO-



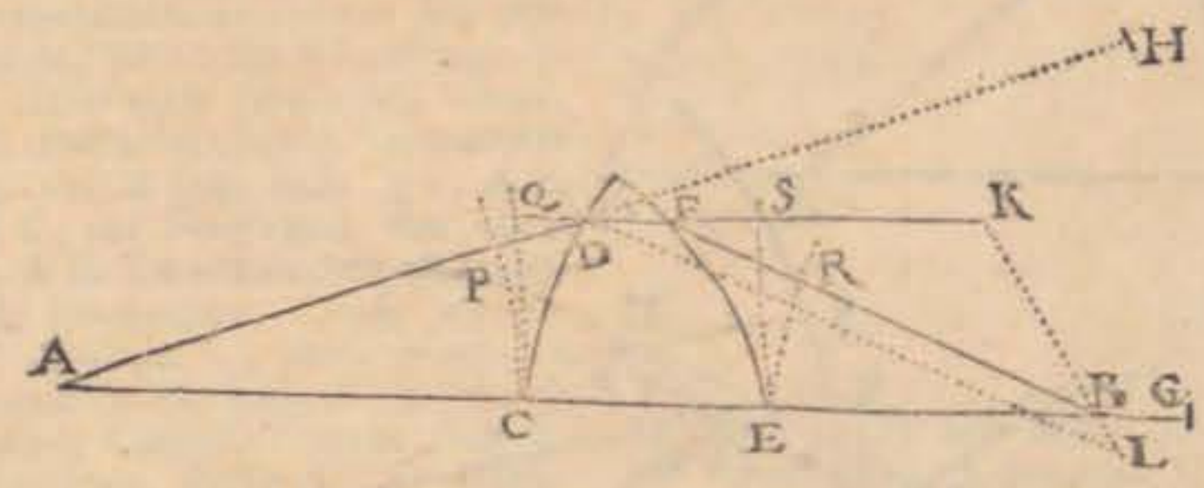

(c) 561. * *Erunt incrementa &c.* Nam ſi capiatur arcus quam minimus DE, atque ex puncto E in curvas CP, CQ, & in rectas PD, QK, demittantur perpendicula Ep, Eq & EF, EG, coeuntibus punctis E & D, erunt EF, Pp & EG, Qq ſibi mutuò parallelæ, & proindè PF, pE & QG, qE, æquales, ideóque DF & DG erunt rectarum PD, QD incrementa naſcentia. Sed, (ex demonſtratis ſuprà) DF eſt ad DG, ut ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ, quarè incrementa linearum PD, QD, atque adeò (cor. Lem. 4.) lineæ ipſæ PD, QD, (quæ ſimul naſcuntur in puncto C) incrementis iſtis genitæ, erunt ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem, & contrà, ſi lineæ PD, QD curvis CP, CQ perpendiculares ſint ut ſinus incidentiæ & emergentiæ, erunt earum incrementa naſcentia in eâdem ſemper ratione, ac proindè ſi corpus in ſuperficiem CD ſecundum lineam PD incidat, emerget ſecundum lineam QD ſeu DK.

DE MOTU CORPORUM.

## PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

*Iisdem positis, & circa axem* AB *descriptâ superficie quâcunque attractivâ* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta *AB* secet superficiem primam in *C* & secundam in *E*, puncto *D* utcunque assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eâdem, & (d) sinu emergentiæ è superficie secundâ ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N: pro-




duc tum *AB* ad *G*, ut sit *BG* ad *CE* ut M−N ad N; tum *AD* ad *H*, ut sit *AH* æqualis *AG*; tum etiam *DF* ad *K*, ut sit *DK* ad *DH* ut N ad M. Junge *KB*, & centro *D* intervallo *DH* describe circulum occurrentem *KB* productæ in *L*, ipsique *DL* parallelam age *BF*: & punctum *F* tanget lineam *EF*, quæ circa axem *AB* revoluta describet superficiem quæsitam. *Q. E. F.*

Nam

(d) * *Et sinus emergentiæ è superficie secunda &c.* Est enim sinus emergentiæ e superficie secundâ EF, ad sinum incidentiæ in eamdem, ut sinus incidentiæ in superficiem primam CD, ad sinum emergentiæ ex eâdem. Nam si radius incidens AD refrangitur per DF, ob eandem rationem radius FD, incidens in D refrangetur per DA, & qui sinus erat incidentiæ in primo casu, hi sinus emergentiæ in secundo.

Nam concipe Lineas $CP$, $CQ$ ipſis $AD$, $DF$ reſpectivè, & Lineas $ER$, $ES$ ipſis $FB$, $FD$ ubique perpendiculares eſſe, (e) ideoque $QS$ ipſi $CE$ ſemper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) $PD$ ad $QD$ ut M ad N, (f) ideoque ut $DL$ ad $DK$ vel (g) $FB$ ad $FK$; & (h) diviſim ut $DL-FB$ ſeu $PH-PD-FB$ ad $FD$ ſeu $FQ-QD$; & compoſitè ut $PH-FB$ ad $FQ$, id eſt (ob (i) æquales $PH$ & $CG$, $QS$ & $CE$) $CE+BG-FR$ ad $CE-FS$. Verum (ob proportionales $BG$ ad $CE$ & M−N ad N) eſt etiam $CE+BG$ ad $CE$ ut M ad N: (k) ideoque diviſim $FR$ ad $FS$ ut M ad N, & propterea per Corol. 2. Prop. XCVII, ſuperficies $EF$ cogit corpus, in ipſam ſecundum lineam $DF$ incidens, pergere in linea $FR$ ad locum $B$. *Q. E. D.*

*Scholium.* Eâdem methodo pergere liceret ad ſuperficies tres vel plures. Ad uſus autem Opticos maxime accommodatæ ſunt figuræ Sphæricæ. Si Perſpicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus Sphæricè figuratis & Aquam inter ſe claudentibus conflentur; fieri poteſt ut à refractionibus Aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum ſuperficiebus extremis, ſatis accuratè corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda ſunt, non ſolum quod facilius & accuratius formari poſſint, ſed etiam quod Penicillos radiorum extra axem vitri ſitos accuratius refringant. Verùm tamen diver-

(e) * *Ideòque QS ipſi CE ſemper æqualem.* Cum enim linea QS, ſit ſemper perpendicularis utrique lineæ CQ, ES (ex Hyp.) ea nec creſcit, nec decreſcit, ob partes curvarum in Q & S ſemper parallelas, ut patet.

(f) * *Ideoque ut DL ad DK.* Eſt enim (per conſtr.) DK ad DH, ut N ad M, & DL=DH, per conſt.

(g) * *Vel FB ad FK.* Ob parallelas DL, FB (per conſtr.)

(h) * *Et diviſim.* Cum ſit PD: QD=DH: DK=FB: FK, erit diviſim DH: DK, ſeu PD: QD=DH−FB: DK−FK=PH−PD−FB: DF, ſeu QF−QD, & compoſitè PD: QD=PH−PD+PD−FB, ſeu PH−FB: QF−QD+QD, ſeu QF=M: N.

(i) * *Ob æquales PH & CG.* Nam (per conſtr.) AH=AG, & quoniam punctum A datum eſt, eſtque AP ſemper perpendicularis ad curvam CP, liquet eam curvam eſſe circulum cujus centrum A, undè AP=AC, & hinc PH=CG; & ſimili modo patet eſſe BR=BE, ob datum punctum B.

(k) * *Ideoque diviſim &c.* Nam cum ſit (ex demonſtratis) M: N=CE+BG−FR: CE−FS=CE+BG: CE, erit diviſim M: N=FR: FS.

DE MOTU CORPORUM.

diversa diversorum radiorum Refrangibilitas impedimento est, quò minus Optica per figuras vel Sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis (1) imperitè collocabitur.

(1) * *Imperitè collocabitur.* Vide primam partem Lib. 1. Optices Newtonianæ ubi egregiis experimentis auctor demonstravit radios diversi coloris esse etiam diversè refrangibiles; unde fit ut focus Lentis objectivæ Telescopiorum (in quo fit objectorum imago quæ trans vitrum oculare spectatur) non sit unicus, sed focus radiorum violaceorum remotissimus sit ab ocolari, focus radiorum rubrorum sit proximus, radii ergo ex illis variis imaginibus procedentes inæqualiter colliguntur à vitro oculari, nisi ejus focus adeo remotus sit ut intervallum inter diversas illas imagines ejus respectu evanescat, sed manente Lente objectivâ, aucto foco Lentis ocularis diminuitur in eâdem ratione amplificatio objecti; sic ergo quantumvis accuratè colligerentur radii per objectivæ Lentis figuram, hæc focorum multiplicitas neutiquam corrigetur nisi dispendio amplificationis objecti: Hæc Theoria Newtonum ad inventionem Telescopiorum Catoptricorum deduxit, quæ Prop. 7. & 8. Lib. 1. Optices ab ipso explicantur, & quæ cum levi mutatione in usum communissimum venére.

FINIS TOMI PRIMI.

p. 82. Euclid plädrar contra Cavalleri!

p. 80 § 4 Sägt Newton sin sammanfattande
Cavalleri Method jämför sig emellan
samband. Af Daniel Bjorkegrens, Nr
Newton analytiskt fann, var ur geometriskt lärdom

p. 45. Hr Newton, Axiomata

p. 49. Elegens, Theorema & Scholia

§ XI gränslinie 2 cirkelbågar Mensuricca
alla dessa var allmänna
Axiom in Geometria
principia

af Sant Vista p. 200, p. 12, p. 367