Max Planck Research Group
Epistemes of Modern Acoustics

Sound & Science: Digital Histories

Newton, Isaac. Philosophiae naturalis principia mathematica, Vol. 2. Geneva: Barrillot & Filii, 1740.

https://acoustics.mpiwg-berlin.mpg.de/node/625

Scan licensed under: CC BY-SA 3.0 DE | Max Planck Institute for the History of Science

MAX PLANCK INSTITUTE
FOR THE HISTORY OF SCIENCE

NEWTONI

PRINCIPIA

PHILOSOPHIÆ,

CUM COMMENTARIO PERPETUO.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, Eq. Aurato.

Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio

PP. Thomæ Le Seur & Francisci Jacquier

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,

Matheseos Professorum.

TOMUS SECUNDUS.



GENEVÆ,

Typis Barrillot & Filii Bibliop. & Typogr.

MDCCXL

Rara N5635p-2

Archiv
(531x)

MAX-PLANCK-INSTITUT
FÜR WISSENSCHAFTSGESCHICHTE
Bibliothek

04-662

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII II.

FLORENTI,

COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC
CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM

D. D. D.

Thomas LE SEUR *&* *Franciscus* JACQUIER.

MONITUM.

ALtera tandem PRINCIPIORUM MATHEMATICORUM Pars in lucem prodit. De motibus corporum in medio reſiſtente agitur potiſſimùm in hoc ſecundo NEWTONI Libro, rem difficultatis plenam norunt omnes; ita tamen noſtra ſtuduimus accommodare commentaria ut iis qui in primi Libri lectione eâ quâ par eſt diligentiâ & attentione fuerint verſati, facilia planaque omnia futura eſſe ſperemus. Nec ſatis nobis fuit præclara Clariſſ. Autoris inventa explicare, nos ipſi quoque uſu didicimus nonnulla interdùm invenire quæ hùc & illùc in noſtris commentariis inſerere auſi ſumus. Sed quod maximum eſt hujuſce operis decus & ornamentum, nova quamplurima doctiſſimi EULERI problemata quæ in egregio Mechanices Opere leguntur, addidimus Noſtros etiam abundè locupletant commentarios pretioſa monumenta quibus *Acta Eruditorum* Lipſienſia exornarunt Clariſſ. Viri JOANNES & DANIEL BERNOULLIUS. Silentio tandem prætermittendus non eſt Illuſtriſſ. doctiſſimuſque POLENUS cujus elegans de Logarithmicæ conſtructione epiſtola, nonnullaque de motu aquarum experimenta nobis plurimùm pro-

profuêre. Sed longè majora ſunt quam verbis exprimi poſſint, de hoc univerſo opere Clariſſ. Viri JOAN. LUDOVICI CALANDRINI merita qui eâdem quam primi Libri initio laudavimus diligentiâ indefeſsâque curâ huic ſecundæ parti invigilavit.

Reprehendendum multis fortaſſe videbitur quod oblatam frequenter occaſionem quaſi è manibus dimittentes, Celeberrimas Philoſophorum controverſias vel omninò omittamus vel leviter duntaxat perſtringamus; Verùm ſciant eum fuiſſe NEWTONI ſcopum à quo ne latum unguem maximè vellemus diſcedere, ut ingenioſa quoque Syſtematum commenta è phyſicâ eliminaret atque profligaret; Nos itaque à Philoſophicis litibus maximè averſi, altercationes ſummo ſtudio declinavimus. Tot inſuper nova his de rebus ſcripta quotidiè circumferuntur ut juſti operis molem excederet hic ſecundus Liber, ſi recentiora explicare aggrederemur Philoſophorum placita.

Hanc ſecundam laboris noſtri partem benignè excipiant mathematicarum diſciplinarum Candidati, tertiamque tandem & ultimam anno proximè futuro expectent.

Romæ in Regio Conventu SS^æ. Trinitatis.
Anno 1740.

D E

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

(*) *De motu corporum quibus reſiſtitur in ratione velocitatis.*

(*) LEMMA

generales reſiſtentiæ notiones exponens.

1. Non poteſt corpus in medio fluido moveri atque in illud agere, quin ex fluidi reactione vim ſeu reſiſtentiam aliquam patiatur. Vis illa reſiſtentiæ, proportionalis eſt decremento motûs quod dato tempore generat, & illius directio directioni mobilis ſemper oppoſita eſt (per mot. Leg. 2. & 3.) Quàpropter datâ corporis maſsâ, reſiſtentia eſt ut velocitatis decrementum quod dato tempore producit; datâ enim mobilis maſsâ, motûs decrementum eſt ut decrementum velocitatis (6. Lib. 1.). 1.

2. Vis reſiſtentiæ quam momento quolibet temporis experitur corpus eſt ut motûs decrementum directè & temporis momen-

DE MOTU CORPORUM.

mentum inversè. Nam resistentia dato temporis momento est ut motûs decrementum directe (1) & dato motûs decremento est inversè ut momentum temporis quo motûs decrementum generatur. Si enim subduplo vel subtriplo temporis momento, idem motûs incrementum vel decrementum generetur, vis generans dupla aut tripla est.

3. Hinc datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè & momentum temporis inversè.

4. Quoniam directio vis resistentiæ, directioni mobilis contraria est (1), corpus solâ vi insitâ in medio resistente motum, per rectam lineam continuò fertur, quod etiam evenire debere manifestum est, si corpus vi quâlibet acceleratrice vel retardatrice, secundum vel contrà directionem motûs insiti urgeatur.

5. Resistentia considerari potest tanquam vis retardans & cum vi gravitatis quâ corporum ascendentium motus perpetuò minuitur conferri. Vis enim resistentiæ sicut vis gravitatis infinitè parva est, si conferatur cum vi illâ quâ corpus motu finito cietur, seu quâ spatium finitum finito tempore describit. Nam si resistentiæ quam omni temporis momento patitur corpus, vis esset finita, sivè ejusdem generis cum vi finitâ corporis motu finito acti, infinita multitudo resistentiarum momentanearum finito quovis tempore producta, totum corporis motum finito quolibet exiguo tempore extingueret, quod est contrà hyp., quâ supponimus corporis motum tempore aliquo finito in medio resistente perseverare.

6. Hinc corporis in medio resistente moti velocitas finita per spatium infinitè parvum, atque etiam tempore infinitè parvo æquabilis censeri potest, neglecto nimirum infinitè parvo velocitatis decremento.

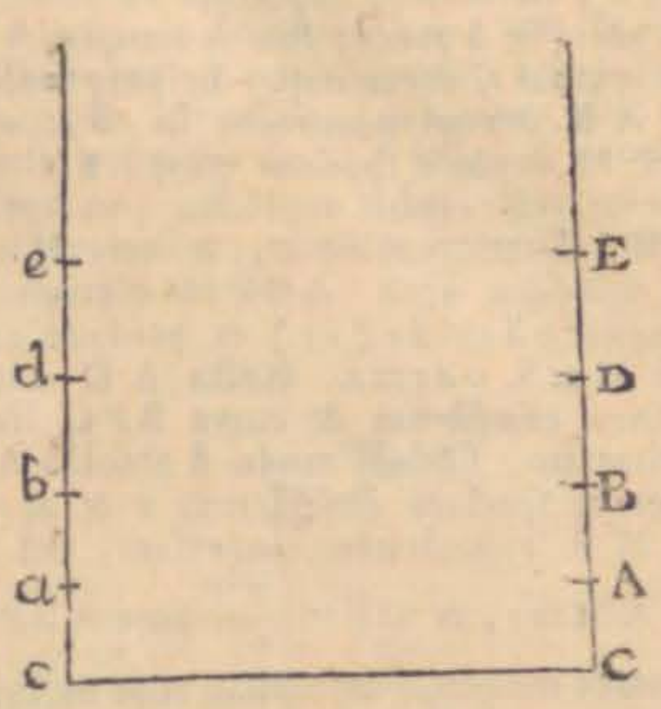
7. JAM verò resistentia corporum in fluidis, cæteris paribus, oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex reactione partium medii, tresque sunt celebriores circà hujus resistentiæ legem hypotheses, quarum Mathematicas consequentias Newtonus hoc libro exponit. 1ª. Hypothesis resistentiam ponit velocitati corporis dati proportionalem, secunda velocitatis quadrato, & tertia partim velocitati, & partim velocitatis quadrato. Præterea cùm experimentis fit cognitum partem quamdàm resistentiæ fluidorum uniformem esse, considerandæ sunt quatuor aliæ hypotheses, in quarum primâ resistentia fingatur uniformis, in secundâ partim uniformis & partim velocitati proportionalis; in tertiâ partim uniformis & partim ut quadratum velocitatis, & in quartâ denique partim uniformis, partim ut velocitas, & partim ut velocitatis quadratum. Prima ex his quatuor hypothesibus nihil habet difficultatis, cum uniformis resistentia considerari possit tanquam gravitas constans cùm motum ascendentis corporis retardat; quâ de re satis actum est lib. 1. tres verò quæ sequuntur hypotheses non ægrè referri plerumque possunt ad determinationes motuum quas aliæ priores hypotheses (de quibus ab initio actum est) suppeditant, quod deinceps ostendemus.

8. Si medium in quo corpus movetur perfectè fluidum sit, hoc est, partibus constet optimè lævigatis nullâque tenacitate cohærentibus, quæ proindè vi cuicumque illatæ cedant, & cedendo facillimè moveantur inter se, sola ea consideranda est resistentia quæ ex medii reactione ortum ducit, estque illa ut densitas medii & quadratum velocitatis mobilis dati conjunctim. Hæc enim resistentia (per motûs leg. 2. & 3. lib. 1.) est ut quantitas motûs dato tempusculo communicati; sed datâ mobilis velocitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi tempusculo dato movenda, hoc est, ut densitas medii; datâ autem medii densitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda, & ut velocitas quâ quantitas illa fluidi movetur conjunctim, & quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda velocitati mobilis proportionalis est, corpus enim duplo velocius altero, duplo majus spatium in fluido percurret, sicque duplo pluribus particulis occurret. Quare datâ densitate medii, resistentia est ut quadratum celeritatis mobilis, atque adeò si neque fluidi densitas, neque mobilis celeritas data sit, erit resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, atque hæc est resistentia quæ ortum ducit ab inertiâ particularum fluidi quas corpus motum è loco dimovet & quæ in velocioribus motibus sola ferè observatur.

9. Altera resistentia quæ ex tenacitate par-

partium fluidi uniformis naſcitur, conſtans eſt, aut quod idem eſt, temporis momento proportionalis, eamque in tardiſſimis motibus ſenſibilem faciunt experimenta. Si enim partium fluidi cohæſio ſit ubique eadem, vi quâdam determinatâ opus eſt ut partes illæ ſeparentur, corporique tranſitum præbeant, quâcumque demum velocitate illud feratur, & ideò vis illa reſiſtentiæ cum vi gravitatis uniformi, quæ corporis aſcendentis motum retardat, conferri poteſt. Nam corpora duo ſimilia & æqualia cum pari velocitate e locis C & c per lineas CE, ce, ad rectam Cc normales projiciantur, & in locis æquè altis A & a, B & b, D & d &c. æqualem patiantur reſiſtentiam; corpus quidem C reſiſtentiam experiatur à vi gravitatis conſtante (quæ in locis A, B, D, E, &c. tantùm agat) oriundam, corpus verò c reſiſtentiam ex tenacitate datâ, vi illi gravitatis æquali, in locis tantùm a, b, d, &c. reagente ortam; in ſpatiis verò intermediis AB & ab, BD & bd, &c. nullum ſit motibus obſtaculum; dum corpora perveniunt in A & a, æqualem habent velocitatem, & deindè victis æqualibus in A & a obſtaculis, pari adhuc velocitate per ſpatia minimè reſiſtentia AB & ab, feruntur; & ſimili modo, ob æquales reſiſtentias in locis B & b per ſpatia BD & bd ſimul moventur, & ità deinceps eandem ſemper velocitatem in locis æquè altis habent. Minuantur jam æqualia illa ſpatia AB & ab, BD & bd, &c. & eorum numerus augeatur in infinitum, ut vis gravitatis & reſiſtentiæ actio vel reactio continua reddatur, & corpora duo eandem ubique reſiſtentiam patientur, & in locis æquè altis eandem velocitatem habebunt. Quarè reſiſtentia quæ ex fluidi tenacitate ortum ducit, poteſt cum vi gravitatis uniformis comparari, licet medii tenacitas in corpus quieſcens (quod quidem vi gravitatis ſemper urgeretur) agere nullo modo poſſit.

10. In fluidis igitur tenacitate aliquâ præditis, reſiſtentia eſt partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis (8. 9.).



11. LEMMA. In quâcunque reſiſtentiæ hypotheſi, corporis tam in medio reſiſtente quam in vacuo moti velocitas finita in ſingulis locis eſt ut elementum ſpatii deſcripti directè & momentum temporis quo deſcribitur inverse. Velocitas enim uniformis eſt ut ſpatium quodcunque deſcriptum directè & tempus quo id ſpatium deſcribitur inverse. In medio autem ſive reſiſtente ſive vacuo velocitas per ſpatium infinitè parvum æquabilis eſt (6.).

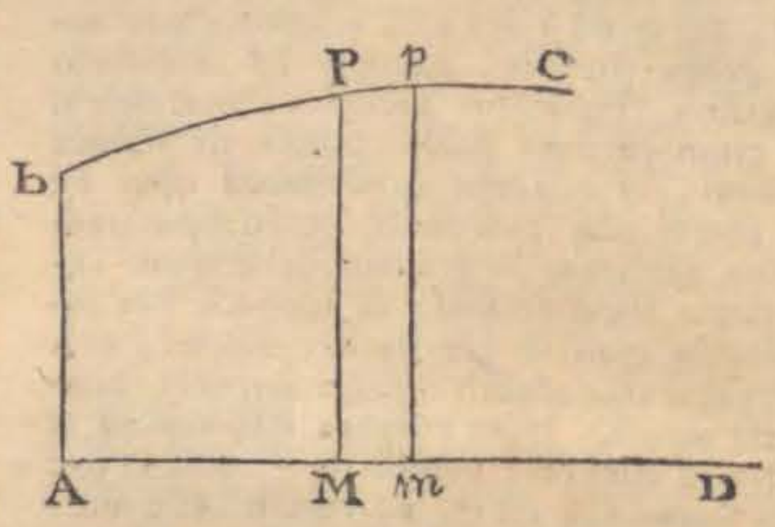
12. Coroll. 1. Hinc temporis momentum eſt ut momentum ſeu elementum ſpatii directè & velocitas inverse; momentum verò ſpatii ut velocitas & momentum temporis conjunctim.

13. Coroll. 2. Si igitur velocitas dicatur v, ſpatium deſcriptum s, tempus quo deſcriptum eſt t erit $v=\frac{ds}{dt}$, $vdt=ds$ & $dt=\frac{ds}{v}$, ſumptiſque fluentibus S. $vdt=s$, & $t=$S. $\frac{ds}{v}$.

11

DE MOTU CORPORUM.

14. Coroll. 3. Si ità descripta fuerit curva BPC ut ejus applicatæ MP, mp, axi AD, normales, exponant velocitatem v, & abscissæ à puncto fixo A sumptæ AM, Am tempus t, erectumque sit perpendiculum AB curvæ occurrens in B, area ABPM exponit spatium tempore t descriptum. Sit enim applicata pm, priori PM infinitè propinqua, & erit $Mm = dt$, adeóque areæ ABPM elementum $MPpm = v\,dt = ds$ (11) & proindè area $ABPM = S.\,v\,dt = s$. Recta AD dicatur linea temporum & curva BPC linea celeritatum. Eodem modo si abscissa AM exponeret spatium descriptum s & applicata MP velocitatem inversam, ità ut esset $AM = s$, & $MP = \frac{1}{v}$, area ABPM exponeret tempus quo spatium AM descriptum est; esset enim $MPpm = \frac{ds}{v} = dt$, & hinc area $ABPM = S.\,\frac{ds}{v} = t$.



15. LEMMA. Si corpus datæ massæ solâ vi insitâ in medio resistente moveatur, *decrementum velocitatis*, erit ut *resistentia* & *momentum temporis* conjunctim. *Incrementum* verò *spatii* erit ut *velocitas* & *velocitatis decrementum* directe & *resistentia* inversè. Da â enim corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directe & momentum temporis inversè (2) ideóque decrementum velocitatis est ut resistentia & momentum temporis conjunctim. Quod erat 1um. Sed incrementum spatii est ut velocitas & momentum temporis conjunctim (12) momentum verò temporis est ut decrementum velocitatis directe & resistentia inversè (2); Quarè incrementum spatii est ut velocitas & illius decrementum directè & resistentia inversè. Quod erat 2um.

16. Coroll. 1. Hinc resistentia est ut velocitas & illius decrementum directè ac spatii incrementum inversè, & velocitas in suum decrementum ducta, est ut resistentia & incrementum spatii conjunctim.

17. Coroll. 2. Quare si spatium dicatur s, tempus t, velocitas v, resistentia r, erit $r\,dt = -dv$, & $r\,ds = -v\,dv$.

18. LEMMA. Si corpus datæ massæ in medio resistente urgeatur vi centripetâ in directione motûs corporis agente; corpore ascendente, erit *velocitatis decrementum* ut *momentum temporis* & *summa vis centripetæ & resistentiæ conjunctim*. Et *velocitas* in *suum decrementum* ducta erit ut *incrementum spatii* & *summa vis centripetæ & resistentiæ* conjunctim.

At corpore descendente, *velocitatis incrementum* erit ut *momentum temporis*, & *differentia inter vim centripetam & vim resistentiæ* conjunctim. Et *velocitas* in *suum incrementum* ducta, erit ut *incrementum* sive elementum *spatii* & *differentia inter vim centripetam ac resistentiam* conjunctim.

Resistentia enim considerari potest tanquam vis continuò retardans (5) & vis centripeta corporis ascendentis motum etiam retardat, ideóque vis tota retardatrix est summa ipsa vis centripetæ & resistentiæ, dum corpus ascendit; sed vis retardatrix in temporis momentum ducta est ut decrementum velocitatis quod producit (2); ergò corpore ascendente, decrementum velocitatis est ut temporis momentum & summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat 1um.

Sed momentum temporis est ut incrementum sive elementum spatii directè & velocitas inversè (12). Quarè si corpus ascendat decrementum velocitatis est ut elementum spatii & summa vis centripetæ ac resistentiæ directe, & velocitas inversè, adeóque velocitas in suum decrementum ducta est ut elementum spatii & summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat 2um.

Descendente corpore vis centripeta motum

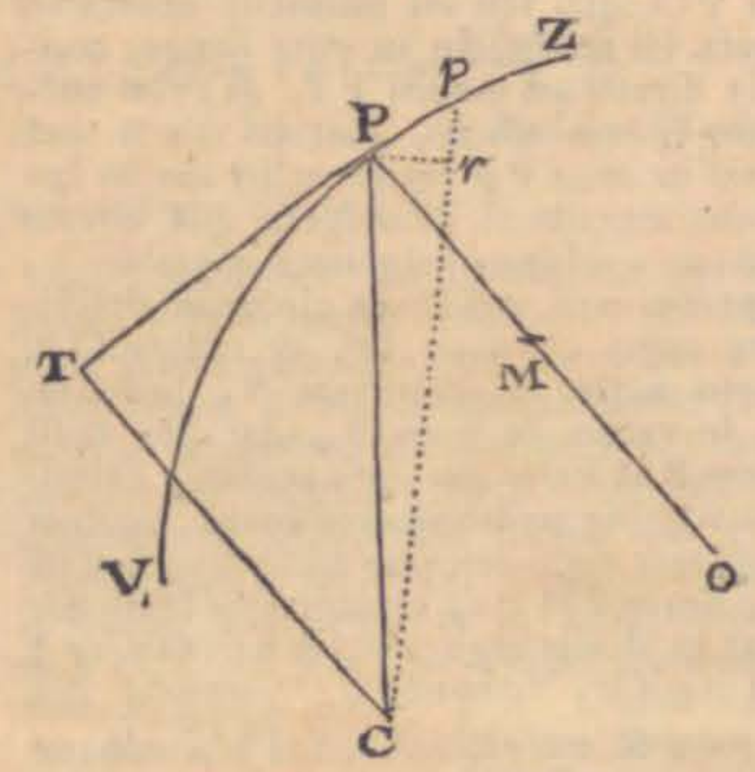
tum corporis accelerat dum reſiſtentia retardat, & ideò ſi vis centripeta major ſit vi reſiſtentiæ, exceſſus vis centripetæ ſuprà reſiſtentiam eſt vis tota acceleratrix; Si vis centripeta minor eſt vi reſiſtentiæ, vis tota retardans erit exceſſus reſiſtentiæ ſuprà vim centripetam. Quare differentia inter reſiſtentiam & vim centripetam in temporis momentum ducta erit in primo caſu ut incrementum velocitatis, & in ſecundo caſu, ut illius decrementum. Quod erat 3um. Sed momentum temporis eſt ut elementum ſpatii directe & velocitas inverſe (12), quarè velocitas in ſuum elementum (ſive incrementum ſit ſive decrementum) ducta, eſt ut elementum ſpatii, & differentia inter vim centripetam ac reſiſtentiam conjunctim. Quod erat 4um.

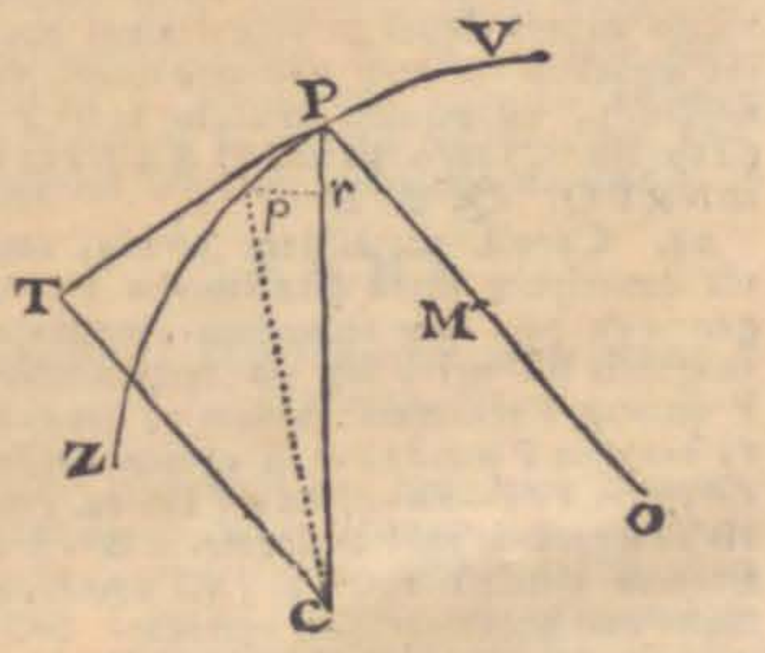
19. Coroll. 1. Undè ſi vis centripeta dicatur g, reſiſtentia r, ſpatium s, tempus t, velocitas v erit pro corporis aſcenſu $g\,dt+r\,dt=-dv$, & $g\,ds+r\,ds=-v\,dv$, & pro corporis deſcenſu, ſi vis centripeta vi reſiſtentiæ ſit major $g\,dt-r\,dt=dv$, & $g\,ds-r\,ds=v\,dv$; at ſi vis centripeta vi reſiſtentiæ ſit minor $r\,dt=g\,dt=-dv$, & $r\,ds-g\,ds=-v\,dv$.

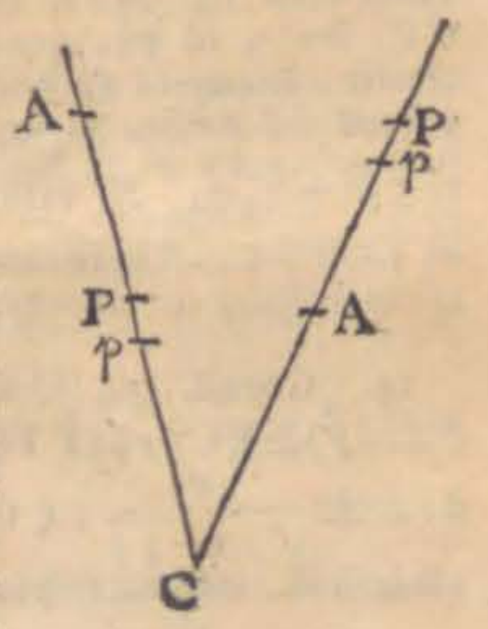
20. Coroll. 2. Si in his formulis ponatur $r=0$, mutabuntur illæ in formulas, quibus motus corporis in medio non reſiſtente determinantur. Quâ ratione motus corporis in medio reſiſtente conferri poſſunt cum ejuſdem motibus in medio non reſiſtente.

21. Coroll. 3. Si corpore deſcendente, reſiſtentia vi centripetæ æqualis fuerit, corporis celeritas æquabilis manet; nam in formulis $g\,dt-r\,dt=dv$, & $r\,dt-g\,dt=-dv$, poſitâ $g=r$, fit $dv=0$, hoc eſt, velocitatis incrementum vel decrementum nullum.

22. Coroll. 4. Si corpus in lineâ rectâ AC vi centripetâ urgeatur ad punctum datum C, & de loco dato A ſurſum vel deorſum projiciatur cum velocitate datâ in medio reſiſtente, & ſpatium AP quod aſcendendo vel deſcendendo deſcribit tempore t dicatur s, data AC dicatur b, & tam in aſcenſu quam in deſcenſu ſcribatur CP $=x$, adeóque in aſcenſu $x-b=s$, & $dx=ds$, in deſcenſu $b-x=s$, & $-dx=ds$; ſi loco ds ſubſtituatur ipſius valor in formulis coroll. 1. (19) erunt illæ pro aſcenſu $g\,dx+r\,dx=-v\,dv$, & pro deſcenſu $g\,dx-r\,dx=-v\,dv$, quarum una in alteram abit, mutato ſigno $\pm$ vel $-$, quantitati r præfixo. 22.





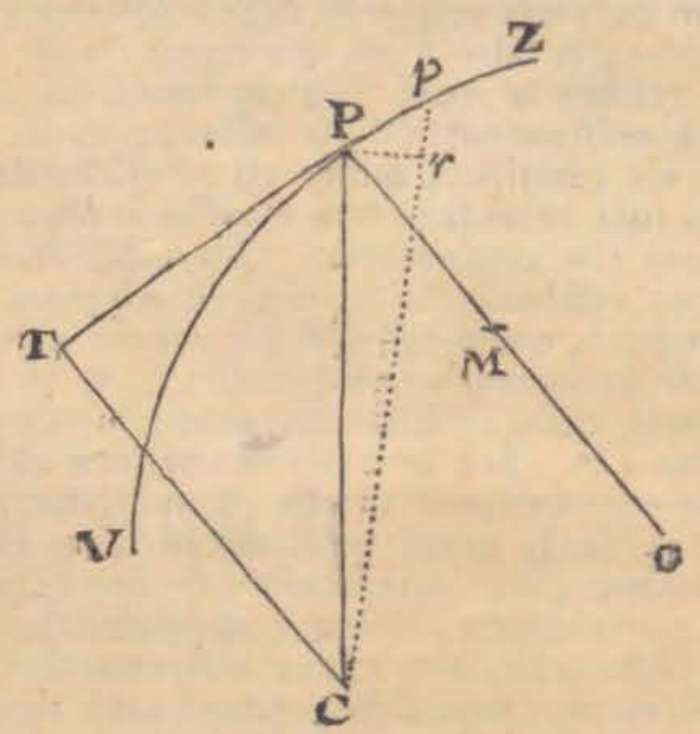


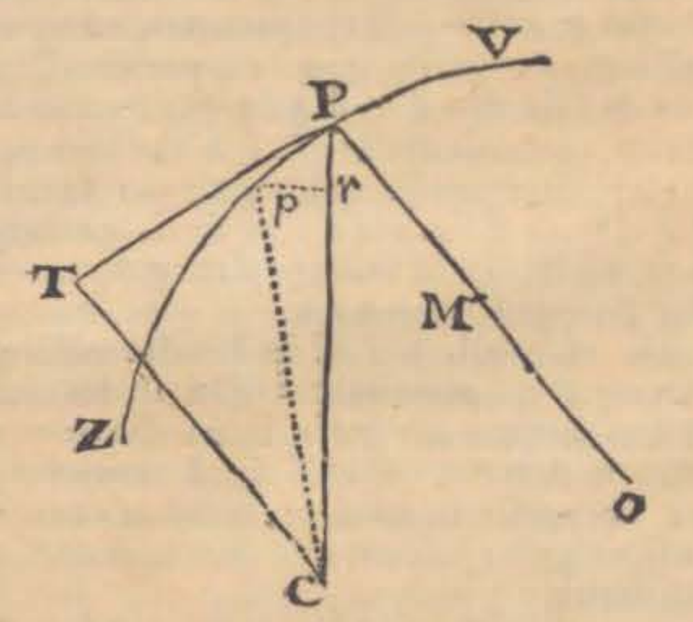
23. LEMMA. Si corpus vi quâlibet centripetâ ſollicitatum curvam VPZ in medio reſiſtente aut etiam in vacuo deſcribat, viſque centripeta in loco quovis P dividatur in vires duas, quarum altera directionem habeat PO tangenti PT per P ductæ normalem, altera directionem cum tangente congruentem, quadratum velocitatis cor-

DE MOTU CORPORUM.

poris in loco P, exponi poterit per factum ex vi normali ductæ in radium circuli curvam V P Z osculantis in P.

Sit PC, totius vis centripetæ directio, PO radius osculi, P p arcus curvæ infinitè parvus qui usurpari potest pro arcu circuli centro O & radio O P descripti. Velocitas corporis in P dicatur v, quæ per arcum P p tam in medio resistente quam in vacuo æquabilis est, (6) & totius vis centripetæ pars illa quæ secundum directionem P O agit, seu vis normalis dicatur N & quia vis resistentiæ ut potè semper contraria directioni mobili P T, (1) vim normalem N non afficit, erit vis illa N quâ corpus in arcu P p retinetur in medio resistente æqualis vi centripetæ quâ corpus idem cum eâdem velocitate æquabili v, in medio non resistente circulum describeret cujus centrum O, & radius O P. Corpus autem vi constante N, sollicitatum in vacuo de loco P cadat per radii partem P M ita ut eo lapsu acquirat celeritatem v quâ in medio non resistente circulum describeret cujus centrum est O & radius est O P; sitque P M $= s$, velocitas eo lapsu acquisita in M erit ergo $= v$, & erit (20. 19.) $N ds = v dv$, sumptisque fluentibus $Ns = \frac{1}{2} vv$, & $2Ns = vv$. Sed altitudo ex quâ corpus vi constante N sollicitatum in vacuo cadere debet ut velocitatem acquirat æqualem illi cum quâ circulum ipsum describit, est æqualis dimidio radii P O, (119. lib. 1.) ergo $2s =$ P O & $2Ns = vv = N \times$ P O. Q. E. D.





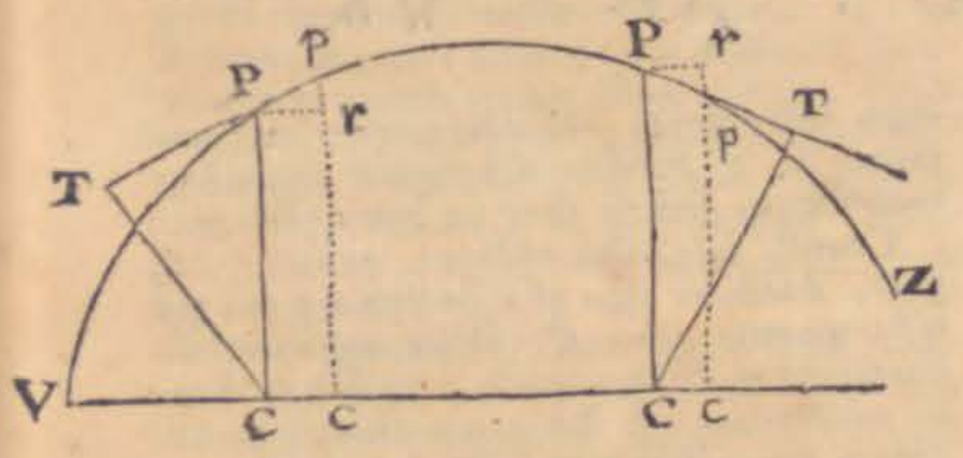
24. Coroll. 1. Iisdem positis, totius vis centripetæ juxtà directionem P C urgentis ea pars quæ secundum directionem tangentis P T agit, seu vis tangentialis in P dicatur T resistentia ibidem r, arcus V P s, ideoque P p $= ds$, & si corpus descendit, erit $Tds - rds = vdv$ (18. 19.) quia vis tangentialis motum accelerat & vis resistentiæ eundem retardat, vis autem normalis nec accelerat nec retardat. Sed si corpus ascendit, erit $Tds + rds = -vdv$ (18. 19.) vi tangentiali & resistentiâ motum corporis simul retardantibus.

25. Coroll. 2. Sit C virium centrum, vis tota centripeta in directione P C urgens $= g$, C P $= y$, C T tangenti perpendicularis $= p$, ideoque P T $= \sqrt{yy - pp}$. Ex puncto p, alteri P infinitè propinquo demissum sit ad C P perpendiculum p r, ut sit p r $= dy$, & triangulum P r p, simile triangulo P T C, & erit P p (ds) : p r (dy) $=$ P C : P T $= g : T = \frac{g\,dy}{ds}$, ubi observandum est dy, esse affirmativam, quando crescente arcu V P sive s, crescit etiam recta C P, seu y, id est, quando corpus ascendit, & contrà dy esse negativam, dum corpus descendit, adeóque in hoc casu fieri $T = -\frac{g\,dy}{ds}$. Hi valores vis tangentialis T, substituantur in formulis corollarii 1. & ambæ in hanc mutabuntur, $g\,dy + r\,ds = -v\,dv$.

26. Coroll. 3. Quia $\frac{\text{P p}\,(ds) : \text{p r}}{(\pm dy) = \text{P C}\,(y) : \text{P T}\,(\sqrt{yy - pp})}$ erit $ds = \pm \frac{y\,dy}{\sqrt{yy - pp}}$, (signo superiori pro ascensu & inferiori pro descensu usurpato).

pato). Quarè fiet $g\,dy + r\,ds = g\,dy \pm \frac{r\,y\,dy}{\sqrt{yy - pp}} = -v\,dv$.

27. Coroll. 4. Si radius oſculi PO dicatur R, eſt (23) $R \times N = v^2$, & quia $y : p = g : N$, adeóque $\frac{p\,g}{y} = N$, fiet $\frac{R\,p\,g}{y} = v^2$; ſed radius oſculi $R = \frac{y\,dy}{dp}$ (214. lib. 1.) quarè erit $\frac{g\,p\,dy}{dp} = v^2$, & $g = \frac{v^2\,dp}{p\,dy}$. Subſtituatur hic valor in formula corollarii 2i. & fiet $g\,dy + r\,ds = \frac{v^2\,dp}{p} + r\,ds = -v\,dv$, & ideò $v\,dv + \frac{v^2\,dp}{p} = -r\,ds$.



28. Coroll. 5. Vis centripetæ directio PC, ſibi ſemper parallela maneat, ut hic aſſumitur vis gravitatis, & per punctum V, in curvâ VPZ datum, ducatur recta VC directioni gravitatis PC perpendicularis, dicanturque ut ſuprà $VP = s$, $Pp = ds$, $CP = y$, $pr = dy$, vis tota gravitatis in P $= g$, reſiſtentia r, velocitas corporis ibidem $= v$, & erit ut in corollariio 2°. $g\,dy + r\,ds = -v\,dv$.

29. Coroll. 6. Si in Hypotheſi corollarii 5i. dicantur radius oſculi in $P = R$, vis normalis $= N$, abſciſſa $VC = x$, & Cc ſeu $Pr = dx$, erit ob triangulorum Ppr, CPT ſimilitudinem, $Pp : Pr = PC : TC = g : N$, ſive $ds : dx = g : N = \frac{g\,dx}{ds}$; ſed (23) $N = \frac{v^2}{R}$, ergò $\frac{g\,dx}{ds} = \frac{v^2}{R}$, & hinc $v^2 = \frac{R\,g\,dx}{ds}$.

30. Coroll. 7. Eſt autem (216. Lib. 1.) $R = \frac{ds^2\,dy}{ds\,ddx - dx\,dds} = -\frac{ds^2\,dy}{dx\,dds}$, ſi ponatur dx, conſtans, & ideò $ddx = 0$; Et quia $ds^2 = dy^2 + dx^2$, ſumptiſque fluxionibus, factâ dx, conſtante $ds\,dds = dy\,ddy$, & $dds = \frac{dy\,ddy}{ds}$, fiet $R = -\frac{ds^3}{dx\,ddy}$; quarè (29) $v^2 = \frac{R\,g\,dx}{ds} = -\frac{g\,ds^2}{ddy}$, ideoque $g = -\frac{v^2\,ddy}{ds^2}$, & hinc (28) $g\,dy + r\,ds = -\frac{v^2\,dy\,ddy}{ds^2} + r\,ds = -v\,dv$, hoc eſt, ob $dy\,ddy = ds\,dds$, $v\,dv = \frac{v^2\,dds}{ds} - r\,ds$.

31. Scholion. In ſuperioribus quinque lemmatis ipſorumque corollariis, fere complexi ſumus principia omnia, quibus & ad inventionem & ad demonſtrationem motuum in mediis reſiſtentibus uſi ſunt Clariſſ. viri Newt. in hoc Libro; Varignonius in monumentis Academiæ Regiæ an. 1707. 1708. 1709. 1710. 1711. Joannes Bernoulli ibidem an. 1711. & in actis eruditorum Lipſ. an. 1713. & 1719. Hermannus Lib. 2. Phoronomiæ & in commentariis Academiæ Petropolitanæ, ac Eulerus in opere exquiſito quod de Mechanicâ ſcripſit analyticè. Nunc alia nonnulla de Logarithmicæ proprietatibus, & de methodo maximorum & minimorum quæ ad doctrinam motuum in mediis reſiſtentibus explicandam ſpectant, ſubjungenda ſunt.

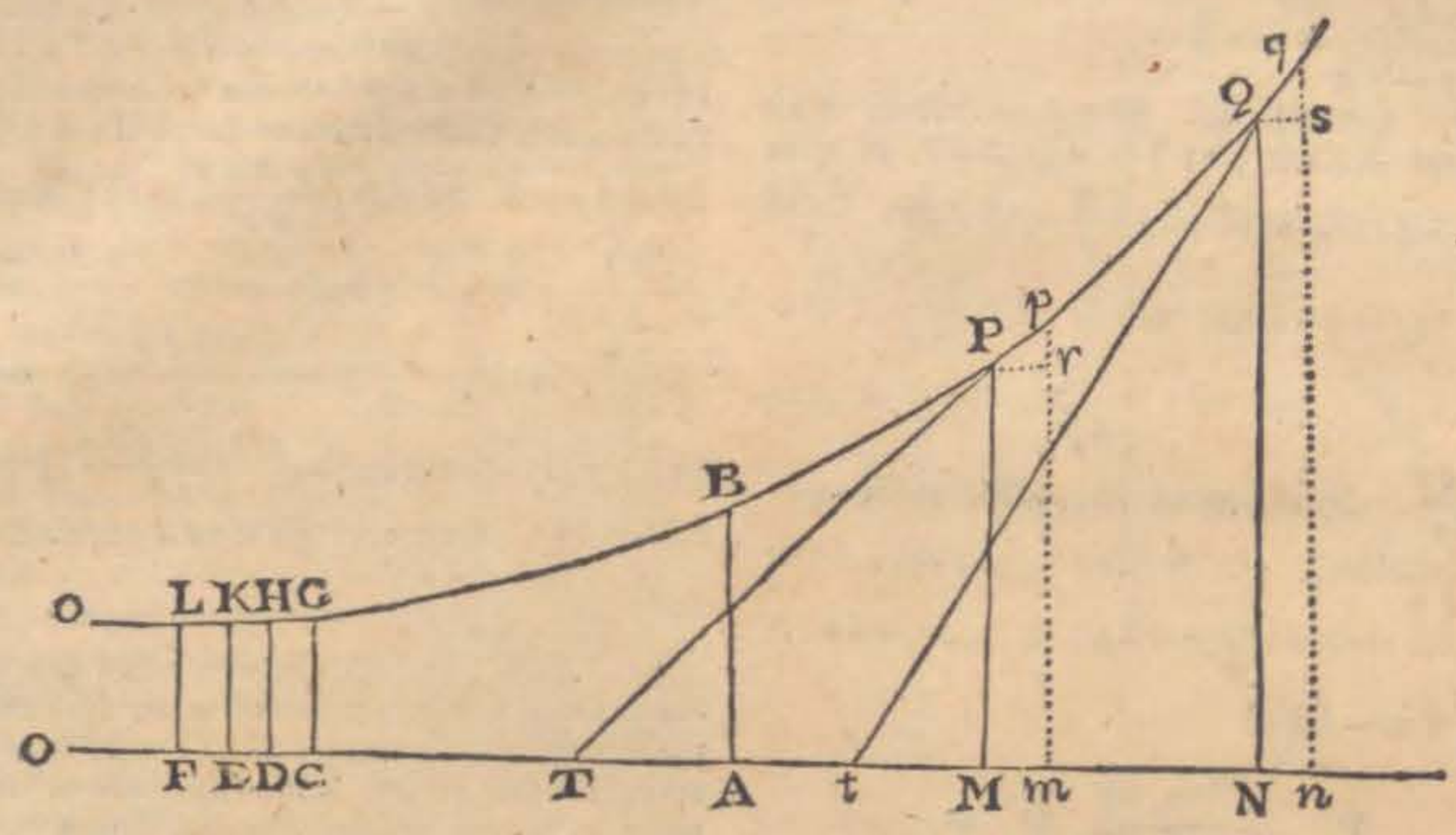
LEMMA

præcipuas Logarithmicæ proprietates exponens.

III. Hugenius de hac ipsâ Newtoniani operis parte loquens, in quâ agitur de corporibus in mediis reſiſtentibus motis, (quam ſummâ cum voluptate ſe vidiſſe teſtatur) ait ſe notaſſe lineam curvam quam Logarithmicam aut Logiſticam nuncupat, ſummæ utilitatis eſſe in hoc negotio, & quædam de eâ Theoremata indicat quorum demonſtrationem Guido Grandus poſtea evulgavit; Hujus ergo curvæ proprietates ab initio explicare à ſcopo noſtro alienum non duximus.

32. Dan-

DE MOTU CORPORUM.



32. Defin. Sit linea recta NAO secundum quam feratur perpendicularis MP motu uniformi & sibi parallelo, dum in ea perpendiculari MP mobile P velocitate variabili movetur secundum hanc Legem, ut ejus velocitas sit semper proportionalis distantiæ ejus à rectâ NAO, curva ab illo puncto P descripta dicetur *Logarithmica vel Logistica.*

Linea NAO secundum quam perpendicularis PM motu uniformi & sibi parallelo fertur, dicitur *Axis Logarithmicæ*, & lineæ PM, QN perpendiculares in Axem sunt ejus ordinatæ.

Si quædam ex ordinatis Logarithmicæ, ut AB, sit æqualis unitati, punctum axeos A cui insistit censetur absciſſarum origo, & absciſſæ à parte AM sumptæ, sunt positivæ, à parte AO negativæ & absciſſa pertinens ad ordinatam AB sive ad unitatem est ipsum o.

Coroll. 1. *Differentiæ quamminimæ ordinatarum Logarithmicæ æqualibus tempuſculis genitæ, sunt ut illæ ordinatæ.*

In quovis enim puncto Logarithmicæ velocitas axi perpendicularis quâ ordinatæ creſcunt vel decreſcunt, est ordinatæ proportionalis (ex Def.), sed durante tempuſculo infinitè parvo illa velocitas uniformis est censenda, & æqualibus tempuſculis incrementa vel decrementa linearum sunt ut velocitates uniformes quibus generantur, ergo incrementa vel decrementa ordinatarum h. e. earum differentiæ æqualibus tempuſculis genitæ sunt ut illæ ordinatæ.

Coroll. 2. *Sint ordinatæ quævis PM, QN, ducantur duæ aliæ ordinatæ pm, qn ipſis quamproximæ & ab iis æqualiter diſtantes, pm & qn erunt prioribus ordinatis proportionales:* Velocitas enim quâ ordinata motu sibi parallelo fertur est uniformis, ideoque eodem tempore ordinata PM ad pm perveniet ac QN ad qn ob æquales distantias, ergo, per Cor. I. differentiæ ordinatarum PM & QN dum perveniunt ad pm & qn erunt iis ipsis ordinatis proportionales, sed adjectis vel detractis iis differentiis à lineis PM & QN fiunt ordinatæ pm, qn, & adjectis vel detractis ex terminis rationis cujusvis, correſpondentibus terminis rationis ipsi æqualis non mutatur prio ratio, ergo ordinatæ pm & qn erunt inter se ut PM ad QN, & etiam alternando PM:pm=QN:qn.

Coroll. 3. *Si ſumantur in axe puncta C, D, E, F ad diſtantias æquales & quamminimas, in iiſque punctis erigantur ordinatæ, illæ ordine conſtituent Progreſſionem Geometricam.* Nam quia ex Hyp. ordinatæ GC & HD, HD & KE sunt quamproximæ & æqualiter distantes, est per Corollarium præcedens GC:HD=HD:KE, eadem ratione est HD:KE=KE:LF, sicque deinceps, unde liquet ordi-

ordinatas GC:HD:KE:LF &c. esse in progressione Geometricâ.

33. *Theor. I. Sumantur in axe Logarithmicæ quatuor puncta, ita ut duo priora æque à se mutuò distent ac duo posteriora, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in proportione Geometricâ.*

Et si sumantur in axe quotlibet puncta æque distantia ordine continuo, ordinatæ iis insistentes erunt in progressione Geometricâ.

Sumantur in axe duo puncta quævis A & E, & alia duo H & K talia ut sit AE=HK, eriganturque in illa puncta ordinatæ AL, EP, HS, KT; dico illas ordinatas fore in proportione Geometricâ.

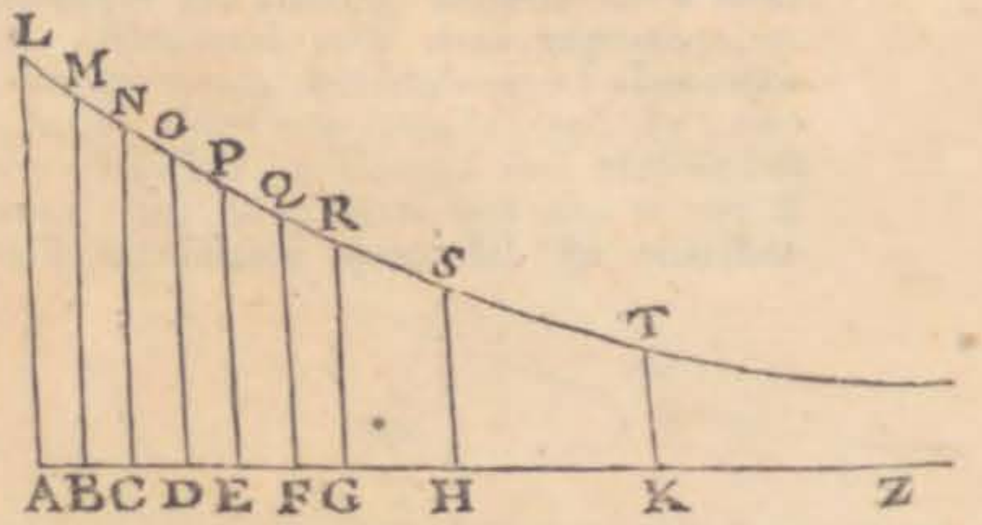
Dividatur tam AE quam HK, in partes infinitè parvas æquales inter se, totidem erunt divisiones in utroque intervallo, erigantur in illa puncta ordinatæ, fient duæ progressiones Geometricæ, in quibus totidem erunt termini & rationes terminorum successivorum æquales erunt, quia ordinatæ in utráque progressione æqualiter distant; Ergo ex æquo, primus terminus AL prioris progressionis erit ad EP ultimum terminum ejus progressionis, ut HS primus terminus alterius progressionis ad ejus ultimum terminum KT. Q. E. D.

Et si sumantur in axe plura puncta æquè distantia ordine continuo sibi succedentia, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in progressione geometricâ: Probatur ut in Cor. 3. defin.

Coroll. *E converso, si in lineâ quâvis sumantur plura puncta, æquè distantia ordine continuo, & in iis erigantur perpendiculares quæ sint in progressione Geometricâ, Logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates transibit.*

Sint enim A, D, G &c. ea puncta æquè distantia dividanturque eorum intervalla in partes æquales quamminimas, totidem erunt in quovis intervallo, assumantur mediæ proportionales inter perpendiculares AL & DO, DO & GR, &c. tot quot sunt divisionum puncta, & in singulis punctis erigantur perpendiculares iis mediis proportionalibus ordine sumptis æquales; Denique curva tangat tam perpendiculares datas AL, DO, GR quam hasce medias, dico eam curvam esse Logarithmicam.

Facile enim liquet ex naturâ progressionum, quod cum sit AL:DO=DO:GR &c. & totidem mediæ proportionales assumantur inter AL & DO, quot assumuntur inter DO & GR, sicque deinceps, formari progressionem continuam constantem ex omnibus illis perpendicularibus tam datis quam inventis, ideo quamlibet ex illis, ut AL, esse ad sibi proximam BM, ut alia quævis DO, est ad proximam PE, unde dividendo, est AL ad suam differentiam à proximâ, ut est etiam DO ad suam differentiam à proximâ, ideóque perpendicularium proximarum differentiæ erunt ubique eis perpendicularibus proportionales; Evanescentibus ergo punctorum in axe sumptorum intervallis, & perpendicularibus ad vicinas æquali ubique celeritate latis & æquali tempusculo (ob æqualitatem intervallorum), velocitates quibus crescunt vel decrescunt perpendiculares erunt iis ipsis perpendicularibus proportionales; Ergo (ex definitione Logarithmicæ) ea curva quæ tanget eas perpendiculares erit Logarithmica.



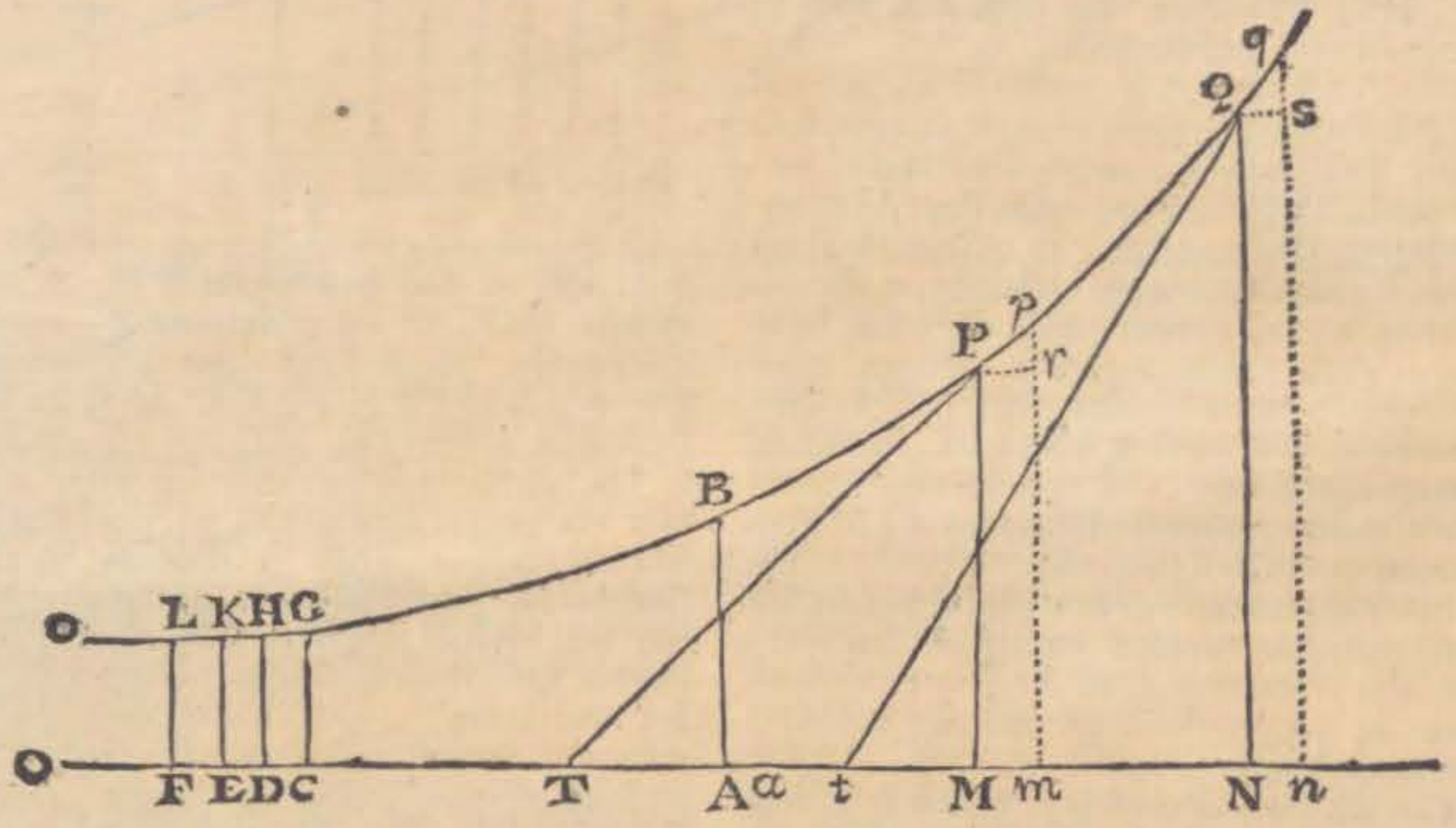
34. Theor. II. *Abscissæ axis Logarithmicæ, sunt Logarithmi ordinatarum in earum extremo insistentium.* Ferantur hinc inde ab origine axis partes æquales quamminimæ, in extremo singularum erigantur ordinatæ, illæ omnes ordinatæ constituent progressionem Geometricam inter cujus terminos occurrit unitas, earum verò abscissæ erunt in progressione Arithmeticâ propter partium in axe sumptarum æqualitatem, & abscissa quæ unitati respondet est o; Jam autem cum termini progressionis Arithmeticæ inter quos est o ita aptantur terminis progressionis Geometricæ ut o respondeat unitati & reliqui termini sibi respondeant, tum termini progressionis Arithmeticæ sunt Logarithmi terminorum correspondentium pro-

DE MOTU CORPORUM.

progreſſionis Geometricæ; Ergo abſciſſæ Logarithmicæ, ſunt Logarithmi ordinatarum correſpondentium.

Corol. 2. *Portio axis quæ intercipitur inter duas Ordinatas eſt Logarithmus rationis quæ intercedit inter illas Ordinatas.* Quotiens enim duarum quantitatum exprimit rationem quæ inter illas intercedit, & differentia Logarithmorum earum quantitum, eſt logarithmus quotientis earum, ſed abſciſſæ ſunt Logarithmi ordinatarum, & portio axis quæ intercipitur inter duas ordinatas eſt differentia abſciſſarum ſive Logarithmorum ad eas ordinatas pertinentium, ergo illa portio eſt Logarithmus quantitatis quæ exprimit rationem quæ inter Ordinatas intercedit.

Coroll. 2. *Si dentur duarum aut plurium quantitatum Logarithmi, & à puncto dato rectæ alicujus ſumantur longitudines eis Logarithmis æquales, & in earum extremo erigantur perpendiculares quantitatibus quarum ſumuntur Logarithmi æquales, Logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates tranſibit.*



In recta O A N ſumatur punctum A in quod erigatur perpendicularis A B unitati æqualis, ſitque A M logarithmus quantitatis cui æqualis eſt perpendicularis M P, ſit A a differentia progreſſionis Arithmeticæ ex quâ deſumuntur logarithmi, quæ ideò accuratè continebitur in intervallo AM toties quot ſunt termini in progreſſione Geometrica ex qua deſumuntur quantitates quarum habentur Logarithmi, quærantur tot mediæ proportionales inter A B & M P quot ſunt diviſionum puncta inter A & M, & in illa puncta erigantur perpendiculares illis mediis proportionalibus ordine æquales, fiet progreſſio Geometrica, quæ eſt ipſa progreſſio quantitatum quarum abſciſſæ lineæ O A N quantitate A a ſucceſſivè auctæ ſunt Logarithmi, ſiquidem in utrâque progreſſione occurrunt termini A B & M P eodem intervallo in utraque diſſiti, ſed ſi in punctis æquidiſtantibus lineæ cujuſvis erigantur perpendiculares in progreſſione Geometricâ, Logarithmica aliqua earum vertices tanget (Cor. Theor. I.) Ergo ſi dentur numeri cum ſuis Logarithmis concipi ſemper poterit Logarithmica cujus abſciſſæ ſint illi Logarithmi & cujus ordinatæ ſint quantitates quibus reſpondent.

35. Theor. III. *Axis logarithmicæ eſt ejus Aſymptotus ad quam ab unâ parte accedit propius datâ quâvis quantitate numquam tamen eam attingit, & à quâ ab alterâ parte longius recedit datâ quâvis quantitate.*

Sint duæ ordinatæ A B, M P quarum una ſit alterius dupla vel pluſquam dupla, feratur portio axis A M hinc inde ſecundum axem ſine fine, ordinatæ in ea puncta erecta creſcent ab unâ parte & ab alterâ decreſcent in ratione duplâ vel pluſquam

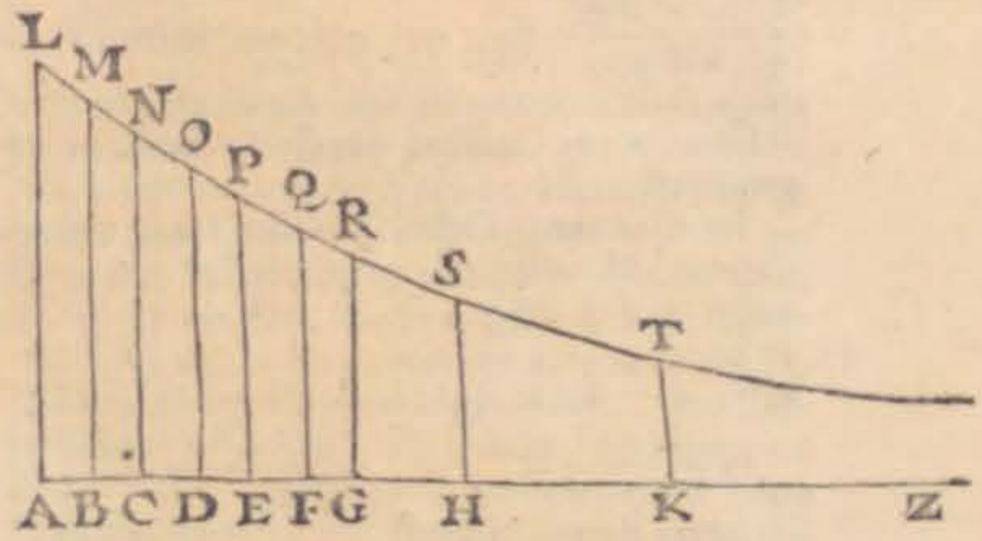
quam duplâ (per Cor. Theor. I.) ſed ex Principiis Archimedeis quantitas creſcens in progreſſione duplâ vel pluſquam duplâ omnem quantitatem datam tandem excedet, & ex Principiis Euclideis quantitas quævis decreſcens in ratione duplâ vel pluſquam dupla minor fit quâvis quantitate datâ; Ergo Logarithmicâ longius ab axe recedit, aut propius ad eum accedit quâvis quantitate datâ, numquam tamen eum attinget, attingat enim eum ſi fieri poteſt in quodam puncto X, ferendo diſtantiam AM ſecundum axem, fiet tandem ut cadat proxime citra X, putà in Y, tum proximè ultra, ut in Z; in puncto Y nondum attinget axem ex Hypotheſi, & aliquo intervallo YV ab eo diſtabit, ſed quia YZ = AM debebit eſſe AB:MP = YV ad ordinatem in Z, qua ideò dabitur, ac per conſequens Logarithmica nondum attinget axem in Z, nedum eum attigerit in X. Q. E. D.

36. Theor. IV. *Subtangens Logarithmicæ eſt conſtans.* Capiantur enim ubivis in axe particulæ æquales quamminimæ Mm, Nn, erectiſque ordinatis MP, mp, & NQ, nq, per puncta P & Q concipiantur tangentes PT, Qt axi occurrentes in T, t; ducantur etiam rectæ Pr, Qs, ordinatis mp, nq perpendiculares. Evaneſcentibus ordinatarum diſtantiis Mm, Nn, triangulum Ppr fit ſimile triangulo TPM, & Triangulum Qqs ſimile triangulo tQN, ideoque eſt pr:PM = Pr (ſive Mm):MT, & qs:QN = Nn (ſive Mm):Nt, ſed ob diſtantias Mm, Nn æquales eſt pm: PM = qn:QN & dividendo eſt pr:PM = qs: QN, quare Pr (ſive Mm):MT = Nn (ſive Mm):Nt, adeoque MT = Nt. Q. E. D.

Cor. *Hinc cum ordinata ſit ad ſubtangentem conſtantem ut fluxio ordinatæ ad fluxionem abſciſſæ, obtinetur Logarithmicæ æquatio fluxionalis.* Abſciſſa AM dicatur x, ordinata MP y, ſubtangens MT, s, fluxio Mm erit dx, pr = dy, cumque ſit $y:s = dy:dx$, eſt $y\,dx = s\,dy$ æquatio ad logarithmicam.

37. PROBL. I. *Datâ ſubtangente & duabus ordinatis Logarithmicæ, invenire portionem axis inter eas ordinatas interceptam.*

1°. Caſus major ex illis ordinatis non ſit pluſquam dupla alterius; major illa ordinata ſit LA quæ dicatur y, minor ſit GR, differentia earum LA − RG ſit b. Portio axis AG inter eas intercepta ſit x, diviſaque concipiatur in partes æquales infinitè parvas AB = dx, earum numerus (qui infinitus cenſendus eſt) dicatur n, erit ergo $n\,dx = x$; ſubtangens data ſit s, eritque per Corollarium præcedens $y:s = (dy:dx = ndy:ndx =)\ ndy:x$; hoc autem modo determinatur valor ndy. Concipiantur erectæ omnes ordinatæ in puncta diviſionum portionis axis AG, erunt in progreſſione Geometricâ (per cor. 3. def. n. 32.) & cum earum differentiæ ſint ut illæ ordinatæ (per. cor. 1. def. n. 32.) differentiæ ſucceſſivæ earum ordinatarum erunt in progreſſione Geometricâ, cujus omnes termini ſimul ſumpti differentiam LA − RG ſive b efficient; numerus autem terminorum ejus progreſſionis erit n, primus terminus dy, ſecundus invenitur per hanc proportionem $LA:MB = dy:\frac{MB}{LA}\,dy$ ſive (quia $MB = y - dy$ & $LA = y$) ſecundus ille terminus erit $\frac{y-dy}{y}\,dy$, unde juxta Methodum ſummandi progreſſiones Geometricas eſt $b = dy \times \frac{\frac{y-dy}{y}^{n} - 1}{\frac{y-dy}{y} - 1}$



$= -\frac{1}{y^{n-1}} \times \overline{y - dy}^{n} - y^{n} =$ (valore $\overline{y-dy}^{n}$ in ſeriem reducto) $-\frac{1}{y^{n-1}} \times y^{n} - ny^{n-1}dy + n \times \frac{n-1}{2} y^{n-2}dy^{2}$ &c. $-y^{n}$; ſive deletis terminis y^{n} & $-y^{n}$, totâque ſerie per $-y^{n-1}$ diviſa eſt $b = +ndy$

DE MOTU CORPORUM.

$-\frac{nn-n}{2}y^{-1}dy^2+\frac{n^3-3n^2-2}{2\times 3}y^{-2}dy^3$ &c.

sed quoniam n est numerus infinitus, in singulis coefficientibus altissima ejus dignitas sola assumi debet, reliquis terminis neglectis, unde series ad hanc reducitur $b=+ndy-\frac{n^2y^{-1}dy^2}{2}+\frac{n^3y^{-2}dy^3}{2\times 3}$ &c. qui quidem termini finiti sunt, compensatâ dignitate numeri infiniti n per infiniti parvi dy similem dignitatem.

Ex eâ autem serie, per serierum reversionem obtinebitur valor ipsius ndy, sit enim $ndy=Ab+Bb^2+Cb^3+Db^4$ &c.

erit $+ndy=+Ab+Bb^2+Cb^3$ &c.

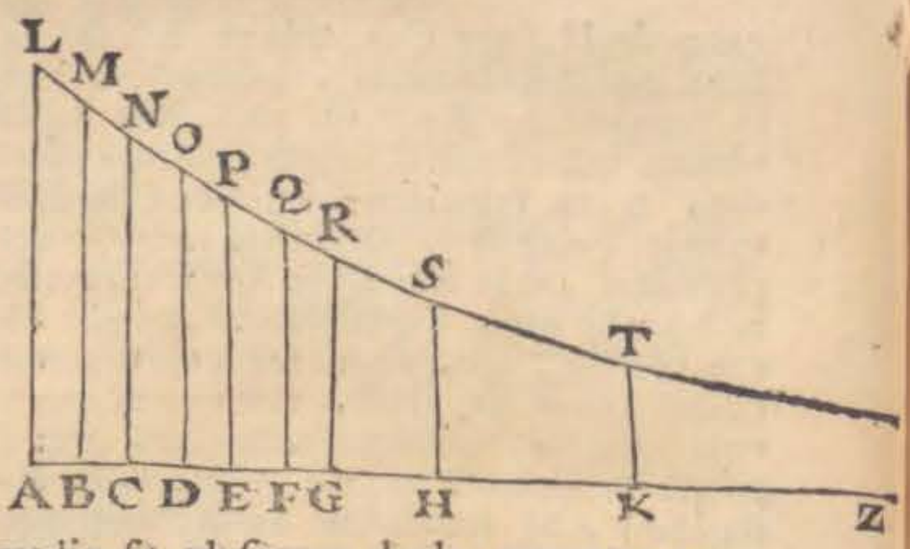
$-\frac{nndy^2}{2y}=\quad -\frac{A^2b^2}{2y}-\frac{2ABb^3}{2y}$

$+\frac{n^3dy^3}{2\times 3y^2}=\quad +\frac{A^3b^3}{2\times 3y^2}$

Cum ergo hi omnes termini debeant efficere b, fiat primus terminus $Ab=b$ erit $A=1$, & reliqui omnes termini debebunt esse æquales o, suppeditabuntque totidem æquationes ad determinandos coefficientes B, C, D &c. v. gr. est $+Bb^2-\frac{A^2b^2}{2y}=0$, unde invenitur $B=\frac{1}{2y}$; est $Cb^2-\frac{2ABb^3}{2y}+\frac{A^3b^3}{2\times 3y^2}=0$, substitutoque valore A & B divisoque per b^3, est $C=\frac{1}{3y^2}$, sicque de cæteris, unde reperietur $ndy=b+\frac{b^2}{2y}+\frac{b^3}{3y^2}+\frac{b^4}{4y^3}$ &c.

Cum itaque sit $y:s=ndy:x$, erit $x=s\times\frac{b}{y}+\frac{b^2}{2y^2}+\frac{b^3}{3y^3}+\frac{b^4}{4y^4}$ &c. Q. E. I.

Alius Cas. Quod si ordinata LA fit plusquam dupla ordinatæ TK, quæratur media proportionalis inter LA & TK, cujus si LA non fit plusquam dupla, invenietur intervallum abscissum inter eam & LA, ut prius, eritque dimidia pars intervalli quæsiti AK, erit enim LA ad eam mediam, ut ea media ad TK, unde portio axis inter LA & eam mediam, erit æqualis portioni axis inter eam mediam & TK; si LA ejus



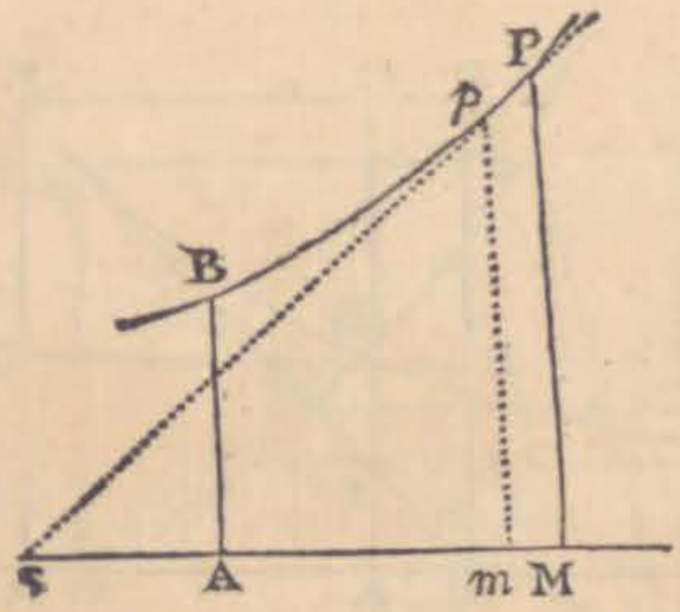
mediæ sit plusquam dupla, quæratur nova media inter LA & priorem mediam, intervallum inter hanc & LA erit quarta pars portionis quæsitæ AK. Quod si LA fit adhuc plusquam dupla istius mediæ repetatur operatio donec media inveniatur cujus LA non sit plusquam dupla, ex cujus intervallo, intervalli AK valorem assignare licebit, eo quo prius usi sumus ratiocinio.

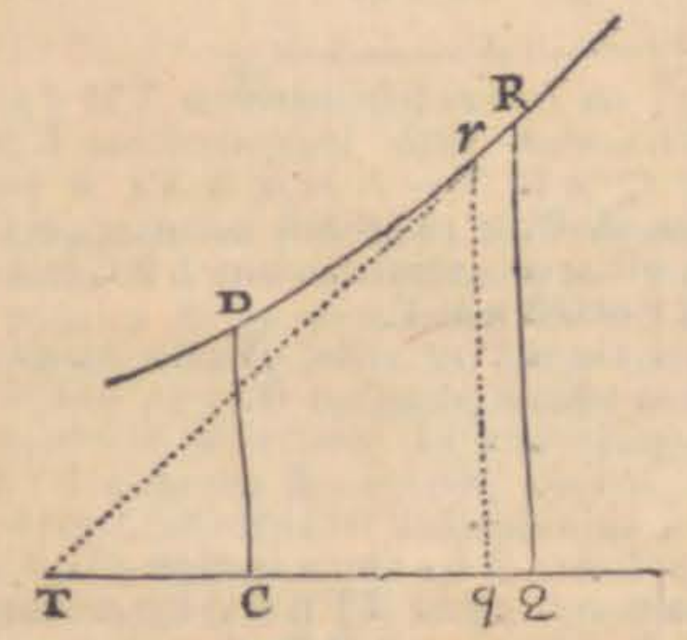
Cor. 1. *Si una ex ordinatis sit unitas, portio axis quæsita* x *erit alterius ordinatæ abscissa, ideoque ejus erit Logarithmus*, positivus quidem si ea ordinata sit unitate major, negativus verò si unitate sit minor.

Cor. 2. Si ordinata GR sit unitas, & ordinata LA ejus dupla, & si subtangens Logarithmicæ sit æqualis unitati, series abscissam exhibens in hanc mutatur $x=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 8}+\frac{1}{4\times 16}$ &c. quorum terminorum calculus est facillimus, qui si instituatur, abscissa quæsita invenietur $x=.6931472$.

38. Theor. V. *Sint duæ diversæ Logarithmicæ in utráque sumantur ordinatæ æquales, abscissæ illis ordinatis correspondentes in utráque Logarithmicâ erunt ut earum Logarithmicarum subtangentes, adeoque in constanti ratione.*

Sint duæ Logarithmicæ PB, RD prioris subtangens sit MS $=s$, subtangens alterius sit QT $=t$; Ordinatæ PM, RQ in utráque sumptæ sint æquales dicanturque y; sint ordinatæ BA & DC æquales unitati; abscissa AM dicatur x, & CQ, z; dico fore $s:t=x:z$. Dividatur AM in partes infinite parvas dx, quarum numerus (infinitus) dicatur n. In totidem partes dz dividatur CQ, & concipiantur ordinatæ in omnes divisiones erectæ, illæ ordinatæ erunt in progressione Geometri-





eâ in utroque intervallo, ſitque p m ſecundus terminus primæ progreſſionis, & q r ſecundus terminus progreſſionis alterius, erit in primâ P M : B A = P M^{n-1} : p m^{n-1}, in ſecunda R Q : D C = R Q^{n-1} : r q^{n-1}, ex natura progreſſionis Geometricæ, & quia tres priores termini harum proportionum ex hypotheſi ſunt æquales; æquales etiam erunt p m^{n-1} & r q^{n-1}, ideóque p m = r q, & P M − p m = R Q − r q, differentiæ ergo proximarum ordinatarum ſunt æquales, dicanturque *dy*. Eſt autem in prima Logarithmica (per Probl. 1. n. 37.) $y : s = n\,dy : x\,dx$ ſive x, & alternando $y : n\,dy = s : x$; in ſecunda $y : t = n\,dy : n\,dz$ ſive z, & alt. $y : n\,dy = t : z$, eſt ergo $s : x = t : z$ ſive $s : t = x : z$. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc liquet quod (manente unitate) logarithmicæ quarum eædem erunt Subtangentes, in omnibus erunt æquales, quippe ſi ſumantur in iis æquales ordinatæ abſciſſæ etiam æquales erunt.

Cor. 2. Logarithmicæ vero diverſæ ſpeciei dicentur, quarum ſubtangentes erunt diverſæ; & Logarithmi diverſæ ſpeciei dicentur, ubi eiſdem quantitatibus Logarithmi diverſi reſpondebunt, unde etiam Logarithmicæ ad quas pertinent diverſæ illæ Logarithmorum ſpecies, habebunt diverſas ſubtangentes (per hoc Theor.) ideoque erunt diverſæ ſpeciei. LIBER SECUND. SECTIO I. 38.

v. gr. cum

Cor. 3. *Datis Logarithmis cujuſvis ſpeciei, Logarithmi alius ſpeciei eiſdem numeris reſpondentes inveniri poſſunt, ſi dentur ſubtangentes utriuſque ſpeciei;* Hinc ſi dentur Logarithmi quorum ſubtangens eſt unitas (qui Hyperbolici dicuntur), ſitque data ſubtangens alius ſpeciei .4342944 multiplicentur Logarithmi dati per hunc numerum, habebunturque eorumdem numerorum Logarithmi in hac alterâ ſpecie, ut liquet ex hoc Theor. Ideoque in poſterum per hanc expreſſionem L. x, Intelligemus Logarithmum Hyperbolicum quantitatis x, qui ſi multiplicetur per quantitatem quamlibet ut a, a L. x exprimet Logarithmum x ex eâ ſpecie depromptum quæ habet a pro ſubtangente, eſt enim $1 : a =$ L. x ad eum Logarithmum qui ergo erit a L. x.

39. *Probl. II. Data ordinatâ Logarithmicæ & ejus abſciſſâ, invenire ejus ſubtangentem, dummodo alterius cujuſlibet Logarithmicæ ſubtangens ſit data.*

Datâ ſit ſubtangens Logarithmicæ P B, Logarithmicæ verò R D datâ ſit abſciſſa C Q & ordinata Q R, quæritur hujus Logarithmicæ ſubtangens: Quæratur primum abſciſſa quæ in Logarithmica P B reſponderet ordinatæ æquali Q R, per Probl. I. ſitque ea A M, fiatque ut A M ad C Q ita ſubtangens data ad quæſitam.

Exemp. In tabulis Logarithmorum, Logarithmus numeri 2. eſt .3010300. ſi ergo concipiatur Logarithmica cujus abſciſſæ ſint Logarithmis tabularum æquales, & cujus ordinatæ ſint æquales numeris eis Logarithmis correſpondentibus, quæraturque ejus Logarithmicæ ſubtangens; inveniatur in altera Logarithmica cujus ſubtangens eſt unitas abſciſſa reſpondens ordinatæ quæ ſit unitatis dupla (per Cor. 2. Prob. I.) quæ eſt .6931472. fiatque ut .6931472. ad .3010300. Ita unitas ad ſubtangentem Logarithmicæ tabularum quæ invenietur .4342944.

Coroll. Hinc dato Logarithmo alicujus numeri deſumpto ex Logarithmica cujus ſubtangens data eſt, habebitur ejus numeri

DE MOTU CORPORUM.

meri Logarithmus in tabulas, dicendo ut ſubtangens data ad .4342944. ita Logarithmus datus ad ejuſdem numeri Logarithmum in Tabulis.

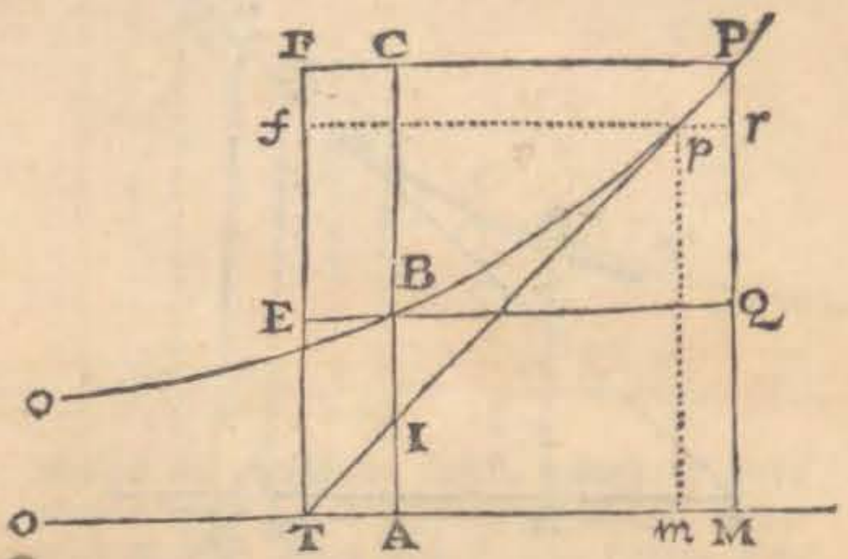
40. Probl. III. *Sit quantitas variabilis, cujus Logarithmus etiam variabilis eſt, ex ejus quantitatis variabilis fluxione, fluxionem ejus Logarithmi determinare.* Concipiatur Logarithmica ad quam pertinet ſpecies Logarithmi quæ aſſumitur, ſit a ejus ſubtangens, ſitque y variabilis propoſita, quæ conſideretur ut ejus Logarithmicæ ordinata, ſitque x ejuſdem Logarithmicæ abſciſſa ei ordinatæ y reſpondens, erit per naturam Logarithmicæ (n. 36) $y\,dx = a\,dy$ & $dx = \frac{a\,dy}{y}$, ſed x eſt Logarithmus ordinatæ y, ergo dx eſt ejus differentia, ergo $d\,L.y = \frac{a\,dy}{y}$ hoc eſt, differentia Logarithmi eſt differentia variabilis propoſitæ diviſa per ipſam variabilem, & ducta in conſtantem quæ ſit ſubtangens Logarithmicæ ad quam pertinet ſpecies Logarithmi aſſumpti.

Et è converſo, ſi habeatur hæc fluxio $\frac{a\,dy}{y}$, ejus fluens eſt Logarithmus ipſius quantitatis y ex eâ Logarithmicâ deſumptus cujus ſubtangens eſt a.

41. Theor. V. *Spatium Logarithmicum ABPM duabus ordinatis AB, PM arcu BP & abſciſſâ AM comprehenſum, æquale eſt rectangulo ſubtangentis & differentiæ ordinatarum.*

Ductâ enim per punctum P tangente PT, compleatur rectangulum TFPM, agatur per B recta EQ, parallela TM, ſecans TF in E & MP in Q; per m ordinata m p alteri MP infinite propinqua, & per p recta f r parallela TM, occurrens TF in f & MP in r; His poſitis (ob triangula P r p, P M T ſimilia) erit P r : p r = P M : M T, ſeu P F, ideóque rectangulum M m p r æquale erit rectangulo P F f r. Quare ſi area logarithmica A B P M diviſa intelligatur in rectangula innumera ut M p, rectangulum E F P Q diviſum erit in totidem rectangula ut F r correſpondentibus M p, æqualia, & proinde area logarithmica A B P M æqualis eſt rectangulo E F P Q. Q. E. D.

Hinc *ſpatium Logarithmicum A B P M eſt ut ordinatarum A B, P M differentia*



P Q, ob datam ſubtangentem T M (36).

Trilineum verò logarithmicum B P Q = P Q × M T − A M × B A; & producta A B ut rectæ F P occurrat in C, erit trilineum logarithmicum B P C = A C × C P − C B × M T.

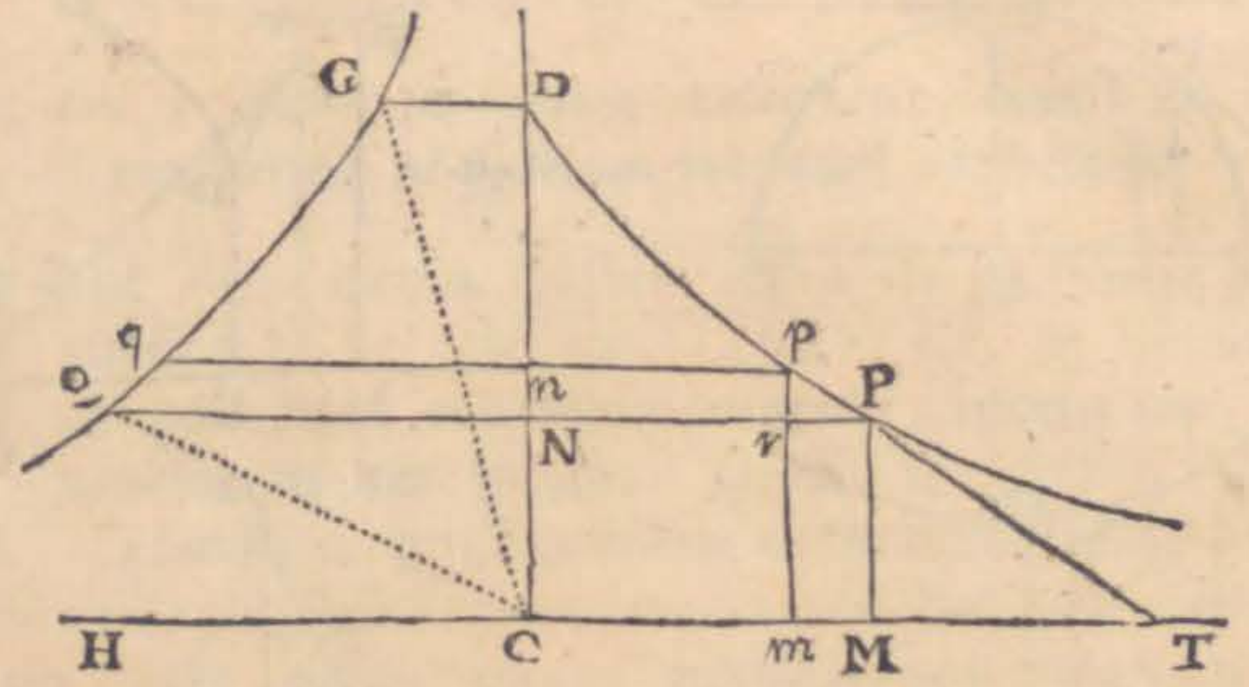
42. Coroll. 1. *Hinc ſpatium logarithmicum infinitè protenſum O O P M, quâ parte logarithmica ad aſymptotum M O continuò accedit, duplum eſt trianguli P T M.* Nam ob diſtantiam infinitam M O evaneſcit ordinata A B, fitque ſpatium O o P M, æquale rectangulo T F P M, ſub ordinatâ P M & ſubtangente M T contento.

43. Cor. 2. *Tangens P T (producta ſi opus eſt) ſecet ordinatam A B in I, & ſpatium logarithmicum B P C erit ut B I inter logarithmicam & tangentem intercepta.* Nam ob triangulorum T F P, I C P, ſimilitudinem, eſt T F ad F P, (ſeu A C ad M T) ut C I ad C P, & ideò A C × C P = M T × C I. Quarè (41) trilineum B P C = A C × C P − M T × C B = M T × C I − M T × C B = M T × B I. Eſt igitur, ob datam M T, trilineum B P C ut B I.

44. Theor. VI. *Aſymptotis orthogonalibus C H, C D deſcripta ſit hyperbola Q q G, & per punctum D in aſymptoto C D datum, logarithmica D p P axem habens C H productum; per punctum D agatur ad hyperbolam ordinata D G, & per punctum alterum quodvis N ordinata N Q quæ producta logarithmicæ occurrat in P; erit area hyperbolica N Q G D, ad dignitatem hyperbolæ ſeu ad rectangulum C D × D G, in ratione rectæ N P ad ſubtangentem logarithmicæ.*

Agatur enim altera q p ipſi Q P infini-

44.

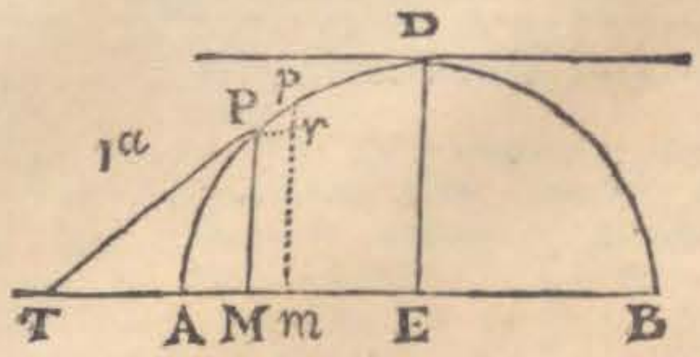


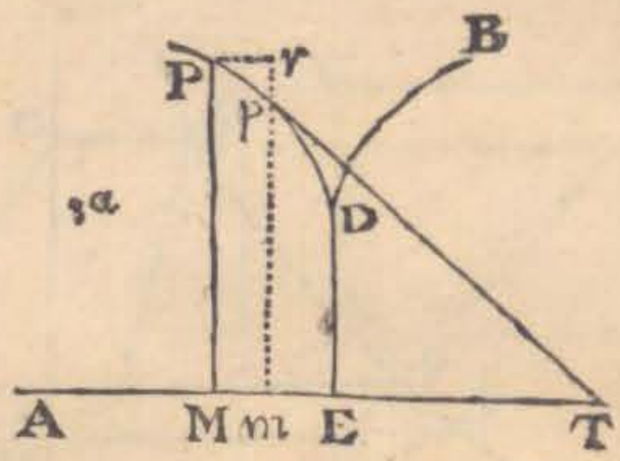
tè propinqua, ex punctis p, P demittantur ad axem CT perpendiculum pm secans QP in r & perpendiculum PM; PT tangat logarithmicam in P; erit ob triangula prP, PMT similia, pr (seu Nn): Pr=PM (seu CN): MT, & (ex naturâ hyperbolæ per theor. 4. de hyp. lib. 1.) NQ:DG=CD:CN; ideóque per compositionem rationum & ex æquo NQ×Nn:Pr×DG=CD:MT; Quare ob datas CD & MT, summa omnium rectangulorum NQ×Nn, in quæ dividi potest area NQGD, hoc est, hæc area ipsa est ad rectangulum sub datâ GD, & summâ omnium Pr, seu totâ rectâ NP, ut CD ad MT, proindéque NQGD×MT=NP×GD×CD, & hinc NQGD: GD×CD=NP:MT. Q.E.D.

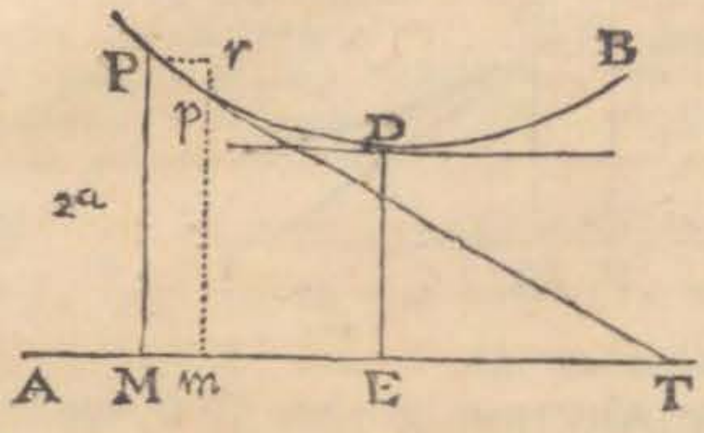
45. Coroll. *Hinc* (ob datas MT, GD, CD) *area hyperbolica NQGD & proindè sector CGQ ipsi æqualis* (377. lib. 1.) *est ut recta NP productio ordinatæ QN, inter asymptotum hyperbolæ CD & logarithmicam intercepta.*

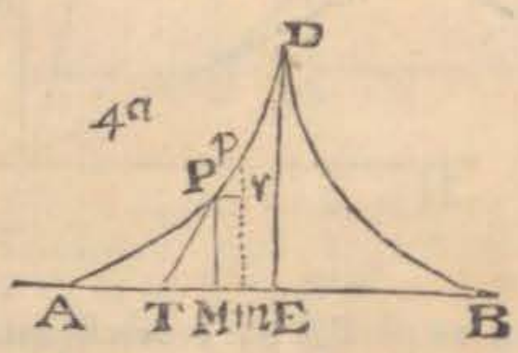
46. Scholium. Cum Ill. Marchio Polenus in Epistolâ ad Hermannum Patavii an. 1729. editâ, ità facilem & expeditam logarithmicæ descriptionem organicam, pro ingenii sui sagacitate invenerit, ut curva illa sectionibus conicis haud difficilius construatur, cumque logarithmica per lineas rectas id præstet quod hyperbola per sectores vel quadrilatera sua, in problematum constructionibus quæ per areas hyperbolicas absolvuntur, loco hyperbolæ non malè usurparetur logarithmica; quamvis si problema ad merum calculum reducatur, æquè benè possint usurpari spatia hyperbolica, quam abscissæ logarithmicæ. Quomodo autem constructiones quæ per spatia hyperbolicâ fiunt, ad logarithmicam transferantur, pluribus exemplis ostendemus deinceps.

DE MOTU CORPORUM.









De Maximis & Minimis.

47. Theor. *Si quantitas variabilis,* (quam exponat recta PM curvæ PDB ordinata) *ad certum usque terminum D continuò crescat & postea decrescat, vel contrà decrescat primùm & deindè crescat.* Actaque sit altera ordinata pm priori PM infinitè propinqua, & per punctum P recta Pr abscissæ AP parallela secans pm in r, *ratio incrementi vel decrementi evanescentis pr ordinatæ PM, ad incrementum evanescens Mm abscissæ AM in puncto D ubi ordinata MP omnium maxima vel minima evadit, infinita est vel nulla.*

Per punctum P ducatur PT tangens curvam in P, & abscissæ occurrens in T, & propter similitudinem triangulorum prP PMT, erit pr ad Pr, seu Mm ut PM ad MT. Sed si coincidente puncto P cum D, tangens PT evadat abscissæ AE parallela & proindè MP fiat maxima vel minima ordinata ED ut in figurâ 1ª. & 2ª. punctum T in infinitum abit, & ideò ratio PM ad MT seu ratio pr ad Mm nulla est. Contrà verò si coincidente P cum D, tangens PT cum ordinatâ maximâ vel minima DE conveniat, ut in figurâ 3. & 4. evanescit subtangens MT & ratio PM ad MT, sive pr ad Mm infinita evadit.

48. Coroll. 1. Ut ex datâ æquatione inter abscissam AM & ordinatam MP, inveniatur valor abscissæ AE cui maxima vel minima applicata ED ordinatur, sumenda est æquationis fluxio, & ratio fluxionis ordinatæ ad fluxionem abscissæ, seu ratio pr ad Mm, eaque vel infinito vel nihilo æquanda est, aut quod idem est, factâ Mm constante, fluxio ordinatæ vel infinito vel nihilo æqualis supponenda.

49. Corol. 2. Si quantitas variabilis cujus maximum vel minimum quæritur non sit ordinata curvæ, potest illa supponi æqualis ordinatæ curvæ alicujus in datam quantitatem ductæ, uti si proposita esset quantitas variabilis $ax^2 - x^3$ in quâ a data est, x indeterminata, poneretur $ax^2 - x^3 = bby$, quæ est æquatio ad curvam cujus abscissa est x, & ordinata y, & hinc, sumptis fluxionibus, foret $2axdx - 3x^2dx = bbdy$, & $2ax - 3x^2 = \frac{bbdy}{dx} = 0$ adeóque $2ax - 3xx = 0$ & $x = \frac{2}{3}a$. Si itaque loco x substituatur $\frac{2}{3}a$ in quantitate propositâ, obtinebitur maximum ejus $\frac{4}{9}a^3 - \frac{8}{27}a^3 = \frac{4}{27}a^3$. Idem inventum fuisset brevius, si nullâ factâ suppositione, fluxio variabilis propositæ videlicet $2axdx = 3x^2dx$, nihilo fuisset æquata.

PRO-

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui reſiſtitur in ratione velocitatis, motus ex reſiſtentiâ amiſſus eſt ut ſpatium movendo confectum.

NAM cum motus ſingulis temporis particulis æqualibus amiſſus ſit ut velocitas, hoc (a) eſt, ut itineris confecti particula, erit, componendo, motus toto tempore amiſſus ut iter totum. *Q. E. D.*

Corol. Quare ſi corpus, gravitate omni deſtitutum, in (b) ſpatiis liberis ſola vi inſitâ moveatur; ac detur tum motus totus ſub initio, tum etiam motus reliquus poſt ſpatium aliquod confectum: (c) dabitur ſpatium totum quod corpus infinito tempore deſcribere poteſt. Erit enim ſpatium illud ad ſpatium jam deſcriptum, ut motus totus ſub initio ad motus illius partem amiſſam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis ſuis proportionales ſunt continuè proportionales.

Sit A ad A−B ut B ad B−C & C ad C−D, &c. & convertendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q. E. D.*

PRO-

(a) * *Hoc eſt, ut itineris confecti particula* (12) ob datum temporis momentum (ex hyp.).

(b) * *In ſpatiis liberis*, id eſt, in quibus nullum aliud eſt obſtaculum præter medii reſiſtentiam velocitati proportionalem.

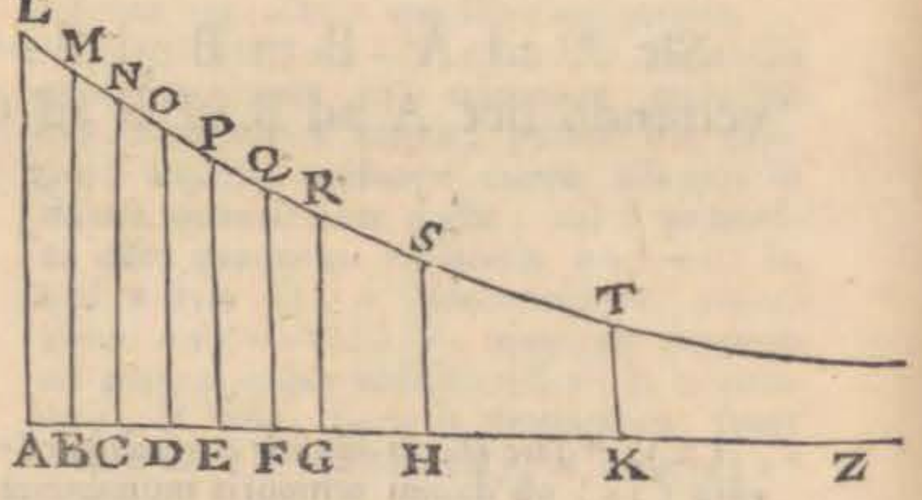
(c) * *Dabitur ſpatium totum quod corpus infinito tempore deſcribere poteſt*, hoc eſt, uſque ad motus exſtinctionem. (Oſtendetur autem infra, in nota f, infinitum tempus requiri ut motus omnis extinguatur, quando reſiſtitur motui in ratione velocitatis). Cum ergo motus ad exſtinctionem uſque amiſſus, ſit ipſe motus totus, & motus amiſſi ſint ut ſpatia movendo confecta (per Theor.) erit motus totus ad motus partem amiſſam poſt datum ſpatium deſcriptum, ut ſpatium ad exſtinctionem uſque motus deſcriptum ad illud datum ſpatium. Unde liquet ſpatium quod corpus ad motus uſque exſtinctionem deſcribit finitum eſſe, cum datam habeat rationem ad ſpatium finitum. 42

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si corpori reſiſtitur in ratione velocitatis, & idem ſolâ vi inſitâ per medium ſimilare moveatur, ſumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis ſingulorum temporum ſunt in progreſſione geometricâ, & ſpatia ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates.

Caſ. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & ſi ipſis particularum initiis agat vis reſiſtentiæ impulſu unico, quæ ſit ut velocitas: (d) erit decrementum velocitatis ſingulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis ſuis proportionales, & propterea (per lem. 1. lib. 11.) continuè proportionales. (e) Proinde ſi ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipſis temporum initiis, ut termini in progreſſione continuâ, qui per ſaltum capiuntur omiſſo paſſim æquali termino-



mero æquales ſunt rationibus E P ad F Q, F Q ad G R &c. ex quibus componitur ratio E P ad S H, & ità porrò. Quarè ratio A L ad E P æqualis eſt rationi E P ad H S, & hæc æqualis rationi H S ad K T. Manifeſtum autem eſt (33) curvam L M N S T, ad quam terminantur perpendicula omnia A L, B M, C N &c., eſſe Logarithmicam.

* *Nam*

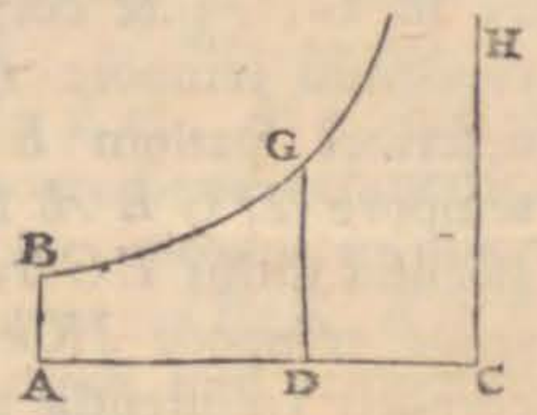
(d) * *Erit decrementum velocitatis.* (15) ut reſiſtentia ob datum temporis momentum, ideoque (per hyp.) ut velocitas.

(e) 50. *Proinde ſi ex æquali* &c. Linea recta A Z in particulas æquales A B, B C, C D &c. diviſa, exponat tempus, & perpendicula A L, B M, C N &c. exponant velocitates ipſis ſingulorum temporum A B, B C, C D &c. initiis; erunt (ex Dem.) velocitates illæ in continuâ progreſſione geometricâ decreſcente. Proindè ſi ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, ut A E, E H, H K &c. erunt velocitates A L, E P, H S &c., ipſis temporum initiis ut termini qui è progreſſione geometricâ per ſaltum capiuntur, omiſſo paſſim æquali terminorum intermediorum B M, C N &c. & F Q, G R &c. numero. Componuntur autem horum terminorum A L, E P, H S &c., rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis; nimirum ratio A L ad E P, componitur ex rationibus A L ad B M, B M ad C N &c., quæ tum magnitudine, tum nu-

norum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter ſe iiſdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compoſitæ inter ſe eædem ſunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, ſunt in progreſſione geometricâ. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ; & augeatur earum numerus in infinitum, eò ut reſiſtentiæ impulſus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, ſemper continuè proportionales, erunt in hoc etiam caſu continuè proportionales. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Et diviſim velocitatum differentiæ, hoc eſt, earum partes ſingulis temporibus amiſſæ, ſunt ut totæ: ſpatia autem ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitatum partes amiſſæ (per prop. 1. lib. 11.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi aſymptotis rectangulis *AC*, *CH* deſcribatur hyperbola *BG*, ſintque *AB*, *DG* ad aſymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum reſiſtentia medii, ipſo motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapſo autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi poteſt tempus per aream *ABGD*, & ſpatium eo tempore deſcriptum per lineam *AD*. (f) Nam ſi area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decreſcet recta *DC* in ratione geometricâ ad modum velocitatis, & (g) partes rectæ *AC* æqualibus temporibus deſcriptæ decreſcent in eâdem ratione.



PRO-

(f) * *Nam ſi area illa per motum puncti D* ſive ordinatæ DG *augeatur uniformiter ad motum temporis*, exhibeatque proindè tempus, *decreſcet recta DC, in ratione geometricâ* (380. lib. 1.) *ad modum velocitatis*, & ideò velocitatem poterit exponere (per caſ. 1. Dem.) & quia recta AC exponit velocitatem ipſo motûs initio, & DC, velocitatem reſiduam elapſo tempore ABGD erit AD ut velocitas amiſſa, atque ideò ut ſpatium deſcriptum (per prop. 1. hujus). Quia verò coincidentibus punctis D & C, area ABGD infinita evadit, manifeſtum eſt tempore infinito finitum ſpatium AC deſcribi.

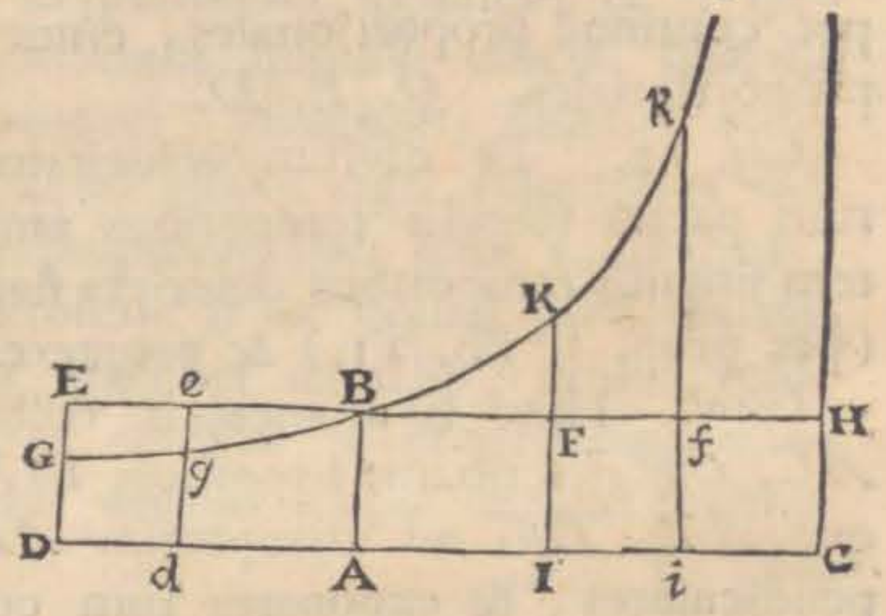
(g) * *Et partes rectæ AC æqualibus tem-*

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

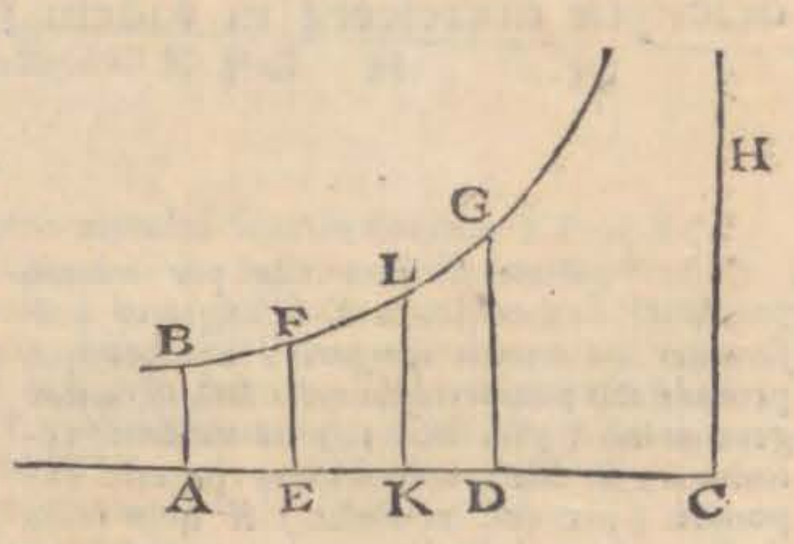
Corporis, cui, dum in medio similari rectà ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BACH*, & resistentia medii initio ascensus per rectangulum *BADE* sumptum ad contrarias partes rectæ *AB*. Asymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* describatur hyperbola secans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*; & corpus ascendendo tempore *DGgd* describet spatium *EGge*, tempore *DGBA* spatium ascensus totius *EGB*; tempore *ABKI* spatium descensus *BFK*, atque tempore *IKki* spatium descensus *KFfk*; & velocitates corporis (resistentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt *ABED*, *ABed*, nulla, *ABFI*, *ABfi* respectivè; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit *BACH*.

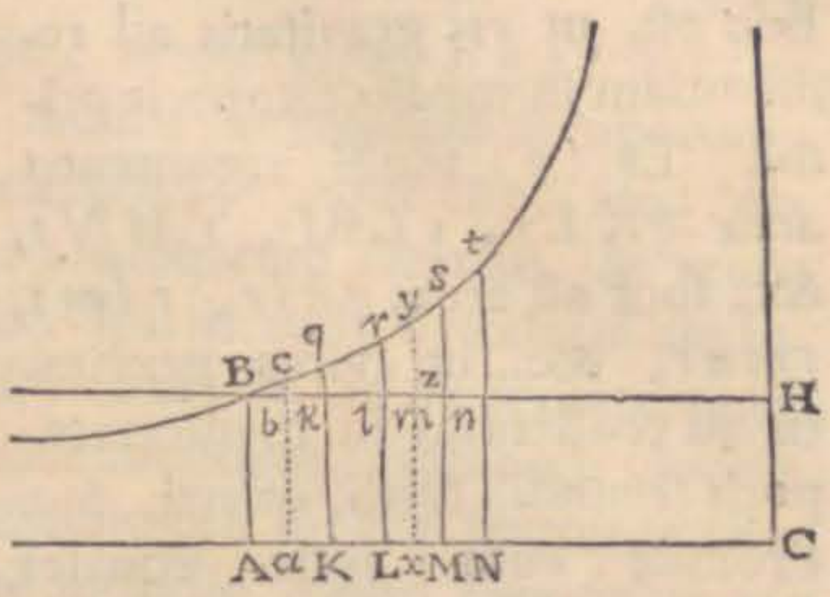


Re-

temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione &c. Nam si area ABGD ductis ordinatis FE, LK in partes æquales ABFE, EFLK, KLGD divisa sit, erunt lineæ CA, CE, CK, CD in progressione geometricâ decrescente (380. lib. 1.) hoc est CA : CE = CE : CK = CK : CD, & dividendo AE : EK = EK : KD = CA : CE. Decrescunt ergo partes rectæ AC in ratione velocitatis. Exponent igitur rectæ AE, EK, KD &c., spatia temporibus ABFE, EFLK, KLGD, descripta, & tota recta AD spatium toto tempore ABGD descriptum.



* Re-



(h) Resolvatur enim rectangulum $BACH$ in rectangula innumera Ak, Kl, Lm, Mn, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, Ak, Al, Am, An, &c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypothesin) ut resistentiæ medii principio singulorum temporum æqualium. (i) Fiat AC ad AK vel $ABHC$ ad $ABkK$ ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi, deque vi gravitatis subducantur resistentiæ, & manebunt $ABHC$, $KkHC$, $LlHC$, $MmHC$, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque ideo (per motus legem II.) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula Ak, Kl, Lm, Mn, &c. & (k) propterea (per lem. I. lib. II.) in progressione geometricâ. Quare si rectæ Kk, Ll, Mm, Nn, &c. productæ occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ $ABqK$, $KqrL$, $LrsM$, $MstN$, &c. (l) æquales, ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. (m) Est autem area $ABqK$ (per corol. 3. lem. VII. & lem VIII. lib. I.) ad aream Bkq ut Kq ad $\frac{1}{2}kq$ seu AC ad $\frac{1}{2}AK$, hoc

(h) * *Resolvatur enim &c.* Demonstratio quæ sequitur est pro corporis descensu.

(i) * *Fiat AC ad AK &c.* Cum enim sit AKkB, proportionalis resistentiæ principio temporis secundi, si fiat AKkB ad ABHC seu AK ad AC, ut resistentia illa ad gravitatem, rectangulum AH exponet vim gravitatis datam; & simili modo, cum sit Al, ad Ak, ut resistentia initio temporis tertii ad resistentiam initio temporis secundi, erit, ex æquo perturbate Al ad AH, seu AL ad AC, ut resistentia in principio temporis tertii ad gravitatem & ità deinceps. Quoniam verò gravitas motum corporis cadentis accelerat quem resistentia retardat, de vi gravitatis auferenda est vis resistentiæ ut habeatur vis absoluta quâ corpus deorsum urgetur. 50.

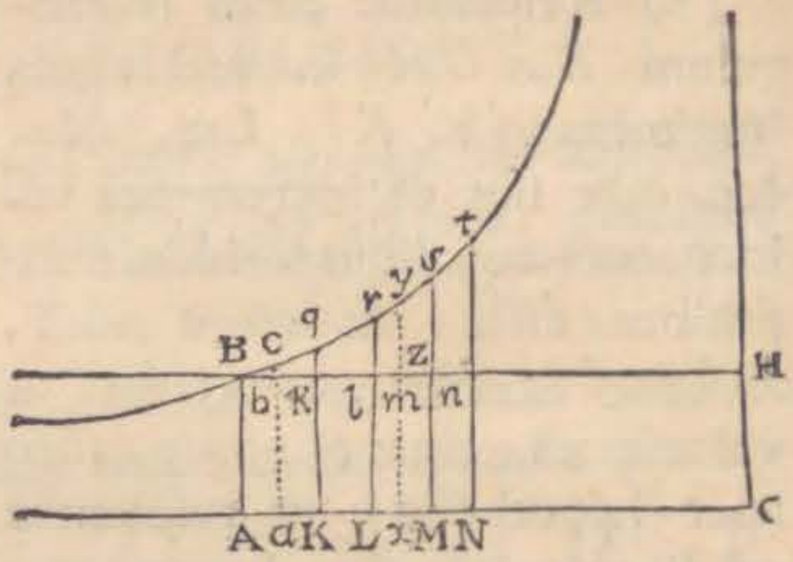
(k) * *Et propterea.* Rectangula ABHC, KkHC, LlHC &c. differentiis suis Ak, Kl &c., proportionalia, erunt in progressione geometricâ (per Lem. I. lib. 2.)

(l) * *Æquales.* (380) lib. I.)

(m) *Est autem area ABqK (per cor. 3. Lem. VII. & lem. VIII lib. I.) ad aream Bkq ut Kq ad* $\frac{1}{2}$ *kq seu ut AC ad* $\frac{1}{2}$ *AK.* Etenim per ea Lemmata has areas pro rectiu-

DE MOTU CORPORUM.

hoc eſt, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi. Et (n) ſimili argumento areæ $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. ſunt ad areas $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales $BAKq$, $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$,



&c.

ctilineis ſumi poſſe conſtat, erigatur in medio partis AK perpendicularis ac ad Hyperbolam uſque, facile conſtabit ex Elementis trapezium ABqK fore ad Triangulum Bkq ut tota ea perpendicularis ac (pro quâ Kq ſumi poterit) ad portionem ejus bc intrà Triangulum comprehenſam, quæ erit (ex conſt. & 2ª. 6ti. Elem.) $= \frac{1}{2}$ kq, eſt verò ex natura Hyperboles ea perpendicularis ac ad AB, ut AC ad Ca ſive $AC - \frac{1}{2}AK$ & dividendo, eſt ea perpendicularis ac ad $ac - ab$ ſive bc quæ eſt $\frac{1}{2}$kq ut AC ad $AC - AC + \frac{1}{2}AK$ ſive $\frac{1}{2}AK$; Ergo area ABqK eſt ad aream Bqk ut AC ad $\frac{1}{2}AK$, ſive ut Rectangulum ABCH ad Rect. $\frac{1}{2}$ABkK, ſeu *ut vis gravitatis* quam exponit Rectang. AH ad *reſiſtentiam in medio temporis primi* quam exponit rectang. Ak, cum enim ſit Ak ut velocitas toto primo tempore acquiſita, erit $\frac{1}{2}$Ak ut velocitas in medio temporis primi acquiſita, reſiſtentiæ autem ſunt velocitatibus analogæ.

(n) *Et ſimili argumento areæ.* Sumptis enim iſtis areis pro Trapeziis rectilineis: ducantur perpendiculares xzy in medio partium AK, KL, LM, MN ad Hyperbolam uſque, & (ex elementis) facile conſtabit quod area tota ſinguli trapezii (v. gr. rLMs) eſt ad ejus areæ portionem ſupra BH poſitam (nempe rlms) ut linea tota xy per medium trapezii ducta ad ejus partem zy ſupra BH, ſed ex naturâ Hyperbolæ eſt ea perpendicularis xy ad AB ſive xz, ut AC ad abciſſam Cx illi perpendiculari reſpondentem (quæ eſt $CL - \frac{1}{2}LM$), & dividendo, eſt ea perpendicularis xy ad ejus partem zy ſupra BH, ut AC ad Ax portionem abſciſſæ inter A & eam perpendicularem (hoc eſt, in exemplo aſſumpto, ut AC ad $AL + \frac{1}{2}LM$). Ergo area tota ſinguli trapezii ad ejus areæ portionem ſupra BH, ut AC ad Ax portionem abſciſſæ inter A & medium partis cujuſvis aſſumptæ, ſive (aſſumpta communi altitudine AB) ut Rectangulum AH, ad Rectangulum ſub AB & lineâ inter A & medium partis aſſumptæ comprehenſa; ſed illud eſt ut vis gravitatis, hoc ut velocitas ac proinde ut reſiſtentia in medio temporis cui reſpondet pars aſſumpta, ergo alternando, area ſinguli trapezii eſt ad vim gravitatis ut portio trapezii ſupra BH ad reſiſtentiam ſive ad velocitatem in medio temporis cui reſpondet trapezium, ſed areæ totæ trapeziorum ſunt ubique æquales & vis gravitatis ſemper eadem, conſtans ergo eſt eorum ratio, ergo, portiones trapeziorum ſuper BH. ut rlms ſunt ſicut reſiſtentiæ ſive ut velocitates, adeoque ut ſpatia ſingulis tempuſculis quibus reſpondent deſcripta.

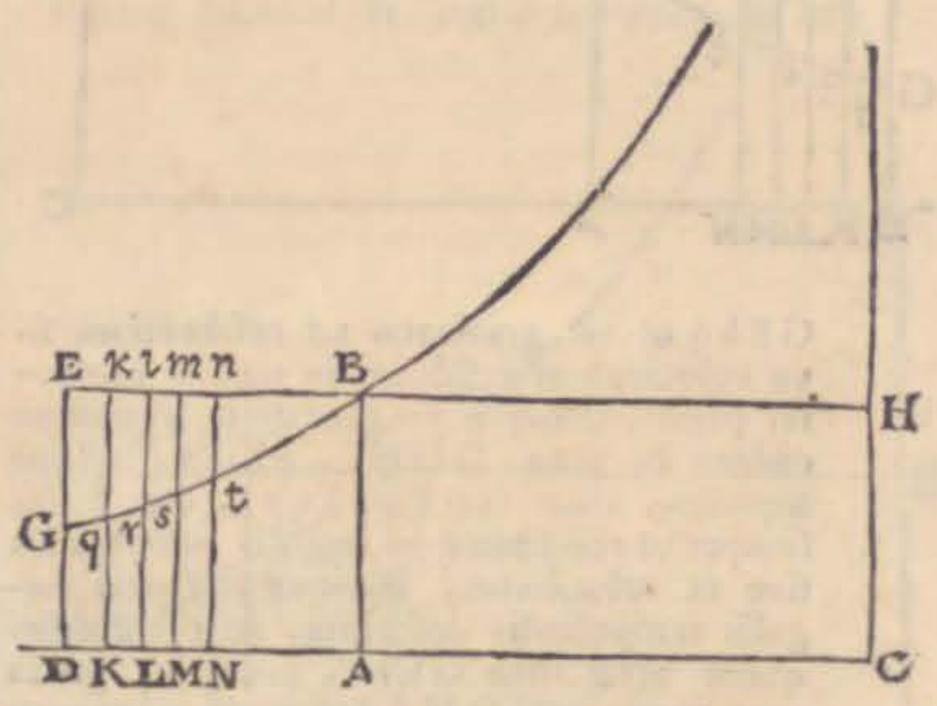
* *At-*

&c. ſint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt (per hypotheſin) velocitatibus, atque (o) ideo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis *ABrL*, deſcribit ſpatium *Blr*, & tempore *LrtN* ſpatium *rlnt*. *Q. E. D.* Et (P) ſimilis eſt demonſtratio motus expoſiti in aſcenſu. *Q. E. D.*

(o) * *Atquè ideò deſcriptis ſpatiis analogæ.* Spatia enim ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates per Prop. II. hujuſce libri.

(p) *Et ſimilis eſt demonſtratio.* Reſolvatur enim rectangulum D B in rectangula innumera D K, K l, L m, M n &c. quæ ſint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta, & erunt, nihil D k, D l, D m, D n &c., ut velocitates totæ amiſſæ in principio ſingulorum temporum æqualium. Quia igitur totum rectangulum D B, exponit (per hyp.) velocitatem corporis & reſiſtentiam medii velocitati proportionalem initio aſcenſus, rectangula A E, A k, A l, A m, A n &c., exponent velocitates reſiduas, reſiſtentiaſque medii initio ſingulorum temporum æqualium. Fiat A C, ad A k, ſive Rectang. A H ad Rectang. A k, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam principio temporis ſecundi, & vi gravitatis addatur reſiſtentia (quod gravitas & reſiſtentia corporis aſcendentis motum retardent) & erunt D E H C, K k H C, L l H C, M m H C &c., ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum retardatur, atque ideò (per mot. leg. 2.) vel per not. 18.) ut decrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula D k, K l, L m, M n &c., & propterea (per Lem. 1. Lib. 2.) in progreſſione geometricâ. Quarè ſi rectæ K k, L l, M m, N n &c., occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ D G q k, k q r L, L r s M, M s t N &c. æquales, ideóque tum temporibus, tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ.

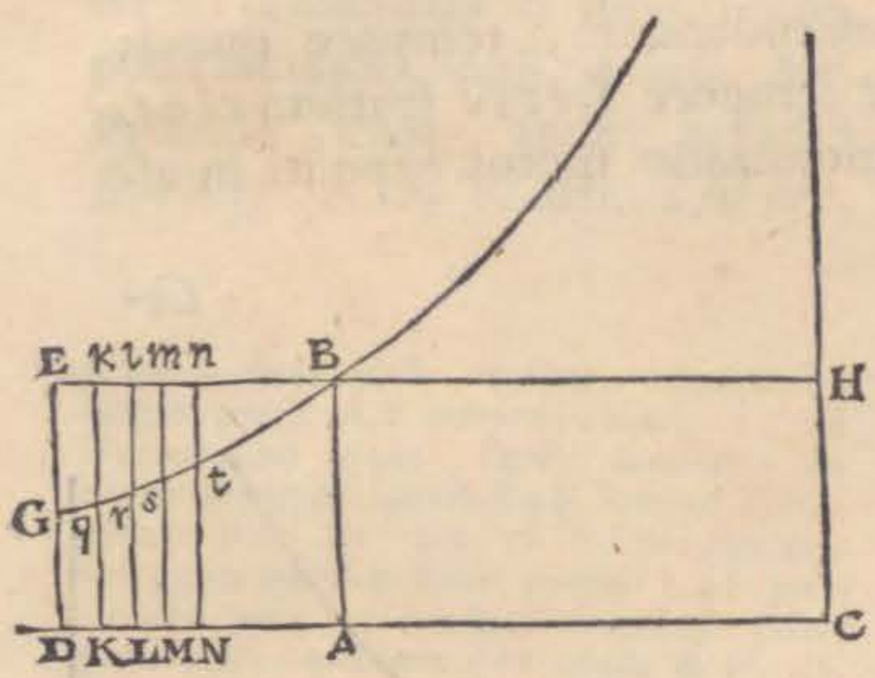
Co-



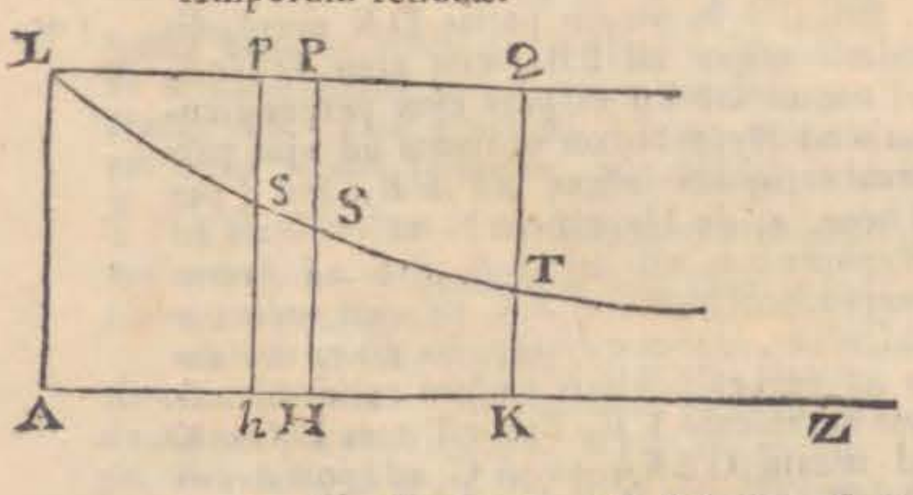
Erigatur in medio partis D K perpendicularis uſque ad E B, erit area D G q K ad aream G E k q ut pars ejus perpendicularis ad Hyperbolam ordinata ad ejus partem reliquam uſque ad E B, ſed (per Theor. 4. de Hyperbola), ea ordinata ad Hyperbolam eſt ad A B ſive ad totam perpendicularem, ut A C ad ejus ordinatæ abſciſſam, ideoque dividendo, eſt ea ordinata ad perpendicularis partem reliquam uſque ad lineam E B, ſive eſt area D G q K ad aream G E K q ut A C ad portionem abſciſſæ inter A & perpendicularem, & aſſumptâ communi altitudine A B, ut Rectangulum A H ad Rectangulum ſub A B & portione abſciſſæ inter A & perpendicularem, ideoque area D G q K ad aream G E k q 50.

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis, quâ corpus illud perpetuò urgetur, ad vim reſiſtentiæ, quâ (q) in fine temporis illius impeditur. *Co-*

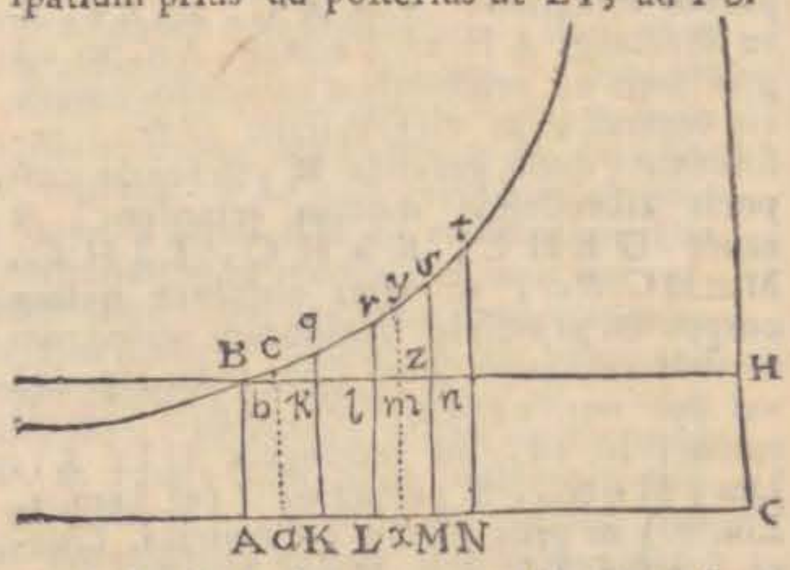


GEkq ut vis gravitatis ad reſiſtentiam ſive velocitatem reſiduam in medio temporis primi, cumque vis gravitatis ſit ubique eadem & areæ DGqK, qKLr, ubique æquales, areæ GEkq, kqrl, &c. erunt ſemper ut reſiſtentiæ in ſingulis temporibus ſive ut velocitates, ideoque ut ſpatia ſingulis tempuſculis deſcripta, ac per conſequens areæ totæ GEnt, erunt ut ſpatia toto tempore GDNt deſcripta, dum areæ ABNn erunt ut velocitates in fine eorum temporum reſiduæ.



51. Si aſymptoto AZ deſcripta ſit Logarithmica quævis LST, ad aſymptotum verſus Z accedens, & ordinata AL exponat velocitatem corporis initio motûs,

abſciſſæque AH, AK, exponant tempora; erunt (50) ordinatæ HS, KT, ut velocitates reſiduæ elapſis temporibus AH, AK, & ideò ductâ per punctum L rectâ LQ, aſymptoto AZ parallelâ, & ordinatas productas HS, KT ſecante in P, Q, erunt PS, QT ut velocitates amiſſæ, atque etiam ut ſpatia deſcripta, temporibus AH, AK, vel LP, LQ. Ductâ ordinatâ, hs, alteri HS, infinite propinquâ, ſpatium velocitate uniformi AL, tempuſculo hH deſcriptum in vacuo, erit ad ſpatium eodem tempore cum velocitate HS, confectum in medio reſiſtente, ut rectangulum HP×Hh, ad rectangulum SH×Hh, ſeu aream HSsh (12) & ideò ſi totum tempus AH in particulas innumeras ut hH diviſum ſit, erit ſpatium cum velocitate AL, in vacuo deſcriptum toto tempore AH, ad ſpatium eodem tempore percurſum in medio reſiſtente ut rectangulum AP ad aream Logarithmicam ALSH; ſed area ALSH, æqualis eſt rectangulo ſubtangentis Logarithmicæ in PS, (39) & ideò ſi aſſumpta ſit AL ſubtangenti æqualis, eſt area ALSH, æqualis rectangulo AL×PS; Quare in hâc hypotheſi, erit ſpatium prius ad poſterius ut LP, ad PS.



(q) * *In fine temporis illius impeditur.* Eſt enim velocitas dato tempore, ABrL acquiſita, ad velocitatem alio quovis tempore ABtN acquiſitam, ut rectangulum Al ad re-

Corol. 2. Tempore autem aucto in progreſſione arithmeticâ, ſumma velocitatis illius maximæ ac velocitatis in aſcenſu, atque etiam earundem differentia in deſcenſu (r) decreſcit in progreſſione geometricâ.

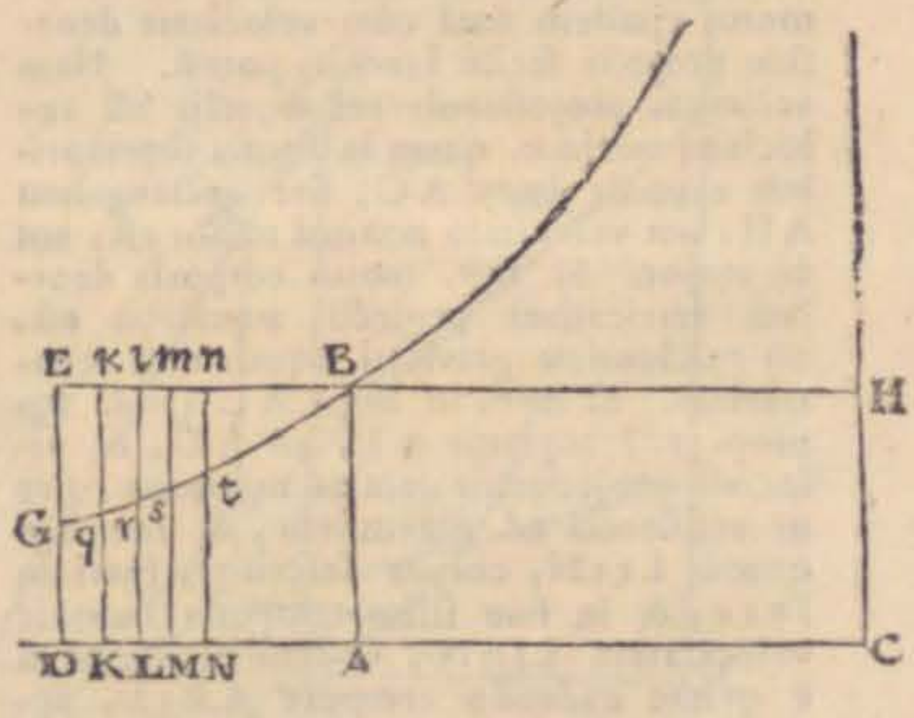
Corol. 3. (f) Sed & differentiæ ſpatiorum, quæ in æqualibus-

rectangulum A n, ſivè ut linea data A L, ad lineam A N, (ex dem.), & ideò velocitas corporis cadentis cum areâ A B t N, ſeu cum tempore continuò creſcit. Sed coincidentibus puncto N cum puncto C & ordinatâ N t cum aſymptoto C H, area A B t N infinita evadit, hoc eſt, tempus fit infinitum & velocitas maxima; Quare velocitas maxima quæ etiam *terminalis* dicitur, eſt ad velocitatem dato quovis tempore A B r L, acquiſitam ut A C ad A L, ſeu ut rectangulum A H, ad rectangulum A l, hoc eſt, (ex dem.) ut vis gravitatis ad vim reſiſtentiæ in fine temporis A B r L.

(r) * *Decreſcit in progreſſione geometricâ.* In aſcenſu corporis temporibus D G q k, D G r l, D G s M &c. in arithmeticâ progreſſione creſcentibus, abſciſſæ C D, C K, C L, &c. in progreſſione geometricâ decreſcunt (380. lib. 1.) ſed ſingulæ abſciſſæ illæ ſunt (ex dem.) ut ſumma velocitatis maximæ quam exponit linea C A, & velocitatis reſiduæ quam exponit linea A K vel A L, vel A M &c., in fine temporis D G q k, vel D G r L, vel D G s M &c. Quarè tempore aucto in progreſſione arithmeticâ, ſumma velocitatis maximæ ac velocitatis in aſcenſu reſiduæ decreſcit in progreſſione geometricâ. Simili modo in deſcenſu corporis patet quod creſcentibus temporibus (vid fig. notæ ſuper.) A B q k, A B r L, A B s M &c., in progreſſione arithmeticâ, abſciſſæ C A, C K, C L, C M &c., decreſcunt in progreſſione geometricâ (380. lib. 1.), ſed abſciſſæ illæ ſunt ut differentiæ velocitatis maximæ quam exhibet linea A C & velocitatis acquiſitæ quam exponit linea A K, vel A L, vel A M &c., creſcente igitur tempore in progreſſione arithmeticâ, differentia velocitatis maximæ, & velocitatis dato quovis tempore in deſcenſu acquiſitæ, decreſcit in progreſſione geometricâ. Hinc ſi ſumma illa in aſcenſu & differentia in deſcenſu numeris exprimantur, erunt tempora ut eorum numerorum Logarithmi.

(f) * *Sed & differentiæ ſpatiorum.*

Nam ſi in aſcenſu corporis capiantur tempora D G q K, K q r L, L r s M, M s t N &c. æqualia, erit ſpatium primo tempore deſcriptum ut G E k q = D K × D E − D G q K; ſpatium tempore ſecundo deſcriptum ut q k l r = K L × D E − K q r L (ſive quia K q r L = D G q K) = K L × D E − D G q K, & ità de cæteris. Quare differentia ſpatiorum primo & ſecundo tempore deſcriptorum eſt ut D K × D E − K L × D E, id eſt, ob datam D E, ut D K − K L; & ſimili argumento differentia ſpatiorum ſecundi & tertii temporis eſt ut



K L − L M; differentia ſpatiorum tertii & quarti temporis ut L M − M N. Erunt igitur differentiæ ſpatiorum quæ in æqualibus temporum differentiis deſcribuntur ut differentiæ D K − K L, K L − L M, L M − M N &c., ſed (ex dem.) termini D K, K L, L M, M N &c., decreſcunt ut termini progreſſionis geometricæ D C, K C, L C, M C &c. Ergò differentiæ D K − K L, K L − L M, L M − M N &c., deſcrecunt ut D K, K L, L M, M N &c., ſeu ut termini progreſſionis geometricæ D C, K C, L C, M C &c. Eadem eſt demonſtratio pro deſcenſu.

DE MOTU CORPORUM.

temporum differentiis deſcribuntur, decreſcunt in eâdem progreſſione geometricâ.

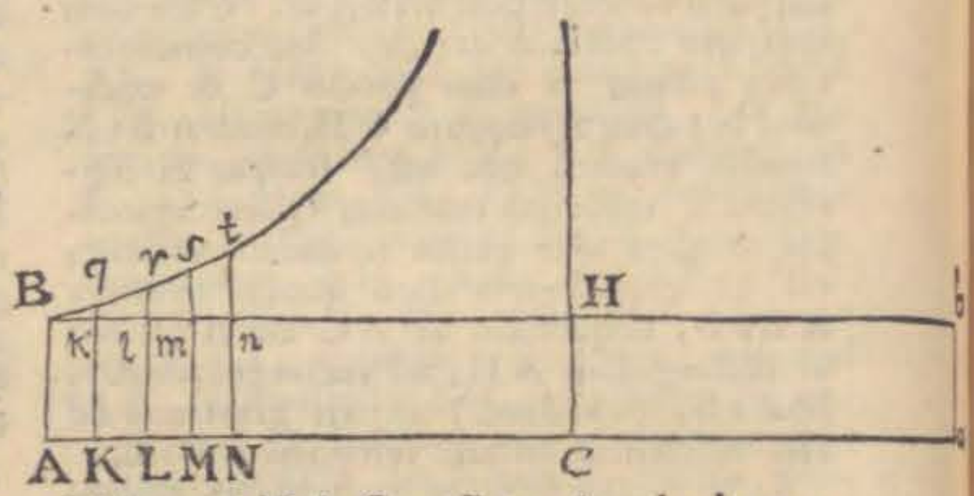
Corol. 4. Spatium verò à corpore deſcriptum differentia eſt duorum ſpatiorum quorum alterum eſt ut tempus ſumptum ab initio deſcenſus, & (t) alterum ut velocitas, quæ etiam ipſo (u) deſcenſûs initio æquantur inter ſe. PRO-

(t) * *Alterum ut velocitas.* Nam ſpatium tempore quovis A B t N, in deſcenſu deſcriptum, eſt ut area B t n, eſt autem area B t n = A B t N − A B n N, & eſt A B n N ut velocitas tempore A B t N acquiſita.

(u) * *Deſcenſûs initio æquantur.* Deſcenſûs initio eſt area naſcens A B q K æqualis rectangulo A B K k.

52. *Scholium.* Ex demonſtratis non ſolùm corporis aſcendentis aut è quiete deſcendentis motus determinatur, ſed etiam motus ejuſdem datâ cum velocitate deorſum projecti facilè inveniri poteſt. Nam velocitas projectionis vel æqualis eſt velocitati maximæ, quam in figuris ſuperioribus exponit linea A C, ſive rectangulum A H, aut velocitate maximâ minor eſt, aut eâ major. Si 1um. motus corporis deorſum verticaliter projecti æquabilis eſt, ob reſiſtentiam gravitati æqualem & contrariam. Si 2um. in lineâ A C (vid. fig. prop. 3.) capiatur A L, ad A C, ut velocitas projectionis data ad maximam, ſive ut reſiſtentia ad gravitatem, & tempore quovis L r t N, corpus deſcribet, ſpatium I r t n, & in fine illius temporis habebit velocitatem L l n N, eodem modo ac ſi è quiete cadendo tempore A B r L, acquiſiviſſet datam projectionis velocitatem A B l L, & deindè in motu perſeveraſſet.

53. Verum ſi velocitas projectionis major ſit velocitate maximâ quam corpus cadendo acquirere poteſt, mutanda erit Newtoni conſtructio. Cæteris enim manentibus ut in conſtructione pro corporum deſcenſu, producantur rectæ A C, & B H, ad a & b, ut ſit rectangulum A B b a ad rectangulum C H b a, ut reſiſtentia tota initio motus ad vim gravitatis: velocitas projectionis exponi poterit per rectangulum A B b a, cum reſiſtentia ſit ipſi ſemper proportionalis, & corpus deſcendendo tempore quovis A B t N, deſcribet ſpatium



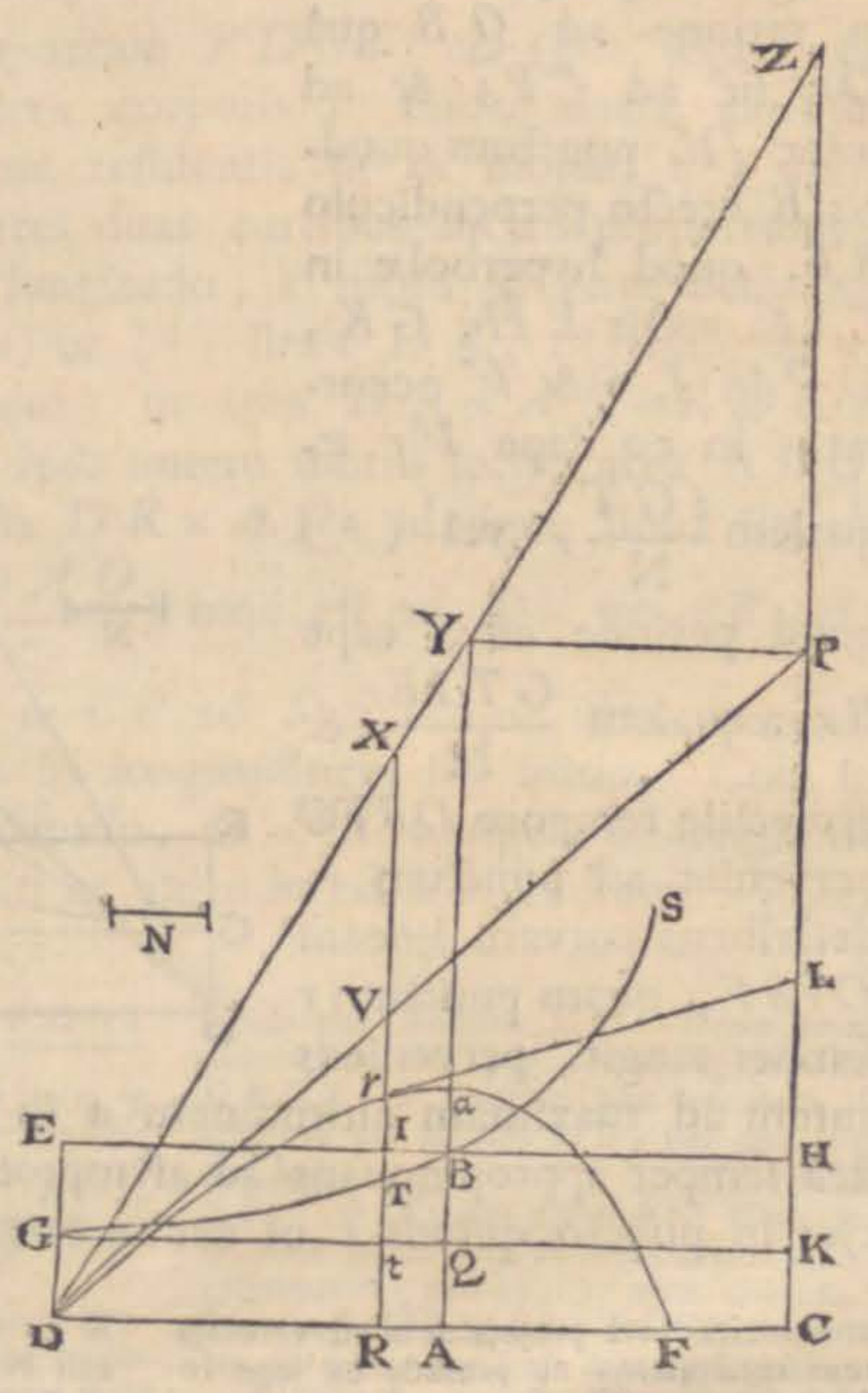
A B b a × A N + C a × B t n, & velocitatem habebit N n b a, & tempore infinito deſcribet ſpatium infinitum, velocitatemque habebit æqualem terminali ſive maximæ velocitati quam corpus e quiete cadendo acquirere poteſt. Reſolvatur enim rectangulum A H in rectangula innumera A k, K l, L m, M n, &c. quæ ſint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta. (cum enim reſiſtentia gravitatem ſuperet, velocitas decreſcit) & erunt, nihil A k, A l, A m, A n, &c. ut velocitates amiſſæ, & ideò rectangula a B, a k, a l, a m, a n, &c., ut velocitates reſiduæ reſiſtentiis proportionales, principio ſingulorum temporum æqualium. Quoniam verò gravitas motum accelerat quem reſiſtentia retardat, de vi reſiſtentiæ ſubducatur gravitas C H b a, & manebunt rectangula A B H C, K k H C, L l H C, M m H C, &c. ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum æqualium retardatur, atque ideò ut decrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula A k, K l, L m, M n, & propterea per Lem. 1. Lib. 2. in progreſſione geometricâ. Quare (38o. lib. 1.) erunt areæ A B q K, K q r L, L r s M, M s t N, &c. æquales, ideóque temporibus ſemper æqualibus analogæ. Elapſo igitur tempore quovis A B t N, corporis velocitas reſidua erit ut rectangulum N n b a, ſive ut recta N a, ſed ſpatia ſunt ut velocitas & tempus conjunctim,

ergo

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Posito quod vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, resistentiam velocitati proportionalem patientis.

E loco quovis *D* egrediatur projectile secundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto *P* ad lineam horizontalem *DC* (x) demittatur perpendiculum *PC*, & secetur *DC* in *A*, ut (y) sit *DA* ad *AC* ut resistentia medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, & vim gravitatis; vel (z) (quod perinde est) ut sit rectangulum sub *DA* & *DP* ad rectangulum sub *AC* & *CP* ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis *DC*, *CP* describatur hyperbola quævis *GTBS* secans



ergo spatia singulis tempusculis descripta, sunt ut ea velocitas N ducta in tempus MstN, id est ut NC×tN×MN+Ca×tN×MN=ABHC×MN+Ca×MstN, (ob NC×tN=AB×CA, per theor. 4. de Hyp.) Quare (componendo) spatium totum tempore ABtN descriptum, erit ut ABHC×AN+Ca×ABtN=ABba×AN+Ca×Btn, ob ABtN=AB×AN+Btn. Q. E. D.

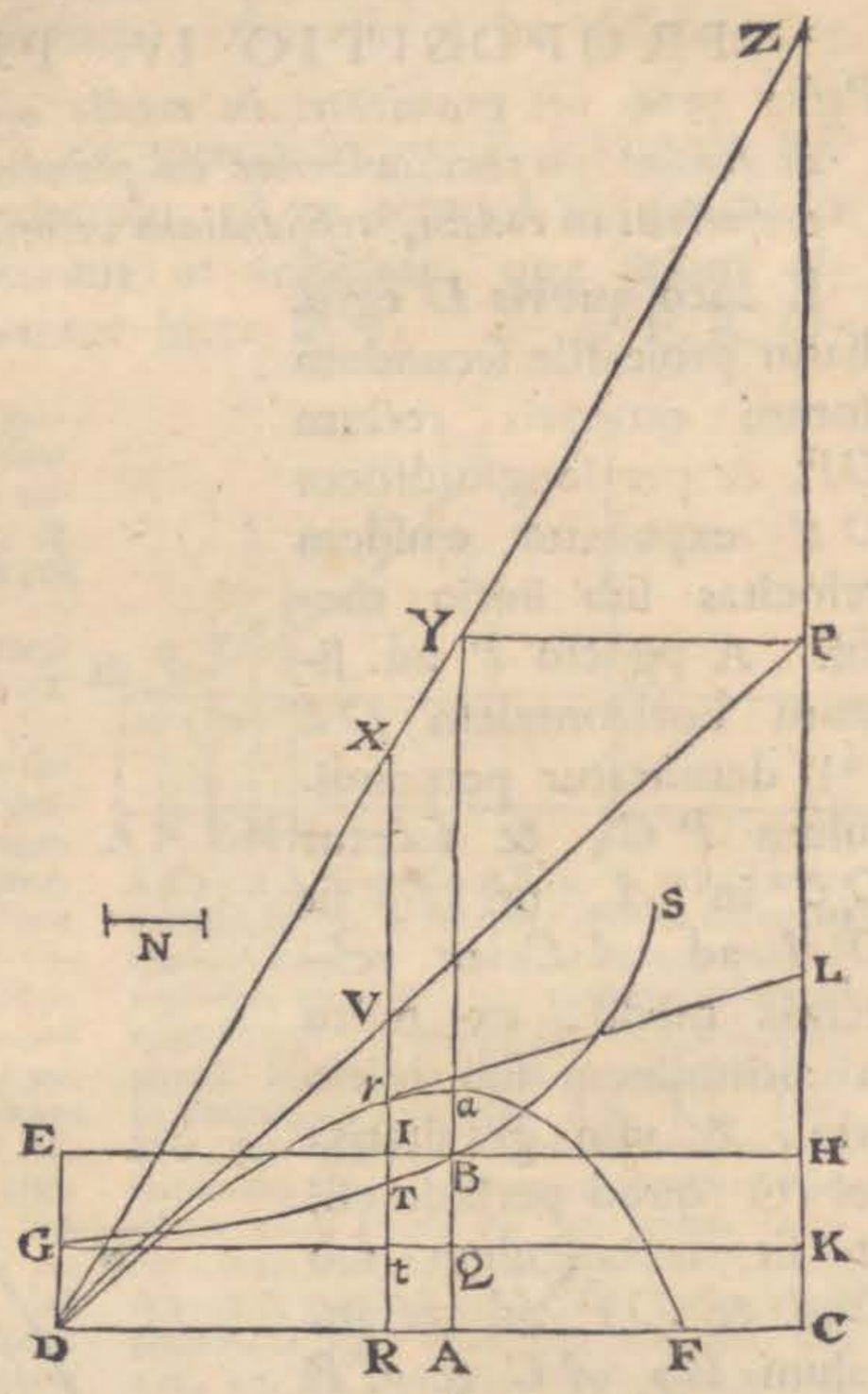
(x) * *Demittatur perpendiculum PC*, & quoniam DP exponit velocitatem projectionis CP exponet velocitatem verticalem, & DC velocitatem horizontalem, per leg. motûs cor. 1. & 2. 53.

(y) * *Ut sit DA ad AC ut resistentia &c.*, aut, quod idem est (per cor. 1. prop. 111.) ut sit DA ad AC ut velocitas verticalis CP ad velocitatem maximam seu terminalem.

(z) * *Vel (quod perinde est) ut sit rectangulum &c.* Nam cum sit DP ad CP

DE MOTU CORPORUM.

perpendicula DG, AB in G & B; & compleatur parallelogrammum $DGKC$ cujus latus GK fecet AB in Q. Capiatur linea N in ratione ad QB quâ DC fit ad CP; & ad rectæ DC punctum quodvis R erecto perpendiculo RT, quod hyperbolæ in T, & rectis EH, GK, DP in I, t & V occurrat; in eo cape Vr æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel (a) quod perinde eſt, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & projectile tempore $DRTG$ perveniet ad punctum r, deſcribens curvam lineam $DraF$, quam punctum r ſemper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, & poſtea ſemper appropinquans ad aſymptoton PC. Eſtque velocitas ejus in puncto quovis r ut curvæ tangens rL. *Q. E. I.*



ut velocitas tota projectionis ad velocitatem verticalem, ac proinde ex lege reſiſtentiæ ut reſiſtentia tota ſub initio ad reſiſtentiam ex motu in altitudinem, & cum ſit DA ad AC ut reſiſtentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis (per hypotheſim), erit per compoſitionem rationum & ex æquo $DA \times DP$ ad $AC \times CP$ ut reſiſtentia tota ex motu projectionis ad vim gravitatis.

(a) * *Vel quod perinde eſt, cape Rr æqualem &c.* Cum enim ſit (per hyp.) $N : QB = DC : CP$, & $DC : CP = DR : RV$, ob triangula ſimilia DRV, DCP; erit $N : QB = DR : RV$, & ideo $RV = \frac{DR \times QB}{N}$. Sed rectangulum $GEIt = Gt \times GE = DR \times QB = GTIE + tGT$, & ideo $\frac{GTIE}{N} = \frac{DR \times QB - tGT}{N} = RV - \frac{tGT}{N}$. Quare ſi capiatur $Vr = \frac{tGT}{N}$, erit $\frac{GTIE}{N} = RV - Vr = Rr$.

* *Æqua-*

Est enim N ad QB ut DC ad CP seu DR ad RV, ideoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id est $RV - Vr$ seu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) (b) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (per legum corol 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cum resistentia sit ut motus, (c) distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, à motu ad latus descripta, erit (per prop. 11. hujus) ut (d) linea DR, (e) altitudo verò (per prop. 111. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc est, ut linea Rr. Ipso autem motus initio area $RDGT$ (f) æqualis est rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc est ad DR ut $AB - AQ$ seu QB ad N, id est, ut CP ad DC; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cum igitur Rr semper sit ut altitudo, ac DR semper ut longitudo, atque Rr ad DR sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est

LIBER SECUND. SECTIO I. PROP. IV. PROBL. II.

(b) * *Æqualis* $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$ &c. Est enim $\frac{DR \times AB - RDGT}{N} = \frac{DR \times RI - RDGT}{N} = \frac{GTIE}{N} = RV - Vr$.

(c) * *Distinguetur etiam hæc &c.* In eâ, quam tractamus, resistentiæ hypothesi motus componere ac dividere licet eodem modo quo componuntur & dividuntur in vacuo; quod in aliis resistentiæ hypothesibus fieri non potest. Cum enim resistentia velocitati proportionalis est, spatia velocitatibus separatis & conjunctis eodem temporis momento describenda vi resistentiæ minuuntur in eâdem quam habent inter se ratione.

(d) * *Ut linea DR.* Exponitur enim corporis velocitas horizontalis sub motûs initio per lineam DC. Unde tempus exponi poterit per aream hyperbolicam DRGT, & spatium hoc tempore descriptum per lineam DR, per cor. prop. 11. hujus. 53

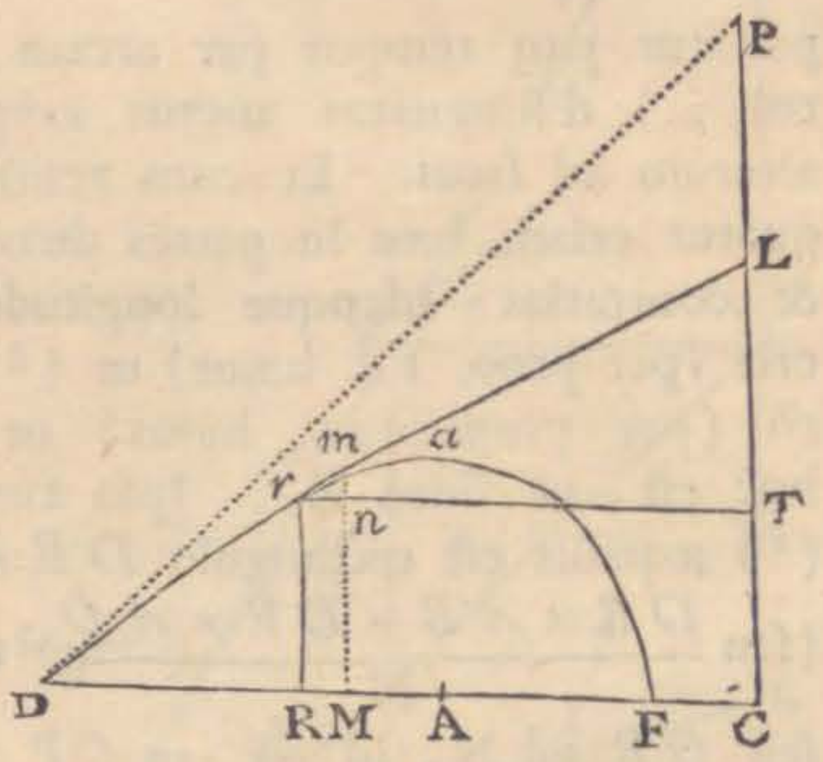
(e) * *Altitudo vero* &c. Cum enim sit DA ad AC ut resistentia verticalis ad gravitatem (per hyp.); area GTIE, seu ei æqualis DR × AB − RDGT, erit ut altitudo motu verticali descripta (per prop. 111. hujus); & quia (per constructionem) est $Rr = \frac{DR \times AB - RDGT}{N}$, ideoque ob datum N, Rr ut DR × AB − RDGT, erit altitudo ut Rr.

(f) * *Æqualis est rectangulo &c.* Nam coincidente puncto t cum G, evanescit Tt respectu Rt seu AQ, fitque area evanescens RDGT æqualis RDGt seu DR × AQ.

DE MOTU CORPORUM.

est ut Rr semper sit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $DraF$, quam punctum r (g) perpetuò tangit. *Q. E. D.*

Co-



(g) 54. *Perpetuo tangit.* Quoniam autem DA est ad AC ut resistentia ex motu verticali sub initio orta ad vim gravitatis, tempus totius ascensûs corporis erit DABG (per Prop. III. hujus), quo etiam tempore percurrit corpus longitudinem DA, & ideo ad maximam suam altitudinem a perveniet ubi erit in perpendiculo ABa, & postea semper appropinquat ad asymptoton PC (per Cor. Prop. II). Per punctum quodvis trajectoriæ r agatur rT horizontali DC parallela & verticali CP occurrens in T, verticalis Mm ipsi Rr infinite propinqua secet rT in n & tangentem rL seu curvam in m: & quoniam motus corporis in loco r per arcum rm dividi potest in motum horizontalem rn & verticalem nm, erit velocitas horizontalis ad verticalem ut rn ad nm, & ad obliquam secundum tangentem curvæ ut rn ad rm. Sed ob similitudinem triangulorum rnm, rTL, est rn:mn=rT vel RC:TL, & rn:rm=RC:rL. Quare cum RC sit ut velocitas horizontalis corpori in loco r residua ex velocitate DC quam sub initio motus habebat in loco D (per Cor. Prop. II.); erit TL ut velocitas verticalis corpori residua ex velocitate initiali CP, & rL ut velocitas obliqua in arcu rm ex duabus rT & TL composita. Est itaque velocitas & proinde resistentia corporis in puncto quovis trajectoriæ r ut curvæ tangens rL.

55. Hinc per datum trajectoriæ punctum r duci potest tangens rL. Nam velocitas verticalis LT in loco r est ad velocitatem verticalem CP in loco D, ut rectangulum RB ad rectangulum DB (vide figuram textûs) sive ut RA ad DA (per Prop.. II); ideoque $LT=\frac{CP\times RA}{DA}$.

56. Ex superiori constructione facile deducitur æquatio ad trajectoriam DraF. Positis enim $DP=b$, $DC=e$, $CP=f$, $AC=g$, $AB=h$, $Rr=y$, & $DR=x$, erit (per theor. 4um. de hyperb. lib. 1.) $DC(e):AC(g)=AB(h):GD=\frac{gh}{e}$, & $RC(e-x):AC(g)=AB(h):RT=\frac{gh}{e-x}$, ideoque $QB=AB-GD=\frac{eh-gh}{e}$, & areæ hyperbolicæ RDGT elementum nascens $RT\times dx=\frac{ghdx}{e-x}$, ac proinde area $RDGT=gh.\,S.\,\frac{dx}{e-x}$. Præterea (per constr.) est $CP(f):DC(e)=QB\frac{(eh-gh)}{e}:N=\frac{eh-gh}{f}$, & $Rr=y=\frac{DR\times AB-RDGT}{N}$. Est & $DR\times AB=hx$. Quare erit $y=\frac{fx}{e-g}-\frac{fg}{e-g}\times S.\,\frac{dx}{e-x}$. Est etiam (per constr.) DA seu $e-g$ ad AC seu g ut resistentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis, & ideo per Cor. I. Prop. III. ut *velocitas verticalis*, quam exponit recta CP seu f, ad *velocitatem terminalem*; & ideo si velocitas terminalis exponatur per lineam a, habebitur

Corol. 1. Eſt igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideoque ſi producatur RT ad X ut (h) ſit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$; id eſt, ſi compleatur parallelogrammum $ACPY$, jungatur DY ſecans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DY in X; erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

Co-

bitur $a = \frac{fg}{e-g}$. Unde fit $y = \frac{ax}{y} - a.\,S.\,\frac{dx}{e-x}$ & ſumptis fluxionibus $dy = \frac{a\,dx}{g} - \frac{a\,dx}{e-x}$. Si ponatur RC ſive $e-x=z$, erit $-dx=dz$, & $-\frac{a\,dx}{e-x} = \frac{a\,dz}{z}$, ideoque $-a.\,S.\,\frac{dx}{e-x} = a.\,S.\,\frac{dz}{z} = a.L.z = a.L.e-x$ (40). Quare erit $y = \frac{ax}{g} + a.\,L.\,e-x + Q$ *conſt.* Et quia evaneſcente y, evaneſcit quoque x, invenitur conſtans $Q = -a.\,L.\,e$, & hinc $y = \frac{ax}{g} + a.\,L.\,e-x - a.\,L.\,e = \frac{ax}{g} - a.L.\frac{e}{e-x}$. Eſt enim $L.e-L.e-x = L.\frac{e}{e-x}$, & ſignis mutatis $L.\,e-x-L.\,e = -\,L.\frac{e}{e-x}$.

57. Ex hac æquatione alia deducitur inter DV & Vr. Si enim dicantur $DV=v$ & $Vr=z$, erit ob triangula DCP, DRV ſimilia, DP (b) : DV (v) = DC (e) : DR $(x) = \frac{ev}{b}$, & ideo $e-x = \frac{eb-ev}{b}$ & $\frac{e}{e-x} = \frac{b}{b-v}$; ſimiliter erit DC (e) : CP (f) = DR $\left(\frac{ev}{b}\right)$: VR $= \frac{fv}{b}$, ideoque $y = Rr = VR - Vr = \frac{fv}{b} - z$. Quare habebitur $\frac{fv}{b} - z = \frac{aev}{bg} - a.L.\frac{bg}{b-v}$, & $z = \frac{fgv-aev}{bg} + a.\,L.\frac{b}{b-v}$. Sed (ex demonſtr.) $a = \frac{fg}{v-g}$, atque ideo $ae-ag=fg$, & $fg-ae=-ag$; quare erit etiam $z = a.L.\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$. 57.

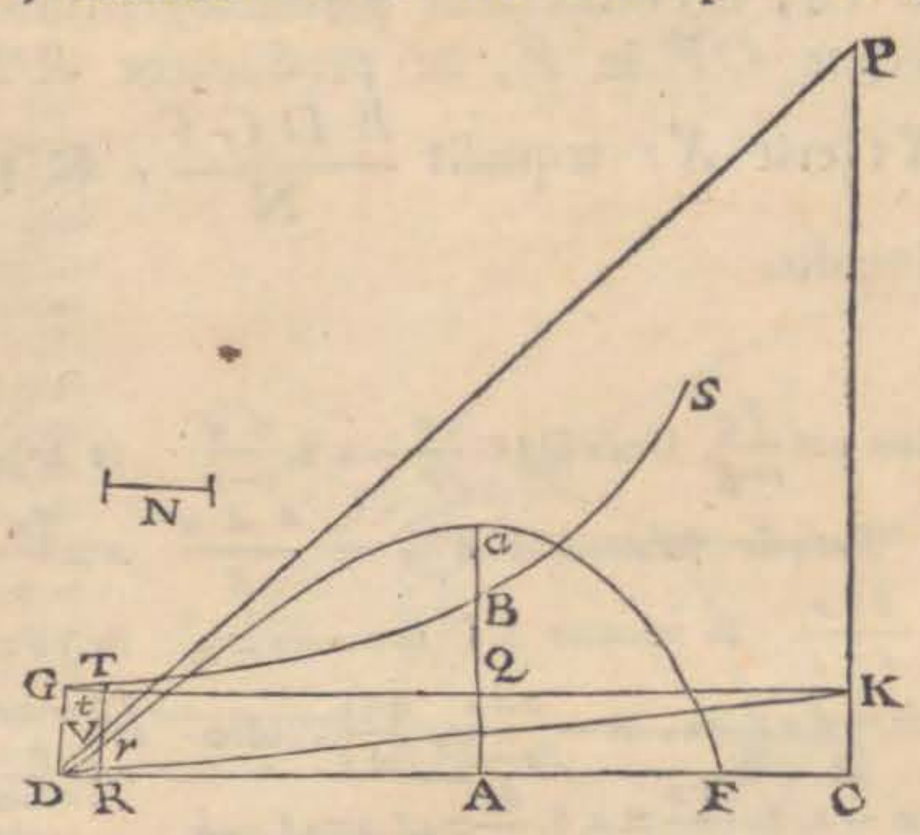
(h) * *Ut ſit RX æqualis* $\frac{DR \times AB}{N}$ *&c.* Hoc enim facto, erit RX ad DR ut data AB ad datam N, ideoque locus punctorum X linea recta quæ tranſit per punctum D, ubi evaneſcente DR evaneſcit quoque RX. Coincidente puncto R cum A fit RX ſeu AY : DA = AB : N, & (per theor. 4. de hyperb.) DC : AC = AB : GD ſeu AQ; & diviſim DC : DA = AB : BQ, per conſtructionem vero CP : DC = BQ : N, ideoque ex æquo CP : DA = AB : N = AY : DA, ac proinde AY = CP. Unde ſi compleatur parallelogrammum ACPY, jungaturque DY ſecans CP in Z, erit DZ linea recta quam punctum X perpetuò tangit. Quoniam igitur $RX = \frac{DR \times AB}{N}$, & $Xr = RX - Rr = \frac{DR \times AB}{N} - \frac{DR \times AB + RDGT}{N}$; erit $Xr = \frac{RDGT}{N}$, & propterea, ob datam N, Xr eſt ut area RDGT, ideoque ut tempus quo corpus ex loco D pervenit in locum r.

* *In-*

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 2. Unde ſi capiantur innumeræ CR, vel, quod perinde eſt, innumeræ ZX in progreſſione geometricâ; erunt totidem Xr in (i) progreſſione arithmeticâ. Et hinc curva $DraF$ (k) per tabulam logarithmorum facile delineatur.

Corol. 3. Si vertice D, diametro DG deorſum productâ, & latere recto quod ſit ad $2DP$ ut reſiſtentia tota ipſo motus initio ad vim gravitatis, parabola conſtruatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D ſecundum rectam DP, ut in medio uniformi reſiſtente deſcribat curvam $DraF$, ea ipſa erit quâcum exire debet de eodem loco D, ſecundum eandem rectam DP, ut in ſpatio non reſiſten-



(i) * *In progreſſione arithmeticâ.* Nam (380. lib. 1.) temporibus ſeu areis RDGT in progreſſione arithmeticâ creſcentibus, abſciſſæ RC in progreſſione geometricâ decreſcunt, & vice versâ. Quare verticalibus Xr, quæ ſunt ut areæ RDGT, in progreſſione arithmeticâ creſcentibus, correſpondentes abſciſſæ RC decreſcent in progreſſione geometricâ, & contra. Sed ob triangulorum DRX, DCZ ſimilitudinem, eſt DC ad DZ ut DR ad DX, & diviſim ut RC ad ZX: quare ob datas DC & DZ, eſt ZX ad RC in datâ ratione, & ideo ZX creſcit vel decreſcit in eâdem ratione cum RC.

(k) 58. *Per tabulam Logarithmorum facile delineatur.* Dicantur enim, ut ſuprà n. 56. $DC=e$, $CP=f$, $AC=g$, $a=\frac{fg}{e-g}$ $DR=x$, $Rr=y$; & erit (56) $y=\frac{ax}{y}-aL\frac{e}{e-x}$. Ob triangula DAY, YPZ ſimilia, eſt DA ſeu $e-g$ ad AY vel CP ſeu f, ut YP vel AC ſeu g ad PZ, ideoque $PZ=\frac{fg}{e-g}=a$. Triangula ſimilia DRX, YPZ dant etiam YP ſeu g ad PZ ſeu a, ut DR ſeu x ad RX, & propterea $RX=\frac{ax}{g}$. Unde cum ſit $RC=e-x$, æquatio $y=\frac{ax}{g}-aL.\frac{e}{e-x}$ fiet $Rr=RX-PZ\times L.\frac{DC}{RC}$. Verum cum $PZ.\ L.\frac{DC}{RC}$ ſit Logarithmus rationis DC ad RC in Logarithmica cujus ſubtangens eſt a ſive PZ, dicendo ut ſubtangens tabularum ad PZ, ita $L.\frac{DC}{RC}$ è talis deſumptus ad ejuſdem quantitatis Logarithmum in Logarithmicâ cujus ſubtangens eſt PZ. Invenietur itaque $PZ\times L.\frac{DC}{RC}$ ope

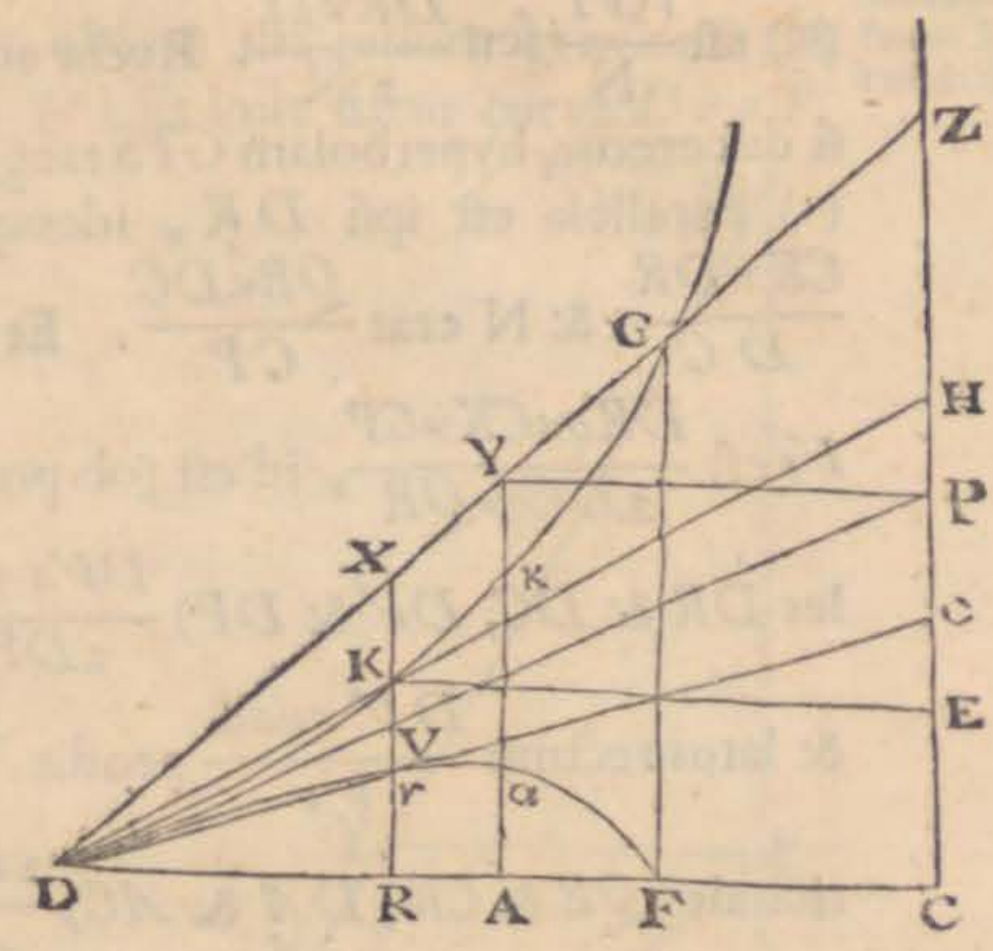
ope tabulæ vulgaris Logarithmorum, & inde obtinebitur R r ordinata ad trajectoriam D r a F, & ſic punctum quodlibet r in illa determinabitur.

59. Ex his ſimpliciſſima deducitur trajectoriæ D r a F per Logarithmicam conſtructio. Iiſdem enim poſitis quæ in corollario 1° hujus præſcripta ſunt, aſymptoto C Z & ſubtangente P Z deſcribatur per punctum D Logarithmica D K k G ſecans R X in K. Capiatur X r = R K, ſeu R r = X K, & punctum r erit in trajectoriâ quæſitâ D r a F. Nam ſi ex puncto K ducatur ad C Z perpendiculum K E, erit C E ſeu R K Logarithmus rationis D C ad K E vel R C (34), ideoque erit (58) R r = R X − R K = X K, & hinc R K = R X − R r = X r. Q. E. D.

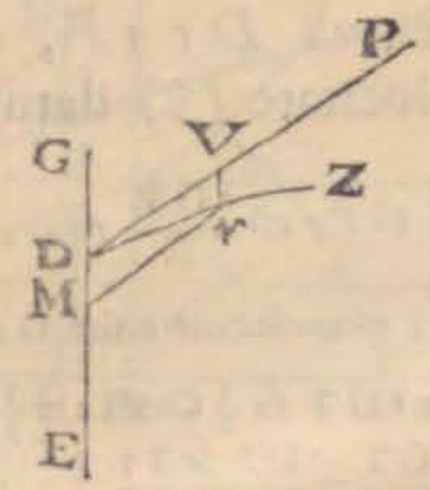
60. Hæc conſtructio hoc etiam commodi habet, quod ſtatim inveniantur altitudo maxima A a & horizontalis amplitudo D F. Eſt enim A a = Y k; & ſi ex puncto G interſectionis Logarithmicæ cum lineâ D Z demittatur ad D C perpendiculum G F, erit D F amplitudo Jactûs: nam coincidente X cum G fit X K ſeu R r = o, & ideo coincidit punctum r cum R in horizontali D C. Pariter punctum r, quo trajectoria D r a F rectam quamlibet D c ex puncto D ad C Z ductam ſecat, invenitur, ſi capiatur C H æqualis c Z, jungatur D H Logarithmicam ſecans in K, & ex puncto K demittatur ad D C perpendiculum K R, quod lineam D c ſecabit in puncto quæſito r; erit enim R K : C H ſeu Z c = D r : D c = X r : Z c, ideoque X r = R K.

61. Quoniam velocitas projectionis eſt ad velocitatem terminalem, quæ data eſt, ut D P ad P Z (58); ſi manet velocitas projectionis & linea D P, manebit quoque Logarithmicæ ſubtangens P Z; & ideo una eademque Logarithmicæ ſpecies deſcribendæ trajectoriæ D r a F ſufficiet, utcumque mutetur projectionis angulus P D C.

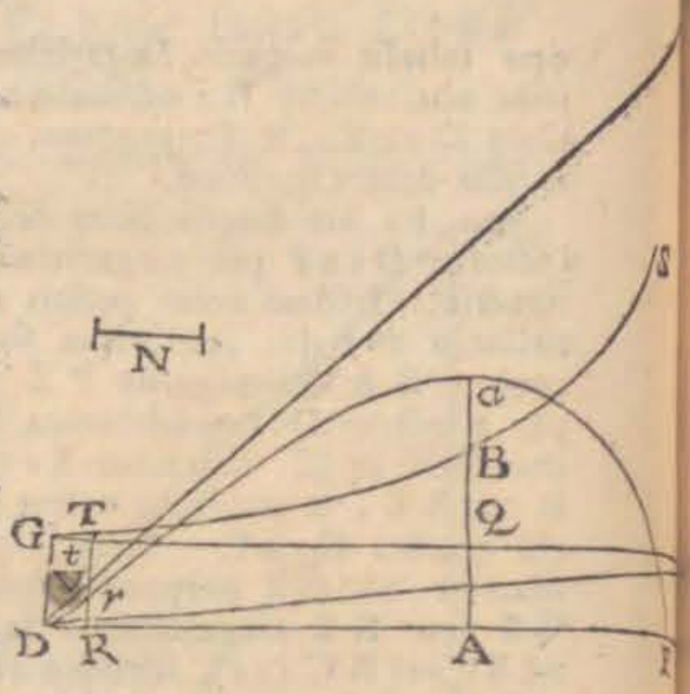
(1) 62. *Latus rectum parabolæ hujus &c.* Eſt enim V r ſpatium infinite parvum quod corpus vi gravitatis deſcendendo deſcribit in medio reſiſtente, quodque eodem tempuſculo dato deſcriberet in medio non reſiſtente (6). Sed corpus in medio non reſiſtente projectum vi gravitatis deſcriberet arcum parabolæ D r, cujus tangens D P, diameter G D E, abſciſſa D M = V r, ordinata M r æqualis & parallela D V (40. lib. 1.), & (per theor. 1. de parabola lib. 1.) rectangulum ſub latere recto & abſciſſâ D M ſeu V r æquatur quadrato ordinatæ M r ſeu D V. Quare latus rectum parabolæ hujus ipſo motus initio eſt $\frac{DV^2}{Vr}$.



6 a.



hujus, ipſo motus initio, eſt $\frac{DV\ quad.}{Vr}$; & Vr (m) eſt $\frac{tGT}{N}$ ſeu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, ſi duceretur, hyperbolam GTS tangeret in G, (n) parallela eſt ipſi DK, ideoque Tt eſt $\frac{CK \times DR}{DC}$, & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr eſt $\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id eſt (ob proportionales DR & DC, DV & DP) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$, & latus rectum $\frac{DV\ quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id (o) eſt (ob proportionales QB & CK, DA & AC) $\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, ideoque ad $2DP$, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; (p) hoc eſt, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q.E.D.*



Corol. 4. Unde ſi corpus de loco quovis D, datâ cum velocitate, ſecundum rectam quamvis poſitione datam DP projiciatur; & reſiſtentia medii ipſo motus initio detur: inveniri poteſt curva $DraF$, quam corpus idem deſcribet. Nam ex datâ velocitate (q) datur latus rectum parabolæ, ut notum eſt.

(m) * *Et Vr* eſt $\frac{tGT}{N}$ *(per conſtr.) ſeu* $\frac{DR \times Tt}{2N}$; evaneſcente enim DR ſeu Gt, triangulum tGT fit $\frac{1}{2}$ Gt×Tt = $\frac{1}{2}$ DR×Tt, & hinc $\frac{tGT}{N} = \frac{DR \times Tt}{2N}$.

(n) * *Parallela eſt ipſi DK*, ob KC = DG, & ſubtangentem hyperbolæ æqualem abſciſſæ DC (per theor. 1. de hyp. lib. 1.). Cum autem evaneſcit GTt, ſit Tt ad tG ſeu DR ut ordinata GD ſeu CK ad ſubtangentem, ſive ad DC, & ideo $Tt = \frac{CK \times DR}{DC}$. Et *N* erat $\frac{QB \times DC}{CP}$ (per conſtr.). Quare ſi loco *N* & Tt, hi valores ſubſtituantur in quantitate $\frac{DR \times Tt}{2N} = Vr$, invenietur $Vr = \frac{DR^2 \times CK \times CP}{2DC^2 \times QB}$

(o) * *Id eſt ob proportionales QB & CK, DA & AC &c.* Nam (per theor. 4. de hyp.) AB eſt ad GD (ſive AQ vel CK) ut DC ad AC, & diviſim QB eſt ad CK ut DA ad AC, id eſt $\frac{QB}{CK} = \frac{DA}{AC}$.

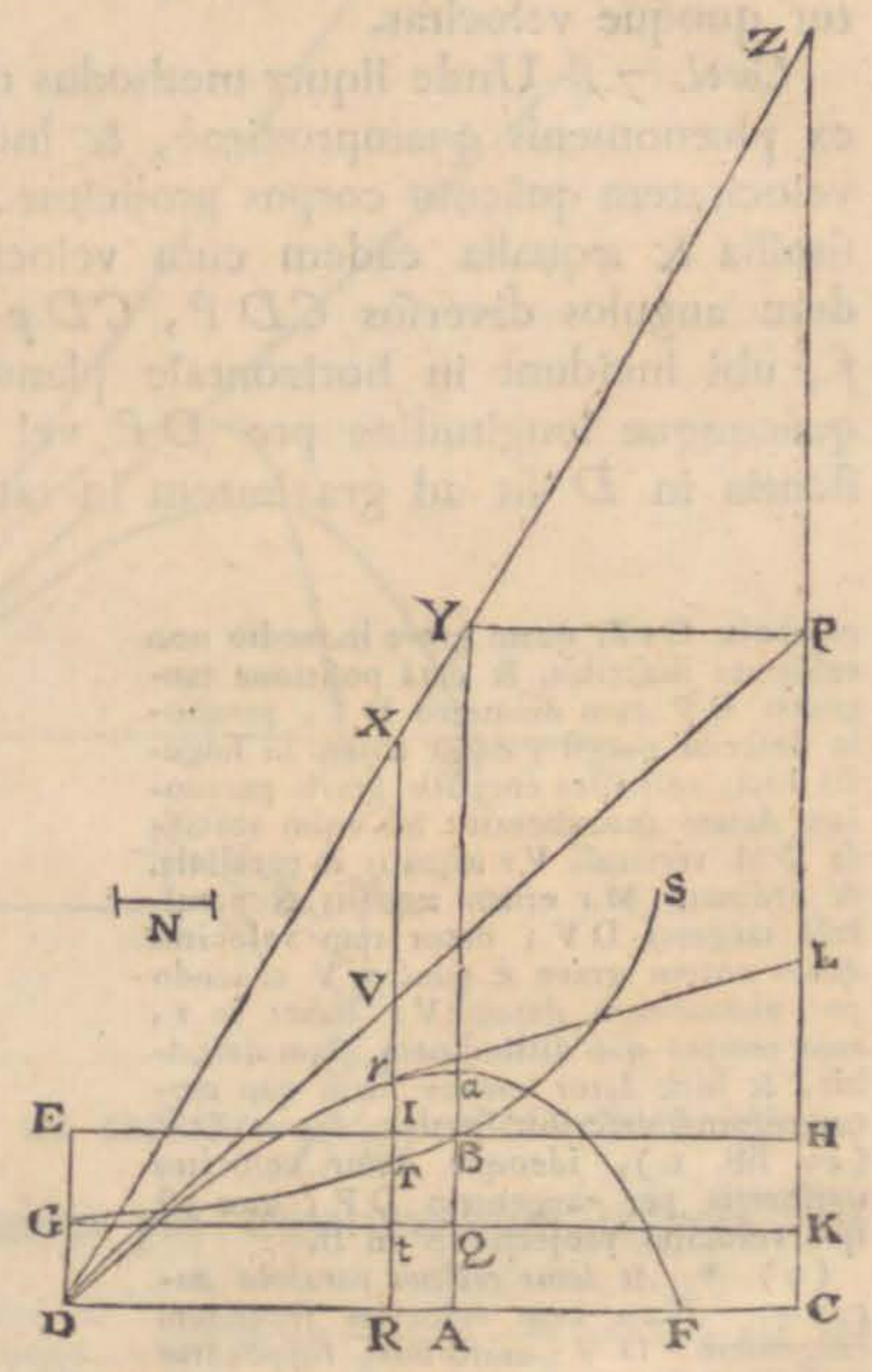
(p) * *Hoc eſt, ut reſiſtentia ad gravitatem*, per conſtruct. Probl. II.

(q) * *Datur latus rectum parabolæ &c.* Datâ velocitate ſecundum directionem tangentis DP, datur tum ſpatium finitum in medio non reſiſtente tempore dato æquabiliter deſcriptum, tum ex effectu cognito gravitatis in tempore dato, habe-

Et ſumendo $2DP$ ad latus illud rectum, ut eſt vis gravitatis ad vim reſiſtentiæ, datur DP. Dein ſecando DC in A, ut ſit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eâdem illâ ratione gravitatis ad reſiſtentiam, dabitur punctum A. (r) Et inde datur curva $DraF$.

Corol. 5. Et contra, ſi datur curva $DraF$, dabitur & velocitas corporis & reſiſtentia medii in locis ſingulis r. (t) Nam ex datâ ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum reſiſtentia medii ſub initio motus, tum latus rectum parabolæ: (t) & inde datur etiam velocitas ſub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis reſiſtentia in loco quovis r.

Corol. 6. Cum autem longitudo $2DP$ ſit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad reſiſtentiam in D; & ex auctâ velocitate augeatur reſiſtentia



tur ſpatium verticale finitum Vr eodem tempore vi gravitatis deſcriptum, id eſt, dantur ordinata & abſciſſa parabolæ, quibus datis datur illius latus rectum (per theor. 1. de parab.).

(r) * *Et inde datur curva DraF*, non ſolum conſtructione per hyperbolam, ſed etiam conſtructione illâ quæ Logarithmicam abſolvitur (59). Nam inventâ DP, ſumenda eſt Logarithmicæ ſubtangens PZ ad DP in ratione gravitatis ad reſiſtentiam ſub initio motûs; & ideo Logarithmicæ ſubtangens PZ erit etiam ad DP ut 2 DP ad latus rectum parabolæ.

(t) * *Nam ex datâ ratione* CP × AC ad DP × DA, id eſt (per conſtr.) ratione gravitatis ad reſiſtentiam totam ſub motus initio, dabitur reſiſtentia, ob datam gravitatem (per hyp.); & quia CP × AC eſt ad DP × DA ut 2 DP ad latus rectum parabolæ (per cor. 3.), dabitur illud latus rectum.

(t) * 63. *Et inde datur etiam velocitas ſub initio motûs.* Nam dato latere recto

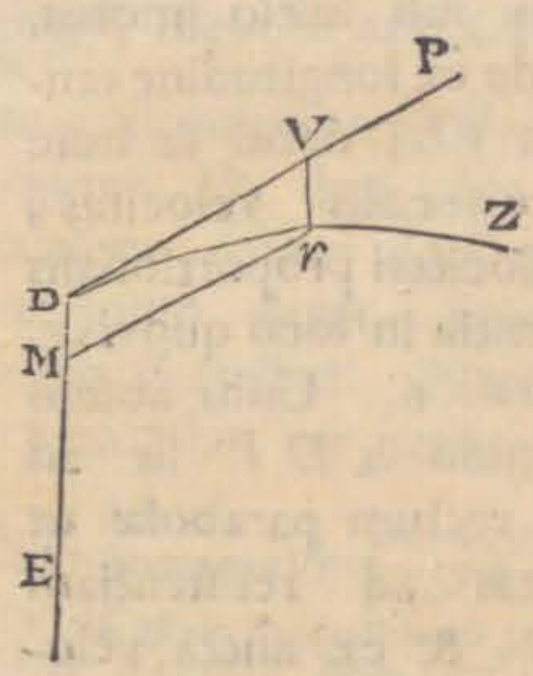
DE MOTU CORPORUM.

in eâdem ratione, (u) at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illâ duplicatâ: (x) patet longitudinem $2DP$ augeri in ratione illâ simplici, ideoque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi curvam *DraF* ex phænomenis quamproximè, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quâcum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eâdem cum velocitate, de loco D, secundum angulos diversos CDP, CDp & cognoscantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum, assumptâ quâcunque longitudine pro DP vel Dp, fingatur quod resistentia in D sit ad gravitatem in ratione quâlibet, & exponatur

parabolæ D r Z, quam grave in medio non resistente describit, & datâ positione tangentis D P cum diametro D E, parabola describi potest; datur autem in singulis locis velocitas corporis gravis parabolam datam describentis: Sit enim abscissa D M verticali V r æqualis & parallela, & ordinata M r etiam æqualis & parallela tangenti D V; datur tum velocitas quam corpus grave è puncto V cadendo per altitudinem datam V r habet in r, tum tempus quo altitudinem illam describit, & hinc datur tempus idem quo motu uniformi describit spatium datum D V (40. lib. 1.), ideoque datur velocitas uniformis per tangentem D P, quæ est ipsa velocitas projectionis in *D*.

(u) * *At latus rectum parabolæ augeatur.* Nam cum velocitas secundum tangentem D V uniformis supponatur (40. lib. 1.); Si, dato tempore quo describitur D V, velocitas illa crescat, crescet D V in eadem ratione, manente spatio verticali V r hoc eodem tempore dato descripto; sed latus rectum parabolæ D r Z est $\frac{DV^2}{Vr}$ (per cor. 3.) & quantitas $\frac{DV^2}{Vr}$ manente V r, crescit ut DV^2. Quare latus rectum parabolæ D r Z augetur in ratione duplicatâ velocitatis.

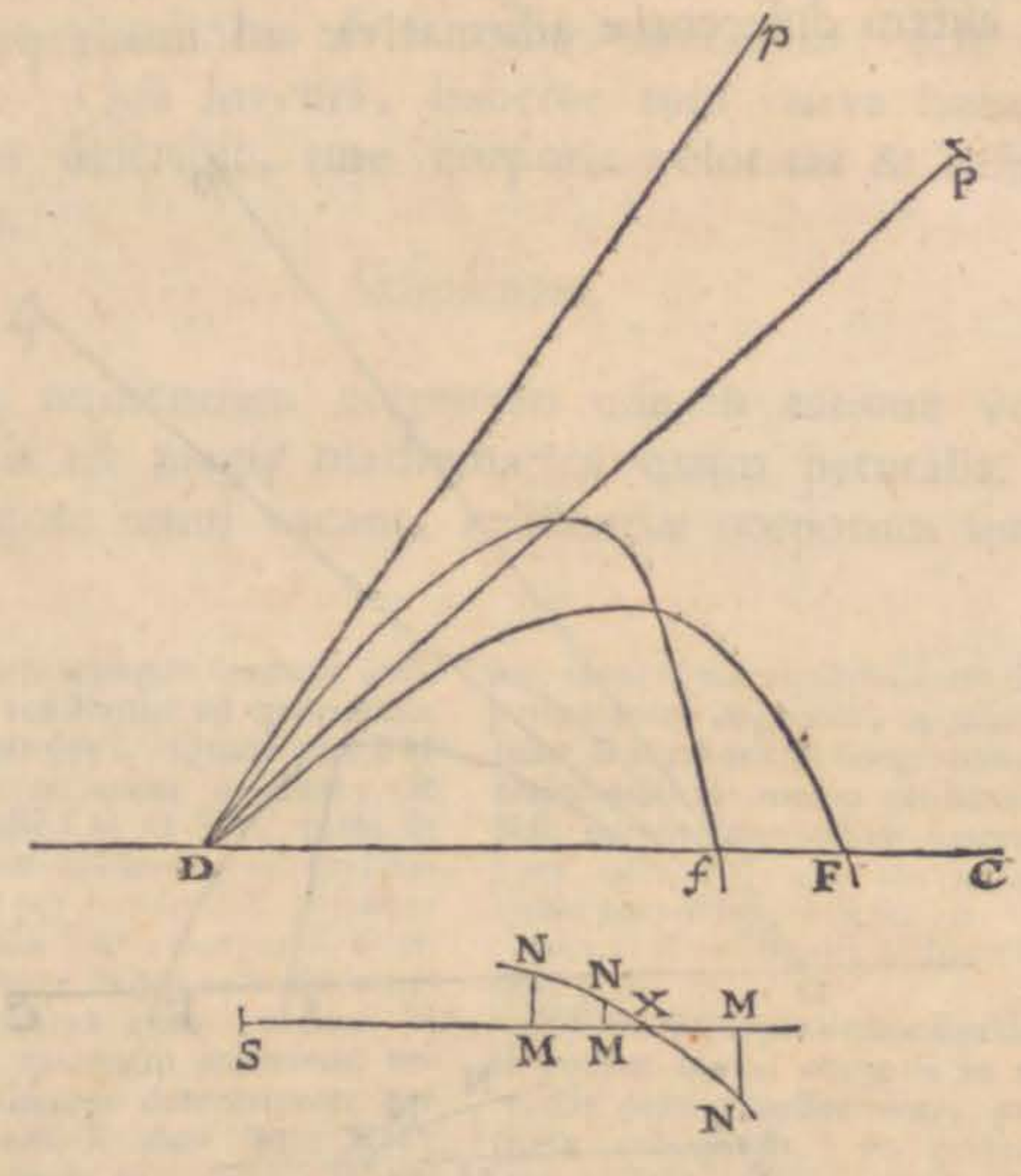


(x) * *Patet longitudinem* $2DP$ *&c.* Gravitas dicatur G, resistentia initio motûs R, latus rectum parabolæ, ut suprà, $\frac{DV^2}{Vr}$; & erit $2DP : \frac{DV^2}{Vr} = G : R$, ideoque $2DP = \frac{G \times DV^2}{R \times Vr}$, hoc est, datis V r & G, 2 D P est ut $\frac{DV^2}{R}$, & quia R est ut velocitas, seu ut D V, erit etiam 2 D P ut D V, sive ut velocitas (per notam superiorem).

* 64. *Dein-*

tur ratio illa per longitudinem quamvis *SM*. (y) Deinde per computationem, ex longitudine illâ assumptâ *DP*, inveniantur

LIBER SECUND. SECT. I. PROP. IV. PROBL. II.



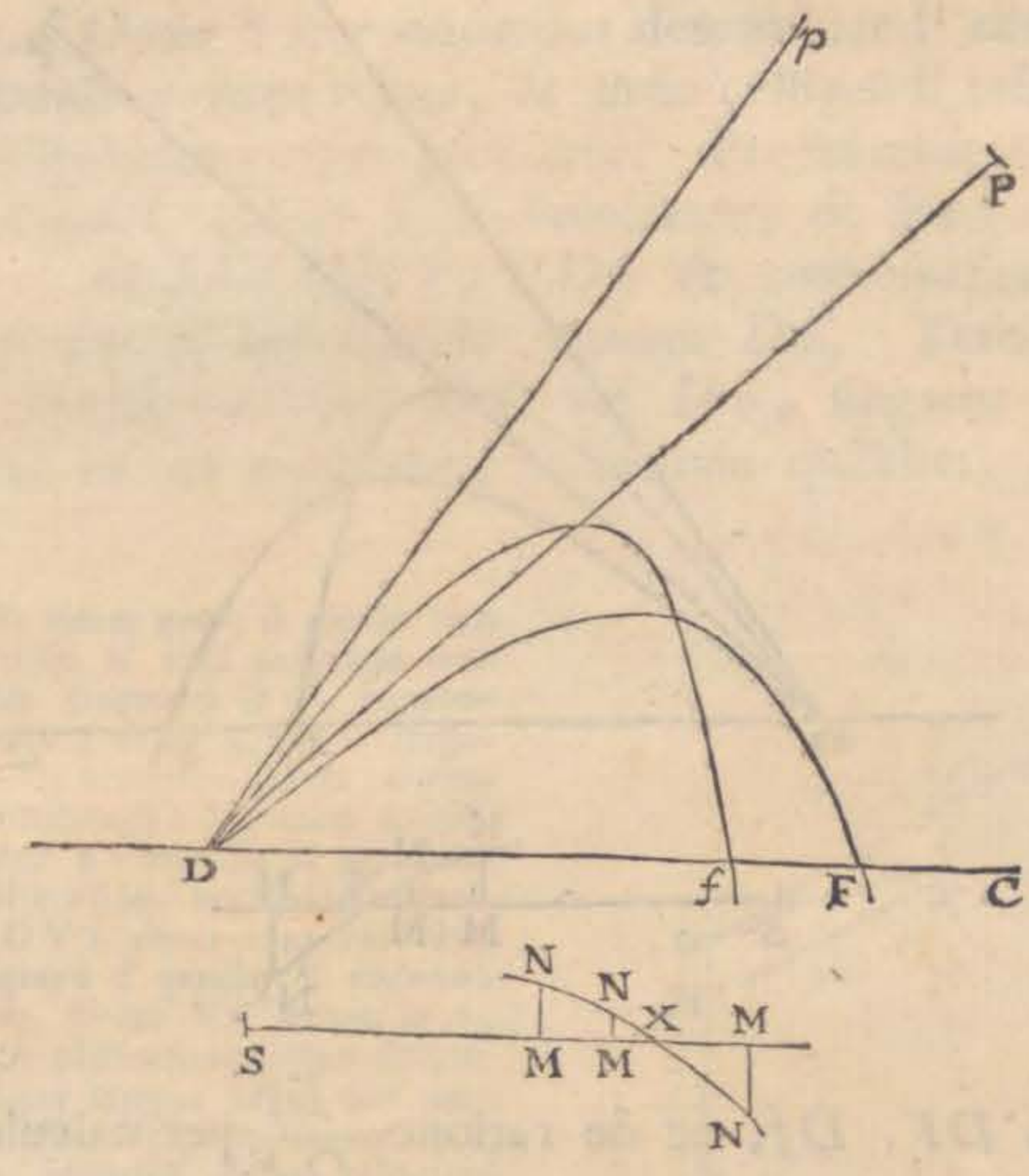
longitudines *DF*, *Df*, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventâ, (z) auferatur ratio eadem per experimentum inventa, &

(y) 64. *Deinde per computationem.* Datâ enim DP longitudine & positione, dantur CP & DC, & datâ ratione resistentiæ in D ad gravitatem dantur DA & AC per constructionem problematis istius: His autem datis, curva DraF (vide figuras superiores) describi potest, & hinc invenitur amplitudo horizontalis DF constructione per hyperbolam vel per logarithmicam (59). Si autem rem voluerimus calculo tractare, uti poterimus æquatione $y = \frac{a\,x}{g} - a.\,L.\,\frac{e}{e-x}$ (63) in qua ut fiat $x = DF$, ponenda est $y = 0$, & æquatio fiet $\frac{a\,x}{g} = L.\,\frac{e}{e-x}$, ex quâ per regressum serierum, vel per alias approximationes invenietur x per g & e, seu DF per AC & DC. 64.

(z) 65. *Auferatur ratio eadem per experimentum inventa;* & si nihil est residui, recte assumpta fuit ratio resistentiæ ad gravitatem; si quid residui fuerit, *exponatur differentia per MN.* Nam si recte assumpta fuit ratio resistentiæ ad gravitatem, curva DraF per constructionem vel per computationem descripta similis est trajectoriæ quam corpus in medio resisten-

DE MOTU CORPORUM.

exponatur differentia per perpendiculum *MN*. Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem *SM*, & colligendo novam differentiam *MN*. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ



SM, & negativæ ad alteram; & per puncta *N*, *N*, *N* agatur curva regularis *NNN* secans rectam *SMMM* in *X*, & (a) erit *SX* vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam te reverâ describit, & hinc homologarum in illis curvis linearum debet esse ratio data. Determinatur enim trajectoria vera ex velocitate & angulo projectionis æquali PDC vel pDC, atque ex ratione resistentiæ ad gravitatem datam; & curva per constructionem delineata determinatur per longitudinem assumptam DP vel Dp, quæ velocitatem datam semper potest exhibere, per angulum PDC vel pDC, & per ratuonem linearum DA, AC, seu rationem resistentiæ ad gravitatem, si recte assumpta fuit: quare differentia tota inter veram trajectoriam & curvam hoc modo per constructionem descriptam est in magnitudine linearum homologarum, quarum ratio est eadem in utrâque curvâ. Curvæ igitur illæ similes sunt.

(a) *66. Et erit SX vera ratio resistentiæ ad gravitatem.* Nam ubi MN seu differentia rationum $\frac{Ff}{DF}$, quæ per computatio-

invenire oportuit. Ex (b) hac ratione colligenda eſt longitudo DF per calculum; & longitudo quæ ſit ad aſſumptam longitudinem DP, ut longitudo DF per experimentum cognita ad longitudinem DF modo inventam, erit vera longitudo DP. Quâ inventâ, habetur tum curva linea $DraF$ quam corpus deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis.

Scholium.

Cæterum, reſiſtentiam corporum eſſe in ratione velocitatis, (†) hypotheſis eſt magis mathematica quam naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, reſiſtentiæ corporum ſunt in duplicatione & per experimentum inventæ ſunt, nulla eſt, ratio reſiſtentiæ ad gravitatem recte aſſumpta fuit (65). Quare cum SM aſſumptam illam rationem exponat, & evaneſcat MN ubi SM fit SX, patet in hoc caſu rationem reſiſtentiæ ad gravitatem recte exponi per lineam SX. Itaque ſi innumeræ abſciſſæ SM aſſumptæ fuiſſent, & innumeræ ordinatæ NM per experimenta determinatæ, curva quam punctum N perpetuò tangit, rationem accuratam reſiſtentiæ ad gravitatem determinaret per ejus interſectionem X cum linea SM; ideoque ſi multa fiunt tentamina, ſicque plura obtineantur puncta N, & per ea ducatur curva regularis NNXN, illa quam proxime punctum X quæſitum determinabit; methodum autem ducendi curvam regularem per plura puncta data mox in Scholio ſumus tradituri.

(b) * *Ex hac ratione colligenda eſt &c.* Sit, exempli cauſâ, ratio aſſumpta reſiſtentiæ ad gravitatem 1 ad 10, ſeu $SM=\frac{1}{10}$; inventa autem ſit $SX=2SM=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$; erit reſiſtentia ad gravitatem ut 1 ad 5. Ex hac ratione & aſſumptâ longitudine DP colligenda eſt longitudo DF ſeu amplitudo jactûs (64); & quoniam inventâ verâ ratione reſiſtentiæ ad gravitatem, trajectoria per calculum vel per conſtructionem inventa ſimilis eſt trajectoriæ quam corpus in medio reſiſtente, reverâ deſcribit (65), erit amplitudo DF per calculum inventa ad amplitudinem DF per experimentum cognitam, ut aſſumpta longitudo DP ad veram longitudinem DP pro trajectoriâ in medio reſiſtente deſcriptâ. Hâc autem longitudine inventâ, habetur (per cor. 4.) tum curva linea DraF quam corpus reipſâ deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis (per cor. 5.). 66.

(†) 67. Ex ſupra demonſtratis determinari poſſent motus corporis in medio quod reſiſtit partim uniformiter, partim in ratione velocitatis. Et quidem ſi corpus ſola vi inſitâ in hoc medio feratur, pars illa reſiſtentiæ quæ eſt uniformis, tanquam vis conſtans gravitatis quâ corporis aſcendentis motus retardatur, conſideranda eſt, & in ſuperioribus conſtructionibus pro corporis aſcenſu, non gravitas, ſed ea reſiſtentia uniformis data per lineam AC, vel per rectangulum AH exponi debet. Si vero corpus in prædicto medio vi gravitatis etiam urgeatur, linea AC gravitatem & reſiſtentiæ partem uniformem ſimul junctas, ſi corpus aſcendit, & exceſſum gravitatis ſupra eam reſiſtentiæ partem uniformem, ſi corpus deſcendit, exponet. Qua ratione cæteris manentibus, determinabuntur motus corporis tum ſolâ vi inſitâ moti, tum vi gravitatis urgente aſcendentis & deſcendentis in medio quod reſiſtit partim in ratione datâ, partim in ratione velocitatis, tum etiam corporis projecti.

Ete-

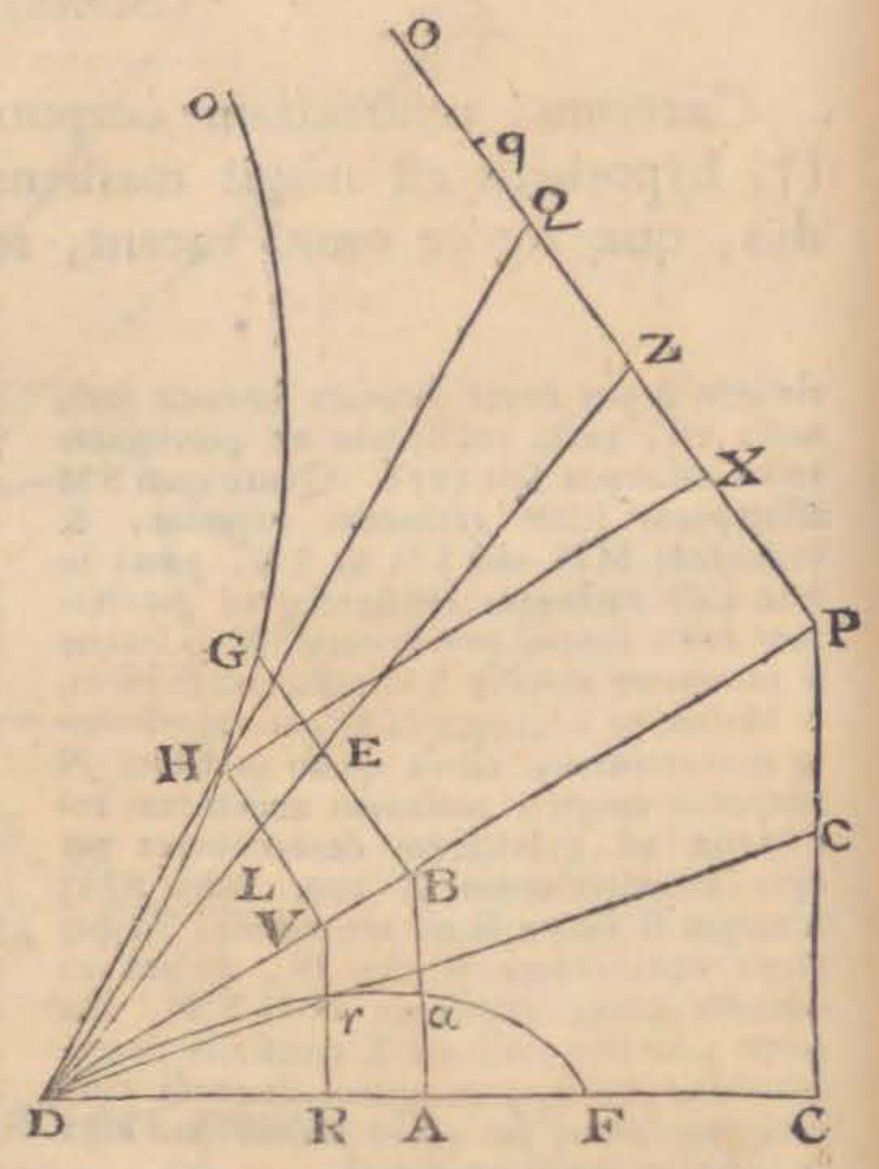
DE MOTU CORPORUM.

plicatâ ratione velocitatum. (c) Etenim actione corporis velocioris comunicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicatâ ratione major; eſtque reſiſtentia (per motus leg. II. & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hâc lege reſiſtentiæ.

(c) *Etenim actione &c.* Hæc patent per demonſtrata (8).

68. Scholium. Ex æquatione ad curvam DraF, quam (57) invenimus, deducitur hujus curvæ per Logarithmicam ſatis elegans conſtructio, quâ uſi ſunt Varignonius & Hermannus. Eam hic exponemus breviter. Deinde cum in ſuperioris propoſitionis corollario ultimo & alibi poſtea deſcribenda ſit curva regularis quæ per data puncta tranſeat, hoc problema, quod Newtonus in Epiſtolâ ad Oldenburgum anno 1676. datâ unum fere ex pulcherrimis dicit quod ſolvere deſideraverit, ſolvemus.

69. Iiſdem poſitis quæ in ſuperiori conſtructione Newtoni, ſit DP=b, DV=v, Vr=z, & DP ad a ut velocitas projectionis ad velocitatem terminalem; & erit (57) $z = a.L.\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$. Oportet curvam DraF ex hac æquatione per Logarithmicam conſtruere. In rectâ PO ad DP normali capiatur PZ=a, aſymptoto PO & ſubtangente PZ deſcribatur per punctum D Logarithmica DHO, cujus DZ erit tangens, & per punctum quodvis V in linea DP agatur VH parallela PO Logarithmicæ occurrens in H & tangenti DZ in L, capiaturque verticalis VR pars Vr æqualis HL. Punctum r erit in trajectoria quæſitâ DraF. Nam ducto ex H ad PO perpendiculo HX, erit (per conſtruct.) VP=HX=$b-v$, PZ=a, & hinc $PX = HV = PZ \times L.\frac{DP}{HX} = a.L.\frac{b}{b-v}$ (34). Et ob triangula DVL, DPZ ſimilia, DP(b):PZ(a)=DV(v):VL $=\frac{av}{b}$. Quare erit $HV - LV = a.L.\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b} = z = Vr$. Q. E. D.

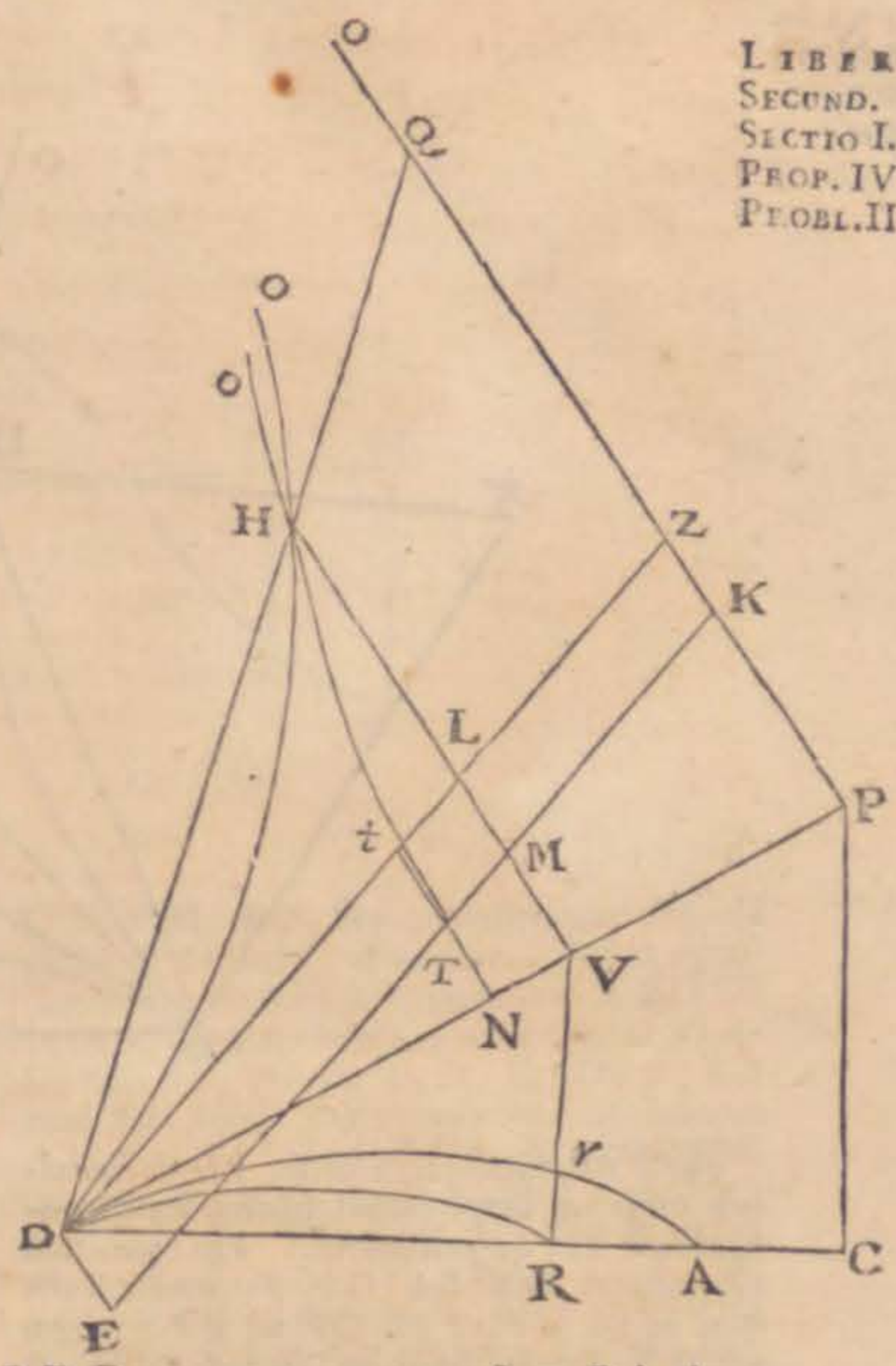


70. Cor. 1. Si per punctum A Newtoni conſtructione determinatum erigatur verticalis AB ſecans DP in B, & per B erigatur ad DP perpendiculum BG ſecans DZ in E & Logarithmicam in G, capiaturque Ba æqualis GE, erit Aa maxima altitudo Jactûs.

71. Cor. 2. Punctum r quo trajectoria rectam Dc ex D ductam ad PC, ſecat, invenitur, ſi in lineæ ZO capiatur ZQ æqualis Pc, jungantur DQ logarithmicam ſecans in H, demittatur ex H ad DP, perpendiculum HV, & ex V ad

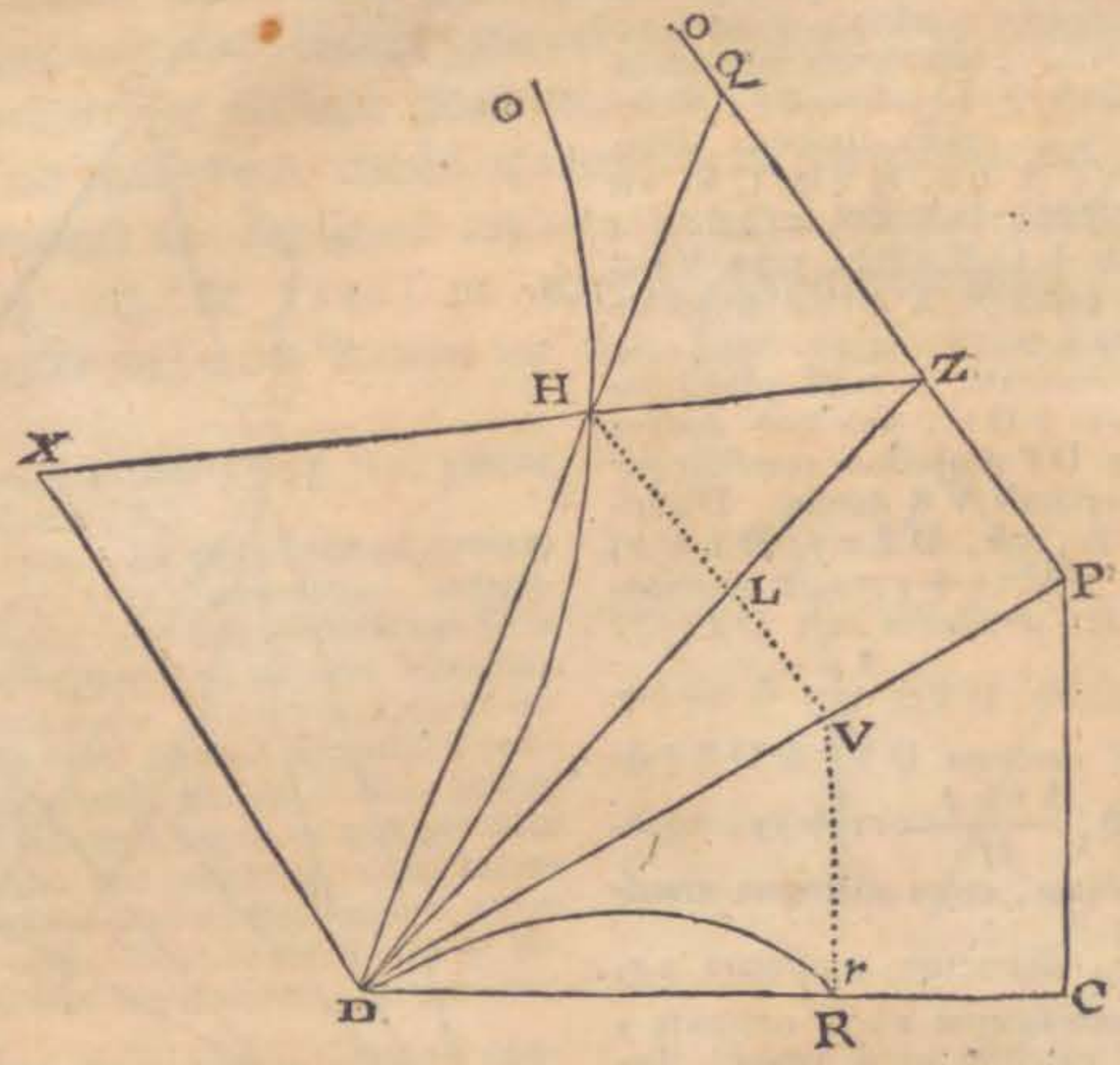
ad DC perpendiculum VR, quod rectam Dc secabit in puncto quæsito r, atque hinc determinatur etiam horizontalis amplitudo DF, capiendo ZQ æqualem Pc, & reliqua perficiendo ut modò diximus. Nam ob parallelas Vr & Pc, HV & QP, est Pc: Vr = PD: DV = DZ: DL = QZ: HL; sed (per constr.) QZ = Pc: ergo Vr = HL, ideoque punctum r est in trajectoria DraF (69).

72. Ex demonstratis inveniri potest angulus elevationis PDC, sub quo corpus datâ velocitate DP projectum transibit per punctum r in verticali VR datum. Dicantur DR = e, Rr = e, DZ = f, DL = x, HL = Vr = z, VR = $z + e = y$; & ob triangula DLV, DZP similia erit DZ (f): DP (b) = DL (x): DV = $\frac{bx}{f}$, & ob angulum DRV rectum $DV^2 = DR^2 + VR^2$, hoc est, $\frac{bbxx}{ff} = cc + yy$, æquatio ad hyperbolam, cujus diameter transversa est $\frac{2cf}{b}$, diameter cunjugata $2c$, abscissa a centro sumpta x, & ordinata y seu $z + e$, ut calculo inito liquet. Inde autem deducitur hæc constructio. Per punctum D ducatur infra lineam DP recta DE parallela PZ & æqualis Rr, per E agatur EK parallela DZ secans HV in M; & erit LM = DE = Rr = e, ideoque HM = $z + e = y$, atque EM = DL = x, & proinde centrum hyperbolæ est in E; cumque semidiameter transversa sit $\frac{cf}{b} = \frac{DR \times DZ}{DP}$, si capiatur in linea DP pars DN æqualis DR, & per punctum N erigatur ad DP perpendiculum NT, secans EK in T & DZ in t, erit DP ad DZ ut DN seu DR ad Dt seu ET, ideoque $ET = \frac{DR \times DZ}{DP}$, & propterea ET semidiameter transversa, EM abscissa, & MH ordinata hyperbolæ THo, cujus semidiameter conjugata æquatur DR. Hæc itaque hyperbola occursu suo cum Logarithmica DHo determinabit punctum H, ex quo si demittatur ad DP perpendiculum HV secans DZ in L, dabuntur DV & HL æqualis Vr, ideoque dabitur etiam VR = Vr + Rr. His autem datis, datur angulus elevationis PDC, cujus sinus est VR, posito sinu toto DV.



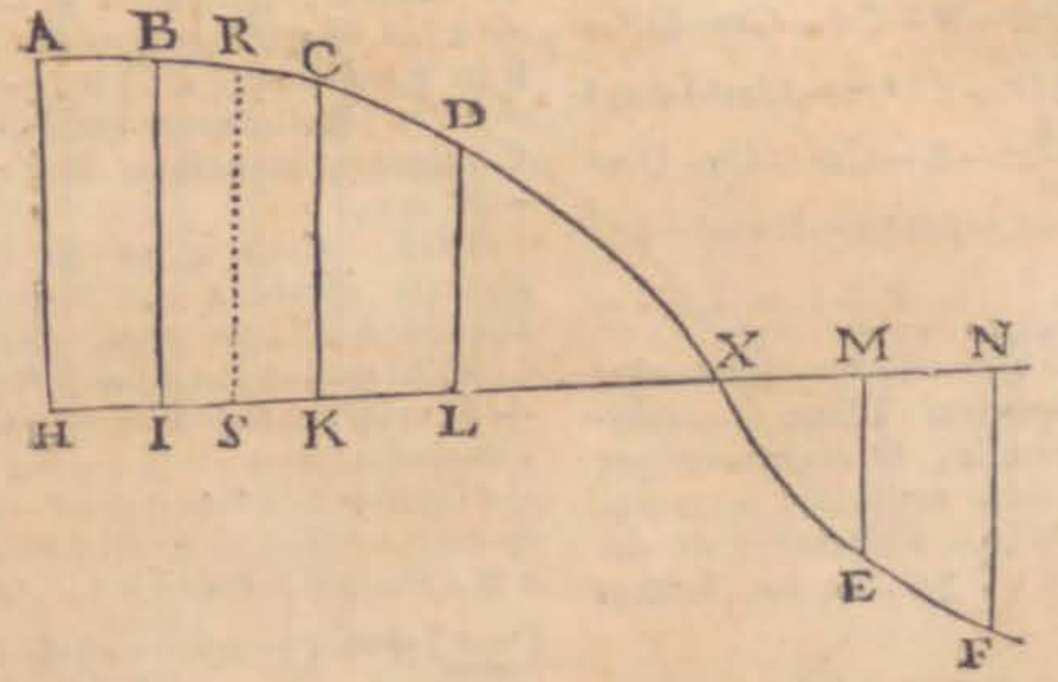
73. Si vero quæratur angulus projectionis PDC, ut corpus per punctum R in horizontali DC datum transeat, fiet Rr = e = o, & æquatio ad hyperbolam evadet $\frac{bbxx}{ff} = cc + zz$, ob $y = z + e = z$. In constructione vero coincidet punctum E cum puncto D, & T cum t, cæteris manentibus ut supra. Et quia si per hyperbolæ & Logarithmicæ intersectionem H ducatur recta DH secans Po in Q, est QZ = PC (71.); liquet in eo casu esse QZ sinum anguli elevationis PDC, existente radio seu sinu toto DP. Observandum porro est, quod si in his constructionibus hyperbola Logarithmicam nusquam attingat, problema est impossibile, quod si eam bis secet, anguli duo satisfaciunt. Patet quoque datam semper esse rationem diametrorum hyperbolæ, ubicumque situm sit punctum r, vel R; est enim DR ad $\frac{DR \times DZ}{DP}$ in ratione data DP ad DZ.

DE MOTU CORPORUM.



74. Angulus elevationis PDC maximæ omnium amplitudini horizontali conveniens ita determinatur. Per punctum D ducatur DX ipsi DP perpendicularis quæ sit ad DP ut est DP ad PZ; jungatur ZX Logarithmicam secans in H, & ex D per H dncatur recta DH secans PO in Q; erit QZ sinus anguli quæsiti, existente sinu toto DP. Sit enim DR amplitudo horizontalis maxima $=c$, DV$=v$, VR$=$Vr$=z$, & erit ob angulum DRV rectum $vv-zz=cc$, & sumptis fluxionibus $2vdv-2zdz=2cdc=0$ (48), ideoque $vdv=zdz$. Sed (69) $z=aL\frac{b}{b-v}-\frac{av}{b}=aLb-aLb-v-\frac{av}{b}$, & sumptis fluxionibus $dz=\frac{adv}{b-v}-\frac{adv}{b}=\frac{avdv}{bb-bv}$. Quare erit $zdz=\frac{azvdv}{bb-bv}=vdv$, & ideo $az=bb-bv$, ac proinde DP(b):PZ(a)=HL(z):PV$(b-v)$; verum ob triangulum DVL, DPZ similitudinem est DP:DZ=PV:ZL; unde per compositionem rationum & ex æquo $DP^2:PZ\times DZ=HL:ZL$, & quia $DP^2=DX\times PZ$ (per constr.), erit DX:DZ=HL:LZ. Quapropter punctum H per æquationem $az=bb-bv$ determinatum perpetuo tangit lineam rectam XZ; cumque idem punctum in Logarithmica esse oporteat ut determinetur maxima amplitudo DR, si per intersectionem H rectæ XZ & Logarithmicæ DHo ducatur recta DQ secans Po in Q, habebitur QZ sinus anguli PDC (73) maximæ amplitudini DR convenientis. Q. E. D.

75. Jam si oporteat curvam regularem describere per data quotlibet puncta transeuntem, uti possumus generali methodo, quam Newtonus in arithmeticâ universali tradidit, quamque deinde in problematis 55, 58 & 61. adhibuit. Hæc sunt ipsius verba: Cum curva non datur specie, sed determinanda proponitur, possisque pro arbitrio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat, & hanc pro eâ designandâ tanquam si daretur assumere, ut ex ejus



ejus assumptione quomodocumque perveniatur ad æquationes ex quibus assumpta tandem determinetur. Si itaque curva generis dati per data puncta delineanda sit, assumatur generalis ad curvam illam æquatio cum terminorum coëfficientibus indeterminatis, & curvâ ad rectam aliquam positione datam relatâ, ex singulis punctis datis in rectam illam demittantur perpendiculares aut rectæ aliæ inter se parallelæ, quæ datæ erunt ut & earum abscissæ a dato in rectâ illâ puncto computatæ; deinde in assumptâ æquatione loco abscissæ variabilis x & ordinatæ etiam variabilis y scribantur abscissæ & ordinatæ per puncta data determinatæ, & tot inde obtinebuntur æquationes quot sunt puncta data per quæ curva transire debet, atque ex illis æquationibus, generalis æquationis assumptæ coëfficientes determinabuntur. Hujus methodi exemplum sit solutio Lemmatis 5' lib. 3. principiorum, quod ita propositum est: invenire curvam generis parabolici quæ per data quotcumque puncta transibit; cujus Lemmatis solutionem dedit ibidem Newtonus, sed sine demonstratione quæ tamen ex ejusdem auctoris differentiali methodo colligi potest.

76. I. Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam HN demittantur perpendicula quotcumque AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c.; positisque abscissâ variabili $HS=x$, & ordinatâ $RS=y$, assumatur generalis ad parabolam ABDEF æquatio $y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+$ &c., sintque A, B, C, D, E, &c. cum suis signis indeterminatæ. Dicantur $AH=a$, $BI=f$, $CK=g$, $DL=h$, $ME=-k$, & $HI=l$, $HK=m$, $HL=n$, $HM=t$, &c. Ponantur 1°. $y=a$ & $x=0$; 2°. $y=f$, & $x=l$; 3°. $y=g$ & $x=m$; 4°. $y=h$, & $x=n$; 5°. $y=-k$, & $x=t$ atque ita deinceps; & loco y & x seorsim substituantur hi valores in æquatione generali assumpta, quæ in has mutabitur:

II. $a=A$
$f=A+Bl+Cl^2+Dl^3+El^4+$ &c.
$g=A+Bm+Cm^2+Dm^3+Em^4+$ &c.
$h=A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4+$ &c.
$-k=A+Bt+Ct^2+Dt^3+Et^4+$ &c.

Subducantur æquationes inferiores ex superioribus, nimirum secunda ex primâ, tertia ex secunda, & ita deinceps. Differentia primæ ac secundæ ordinatæ per primum intervallum HI divisa dicatur b, id est, $b=\frac{a-f}{l}$; secundæ ac tertiæ differentia per secundum intervallum IK divisa dicatur 2b, id est, $2b=\frac{f-g}{m-l}$, & ita de cæteris. Prodibunt æquationes sequentes.

76.

DE MOTU CORPORUM.

III. $b=\frac{a-f}{l}=-B-Cl-Dl^2-El^3$

$2b=\frac{f-g}{m-l}=-B-Cl-Cm-Dl^2-Dlm-Dm^2-El^3-El^2m-Elm^2-Em^3$

$3b=\frac{g-h}{n-m}=-B-Cm-Cn-Dm^2-Dmn-Dn^2-Em^3-Em^2n-Emn^2-En^3$

$4b=\frac{h+k}{t-n}=-B-Cn-Ct-Dn^2-Dnt-Dt^2-En^3-En^2t-Ent^2-Et^3$

Simili modo capiantur adhuc æquationum iſtarum differentiæ, & dividantur per intervallum inter duas ordinatas interceptum HK, IL, KM, & differentiæ ſic diviſæ dicantur c, 2c, 3c, ut hic factum videtur.

IV. $c=\frac{b-2b}{m}=C+Dl+Dm+El^2+Elm+Em^2.$

$2c=\frac{2b-3b}{n-l}=C+Dl+Dm+Dn+El^2+Elm+Em^2+Eln+Emn+En^2.$

$3c=\frac{3b-4b}{t-m}=C+Dm+Dn+Dt+Em^2+Emn+En^2+Emt+Ent+Et^2.$

Harum æquationum differentiæ per intervalla trium ordinatarum HL, IM, diviſæ dicantur d, 2d, & erunt æquationes

V. $d=\frac{c-2c}{n}=-D-El-Em-En$

$2d=\frac{2c-3c}{t-l}=-D-El-Em-En-Et$

Harum tandem æquationum differentia per intervallum quatuor ordinatarum HM diviſa dicatur e, & erit

VI. $e=\frac{d-2d}{t}=E.$

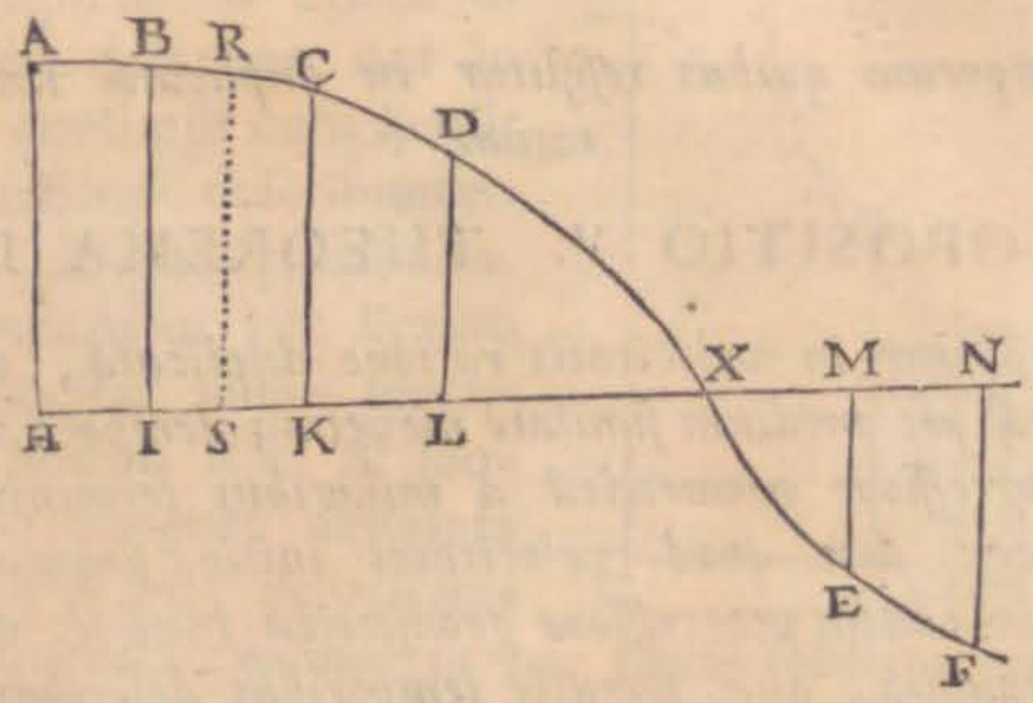
Si plura fuiſſent puncta data, pluresque ideo fuiſſent æquationes, eodem modo pergendum eſſet uſque ad differentiam ultimam: quæ hic eſt differentia quarta, & ſic tandem pervenitur ad valorem coëfficientis ultimi termini æquationis generalis aſſumptæ, & deinde retrogrediendo inveniuntur valores aliarum coëfficientium D, C, B, & A hoc modo.

VII. Quoniam $e=E$, & (V) $d=-D-El-Em-En$, erit $D=-d-el-em-en$; & quia (IV) eſt $c=C+Dl+Dm+El^2+Elm+Em^2$ ideoque $C=c-Dl-Dm-El^2-Elm-Em^2$ ſi loco E & D ſubſtituantur eorum valores modo inventi, habebitur $C=c+dl+dm+elm+enl+emn$. Et ſimili modo ſi in æquatione (III) $b=-B-Cl-Dl^2-El^3$, ſubſtituantur coëfficientium E, D, C valores, invenietur $B=-b-cl-dlm-elmn$.

VIII. Cum igitur ſit (II.) $A=a$, æquatio aſſumpta $y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$, in hanc abit $y=a-x.(bcl+dlm+elmn)+x^2.(c+dl+dm+elm+enl+emn)-x^3.(d+el+em+en)+ex^4=a-bx-clx+cx^2-dlmx+dlx^2+dmx^2-dx^3-elmnx+elmx^2+enlx^2+emnx^2-elx^2-emx^3-enx^3+ex^4$, ſeu $y=a+b.\overline{(-x)}+c.(-x\times\overline{l-x})+d.(-x\times\overline{l-x}\times\overline{m-x})+e.(-x\times l-x\times m-x\times n-x)$ + &c. In quâ æquatione patet terminorum progreſſus, & quomodo datâ abſciſſâ HS ſeu x inveniri compendiosè poſſit correſpondens ordinata SR ſeu y. Nam ſi dicantur $\overline{-x}$ ſeu $-HS=p$; $-IS\times p$, ſeu $-x\times\overline{l-x}=q$; $+SK\times q$, ſeu $-x\times\overline{l-x}\times\overline{m-x}=r$; $+SL\times r$, ſeu $-x\times\overline{l-x}\times\overline{m-x}\times\overline{n-x}=s$, ita ſcilicet pergendo ad uſque perpendiculum penultimum, quod hic eſt DL; erit RS ſeu $y=a+bp+cq+dr+es+$ &c.

IX. Atque hæc ipſa eſt regula quam Newtonus caſu ſecundo Lemmatis V. lib. III. ſic tradit: collige perpendiculorum AH, BI, CK &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum diviſas b, 2b, 3b, 4b &c; ſecundas per intervalla bina diviſas c, 2c, 3c, 4c &c; tertias per intervalla terna diviſas d, 2d, 3d, &c.; quartas per intervalla quaterna diviſas e, 2e, &c. Et ſic deinceps. Inventis differentiis, dic $AH=a$, $-HS=p$, p in $-IS=q$, q in $+SK=r$, r in $+SL=s$, pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum. Et erit ordinatim applicata $RS=a+bp+cq+dr+es+$ &c. ubi obſervandum eſt, præponenda eſſe ſigna negativa terminis HS, IS &c. qui jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis SK, SL &c. qui jacent ad alteras partes puncti S.

X. Per hanc igitur regulam, aſſumptâ quâlibet abſciſſâ HS, invenietur valor ordinatæ correſpondentis SR, ſingulaque parabo-



rabolæ puncta determinabuntur. Si vero in æquatione ponatur $y=0$, & deinde quæratur valor abſciſſæ x, cognoſcetur punctum X quo parabola rectam HN interſecat.

77. XI. Si perpendiculorum HA, IB, KC, L D &c. æqualia ſunt intervalla H I, I K, K L &c.; cæteris ut ſupra (I) nominibus ſervatis, poſitoque intervallo $HI=l=1$, erunt $HK=m=2$, $HL=n=3$, $HM=r=4$, &c & perpendiculorum differentiæ per intervalla, per intervalla bina, terna quaterna & diviſæ erunt (III, IV, V, VI) quæ ſecuntur.

Differentiæ primæ per intervalla diviſæ, $b=a-f$, $2b=f-g$, $3b=g-h$, $4b=h+k$.

Differentiæ ſecundæ per intervalla bina diviſæ, $c=\frac{a-2f+g}{2}$, $2c=\frac{f-2g+h}{2}$, $3c=\frac{g-2h-k}{2}$.

Differentiæ tertiæ per intervalla terna diviſæ, $d=\frac{a-3f+3g-h}{6}$, $2d=\frac{f-3g+3h+k}{6}$.

Differentiæ quartæ per intervalla quaterna diviſæ, $e=\frac{a-4f+6g-4h-k}{24}$.

XII. Ponantur $a-f=\beta$, $a-2f+g=\varkappa$, $a-3f+3g-h=\delta$, $a-4f+6g-4h-k=\varepsilon$; & erit $b=\beta$, $c=\frac{\varkappa}{2}$, $d=\frac{\delta}{6}$, $e=\frac{\varepsilon}{24}$. Quare ſi hi valores ſubſtituantur in æquatione ſupra (VIII.) inventa, $y=a+b.(-x)+c.(-x\times l-x)+d.(-x\times l-x\times m-x)+e.(-x\times l-x\times m-x\times n-x)+$ &c., illa in hanc mutabitur $y=a+\beta(-x)+\frac{\varkappa(-x\times 1-x)}{2}+\frac{\delta.(-x\times 1-x\times 2-x)}{2\times 3}+\frac{\varepsilon.(-x\times 1-x\times 2-x\times 3-x)}{2\times 3\times 4}+$ &c. 77

Quapropter ſi in hâc ultimâ æquatione dicantur $-HS$, ſeu $-x=p$; $\frac{1}{2}p$ in $-IS$, ſeu $\frac{-x\times 1-x}{2}=q$; $\frac{1}{3}q$ in $+SK$, ſeu $\frac{-x\times 1-x\times 2-x}{2\times 3}=r$; $\frac{1}{4}r$ in $+SL$, ſeu $\frac{-x\times 1-x\times 2-x\times 3-x}{2\times 3\times 4}=s$; & ita pergatur ad uſque perpendiculum penultimum, erit $y=a+\beta p+\varkappa q+\delta r+\varepsilon s+$ &c. ut Newtonus in caſu primo Lemmatis V. lib. III. determinavit. De hoc problemate Lector conſulat clariſſimos auctores Hermannum in appendice ad phoronomiam, Craigium in tractatu de calculo fluentium, maximè vero Stirling in libro de interpolatione ſeriemum, in quo totam hanc materiam copiose & ſagaciter explicat.

DE MOTU CORPORUM.

SECTIO II.

De motu corporum quibus reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si corpori reſiſtitur in velocitatis ratione duplicatâ, & idem ſolâ vi inſitâ per medium ſimilare movetur; tempora verò ſumantur in progreſſione geometricâ à minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio ſingulorum temporum ſunt in eâdem progreſſione geometricâ inversè; & quod ſpatia ſunt æqualia, quæ ſingulis temporibus deſcribuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis eſt reſiſtentia medii, & (d) reſiſtentiæ proportionale eſt decrementum velocitatis; ſi tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum ſingulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in rectâ CD ſumptæ, & erigantur perpendicula AB, Kk, Ll, Mm, &c. hyperbolæ $Bklm G$, centro C aſymptotis rectangulis CD, CH deſcriptæ, occurrentia in B, k, l, m, &c. & (e) erit AB ad Kk ut CK ad CA, & diviſim $AB-Kk$ ad Kk ut AK ad CA, & viciſſim $AB-Kk$ ad AK ut Kk ad CA, ideoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde, (f) cum AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB-Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt AB & Kk, ut ABq. Et ſimili argumento erunt $Kk-Ll$, $Ll-Mm$, &c. ut Kk *quad.* Ll *quad.* &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm quadrata ſunt ut earundem differentiæ; & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipſarum dif-

(d) * *Et reſiſtentiæ proportionale eſt decrementum velocitatis*; dato nempe temporis momento, (1. 15.).

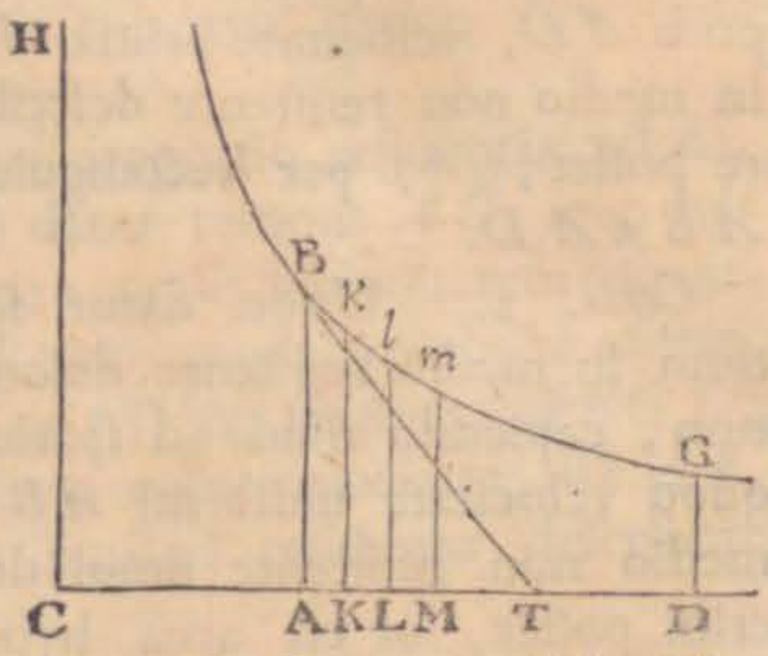
(e) * *Et erit AB ad Kk ut CK ad CA*, (per theor. 4. de hyp.).

(f) * *Undè cum AK, & AB×CA dentur.* AK quidem (ex hyp. tempus enim in particulas innumeras æquales dividitur quæ per lineas æquales AK, KL &c. exponuntur) & AB×CA (per theor. 4. de hyp.).

* *Si-*

differentiæ, (g) ſimilis erit ambarum progreſſio. (h) Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ his lineis deſcriptæ ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB, & velocitas initio ſecundi KL per lineam Kk, & longitudo primo tempore deſcripta per aream $AKkB$; velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes Ll, Mm, &c. & longitudines deſcriptæ per areas Kl, Lm, &c. Et compoſitè, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum AM, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum $AMmB$. Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM, &c. ut ſint CA, CK, CL, CM, &c. in progreſſione geometricâ; & (i) erunt partes illæ in eâdem progreſſione, & (k) velocitates AB, Kk, Ll, Mm, &c. in progreſſione eâdem inversâ, (l) atque ſpatia deſcripta Ak, Kl, Lm, &c. æqualia. *Q. E. D.*

LIBER SECUND. SECTIO II. PROP V. THEOR. III.



Corol. 1. Patet ergo quod, ſi tempus exponatur per aſymptoti partem quamvis AD, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam AB; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam DG, & ſpatium totum deſcriptum per aream hyperbolicam adjacentem $ABGD$; necnon ſpatium, quod

(g) * *Similis erit ambarum progreſſio*; & ideo velocitates ſingulis temporum æqualium AK, KI, LM &c. initiis exponi poſſunt per lineas AB, Kk, Ll &c.

(h) * *Quo demonſtrato, conſequens eſt ut areæ* ABKk, KklL, LlmM, &c. *ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus* AB, Kk, Ll &c., *temporculis* AK, KL, LM &c., *deſcribuntur* (14).

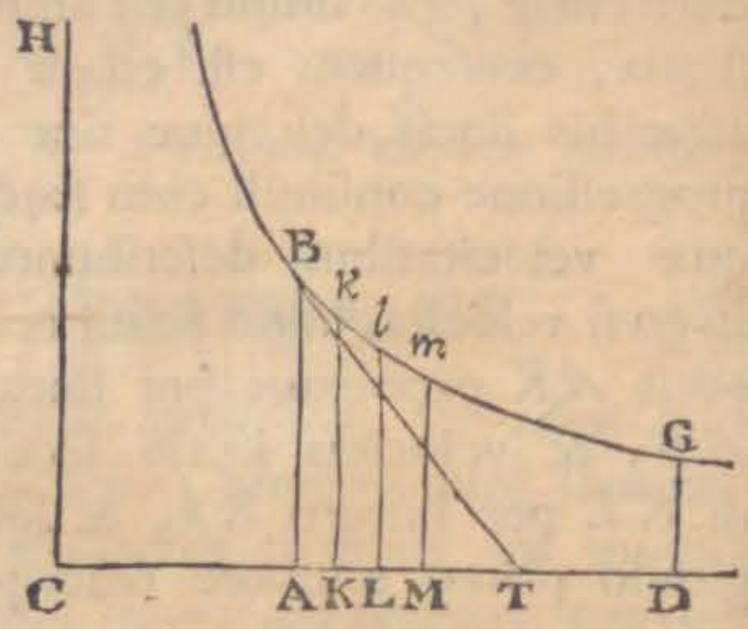
78. (i) * *Et erunt partes illæ* AK, KL, LN, &c. quæ ſunt differentiæ linearum CA, CK, CL, CM, &c. in eâdem progreſſione. Differentiæ enim cujuſvis progreſſionis geometricæ, ſunt in eâdem progreſſione geometricâ. Nam cum ſit CA:CK = CK:CL = CL:CN &c., erit auferendo antecedentia ex antecedentibus & conſequentia ex conſequentibus CA:CK = AK:KL = KL:LM &c. 78.

(k) * *Et velocitates AB, Kk, Ll, Mm &c., in progreſſione eâdem inversâ.* Siquidem (per theor. 4. de hyp.) eſt AB ut CA, inversè, Kk ut CK inversè.

(l) * *Atque ſpatia deſcripta*, ABkK, KklL, LlmM &c., æqualia (380. lib. 1).

DE MOTU CORPORUM.

quod corpus aliquod eodem tempore AD, velocitate primâ AB, in medio non reſiſtente deſcribere poſſet, (m) per rectangulum $AB \times AD$.



Corol. 2. Unde datur ſpatium in medio reſiſtente deſcriptum, capiendo illud ad ſpatium quod velocitate uniformi AB in medio non reſiſtente ſimul deſcribi poſſet, ut eſt area hyperbolica $ABGD$ ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 3. Datur etiam reſiſtentia medii, ſtatuendo eam ipſo motus initio æqualem eſſe vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore AC, in medio non reſiſtente, generare poſſet velocitatem AB. Nam ſi ducatur BT quæ tangat hyperbolam in B, & occurrat aſymptoto in T; (n) recta AT æqualis erit ipſi AC, & (o) tempus exponet, quo reſiſtentia prima uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem totam AB.

Co-

79. (m) * *Per rectangulum* A B × A D. Si enim velocitas A B, manet eadem, tempore A K, deſcribet corpus ſpatium AB×AK, dum in medio reſiſtente deſcribit ſpatium A B k K, tempore K L velocitate A B deſcribet ſpatium A B × K L, dum in medio reſiſtente deſcribit ſpatium K k l L, & ità deinceps (14. lib. 1.); Quare tempore A M velocitate primâ A B in medio non reſiſtente deſcribet corpus ſpatium A B × (A K + K L + L M) = A B × A M; & tempore A D, ſpatium A B × A D. Et quoniam ipſo motûs initio, eſt area A B k K, æqualis rectangulo A B × K k, atque ſpatia in medio reſiſtente & in medio non reſiſtente deſcripta temporis momento A K, ſunt etiam æqualia, liquet ſpatium in medio reſiſtente deſcriptum tempore quovis A D, eſſe ad ſpatium eodem tempore in medio non reſiſtente deſcriptum velocitate A B, ut eſt area hyperbolica A B G D ad rectangulum A B × A D.

80. Ex corollario primo ſequitur tempore infinito ſpatium infinitum deſcribi in medio quod reſiſtit in ratione quadrati velocitatis. Non enim evaneſcet G D, hoc eſt velocitas tota extincta non erit niſi infinita evadat recta A D, hoc eſt niſi tempus motus ſit infinitum tuncque infinita ſit area A B G D, ſeu ſpatium deſcriptum eſt infinitum.

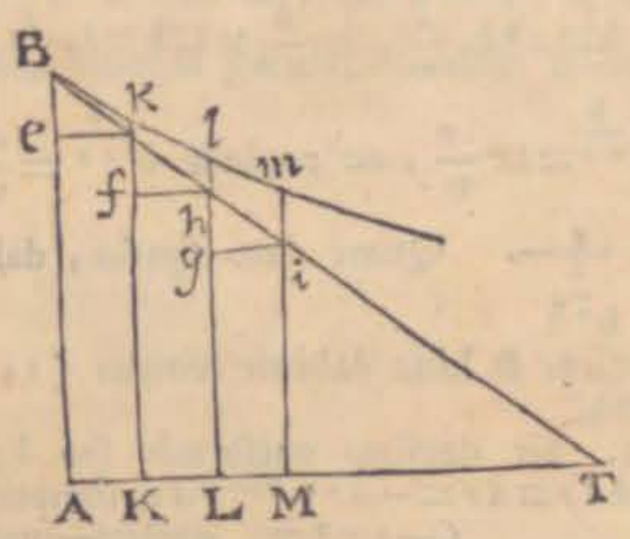
(n) * *Recta AT æqualis erit ipſi AC.* (Per theor. 1. de Hyp.)

(o) * *Et tempus exponet.* Ordinatæ K k, L l, M m, &c. rectæ B T, occurrant in k, h, i, &c. ex punctis k, h, i, demiſſa ſint ad A B, K k, L l, &c. perpendicula K e, h f, i g, &c. & ſumptis temporibus quam minimis A k, k L, L M, æqualibus erunt B e, k f, h g æquales, ſed reſiſtentia prima temporis momento A K, tollit velocitatem A B — K k, ſeu B e, & eadem uniformiter continuata temporis

mo-

Corol. 4. (P) Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et vice versâ, si datur proportio resistentiæ ad datam quamvis vim centripetam; (†) datur tempus AC, quo vis centripeta resistentiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis AB: & inde datur punctum B per quod hyperbola asymptotis CH, CD, describi debet; ut (q) & spatium $ABGD$, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illâ AB, tempore quovis AD, in medio similari resistente describere potest.



momento K L, sive A K, tolleret etiam velocitatem k f = B e, & temporis momento L M, seu A K, velocitatem g h = B e, atque ità deinceps; Quare resistentia prima uniformiter continuata tempore A T tolleret velocitatem totam A B, quia A B æqualis est omnibus differentiis B e, k f, g h, &c. usque ad T; vis autem centripeta quæ tempore A K, producit velocitatem B e, æqualis est vi quæ eodem temporis momento eandem velocitatem B e extinguit, seu æqualis est resistentiæ primæ, & illa vis centripeta uniformis manens toto tempore A T, totam velocitatem A B, produceret, quam resistentia prima uniformis manens eodem tempore extingueret; ergò resistentia prima æqualis est vi uniformi centripetæ quæ in cadente corpore, tempore A T sive A C, in medio non resistente generare posset velocitatem A B. 80.

(P) * *Et indè datur etiam proportio.* Sunt enim vires centripetæ uniformes ut velocitates quas dato tempore producunt (13. lib. 1.) & ideò erit resistentia prima ad gravitatem ut velocitas quam producit vis centripeta uniformis cui resistentia illa æqualis supponi potest, ad velocitatem quam vis gravitatis eodem tempore generat.

(†) *Datur tempus AC quo vis resistentiæ æqualis generare possit velocitatem AB.* Si enim detur vis quædam centripeta, dabitur tempus quo velocitatem A B generare potest: Tempora autem quibus diversæ vires centripetæ eamdem velocitatem generare possunt, sunt inversè ut illæ vires; Ergo si datur ratio vis centripetæ cui resistentia est æqualis ad aliam vim datam, dabitur ratio temporis quo hæc vis velocitatem A B generare potest ad tempus quo vis cui resistentia est æqualis eam velocitatem generat, hoc est datur tempus A C.

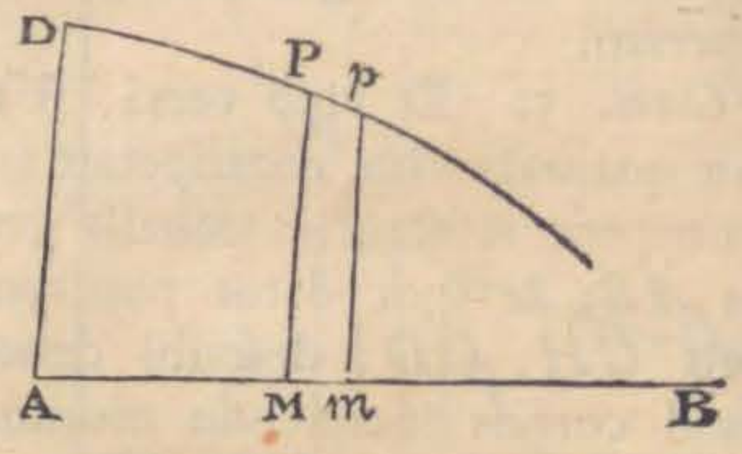
(q) * *Ut & spatium A B G D.* His enim datis, datur tùm area A B G D, tùm rectangulum A B × A D, tùm spatium quod corpus tempore A D, cum datâ velocitate uniformi A B, describeret in medio non resistente, ideóque cum sit A B × A D, ad A B G D, ut spatium tempore A D & velocitate A B in medio non resistente descriptum ad spatium eodem tempore descriptum in medio resistente (per cor. 2.) hoc spatium dabitur.

DE MOTU CORPORUM.

81. Scholium. Hujus propositionis constructio ad Logarithmicam reduci facilè posset, sed id relinquimus lectoris arbitrio, generalis problematis quod sequitur, solutionem analyticam traditurì ut inventionis fons ipse aperiatur.

PROBLEMA.

82. Definire motum corporis solâ vi insitâ lati in medio quod resistit in ratione compositâ ex simplici ratione densitatis medii, & quâvis ratione multiplicatâ celeritatis mobilis.



E' loco A egrediatur corpus cum velocitate datâ c & tempore t describat rectam AM $=s$, sitque ejus velocitas in M $=v$ densitas medii in eodem loco $=k$, & resistentia r erit (17.) $r\,ds=-v\,dv$. Ponatur resistentia $r=\frac{k\,v^n}{a^n}$, sitque a quantitas data, & habebitur $\frac{k\,v^n\,ds}{a^n}=-v\,dv$, & hinc $k\,ds=-a^n v^{1-n}\,dv$. Per punctum M, erigatur ad AM, perpendiculum MP quod exponat medii densitatem k in loco M, sitque DPp curva quam punctum P perpetuò tangit, & erecto altero perpendiculo mp priori MP infinitè propinquo ut sit Mm $=ds$, erit elementum MPpm $=k\,ds=-a^n v^{1-n}\,dv$, sumptisque fluentibus, area ADPM $=\frac{Q-a^n v^{2-n}}{2-n}$; Quia verò evanescente areâ ADPM, evanescit quoque s, & fit $v=c$, erit $o=\frac{Q-a^n c^{2-n}}{2-n}$, & ideo constans $Q=a^n c^{2-n}$, atque ità ADPM $=\frac{a^n c^{2-n}-a^n v^{2-n}}{2-n}$. Porrò si densitas k, seu PM, est ut functio quævis spatii descripti s sive AM, poterit curva DPp describi, ac proindè in hâc Hypothesi dato spatio descripto, dabitur per quadraturam areæ ADPM, velocitas, & contrà datâ velocitate dabitur area ADPM, & hinc dabitur spatium descriptum AM, indè etiam (14. lib. 1.) datâ velocitate aut spatio dabitur tempus t, & contrà.

83. Si $n=2$, fit $2-n=o$, & ideò resumenda est æquatio MPpm $=-a^n v^{1-n}\,dv=-\frac{a^2\,dv}{v}$, quæ, sumptis fluentibus, abit in hanc ADPM $=Q-a^2 L.\,v$, & quia positâ areâ ADPM $=o$, fit $v=c$, erit $Q=a^2 L.\,c$, ideoque ADPM $=a^2 L.\,c-a^2 L.\,v=a^2 L.\frac{c}{v}$. Sit ADPM $=b$, logarithmus numeri $h=1$, seu $L.\,h=1$, erit $b\,L.\,h=a^2 L.\frac{c}{v}$, & $\frac{b}{a^2}\times L.\,h=L.\frac{c}{v}$, seu $L.\,h^{\frac{b}{a^2}}=L.\frac{c}{v}$, ac proindè $h^{\frac{b}{a^2}}=\frac{c}{v}$, & $v=\frac{c}{h^{\frac{b}{a^2}}}$. Quarè dato spatio, dabitur velocitas & hinc dabitur tempus (14) & contrà.

84. Sit densitas uniformis seu $k=1$, erit $k\,ds=ds=-a^n v^{1-n}\,dv$, sumptisque fluentibus $s=\frac{Q-a^n v^{2-n}}{2-n}=\frac{a^n c^{2-n}-a^n v^{2-n}}{2-n}$. Undè reperitur $v=\frac{[a^n c^{2-n}+(n-2)\,s]^{\frac{1}{2-n}}}{a^{\frac{n}{2-n}}}$.

Invenitur tempus per formulam $dt=\frac{ds}{v}=-\frac{a^n v^{1-n}\,dv}{v}=a^n\,v^{-n}\,dv$. Et sumptis fluentibus, fit $t=\frac{Q-a^n v^{1-n}}{1-n}=\frac{a^n c^{1-n}-a^n v^{1-n}}{1-n}$, quia posito $t=o$, fit $v=c$, & proindè $Q=a^n c^{1-n}$.

85. Si $k=1$, & $n=1$, hoc est, si densitas est uniformis & resistentia ut velocitas erit (84) $s=ac-av$; & quia (ibid.) $dt=-a^n v^{-n}\,dv=-\frac{a\,dv}{v}$, erit $t=Q$

$-a$.

$-a\,L.\,v = a\,L.\,c - a\,L.\,v = a\,L.\,\frac{c}{v}$, quod posito tempore $t=0$, fiat $v=c$ & proindè $Q=a\,L.\,c$.

86. Si $k=1$, & $n=2$, erit (84) $t=\frac{a^2c-a^2v}{cv}$, & quia (ibid.) $ds=-a^nv^{1-n}dv=-\frac{a^2dv}{v}$, erit $s=Q-a^2\,L.\,v=a^2\,L.\,c-a^2\,L.\,v=a^2\,L.\,\frac{c}{v}$.

87. Si in æquatione spatii & velocitatis suprà inventâ, velocitas v, supponatur $=0$, erit $s=\frac{a^nc^{2-n}}{2-n}$, si n est numerus binario minor, at erit $s=\frac{a^nc^{n-2}-a^nv^{n-2}}{(n-2)c^{n-2}v^{n-2}}=\frac{a^n}{(n-2)0}=\infty$, si n est numerus binario major; & (86) erit $s=a^2L\frac{c}{0}=\infty$, ubi $n=2$. Quarè si n est numerus positivus binario minor, descripto spatio aliquo finito velocitas omnis extinguitur; at si n binario æqualis est vel major, spatium infinitum conficitur, priusquam velocitas evanescat.

88. Si in æquationibus temporis & velocitatis velocitas v evadat $=0$, erit (84) $t=\frac{a^nc^{1-n}}{1-n}$, si n est numerus unitate minor, at erit $t=\infty$, si n est unitate major, & (85) $t=a\,L.\,\frac{c}{0}=\infty$, ubi $n=1$. Quapropter si numerus positivus n est unitate minor, velocitas tempore finito extinguitur, spatio etiam finito descripto (87). Si n est unitati æqualis vel ipsâ major, velocitas nonnisi tempore infinito extingui potest, & spatium finitum est, si n est numerus binario minor, infinitum verò, si n binario æqualis vel major (87.).

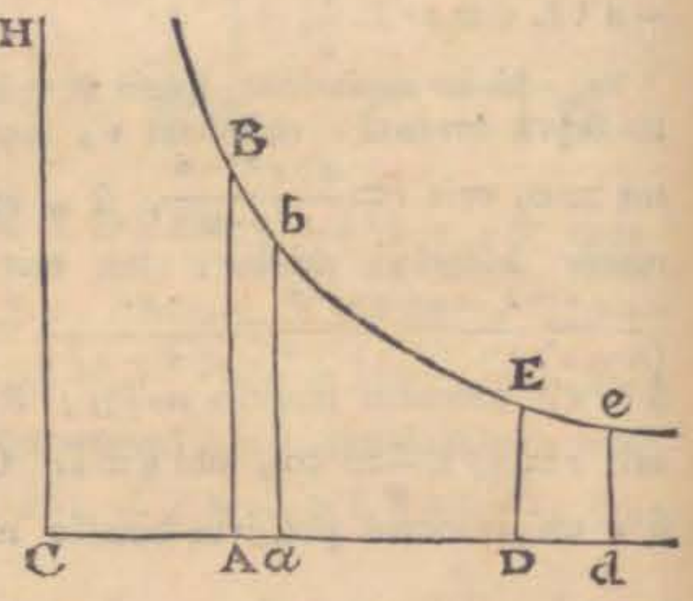
88.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora ſphærica homogenea & æqualia, reſiſtentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita, & ſolis viribus inſitis incitata, temporibus quæ ſunt reciprocè ut velocitates ſub initio, deſcribunt ſemper æqualia ſpatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.

Aſymptotis rectangulis *CD*, *CH* deſcriptâ hyperbolâ quâvis *BbEe* ſecante perpendicula *AB*, *ab*, *DE*, *de*, in *B*, *b*, *E*, *e*, (r) exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB*, *DE*, & tempora per lineas *Aa*, *Dd*. Eſt ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per hypotheſin) *DE* ad *AB*, & ita (ex (t) naturâ hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. (u) Ergo areæ *ABba*, *DEed*, hoc eſt, ſpatia deſcripta æquantur inter ſe, & velocitates primæ *AB*, *DE* ſunt ultimis *ab*, *de*, & propterea dividendo partibus etiam ſuis amiſſis *AB*−*ab*, *DE*−*de* proportionales. *Q. E. D.*



PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora ſphærica quibus reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum, temporibus, quæ ſunt ut motus primi directè & reſiſtentiæ primæ inversè, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

(x) Namque motuum partes amiſſæ ſunt ut reſiſtentiæ &

(r) * *Exponantur velocitates initiales &c.* Cum enim corpora duo ſimilia homogenea & æqualia ſupponantur, eorum motus conſiderari poſſunt tanquam motus unius ejuſdemque corporis variis celeritatis gradibus acti (ut in prop. 5.) ideóque (per coroll. 1. prop. 5.) velocitates initiales exponi poſſunt per lineas A B, D E, tempora per lineas A a, D d, velocitates in fine illorum temporum reſiduæ per lineas a b, d e, & ſpatia his temporibus deſcripta per areas Hyperbolicas A B b a, D E e d.

(t) * *Ex naturâ Hyperbolæ.* (Per theor. 4. de Hyperb.)

(u) * *Ergò areæ ABba, DEed,* (378. Lib. 1.)

(x) * *Namque motuum partes amiſſæ &c.* (2). * *Ideog*

tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & tempus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut motus directè & reſiſtentia inversè. Quare temporum particulis in eâ ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, (y) ideoque retinebunt velocitates velocitatibus ſuis primis ſemper proportionales. Et (z) ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia, quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q. E. D.*

(a) *Coroll.* 1. Igitur ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in duplicatâ ratione diametrorum: globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportio-

(y) * *Ideoque retinebunt velocitates* in ratione primâ, ob datas corporum maſſas (6. lib 1.).

(z) * *Et ob datam velocitatum rationem* (12.).

89. Tota propoſitionis hujus demonſtratio per Analyſim hoc modo exponitur. Sit globi cujuſvis maſſa m, velocitas data initio motûs c, in fine temporis t ſit v, reſiſtentia data initio motûs r, & quia ejuſdem corporis reſiſtentiæ in diverſis locis ſunt ut velocitatum quadrata (per Hyp.) erit cc, ad vv, ut r, ad reſiſtentiam ejuſ tempore t, quæ proindè erit $\frac{rvv}{cc}$. Sed (2) reſiſtentia $\frac{rvv}{cc}$ eſt ut motûs decrementum $-mdv$ directè & temporis momentum dt, inversè, hoc eſt, $\frac{rvv}{cc} = -\frac{mdv}{dt}$, & hinc $dt = -\frac{mccdv}{rvv}$, ſumptiſque fluentibus $t = Q + \frac{mcc}{rv}$. Ponatur $t = 0$, & fiet $v = c$, adeóque $Q = -\frac{mc}{r}$, quo valore ſubſtituto fit $t = \frac{mcc - mcv}{rv}$. Capiatur tempus t, ut motus primus mc, directe & reſiſtentia prima r, inversè, hoc eſt s ut $\frac{mc}{r}$, & erit $\frac{mc}{r}$ ut $\frac{mcc - mcv}{rv}$; ideóque mcv, ut $mcc - mcv$, & dividendo per c, mv ut $mc - mv$; & compoſite fiet mc, ut $mc - mv$, id eſt, motus amiſſus $mc - mv$ ut motus primus mc; & hinc ob datam maſſam m, erit etiam c, ut $c - v$, id eſt, velocitas amiſſa $c - v$, ut velocitas prima c; inde etiam erit c, ad $c - c + v$, ſeu v, hoc eſt velocitas prima c, ad reſiduam v, in ratione datâ. Jam ſi ſpatium tempore t deſcriptum dicatur s, erit (13) $ds = vdt$, & quia v eſt ut data c, erit ds ut cdt, ſumptiſque fluentibus ob datam c, fiet s ut ct. Q. E. D. 89.

90. Quoniam ſpatium s eſt ut ct, & t ut $\frac{mc}{r}$, erit etiam s ut $\frac{mcc}{r}$; globi cujus maſſa m diameter ſit D, & datâ globi denſitate erit maſſa m, ut volumen (2. lib. 1.) hoc eſt, ut diametri cubus D^3; Quare erit s ut $\frac{D^3cc}{r}$. Si præterea datâ velocitate c, reſiſtentia r eſt ut diametri D, dignitas cujus index n, hoc eſt r ut D^n, & proinde velocitate non datâ, reſiſtentia r, ut $D^n cc$, erit s ut $\frac{D^3cc}{D^n cc}$, ſeu ut D^{3-n}. Ex quibus patent corollaria quæ ſequuntur.

(a) * *Cor.* 1. Nam in Hypotheſi corollarii hujus eſt $n = 2$, adeóque s ut D.

tionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujuſque erit ut ejus velocitas & maſſa conjunctim, id eſt, ut velocitas & cubus diametri; reſiſtentia (per hypotheſin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc propoſitionem) eſt in ratione priore directè & ratione poſteriore inversè, id eſt, ut diameter directè & velocitas inversè; ideoque ſpatium, tempori & velocitati proportionale, eſt ut diameter.

([b]) *Corol.* 2. Si æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione ſeſquiplicatâ diametrorum: globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquiplicatâ ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione dignitatis cujuſcunque diametrorum: ſpatia quibus globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & ſi reſiſtentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, ſint ut D^n & E^n: ſpatia quibus globi, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Et propterea globi homogenei deſcribendo ſpatia ipſis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eâdem ratione ad invicem ac ſub initio.

([c]) *Corol.* 4. Quod ſi globi non ſint homogenei, ſpatium à globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim, ſub pari velocitate, major eſt in ratione denſitatis, & tempus (per hanc propoſitionem) augetur

(b) * *Cor.* 2. In hypotheſi corollarii hujus eſt $n \frac{3}{2}$, ideóque s ut $D^{3-\frac{3}{2}}$, ſeu ut $D^{\frac{3}{2}}$.

(c) * *Cor.* 4. Sit globi m denſitas δ, adeóque (2. lib. 1.) maſſa m ut δD^3, & hinc (90) s ut $\frac{\delta D^3 cc}{r}$. Quarè ſi ponatur reſiſtentia r, ut $D^n cc$, erit s ut δD^{3-n}, hoc eſt, ſpatium s, quod datâ denſitate δ, erat ut D^{3-n}, augeri debet in ratione denſitatis δ.

* *Cor.*

tur in ratione motus directè, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

(d) *Corol.* 5. Et ſi globi moveantur in mediis diverſis; ſpatium in medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (per hanc propoſitionem) diminuetur in ratione reſiſtentiæ auctæ, & ſpatium in ratione temporis.

(e) LEMMA II.

Momentum genitæ æquatur momentis laterum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coëfficientia continuè ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuſcunque in arithmeticâ per multiplicationem, diviſionem, & extractionem radicum; in geometriâ per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, ſine additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates ſunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & ſimiles. Has quantitates, ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes, hic conſidero; & earum incrementa vel decrementa momentanea ſub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis additiciis ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis ſeu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non ſunt momenta, ſed quantitates ipſæ ex momentis genitæ. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finitarum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc lemmate magnitudo momentorum: ſed prima naſcentium proportio.

(d) * *Cor.* 5. Reſiſtentia r, quæ antè erat ut $D^n c c$, augeatur in ratione quâvis a, ſeu fiat r ut $a D^n c c$, & quia s eſt ut $\frac{\delta D^3 c c}{r}$, (cor. 4.) fiet s ut $\frac{\delta D^3 c c}{a D^n c c}$, ſeu ut $\frac{\delta D^{3-n}}{a}$, ſpatium igitur diminuendum eſt in ratione majoris reſiſtentiæ. 90.

(e) * *Lem.* 2. Totum iſtud Lemma num. 137. & ſequentibus Lib 1. fuse expoſitum videat lector.

DE MOTU CORPORUM.

tio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. (f) Lateris autem cujusque generantis coefficiens est quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur sensus (g) lemmatis est, ut, si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrescentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB+bA$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC+bAC+cAB$: & genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ respectivè. Et generaliter, ut dignitatis cujuscunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB+bA^2$; & genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2+4bA^3B^3C^2+2cA^3B^4C$; & genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ sive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2}-2bA^3B^{-3}$: & sic in cæteris. Demonstratur vero lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi

(f) *Lateris autem.* Sic lateris x, in quantitate genitâ $x^n y^m$ positi, coefficiens est $\frac{x^n y^m}{x}$, seu $x^{n-1}y^m$.

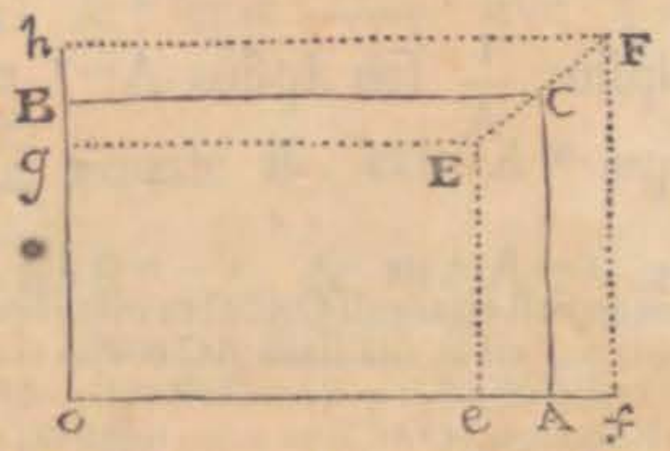
(g) * *Sensus Lemmatis est, ut, si quantitatum* A, B, C *momenta dicantur* a, b, c, ità ut dum A fit $A+a$, B evadat $B+b$, C evadat $C+c$ &c., *momentum vel mutatio geniti rectanguli AB, erit* $aB+bA$ &c., vel si loco litterarum A, B, C, &c. utamur litteris minusculis x, y, z &c. quibus variabiles quantitates consuevimus significare, & loco a, b, c, &c. scribamus dx, dy, dz &c. sensus Lemmatis est momentum seu fluxionem rectanguli xy, esse $ydx+xdy$, fluxionem solidi xyz, esse $yzdx+xzdy+xydz$, & genitarum quantitatum x^2, x^3, x^4, $x^{\frac{1}{2}}$ &c. momenta esse $2xdx$, $3x^2dx$, $4x^3dx$, $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ &c. respective; & genitæ $x^n y^m$, momentum esse, $ny^m x^{n-1}dx+mx^n y^{m-1}dy$ &c.

* Et

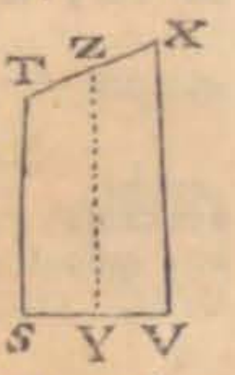
ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A-\frac{1}{2}a$ in $B-\frac{1}{2}b$, ſeu $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta ſunt, evadit $A+\frac{1}{2}a$ in $B+\frac{1}{2}b$ ſeu $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo ſubducatur rectangulum prius, & (h) manebit exceſſus $aB+bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB+bA$. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Ponatur AB ſemper æquale G, & contenti ABC ſeu GC momentum (per caſ. 1.) erit $gC+cG$, id eſt (ſi pro G & g ſcribantur AB & $aB+bA$) $aBC+bAC+c$

$AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA-\frac{1}{4}ab=aB+bA$. 9a.



Ut verò probetur ſummam Trapeziorum EFef & EFgh æqualem eſſe momento Rectanguli OACB, obſervandum primo. Quod ſi lineæ quævis ST, VX, utcumque inæquales, in lineam SV ſint perpendiculares jungaturque TX, & in medio lineæ SV erigatur perpendicularis YZ, erit Trapezium STXV æquale Rectangulo SV×YZ: Itaque Trapezium EFef erit æquale Rectangulo AC×ef, & Trapezium EFgh æquale Rectangulo BC×gh. Præterea quoniam ef & gh ſunt momentis linearum OA, OB proportionales, hoc eſt, proportionales velocitatibus quibus lineæ OA, OE creſcunt, ſive, quod idem eſt, celeritatibus quibus, dum Rectangulum OACB creſcit, lineæ AC, BC antrorſum feruntur, Rectangula AC×ef & BC×gh, erunt ut lineæ illæ AC, BC & earum velocitates conjunctim.



Mutatio autem geniti Rectanguli OACB proportionalis eſt cauſæ quæ eam producit, ea autem cauſa eſt motus linearum variabilium AC, BC quo antrorſum feruntur dum lineæ OA, OB creſcunt, & quamvis dum illæ lineæ AC, BC moventur, interim lineæ OA, OB creſcant, incrementi hujus nulla habenda eſt ratio dum Rectanguli fluxionem ſive incrementum naſcens conſideramus, etenim in ipſo hujus incrementi naſcenti, ortu illæ productiones linearum OA, OB nihil plane ſunt, & cum primum ſunt aliquid jam aliæ AC, BC prioribus majores aſſumuntur, ergo momentum Rectanguli OACB ſive ejus mutationis momenta-

(h) * *Et manebit exceſſus* $aB+bA$.

1ᵘˢ. Caſus. Sit Rectangulum OABC ſub duabus variabilibus OA, OB continuè creſcentibus; ſumantur hinc inde ab A partes æquales Ae, Af, & á B partes æquales Bg, Bh, ita ut, ſi a & b ſint quantitates momentis linearum OA, OB proportionales ſit $ef=a$, & $gh=b$: Compleantur Rectangula OgEe, OhFf, ducatur FE, quæ tranſibit per C punctum concurſus linearum AC, BC (ob parallelas, & lineas ef & gh ſimiliter, nempe bifariam, ſectas in A & B). Dico quod ſumma Trapeziorum EFef & EFgh æqualis erit momento Rectanguli OACB; obtinetur verò Trapeziorum ſumma, ſumendo differentiam Rectangulorum OeEG, OfFH, quæ eſt $Of\times Oh-Oe\times Og$, ſive $\overline{OA+Af}\times\overline{OB+Bh}-\overline{OA-Ae}\times\overline{OB-Bg}$, & vocando OA, A; OB, B; $Af=Ae=\frac{1}{2}a$, $Bh=Bg=\frac{1}{2}b$ differentia Rect. erit $\overline{A+\frac{1}{2}a}\times\overline{B+\frac{1}{2}b}-\overline{A-\frac{1}{2}a}\times\overline{B-\frac{1}{2}b}=AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab-$

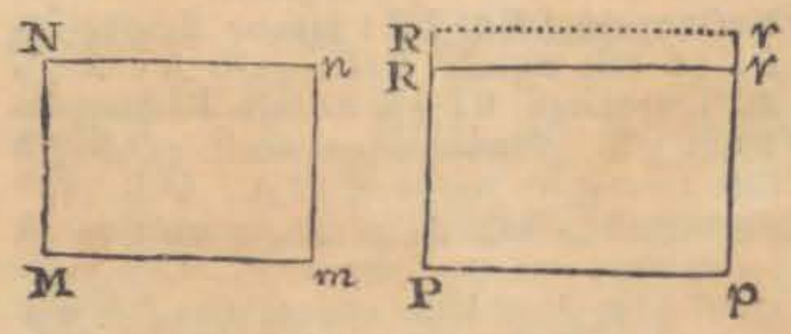
DE MOTU CORPORUM.

$+c$ A B. Et par est ratio contenti sub lateribus quotcunque. *Q. E. D.*

Cas. 3. Ponantur latera A, B, C sibi mutuo semper æqualia; & ipsius A^2, id est rectanguli A B, momentum $aB+bA$ erit $2aA$, ipsius autem A^3, id est contenti A B C, momentum $aBC+bAC+cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunque A^n est naA^{n-1}. *Q. E. D.*

Cas. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A, unâ cum $\frac{1}{A}$ ducto in a, (i) erit momentum ipsius 1, id est, nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$ seu ipsius A^{-1} est $\frac{-a}{\circ}$

nea causa, ex lineis AC & BC & velocitatibus quibuscum feruntur determinanda est.



Sint verò Rectangula M N m n, P R p r, quorum lineæ M N, P R sint æquales, concipiantur aliæ lineæ hisce etiam æquales quæ ab MN & PR profectæ motu uniformi & parallelo secundum lineas M m & P p ferantur, ita ut eodem tempore ad m n & p r perveniant, manifestum est (per 1. 6i. Elem.) areas M n, P r fore ut lineæ M m P p, & pariter avelocitates linearum ab MN & P R profectarum in eadem fore ratione ideoque areas Mn, P r, fore in ratione earum velocitatum. Quod si lineæ NM, PR sint inæquales, areæ erunt ut lineæ illæ MN, PR & earum velocitates conjunctim, & quævis incrementa Rectangulorum NMmn, PRpr æquali tempore facta in eadem ratione erunt, ideoque & nascentia incrementa erunt in eâ Ratione. Unde tandem sequitur quod incrementum Rectanguli OABC ex motu lineæ AC natum, est ut illa linea AC & ejus velocitas conjunctim, & quod incrementum ejusdem Rectanguli OACB ex motu lineæ BC natum, est ut illa linea BC & ejus velocitas conjunctim, ideoque totum momentum Rectanguli OACB est summa factorum linearum AC & BC per velocitates quibus feruntur respective ductarum, ideoque ut summa Rectangulorum A C × e f & B C × g h, sive denique ut summa Trapeziorum E F e f, E F g h. Q. E. D.

2us. Casus. Facile hæc applicantur ad eos casus ubi vel ambæ lineæ O A, O B decrescunt, vel una crescente altera decrescit, quippe varianda sunt solummodo signa juxta has hypotheses.

Vide aliam hujus casûs demonstrationem (num. 160. lib. 1.).

(i) * *Erit momentum ipsius* 1, *id est nihil.* Ponatur enim $\frac{1}{A}=B$ & erit $\frac{1}{A}\times A=AB=1$, sed momentum rectanguli AB est $aB+bA$ (per cas. 1.) & momentum constantis 1 nullum est; Quare erit $aB+bA=0$, & hinc $bA=-aB=-\frac{a}{A}$, undè momentum b ipsius B seu $\frac{1}{A}$ est $b=\frac{-a}{A^2}=-a$

$\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n unâ cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ſeu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ ſit A, momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit *a*, per caſ. 3: ideoque momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{1}}$ ſive $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter ſi ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1} ſeu $nbA^{-\frac{m}{n}}$, ideoque $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale *b*, id eſt, æquale momento ipſius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q. E. D.*

Caſ. 6. igitur genitæ cujuſcunque $A^m B^n$ momentum eſt momentum ipſius A^m ductum in B^n, unâ cum momento ipſius B^n ducto in A^m, id eſt $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; idque ſive dignitatum indices *m* & *n* ſint integri numeri vel fracti, ſive affirmativi vel negativi. Et par eſt ratio contenti ſub pluribus dignitatibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in continuè proportionalibus, ſi terminus unus datur, (k) momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem ter-

$=-aA^{-2}$. Similiter ſi ponatur $\frac{1}{A^n}=B$, & ideò $\frac{1}{A^n}\times A^n = A^nB = 1$, erit per caſ. 3. & 1. $naA^{n-1}B + bA^n = 0$ & $bA^n = -naA^{n-1}B = \frac{-naA^{n-1}}{A^n} = \frac{-na}{A}$, atquè adeò *b*, ſeu momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$, erit $\frac{-na}{A^{n+1}}$. Simil modo patent caſus 5. & 6. 90.

(k) * *Momenta terminorum reliquorum.* Quoniam enim *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, ſunt continue proportionales erit $D:C=C:B = \frac{CC}{D} = CCD^{-1}$ & ſimiliter invenitur $A = \frac{C^3}{D^2} = C^3D^{-2}$, $E = \frac{D^2}{C}$, $F = \frac{D^3}{CC}$ &c.

DE MOTU CORPORUM.

termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipſos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continuè proportionales; & ſi detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter ſe ut $-2A-B$, D, $2E$, $3F$.

(l) *Corol.* 2. Et ſi in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum eſt de lateribus rectanguli cujuſcunque dati.

(m) *Corol.* 3. Et ſi ſumma vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciprocè ut latera.

Scholium.

In epiſtolâ quâdam ad D. *J. Collinium* noſtratem 10 Decem. 1672 datâ, cùm deſcripſiſſem methodum tangentium quam ſuſpicabar eandem eſſe cum methodo *Sluſii* tum nondum communicatâ; ſubjunxi: *Hoc eſt unum particulare vel corollarium potius methodi generalis, quæ extendit ſe citra moleſtum ullum calculum, non modo* (n) *ad ducendum tangentes ad quaſvis curvas ſive geometricas ſive mechanicas vel quomodocunque rectas lineas aliaſve curvas reſpicientes, verum etiam ad reſolvendum alia abſtruſiora problematum genera de* (o) *curvitatibus*, (p) *areis, longitudinibus,*

Quare ob datum C, cujus nullum eſt momentum, momenta reliquorum terminorum erunt (per caſ. 3. & 4.) $-2dC^3D-3-dC^2D^{-2}$, d, $\frac{2dD}{C}$, $\frac{3dD^2}{CC}$, & multiplicando ſingulos terminos per $\frac{D}{d}$, manebit proportio terminorum $-2C^3D^{-2}-C^2D^{-1}$, D, $\frac{2D^2}{C}$, $\frac{3D^3}{CC}$, hoc eſt $-2A$, $-B$, D, $2E$, $3F$. Eſt autem 2 numerus intervallorum inter terminum A, & terminum datum C, ſicut & intervallorum inter E & C, 1 intervallum inter B & C, ac inter C & D, & 3, numerus intervallorum inter C & F. Quare patet veritas corollarii.

(l) * *Cor.* 2. Sit $A:B=C:D$, ſeu $BC=AD$ & BC, rectangulum datum erit (per caſ. 1.) $ad+dA=0$, & hinc $aD=-dA$ ideóque $a:-d=A:D$.

(m) * *Cor.* 3. Sit $A^2+B^2=C^2$, & quadratum C^2 ſit datum, erit (per caſ. 3.) $2aA+2bB=0$, ideóque $Aa=-bB$, & proinde $a:-b=B:A$. In iis duobus corollariis neceſſum eſt ut variabili unâ creſcente, decreſcat altera, & idcircò dum momentum unius poſitivum eſt, alterius momentum eſt negativum.

(n) * *Ad ducendum tangentes* (150. 156. lib. 1.) vide Marchionis Hoſpitalii analyſim infinite parvorum, ubi methodus illa tangentium fusè & perſpicuè exponitur.

(o)* *De curvitatibus* (216. lib. 1.).

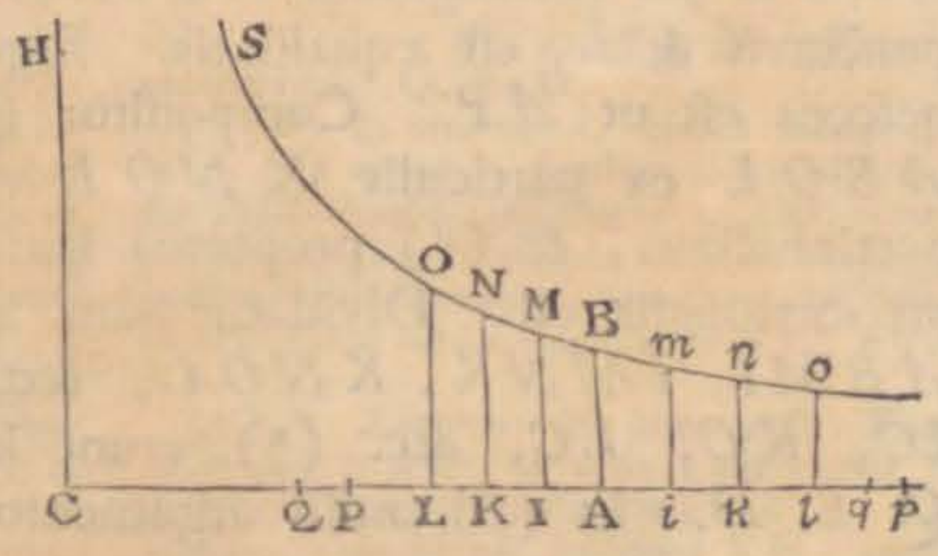
(p) * *Areis, longitudinibus &c.* Hæc plurimis exemplis, tum 1°. tum 2°. libro contentis manifeſta ſunt. Vide tractatum Newtoni de quadraturâ curvarum.

bus, (q) *centris gravitatis curvarum &c. neque* (*quemadmodum* Huddenii *methodus de maximis & minimis*) *ad ſolas reſtringitur æquationes illas quæ quantitatibus ſurdis ſunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri iſti quâ æquationum exegeſin inſtituo reducendo eas ad ſeries infinitas.* Hactenus epiſtola. Et hæc ultima verba ſpectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus ſcripſeram. Methodi vero hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente. (†)

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectâ aſcendat vel deſcendat, & ſpatium totum deſcriptum diſtinguatur in partes æquales, inque principiis ſingularum partium (addendo reſiſtentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus aſcendit, vel ſubducendo ipſam quando corpus deſcendit) inveſtigentur vires abſolutæ; dico quod vires illæ abſolutæ ſunt in progreſſione geometricâ.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; reſiſtentia per lineam indefinitam AK; vis abſoluta in deſcenſu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP, quæ ſit media proportionalis inter AK &



AC,

(q) * *Centris gravitatis* (66. lib. 1.).

(†) In præcedentibus Editionibus iſtud [illegible]um hoc modo ſe habebat.

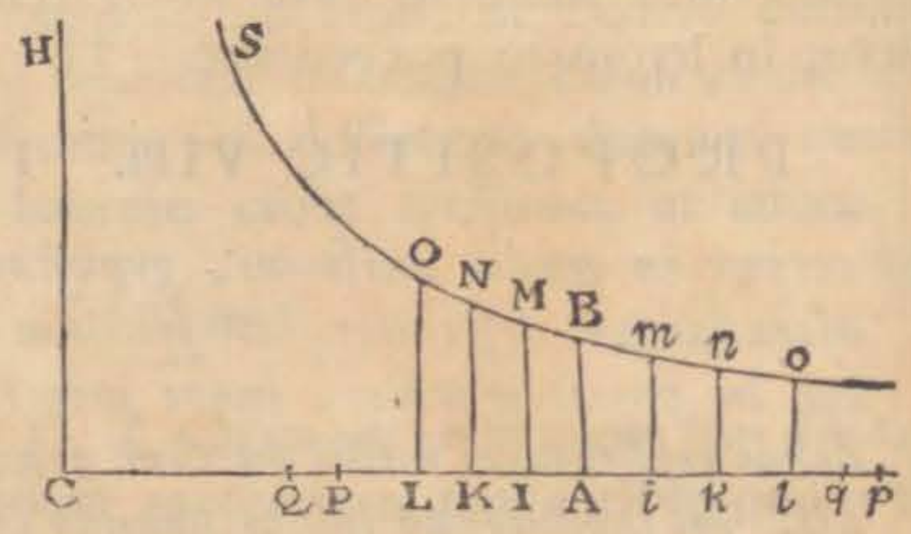
[illegible]is quæ mihi cum Geometra peritiſſimo G. G. Leibnitio annis abhinc decem intercedebant, cum ſignificarem me compotem eſſe methodi determinandi maxima & minima, ducendi Tangentes, & ſimilia peragendi, quæ in terminis ſurdis æque ac in rationalibus procederet, & literis tranſpoſitis hanc ſententiam involventibus. (*Datâ æquatione quotcumq; fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire, & vice versâ*) Eamdem rem; Reſcripſit Vir Clariſſimus ſe in ejuſmodi methodum incidiſſe, cujus methodum ſuam communicavit à meâ valde diſludentem; præterquàm in verborum & notarum formulis, & idea generationis quantitatum. Utriuſque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

Diese vier Worte sind Zusatz der 2ten Ausgabe; die erste brachte das Scholium mit dem Wort formulis (Cf. Biot journal des Savants 1832 p. 140 Die dritte Ausgabe enthält, wie der Text sagt, ein ganz anderes Scholium.

Cf. marginal. Biot fol. 14

DE MOTU CORPORUM.

AC, (r) ideoque in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ; incrementum reſiſtentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam KL, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ; & centro C aſymptotis rectangulis CA, CH deſcribatur hyperbola quævis BNS, erectis perpendiculis AB, KN, LO occurrens in B, N, O. Quoniam AK eſt ut APq, erit hujus momentum KL ut (s) illius momentum $2APQ$: id eſt, ut AP in KC, nam velocitatis incrementum PQ (per motus leg. II.) proportionale eſt vi generanti KC. Componatur ratio ipſius KL cum ratione ipſius KN, & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc eſt, ob (t) datum rectangulum $KC \times KN$, ut AP. Atqui areæ hyperbolicæ $KNOL$ ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta K & L, eſt æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evaneſcens eſt ut AP. Componitur igitur area tota hyperbolica $ABOL$ ex particulis $KNOL$ velocitati AP ſemper proportionalibus, & (u) propterea ſpatio velocitate iſtâ deſcripto proportionalis eſt. Dividatur jam area illa in partes æquales $ABMI$, $IMNK$, $KNOL$, &c. & vires abſolutæ AC, IC, KC, LC, &c. (x) erunt in progreſſione geometricâ. *Q. E. D.* Et (z) ſimili argumento, in aſcenſu corporis, ſumen-



(r) * *Ideóque in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ.* Ob datam AC.

(s) * *Ut illius momentum* $2APQ$. Nam ſit $AK \times AC = AP^2$ (per) erit $AC \times KL = 2AP \times PQ$ (. 1. & 3. Lem. 2.) id eſt, ob datam AC; KL eſt ut $AP \times PQ$, & quia velocitatis incrementum PQ, dato temporis momento genitum (per mot. leg. 2,) proportionale eſt vi generanti KC, erit KL, ut $AP \times KC$.

(t) * *Ob datum rectangulum* $KC \times KL$ (per theor. 4. de hyp.).

(u) * *Et propterea ſpatio velocitate iſtâ deſcripto proportionalis eſt;* dato enim temporis momento, ſpatium deſcriptum eſt ut velocitas (12).

(x) * *Erunt in progreſſione* (379. lib. 1.).

(z) * *Et ſimili argumento* tur enim vis gravitatis per datam lineam AC, reſiſtentia per lineam indefinitam

mendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. constabit quod vires absolutæ *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. sunt continuè proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt continuè proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam *ABNK*; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia medii per lineas *AC*, *AP* & *AK* respectivè; (a) & vice versâ.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, (b) exponens est linea *AC*.

Corol. 3. Igitur si in datâ aliquâ velocitate cognoscatur resistentia medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in subduplicatâ ratione, quam habet vis gravitatis (c) ad medii resistentiam illam cognitam.

PRO-

Al, vis absoluta in ascensu corporis per summam Cl, velocitas corporis per lineam Ap quæ sit media proportionalis inter Al & AC, ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ; decrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam lk, & contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam pq; & describatur ut suprà hyperbola SBo; Quoniam Al est ut Ap^2 erit hujus momentum kl ut illius momentum 2Apq, id est, ut Ap in lC; nam velocitatis decrementum pq (per mot. leg. 2.) proportionale est vi generanti lC, componatur ratio ipsius kl cum ratione ipsius lo, & fiet rectangulum kl×lo ut Ap×lC×lo, hoc est, ob datum rectangulum lC×lo, ut Ap. Ergo, coeuntibus punctis k, l, area hyperbolica knol=kl×lo, est ut Ap. Componitur igitur area tota hyperbolica 2ABol ex particulis knol velocitati Ap semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales ABmi; imnk, knol, &c. & vires absolutæ AC, iC, kC, lc, &c. erunt in progressione geometricâ. Q. E. D. 90

(a) * *Et vice versâ.* Simili modo si in ascensu corporis, spatium usquè ad motûs extinctionem describendum exponatur per aream hyperbolicam ABnk exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia medii per lineas AC, Ap, Ak.

(b) * *Exponens est linea AC.* Fiat enim AP=AC, & quia (per constr.) AP^2=AK×AC, erit etiam AK=AC, ideóque coincidente ordinatâ KN, cum asymptoto CH, area hyperbolica ABNK, infinita evadet, & spatium descendendo descriptum huic proportionale erit quoque infinitum, gravitas verò, resistentia & velocitas corporis exponentur per lineam AC, eritque proinde resistentia gravitati æqualis, & propterea velocitas AC maxima.

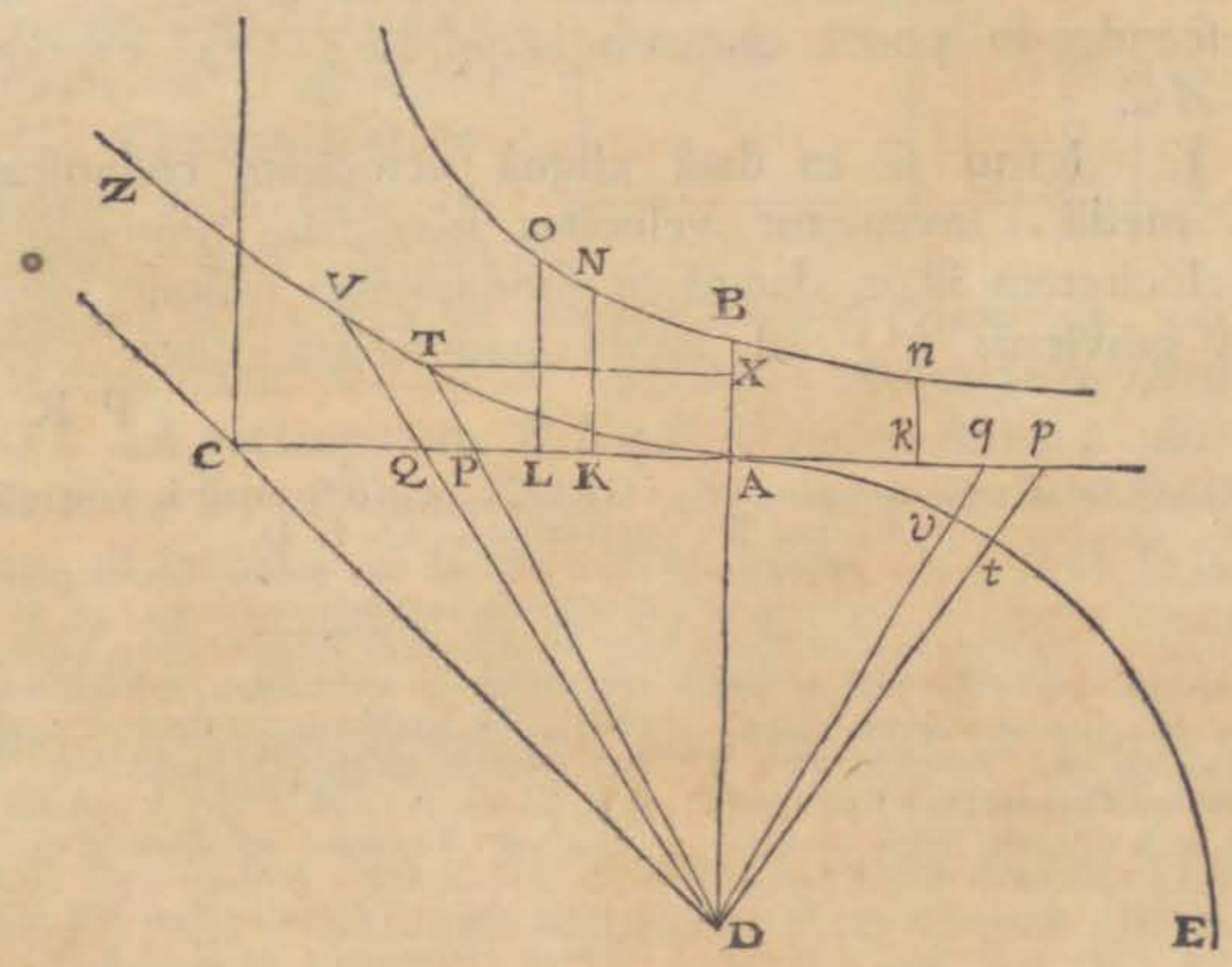
(c) * *Ad medii resistentiam illam cognitam.* Cum enim velocitates sint in subduplicatâ ratione resistentiarum (per hyp.) & resistentia sit gravitati æqualis, ubi velocitas maxima est, (per cor. 2.) ve-

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

Positis jam demonstratis, dico quod, si tangentes angulorum sectoris circularis & sectoris hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascendendi ad locum summum ut sector circuli, & tempus omne descendendi à loco summo ut sector hyperbolæ.

Rectæ *AC*, quâ vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur *AD*. Centro *D* semidiametro *AD* descri-

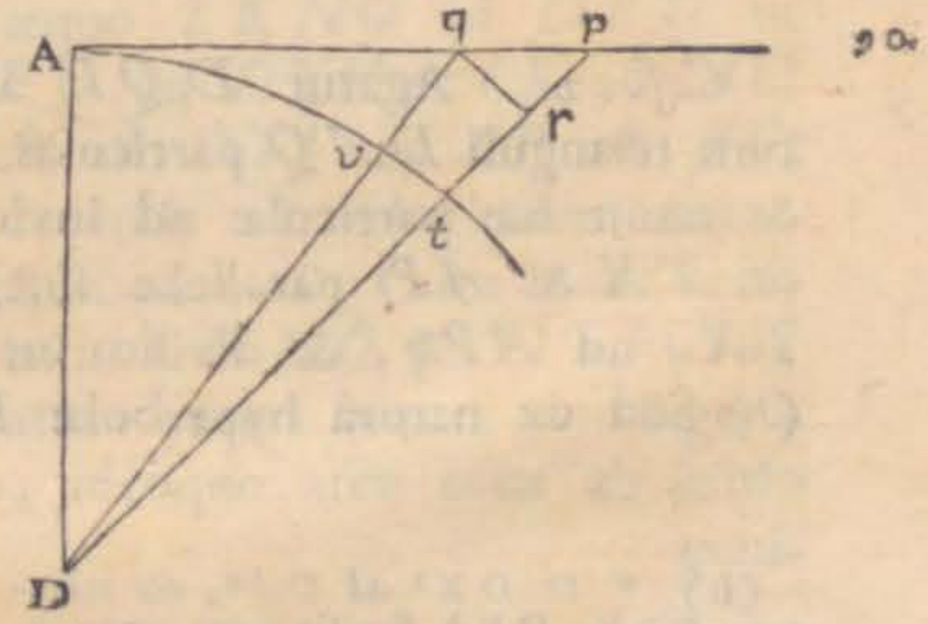


batur tum circuli quadrans *AtE*; tum hyperbola rectangula *AVZ* axem habens *AX*, verticem principalem *A*, & asymptoton *DC*. Ducantur *Dp*, *DP*, & erit sector circularis *AtD* ut tempus omne ascendendi ad locum summum; &

velocitas maxima erit ad velocitatem datam in subduplicatâ ratione gravitatis ad medii resistentiam illam cognitam.

& ſector hyperbolicus ATD ut tempus omne deſcendendi à loco ſummo: Si modo ſectorum tangentes Ap, AP, ſint ut velocitates.

Caſ. 1. Agatur enim Dvq abſcindens ſectoris ADt & trianguli ADp momenta, ſeu particulas quam minimas ſimul deſcriptas tDv & qDp. Cum particulæ illæ, ob angulum communem D, ſunt in (d) duplicatâ ratione laterum, erit particula tDv ut $\frac{qDp \times tD\ quad.}{pD\ quad.}$, id eſt, ob datam tD, ut $\frac{qDp}{pD\ quad.}$. Sed $pD\ quad.$ eſt $AD\ quad. + Ap\ quad.$ id eſt, (e) $AD\ quad. + AD \times Ak$, ſeu $AD \times Ck$; & (f) qDp eſt $\frac{1}{2} AD \times pq$. Ergo ſectoris particula tDv eſt ut $\frac{pq}{Ck}$, id eſt, ut velocitatis decrementum quam minimum pq directè, & vis illa Ck quæ velocitatem diminuit inversè; (g) atque ideo ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum omnium tDv in ſectore ADt, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis



(d) * *In duplicatâ ratione laterum.* Nam ſi ex puncto q ducatur ad D p lineola q r parallela ipſi v t, duo triangula evaneſcentia D q r, D v t ſimilia ſunt & in ratione duplicatâ laterum D q D v, (per prop. 19. lib. 6. Elem.) & triangulum D q p æquale eſt triangulo D q r evaneſcente p r reſpectu D q; eſt igitur pD^2 ad tD^2, ſeu AD^2, ut triangulum qDp ad triangulum tDv, & ideo $tDv = \frac{AD^2 \times qDp}{pD^2}$, undè ob datum circuli radium AD, particula tDv eſt ut $\frac{qDp}{pD^2}$.

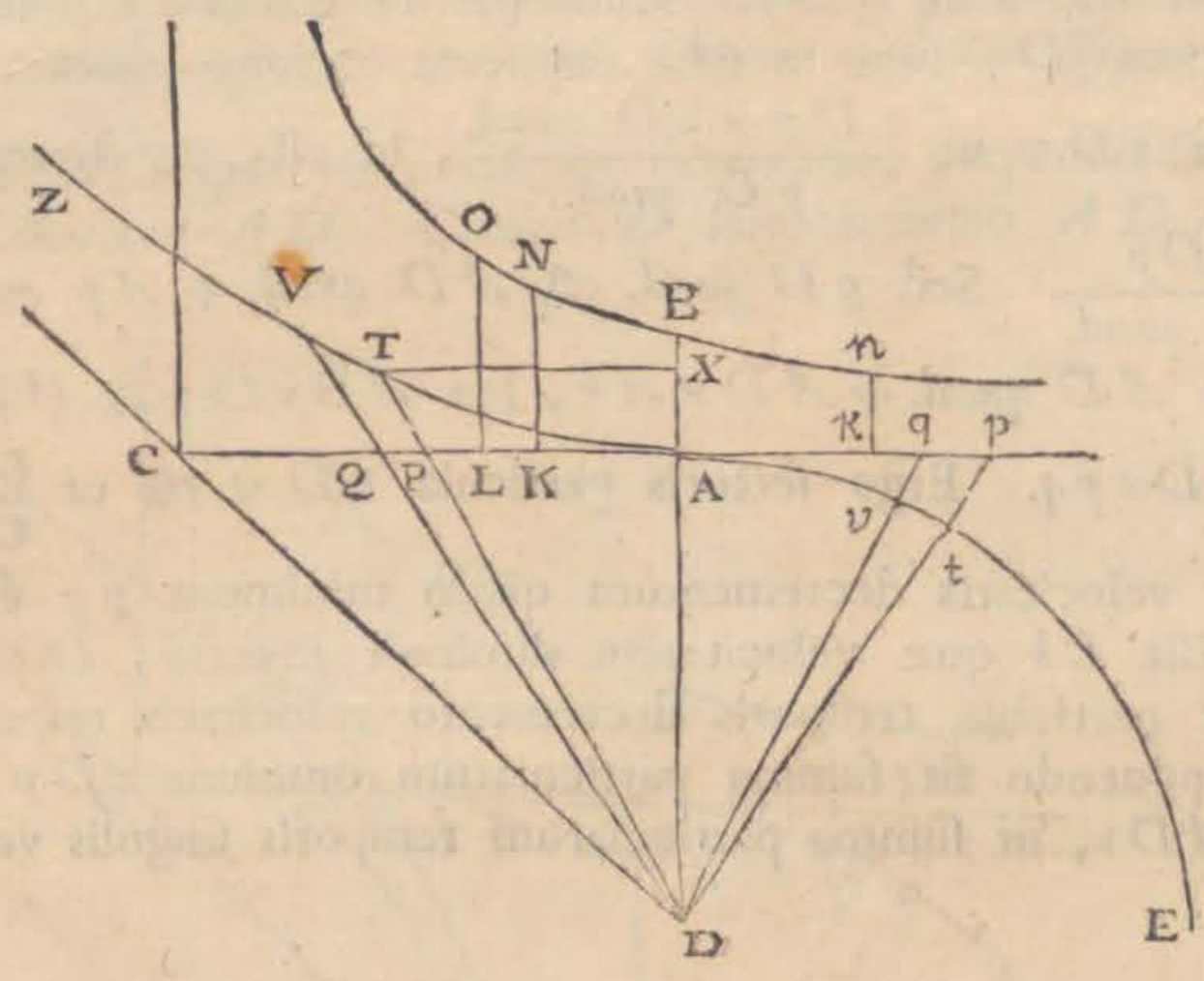
(e) * *Id eſt.* Nam $AC \times Ak$, ſeu $AD \times Ak = Ap^2$ (per prop. 8.) & $AD^2 + AD \times Ak = AD \times (AC + Ak) = AD \times Ck$.

(f) * *Et* qDp *eſt* $\frac{1}{2} AD \times pq$, ob AD baſi pq productæ normalem.

(g) * *Atquè ideò ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens* (18).

DE MOTU CORPORUM.

tis decreſcentis Ap particulis amiſſis pq reſpondentium, uſque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc eſt, ſector totus ADt eſt ut tempus totum aſcendendi ad locum ſummum. *Q. E. D.*



Caſ. 2. Agatur DQV abſcindens tum ſectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quam minimas TDV & PDQ, & erunt hæ particulæ ad invicem ut DTq ad DPq, id eſt (ſi TX & AP parallelæ ſint) ut (h) DXq ad DAq vel TXq ad APq, & diviſim ut $DXq-TXq$ ad $DAq-APq$. (i) Sed ex naturâ hyperbolæ $DXq-TXq$ eſt ADq, & per hypo-

(h) * *Ut* DX^2 *ad* DA^2, ob triangula DTX, DPA ſimilia (per prop. 2. lib. 6. Elem.)

(i) * *Sed ex natura hyperbolæ &c.* Quoniam (per theor. 2. de hyperb.) rectangulum $2AD+AX\times AX$, eſt ad quadratum ordinatæ TX, ut latus tranſverſum eſt ad latus rectum, hæc verò Hyperbola eſt æquilatera, erit (per theor. 5. de hyperb.) $TX^2=2AD+AX\times AX$. Sed eſt $2AD+AX\times AX=DX^2-DA^2$ (per prop. 6. lib. 2. elem.) ergò $TX^2=DX^2-DA^2$, ac proinde $DX^2-TX^2=DA^2$.

(k) hypotheſin APq eſt $AD \times AK$. Ergo particulæ ſunt ad invicem ut ADq ad $ADq - AD \times AK$; id eſt, ut AD ad $AD - AK$ ſeu AC ad CK: ideoque ſectoris particula TDV eſt $\frac{PDQ \times AC}{CK}$; atque ideo (l) ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id eſt, ut incrementum velocitatis directè, utque vis generans incrementum inversè; atque ideo ut particula temporis incremento reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particulæ PQ generantur; ut ſumma particularum ſectoris ATD, id eſt, tempus totum ut ſector totus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi AB æquetur quartæ parti ipſius AC, ſpatium quod corpus tempore quovis cadendo deſcribit, erit ad ſpatium, quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area $ABNK$, quâ ſpatium cadendo deſcriptum exponitur, ad aream ATD, quâ tempus exponitur. Nam cum ſit AC ad AP ut AP ad AK, erit (per corol. 1. lem. 11. hujus) LK ad PQ ut $2AK$ ad AP, hoc eſt, ut $2AP$ ad AC, & inde LK ad $\frac{1}{2}PQ$ ut AP ad $\frac{1}{4}AC$ vel AB; eſt & KN ad AC vel AD ut (m) AB ad CK; itaque ex æquo $LKNO$ ad DPQ ut AP ad CK. (n) Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC. Ergo rurſus ex æquo $LKNO$ eſt ad DTV ut AP ad AC; hoc eſt, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo poteſt acquirere. Cum igitur arearum $ABNK$ & ATD momenta $LKNO$ & DTV ſunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ (†) ut ſpatia ſimul deſcripta, ideoque areæ totæ ab initio geni-

(k) * *Et per hypotheſim* AP^2 *eſt* $AD \times Ak$, ſeu $AC \times Ak$ (per prop. 8.)

(l) * *Ob datas* AC *&* AD. Eſt enim $PDQ = \frac{1}{2}AD \times PQ$, & ideò $TDV = \frac{\frac{1}{2}AD \times AC \times PQ}{CK}$

(m) * *Ut* AB *ad* CK (per theor. 4. de hyperb. 90.

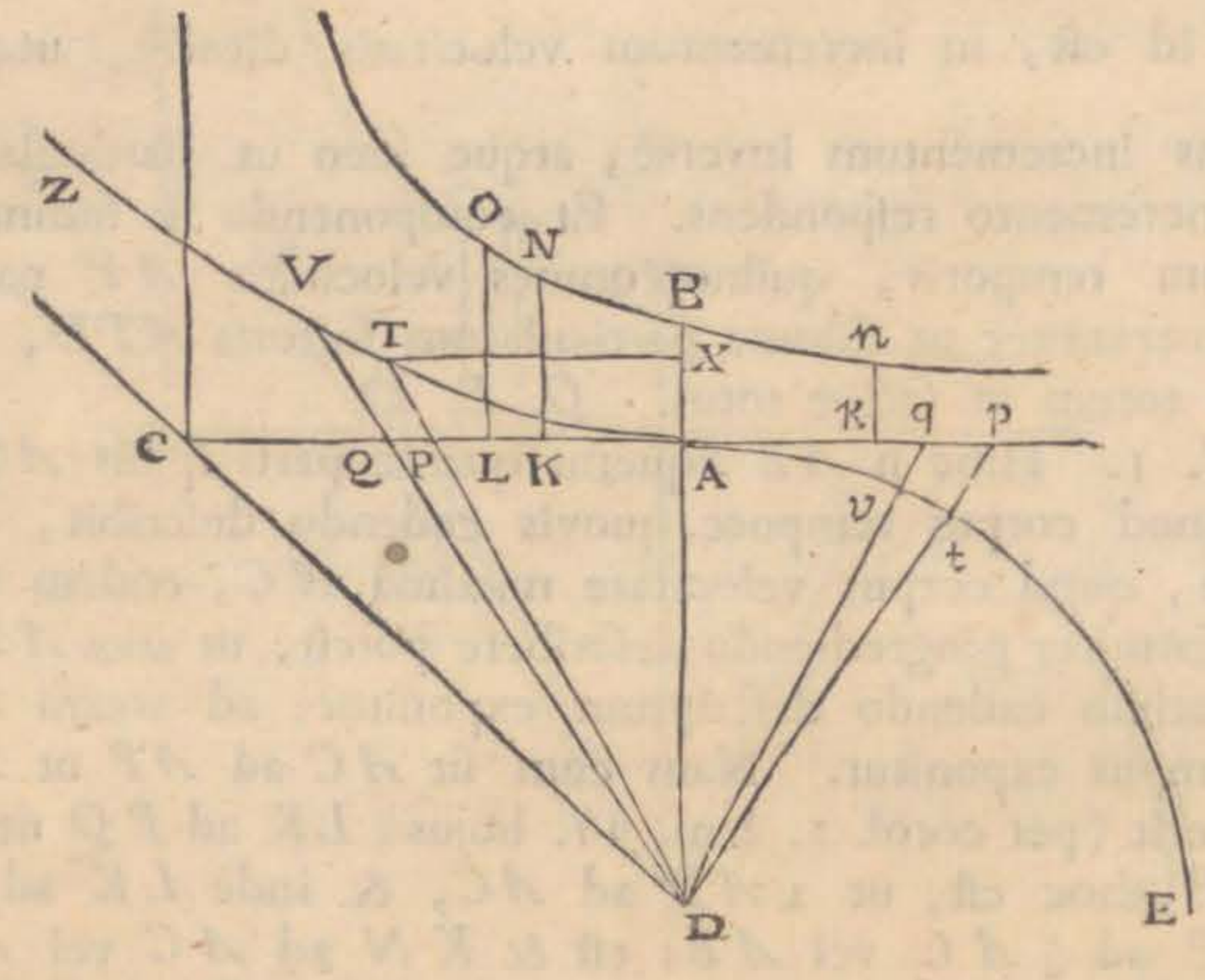
(n) * *Sed erat* DPQ *ad* DTV *&c.* Suprà caſ. 2.

(†) * *Ut ſpatia ſimul deſcripta* (11).

DE MOTU CORPORUM.

genitæ *ABNK* & *ATD* ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. *Q. E. D.*

Corol. 2. (°) Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quod ſpatium illud omne ſit ad



ſpatium, uniformi cum velocitate *AC* eodem tempore deſcriptum, ut eſt area *ABnk* ad ſectorem *ADt*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore *ATD* cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum *APD* ad ſectorem hyperbolicum *ATD*.

(o) * *Idem conſequitur* &c. Eadem eſt prorſus demonſtratio, ſi loco AK & QP ſubſtituantur Ak & qp, & ad primum demonſtrationis caſum attendatur.

91. Cor. Velocitas Ap corporis in medio reſiſtente aſcendentis ad maximam altitudinem ABnk, eſt ad velocitatem AP corporis in eodem medio è quiete deſcendentis per æquale ſpatium ABNK, ut ſecans anguli ADp ad radium, aut quod idem eſt, ut tangens Ap anguli ADp, ad ejuſdem finum. Quoniam enim (per hyp.) area ABNK, æqualis eſt ABnk, erit (380 Lib. 1.) Ck: AC = AC: CK, & dividendo Ak: AC = AK: CK, & alternando, Ak: AK = AC: CK = Ck (ſive AC + Ak): AC, & ideò Ak × AC: AK × AC = AC² + Ak × AC: AC²; Sed (per dem.) prop. 8.) AC × Ak = Ap², & AC × AK = AP². Quare Ap²: AP² = AC² + Ap² ſeu Dp²: AC², & hinc Ap: AP = Dp: AC, ſeu AD. Q. E. D.

ATD. Nam velocitas in medio non reſiſtente (P) foret ut tempus *ATD*, & in medio reſiſtente eſt ut *AP*, id eſt, ut triangulum *APD*. Et (q) velocitates illæ initio deſcenſus æquantur inter ſe, perinde ut areæ illæ *ATD*, *APD*.

Corol. 4. (r) Eodem argumento velocitas in aſcenſu eſt ad velocitatem, quâ corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum *ApD* ad ſectorem circularem *AtD*; ſive ut recta *Ap* ad arcum *At*.

Corol. 5. Eſt igitur tempus, quo corpus in medio reſiſtente cadendo velocitatem *AP*, acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam *AC* in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirere poſſet, (f) ut ſector *ADT* ad triangulum *ADC*: & tempus,

(p) * *Foret ut tempus ATD.* Creſceret enim uniformiter, ideòque ut tempus (25. lib. 1.)

(q) * *Et velocitates illæ initio deſcenſûs æquantur inter ſe* ob reſiſtentiam reſpectu gravitatis nullam, ubi velocitas naſcitur. Cum igitur velocitates in medio non reſiſtente ſint ſemper inter ſe ut areæ ATD, & in medio reſiſtente ſint ut triangula APD, erit velocitas in medio reſiſtente tempore finito ATD acquiſita ad velocitatem initio deſcenſûs in eo medio reſiſtente ut triangulum finitum APD, ad triangulum naſcens APD, & erit velocitas initio deſcenſûs in medio non reſiſtente ad velocitatem in eodem medio tempore finito ATD acquiſitam, ut area naſcens AT (æqualis areæ naſcenti APD) ad aream finitam ATD; Quare (ex æquo) velocitas corporis tempore finito ATD cadentis in medio reſiſtente eſt ad velocitatem quam eodem tempore in medio non reſiſtente cadendo acquireret ut triangulum APD ad ſectorem hyperbolicum ATD.

(r) * *Eodem argumento.* Nam velocitas in medio non reſiſtente foret ut tempus AtD, & in medio reſiſtente eſt ut Ap, id eſt, ut triangulum apD ob datam AD, & velocitates illæ in fine aſcenſûs ubi evaneſcunt æquantur inter ſe, perinde ut areæ evaneſcentes AtD, ApD; eſt autem triangulum $ApD = \frac{1}{2} AD \times Ap$, & ſector circularis $AtD = \frac{1}{2} AD \times At$. Quare ApD eſt ad AtD, ut Ap ad At. 91 91

92 Hinc ſi velocitas aſcenſûs Ap in medio reſiſtente velocitati maximæ AC æqualis fuerit, erit velocitas Ap ſeu AC, ad velocitatem quâ corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum ACD, ad octantem circuli, ſive ut radius ad octavam partem peripheriæ, aut quod idem eſt, ut quadratum circulo circumſcriptum ad circuli aream. Dum enim fit Ap = AC, triangulum ApD æquatur triangulo ACD, & ſector AtD, octanti circuli, ideóque arcus At eſt pars octava peripheriæ, & triangulum ACD eſt ad ſectorem AtD, ut AC ad arcum At, ac præterea triangulum ACD, ob AC = AD, eſt pars octava quadrati circulo circumſcripti.

(f) * *Ut ſector ADT ad triangulum ADC.* Cum enim AP exponat velocitatem tempore ATD in medio reſiſtente acquiſitam, ſumatur AY talis ut exponat velocitatem tempore eodem in medio non reſiſtente productam, & erit per Coroll. 2. AP ad AY ut APD, ad ATD, cumque etiam AC exponat velocitatem maximam,

DE MOTU CORPORUM.

pus, quo velocitatem Ap in medio reſiſtente aſcendendo poſſit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in ſpatio non reſiſtente aſcendendo poſſet amittere, ut (t) arcus At ad ejus tangentem Ap.

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum. Nam corporis in infinitum deſcendentis datur velocitas maxima (per corol. 2. & 5. theor. VI. lib. II.) inde-

ximam, erit AY ad AC ut tempus quo prior celeritas AY in medio non reſiſtente acquiri poteſt, ad tempus quo velocitas maxima AC in medio etiam non reſiſtente acquireretur; & cum tempus quo celeritas AY acquiritur, exprimatur per aream ATD, erit AY ad AC ut ATD ad aream quæ exponet tempus quo velocitas maxima in medio non reſiſtente acquiritur, itaque cum ſit AP:AY=APD:ATD & AY:AC=ATD: ad hanc aream, erit ex æquo AP:AC=APD, ad hanc aream, ſed ſumptâ communi altitudine DH eſt AP ad AC=Tri. APD ad Tri. ADC, ergo area quæ exponet tempus quo maxima velocitas in medio non reſiſtente acquiritur, eſt area ADC. Undè ſequitur quod corpus in medio reſiſtente, velocitatem maximam AC acquirere cadendo non poteſt niſi tempore infinito. Cum enim fit AP=AC, coincidit DT cum Hyperbolæ ATV aſimptoto DC, & ſector ADT fit infinitus.

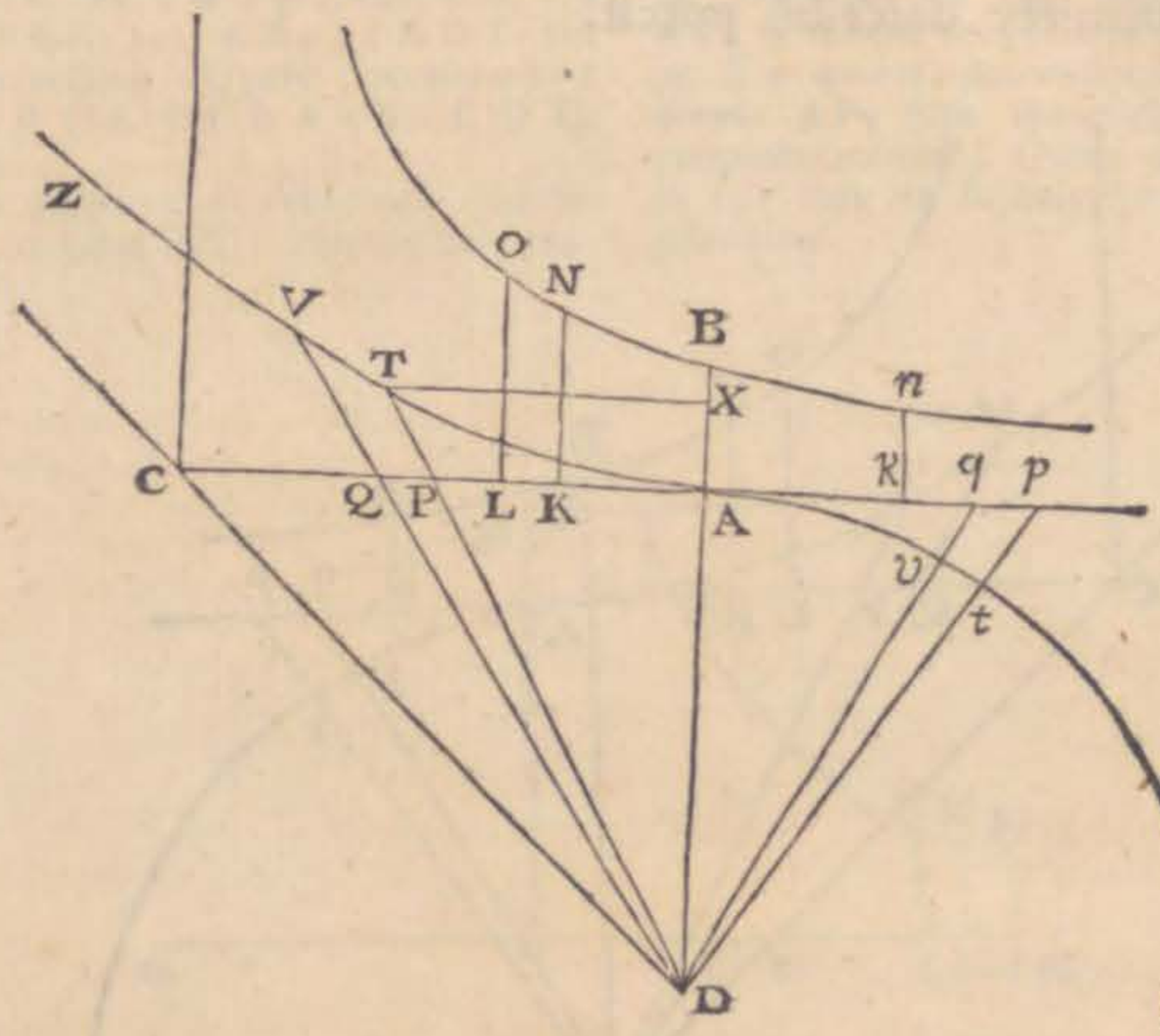
(t) * *Ut arcus At, ad ejus tangentem Ap.* Siquidem (per cor. 4.) velocitas Ap in medio reſiſtente tempore AtD extinguenda, eſt ad velocitatem eodem tempore in ſpatio non reſiſtente extinguendam ut triangulum ApD ad ſectorem AtD; & etiam ut tempus quo velocitas Ap in ſpatio non reſiſtente extingueretur ad tempus AtD quo altera velocitas in ſpatio non reſiſtente extinguitur quod idem eſt cum eo quo velocitas Ap in ſpatio reſiſtente extinguitur. Quare tempus quo velocitas Ap, in ſpatio non reſiſtente evaneſceret eſt ad tempus AtD quo in ſpatio reſiſtente extingueretur ut triangulum ApD, ad ſectorem AtD, ſive tangens Ap ad ejus arcum At. Patet ergò propoſitum.

93. Hinc tempus quo corpus velocitatem Ap in medio reſiſtente aſcendendo amittere poteſt, eſt ad tempus quo velocitatem maximam AC in ſpatio non reſiſtente aſcendendo amitteret vel deſcendendo acquireret ut ſector circularis AtD, ad triangulum ADC, ſeu ut arcus At ad radium AD. Nam in medio non reſiſtente velocitas Ap eſt ad velocitatem AC, ut tempus ApD, quo generatur vel extinguitur velocitas Ap, ad tempus quo generatur vel extinguitur velocitas AC, quod proindè erit $\frac{AC \times ApD}{Ap}$, ſeu $\frac{1}{2}AD \times AC$, hoc eſt, triangulum ADC.

Cum igitur tempus quo velocitas Ap, in medio reſiſtente extinguitur, exponatur per ſectorem AtD, patet propoſitum.

94. Tempus quo corpus in medio reſiſtente deſcendendo acquirit velocitatem AP, vel aſcendendo amittit velocitatem Ap, eſt ad tempus quo eandem velocitatem in medio non reſiſtente acquirit vel amittit, ut ſector ADT, vel ADt, ad triangulum ADP, vel ADp, reſpective. Etenim (per cor. 5. & not. 93.) tempus quo in medio reſiſtente generatur velocitas AP, vel extinguitur velocitas Ap, eſt ad tempus quo in ſpatio non reſiſtente generatur vel extinguitur velocitas maxima AC, ut ADT vel ADt, ad ADC; Et tempus quo in ſpatio non reſiſtente generatur vel extinguitur velocitas AC, eſt ad tempus quo generatur vel extinguitur in eodem ſpatio non reſiſtente, velocitas AP vel Ap, ut AC ad AP vel Ap, & ſumpta communi altitudine DA ut ADC ad PD vel ApD. Quare (ex æquo) tempus quo in medio reſiſtente ge-

(u) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in ſpatio non reſiſtente cadendo poſſet acquirere. Et ſumendo ſecto-



rem *ADT* vel *ADt* ad triangulum *ADC* in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; (x) dabitur tum velocitas *AP*

generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, eſt ad tempus quo velocitas eadem in ſpatio non reſiſtente producitur vel amittitur, ut A D T ad A D P, vel A D p. Q. E. D.

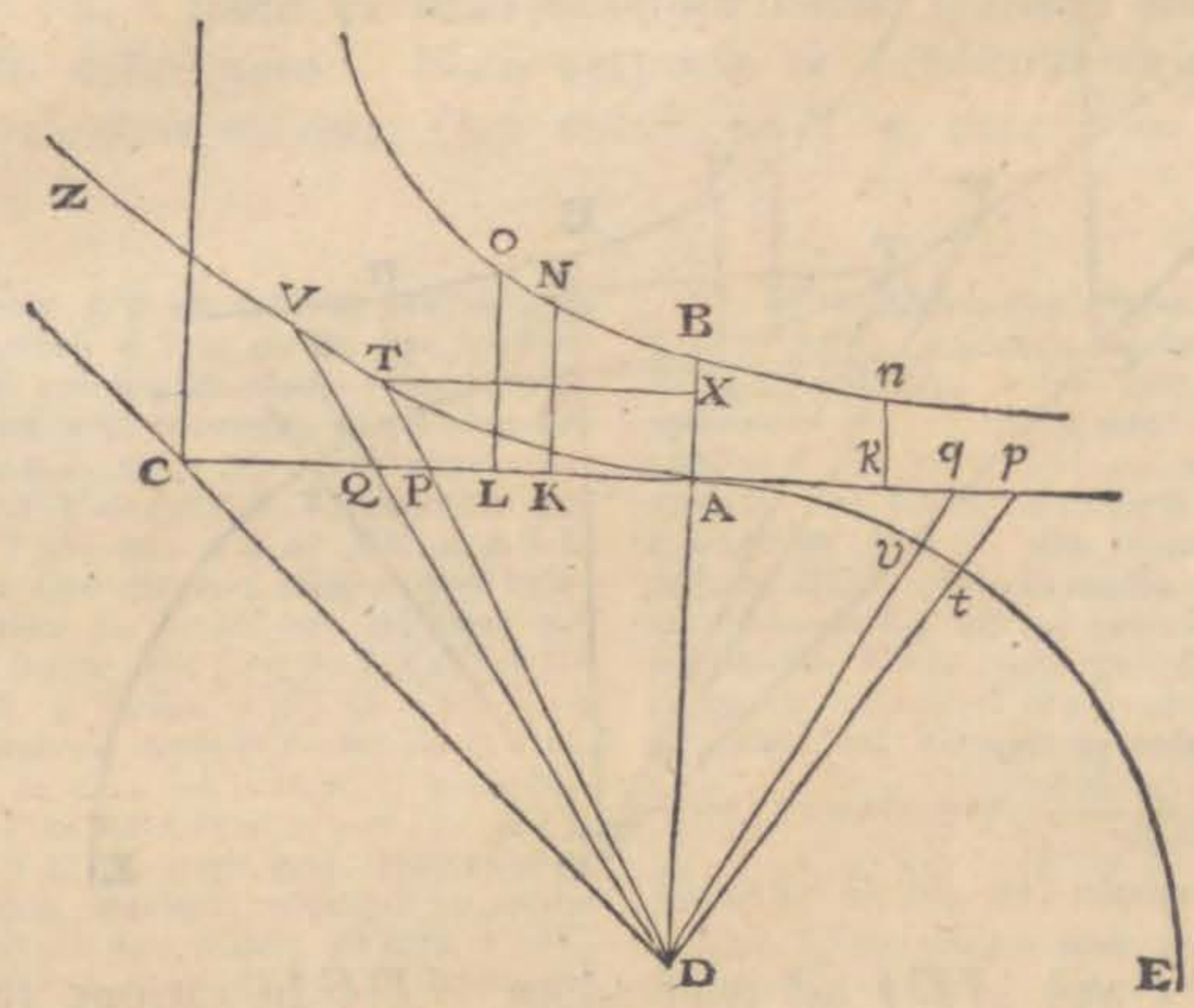
95. Si celeritas A p corporis in medio reſiſtente aſcendentis maximæ A C æqualis fuerit, erit A D p = A D C, & ſector A D t, circuli octans. Quare tempus quo corpus in medio reſiſtente aſcendendo amittere poteſt velocitatem maximam A C eſt ad tempus quo eandem in ſpatio non reſiſtente amitteret, ut circuli octans ad triangulum A D C, hoc eſt, ut area circuli ad quadratum circumſcriptum, ſeu etiam ut 8ª. pars peripheriæ ad radium.

(u) *96. Indèque datur tempus.* Cum enim vires acceleratrices uniformes, ſint ut velocitates quas generant directè & tempora quibus illas generant inversè (13. lib. 1.) datâ vi acceleratrice uniformi quâ corpus in medio quovis ſollicitatur, ſeu datâ vis illius ratione ad notam quamlibet aliam vim v. gr. ad corporum terreſtrium gravitatem, datâque ſimul velocitate quam vis illa acceleratrix produxit, dabitur tempus quo velocitas illa data genita eſt. Sit enim vis acceleratrix data ad vim notam gravitatis, ut a ad b, velocitas datâ vi illâ acceleratrice tempore x genita c, & velocitas quam vis gravitatis tempore quovis dato t generat C, erit $a : b = \frac{c}{x} : \frac{C}{t}$. Undè invenitur tempus $x = \frac{b\,c\,t}{a\,C}$. 96.

(x) * *Dabitur tum velocitas* A P, vel A p. (Per cor. 5. & not. 92).

DE MOTU CORPORUM.

AP vel Ap, (y) tum area $ABNK$ vel $ABnk$, (z) quæ eſt ad ſectorem ADT vel ADt ut ſpatium quæſitum ad ſpatium, quod tempore dato, cum velocitate illâ maximâ jam ante inventâ, uniformiter deſcribi poteſt.



Corol. 7. (a) Et regrediendo, ex dato aſcenſus vel deſcenſus ſpatio $ABnk$ vel $ABNK$, dabitur tempus ADt vel ADT.

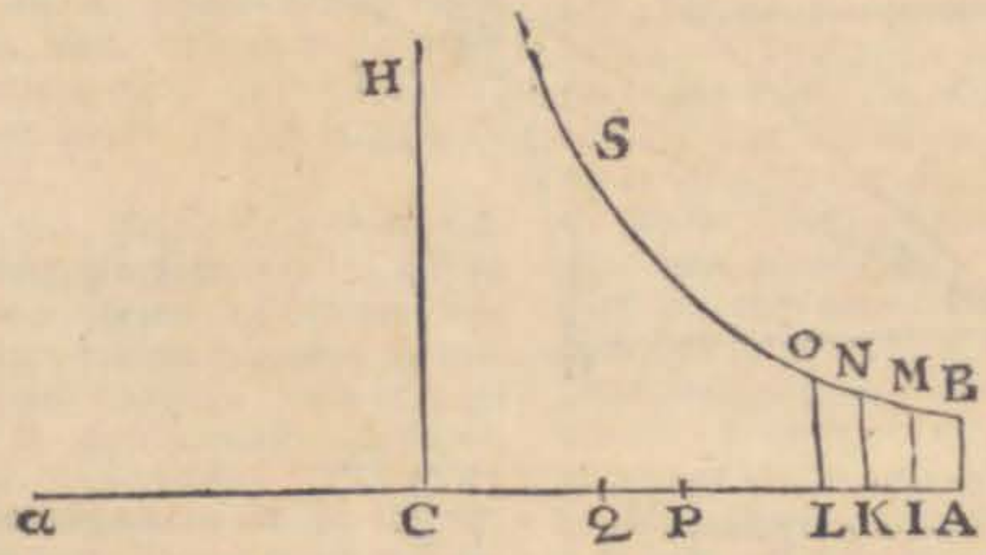
(y) * *Tum area ABNK vel ABnk.* Eſt enim (ex dem. prop. 8.) AC:AP=AP:AK, & AC:Ap=Ap:Ak, & ideò datis AC & AP vel Ap dabuntur AK vel Ak, & areæ correſpondentes ABNK, ABnk, quæ per tabulas Logarithmorum inveniri poſſunt (384. lib. 1.).

(z) * *Quæ eſt ad ſectorem ADT, vel ADt.* (per cor. 1. & 2.).

97. (a) *Et regrediendo.* Nimirum capienda eſt area ABnk, vel ABNK ad triangulum ADC in datâ ratione ſpatii dati aſcenſûs vel deſcenſûs ad duplum ſpatii, quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit ut velocitatem maximam AC acquirat, atque ità dabitur Ak vel AK. Et hinc dabitur Ap vel AP, ſeu velocitas; ex his autem dabitur ſector ADt vel ADT, ſeu tempus (per cor. 5.). Nam ſpatium quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit ut velocitatem maximam AC acquirat dicatur A, tempus quo ſpatium illud deſcribitur T, ſpatium quod in medio reſiſtente deſcribit ut acquirat velocitatem AP, vel amittat velocitatem Ap dicatur s, tempus t, & ſpatium quod corpus tempore illo t & velocitate maximâ AC uniformiter progrediendo deſcribit ſit S, & quia (29. lib. 1.) corpus velocitate maximâ AC uniformiter

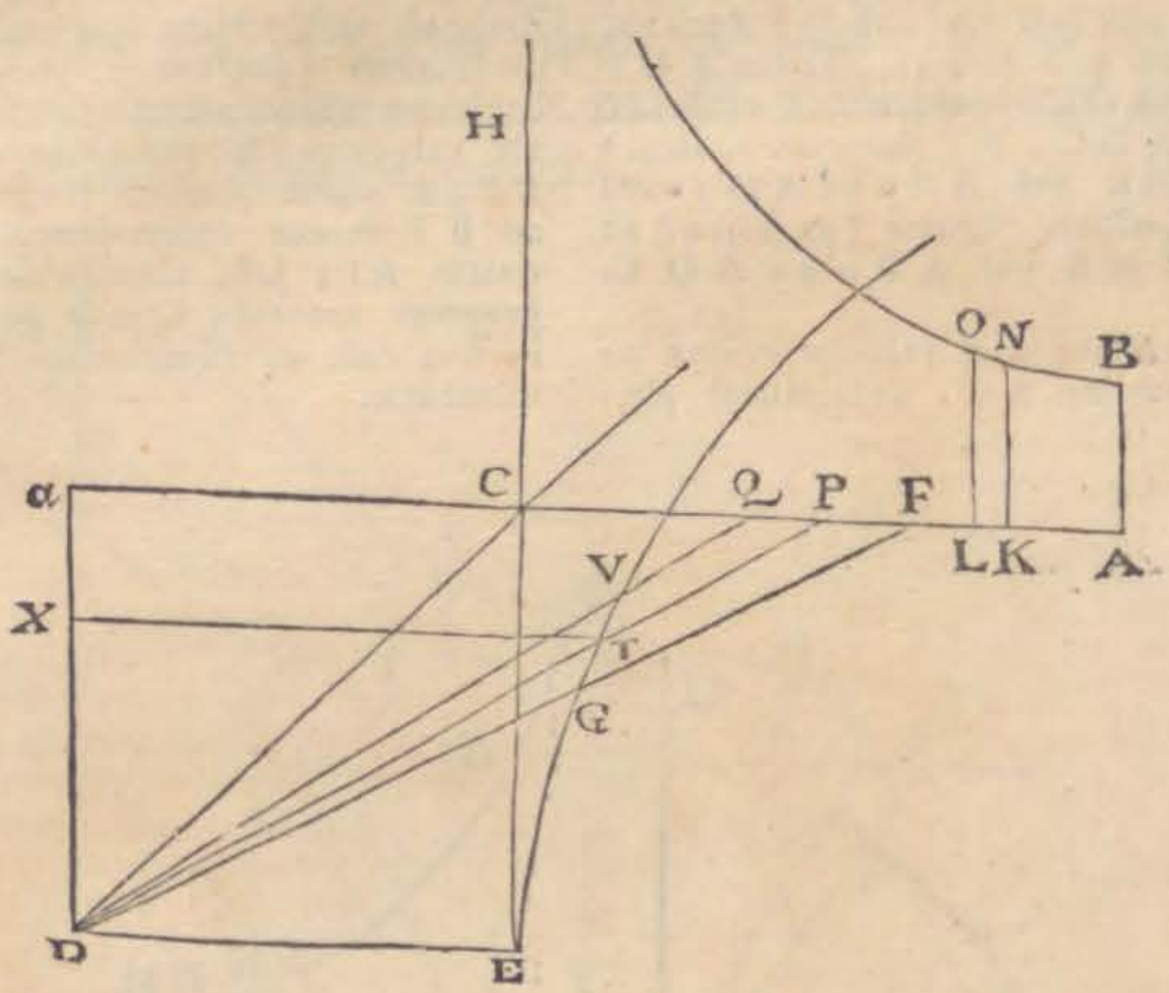
ter progrediendo, tempore T, describit spatium $2A$, erit (5. lib. 1.) $S:2A=t:T$. Sed (per cor. 5. & not. 93.) $t:T=ADT$ vel $ADt:ADC$, ideóque $S:2A=ADT$ vel $ADt:ADC$, & (per cor. 1. ac 2.) $s:S=ABNK$ vel $ABnk:ADT$ vel ADt, respectivè. Quarè (ex æquo) $s:2A=ABNK$ vel $ABnk:ADC$. Q. E. D.

98. Si corpus cum velocitate quæ æqualis sit maximæ AC, verticaliter projiciatur deorsum, æquabili motu descendet, ob resistentiam gravitati æqualem & contrariam (per cor. 2. prop. 8.) si minori cum velocitate projiciatur, exponatur velocitas illa per lineæ AC partem AP, & motus corporis projecti idem erit ac si è quiete descendendo velocitatem datam AP, jam acquisivisset & deindè pergeret moveri; Quare motus projecti in hoc casu ex superioribus facilè determinabitur. 98.



99. Verum si projectionis velocitas terminali AC major est, constructiones propositionum 8 & 9 mutandæ erunt. Et quidem constructio propositionis 8æ. sic mutanda. Descriptâ inter asymptotos orthogonales AC, CH Hyperbolâ quâlibet SONB, producatur asymptotus AC in a, & exponatur vis gravitatis per datam lineam aC, resistentia initio motûs per lineam aA, resistentia elapso quovis tempore per lineam indefinitam aK. Velocitas corporis per lineam aP quæ sit media proportionalis inter aK & aC, ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ. Decrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam KL & contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam PQ. Quoniam aK est ut aP^2, erit hujus momentum KL, ut illius momentum $2aPQ$, id est, ut aP in KC. Nam velocitatis decrementum PQ, (per mot. Leg. 2.) proportionale est vi generanti KC, quæ est excessus resistentiæ aK, suprà vim gravitatis aC. Componatur ratio ipsius KL cum ratione ipsius KN, & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $aP \times KC \times KN$, hoc est, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut aP, ergò rectangulum evanescens $KN \times KL$, hoc est, area hyperbolica KNOL, est ut aP. Componitur igitur area tota hyperbolica ABOL, ex particulis KNOL, velocitati aP semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales ABMI, IMNK, KNOL, &c. & vires absolutæ AC, IC, KC, LC, &c. erunt in progressione geometricâ. Si spatium descriptum exponatur per aream Hyperbolicam ABNK, exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia medii per lineas aC, aP, aK.

DE MOTU CORPORUM.



Propositionis 9ᵃᵉ. constructio in hanc abit. Cæteris ut in figurâ & constructione superiori manentibus, capiatur aF media proportionalis inter aC & aA, & ideò velocitatem projectionis initialem exponens, completo quadrato aCED, centro D describatur hyperbola rectangula EGTV, semiaxem transversum habens DE, verticem principalem E, & asymptotum DC. Jungantur DF, DP Hyperbolæ occurrentes in G & T, & erit sector hyperbolicus GDT ut tempus descensûs per spatium ABNK. Agatur enim DVQ abscindens tum sectoris GDV tum trianguli FDQ particulas quam minimas TDV, PDQ, & erunt hæ particulæ ad invicem ut DT^2 ad DP^2, id est, si TX & aP parallelæ sint, ut DX^2 ad Da^2, vel TX^2 ad aP^2, & divisim ut $TX^2 - DX^2$ ad $aP^2 - aD^2$; sed (ex naturâ Hyperb.) $TX^2 - DX^2$ est aD^2, & (per Hyp.) aP^2 est $aD \times aK$; ergò particulæ TDV, PDQ, sunt ad invicem ut aD^2, ad $aD \times aK - aD^2$, id est, ut aD ad aK — aD, seu ut aC ad CK; ideóque sectoris particula TDV, est $\frac{PDQ \times aC}{CK}$, atque ideo ob datas aC & aD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est ut decrementum velocitatis directe utque vis generans decrementum inverse, atque ideò ut particula temporis decremento velocitatis respondens, & componendo, fit summa particularum temporis quibus omnes velocitatis FP particulæ PQ extinguuntur, ut summa particularum sectoris GDT, id est, tempus totum ut sector totus. Q. E. D.

100. Coroll. 1. Quoniam coincidente puncto P cum C, coincidit etiam K cum C, & DT cum asymptoto DC, liquet corporis projecti velocitatem aP nonnisi descripto spatio infinito, elapsoque infinito tempore, fieri posse velocitati terminali aC æqualem.

101 Coroll. 2. Si dignitas hyperbolæ BNO seu rectangulum CA × AB, sit $\frac{1}{4}aC^2$, spatium quod corpus tempore quovis describit, erit ad spatium quod corpus velocitate terminali aC eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area ABNK quâ spatium descriptum exponitur ad aream GDT quâ tempus exponitur. Nam cum sit aC ad aP, ut aP ad aK, erit (per cor. 1. Lem. 2. lib. 2.),

2.) LK ad PQ ut 2aK ad aP, hoc eſt, ut 2aP ad aC, & indè LK ad $\frac{1}{2}$PQ, ut aP ad $\frac{1}{4}$aC. (Ex naturâ hyperb. & per hyp.) KN×CK eſt CA×AB, ſeu $\frac{1}{4}aC^2$, ideóque KN ad aC ſeu aD, ut $\frac{1}{4}$aC ad CK. Itaque (ex æquo) LKN, ad DPQ, ut aP, ad CK; ſed erat DPQ, ad DTV, ut CK ad aC, ergò rurſus (ex æquo), LKN, eſt ad DTV, ut aP, ad aC, hoc eſt, ut velocitas corporis projecti eſt ad velocitatem maximam quam corpus è quiete cadendo poteſt acquirere. Cum igitur arearum ABNK & GDT, momenta LKN & DTV ſint ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ ut ſpatia ſimul deſcripta, ideóque areæ totæ ab initio genitæ ABNK & GDT, ut ſpatia tota ab initio projectionis deſcripta.

102. Coroll. 3. Velocitas aP corporis projecti in fine temporis GTD, eſt ad velocitatem quam corpus velocitate initiali aF projectum eodem tempore in medio non reſiſtente cadendo haberet, ut triangulum aPD ad ſummam trianguli aFD & ſectoris hyperbolici GTD. Nam velocitatis incrementum tempore GTD in ſpatio non reſiſtente genitum eſt ut tempus GTD, & velocitas projectionis ut aF, ſive ut triangulum aFD, atque adeò velocitas tota in fine temporis GTD ut GTD+aFD, & velocitas in fine temporis ejuſdem GTD in medio reſiſtente eſt ut aP, id eſt, ut triangulum aPD, & velocitates illæ initio projectionis æquantur inter ſe, perindè ut areæ illæ GTD+aFD & aPD, ob ſectorem GTD evaneſcentem, & aP æqualem aF initio deſcenſûs.

103. Coroll. 4. Tempus quo corpus in medio reſiſtente projectum acquirit velocitatem aP, ſeu quo amittit velocitatem PF, eſt ad tempus quo velocitatem maximam aC, in ſpatio non reſiſtente è quiete cadendo acquirere poſſet, ut ſector GDT ad triangulum aDC. Sit aF+V, recta velocitatem exponens quam corpus in medio non reſiſtente cum velocitate initiali aF projectum elapſo tempore GDT haberet, & erit (102) aP ad aF+V, ſeu multiplicando per $\frac{1}{2}$AD, aPD ad aFD+$\frac{1}{2}$aD×V, ut aPD ad aFD+GTD, ideóque $\frac{1}{2}$aD ×V=GTD, & $V=\frac{GTD}{\frac{1}{2}aD}$; ſed V eſt velocitas quam corpus è quiete cadendo in medio non reſiſtente acquireret tempore GTD, & velocitates in medio non reſiſtente acquiſitæ, ſunt ut tempora quibus acquiruntur, ideóque velocitas V ſeu $\frac{GTD}{\frac{1}{2}aD}$, eſt ad velocitatem aC, in medio non reſiſtente acquiſitam ut tempus GTD ad tempus quo corpus velocitatem aC acquirit; Quarè hoc tempus erit $\frac{1}{2}$aD× aC, ſeu per triangulum aDC exponetur.

104. Coroll. 5. Hinc ex dato tempore datur ſpatium deſcriptum. Capiatur enim ſector GDT ad triangulum aDC, ut tempus datum ad tempus quo corpus in medio non reſiſtente acquirit velocitatem terminalem aC, & dabitur tum velocitas aP, tum area ABNK, quæ eſt ad ſectorem GDT, ut ſpatium quæſitum ad ſpatium quod tempore dato cum velocitate illâ terminali aC uniformiter deſcribi poteſt (101) & regrediendo ex dato ſpatio ABNK, dabitur tempus GDT, ſi capiatur area ABNK, ad triangulum aDC in ratione ſpatii dati ad duplum ſpatii quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit ut velocitatem terminalem aC acquirat. Id demonſtratur ex (not. 103. & 101) eodem prorſus modo quo factum eſt (97).

105. Scholium. Superiores conſtructiones definiendis corporum motibus ſufficiunt, licet medii reſiſtentia partim conſtans partim velocitatis quadrato proportionalis. Nam ſi corpus ſolâ vi inſitâ moveatur, recta AC, quæ in conſtructionibus prop. 8. & 9. vim gravitatis uniformem exponebat, partem reſiſtentiæ conſtantem quæ vi alicui centripetæ uniformi æqualis cenſeri poteſt, cæteris manentibus, exponet. Sed ſi corpus in medio prædicto gravitate uniformiter agente ſollicitatum rectâ aſcendat vel deſcendat, linea AC, in conſtructionibus pro aſcenſu vim gravitatis & partem reſiſtentiæ datam ſimul exhibebit, in conſtructionibus verò pro deſcenſu exceſſum gravitatis ſuprà partem reſiſtentiæ datam repræſentabit; & linea illa AC, ità determinata vim gravi-

DE MOTU CORPORUM.

tatis uniformem exponet, quâ corpus urgeretur in medio cujus esset resistentia ut velocitatis quadratum. Si verò pars illa resistentiæ quæ uniformis manet vi gravitatis æqualis fuerit & corpus deorsum projiciatur, idem erit illius motus ac si solâ vi insitâ ferretur in medio quod resisteret in ratione quadrati velocitatis, atque ideò in hoc casu usurpanda erit constructio propositionis 5ª. Jam verò omissis constructionibus per Logarithmicam quas (ex demonstr. 44. 45.) facile deducere, aut in monumentis academiæ Regiæ an. 1709. & etiam in Phoronomiâ Hermanni Lector videre poterit, duo quæ sequuntur generalia problemata analytice solvemus.

PROBLEMA.

Definire motum corporis, uniformi gravitate urgente, rectà descendentis vel ascendentis in medio similari, quod in ratione quâlibet multiplicatâ velocitatis resistit.

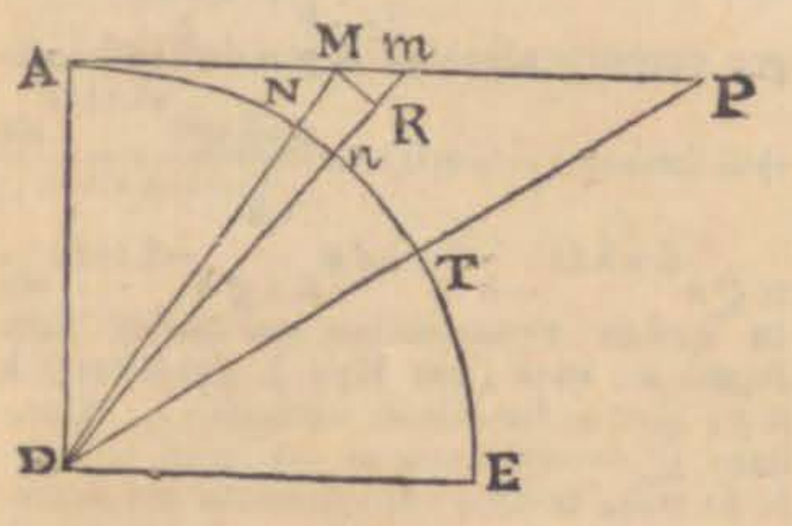
106. Sit vis gravitatis $=g$, velocitas corporis sub initio motûs $=c$, spatium descriptum $=s$, tempus quo descriptum est $=t$, velocitas hoc tempore acquisite vel residua $=v$, resistentia medii $r=\frac{v^n}{a^{n-1}}$, & a quantitas data. Corpore descendente erit (19) $g\,ds - \frac{v^n\,ds}{a^{n-1}} = v\,dv$, ideoque $ds = \frac{a^{n-1}v\,dv}{g\,a^{n-1}-v^n}$, & quia (13) $dt=\frac{ds}{v}$, erit $dt=\frac{a^{n-1}\,dv}{g\,a^{n-1}-v^n}$. Simili modo pro corporis ascensu, invenitur $ds=\frac{-a^{n-1}v\,dv}{g\,a^{n-1}+v^n}$ & $dt=\frac{-a^{n-1}\,dv}{g\,a^{n-1}+v^n}$. Cum igitur in his quatuor æquationibus variabiles separatæ sint, poterunt illæ, saltem concessis figurarum quadraturis, construi.

107. Si resistentia velocitati proportionalis fuerit, erit $n=1$, & ideò corpore descendente $ds=\frac{v\,dv}{g-v}$ & divisione numeratoris $v\,dv$ per $-v+g$ peractâ, est $ds = -dv + \frac{g\,dv}{g-v}$, & sumptis fluentibus $s=Q-v-g\times L.\overline{g-v}$. Quia verò ubi evanescit spatium s, fit $v=c$ (per hyp.) erit constans $Q=c+g\,L.\overline{g-c}$, ac proinde $s=c-v+L.\frac{g-c}{g-v}$. Tempus habetur per æquationem $dt=\frac{dv}{g-v}$ cujus fluens $t=Q-L.g-v=L.\frac{g-c}{g-v}$. Simili modo pro corporis ascensu invenitur $s=c-v+g\,L.\frac{g+v}{g+c}$, & $t=L.\frac{g+c}{g+v}$.

108. Si resistentia sit ut velocitatis quadratum, erit $n=2$ & (106) $r=\frac{v^2}{a}$. Sit b velocitas terminalis, & quia resistentia gravitati æqualis est ubi corpus velocitatem maximam habet, erit $g=\frac{bb}{a}$, & $bb=ag$. Sit e spatium quod corpus vi gravitatis constante g cadendo in medio non resistente describit ut acquirat velocitatem b, & erit $2ge=bb=ag$ (23) ideoque $a=2e$. His positis, corpore descendente erit (106) $ds=\frac{a\,v\,dv}{ag-vv}=\frac{2ev\,dv}{bb-vv}$. Ponatur $bb-vv=xx$, & proindè sumptis fluxionibus $v\,dv=-x\,dx$, atquè ideo $ds=-\frac{2e\,x\,dx}{xx}=-\frac{2e\,dx}{x}$, & sumptis fluentibus $s=Q-2e\,L.x=Q-e\,L.x^2=Q-e\,L.\overline{bb-vv}$. Ponatur $s=0$, & ideò $v=c$, & indè habebitur $Q=e\,L.bb-cc$, ac propterea $s=e\,L.\frac{bb-cc}{bb-vv}$. Sit $L.h=1$ & erit $s\,L.h=e\,L.\frac{bb-cc}{bb-vv}$; $\frac{s}{e}\times L.h=L.h^{\frac{s}{e}}=L.\frac{bb-cc}{bb-vv}$, ideòque $h^{\frac{s}{e}}=\frac{bb-cc}{bb-vv}$; undè eruitur $vv=\frac{bb\,h^{\frac{s}{e}}+cc-bb}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus obtinetur per æquationem (106) $dt=\frac{a\,dv}{ag-vv}=\frac{2e\,dv}{bb-vv}=\frac{\frac{e}{b}dv}{b+v}+\frac{\frac{e}{b}dv}{b-v}$; quod patet, si duæ postremæ fractiones ad communem denominatorem reducantur, &, sumptis fluentibus $t=Q+\frac{e}{b}L.b+v-\frac{e}{b}L.b-v=Q+\frac{e}{b}L.\frac{b+v}{b-v}$. Ponatur $t=0$, & ideò $v=c$,

$v=c$, & invenietur $Q=-\frac{e}{b}L.\frac{b+c}{b-c}$. Quarè erit $t=\frac{e}{b}L.\frac{b+v\times b-c}{b-v\times b+c}$. Si corpus è quiete cadat erit $c=o$, & ideò $s=eL.\frac{bb}{bb-vv}$; $vv=\frac{bb\overline{h}^{\frac{s}{e}}-bb}{h^{\frac{s}{e}}}$ & $t=\frac{e}{b}L.\frac{b+v}{b-v}$.

Si in hâc ultimâ æquatione loco $\overline{h}^{\frac{s}{e}}$ scribatur m & loco v ipsius valor $b\sqrt{1-\frac{1}{m}}$, habebitur $t=\frac{e}{b}\times\frac{L\,1+\sqrt{1-\frac{1}{m}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{m}}}$.



Simili modo ascendente corpore invenietur $s=eL\frac{bb+cc}{bb+vv}$, & $vv=\frac{bb+cc-bb\overline{h}^{\frac{s}{e}}}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus autem reperitur per æquationem $dt=-\frac{a\,dv}{ag+vv}=-\frac{e\,dv}{bb+vv}$. Centro D, radio $DA=b$, describatur circuli quadrans ANE, velocitas c, sub initio ascensûs exponatur per datam tangentem AP, velocitas residua v, per tangentis illius partem AM, & dv per Mm, jungantur DP, DM, Dm, circulo occurrentes in T, N, n, & ex puncto M, demissum sit ad Dn perpendiculum MR, triangula similia DNn, DMR, dant DM:DN vel $DA=MR:Nn$, & triangula similia mRM, MAD, dant DM:DA=Mm:MR, ideóque (ex æquo) $DM^2:DA^2=Mm:Nn$, hoc est, $bb+vv:bb=dv:Nn=\frac{bb\,dv}{bb+vv}$; undè fit $\frac{e\times Nn}{bb}=\frac{e\,dv}{bb+vv}$; & hinc habebitur $dt=-\frac{e\times Nn}{bb}$, sumptisque fluentibus $t=Q-\frac{e\times AN}{bb}$. Ponatur $t=o$, & fiet $AM=AP$, & $AN=AT$, ideoque $Q=\frac{e\times AT}{bb}$. Quarè erit $t=\frac{e\times TN}{bb}=\frac{TN}{2g}$, (ob $bb=2ge$).

PROBLEMA.

Definire motum corporis in lineâ rectâ AC, vi quâlibet centripetâ ad punctum C tendente sollicitati in medio cujus resistentia est ut densitas medii & dignitas quævis velocitatis corporis conjunctim.

109. Corpus è loco dato A vel a, datâ cum velocitate projectum ascendat per spatium aP vel descendat per spatium AP, dicanturque velocitas projectionis in a vel $A=c$, spatium descriptum aP vel $AP=s$, tempus quo descriptum est $=t$, velocitas corporis in loco $P=v$, vis centripeta ibidem $=g$, densitas medii in eodem loco $=k$, resistentia $r=kv^n$, distantia $CP=x$, & data Ca vel $CA=b$, erit (22) pro corporis ascensu, $g\,dx+kv^n\,dx=-v\,dv$, & pro descensu $gdx-kv^ndx=-vdv$, quarum æquationum alterutram resolvere satis est, cum altera in alteram abeat, mutato signo + vel − quantitati k præfixo. Quia verò corpore ascendente est $aP=s=x-b$, & proinde $ds=dx$; at eodem descendente $AP=s=b-x$, & ideo $ds=-dx$, erit pro corporis ascensu (13) $dt=\frac{ds}{v}=\frac{dx}{v}$, & pro descensu $dt=$



DE MOTU CORPORUM.

$-\frac{dx}{v}$. His positis breviter exponimus præcipuos casus in quibus superiorum æquationum variabiles separari & æquationes proindè per curvarum quadraturas construi possunt.

110. Si in æquatione generali $g\,dx \pm kv^n dx = -v\,dv$, quæ est pro ascensu & descensu simul. Sit g quantitas constans, & densitas k, ut distantiæ dignitas $x^{\frac{1}{2}n}$ reciprocè, hoc est, $k = \frac{1}{ax^{\frac{1}{2}n}}$, variabiles separari possunt. Nam æquatio generalis in hanc mutabitur $g\,dx \pm \frac{v^n dx}{ax^{\frac{1}{2}n}} = -v\,dv$. Ponatur $v^2 = xz$, ideoque $v^n = x^{\frac{1}{2}n} z^{\frac{1}{2}n}$, & $v\,dv = \frac{x\,dz + z\,dx}{2}$, & æquatio evadet $g\,dx \pm \frac{z^{\frac{1}{2}n} dx}{a} = \frac{-x\,dz - z\,dx}{2}$, undè eruitur $\frac{dx}{x} = \frac{a\,dz}{2ag + az \pm 2z^{\frac{1}{2}n}}$. In quâ variabiles sunt separatæ.

111. Si densitas k constans fuerit, vis centripeta g ut distantia x à centro & resistentia ut velocitas, variabiles separari possunt. Nam si ponatur $g = ax$, k constans & $n = 1$, æquatio generalis fiet $a\,x\,dx \pm k\,v\,dx = -v\,dv$, in quâ neglectis coefficientibus datis a & k, termini omnes sunt homogenei seu ejusdem dimensionis. Ponatur itaque $v = zx$, & proindè $dv = z\,dx + x\,dz$, & æquatio evadet $a\,x\,dx \pm kzx\,dx = -z^2 x\,dx - zx^2\,dz$, & terminis omnibus per x divisis, iisque ordinatis invenitur $\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{a \pm kz + z^2}$, quæ æquatio, concessâ Hyperbolæ vel circuli quadraturâ semper construi potest.

112. Si, cæteris paribus, medii resistentia sit ut quadratum velocitatis, id est, $n = 2$, & densitas medii k visque centripeta g sint ut functiones quælibet distantiæ x, variabiles in superioribus æquationibus (109.) separationem admittunt. In hâc Hypothesi æquatio pro corporis ascensu fit $g\,dx + kv^2 dx = -v\,dv$, seu $v\,dv + kv^2 dx = -g\,dx$. Ponatur $k\,dx = \frac{dz}{2z}$, ut fit $2zv\,dv + v^2 dz = -2gz\,dx$, & sumptis fluentibus erit $zv^2 = Q - S.\,2gz\,dx$, & $v^2 = \frac{Q - S.\,2gz\,dx}{z}$. Quia verò $k\,dx = \frac{\frac{1}{2}dz}{z}$, erit $S.\,k\,dx = \frac{1}{2}L.\,z$ & $S.\,2k\,dx = L.\,z$. Atquè ideò si fuerit $L.\,h = 1$, $h^{S.\,2k\,dx} = z$ undè fit $v^2 = \frac{Q - S.\,2g\,h^{S.\,2k\,dx}\,dx}{h^{S.\,2k\,dx}}$, pro corporis ascensu; & pro descensu loco $+k$, scribendo $-k$, erit $v^2 = \frac{Q - S.\,2g\,h^{-S.\,2k\,dx}\,dx}{h^{-S.\,2k\,dx}}$ $= Q\,h^{S.\,2k\,dx} - h^{S.\,2k\,dx} S.\,2g\,h^{-S.\,2k\,dx}\,dx$ in quibus æquationibus variabiles sunt separatæ, quia (per Hyp.) quantitates k & g, sunt ut functiones variabilis x. Constans Q determinatur ex eo quod ubi $x = b$, sit $v = c$, tempus verò definitur per æquationem $dt = \frac{dx}{v}$ pro corporis ascensu, & per æquationem $dt = -\frac{dx}{v}$ pro corporis descensu, in quibus æquationibus, si loco v substituatur ipsius valor per x inventus, variabiles erunt separatæ. Sed de his vide Mechanicam Clar. Euleri.

PRO-

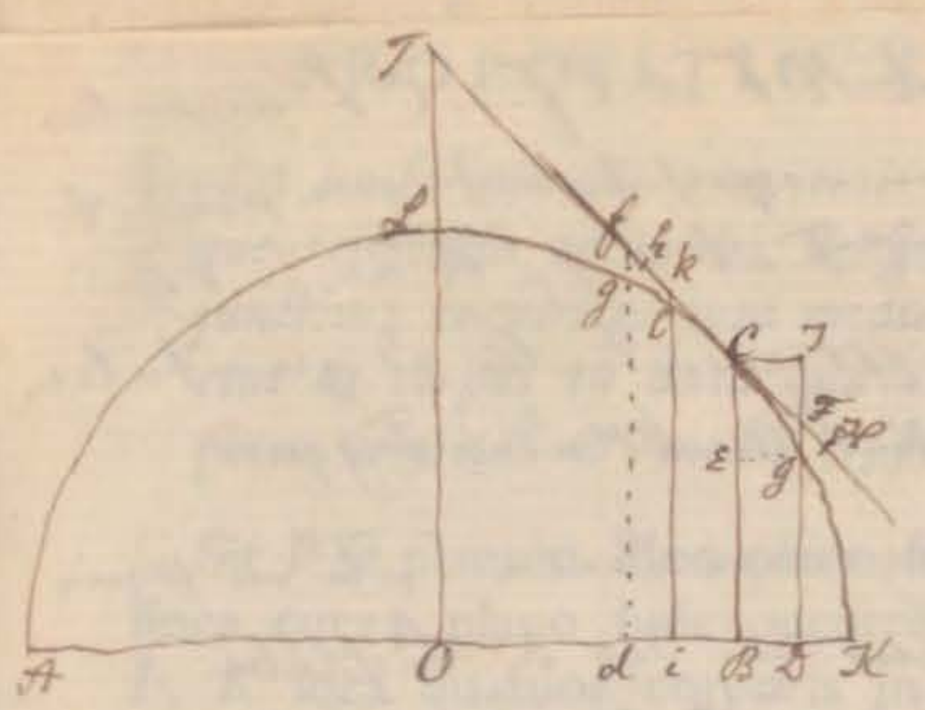
LIBER SECUNDUS. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

113.

... ci ... medii refi-
cipp
pp
kd
s
r
i
i

Editio prima. Prop. X Problema III Tandem ste
(pag 260) Sit AK planum illud plano schematis per-
pendiculare; ACK linea curva; C corpus in ipsa motum
et CFc recta ipsam tangens in C. Frugatus autem corpus
C nunc progredi ab A ad K per lineam illam ACK
nunc vero regredi per eandem lineam et in progressu in
pedii a Medio, in regressu aeque promoveri, sic ut
in iisdem locis eadem semper sit corporis progre-
dientis velocitas. Aequalibus autem temporibus describat
corpus progrediens arcum quam minimum CQ et corpus
regrediens arcum Cq et erit CH, ch longitudines aequa-
les rectilineae, quas corpora de loco C excentrica, his
temporibus, absque Medii et Gravitatis actionibus de-
scriberent: et a punctis C, Q, q, ad planum horizontale
AK demittantur perpendicula CB, QD, qd, quorum
QD et qd tangenti occurrant in F et f. Per
Medii resistentiam fit, ut corpus progrediens, vice
longitudinis CH, describat solummodo longitudinem
CF, et per vim gravitatis transferatur corpus de F in
G: adeoque lineola HF vi resistentiae et
lineola FG vi gravitatis simul generantur. Proinde
(per Lem. X (Lib. I) (ex pag. 71. Lib. I)) lineola Fg est ut vis gra-
vitatis et quadratum temporis conjunctim; adeoque
(ob datam gravitatem) ut quadratum temporis; et
lineola HF ut resistentia et quadratum temporis,
hoc est, ut resistentia et lineola Fg. Et inde
resistentia fit ut HF directa et FG inverse sive
ut HF : FG. Haec ita se habent in lineolis nascen-
tibus. Nam in lineolis finitae magnitudinis hae
rationes non sunt accuratae.

Et simili argumento est fg ut quadratum
temporis adeoque ob aequalia tempora aequalia



ipsi FG et impulsus quo corpus regrediens urgetur est ut hf : fg. Sed impulsus corporis regredientis et resistentiæ progredientis, ipso motus initio æquantur, adeoque et ipsis proportionales hf : fg et HF : FG æquantur; et propterea ob æquales fg et FG, æquantur etiam hf et HF suntque adeo CF, CH (vel Ch) et Cf in progressione arithmetica et inde HF semidifferentia est inter Cf et CF, et resistentiæ quæ supra fuit ut HF : FG est ut (Cf − CF) : FG.

Est autem resistentia ut Medii densitas et quadratum velocitatis. Velocitas autem ut descripta longitudo CF directe, et tempus VFG inverse, hoc est ut CF : VFG, adeoque quadratum velocitatis ut CF$_q$: FG. Quare resistentia, ipsique proportionalis (Cf − CF) : FG est ut Medii **densitas** et CF$_q$: FG **conjunctim**, et inde Medii **densitas** ut (Cf − CF) : FG directe, et CF$_q$: FG inverse, id est ut (Cf − CF) : CF$_q$.

Corol. 1. Et hinc colligitur quod si in Cf capiatur Ck æqualis CF, et ad planum horizontale demittatur perpendiculum ki secans curvam ACK in l; fiat Medii densitas ut (FG − kl) : CF × (FG + kl). Erit enim fC ad kC ut VfG seu VFG ad Vkl et divisim fk ad kC id est Cf − CF ad CF ut VFG − Vkl ad Vkl hoc est (si ducatur terminus uterque in VFG + Vkl) ut FG − kl ad kl + VFG × kl sive ad FG + kl. Nam ratio primæ nascentium kl + VFG × kl et FG + kl est æqualitatis. Scribatur itaque (FG − kl) : (FG + kl) pro (Cf − CF) : CF, et Medii densitas quæ fuit ut Cf − CF : CF$_q$ evadet ut (FG − kl) : CF × (FG + kl).

113.

... si ... medii resi-
... ctuppkd
... s
... f
... i
... .
... .
... .

Corol. II Unde cum 2 HF et Cf − CF aequentur et FG et kl (ob rationem aequalitatis) componant 2 FG; erit 2 HF ad CF ut FG − kl ad 2 FG et inde HF ad FG hoc est resistentia ad gravitatem ut rectangulum CF in FG − kl ad 4 FG quad.

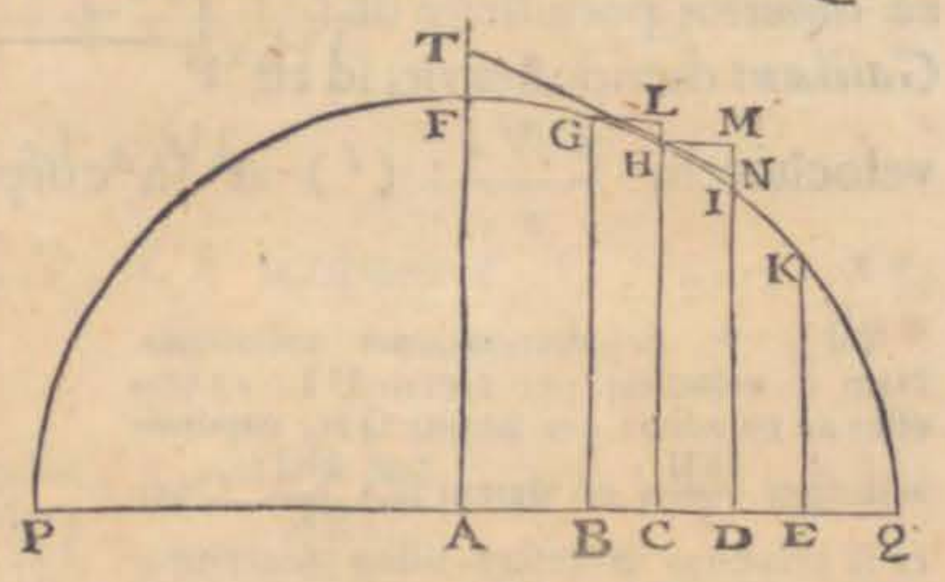
Corol. III Et hinc si curva linea etc wie pagina 87 der Edition von Le Seur nur dass die Buchstaben der figur andere (=37) gewählt sind, und wo ### Corol II überschrieben ist, steht in der ersten Ausgabe nur 2 Corollaria existiren.

Newton sagt also, wie vorsteht, und in ### meiner 2ten=Ausgabe (auf pag 89) zu lesen ist, den ersten Lemmate der Regel in der 2ten Ausgabe fast unverändert, ein Corollarium zugesetzt, aber gradezu dort zu Nicolaus (und Joh) Bernoulli den Differentialkalkul finden, (ein Corollarium III [oder II] und in allen darauf folgenden Exempeln) in der ersten Ausgabe überigens alles so gelassen wie es in der ersten Ausgabe war, und nur in den letzten Zeilen, wann der Schluß zu Ende war, da hat Nicolaus (und Joh) Bernoulli vollen [als das Verhältniß 3 : 2 statt in Newtons ersten Ausgabe setzte 1 : 1 sei) adoptirt, unter aber nur gegen Bernoulli's (wiederholte?) gemachter Anmerkung, oder gegen den acta erudit, wo Bernoulli es öffentlich gesagt hatte, oder überhaupt auf was gegen der vorstehenden Anmerkungen der Aufsatz ### diesen propos X prob. III, welche vorstehenden Anmerkungen (wieder) nöthig oder unthunlich oder gar nicht folge von Bernoulli's Reizen sind.

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, sitque resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis.

Sit PQ planum illud plano schematis perpendiculare; $PFHQ$ linea curva plano huic occurrens in punctis P & Q; G, H, I, K loca quatuor corporis in hâc curvâ ab F ad Q pergentis; & GB, HC, ID, KE ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demissæ, & lineæ horizontali PQ ad puncta B, C, D, E insistentes; & sint BC, CD, DE distantiæ ordinatarum inter se æquales. A punctis G & H ducantur rectæ GL, HN curvam tangentes in G & H, & ordinatis CH, DI sursum productis occurrentes in L & N, & compleatur parallelogrammum $HCDM$. Et (b) tempora, quibus corpus describit arcus GH, HI, erunt in subduplicatâ ratione altitudinum LH, NI, quas corpus temporibus illis describere posset, à tangentibus cadendo; & (c) velocitates erunt ut longitudines descriptæ GH, HI directè & tempora

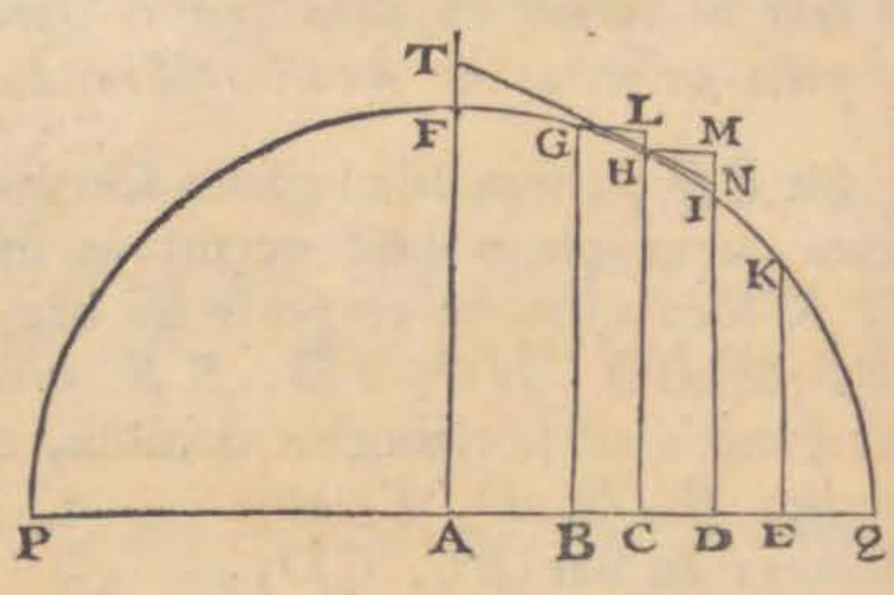


(b) 113. * *Et tempora quibus corpus describit arcus* evanescentes GH, HI, *erunt in subduplicatâ ratione altitudinum LH, NI.* Eodem enim temporis momento quo corpus vi motûs insiti in G, describeret tangentem GL, vi gravitatis uniformi caderet per altitudinem LH qualem in medio non resistente percurreret eo ipso tempore; resistentiæ enim effectus altitudinem eam minuit quantitate ejus ipsius respectu infinitè parvâ, quæ itaque hic non est spectandâ, itaque corpus arcum GH describere censendum est vi compositâ ex vi motus insiti & vi gravitatis. Et simili modo, tempore eodem quo describit arcum HI, vi gravitatis caderet per altitudinem NI. Quare (per Lem. 10. Lib. 1.) tempora quibus corpus describit arcus GH, HI, seu quibus cadit per altitudines LH, NI, sunt in subduplicatâ ratione harum altitudinum. 113.

(c) * *Et velocitates erunt* (11).

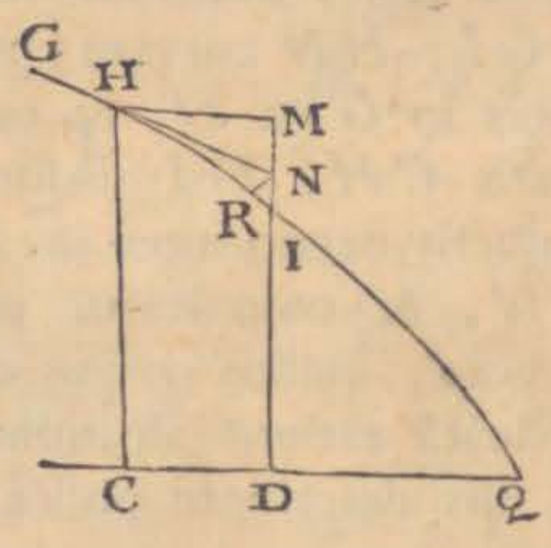
DE MOTU CORPORUM.

pora inversè. Exponantur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{T}$; & (d) decrementum velocitatis tempore t factum exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à resistentiâ corpus retardante, & gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente & spatium NI cadendo describente, generat velocitatem, quâ duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset, ut (e) *Galilæus* demonstravit; id est velocitatem $\frac{2NI}{t}$: (f) at in corpore arcum HI describente,



(d) * *Et decrementum velocitatis.* Nam si velocitas per arcum HI, eadem esset ac velocitas per arcum GH, exponeretur per $\frac{GH}{T}$, est autem illa $\frac{HI}{t}$. Quarè si velocitas decrescat, illius decrementum tempore t factum, exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Si verò crescat, exponetur per $\frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$; hoc decrementum vel incrementum oritur à resistentia corpus retardante ejusque motui secundum directionem tangentis HN vel arcûs HI directè contraria (1) & à gravitate motum corporis descendentis acelerante, vis enim gravitatis in vires duas videlicet normalem & tangentialem divisa (24) corporis in curvâ descendentis motum per vim tangentialem accelerat quem vis normalis nec accelerat, nec retardat. Quarè si resistentia vi gravitatis tangentiali major est, motus retardatur, si minor acceleratur, si æqualis nec acceleratur nec retardatur.

(e) * *Ut Galilæus demonstravit.* (Vid. dem. not. 29. lib. 1.).



(f) * *At in corpore &c.* Nam solâ vi insitâ, corpus tempore t describeret tangentem HN, & vi gravitatis solâ altitudinem NI, viribus verò conjunctis describit arcum HI. Quarè gravitas spatium à corpore secundùm directionem HN vel HI, describendum auget solâ longitudine HI $-$ HN. Est autem $HI - HN = \frac{MI \times NI}{HI}$. Si enim centro H & radio HN, descriptus intelligatur arcus circularis NR, secans HI in R, duo triangula IRN, IMH similia erunt, ob angulum MIH utri-

auget arcum illum solâ longitudine $HI-HN$ seu $\frac{MI \times NI}{HI}$; ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, (a) & habebitur decrementum velocitatis ex resistentiâ solâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; (b) resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abscissis CB, CD, CE scribantur (c) -0, 0, 20.

Pro

utrique triangulo communem, & angulos IRN, IMH rectos, ideoque æquales, unde erit HI : MI = NI : RI seu HI − HN = $\frac{MI \times NI}{HI}$. Cum igitur RI sit spatium tempore t vi gravitatis tangentiali descriptum (113) velocitas illa quam vis illa tempore t generat, exponetur (29. lib. 1.) per $\frac{2RI}{t} = \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$.

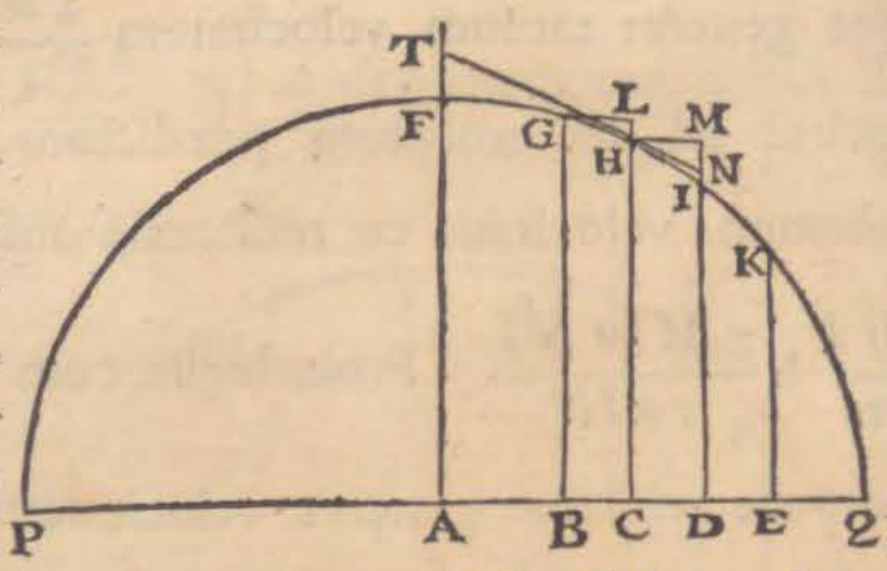
(a) * *Et habebitur decrementum velocitatis ex solâ resistentiâ oriundum, nempe* $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$, non solum in eo casu quo resistentia vim gravitatis tangentialem superat, sed etiam in eo casu quo ab illâ superatur. Sit enim velocitatis decrementum ex solâ resistentiâ oriundum V, cum incrementum velocitatis vi gravitatis tangentiali genitum sit $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$, erit in primo casu $V - \frac{2MI \times NI}{t \times HI} = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$ (113), ideoque $V = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$; at in secundo casu erit (113) $\frac{2MI \times NI}{t \times HI} - V = \frac{HI}{t} - \frac{GH}{t}$, & proinde $V = \frac{2MI \times NI}{t \times HI} + \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$, quæ eadem est expressio ac prius. 113.

(b) * *Resistentia erit ad gravitatem &c.* Vires enim acceleratrices vel retardatrices sunt ut velocitatum elementa quæ dato temporis momento generant aut extinguunt, (13. lib. 1).

(c) * *Scribantur* -0, 0, 20. Si enim abscissæ CD, CE affirmativè capiantur, abscissæ CB, &c in contrariam partem sumptæ negativè debent exprimi.

DE MOTU CORPORUM.

Pro ordinata CH ſcribatur P, & pro (d) MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo+Roo+So^3+$&c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo+So^3+$&c. (e) erunt NI, & (f) ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P-Qo-Roo-So^3-$ &c. $P-2Qo-4Roo-8So^3-$ &c. & $P+Qo-Roo+So^3-$&c. reſpectivè. Et quadrando differentias ordinatarum $BG-CH$ & $CH-DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, (g) habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo+QQoo-2QRo^3+$&c. & $oo+QQoo+2QRo^3+$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1+QQ}-\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, & $o\sqrt{1+QQ}+\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab ordinatâ CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinatâ DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK,



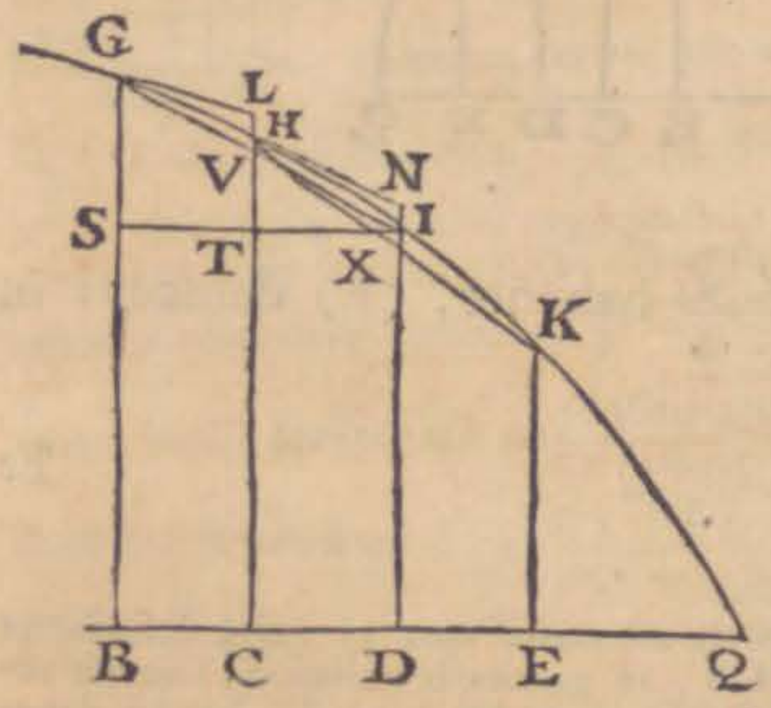
(d) * *Et pro MI ſcribatur ſeries quælibet.* Nam ordinatarum CH, DN differentia fluxionalis MI exprimi poteſt per ſeriem infinitam $\dot{Q}o+\dot{R}oo+\dot{S}o^3+$ &c. in quâ $\dot{Q}$, $\dot{R}$, $\dot{S}$, &c. ſunt quantitates finitæ hic generaliter ſumptæ & poſtea in ſingulis caſibus determinandæ, & o eſt incrementum naſcens & conſtans abſciſſæ (552, 556. lib. 1.).

(e) * *Erunt NI &c.* (552. lib. 1.).

(f) * *Et ordinatæ &c.* Eſt enim DI = DM − MI = CH − MI = $P-\dot{Q}o-\dot{R}oo-\dot{S}o^3-$&c. (per hyp.); & quia CE = $2o$, ſi in valore ordinatæ DI loco o ſcribatur $2o$, abibit DI in EK = $P-2\dot{Q}o-4\dot{R}oo-8\dot{S}o^3-$&c; & ſimili modo quia CB = $-o$, ſi in valore ordinatæ DI loco $+o$ ſcribatur $-o$, fiet DI = BG = $P+\dot{Q}o-\dot{R}oo+\dot{S}o^3-$&c.

(g) * *Habebuntur arcuum GH, HI quadrata &c.* Eſt enim, ob angulum HMI rectum $HI^2=HM^2+MI^2$, & HM = CD = o, ac MI = CH − DI = $\dot{Q}o+\dot{R}oo+\dot{S}o^3+$&c. ideoque $HM^2=oo$, $MI^2=\dot{Q}^2o^2+2\dot{Q}\dot{R}o^3+\dot{R}^2o^4+2\dot{Q}\dot{S}o^4+$&c.; unde $HI^2=o^2+\dot{Q}\dot{Q}o^2+2\dot{Q}\dot{R}o^3+$&c. Negliguntur autem termini in quibus eſt o^4, o^5, &c. quod præ cæteris antecedentibus evaneſcant & ad rem nihil faciant. Quare extrahendo radicem quadratam fit $HI=o\sqrt{1+\dot{Q}\dot{Q}}+\frac{\dot{Q}\dot{R}oo}{\sqrt{1+\dot{Q}\dot{Q}}}$, negle&is cæteris terminis negligendis: & ſimili modo invenitur GH $=o\sqrt{1+\dot{Q}\dot{Q}}-\frac{\dot{Q}\dot{R}oo}{\sqrt{1+\dot{Q}\dot{Q}}}$.

EK, (h) manebunt arcuum GI & HK ſagittæ $R\,o\,o$ & $R\,o\,o + 3\,S\,o^3$. Et (k) hæ ſunt lineolis LH & NI proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & t: & (l) inde ratio $\frac{t}{T}$ eſt $\sqrt{\frac{R + 3\,S\,o}{R}}$ ſeu $\frac{R + \frac{3}{2}S\,o}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2\,MI \times NI}{HI}$, ſubſtituendo ipſorum $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI valores jam inventos, (m) evadit $\frac{3\,S\,o\,o}{2R}\sqrt{1 + QQ}$. Et cum $2\,NI$ ſit $2R\,o\,o$, reſiſtentia jam erit



(h) * *Manebunt arcuum GI & HK ſagittæ &c.* Jungatur chorda GI ſecans CH in V, & ex puncto I demittatur ad BG perpendiculum IS ſecans CH in T. Erit, ob triangulorum ITV, ISG ſimilitudinem IT ad IS, ſeu DC ad DB, id eſt, 1 ad 2, ut TV ad GS, & ideo GS $=2$VT, & GB$=2$VT$+$SB$=2$VT$+$DI, & GB$+$DI$=2$VT$+2$DI, quare ſemiſumma ordinatarum GB ac DI eſt VT $+$ DI, ſeu VC, quæ ſi ab ordinatâ CH ſubducatur, remanebit arcûs GI ſagitta VH. Et ſimili ratiocino patet arcûs HK ſagittam IX æqualem eſſe differentiæ inter ordinatam DI & ſemiſummam ordinatarum CH & EK.

(k) * *Et hæ ſunt lineolis LH & NI proportionales.* Nam coeuntibus punctis B, C, D, E & G, H, I, K figuræ NHIXH, LGHVG ſimiles fiunt, & propterea latera homologa HV & IX, LH & NI proportionalia; ſunt autem (ex demonſtr.) lineolæ LH, NI ut quadrata temporum $T\,t$, quibus deſcribuntur arcus GH, HI. 113.

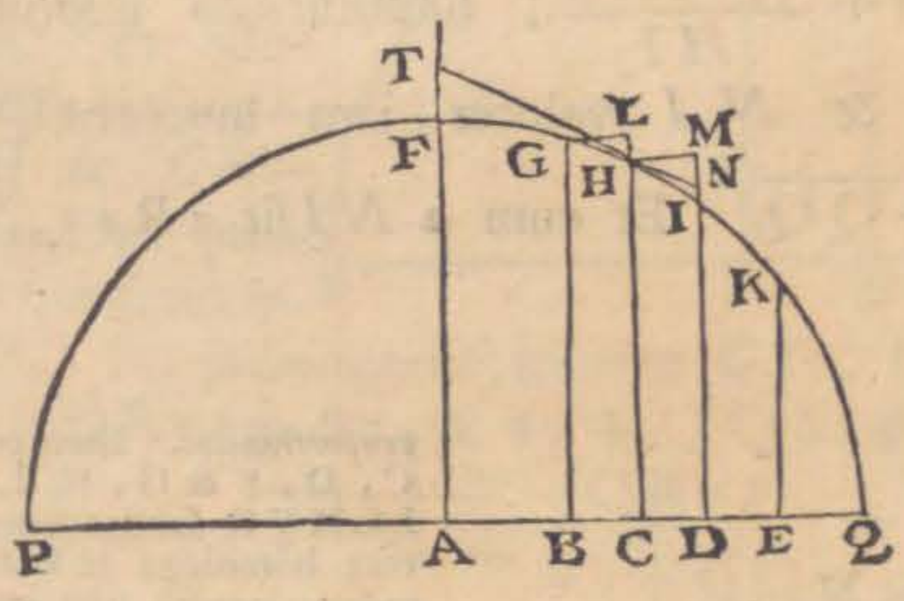
(l) * *Et inde ratio* $\frac{t}{T}$ *eſt &c.* Nam (ex demonſt.) $\frac{t^2}{T^2} = \frac{IX}{HV} = \frac{R\,o\,o + 3\,S\,o^3}{R\,o\,o} = \frac{R + 3\,S\,o}{R}$, & ideo $\frac{t}{T} = \sqrt{\frac{R + 3\,S\,o}{R}} = \sqrt{\frac{RR + 3\,SR\,o}{RR}} = \frac{\sqrt{RR + 3\,SR\,o}}{R}$; ſed $\sqrt{RR + 3\,SR\,o} = R + \frac{3\,SR\,o}{2R}$, neglectis terminis negligendis: quare erit $\frac{t}{T} = \frac{R + \frac{3}{2}S\,o}{R} = 1 + \frac{3\,S\,o}{2R}$.

(m) * *Evadit* $\frac{3\,S\,o\,o}{2R}\sqrt{1 + QQ}$. Eſt enim $\frac{t \times GH}{T} = o\sqrt{1 + QQ} - \frac{QR\,o\,o}{\sqrt{1 + QQ}} + \frac{\frac{3}{2}S\,o\,o\sqrt{1 + QQ}}{R}$, neglecto termino in quo reperitur o^3, qui præ cæteris evaneſcit. Unde fit $\frac{t \times GH}{T} - HI = \frac{\frac{3}{2}S\,o\,o\sqrt{1 + QQ}}{R}$

DE MOTU CORPORUM.

erit ad gravitatem ut $\frac{3\,S\,oo}{2\,R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2\,R\,oo$, id eſt, ut $3\,S\sqrt{1+QQ}$ ad $4\,R\,R$.

Velocitas autem ea eſt, quâcum corpus de loco quovis H, ſecundum tangentem HN egrediens, in parabolâ diametrum HC



& latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ ſeu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, (n) deinceps in vacuo moveri poteſt.

Et

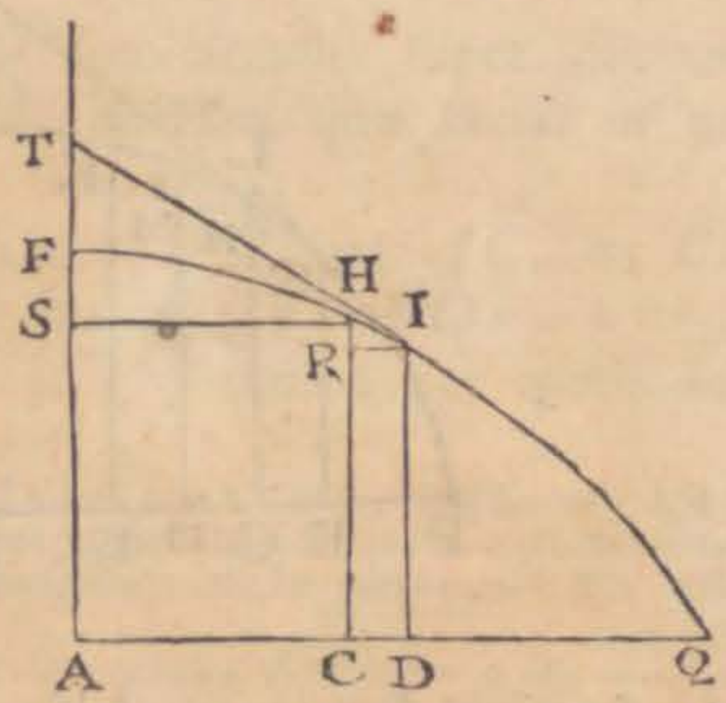
$-\frac{2\,Q\,R\,o\,o}{\sqrt{1+QQ}}$; ſed $2\,MI = 2\,Q\,o$, & $NI = R\,o\,o$ neglectis cæteris ſeriei terminis evaneſcentibus, ideoque $2\,M\,I \times N\,I = 2\,Q\,R\,o^3$, atque proinde $\frac{2\,M\,I \times N\,I}{H\,I} = \frac{2\,Q\,R\,o^2}{\sqrt{1+QQ}}$, neglecto in valore arcûs HI termino evaneſcente $\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$. Quare erit $\frac{1 \times GH}{1} - HI + \frac{2\,M\,I \times N\,I}{H\,I} = \frac{3\,S\,oo\sqrt{1+QQ}}{2\,R}$.

poris momento quo vi inſitâ deſcriberet HN, vi gravitatis uniformi, omiſſa reſiſtentia quæ hic ut nulla haberi debet (113), cadit per altitudinem NI; arcus naſcens HI, quem corpus viribus conjunctis deſcribit, uſurpari poteſt pro arcu parabolæ, cujus eſt diameter HC (40. lib. 1.), tangens HN ordinatis parallela, & NI parallela & æqualis abſciſſæ cui reſponderet ordinata æqualis HN. Quare hujus parabolæ latus rectum erit $\frac{HN^2}{NI}$ (per Theor. 1. de parab.), ſeu (per Lemma 7. lib. 1.) $\frac{HI^2}{NI} = \frac{oo+QQoo}{Roo} = 1+QQ$, neglectis terminis negligendis. Si itaque corpus in vacuo deinceps moveretur, hanc parabolam deſcriberet (40. lib. 1.).

(n) * *Deinceps in vacuo moveri poteſt.* Cum enim velocitas per arcum HI, ſeu per tangentem naſcentem HN, æquabilis cenſeri poſſit (5), & corpus eodem tem-

Et reſiſtentia eſt ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea medii denſitas eſt ut reſiſtentia directè & quadratum velocitatis inversè, id (o) eſt, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè & $\frac{1+QQ}{R}$ inversè, hoc eſt, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *Q. E. I.*

Corol. 1. Si tangens HN producatur utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet AF in T: (P) erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis



(o) * *Id eſt, ut &c.* Quia enim reſiſtentia eſt ad gravitatem conſtantem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$, erit reſiſtentia ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$. Velocitas autem eſt ut $\frac{HI}{t}$, & illius quadratum ut $\frac{HI^2}{t^2}$; & HI^2 eſt $oo+QQoo$, neglectis negligendis, t^2 verò eſt ut NI, ſeu ut Roo (ex demonſt.); adeoque velocitatis quadratum ut $\frac{1+QQ}{R}$. Quare medii denſitas erit ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4R(1+QQ)}$, & ob datum numerum $\frac{3}{4}$, ut $\frac{S\sqrt{1+QQ}}{R(1+QQ)} = \frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$.

114. Si reſiſtentia eſſet ut medii denſitas & velocitatis V dignitas quælibet V^n conjunctim; cum ſit V^n ut $\frac{HI^n}{t^n}$, ſive ut $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$, medii denſitas foret ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè & $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$ inversè, id eſt, directè ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}}}{(1+QQ)^{\frac{n-1}{2}}}$.

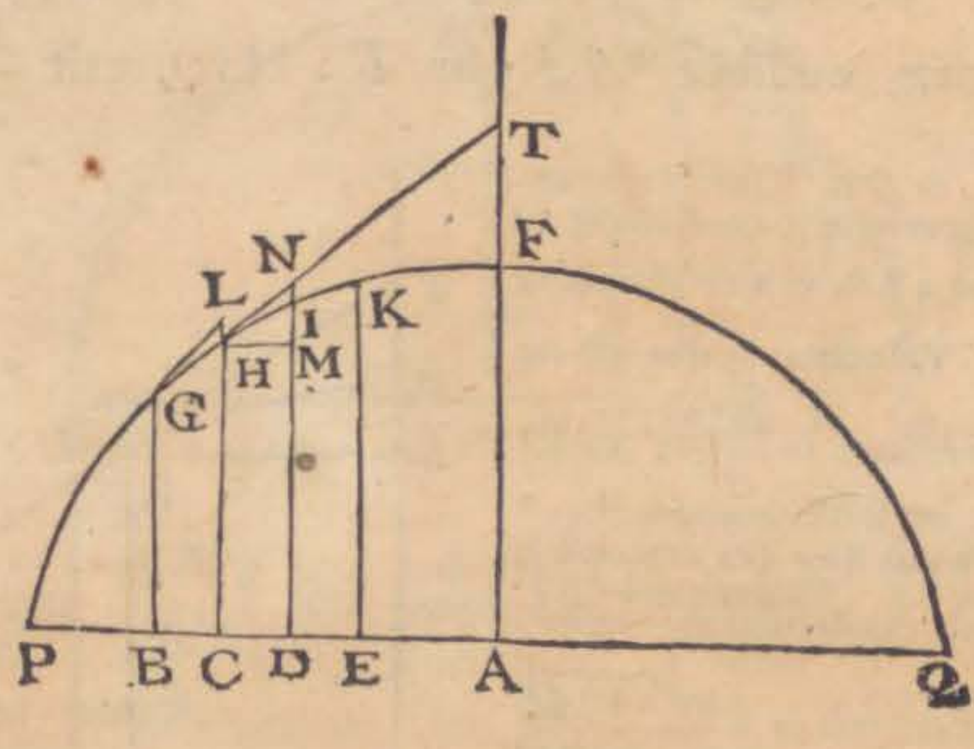
(P) * *Erit* $\frac{HT}{AC}$ *æqualis &c.* Ex punctis H & I demittantur ad AF & CH perpendicula HS & IR; & ob triangula IRH, HST ſimilia, erit HT ad HS ſeu AC ut HI ad IR vel CD, ideoque $\frac{HT}{AC}=\frac{HI}{CD}$ $=\frac{o\sqrt{1+QQ}}{o}=\sqrt{1+QQ}$. 114.

115. Hinc ſi reſiſtentia ſit ut medii denſitas & velocitatis dignitas V^n conjunctim, erit reſiſtentia ad gravitatem, ut $3S\times HT$ ad $4RR\times AC$, velocitatis dignitas n, ut $\frac{HT^n}{AC^n\times R^{\frac{n-1}{2}}}$, & medii denſitas ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}}\times AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$, ſive ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}\times\left|\frac{AC}{HT}\right|^{n-1}$ (114).

DE MOTU CORPORUM.

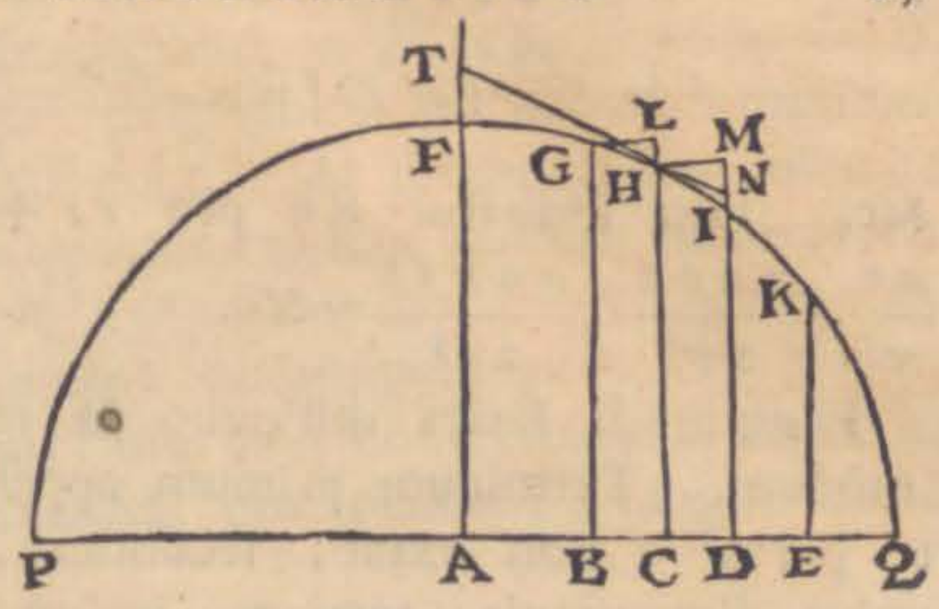
$\sqrt{1+QQ}$, ideoque in ſuperioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribi poteſt. Quâ ratione reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3S\times HT$ ad $4RR\times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & medii denſitas erit ut $\frac{S\times AC}{R\times HT^2}$

Co-



116. Superiores formulæ non ſolum pro corporis deſcenſu per arcum FQ, ſed etiam pro ejuſdem aſcenſu per arcum PF uſurpari poſſunt. Corpore aſcendente per arcum PF à P ad F, eadem fiat quæ pro deſcenſu per arcum FQ conſtructio; & tempora quibus deſcribuntur arcus GH, HI exponantur per T & t. Decrementum velocitatis tempore t factum erit $\frac{GH}{T}-\frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à reſiſtentiâ & gravitate corporis aſcendentis motum ſimul retardantibus. Gravitas in corpore cadente & ſpatium NI cadendo deſcribente, generat velocitatem $\frac{2NI}{t}$; at in corpore arcum HI deſcribente, minuit arcum illum ſolâ longitudine HN−HI ſeu $\frac{MI\times NI}{HI}$, ideoque extinguit tantum velocitatem tangentialem $\frac{2MI\times NI}{t\times HI}$. Auferatur hæc velocitas à decremento prædicto, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentiâ ſolâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T}-\frac{HI}{t}-\frac{2MI\times NI}{t\times HL}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; reſiſtentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T}-\frac{HI}{t}-\frac{2MI\times NI}{t\times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, ſive ut $\frac{t\times GH}{T}-HI-\frac{2MI\times NI}{HI}$ ad 2NI.

Jam ſi pro abſciſſis BC, CD, CE ſcribantur $-o$, o, $2o$, & pro ordinata CH ſcribatur P; MI & NI erunt $Qo-Roo-So^3-$&c., & $Roo+So^3+$&c. Nam in arcu FQ (vide fig. Newt.) DI, ſeu



Corol. 2. Et hinc, ſi curva linea $PFHQ$ definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam AC & ordinatim applicatam CH, ut moris eſt; & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expeditè ſolvetur, ut in exemplis ſequentibus.

Exempl. 1. Sit linea $PFHQ$ ſemicirculus ſuper diametro PQ deſcriptus, & requiratur medii denſitas quæ faciat ut projectile in hâc lineâ moveatur.

Biſecetur diameter PQ in A; dic AQ, n; AC, a; CH, e; & CD, o: & (q) erit DIq ſeu $AQq-ADq=nn-aa-2ao-oo$, ſeu $ee-2ao-oo$, & (r) radice per methodum

ſeu CH−MN−NI, erat $P-Qo-Roo-So^3$ &c., ideoque MN erat Qo (552. lib. 1.), & NI erat $Roo+So^3$; at in arcu PF eſt DI=CH+MN−NI, proindeque $DI=P+Qo-Roo-So^3$ &c., & hinc MI eſt $Qo-Roo-So^3$ &c. & NI eſt $Roo+So^3$. Et ſi in ſerie quæ valorem ordinatæ DI exprimit, loco o ſcribantur abſciſſæ CE, BC, ſive $2o-o$, habebuntur ordinatæ EK & BG, nempe $P+2Qo-4Roo-8So^3$ &c., & $P-Qo-Roo+So^3$ &c. reſpectivè. Et quadrando differentias ordinatarum CH−BG & DI−CH, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo+QQoo+2QRo^3$, & $oo+QQoo-2QRo^3$; quorum radices $o\sqrt{1+QQ}+\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ & $o\sqrt{1+QQ}-\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab ordinata CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinata DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK ſagittæ Roo & $Roo+3So^3$. Et hæ ſunt lineolis LH NI proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & t, & inde ratio $\frac{t}{T}$ eſt, $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$, ſeu $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t\times GH}{T}-HI-\frac{2MI\times NI}{HI}$, ſubſtituendo ipſorum $\frac{t}{T}$, HI, GH, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}-\sqrt{1+QQ}$. Et cum 2NI ſit $2Roo$, reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$. Quamadmodum pro deſcenſu inventum eſt; & corollaria eadem quoque manent. 116.

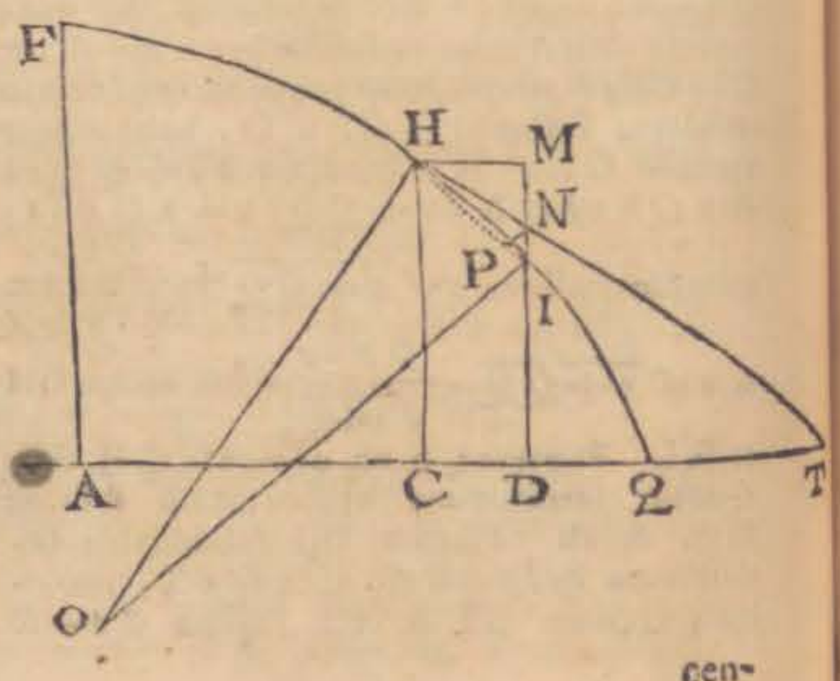
(q) * *Erit DIq ſeu &c.* Eſt enim radius AI=AQ, & ideo, ob angulum ADI rectum, $DI^2=AQ^2-AD^2=nn-aa-2ao-oo=ee-2ao-oo$, ob $CH^2=ee=AQ^2-AC^2=nn-aa$.

(r) * *Et radice per methodum noſtram extractâ*, ſeu per formulam generalem (550. lib. 1.).

DE MOTU CORPORUM.

noſtram extractâ, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} -$ &c. Hic ſcribatur nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{annno^3}{2e^5} -$ &c.

Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinitè parva o non extat; ſecundum, in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium eſt; & ſic in infinitum. Et (ſ) primus terminus, qui hic eſt e, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ CH inſiſtentis ad initium indefinitæ quantitatis o. Secundus (t) terminus, qui hic eſt $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter CH & DN, id eſt, lineolam MN, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum $HCDM$, (u) atque ideo poſitionem tangentis HN ſemper determinat; ut in hoc caſu capiendo MN ad HM ut eſt $\frac{ao}{e}$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hic eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$, deſignabit lineolam IN, quæ jacet inter tangentem & curvam, (x) ideoque determinat angulum contactus IHN ſeu cur-



cen-

(ſ) * *Et primus terminus* (552. lib. 1).

(t) * *Secundus terminus* (ibidem).

(u) 117. * *Atque ideo poſitionem tangentis HN ſemper determinat.* Producatur tangens HN ut diametro AQ occurrat in T; & propter triangulorum HMN, TCH ſimilitudinem, erit CT : HC = HM : MN. Eſt vero generatim HM = o, & MN = Qo, ac Q coefficiens ſecundi termini ſeriei generalis pro curvâ quácumque (ex demonſtr. prop. X.): quare ſi capiatur CT ad HC ut eſt 1 ad Q habebitur ſubtangens CT.

(x) 118. * *Ideoque determinat angulum contactûs ſeu curvaturam &c.* Sit O

curvaturam quam curva linea habet in *H*. Si (*y*) lineola illa *I N* finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium unà cum ſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſubſequentes evadent infinitè minores tertio, ideoque negligi poſſunt. (*z*) Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum ſerierum in ſolutione problematum, quæ pendent à tangentibus & curvaturâ curvarum.

Conferatur jam ſeries $e - \frac{a\,o}{e} - \frac{n\,n\,o\,o}{2\,e^3} - \frac{a\,n\,n\,o^3}{2\,e^5} -$ &c. cum ſerie $P - Q\,o - R\,o\,o - S\,o^3 -$ &c. & perinde pro P, Q, R & S ſcribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{n\,n}{2\,e^3}$, & $\frac{a\,n\,n}{2\,e^5}$, & pro $\sqrt{1 + Q\,Q}$ ſcribatur $\sqrt{1 + \frac{a\,a}{e\,e}}$ (*a*) ſeu $\frac{n}{e}$, & prodibit medii denſitas ut $\frac{a}{n\,e}$,

centrum circuli curvam FHQ oſculantis in H; OH, OS radii, HRI chorda arcûs HI, NR arculus circularis centro H & radio HN deſcriptus. Duo triangula IRN, IMH ſimilia erunt, ob angulos ad R & M rectos & angulum ad I utrique triangulo communem; & ideo HI eſt ad HM ut NI ad NR, ac proinde $NR = \frac{HM \times NI}{HI}$. Anguli NHI, quem tangens HN cum ſubtenſa HRI conſtituit, menſura eſt dimidius arcus HI, & anguli ad centrum HOI menſura eſt arcus totus HI (ex natura circuli); unde NR ſeu $\frac{HM \times NI}{HI}$ eſt ad HN ſeu HI (Lem. 7. lib 1.) ut $\frac{1}{2}$HI ad HO, & ideo radius oſculi $HO = \frac{HI^3}{2\,HM \times NI}$. Et quia (ex demonſt. prop. X.) $HI = o\sqrt{1+QQ}$, $HM = o$, ac $NI = Roo$; erit $HO = \frac{(1+QQ)^{\frac{3}{2}}}{2R}$. Sed angulus contactus & curvatura curvæ lineæ FHQ in H eſt ut radius oſculi HO inverſe (121. lib. 1.), id eſt, ut $\frac{2R}{(1+QQ)^{\frac{3}{2}}}$. Quare angulus ille, ſeu curvatura in H, datis ſecundo & tertio termino ſeriei in quam valor ordinatim applicatæ reſolvitur, determinabitur. 118.

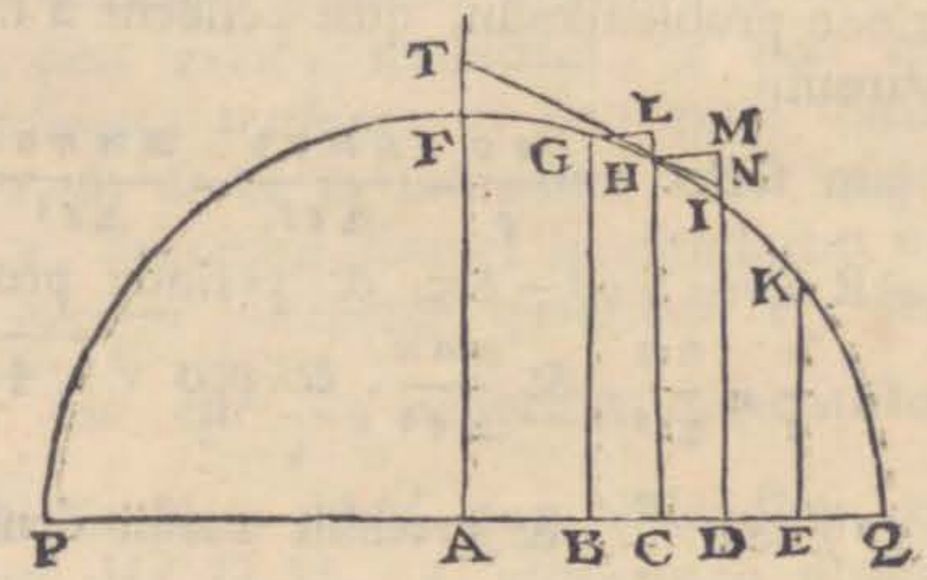
(*y*) * *Si lineola illa IN &c.* (552. 553. lib. 1.).

(*z*) * *Terminus quartus determinat variationem curvaturæ.* Quoniam differentia lineolarum LH & NI quarto ſeriei termino proportionalis eſt (554) & per lineolam NI determinatur angulus contactus ſeu curvatura curvæ in puncto H (118) & per lineolam LH curvatura in puncto G; per harum linearum differentiam ſeu per quartum ſeriei terminum determinabitur differentia ſeu variatio curvaturæ, ductâque aliâ tangente ſimiliter determinabitur variatio variationis, & ſic deinceps.

(a) * *Seu* $\frac{n}{e}$. Eſt enim $1 + \frac{a\,a}{e\,e} = \frac{e\,e + a\,a}{e\,e} = \frac{n\,n}{e\,e}$.

DE MOTU CORPORUM.

hoc eſt (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, ſeu $\frac{AC}{CH}$, id eſt, (b) ut tangentis longitudo illa HT, quæ ad ſemidiametruum AF ipſi PQ normaliter inſiſtentem terminatur: & reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3a$ ad $2n$, id eſt, ut $3AC$ ad circuli diametrum PQ: (c) velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare ſi corpus juſtâ cum velocitate ſecundum lineam ipſi PQ parallelam exeat de loco F, & medii denſitas in ſingulis locis H ſit ut longitudo tangentis HT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo H ſit ad vim gravitatis ut $3AC$ ad PQ, corpus illud deſcribet circuli quadrantem FHQ. *Q. E. I.*



At

(b) * *Id eſt, ut tangentis longitudo illa HT &c.* Jungatur radius AH, & ob angulum rectum quem tangens TH cum radio AH conſtituit, parallelaſque AT, CH, triangulum AHC ſimile erit triangulo ATH, & inde eſt TH ad HA, ut AC ad HC, id eſt, $\frac{AC}{HC}$ eſt ut $\frac{HT}{AH}$, ſeu ut HT ob datum radium AH.

(c) * *Velocitas autem erit ut* $\sqrt{CH}$. Nam (ex demonſt. prop. X.) velocitas eſt ut eſt ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, id eſt, ut $\sqrt{e}$, vel $\sqrt{2CH}$ ideoque ut $\sqrt{CH}$.

119. Quoniam igitur velocitas eſt ut $\sqrt{CH}$, medii denſitas ut tangens HT, & reſiſtentia ut AC, (quia gravitas & circuli diameter PQ data ſunt) corpore perveniente ad punctum Q lineæ horizontalis, velocitas ejus nulla erit, medii denſitas infinita, reſiſtentia finita. Si vero ponatur CH negativa, ut corpus infra horizontalem PQ pergat; fiet velocitas ut $\sqrt{-CH}$, quantitas imaginaria; & ideo corpus non poteſt infra horizontalem PQ deſcendere. At dum corpus eſt in F, velocitas ejus eſt ut $\sqrt{AF}$, medii denſitas nulla, & reſiſtentia nulla.

At ſi corpus idem de loco P, ſecundum lineam ipſi PQ perpendicularem egrederetur, & in arcu ſemicirculi PFQ moveri inciperet, ſumenda eſſet AC ſeu a ad contrarias partes centri A, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet & (d) ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret medii denſitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem denſitatem, hoc eſt, quæ motus corporum accelerat, natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non poteſt, ut corpus aſcendendo à P deſcribat circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus à medio impellente accelerari, non à reſiſtente impediri.

Exempl. 2. Sit linea PFQ parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur medii denſitas, quæ faciat ut projectile in ipsâ moveatur.

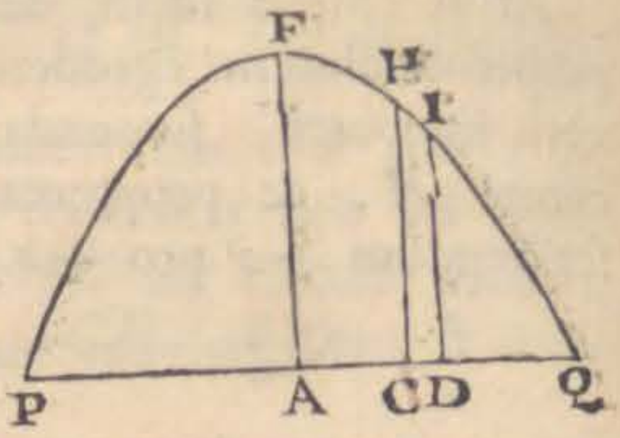
Ex

(d) * *Scribendum* $-a$ *pro* $+a$. Nam formula quæ denſitatem medii exponit, corporis aſcenſui & deſcenſui communis eſt, ſicut & aliæ formulæ quæ reſiſtentiam & velocitatem exponunt (116); & idcirco ut quantitas quæ denſitatem medii corpore deſcendente exponit eamdem exponat pro corporis aſcenſu per eumdem vel ſimilem & æqualem arcuum, ſubſtituendus eſt in illâ quantitate valor abſciſſæ, quæ corpore deſcendente hic poſitiva eſt, aſcendente negativa.

120. Atque hinc generatim colligitur eumdem curvæ arcum, vel ſimiles & æquales utrinque ab axe arcus, non poſſe aſcenſu & deſcenſu deſcribi in uno medio denſitatis utcumque variabilis, id eſt, ſi arcus unus aſcenſu deſcribi poteſt, deſcenſu deſcribi non poſſe, & contra. Nam ſi in ſolutione problematis tertii pro corporis deſcenſu per arcum FQ, origo abſciſſæ poſitivæ AC ſtatuatur in A, & pro CB, CD, CE ſcribantur $-o$, o, $2o$, erit reſiſtentia ut $\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$. Pro aſcenſu per eumdem arcum à Q ad F, abſciſſa eadem AC ſumenda erit negative, cumque ſit o abſciſſæ fluxio, loco CB, CD, CE ſcribendum erit $o-o-2o$ in valoribus linearum MI, NI, DI, EK & BG; & abſoluto calculo, ut in eâdem pro deſcenſu ſolutione, reſiſtentia pro aſcenſu invenietur proportionalis quantitati $-\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ negativa eſt, ſi prior $+\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ pro deſcenſu erat, poſitiva ſit; & contra. 120

DE MOTU CORPORUM.

(e) Ex naturâ parabolæ, rectangulum PDQ æquale eſt rectangulo ſub ordinatâ DI & rectâ aliquâ datâ: hoc eſt, ſi dicantur recta illa b; PC, a; PQ, c; CH, e; & CD, o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ ſeu $ac-aa-2ao+co-oo$ æquale eſt



rectangulo b in DI, ideoque DI æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam ſcribendus eſſet hujus ſeriei ſecundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qo, tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cum verò plures non ſint termini, debebit quarti coefficiens S evaneſcere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, cui medii denſitas proportionalis eſt, nihil erit. Nullâ igitur medii denſitate movebitur projectile in parabolâ, (f) uti olim demonſtravit *Galilæus*. *Q. E. I.*

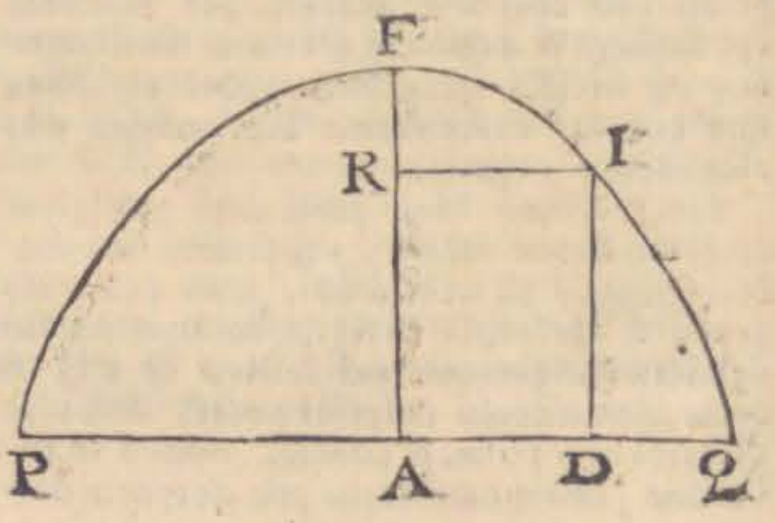
Exempl. 3. Sit linea AGK hyperbola, aſymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur medii denſitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hâc lineâ.

Sit MX aſymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V; & ex naturâ hyperbolæ, (g) rectan-

(e) * *Ex natura parabolæ, rectangulum &c.* Ex puncto I ad axem parabolæ FA demiſſum ſit perpendiculum IR, ſitque axis latus rectum $=b$; erit (per theor. 1. de parab.) $b\times FR=RI^2=AD^2$, & $b\times FA=AQ^2$. Quare $b\times FA-b\times FR$, ſeu $b\times RA$, vel $b\times DI=AQ^2-AD^2=\overline{AQ+AD}\times\overline{AQ-AD}=PD\times DQ$. Q. E. D.

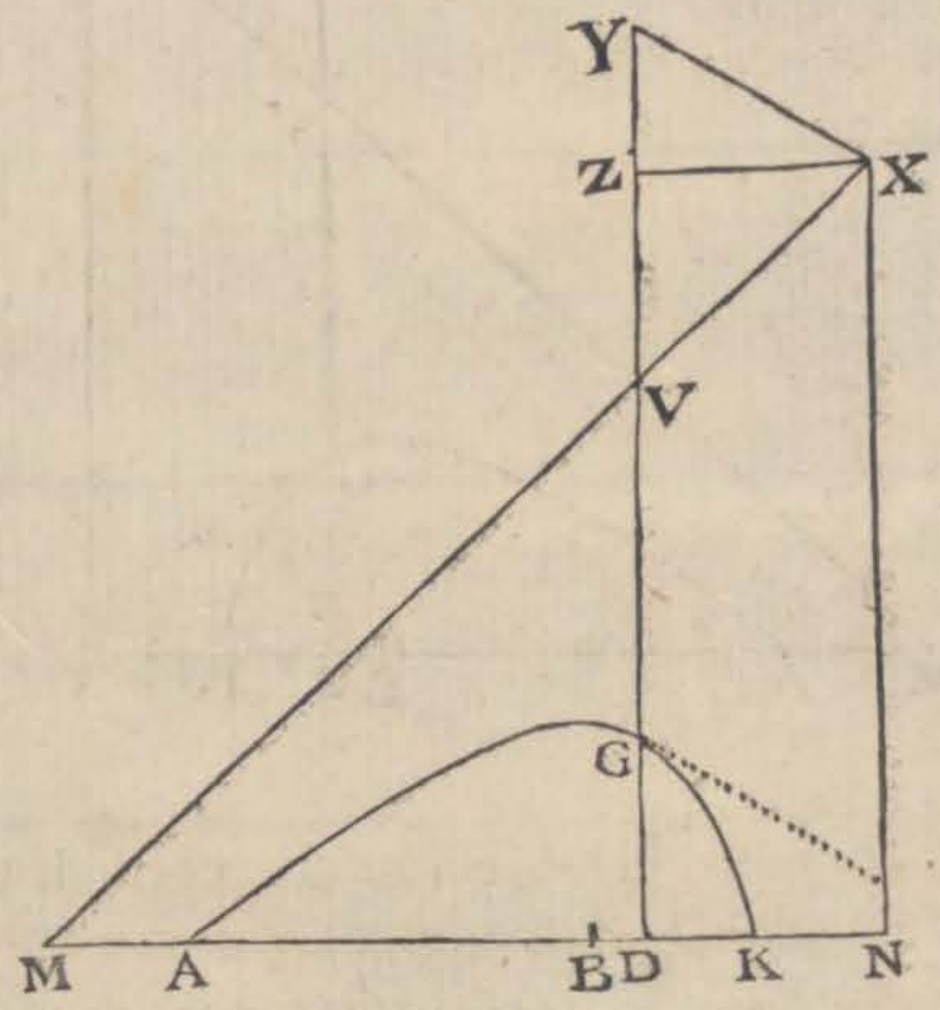
(f) * *Uti olim demonſtravit Galilæus.* Vide demonſtrationem n. 40. lib. 1.

(g) * *Rectangulum XV in VG dabitur*, per theor. 4. de hyp.



ctangulum XV in VG dabitur. (h) Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb: & completo parallelogrammo $DNXZ$; dicatur BN, a; BD, o; NX, c; & ratio data VZ ad ZX vel DN ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD seu $NX-VZ-VG$

LIBER SECUNDUS. SECTIO II. PROP. X. PROB. III.



æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ (k) in seriem convergentem $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c-\frac{m}{a}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. (i) Hujus se-

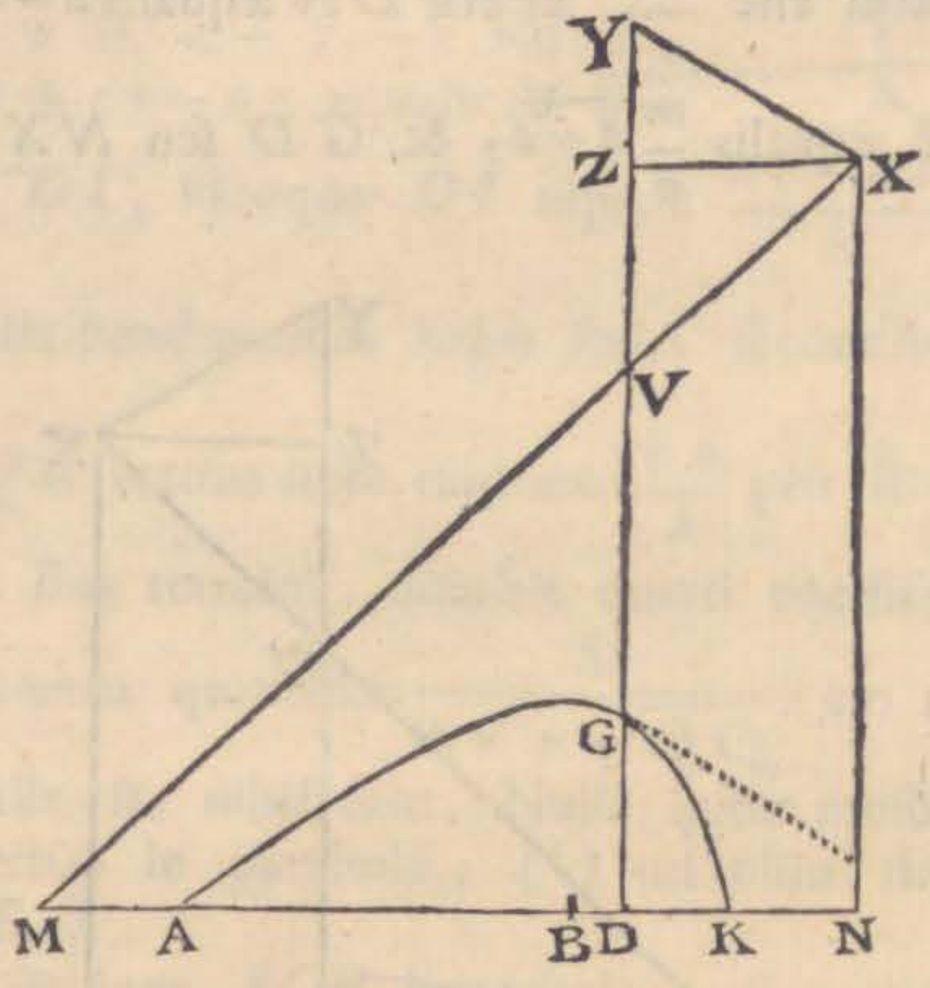
(h) * *Datur autem ratio DN ad VX*, quæ eadem est cum ratione data MN ad MX, ob parallelas DV, NX.

(k) * *In seriem convergentem*, divisione in infinitum productâ.

(i) * *Hujus seriei &c.* Est enim hæc series æqualis seriei $P-Qo-Roo-So^3-$ &c., & singuli illius termini singulis terminis

DE MOTU CORPORUM.

riei terminus ſecundus $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius cum ſigno mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum ſigno



etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro So^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ ſcribendæ ſunt in regula ſuperiore pro Q, R & S.

Quo

hujus æquantur; id eſt, $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a}$ eſt P, ſeu ordinata quæ per punctum B ad hyperbolam duceretur; $+\frac{m}{n}o\frac{-bb}{aa}o$ eſt $-Qo$, & ideo $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa} = -Q$; ſed quia in expreſſionibus reſiſtentiæ, denſitatis, & velocitatis ſemper reperitur quadratum QQ, quod idem manet, ſeu radix illius Q affirmative ſumatur, ſeu negative, nihili intereſt ſcribere $\frac{bb}{aa} - \frac{m}{n}$, aut $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$ pro Q. Secundus autem ſeriei terminus $\frac{-bb}{a^3}o^2$ eſt $-Ro^2$, & ideo, mutatis ſignis, fit $\frac{bb}{a^3} = R$; tertius terminus $\frac{-bb}{a^4}o^3$ eſt $-So^3$, atque proinde $\frac{bb}{a^4} = S$.

Quo facto prodit medii denſitas ut $\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$ ſeu (l) $\frac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$ id· (m) eſt ſi in VZ ſumatur VY æqualis VG, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ ſunt ipſarum XZ & ZY quadrata. (n) Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3XY$ ad $2YG$; & (o) velocitas ea eſt, quâcum corpus in parabolâ pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\frac{XY\ quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod medii denſitates in locis ſingulis G ſint reciprocè ut diſtantiæ XY, quodque reſiſtentia in loco aliquo G ſit ad gravitatem ut $3XY$ ad $2YG$; & corpus de loco A, juſtâ cum velocitate emiſſum, deſcribet hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*

Exempl.

(l) * *Seu*, numeratore & denominatore in $\frac{a^4}{bb}$ ductis.

(m) * *Id eſt, ſi in VZ ſumatur &c.* Eſt enim $VG=\frac{bb}{a-o}=\frac{bb}{a}$, & $VZ=\frac{m}{n}\overline{a-o}=\frac{m}{n}a$, ubi evaneſcit BD, ſeu o. Quare $VY-VZ=ZY=\frac{bb}{a}-\frac{m}{n}a$; & quia $ZX=DN=a$, & $YX^2=YZ^2+ZX^2$ erit $YX^2=aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$; ideoque medii denſitas ut $\frac{1}{XY}$.

(n) * *Reſiſtentia autem &c.* Reſiſtentia eſt ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$, id eſt, ut $\frac{2bb}{a^4}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mb^2}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}$ ad $\frac{4b^4}{a^6}$, ſive dividendo per $\frac{bb}{a^5}$ ut $3\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}$ ad $\frac{4bb}{a}$, ſeu ut $3XY$ ad $4VG=2YG$. 120.

(o) * *Et velocitas &c.* Hujus parabolæ latus rectum eſt $\frac{1+QQ}{R}=\frac{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}}=\frac{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}{\frac{bb}{a}}=\frac{YX^2}{VG}$. Velocitas autem eſt ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, adeoque ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$.

DE MOTU CORPORUM.

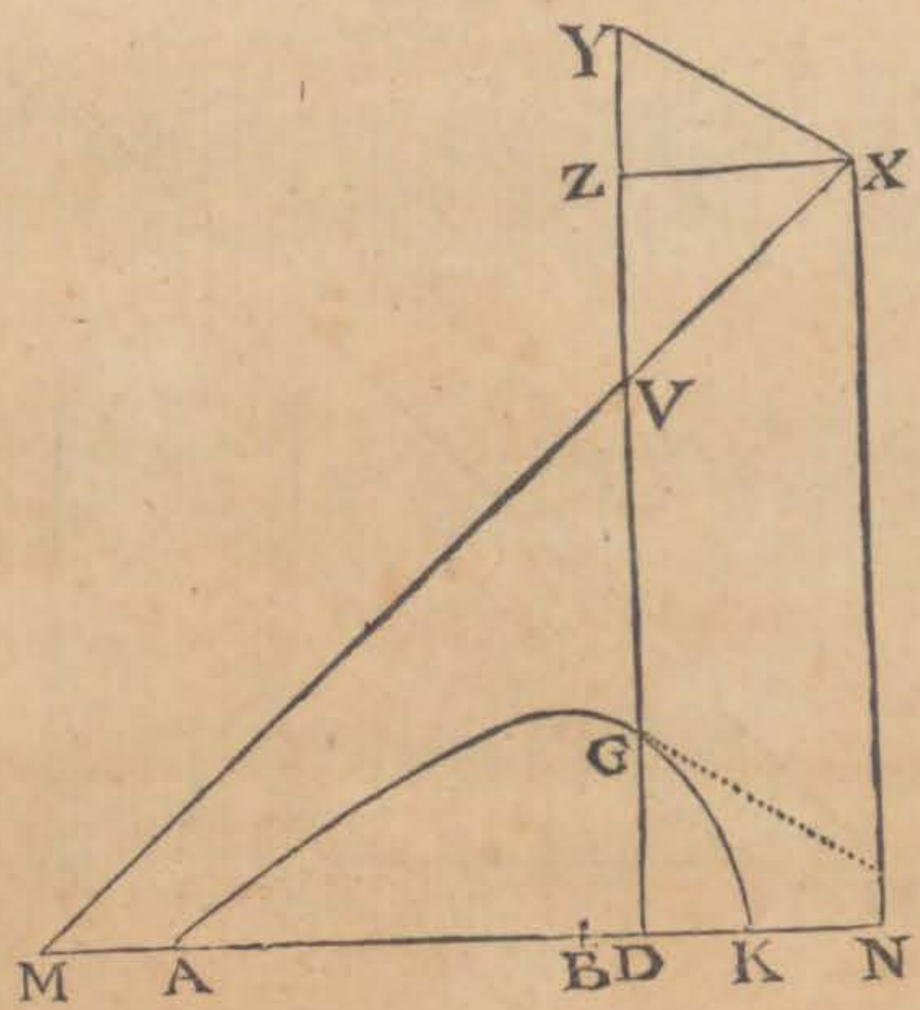
Exempl. 4. Ponatur indefinitè, quod linea AGK hyperbola ſit, centro X, aſymptotis MX, NX eâ lege deſcripta, ut conſtructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD ſecet hyperbolam in G & aſymptoton ejus in V, fuerit VG reciprocè ut ipſius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, (P) cujus index eſt numerus n: & quæratur medii denſitas, quâ projectile progrediatur in hâc curvâ.

Pro BN, BD, NX ſcribantur A, O, C reſpective, ſitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqualis $A-O$, $VG=\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, $VZ=\frac{d}{e}\overline{A-O}$, & GD ſeu $NX-VZ-VG$ æqualis $C-\frac{d}{e}A+\frac{d}{e}O-\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$. (q) Reſolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$ in ſeriem infinitam $\frac{bb}{A^n}+\frac{nbb}{A^{n+1}}O$ $+\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2+\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet GD æqualis $C-\frac{d}{e}A-\frac{bb}{A^n}+\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O-\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ $+n^3$

(p) * *Cujus index eſt numerus n*, poſitivus. Hanc autem hyperbolam, dum producitur, ad lineas XM, XN etiam productas continuo accedere, eaſque non niſi in diſtantia infinita contingere poſſe manifeſtum eſt. Cum enim ſit VG ut $\frac{1}{DN^n}$, ubi $DN=0$, hyperbola rectam XN attingit, & diſtantia VG infinita evadit; & ubi DN infinita ſit, VG eſt nihil, & ideo hyperbola alteram aſymptoton XM tangit, in diſtantia infinita ab Aſymptoto XN.

(q) * *Reſolvatur terminus ille* $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, ſeu $bb\times\overline{A-O}^{-n}$, in ſeriem infinitam per formulam generalem (548. lib. 1.), & invenietur $bb\times\overline{A-O}^{-n}=bbA^{-n}+\frac{n}{1}bbA^{-n-1}O+\frac{n\times\overline{n+1}}{1.2}\times bbA^{-n-2}O^2+\frac{n\times\overline{n+1}\times\overline{n+2}}{1.2.3}bbA^{-n-3}O^3+$ &c. $=\frac{bb}{A^n}+\frac{nbbo}{A^{n+1}}+\frac{\overline{nn+n}\times bbO^2}{2A^{n+2}}+\frac{\overline{n^3+3n^2+2n}}{6A^{n+3}}\times bbO^3+$ &c.; Quo enim modo quo in n. 551 demonſtravimus formulam ad potentias quorum exponentes ſunt fracti applicari poſſe, eodem fere, modo eam ad potentias quorum exponens negativus eſt applicari debere conſtabit.

$-\frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O$ uſurpandus eſt pro $Q0$, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$

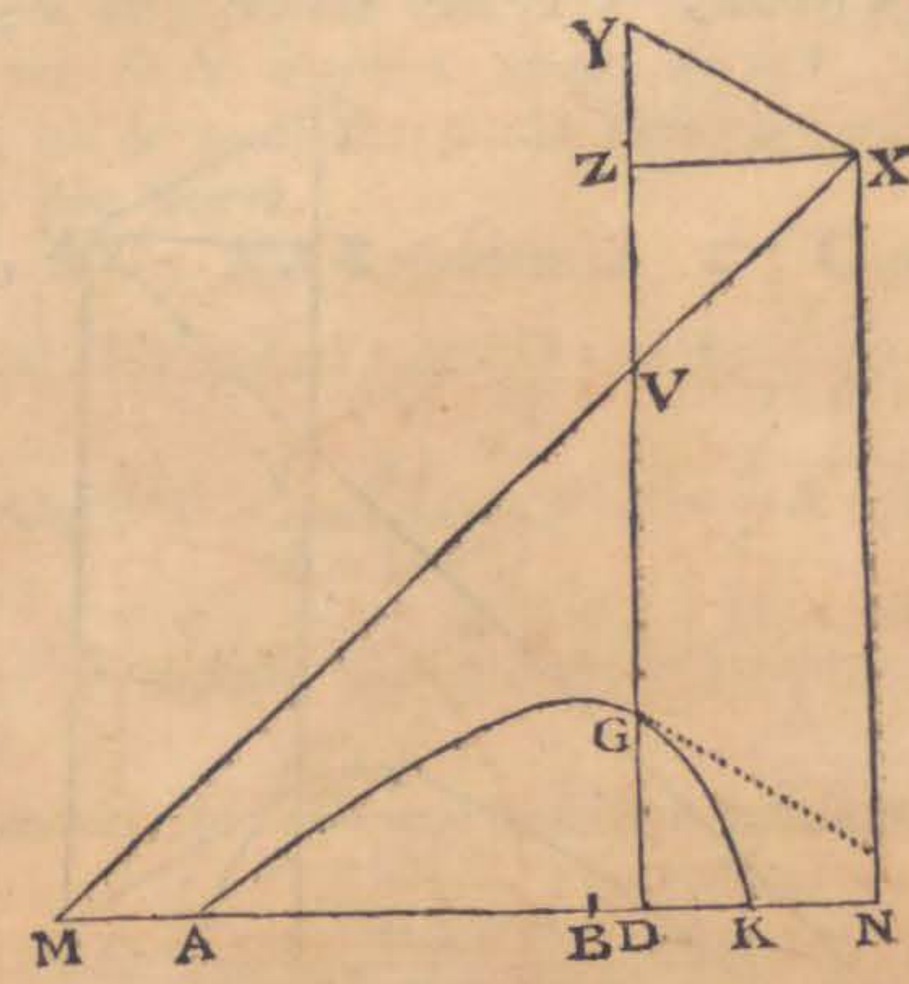


pro $R0^2$, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro $S0^3$. Et inde medii denſitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in (r) loco quovis G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, ideoque ſi in VZ capiatur VY æqualis $n\times VG$, denſitas illa eſt reciprocè ut XY.

(r) * *In loco quovis G ſit &c.* Invenitur enim $\frac{S}{R}=\frac{n+2}{3A}$, & $\sqrt{1+QQ}=\sqrt{1+\frac{dd}{ee}-\frac{2dnbb}{eA^{n+1}}+\frac{nnb^4}{A^{2n+2}}}$; & ideo, ob datum numerum $\frac{n+2}{3}$, $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ eſt ut $\frac{1}{\sqrt{AA+\frac{dd}{ee}AA-\frac{2dnbbA}{eA^n}+\frac{n^2b^4}{A^{2n}}}}$.

DE MOTU CORPORUM.

XY. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ (f) ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem in eo-



dem loco G (t) fit ad gravitatem ut $3S$ in $\frac{XY}{A}$ ad $4RR$, id eſt, ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipſa eſt, quâcum corpus projectum in parabolâ pergeret, verticem

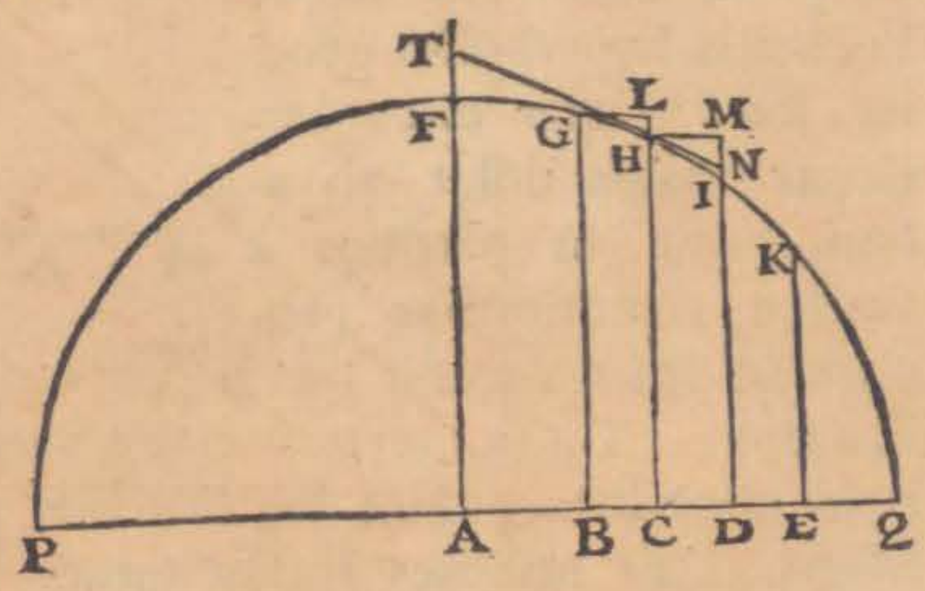
(f) * *Ipſarum XZ & ZY quadrata.* Nam $XZ = DN = A$ (hyp.), & $ZY = VY - VZ = n \times VG - \frac{d}{e}A = \frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$; aut $ZY = VZ - VY = \frac{d}{e}A - \frac{nbb}{A^n}$, prout YV major vel minor eſt quam VZ. Quare cum ſit $XY^2 = XZ^2 + ZY^2$, denſitas erit ut $\frac{1}{XY}$.

(t) * *Fit ad gravitatem ut &c.* Quoniam (ex dem.) $\frac{XY}{A} = \sqrt{1+QQ}$, erit $3S\sqrt{1+QQ} = \frac{3S \times XY}{A}$, & inde reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{3S \times XY}{A}$ ad $4RR$, vel ut XY ad $\frac{4RR \times A}{3S}$; ſed $4RR \times A = \frac{\overline{nn+n}^2 \times b^4}{A^{2n+3}}$, & $3S = \frac{\overline{nn+n} \times \overline{n+2}bb}{2A^{n+3}}$, ideoque $\frac{4RRA}{3S} = \frac{2nn+2n \times bb}{n+2 \times A^n} = \frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$,

cem G, diametrum GD & (u) latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2XY\ quad.}{nn+n}$ in $\sqrt{G}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

Eâdem ratione quâ prodiit densitas medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in corollario primo, si resistentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet V^n, (x) prodibit densitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}^{n-1}$. Et (y) propterea si curva inveniri potest eâ lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}^{n-1}$,



vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}^{n-1}$: corpus movebitur in hâc curvâ in uniformi medio cum resistentia quæ sit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad curvas simpliciores.

Quo-

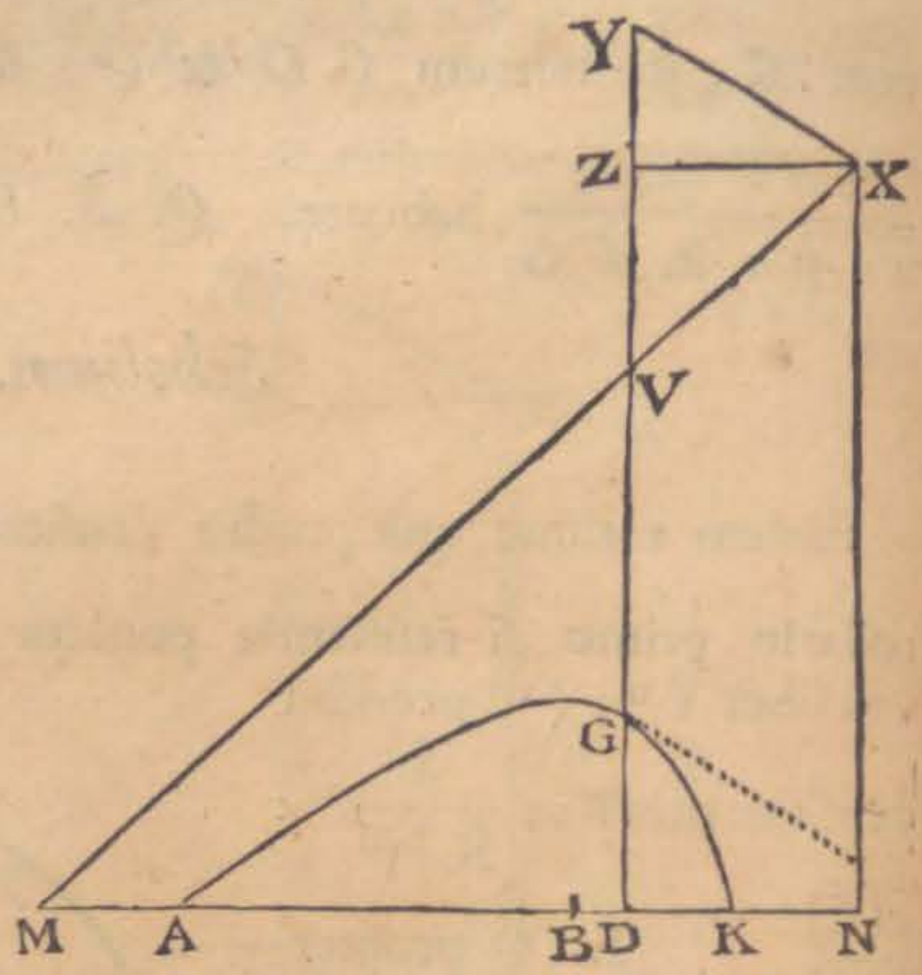
ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Quare resistentia est ad gravitatem ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$.

(u) * *Et latus rectum &c.* Est enim $\frac{XY^2}{A^2} = 1 + QQ$, & hinc $\frac{1+QQ}{R} = \frac{2XY^2 \times A^n}{nn+n \times bb} = \frac{2XY^2}{nn+n \times VG}$, ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Unde velocitas quæ est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, erit ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$, ob datum numerum $\frac{2}{nn+n}$.

(x) * *Prodibit densitas medii ut &c.* (115). 120.

(y) * *Et propterea &c.* Si enim fuerit $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$ in ratione a ad b, erit $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} = \frac{a}{b} \times \frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, & $\frac{S \times AC^{n-1}}{R^{\frac{4-n}{2}} \times HT^{n-1}} = \frac{a}{b}$, id est densi-

DE MOTU CORPORUM.



Quoniam motus non fit in parabolâ nisi in medio non resistente, in hyperbolis vero hic descriptis fit per resistentiam perpetuam; perspicuum est quod linea, quam projectile in medio uniformiter resistente describit, propius (z) accedit ad hyperbolas hasce quam ad parabolam. Est utique linea illa hyperbolici generis, sed (a) quæ circa verticem magis distat ab asymptotis; in partibus à vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quam pro ratione hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta vero non est inter has & illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommodè adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quam hyperbola magis accurata & simul magis composita. Ipsæ vero in usum sic deducentur. Com-

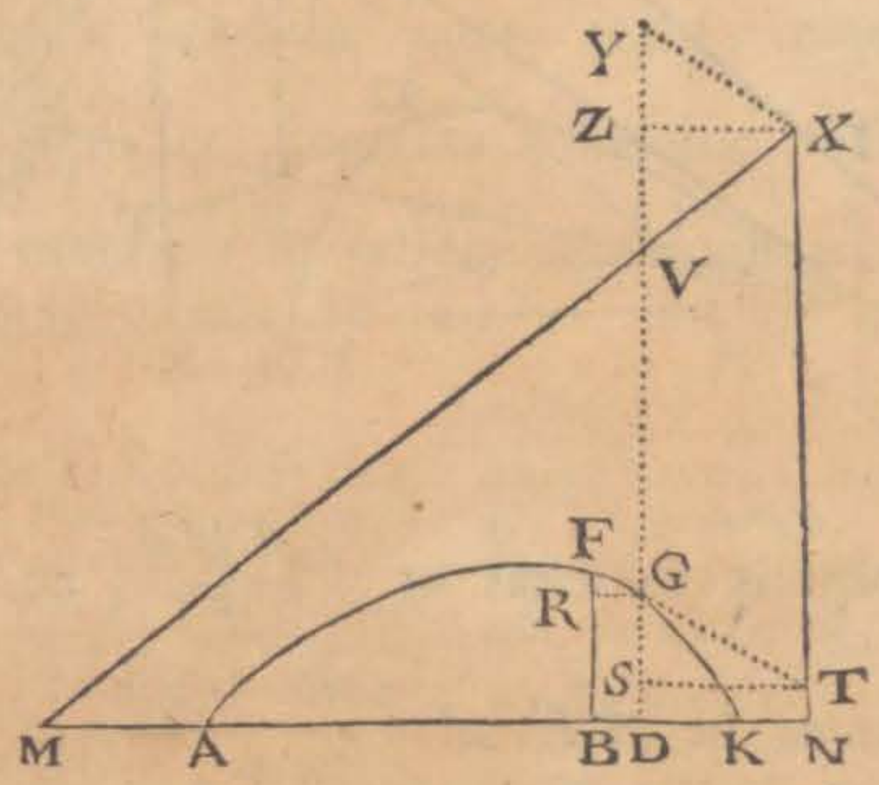
tas medii ut quantitas data $\frac{a}{b}$, & proinde uniformis. Est autem (per cor. 1. prop. X.) $\frac{HT}{AC} = \sqrt{1+QQ}$: quare si data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, data quoque erit ratio quadratorum $\frac{S^2}{R^{\frac{4}{n}}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$, & contra.

(z) * *Accedit ad hyperbolas hasce*, cum iis tamen perfecte convenire nunquam potest, quod in hisce hyperbolis densitas medii reciproce proportionalis sit rectæ variabili XY, & præterea non satis manifestum sit curvam, quam projectile in medio uniformi describit in hypothesi resistentiæ velocitatis quadrato proportionalis, habere asymptotum verticalem ut XN: cum præsertim in hâc resistentiæ hypothesi spatium motu horizontali insito descriptum, semotâ gravitate, infinitum evadat (per cor. 1. prop. V). Verumtamen inveniri possunt hyperbolæ in quibus pro parte illâ exiguâ curvæ AGK, quæ in rebus practicis necessaria est, recta XY sit quam proxime constans, & proinde medii densitas quam proxime uniformis; quo fit ut curvæ illæ in rebus practicis non incommodè adhiberi possint.

(a) * *Sed quæ circa verticem &c.* Hæc demonstrabuntur infra in notâ *b*.

Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & (b) recta GT tanget hyperbolam in G, ideoque denſitas medii in G, eſt reciprocè ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, reſiſtentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in GV. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROB. III.

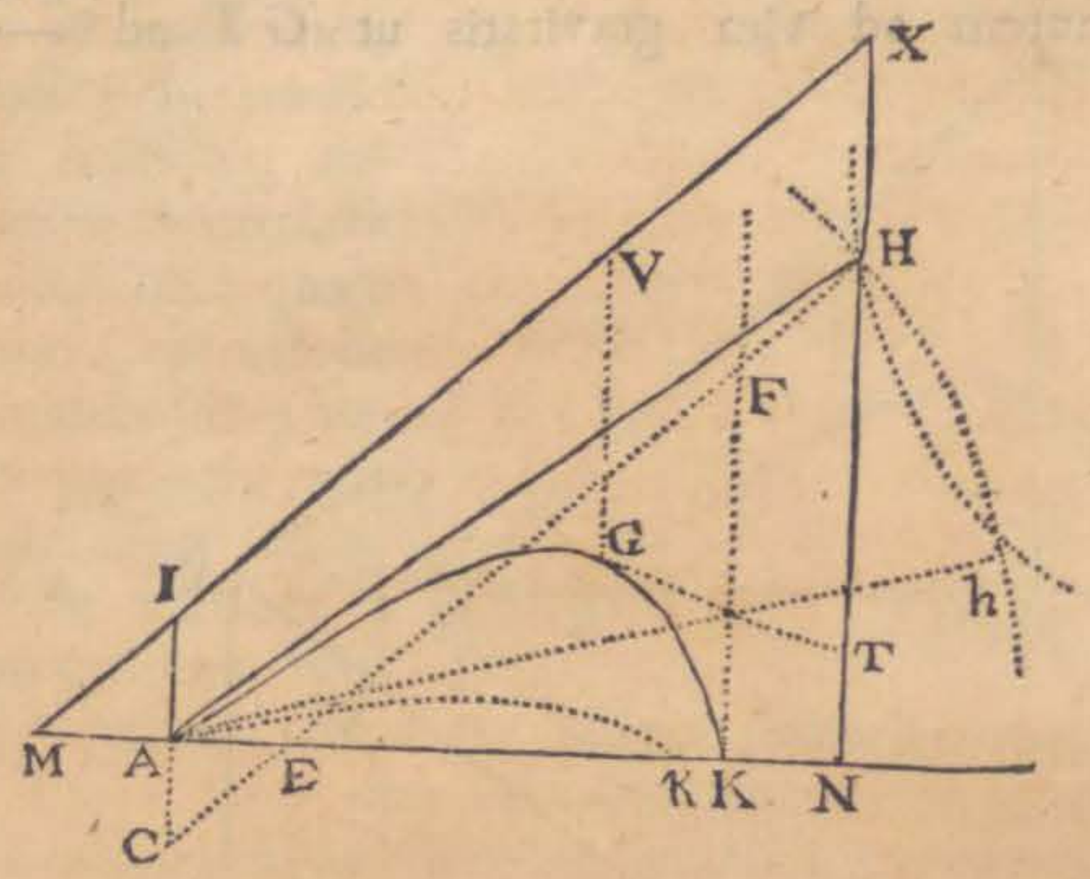
Proin-



(b) * *Et recta GT tanget hyperbolam in G.* Ex puncto G ad ordinatam BF per B ductam, & ex puncto T ad ordinatam DG demiſſa ſint perpendicula GR & TS, ſitque GT tangens in G. Erit FR ad RG ſeu BD, ut GS ad ST, ob triangula ſimilia FRG, GST. Sed FR eſt Qo ſeu $\frac{nbbO}{A^{n+1}}-\frac{d}{e}O$, BD eſt O, & ST = ZX $=A$. Quare erit $\frac{nbb}{A^{n+1}}-\frac{d}{e}$ ad 1, ſeu $\frac{nbb}{A^{n}}-\frac{d}{e}A$ ad A, ut GS ad ZX ſeu A. Supra invenimus $ZY=\frac{nbb}{A^{n}}-\frac{d}{e}A$. Ergo ZY = GS; & ideo tangens GT æqualis eſt & parallela rectæ YX. Eſt autem (ex demonſt.) denſitas medii in G reciprocè ut YX: quare denſitas medii in G eſt reciprocè ut tangens GT, velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$, & reſiſtentia ad gravitatem ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ GV. 120

DE MOTU CORPORUM.

Proinde ſi corpus de loco A ſecundum rectam AH projectum deſcribat hyperbolam AGK, & AH producta occurrat aſymptoto NX in H, actaque AI eidem parallela occurrat alteri aſymptoto MX in I: erit (c) medii denſitas in A reciprocè



ut AH, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac reſiſtentia ibidem ad gravitatem ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in AI. Unde prodeunt ſequentes regulæ.

Reg. (d) 1. Si ſervetur tum medii denſitas in A, tum velocitas quá-

(c) * *Erit medii denſitas &c.* Coincidente puncto G cum A, tangens GT cum tangente AH congruit, & recta VG cum AI; proindeque *medii denſitas in A eſt reciproce ut AH, & corporis &c.*

(d) * *Reg.* 1. Manentibus indice hyperbolæ n & denſitate medii in A, manet tangentis longitudo AH quæ denſitati reciprocè proportionalis eſt. Manente velocitate quâcum corpus e loco A projicitur, manet linea $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$ quæ eſt ut velocitas; & ideo cum data ſit AH, datur & AI. Ob parallelas GT, YX, eſt $TX=GY=GV+VY=GV+n\times GV$ (ex. 4.), & quia coincidente puncto G cum A, fit $GV=AI$, & $TX=HX$; erit $HX=AI+n\times AI$. Quare ob datas quantitates AI & n, datur & HX. Unde ſi longitudines illæ AH, AI, & HX in aliquo caſu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expedite determinari poteſt. His enim datis, dantur puncta A, H & I. Per H ducatur

λ H N

quâcum corpus projicitur, & mutetur angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX. Ideoque ſi longitudines illæ in aliquo caſu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expeditè determinari poteſt.

Reg. (e) 2. Si ſervetur tum angulus NAH, tum medii denſitas in A, & mutetur velocitas quâcum corpus projicitur; ſervabitur longitudo AH, & mutabitur AI in duplicatâ ratione velocitatis reciprocè.

Reg. (f) 3. Si tam angulus NAH, quam corporis velocitas in A, gravitaſque acceleratrix ſervetur, & proportio reſiſtentiæ in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quâcunque; augebitur proportio AH ad AI in eâdem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$: & propterea minuetur AH in eâdem ratione, & AI minuetur in ratione illâ duplicatâ. (g) Augetur vero proportio reſiſtentiæ ad pondus, ubi vel gravitas ſpecifica ſub

XHN recta horizontali AN Verticalis, & dabitur punctum N; & quia data eſt HX, dabitur etiam punctum X; datis vero punctis duobus X & I, dabitur recta XIM cum puncto M ubi horizontalem MN ſecat. Unde ductâ quâvis rectâ VD ad horizontalem AN normali, ſi in ea capiatur VG ad AI, ut eſt AN^n ad DN^n, vel ut XI^n ad XV^n, dabitur punctum G in trajectoria AGK. Eſt enim (Exemplo 4.) ordinata quævis VG ad alteram ordinatam IA, ut AN^n ad DN^n, ſeu ut XI^n ad XV^n.

(e) * *Reg.* 2. Servatâ medii denſitate in A, ſervabitur tangentis longitudo AH, quæ eſt ut denſitas inverſe. Et quia velocitas in A eſt ut $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & velocitatis quadratum ut $\frac{AH^2}{AI}$, id eſt, ut $\frac{1}{AI}$ ob datam AH; erit AI velocitatis quadrato reciprocè proportionalis.

(f) * *Reg.* 3. Datâ corporis velocitate & gravitate acceleratrice in A, datur longitudo $\frac{AH^2}{AI}$ tum velocitatis quadrato, tum lateri recto parabolæ (Exemp. 4.) proportionalis. Eſt autem reſiſtentia motrix, ſi ita loqui fas eſt, ad gravitatem motricem, ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ × AI (Ex. 4.). Quare ſi proportio reſiſtentiæ motricis in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacunque, augebitur proportio AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI, ſeu, ob datum numerum $\frac{2nn+2n}{n+2}$, augebitur proportio AH ad AI in eâdem ratione; & quia longitudo $\frac{AH^2}{AI}$ conſtans eſt, ac proinde $\frac{AH}{AI}$ eſt ut $\frac{1}{AH}$, & AI ut AH^2, neceſſum eſt ut AH minuatur in ratione quâ augetur $\frac{AH}{AI}$, & ut AI minuatur in ratione illâ duplicatâ.

(g) 121. * *Augetur verò proportio reſiſtentiæ ad pondus &c.* Corpus ſpecificè gravius vel levius dicitur, quod ſub æquali 121.

DE MOTU CORPORUM.

ſub æquali magnitudine fit minor, vel medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminutâ diminuitur in minore ratione quam pondus.

Reg. (h) 4. Quoniam denſitas medii prope verticem hyperbolæ major eſt quam in loco *A*; ut habeatur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium *GT* ad tangentem *AH* inveniri, & denſitas in *A* augeri in ratione paulo ma-

li volumine majus vel minus pondus habet quam alterum corpus quocum comparatur; & ideo gravitas ſpecifica corporis, volumine dato, eſt ut ipſius pondus abſolutum, id eſt, datâ gravitate acceleratrice, ut corporis maſſa (per defin. 7. & not. 3. lib. 1.). At, dato volumine, maſſa eſt ut denſitas (2. lib. 1.); quare gravitas ſpecifica corporis eſt ipſius denſitati proportionalis. Augetur itaque proportio reſiſtentiæ ad gravitatem motricem ſeu ad corporis pondus, tum ubi manentibus corporis volumine, figurâ & velocitate ac medii denſitate, manenteque proinde reſiſtentiâ, gravitas ſpecifica fit minor; tum ubi, cæteris paribus, medii denſitas augetur, quo caſu medii reſiſtentia creſcit cum denſitate, & corporis pondus in fluido denſiori & ſpecificè graviori magis ſublevati minuitur; tum ubi reſiſtentia ex magnitudine corporis diminutâ, diminuitur in minori ratione quam pondus. Ex quibus liquet tertiam regulam determinandis motibus corporum variæ magnitudinis & denſitatis accommodatam eſſe.

122. Lemma. Datâ curvâ AGK, invenire minimam tangentium GT. Quoniam (ex dem. in Exemp. 4.) $XY^2 = GT^2 = A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^{n-1}} + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$; hujus quantitatis, in quâ ſi detur curva AGK, ſola eſt variabilis *A*, fluxio ponenda eſt nihilo æqualis (48). Brevitatis cauſâ dicantur $1 + \frac{dd}{ee} = f$, $\frac{2dnbb}{e} = 2g$, $nnb^4 = h$, & $A = x$; erit $GT^2 = fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}$; & ſumptis fluxionibus, $o = 2fxdx + n-1 \times 2gx^{-n}dx - 2nhx^{-2n-1}dx$. Dividatur æquatio tota per $2xdx$, & fiet $o = f + n-1\,gx^{-n-1} - nhx^{-2n-2}$; & multiplicando per x^{2n+2}, $fx^{2n+2} + n-1\,gx^{n+1} = nh$, unde eruitur, ut fit in reſolutione æquationum ſecundi gradus,

$$x^{n+1} = \sqrt{\frac{(n-1)^2 gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f},$$

& hinc habetur

$$x = \left[\frac{\sqrt{(n-1)^2 gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f}\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

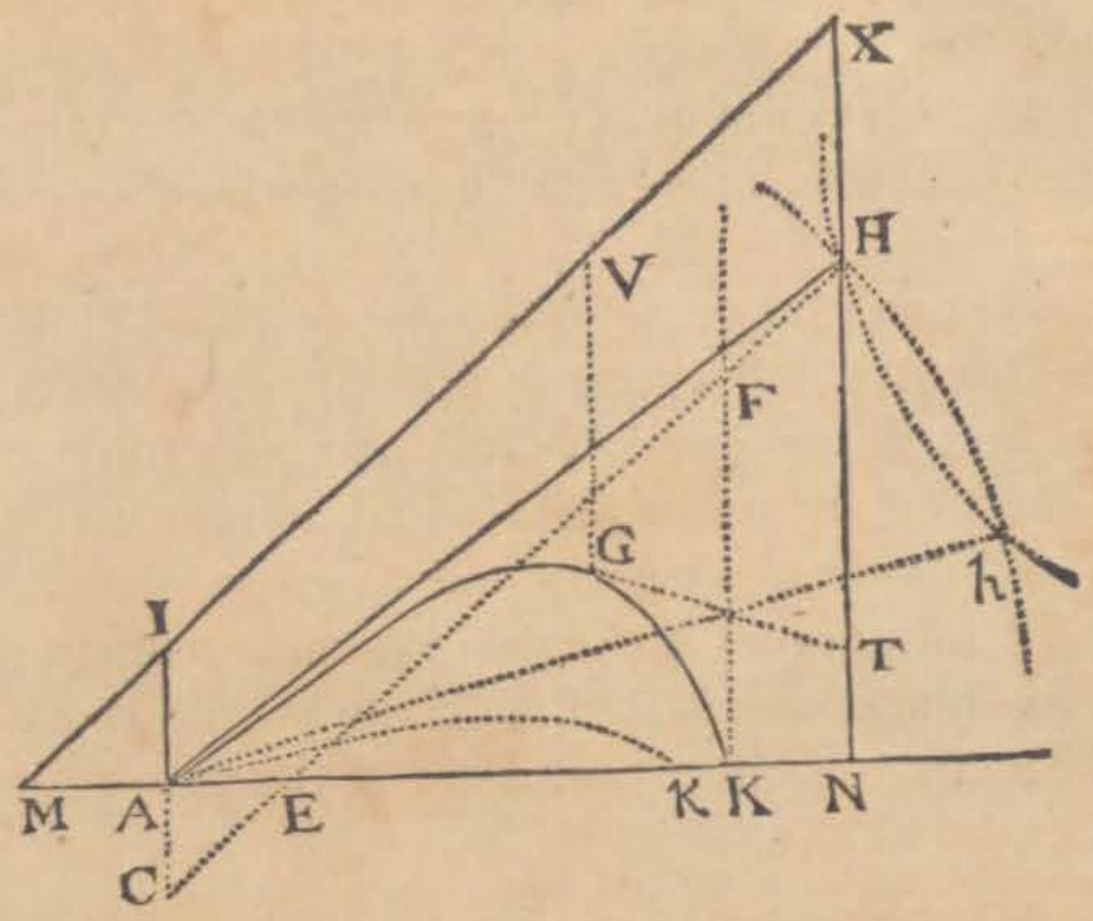
Quare ſi loco *x* ſubſtituatur, hic ipſius valor in æquatione $GT = \sqrt{fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}}$, obtinebitur minima tangentium. Q. E. I.

123. Cor. Si curva AGK ſit hyperbola conica, erit index $n = 1$, & ideo $n-1 = 0$, & $x = \sqrt[4]{\frac{h}{f}}$. Unde invenitur $GT^2 = f\sqrt{\frac{h}{f}} - 2g + \frac{h}{\sqrt{\frac{h}{f}}} = 2\sqrt{hf} - 2g = \frac{2bb}{e}\sqrt{ee+dd} - \frac{2dbb}{e} = 2bb \times \frac{[\sqrt{ee+dd} - d]}{e}$. Quia vero (Ex. 4.) $d : e = VZ : XZ = XN : MN$, ac proinde $dd : ee = XN^2 : MN^2$, & componendo $dd + ee : ee = XN^2 + MN^2$, ſeu $MX^2 : MN^2$, atque adeo $\frac{\sqrt{ee+dd}}{e} = \frac{MX}{MN}$, & $\frac{d}{e} = \frac{XN}{MN}$; erit $\frac{\sqrt{ee+dd} - d}{e} = \frac{MX - XN}{MN}$. Præterea (Ex. 4.) eſt $VG = \frac{bb}{DN}$, $AI = \frac{bb}{AN}$, & hinc $2AI \times AN = 2bb$. Erit igitur minimæ tangentium quadratum $GT^2 = \frac{2AI \times AN}{MN} \times \overline{MX - XN}$.

(h) * *Reg.* 4. Quoniam denſitas in loco quovis G eſt reciprocè ut tangens GT, quæ prope verticem hyperbolæ minor eſt quam in loco A; manifeſtum eſt denſitatem medii prope verticem hyperbolæ majorem eſſe quam in loco A. Denſitas in loco A dicatur *K*, in loco G per quem ducitur tangentium minima GT, dica-

jore quam ſemiſummæ harum tangentium ad minimam tangentium *GT*.

LIBER SECUND. SECTIO II. PROP. X. PROB. III.



(i) *Reg.* 5. Si dantur longitudines *AH*, *AI*, & deſcribencatur *B*; & erit $K : B = GT : AH$, & hinc $K+B : K = GT + AH : GT$, & $\frac{K+B}{2} : K = \frac{GT+AH}{2} : GT$. Eſſet autem $\frac{K+B}{2}$ denſitas mediocris, ſi tangens AH foret omnium maxima, ſicuti GT (hyp.) eſt omnium minima; & ideo, ut medii denſitas fere tanquam uniformis haberi poſſet, augenda eſſet denſitas in A in ratione ſemiſummæ tangentium $\frac{GT+AH}{2}$ ad minimam tangentium GT. Verum quia tangens AH non eſt omnium maxima, ſed tangentes aliæ ad partes curvæ verſus *K* ductæ majores ſunt; denſitas in A augenda eſt in ratione paulo majore quam ſemiſummæ $\frac{GT+AH}{2}$ ad GT, ut medium tanquam uniforme ferè cenſeatur. Atque hoc pacto errores oriundi ex eo quod medium in loco A denſius ſupponatur, corrigentur ferè aliis erroribus qui naſcuntur ex eo quod in G medium rarius fingatur quam pro ratione curvæ AGK.

Interim liquet veram trajectoriam quam corpus in medio uniformi deſcribit, circa verticem magis diſtare ab aſymptotis, & in partibus à vertice remotioribus propius ad ipſas accedere quam pro ratione hyperbolarum in medio non uniformi deſcriptarum. Nam ſi e loco A, cum velocitate $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & directione AH projiciatur corpus in medio cujus denſitas uniformis æqualis ſit denſitati mediocri medii in quo deſcribitur hyperbola AGK; ob majorem medii uniformis denſitatem in A, qua corporis velocitas impreſſa magis minuitur, trajectoria intra hyperbolam continebitur, adeoque prope verticem ab aſymptotis magis diſtabit; & quia prope verticem eſt magis depreſſa, in partibus verſus K a vertice remotioribus ad aſymptotum NX propius accedet quam hyperbola AGK; cum præſertim in medio uniformi ſpatium motu horizontali deſcriptum, ſemotâ gravitate, infinitum evadat (per cor. 1. prop. V). 123.

(i) * *Reg.* 5. Si dentur longitudines AH, AI cum angulo HAN, & deſcri-

DE MOTU CORPORUM.

da ſit figura AGK: produc HN ad X, ut ſit HX ad AI ut $n+1$ ad 1, centroque X & aſymptotis MX, NX per punctum A deſcribatur hyperbola, eâ lege, ut ſit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n.

Reg. (k) 6. Quò major eſt numerus n, eò magis accuratæ ſunt hæ hyperbolæ in aſcenſu corporis ab A, & minus accuratæ in ejus deſcenſu ad K; & contra. Hyperbola conica mediocrem rationem tenet, eſtque cæteris ſimplicior. Igitur ſi hyperbola ſit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN per punctum A tranſeuntem, quæratur: occurrat producta AN aſymptotis MX, NX in M & N, & ſumatur NK ipſi AM æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc hyperbolam ex phænomenis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia, eâdem velocitate, in angulis diverſis HAK, hAk, inci-

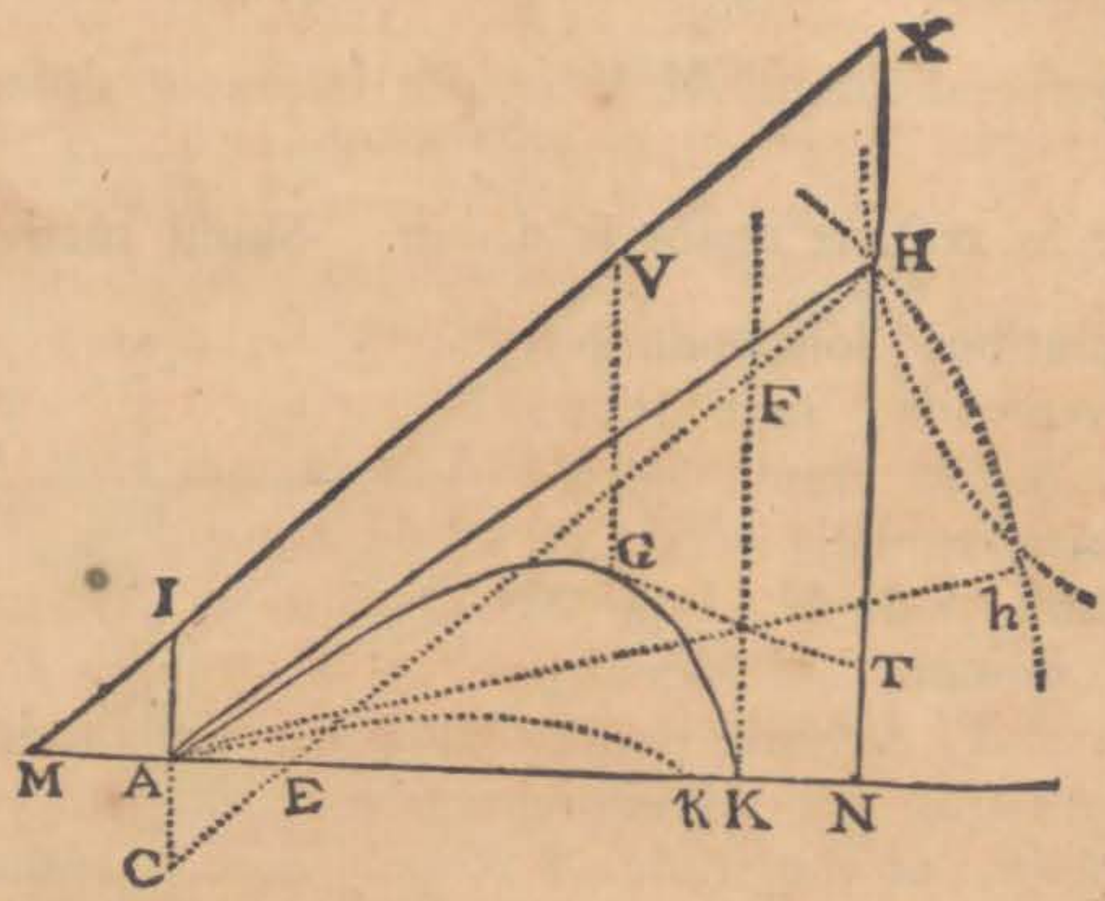
benda ſit figura AGK: ex puncto H ad horizontalem AN demitte perpendiculum HN; produc HN ad X, ut ſit HX æqualis facto ſub $n+1$ & AI (demonſtravimus enim in nota ad reg. 1. eſſe HX æqualem facto $n+1 \times AI$) centroque X & aſymptotis MX, NX per punctum A deſcribatur hyperbola, eâ lege, ut ſit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n: eſt enim (per hyp. Ex. 4.) VG ad AI, ut AN^n ad DN^n, ſeu ut XI^n ad XV^n.

(k) * *Reg.* 6. Quo major eſt numerus n, eo magis hæ hyperbolæ in aſcenſu corporis ab A accedunt ad trajectorias in medio uniformi deſcriptas, & eo minus in deſcenſu ad K accuratæ ſunt; & contrà. Nam quo major eſt numerus n, eo minus tangens GT, quæ denſitati reciprocè proportionalis eſt, in aſcenſu corporis ab A variatur; & eo magis in deſcenſu ad K mutatur, quippe data ſit medii denſitas in A cum angulo projectionis HAN, & quantitas $\frac{n+2}{AH}$ denſitati in A (ex. 4.) proportionalis, data erit, ideoque tangens AH eo longior erit quo major fuerit numerus n; & quia dato angulo HAN, datur ſpecie triangulum rectangulum HNA, ratioque proinde laterum AH, AN, HN etiam datur, liquet quod creſcente AH aut numero n, creſcant quoque latera AN & HN. Ex demonſtratis in Exemplo 4°. corpore aſcendente tangentis GT quadratum $GT^2 = DN^2 + [ZV - n\,VG]^2$, & corpore deſcendente eſt $GT^2 = DN^2 + [n\,VG - ZV]^2$. Ex natura hyperbolæ AGK, eſt $DN^n : AN^n = AI : VG$, ideoque $n\,VG = \frac{n\,AI \times AN^n}{DN^n}$. Ex demonſtratione regulæ 1ª, $HX = \overline{n+1} \times AI$, & proinde $NX = HN + \overline{n+1} \times AI$, & $NX - AI = HN + n\,AI$. Sed ob triangula XZV, MNX, MAI ſimilia, ZX ſeu DN eſt ad ZV, ut MN ad NX, & ut MA ad AI, & diviſim DN eſt ad ZV, ut AN ad NX − AI ſeu $HN + n\,AI$; unde fit $ZV = \frac{DN \times HN + n\,AI \times DN}{AN}$.

Quare in corporis aſcenſu $GT^2 = DN^2 + \left[\frac{DN \times HN + n\,AI \times DN}{AN} - \frac{n\,AI \times AN^n}{DN^n}\right]^2$

&

incidantque in planum horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujuſvis longitudinis perpendiculo *AI*, aſſume utcunque longitudinem *AH* vel *Ah*, & (1) inde collige graphicè longitudines *AK*,

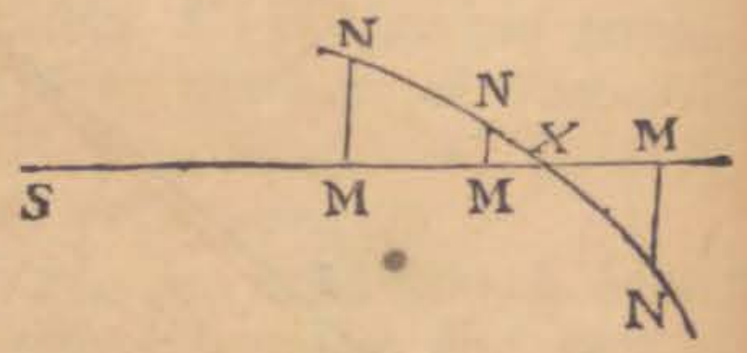


& in deſcenſu $GT^2 = DN^2 + \left[\frac{n\,AI \times AN^n}{DN^n} - \frac{DN \times HN + n\,AI \times DN}{AN}\right]^2$. Jam vero ſi numerus *n* ſatis magnus fuerit, lineæ AH, AN, HN tam in aſcenſu quam in deſcenſu corporis longiores ſunt, & in aſcenſu ab A eſt fere DN æqualis AN, in deſcenſu verò DN quantum libet minor ipsâ AN. Unde in aſcenſu ab A eſt fere $\frac{n\,AI \times DN}{AN} = n\,AI$ & ideo $GT^2 = DN^2 + \left[\frac{DN \times HN}{AN}\right]^2 = DN^2 + HN^2$ ferè. Eſt autem $AH^2 = AN^2 + HN^2$: quare ratio GT ad AH in aſcenſu corporis ab A eſt ferè æqualitatis, dum numerus *n* ſatis magnus ſupponitur, ac proinde non multum variatur denſitas: In deſcenſu verò ad K, fit DN quantumlibet exigua reſpectu datæ AN, & ideo quantitas $\frac{n\,AI \times AN^n}{DN^n}$ vehementer creſcit, & hinc tangens GT multum variatur ubi numerus *n* magnus eſt. Contra fit, ſi numerus ille ſit admodum exiguus. Porro cum numerus *n* poſſit eſſe quilibet integer vel fractus, & in hyperbola conica ſit *n* æqualis unitati, quæ veluti medium locum tenet inter numeros omnes integros & fractos, ſatis manifeſtum eſt hyperbolam conicam inter ſuperiores omnes & inferiores hyperbolas mediocrem rationem tenere, & quia etiam cæteris ſimplicior eſt, poſſe loco veræ trajectoriæ in medio uniformiter denſo adhiberi. Si igitur hyperbola AGK ſit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN, horizontalem vel horizonti obliquam, per punctum A tranſeuntem, quæratur: occurrat producta AN alymptotis MX, NX, in M & N, & ſumatur NK ipſi AM æqualis, & habebitur punctum K (per theor. 1. de conicis). 123.

(1) * *Et inde collige graphicè &c.* Datâ enim tangente AH, tum magnitudine tum poſitione, datur verticalis HN

DE MOTU CORPORUM.

Ak, per reg. 6. Si ratio AK ad Ak sit eadem cum ratione d ad e, (m) longitudo AH rectè assumpta fuit. Sin minus cape in rectâ infinitâ SM longitudinem SM æqualem assumptæ AH, & erige perpendiculum MN æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus AH invenienda sunt plura puncta N, & per omnia agenda (n) curva linea regularis $NNXN$, secans rectam $SMMM$ in X. Assumatur demum AH æqualis abscissæ SX, & inde denuo inveniatur longitudo AK; & longitudines, quæ sint ad assumptam longitudinem AI & hanc ultimam AH, ut longitudo AK per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem AK, erunt veræ illæ longitudi-

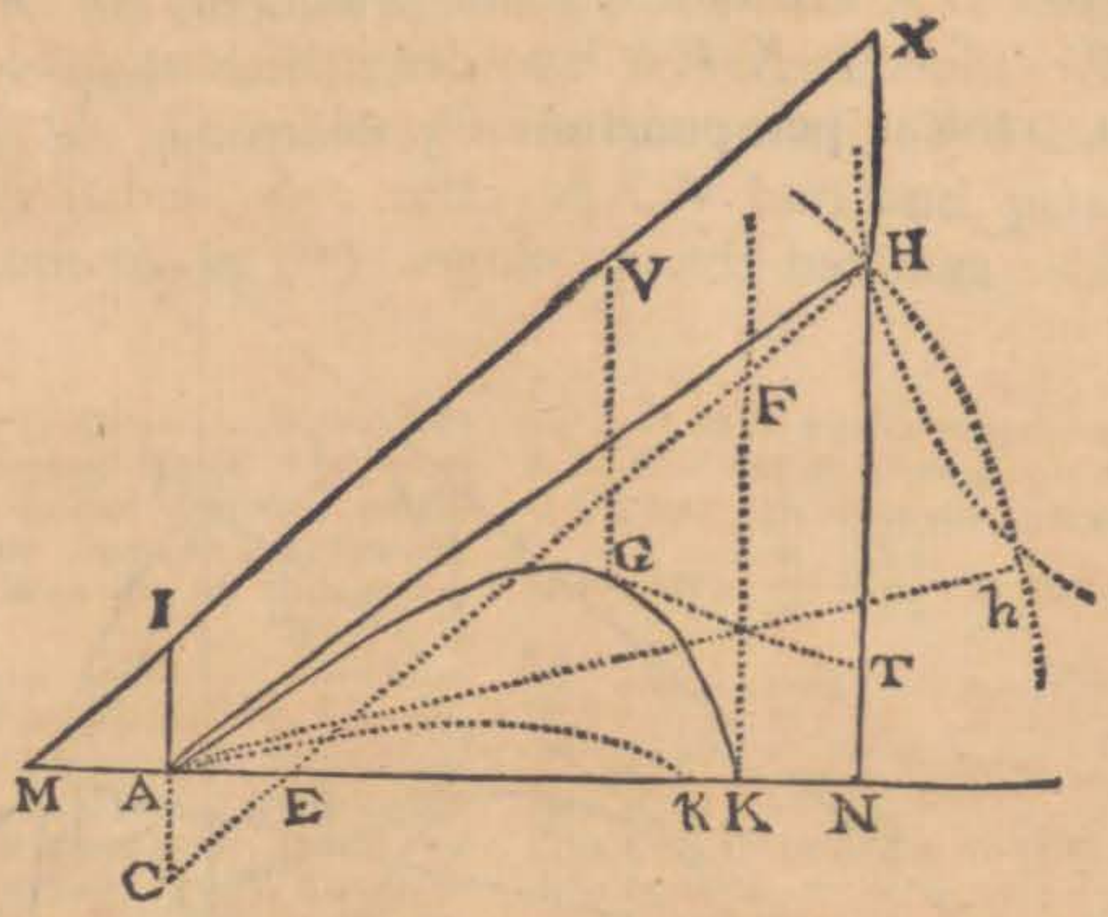


cum puncto N; & quia assumitur etiam AI, & est HX = 2 AI (per dem. reg. 1æ.) ob $n = 1$; dabitur hyperbolæ centrum X, & inde ob datum punctum I dabitur asymptotus altera XIM cum puncto M in horizontali MN; & capiendo NK æqualem datæ MA, dabitur punctum K, & hinc longitudo AK obtinebitur. Eodemque modo invenietur altera longitudo Ak.

(m) * *Longitudo AH rectè assumpta fuit.* Datâ medii densitate in A cum velocitate corporis sub diversis angulis HAK, hAk projecti, manet perpendiculum AI, & tangens AH æqualis est tangenti Ah (per regulam 1am). Datis tangente AH, angulo HAK & perpendiculo AI, hyperbola AGK describi potest (per reg. 6am. & notam præced.) & ideo data est tum specie, tum magnitudine. Unde si dentur tantum angulus HAK & ratio tangentis HA ad AI, hyperbola AGK specie tantum dabitur, id est, omnes hyperbolæ, quæ ex his duobus datis describentur, similes erunt. Quare si in hyperbola AGK, quæ in chartâ descripta supponitur, tangens assumpta AH sit ad perpendiculum AI, ut tangens hyperbolæ quam corpus sub angulo æquali HAK projectum in medio resistente describit, est ad suum perpendiculum AI; hyperbola AGK in charta descripta similis erit hyperbolæ quæ in medio resistente describitur. Et eodem argumento altera hyperbola, cujus est amplitudo Ak & tangens Ah, manente perpendiculo AI, similis erit hyperbolæ illi quam corpus sub angulo æquali hAk, projectum in secundo experimento describit. Quâ propter, ob figurarum in chartâ & in medio resistente descriptarum similitudinem, amplitudines AK, Ak erunt inter se ut homologæ amplitudines hyperbolarum quæ in experimentis descriptæ sunt, id est, AK : Ak = d : e.

(n) * *Curvas regularis.* Vide notam 75. lib. hujus.

tudines AI & AH, (o) quas invenire opportuit. Hiſce verò datis dabitur & reſiſtentia medii in loco A, (p) quippe quæ ſit ad vim gravitatis ut AH ad $\frac{4}{3}AI$. Augenda eſt autem den- LIBER SECUND. SECTIO II. PROP. X. PROB. III.



ſitas medii per reg. 4. & reſiſtentia modo inventa, ſi (q) in eâdem ratione augeatur, fiet accuratior.

Reg. 8. Inventis (r) longitudinibus AH, HX; ſi jam deſide-

(o) * *Quas invenire oportuit.* Cum enim abſciſſa SM longitudini aſſumptæ AH æqualis ſit, & rationum differentia $\frac{AK}{Ak}-\frac{d}{e}$ exponatur per ordinatam MN; ubi fit SM=SX & proinde MN=o, eſt etiam $\frac{AK}{Ak}-\frac{d}{e}=o$, & ideo $\frac{AK}{Ak}=\frac{d}{e}$, atque SX æqualis veræ longitudini aſſumendæ AH (per not. præced.). Si itaque ex datis perpendiculo AI & verâ longitudine inventâ AH cum angulo HAN quæratur, ut ſupra, longitudo AK; ob ſimilitudinem figurarum in medio reſiſtente & in charta deſcriptarum, erit longitudo AK experimento cognita ad longitudinem AK ultimo inventam in charta, ut longitudo AH in medio reſiſtente ad longitudinem AH in chartâ ductam, atque etiam ut perpendiculum AI in medio reſiſtente ad perpendiculum AI in charta aſſumptum. Quibus inventis, deſcribi poterit hyperbola ſimilis & æqualis hyperbolæ, quam corpus in medio reſiſtente deſcripſit. 123.

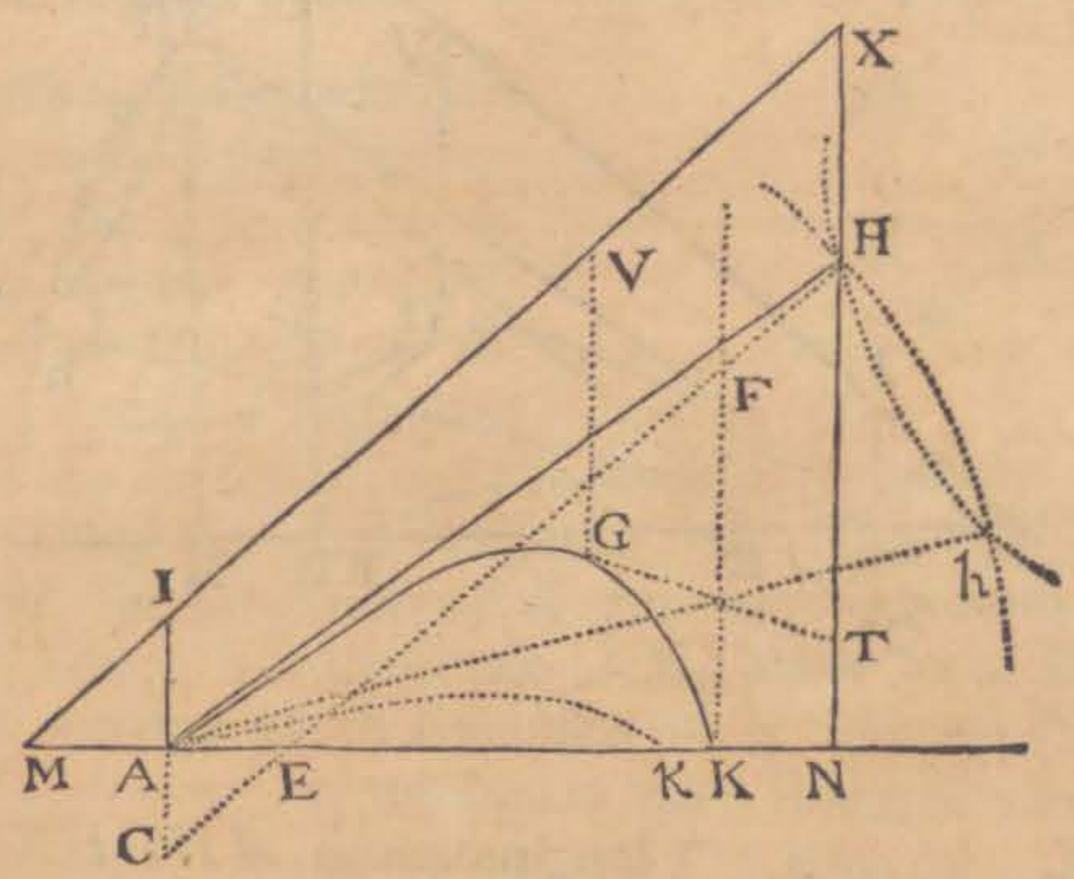
(p) * *Quippe quæ ſit ad vim gravitatis &c.* Ex demonſtratis in hoc ſcholio ante regulam 1am. reſiſtentia eſt ad gravitatem ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}AI$, hoc eſt, ut AH ad $\frac{4}{3}AI$, ob $n=1$ (per hyp.).

(q) * *Si in eadem ratione augeatur.* Nam datâ velocitate, reſiſtentia eſt ut medii denſitas.

(r) * *Inventis longitudinibus AH, HX &c.* Inventis enim (per reg. 7.) lineis AI & AH, datur linea HX, ut pote quæ æqualis eſt 2AI, ob $n=1$, (reg. 5.).

DE MOTU CORPORUM.

ſideretur poſitio rectæ AH, ſecundum quam projectile, datâ illâ cum velocitate emiſſum incidit in punctum quodvis K: ad puncta A & K erigantur rectæ AC, KF horizonti perpendiculares, quarum AC deorſum tendat, & æquetur ipſi AI ſeu $\frac{1}{2}HX$. Aſymptotis AK, KF (f) deſcribatur hyperbola, cujus conjugata tranſeat per punctum C, centroque A & intervallo



AH deſcribatur circulus ſecans hyperbolam illam in puncto H; & projectile ſecundum rectam AH emiſſum incidet in punctum K. *Q. E. I.* Nam punctum H, (t) ob datam longitudinem AH, locatur alicubi in circulo deſcripto. Agatur CH occurrens ipſis AK & KF, illi in E, huic in F; & (u) ob parallelas CH, MX & æquales AC, AI, erit AE æqua-

lis

(f) * *Deſcribatur hyperbola* (346. lib. 1.)

(t) * *Ob datam longitudinem AH*, per reg. 1am.

(u) * *Et ob parallelas CH, MX &c.* Nam ſi ſupponamus H eſſe punctum quæſitum, per quod ducenda eſt recta AH, erit (per conſtr.) HX æqualis & parallela IC, & ideo CH parallela IX ſeu MX, ac triangula CAE, IAM ſimilia; proindeque cum ſit CA=AI (per conſt.) erit etiam AE=MA−KN, (per theor. 1. de conicis). Sed ob triangula ſimilia CAE, HNE, & ob parallelas KF, NH, eſt CE:AE=EH:EN=FH:KN. Cum igitur ſit AE=KN, erit quoque CE=FH; ac proinde incidit punctum H in hyperbolam (per theor. 1. de hyp.)

lis AM, & propterea etiam æqualis KN. Sed CE eſt ad AE ut FH ad KN, & propterea CE & FH æquantur. Incidit ergo punctum H in hyperbolam aſymptotis AK, KF deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum C, atque ideo reperitur in communi interſectione hyperbolæ hujus & circuli deſcripti. *Q. E. D.* Notandum eſt autem quod hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta AKN horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in (x) angulo quovis inclinata: (y) quodque

(x) * *In angulo quovis inclinata.* Demonſtratio enim lineam MAKN per puncta data A & K ductam horizonti parallelam eſſe minime ſupponit, eademque prorſus manet ſi linea illa ad horizontem inclinata fuerit.

(y) * *Quodque ex duabus interſectionibus.* Quoniam punctum H per interſectionem circuli cum hyperbola determinatur (ex dem.), & circulus hyperbolam in duobus punctis interſecare poteſt, ex duabus interſectionibus H, H duo prodeunt anguli, ſeu duæ ſunt poſitiones nes tangentis AH ſecundum quam projectile datâ velocitate emiſſum incidit in punctum K.

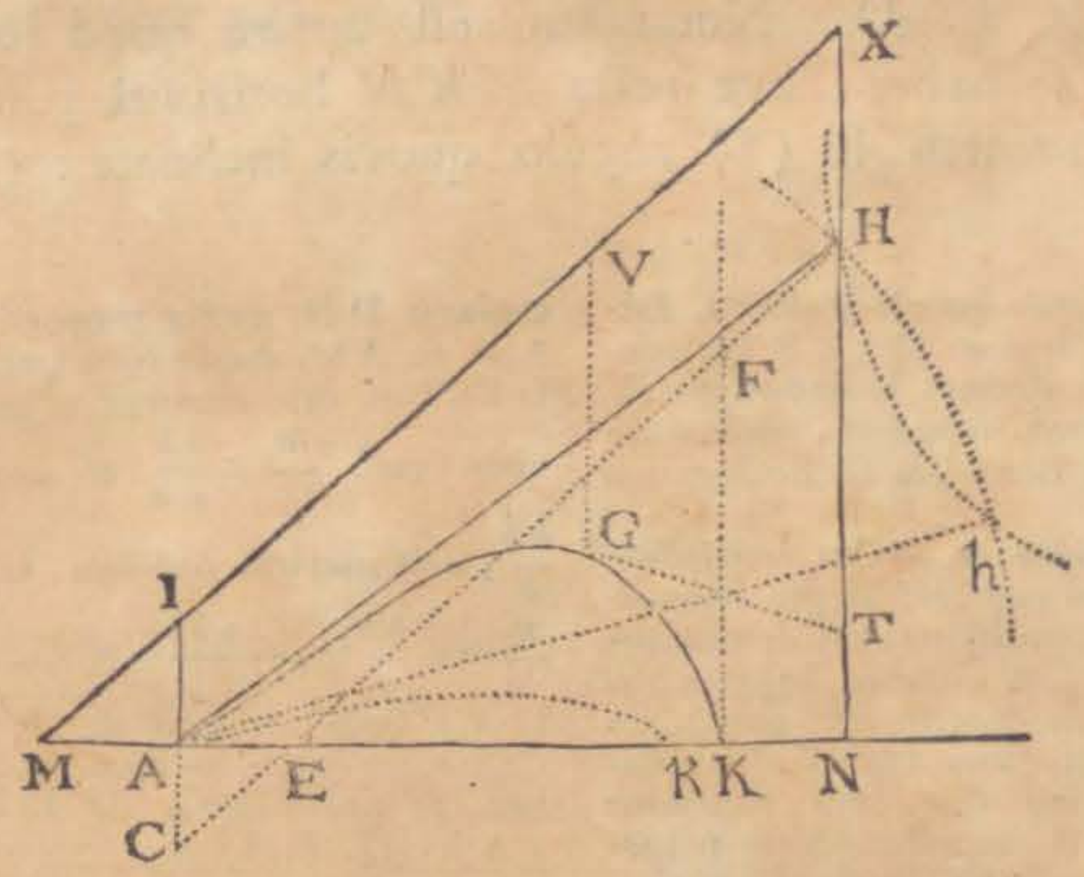
124. Problema. Inventis longitudinibus AI & AH, maximam altitudinem GD, ad quam corpus ſub angulo dato HAN projectum pertingere poteſt, definire.

Sit, ut in exemplo 3°, $BN=a$, $BD=o$, $NX=c$, ratio data VZ ad ZX, ſeu AI ad $AM=\frac{m}{n}$, $VG=\frac{bb}{a}$, ideoque $AI=\frac{bb}{AN}$, & $bb=AI\times AN$. Et erit (Ex. 3°.) $GD=c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-$&c.; & $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a}o=\underline{Q}o$. Eſt autem $\underline{Q}o$ ut ordinatæ GD fluxio, quæ, ut habeatur ordinata omnium maxima, nihilo æquanda eſt (48): quare erit $\frac{m}{n}=\frac{bb}{aa}$, & $aa=\frac{nbb}{m}$, ſive $DN^2=\frac{AM\times AI\times AN}{AI}=AN\times AM$. Si ergo capiatur DN media proportionalis inter AN & AM, ducaturque per D ordinata GD, hæc erit omnium maxima. Quoniam verò $\frac{m}{n}=\frac{bb}{aa}$ & proinde $\frac{m}{n}a=\frac{bb}{a}$, erit maxima ordinata GD ſeu $c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}=c-\frac{2bb}{a}=NX-\frac{2AI\times NA}{DN}$. Quare GD ordinata maxima æqualis eſt differentiæ inter verticalem NX & quartam proportionalem ad DN, AN & 2AI. Q. E. I. 124.

125. Problema. Datis longitudinibus AI & AH, angulum projectionis HAN maximæ omnium amplitudini AK convenientem invenire. Dicantur $AH=a$, $AI=b$, $HX=2AI=2b$, $AK=e$, $AN=x$, $HN=y$, & erit $x-e=KN=MA=AF$, ac $b=AI=AC$ (per reg. 8), proindeque $EN=AK=e$. Triangula ſimilia EAC, ENH hanc proportionem ſuppeditant, $AE(x-e):EN(e)=AC(b):HN(y)$, & componendo $x:e=b+y:y$, unde habetur $e=\frac{xy}{b+y}$, $x=\frac{be+ey}{y}$, & $xx=ee\frac{[b+y]^2}{yy}$. Eſt etiam, ob angulum ANH rectum, $aa-yy=xx=ee\frac{[b+y]^2}{yy}$, & hinc $aayy-y^4=ee[b+y]^2$. Capiatur hujus æquationis fluxio, & amplitudinis maximæ e fluxione nihilo æquatâ (48), erit illa $2a^2ydy-4y^3dy=2ee[b+y]dy$, &, dividendo per $2dy$, $aay-2y^3=ee[b+y]$. Erat autem $e=\frac{xy}{b+y}$, & ideo $ee=\frac{xxyy}{[b+y]^2}$

DE MOTU CORPORUM.

que ex duabus interſectionibus H, H duo prodeunt anguli NAH, NAH; & quod in praxi mechanicâ ſufficit circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam CH ita applicare ad



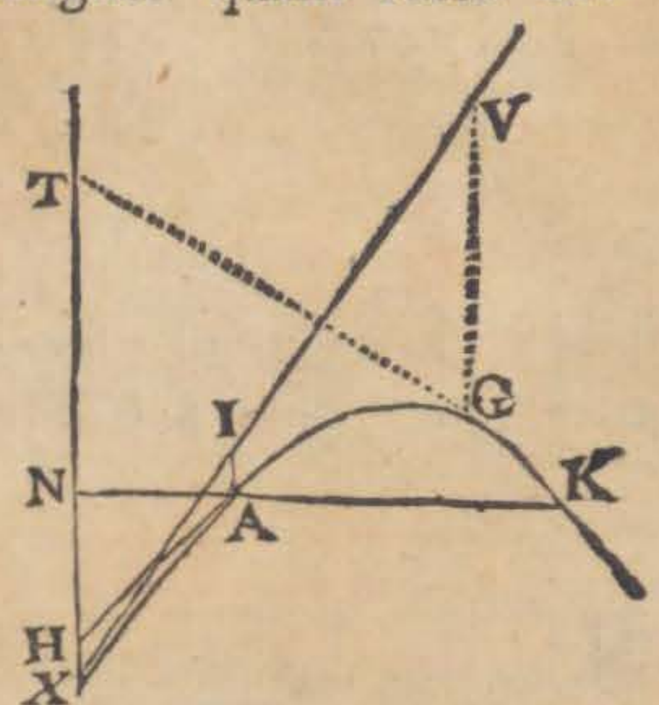
punctum C, ut ejus pars FH, circulo & rectæ FK interjecta, æqualis ſit ejus parti CE inter punctum C & rectam AK ſitæ.

Quæ

$= \frac{aayy - y^4}{[b+y]^2}$, ac proinde $ee(b+y) = \frac{aayy - y^4}{b+y}$. Quare erit $aay - 2y^3 = \frac{aayy - y^4}{b+y}$, ſive $aabyy + aay^2 - 2byy - 2y^4 = aayy - y^4$, unde, reductione factâ & diviſis terminis per y, eruitur $aab = 2byy + y^3$. Hâc igitur æquatione reſolutâ, invenitur y ſeu HN ſinus anguli HAN, exiſtente ſinu toto AH. Q. E. D.

126. Cor. Manifeſtum eſt in æquatione $aab = 2byy + y^3$, quantitatem $2byy$ minorem eſſe quantitate aab, & proinde quadratum yy, ſeu HM^2, minus dimidio quadrato $\frac{1}{2}aa$ vel $\frac{1}{2}AH^2$; unde ſequitur angulum quæſitum HAN ſemirecto minorem eſſe, qui, ſi medium non reſiſteret, foret ſemirectus. Sit medii denſiias, adeoque & reſiſtentia, admodum parva, & erit ferè $y = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, atque $aab = 2byy + ayy\sqrt{\frac{1}{2}}$, & hinc $yy = \frac{aab}{2b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}$, ac $y = a\sqrt{\frac{b}{2b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}}$, quam proxime.

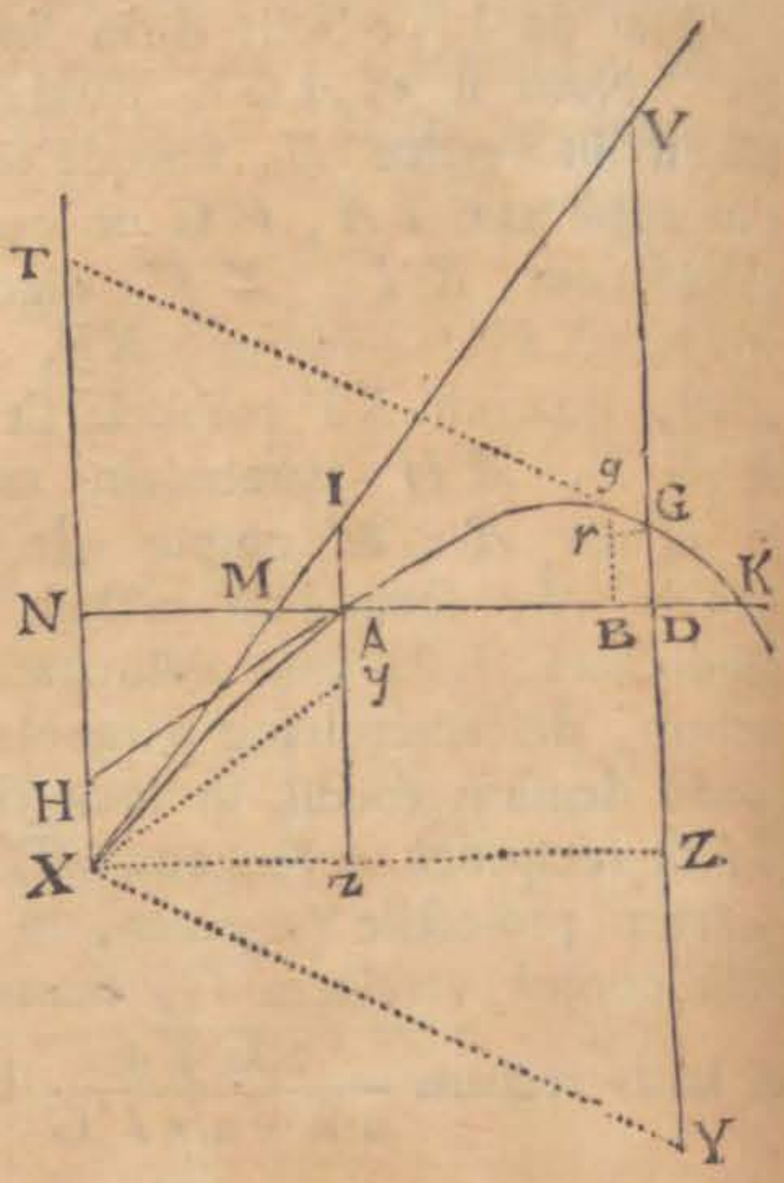
Quæ de hyperbolis dicta sunt facile applicantur ad parabolas. Nam si $XAGK$ parabolam designet quam recta XV tangat in vertice X, sintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abscissarum XI, XV dignitates XI^n, XV^n; agantur XT, GT, AH, quarum XT parallela sit VG & GT, AH parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, secundum rectam AH productam, justâ cum velocitate projectum, describet hanc parabolam, si modo densitas medii, in locis singulis G, sit reciprocè ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit quâcum projectile pergeret, in spatio non resistente, in parabolâ conicâ verticem G, diametrum VG deorsum productam, & latus rectum $\frac{2GTq}{nn-n\times VG}$ habente. Et resistentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn-2n}{n-2}VG$. Unde si NAK lineam horizontalem designet, & manente tum densitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX, & inde datur parabolæ vertex X, & positio rectæ XI, & sumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia parabolæ puncta G, (z) per quæ projectile transibit.



(z) *Per quæ projectile transibit.* Producatur VG ut horizontalem NK secet in

DE MOTU CORPORUM.

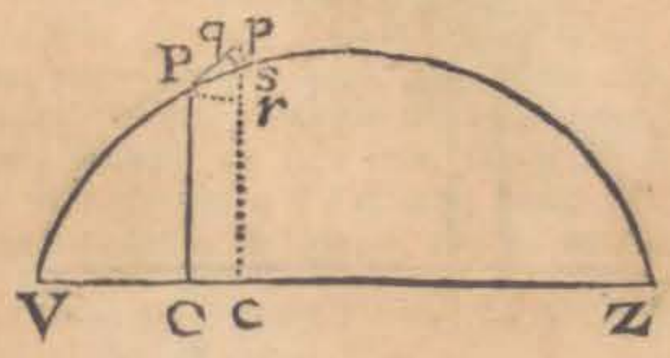
in D, & rectam XZ horizonti parallelam in Z. Pro BN, BD, NX scribantur *A*, *O*, *c*, respective, sitque M intersectio linearum XV, NK; & XN ad NM, sive ob triangulorum XNM, VZX similitudinem, VZ ad ZX vel DN ut *d* ad *e*; ideoque $DN = A + O$, & $VZ = \frac{d}{e} \times A + O$. Quia vero VG est ut XV^n (per hypoth.), & VX est ad XZ, seu DN, in datâ ratione XN ad NM; erit etiam VG ut DN^n. Ponatur ergo $VG = \frac{DN^n}{bb} = \frac{\overline{A+O}^n}{bb} = \frac{A^n}{bb} + \frac{nA^{n-1}O}{bb} + \frac{n.n-1}{1.2}\frac{A^{n-2}}{bb}O^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\frac{A^{n-3}}{bb}O^3 +$ &c., & erit $GD = VZ - NX - VG = \frac{d}{e} \times A + O - c - \frac{\overline{A+O}^n}{bb} = \frac{d}{e}A - c - \frac{A^n}{bb} + \frac{d}{e}O - \frac{nA^{n-1}}{bb}O - \frac{(nn-n)A^{n-2}}{2bb}O^2 - \frac{(n^3-3nn+2n)A^{n-3}}{6bb}O^3 -$ &c. Quare erit $Q = \frac{nA^{n-1}}{bb} - \frac{d}{e}$; $R = \frac{nn-nA^{n-2}}{2bb}$, & $S = \frac{\overline{n^3-3nn+2n}A^{n-3}}{6bb}$. Per punctum B ducatur ordinata Bg, ad quam demittatur ex G perpendiculum Gr, sitque XY æqualis & parallela tangenti GT; & ob triangula Grg, XZY similia, erit Gr^2 ad Gg^2 ut XZ^2 seu DN^2 ad XY^2 vel GT^2; est autem $Gr^2 = O^2$, $rg^2 = QQOO$, & ideo $Gg^2 = OO \times 1 + QQ$: quare cum sit etiam BN seu $DN = A$, erit $GT^2 = AA \times 1 + QQ$, $GT = A\sqrt{1+QQ}$, & $\frac{GT}{A} = \sqrt{1+QQ}$. Per coroll. 1. prop. X. medii densitas in loco G est ut $\frac{S \times A}{R \times GT}$, & (ex demonstratis) $\frac{S}{R} = \frac{n-2}{3A}$, ideoque $\frac{S \times A}{R \times GT}$ est ut $\frac{n-2}{3GT}$; quare, ob datum numerum $\frac{n-2}{3}$, densitas est reciprocè ut tangens GT. Velocitas in G (per prop. X.) ea est, quâ cum projectile pergeret, in spatio non resistente, in parabolâ conicâ verticem G, diametrum GD, & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ habente; & ideo cum sit $\frac{1+QQ}{R} = \frac{GT^2}{A^2R} = \frac{2GT^2}{nn-n \times \frac{A^n}{bb}} = \frac{2GT^2}{nn-n \times VG}$ (ex dem.), parabolæ latus rectum erit $\frac{2GT^2}{nn-n.VG}$. Resistentia in G (per cor. 1. prop. X.) est ad vim gravitatis, ut $3S \times GT$ ad $4RR \times DN$, id est, ut GT ad $\frac{4RR \times A}{3S}$; sed $4RR \times A = \frac{\overline{nn-n}^2}{b4} \times A^{2n-3}$, & $3S = \frac{nn-n \times n-2}{2} \times \frac{A^{n-3}}{bb}$, atque ideo $\frac{4RR \times A}{3S} = \frac{2nn-2n}{n-2} \times \frac{A^n}{bb} = \frac{2nn-2n}{n-2} \times VG$. Erit igitur resistentia ad gravitatem, ut GT ad



ad $\frac{2nn-2n}{n-2} \times VG$. Velocitas in loco G (per prop. X.) eſt ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$ $= \sqrt{\frac{2GI^2}{nn-n \times VG}}$, ideoque ob datum numerum $\frac{2}{nn-n}$, ut $\frac{GT}{\sqrt{VG}}$.

Quando igitur corpus eſt in A, medii denſitas eſt ut $\frac{1}{AH}$, & velocitas ut $\frac{AH}{\sqrt{AI}}$; unde manente tum denſitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, & mutato utcunque angulo NAH, manebunt AH, & $\frac{AH}{\sqrt{AI}}$, ac proinde AI. Quia porro $ZY^2 = XY^2 - XZ^2 = GT^2 - DN^2 = AA \times 1 + QQ - AA = AAQQ$, & ideo $ZY = Q \times A = \frac{nA^n}{bb} - \frac{d}{e}A = n\,VG - VZ$, atque $ZY + VZ = VY = n\,VG$; erit in loco A, $Iy = n \times AI$, & hinc $Ay = XH = nAI - AI$. Quare manente AI, manebit etiam HX, ob datum numerum $n-1$. Inveniantur, uti regulâ 7ª. pro hyperbolâ factum eſt, longitudines AH, AI & proinde HX; & inde dabitur punctum H, per quod ſi ducatur THX ad horizontem perpendicularis, datâ XH, dabitur poſitio rectæ XI, & ſumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dabuntur omnia parabolæ puncta G, per quæ projectile tranſibit.

Problema elegantiſſimum de inveniendâ trajectoriâ quam corpus in medio juxta duplicatam velocitatum rationem reſiſtente deſcribit, in ſuis principiis prætermiſit Newtonus. Rem generaliter poſtea confecerunt Clariſſimi Mathematici Joannes Bernoullius, Hermannus, & Eulerus, qui trajectoriam a projectili deſcriptam in medio quod in quâlibet multiplicatâ velocitatum ratione reſiſtit, analytice invenerunt. Horum veſtigiis inſiſtentes, tam elegans problema in noſtris commentariis deſiderari nolumus.



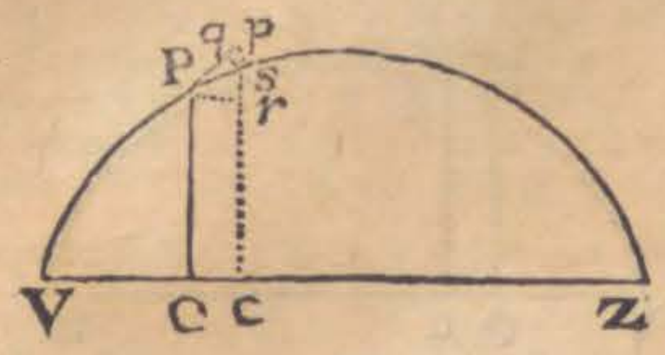
PROBLEMA.

127. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis VZ, determinare curvam VPp, quam deſcribit projectile in medio uniformi quod in multiplicatâ quâlibet velocitatum ratione reſiſtit.

Ductis ordinatis verticalibus PC, pc infinitè propinquis, & ex puncto P ad pc perpendiculo Pr; dicantur vis gravitatis $= g$, velocitas projectilis in loco $P = v$, reſiſtentia ibidem $= r = \frac{v^{2n}}{2a}$, ita ut ſit a quantitas conſtans quæ determinabitur ex determinatione reſiſtentiæ, ſit Tangens Pp, arcus $Ps = ds$, $VC = x$, $PC = y$, & ideo $pr = dy$, ac Cc ſeu $Pr = dx$; fluxio hæc dx conſtans ſupponatur. * Reſolvatur actio gravitatis quæ exprimitur per ps in actionem sq curvæ perpendicularem; & actionem pq, curvæ parallelam quæ in aſcenſu corporis illud retardat in deſcenſu accelerat, erit actio tota gravitatis ad ejus actionem quâ motum in curva retardat in aſcenſu & accelerat in deſcenſu ut eſt ps ad pq, & ob ſimilia triangula pqs, Ppr, eſt ps ad pq ſicut Pp ſive Ps ad pr, ideoque Ps (ds) ad pr (dy) ſicut gravitas tota g, ad $\frac{g\,dy}{ds}$ quæ eſt actio gravitatis ad retardandum corpus in aſcenſu, & quia in deſcenſu eſt $pr = -dy$, eſt $\frac{-g\,dy}{ds}$ actio gravitatis ad accelerandum corpus in deſcenſu; Unde tota retardatio corporis tam ex gravitate quam ex reſiſtentia orta, eſt $r + \frac{g\,dy}{ds}$ tam in aſcenſu quam in deſcenſu.

Decrementum autem velocitatis $-dv$; eſt ſemper ut vis retardans & tempus quo

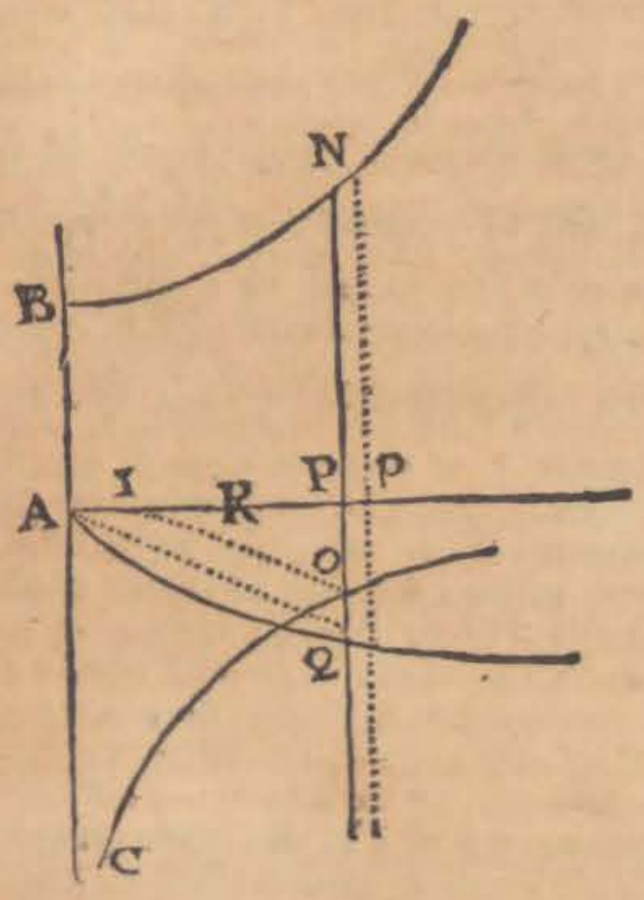
DE MOTU CORPORUM.



durante ea vis agit conjunctim, idque tempus est semper æquale arcui descripto P s ad velocitatem v applicato, hoc est, temporis incrementum $dt = \frac{ds}{v}$ unde velocitatis decrementum $-dv = r + \frac{g\,dy}{ds} \times \frac{ds}{v} = -\frac{r\,ds + g\,dy}{v}$, & quia ex Hypothesi $r = \frac{v^{2n}}{2a}$, est $-v\,dv = \frac{v^{2n}\,ds}{2a} - g\,dy$; Ut autem obtineatur valor v, & dv expressione quæ ad curvam referatur, notandum quod lineola p s sive $-ddy$ est spatiolum urgente gravitate tempore dt percursum, ideoque est ut vis gravitatis g per temporis quadratum multiplicata, ideoque est $-ddy = g\,dt^2 = \frac{g\,ds^2}{v^2}$ (cum sit $dt = \frac{ds}{v}$) unde est $v^2 = \frac{g\,ds^2}{-ddy}$ sive $-v^2\,ddy = g\,ds^2$, & fluxionem utrinque sumendo est $-v^2\,d^3y - 2v\,ddy\,dv = 2g\,ds\,dds$, & cum lineola p q designet dds sitque P p sive P s (ds) ad P r (dy) sicut p s ($-ddy$) ad p q (dds) est $ds\,dds = -dy\,ddy$ unde hæc ultima æquatio fit $-v^2\,d^3y - 2v\,ddy\,dv = -2g\,dy\,ddy$ & $-2v\,ddy\,dv = v^2\,d^3y - 2g\,dy\,ddy$ & $-v\,dv = \frac{v^2\,d^3y}{2\,ddy} - g\,dy$, unde cum inventum etiam fuerit $-v\,dv = \frac{v^{2n}\,ds}{2a} - g\,dy$, est $\frac{v^2\,d^3y}{ddy} = \frac{v^{2n}\,ds}{a}$, & valorem inventum $v^2 = \frac{g\,ds^2}{-ddy}$ substituendo, fit tandem $\frac{g\,ds^2\,d^3y}{-ddy^2} = \frac{g^n\,ds^{2n+1}}{-a\,ddy^n}$ sive reductione facta $a\,d^3y = \frac{g^{n-1}\,ds^{2n-3}}{ddy^{n-2}}$.

Ut autem ex hac æquatione eruatur æquatio inter dx, & dy, & inter x & y, designet p variabiles quascumque quæ in æquatione quæsita ita multiplicant fluxionem dx ut ea sit æqualis dy, sitque $dy = p\,dx$ & $dy^2 = p^2\,dx^2$, cum sit $ds^2 = dx^2 + dy^2$ erit $ds^2 = dx^2 + p^2\,dx^2 = \overline{1+p^2} \times dx^2$, & $ds = dx\sqrt{1+pp}$ unde $ds^{2n-1} = dx^{2n-1} \times \overline{1-pp}^{\frac{2n-1}{2}}$.

Præterea cum dx constans supponatur erit $dy = p\,dx$, $ddy = dx\,dp$, & sumpta fluxione erit & $d^3y = dx\,ddp$. Et si tandem q designet variabiles quæ ita multiplicant fluxionem dx, ut ea fiat æqualis dp, sitque $q\,dx = dp$ erit $dx\,dq = ddp$ & $dx^2\,dq = dx\,ddp = d^3y$, & æquatio proposita in hanc vertetur $a\,dx^2\,dq = \frac{g^{n-1}\,dx^{2n-1} \times \overline{1-pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dx\,dp^{n-2}} = \frac{g^{n-1}\,dx^{n+1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$, & diviso utroque termino per dx^2, erit $a\,dq = \frac{g^{n-1}\,dx^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$. Denique loco dx posito ejus valore $\frac{dp}{q}$ erit $a\,dq = \frac{g^{n-1}\,dp^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}\,dp^{n-2}}$ sive $a\,dq = \frac{g^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}} \times dp$, hoc est $a\,q^{n-1}\,dq = g^{n-1}\overline{1 \times pp}^{\frac{2n-1}{2}}\,dp$, quæ est æquatio fluxionalis inter dp & dq, ex quâ per curvarum quadraturam obtinebitur æquatio inter p & q & inde inter x & y, ut id ipsum nunc exponemus, summando enim terminos æquationis $a\,q^{n-1}\,dq = g^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}\,dp$ habetur $\frac{a\,q^n}{n} = g^{n-1} \times \overline{S\,1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}\,dp$, hoc est $q = \sqrt[n]{\frac{n\,g^{n-1}}{a}} \times S\,\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}\,dp$, unde fit curva cujus abscissa qualiscumque A P sit $= p$, sitque ejus ordinata P N semper æqualis $\frac{1}{1+}$



habeatur origo a quâ ſumi debent illarum arearum portiones, ſumendum eſt id punctum in quo PO eſt ad PQ ut Coſinus anguli jactus cum Horizonte ſub quo corpus moveri incepit ad ejus anguli ſinum, quippe ea fuit ipſo motus initio ratio elementorum dx & dy; ſique ille coſinus dicatur c, & ſinus s, erit in ea origine $c : s = \frac{1}{q} : \frac{p}{q}$, unde ſi ſumatur AR ſive $p = \frac{s}{c}$ erit ejus extremitas R origo arearum quarum valor rationem quæſitarum x & y exhibebit. †

128. 128.

128. Cor. 1. Quoniam inveniimus $v^2 = \frac{-g\,ds^2}{ddy}$, $ds^2 = dx^2(1+pp)$, & $ddy = dx\,dp$; erit $v^2 = \frac{-g\,dx(1+pp)}{dp}$; ſed $dp = q\,dx$; quare erit $v^2 = \frac{-g(1+pp)}{q}$. Præterea (13) $dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx\sqrt{1+pp}}{v} = \frac{dp\sqrt{1+pp}}{qv}$, & $v = \sqrt{\frac{-g(1+pp)}{q}}$; quare erit $dt = \frac{dp}{\sqrt{-gq}}$, & $t = \text{S.}\frac{dp}{\sqrt{-gq}}$. Invenietur itaque tum velocitas corporis in loco P trajectoriæ VPp, tum tempus t quo arcus VP deſcribitur.

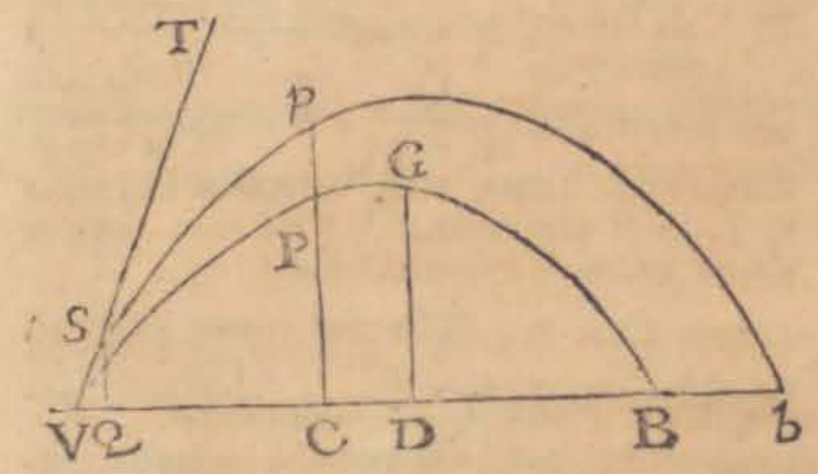
129. Cor. 2. Si in æquatione generali ſupra repeta, $ad^3y = \frac{g^{n-1}\,ds^{2n-1}}{ddy^{n-2}}$, ponatur $n = 1$, ſeu reſiſtentia velocitatis quadrato proportionalis; æquatio in hanc migrabit $ad^3y = ds\,ddy$; & ponendo $dy = p\,dx$, ac $dx = \frac{dp}{q}$, invenietur $aq = \text{S.}\,dp\sqrt{1+pp}$, $x = \text{S.}\frac{dp}{q} = \text{S}\,\frac{a\,dp}{\text{S.}\,dp\sqrt{1+pp}}$, $y = \text{S.}\frac{p\,dp}{q} = \text{S.}\frac{a\,p\,dp}{\text{S.}\,dp\sqrt{1+pp}}$, $vv = \frac{-ag(1+pp)}{\text{S.}\,dp\sqrt{1+pp}}$, & $t = \text{S.}\frac{a^{\frac{1}{2}}\,dp}{\sqrt{-g}\,\text{S.}\,dp\sqrt{1+pp}}$. Eſt autem $\text{S.}\,dp\sqrt{1+pp}$ area hyperbolæ æquilateræ, cujus abſciſſa eſt p & ordinata ducta perpendiculariter ad axem conjugatum $\sqrt{1+pp}$, ſemiaxis verò unitas. Unde invenietur q in p per hujus hy-

$\frac{2n-1}{1+pp\ \ 2}$, erit area ABPN = $\frac{2n-1}{\text{S.}\,1+pp\ \ 2}\,dp$, ducatur ergo ab altera parte P ordinata PO talis ut ſit ſemper æqualis $\sqrt[n]{\frac{1}{\frac{n\,g^{n-1}}{a}}} \times$ ABPN erit ea PO æqualis $\frac{1}{q}$, cumque ſit $dx = \frac{dp}{q} = \frac{1}{q} \times dp$, erit (ſummando) $x = \text{S}\,\frac{1}{q} \times dp$ ſive æqualis area ACPO.

Denique cum ſit $dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{q} = \frac{p}{q} \times dp$ & ſummando $y = \text{S.}\frac{p}{q} \times dp$ ideo ſi è puncto P verſus originem A ſumatur PI æqualis unitati, ductaque IO, ducatur ipſi parallela AQ ab origine curvæ quæ ſecet PO productam in Q, erit $1 : \text{PO}\,(\text{ſive}\,\frac{1}{q}) = \text{AP}\,(\text{ſive}\,p) : \text{PQ} = \frac{p}{q}$, itaque area curvæ APQ erit S. $\frac{p}{q}\,dp$ ac per conſequens æqua- y, ergo datis curvarum ACPO, & APQ quadraturis datur ratio x ad y, & ex earum ordinatis ratio dx ad dy: ſed ut

hyperbolæ aream; at abſciſſa x obtinebitur per aream curvæ cujus eſt abſciſſa p & ordinata $\frac{1}{q}$; & correſpondens ordinata y definietur per aream curvæ, cujus abſciſſa eſt p & ordinata $\frac{p}{q}$. Ex quibus manifeſtum fit veræ trajectoriæ V P Z deſcriptionem adeo perplexam eſſe, ut ex illa vix quidquam ad uſus philoſophicos aut mechanicos accommodatum poſſit deduci.

130. Coroll. 3. Quoniam poſito $n=1$, reſiſtentia medii eſt $\frac{v^2}{2a}$ (127), ubi reſiſtentia fit gravitati æqualis, id eſt, ubi v æqualis eſt velocitati terminali, habetur $\frac{v^2}{2a}=g$, & $v^2=2ag$, ideóque (30. lib. 1.) a eſt altitudo ex quâ corpus in medio non reſiſtente vi conſtante g ſollicitatum caderet ut velocitatem terminalem acquirat.



131. Coroll. 4. Si in hypotheſi corollarii ſecundi reſiſtentia parva fuerit qualem fere experitur globus ferreus non parvus magnâ ſatis velocitate per aera projectus, trajectoria V P B, quam globus ille in medio reſiſtente deſcribit, non multùm aberrat a Parabolâ conicâ V p b, quam eâdem urgente vi gravitatis uniformi g ſeu 1 deſcriberet. Quia tamen reſiſtentia velocitatem projectionis minuit, ordinata C P, ad trajectoriam V P B, in medio reſiſtente paulò minor erit quam ordinata C p ad parabolam conicam V p b. Porrò ſi abſciſſa V C dicatur x ordinata C p dicatur z, amplitudo V b, h & proindè C b, $h-x$, erit (ex naturâ parabolæ) rectangulum ſub abſciſſis V C × C b, ſeu $hx-xx$, æquale rectangulo ordinatæ C p, vel z in datam quantitatem l, & ideò æquatio erit $z=\frac{hx}{l}-\frac{xx}{l}$. Cum igitur ordinata C P (quæ dicatur y) paulò minor ſit quam C p, ſeu z, ponatur $y=\frac{hx}{l}-\frac{xx}{l}-ex^3$, & æquatio iſta in quâ eſt e quantitas exigua, naturam trajectoriæ V P B exponere poterit quam proximè; loco $\frac{h}{l}$, & $\frac{1}{l}$, ſcribantur b & c ut æquatio ſit $y=bx-cx^2-ex^3$. Ut jam determinentur coëfficientes b, c, e, capiantur æquationis fluxiones, prima, ſecunda & tertia, factâ dx conſtante, erunt illæ $dy=bdx-2cxdx-3ex^2dx$; $ddy=-2cdx^2-6exdx^2$, $d^3y=-6edx^3$. Coincidentibus punctis V & C, fit $x=0$, & ideo $dy=bdx$, $ddy=-2cdx^2$ & $d^3y=-6edx^3$. Ex æquatione $dy=bdx$, deducitur proportio $dx:dy=1:b$; & coincidente C cum V, dx eſt ad dy ut ſinus totus V Q ad tangentem Q S, anguli projectionis T V Q; Quare ſi ſinus totus dicatur 1, erit b tangens anguli projectionis, & ideò dato hoc angulo datur b. Si velocitas cum quâ corpus è loco V projicitur ſit v, & f, altitudo ex quâ corpus urgente vi conſtante g, in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirit velocitatem illam v, erit $2gf=vv$ (30. lib 1.) ſed (30) $vv=-\frac{gds^2}{ddy}$, ideoque $2gf=-\frac{gds^2}{ddy}$, & $2f=-\frac{ds^2}{ddy}$; Eſt autem $ds^2=dx^2+dy^2=dx^2+bbdx^2$, & $ddy=-2cdx^2$ in loco V, (ex dem.). Quarè erit $2f=\frac{1+bb}{2c}$, & hinc $c=\frac{1+bb}{4f}$. Cum igitur quantitates b, & f, datæ ſint data erit c. Invenietur quantitas tertia e, per æquationem $ad^3y=dsddy$ (129) & per æquationes ſuprà repertas $ds=dx\sqrt{1+bb}$, $ddy=-2cdx^2$, & $d^3y=-6edx^3$; ex quibus eruitur $-6aedx^3=-2cdx^3\sqrt{1+bb}$, & hinc $e=\frac{c\sqrt{1+bb}}{3a}=\frac{1+bb\times\sqrt{1+bb}}{12af}$. Tota igitur æquatio aſſumpta $y=bx-cx^2-ex^3$ fit $y=bx-x^2\times\left(\frac{1+bb}{4f}\right)-$

$x^3 \times \left(\frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}\right)$ in quâ datâ velocitate terminali datur a, (130). Poterit etiam linea a, per experimentum reperiri; Nam si e loco V sub angulo dato T V B datâ cum velocitate projiciatur corpus in medio suppositio & observetur amplitudo jactûs V B, quæ dicatur A, in æquatione ad trajectoriam V P B, loco x, scribatur A, & loco y, scribatur o, quia ordinata C P, seu y evanescit in B invenierur $o = bA - AA \times \frac{(1+bb)}{4f} - A^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$; undè deducitur $a = AA \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12fb - 3A \times (1+bb)}$.

132. Coroll. 5. Jactûs amplitudo VB, invenitur, factâ $y = o$, undè eruitur $xx \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} + x \times \frac{(1+bb)}{4f} = b$, & $VB = x = -\frac{3a}{2\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\left(\frac{9aa}{4+4bb} + \frac{12afb}{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}\right)}$.

133. Coroll. 6. Maxima jactûs altitudo D G reperitur, sumptâ æquationis ad trajectoriam V P B, fluxione & factâ $dy = o$ (48); fit enim $o = bdx - 2xdx \times \frac{1+bb}{4f} - 3x^2dx \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$ undè deducitur $VD = x = -\frac{a}{\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\frac{aa}{1+bb} + \frac{4afb^{\frac{3}{2}}}{1+bb}}$. Quo valore loco x, in æquatione ad trajectoriam substituto, obtinebitur y, seu maxima altitudo D G.

134. Coroll. 7. Ut determinetur tangens anguli T V B, sub quo corpus datâ celeritate projectum, per datum punctum P transibit, loco x & y in æquatione ad trajectoriam scribantur datæ V C & V P, atque hinc eruatur valor tangentis b; dicatur $VC = p$, $CP = q$, & erit $q = bp - pp \times \frac{\sqrt{1+bb}}{4f} - p^3 \times \frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}$. Si medii densitas infinitè parva esset, altitudo a foret infinita (130), & idcircò $q = bp - pp \times \frac{1+bb}{4f}$. Inveniatur per hanc æquationem valor tangentis b qui dicatur k, & in æquatione superiori loco $(1+bb)^{\frac{3}{2}}$, scribatur $(1+bb) \times \sqrt{1+kk}$ & illa in hanc abibit $q = bp - pp \times \frac{(1+bb)}{4f} - p^3 \times \sqrt{1+bb} \times \frac{\sqrt{1+kk}}{12af}$, quæ cum sit duarum dimensionum facilè suppeditabit valorem ipsius b, quamproxime.

135. Coroll. 8. Datâ celeritate jactûs, invenitur angulus maximæ omnium amplitudini conveniens, si in æquatione corollarii 5. in quâ x exponit quamlibet amplitudinem V B, sumatur tangens b variabilis & sumptis fluxionibus ponatur $dx = o$ (48). Calculo enim inito invenietur $4f \times (1-2bb)^2 = 3ab \times (1-bb) \times \sqrt{1+bb}$. Quoniam verò tangens anguli projectionis est b, sinus totus 1, & proindè secans $\sqrt{1+bb}$; si ejusdem anguli sinus dicatur s, erit $\sqrt{1+bb} : b = 1 : s$, adeóque $1+bb : bb = 1 : ss$, & dividendo $1 : bb = 1-ss : ss$, atque ità $bb = \frac{ss}{1-ss}$, & $b = \frac{s}{\sqrt{1-ss}}$. Loco b substituatur $\frac{s}{\sqrt{1-ss}}$ in æquatione modo inventâ & illa in hanc mutabitur, $4f \times \frac{(1-3ss)^2}{(1-ss)^2} = 3as \times \frac{(1-2ss)}{(1-ss)^2}$, hoc est, $4f \times (1-3ss)^2 = 3as \times (1-2ss)$. Ex quâ æquatione, si eruatur valor sinûs s dabitur angulus quæsitus. Per approximationem ità potest obtineri. Scribatur in æquatione $3as = 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; Nam si trajectoria in medio non resistente describeretur, angulus T V B foret semirectus, & proindè sinus ejus $\sqrt{\frac{1}{2}}$, cum sit sinus totus $= 1$; & ideò in medio valdè raro est fere $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$; æquatio igitur erit $4f \times (1-3ss)^2 = (1-2ss) \times 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; quæ facillimè resolvetur ad instar æquationis duarum dimensionum. Hinc autem invenitur s paulò minor quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$, adeòque angulus projectionis semirecto paulò minor.

136.

DE MOTU CORPORUM.

136. Coroll. 9. Si medium esset paulò densius, assumenda foret æquatio ad trajectoriam, $y = bx - xx \times \frac{(1+bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} - hx^4$; aut etiam alia plurium terminorum. In illâ autem ità determinatur valor coefficientis h. Pro coefficientibus datis $\frac{1+bb}{4f}$, $\frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$, scribantur c, e, ut sit æquatio $y = bx - cx^2 - ex^3 - hx^4$, & sumptis ut suprà (131) fluxionibus primis, secundis & tertiis, factâ dx, constante, invenietur $\frac{ad^3y}{ds\,ddy} = 1 = \frac{6ae + 24ahx}{1} \times$

$$\frac{(2c + 6ex + 12hx^2)}{\sqrt{1 + bb - 4bcx + 4ccx^2 - 6bex^2}\ \&c.}$$

$$= \frac{6ae + 24ahx}{2c + 6ex} \times \sqrt{1 + bb} - \frac{2bcx}{\sqrt{1+bb}}$$

neglectis terminis ubi x^2 occurrit & extracta Radice per formulam Newtonianam. Ut autem hæc quantitas constans sit & æqualis unitati, termini homologi in numeratore $6ae + 24ahx$, & denominatore $2c\sqrt{1+bb} + 6ex\sqrt{1+bb} - \frac{4bcx}{\sqrt{1+bb}}$ ponendi sunt æquales, id est, $6ae = 2c\sqrt{1+bb}$, & $24ahx = 6ex\sqrt{1+bb} - \frac{4bcx}{\sqrt{1+bb}}$. Ex his suppositionibus eruitur $e = \frac{c\sqrt{1+bb}}{3a} = \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$, & $h = e\frac{\sqrt{1+bb}}{4a} - \frac{bcc}{6a\sqrt{1+bb}} = \frac{(1+bb)^2}{48a^2f} - \frac{b \times (1+bb)^{\frac{3}{2}}}{96aff}$. Quarè æquatio assumpta erit $y = bx - x^2 \times \frac{(1+bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} - x^4 \times \frac{(1+bb)^2}{48a^2f} + x^4 b \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{96aff}$.

Et eodem modo determinarentur coefficientes in æquationibus plurium terminorum seu ad parabolas superiorum generum.

137. Coroll. 10. Si resistentia medii uniformis, partim constans supponeretur & partim velocitatis quadrato proportionalis, posset etiam trajectoria VPB quamproximè definiri. Sit enim resistentiæ pars uniformis $= \frac{1}{2}kg$, & resistentia tota $r = \frac{kg}{2} + \frac{v^2}{2a}$, & erit (28) $g\,dy + \frac{kg\,ds}{2} + \frac{v^2\,ds}{2a} = -v\,dv$ & (30) $v^2 = -\frac{g\,ds^2}{ddy}$ adeóque (127) $v\,dv = -g\,dy + \frac{g\,ds^2\,d^3y}{2\,ddy^2}$ his valoribus loco v^2 & $v\,dv$, in priori æquatione substitutis fit $g\,dy + \frac{kg\,ds}{2} - \frac{g\,ds^3}{2a\,ddy} = g\,dy - \frac{g\,ds^2\,d^3y}{2\,ddy^2}$, ideóque $k = \frac{ds^2}{a\,ddy} - \frac{ds\,d^3y}{ddy^2}$. Jam si resistentia tota r, exigua fuerit, ponatur æquatio ad trajectoriam VPB, $y = bx - cx^2 - ex^3$, & factâ dx, constante, capiantur fluxiones primæ, secundæ & tertiæ quæ coincidente puncto C, cum V, erunt $dy = b\,dx$, $ddy = -2c\,dx^2$, & $d^3y = -6e\,dx^3$ (131); undè invenitur ut (in coroll. 4. 131.) b, tangens anguli projectionis, existente sinu toto 1, & $c = \frac{1+bb}{4f}$, ubi f est altitudo ex quâ corpus urgente vi constante g cadendo in spatio non resistente acquirit jactûs velocitatem. Quantitas e determinabitur per æquationem $k = \frac{ds^2}{a\,ddy} - \frac{ds\,d^3y}{ddy^2}$. Nam si in illâ loco ds, ddy, d^3y, substituantur ipsorum valores $dx \times (1+bb)^{\frac{1}{2}} - 2c\,dx$, & $-6e\,dx^3$, erit $k = -\frac{(1+bb)}{2ac} + \frac{3e \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}}{2cc}$; undè eruitur $e = \frac{2kcc}{3 \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}}{3a} = \frac{k \times (1+bb)^{\frac{3}{2}}}{24ff} + \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$. Quapropter æquatio assumpta in hanc abit $y = bx - \frac{xx \times (1+bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$,

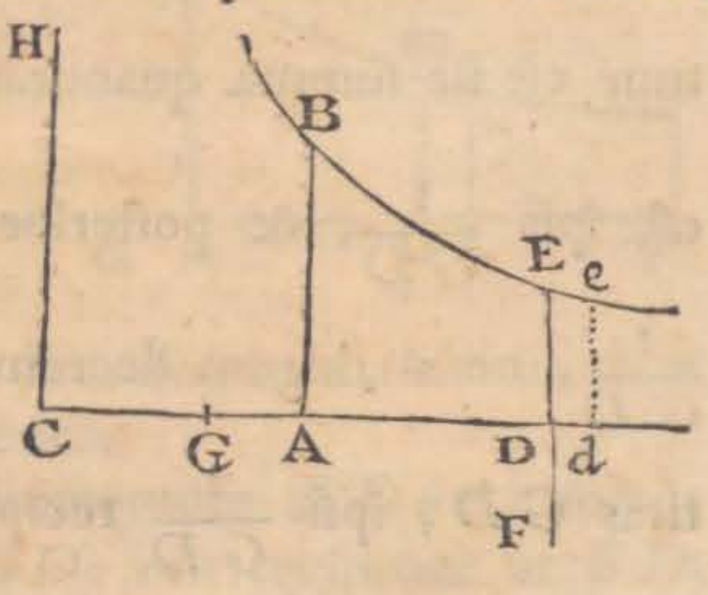
SECTIO III.

De motu corporum quibus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

Si corpori reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, & idem ſolâ vi inſitâ in medio ſimilari movetur: ſumantur autem tempora in progreſſione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progreſſione geometricâ.

Centro C, aſymptotis rectangulis $CADd$ & CH, deſcribatur hyperbola BEe, & aſymptoto CH parallelæ ſint AB, DE, de. In aſymptoto CD dentur puncta A, G: Et ſi tempus exponatur per aream hyperbolicam $ABED$ uniformiter creſcentem; dico quod velocitas exponi poteſt per longitudinem DF, cujus reciproca GD unâ cum datâ CG componat longitudinem CD in progreſſione geometricâ creſcentem.



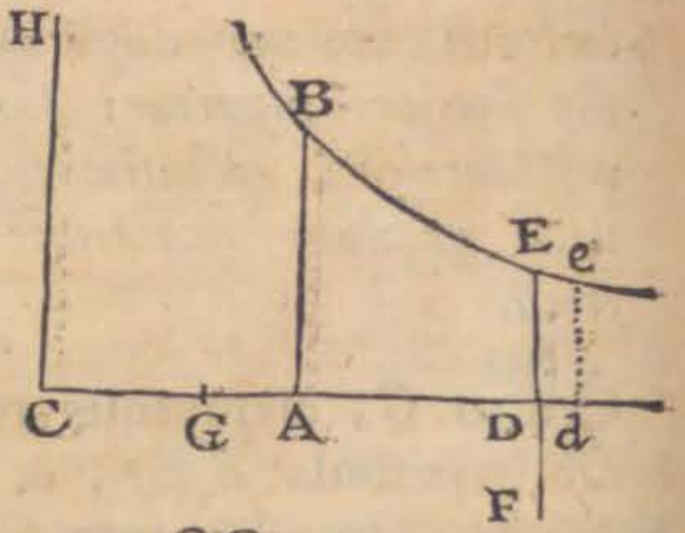
Sit enim areola $DEed$ datum temporis incrementum quam minimum, & (a) erit Dd reciprocè ut DE, ideoque directè ut CD. Ipſius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (b) per hujus tum temporis incrementum, erit ut quantitas data, & ideò Dd, eſt ut quantitas data diviſa per DE, id eſt, reciprocè ut DE; ſed (per theor. 4. de hyperb.) datum eſt rectangulum $CD \times DE$, proindè CD, eſt reciprocè ut DE; quare erit Dd directè ut CD. 137.

$-x^3k \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{24ff}$, & quantitates a & k, ex phænomenis poterunt determinari ut ſuprà (131.).

(a) * *Et erit Dd reciprocè ut DE.* Eſt enim areola evaneſcens $DEed$ æqualis rectangulo $DE \times Dd$, quod, ob da-

DE MOTU CORPORUM.

hujus lem. 11.) est $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$ seu $\frac{CG+GD}{GDq}$, id est, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore $ABED$ per additionem datarum particularum $EDde$ uniformiter crescente, decrescit $\frac{1}{GD}$ in eâdem ratione cum velocitate. Nam (c) decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipsius $\frac{1}{GD}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{GD}$, & posterior $\frac{CG}{GDq}$ est ut $\frac{1}{GDq}$ :: (d) proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas GD, ipsi $\frac{1}{GD}$ reciprocè proportionalis, quantitate datâ CG augeatur; summa CD, tempore $ABED$ uniformiter crescente, (e) crescet in progressione geometricâ. *Q. E. D.*



Corol. 1. Igitur si, datis punctis A, G, exponatur tempus per aream hyperbolicam $ABED$, exponi potest velocitas per ipsius GD (f) reciprocam $\frac{1}{GD}$. *Co-*

(c) *Nam decrementum velocitatis*, dato temporis momento, *est ut resistentia* (15).

(d) * $\frac{1}{GD}$. *Ob analogum decrementum est ut velocitas.* Si enim duarum quantitatum fluentium incrementa vel decrementa dato tempusculo producta analoga sint, eorum incrementorum vel decrementorum summæ seu fluentes ipsæ ab eodem initio sumptæ, sunt analogæ (per Cor. Lem. 4. lib. 1.).

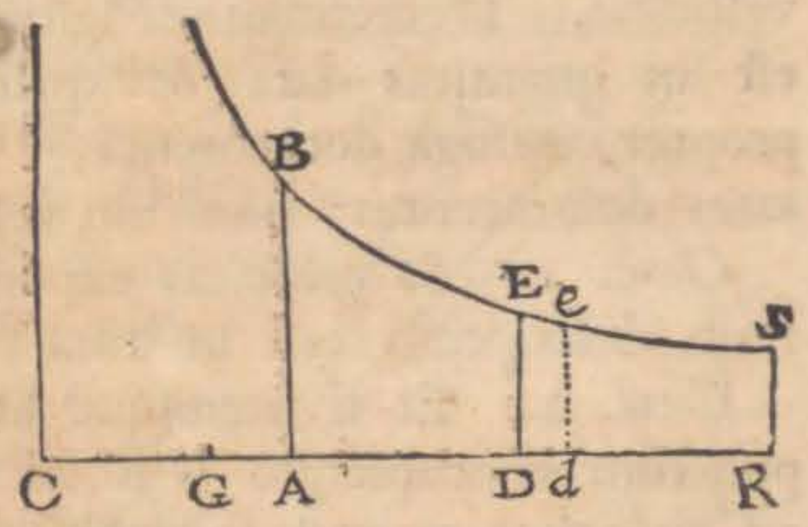
(e) * *Crescet in progressione geometricâ.* (380. lib. 1.).

(f) * *Exponi potest velocitas per ipsius* GD/

(g) *Corol.* 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca ſub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujuſvis $ABED$, invenietur punctum G. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri poteſt.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iiſdem poſitis, dico quod ſi ſpatia deſcripta ſumantur in progreſſione arithmeticâ, velocitates datâ quâdam quantitate auctæ erunt in progreſſione geometricâ.



In aſimptoto CD detur punctum R, & erecto perpendiculo RS, quod occurrat hyperbolæ in S, exponatur deſcriptum ſpatium per aream hyperbolicam $RSED$; & velocitas erit ut longitudo GD, quæ cum data CG componit longitudinem CD in progreſſione geometricâ decreſcentem, interea dum ſpatium $RSED$ augetur in arithmeticâ.

(h) Etenim ob datum ſpatii incrementum $EDde$, lineola Dd, quæ decrementum eſt ipſius GD, erit reciprocè ut ED, ideoque directè ut CD, hoc eſt, ut ſumma ejuſdem GD & lon-

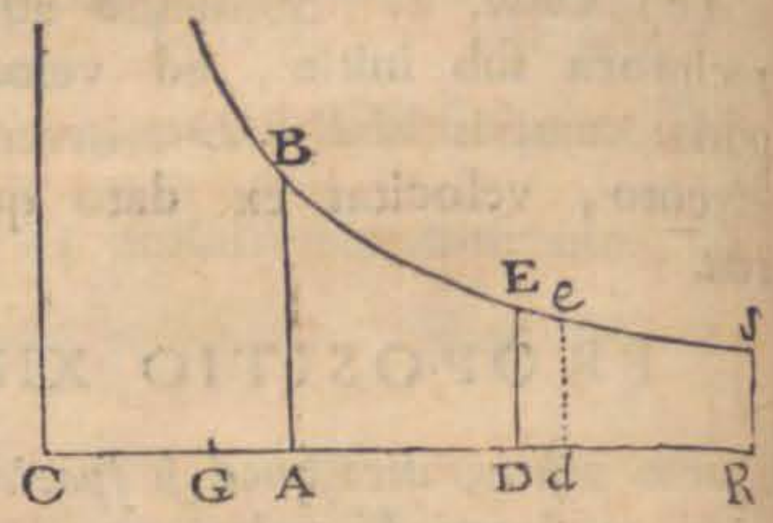
GD *reciprocam* $\frac{1}{GD}$. Undè patet velocitatem nonniſi tempore infinito extingui poſſe, * erit enim $\frac{1}{GD}=0$, ſive velocitas nulla ubi GD erit infinita, tunc autem area $BADE$ quæ tempus exprimit infinita etiam eſt, ex naturâ Hyperbolæ.

(g) * *Coroll.* 2. Punctum A ad arbitrium aſſumitur in aſymptoto CR & aſſumpto etiam quovis puncto D ut area ABED tempus datum exponat, ità determinandum eſt punctum G, ut ſit GA ad GD, ut velocitatis reciproca ſub initio ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujuſvis ABED, quod per coroll. 1. liquet. Invento autem puncto G, ex dato quovis alio tempore quod v. gr. ſit ad tempus primò datum ut area ABSR, ad aream ABED, dabitur velocitas quæ erit reciprocè ut GR, ſeu quæ erit ad velocitatem ſub initio in A, ut GA ad GR datam.

(h) * *Etenim ob datum ſpatii incrementum*, per hypotheſim quâ ſpatia ſupponuntur in arithmeticâ progreſſione creſcere.

DE MOTU CORPORUM.

longitudinis datæ *CG*. Sed velocitatis decrementum, tempore ſibi reciprocè proportionali, quo data ſpatii particula *D d e E* deſcribitur, eſt (i) ut reſiſtentia & tempus conjunctim, id eſt directè ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inversè ut velocitas; ideoque directè ut ſumma duarum quantitatum, quarum una datur, altera eſt ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quam lineæ *GD*, eſt ut quantitas data & quantitas decreſcens conjunctim, & propter analoga decrementa, (k) analogæ ſemper erunt quantitates decreſcentes; nimirum velocitas & linea *G D*. *Q. E. D.*



Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem *GD*, ſpatium deſcriptum erit ut area hyperbolica *DESR*.

Corol. 2. Et ſi utcunque aſſumatur punctum *R*, invenietur punctum *G* capiendo *G R* ad *G D*, ut eſt velocitas ſub initio ad velocitatem poſt ſpatium quodvis *RSED* deſcriptum. (l) Invento autem puncto *G*, datur ſpatium ex datâ velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cum (per prop. XI.) detur velocitas ex dato tempore, & per hanc propoſitionem detur ſpatium ex datâ velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore: & contra.

PRO-

(i) * *Eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim.* Velocitatis decrementum eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim (15), tempus verò eſt ut incrementum ſpatii directe & velocitas inverse, adeóque dato ſpatii incremento ut velocitas inverse. Quarè dato ſpatii incremento, velocitatis decrementum eſt ut reſiſtentia directè & velocitas inverse, id eſt, directè ut ſumma duarum quantitatum &c.

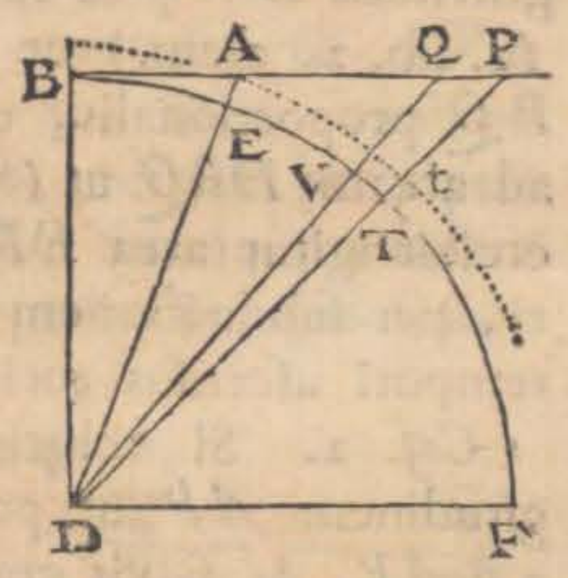
(k) * *Analogæ ſemper erunt* &c. (Per cor. lem. 4. lib. 1.).

(l) * *Invento autem puncto G, &c.* Si enim velocitas data, ſit ad velocitatem ſub initio ut G A ad G R, dabitur punctum A, & hinc dabitur area A B S R, ſeu ſpatium deſcriptum. Et contrà dato ſpatio, ſive datâ areâ A B S R, dabitur punctum A, & indè velocitas G A. Ex his autem patet ſpatium finitum infinito tempore deſcribi; ubi enim punctum D coincidit cum puncto G, velocitas omnis extinguitur, & ſpatium deſcriptum exponitur per aream finitam quam ordinata

PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

Posito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum rectâ ascendit vel descendit; & quod eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ: dico quod, si circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum à dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum sectores, rectis à centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contra.

Cas. 1. Ponamus primo quod corpus ascendit, centroque *D* & semidiametro quovis *DB* describatur circuli quadrans *BETF*, & per semidiametri *DB* terminum *B* agatur infinita *BAP*, semidiametro *DF* parallela. In eâ detur punctum *A*, & capiatur segmentum *AP* velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars altera sit ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum; sit resistentia tota ut *AP quad.* + 2 *BAP*.



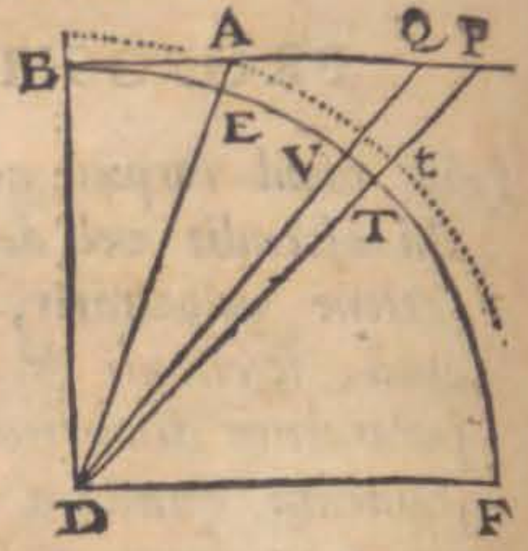
Juntur velocitas & contrà. Cum autem sit (13) $dt = \frac{ds}{v} = -\frac{b\,dv}{av+vv} = \frac{b}{a} \times \frac{dv}{a+v} - \frac{b}{a} \times \frac{dv}{v}$, erit $t = Q + \frac{b}{a} \times L.\overline{a+v} - \frac{b}{a} \times L.v = Q + \frac{b}{a} \times L.\frac{a+v}{v}$, & posito $t = 0$ & $v = c$, fit $Q = -\frac{b}{a} \times L.\frac{a+c}{c}$, adeòque $t = \frac{b}{a} \times L.\frac{a+v}{v} - \frac{b}{a} \times L.\frac{a+c}{c}$, & hinc $t = \frac{b}{a} L.\frac{ac+cv}{av+cv}$, & $h^{\frac{at}{b}} = \frac{ac+cv}{av+cv}$; unde eruitur $v = \frac{ac}{a h^{\frac{at}{b}} + c h^{\frac{at}{b}} - c}$. Dato igitur tempore dabitur velocitas & spatium ac contrà. 138.

R S abscindit cum alterâ ordinatâ per G ductâ; velocitas verò nonnisi infinito tempore potest evanescere (per cor. 1. prop. XI.).

138. Schol. Eadem per analysim facilè inveniuntur. Dicantur resistentia *r* celeritas initialis *c*, spatium descriptum *s*, tempus *t*, velocitas residua *v*, ponaturque $r = \frac{av+vv}{b}$, erit (16, 17) $r\,ds = -v\,dv$, seu $av\,ds + vv\,ds = -b\,v\,dv$, & hinc $ds = -\frac{b\,dv}{a+v}$, atquè adeò $s = Q - b \times L.\overline{a+v}$; quia verò ubi $s = 0$, fit $v = c$, invenitur constans $Q = b \times L.\overline{a+c}$, & ideò $s = b \times L.\frac{a+c}{a+v}$. Sit $L.h = 1$, & erit $\frac{s \times L.h}{b} = L.\frac{a+c}{a+v}$, ac $h^{\frac{s}{b}} = \frac{a+c}{a+v}$; undè eruitur $v = \frac{a+c}{h^{\frac{s}{b}}} - a$; Quarè dato spatio da-

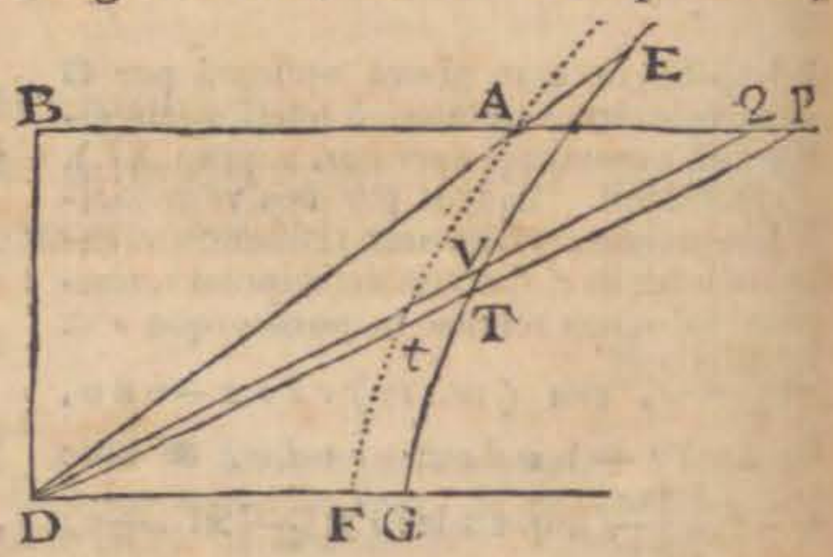
DE MOTU CORPORUM.

Jungantur DA, DP circulum ſecantes in E ac T, & (m) exponatur gravitas per DA *quad.* ita ut ſit gravitas ad reſiſtentiam in P ut DAq ad $APq+2BAP$: & tempus aſcenſus totius erit ut circuli ſector EDT.



Agatur enim DVQ, abſcindens & velocitatis AP momentum PQ, & ſectoris DET momentum DTV dato temporis momento reſpondens; & velocitatis decrementum illud PQ erit ut (n) ſumma virium gravitatis DAq & reſiſtentiæ $APq+2BAP$, id eſt (per prop. 12. lib. 2. elem.) ut DP *quad.* Proinde area DPQ, (o) ipſi PQ proportionalis, eſt ut DP *quad.* & area DTV, quæ eſt ad aream DPQ ut (p) DTq ad DPq, eſt ut datum DTq. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per ſubductionem datarum particularum DTV, & propterea tempori aſcenſus totius proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Si velocitas in aſcenſu corporis exponatur per longitudinem AP ut prius, & reſiſtentia ponatur eſſe ut $APq+2BAP$, & ſi vis gravitatis minor ſit quam quæ per DAq exponi poſſit; capiatur BD ejus longitudinis, ut ſit $ABq-BDq$ gravitati proportionale, ſitque DF ipſi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F deſcribatur hyperbola $FTVE$, cujus ſemidiametri conjugatæ ſint DB & DF, quæque ſecet DA in E, & DP, DQ in T & V; & erit tempus aſcenſus totius ut hyperbolæ ſector TDE.



Nam

(m) * *Et exponatur gravitas per DAq.* Corpore aſcendente ratio gravitatis uniformis ad reſiſtentiam vel major eſt ratione quadrati dati AB^2 ad quantitatem AP^2+2BAP, vel minor vel æqualis. In 1°. caſu gravitas exponi ſemper poterit per quadratum ſecantis AD quæ quantumvis magna aſſumi poteſt; In 2°. caſu per differentiam AB^2-BD^2 quæ quantumvis parva eſſe poteſt; & in 3°. caſu per quadratum AB^2.

(n) * *Ut ſumma virium* (18).

(o) * *Ipſi PQ proportionalis.* Nam area DPQ eſt $\frac{1}{2}BD\times PQ$, & ideò ob datam $\frac{1}{2}BD$ eſt ut PQ.

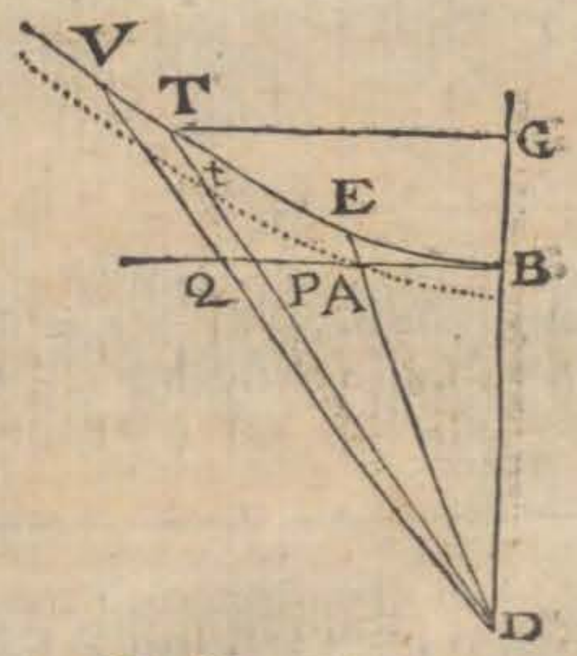
(p) * *Ut DTq ad DPq.* Triangu-

Nam velocitatis decrementum PQ, in datâ temporis particulâ factum, eſt ut ſumma reſiſtentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, (q) id eſt, ut $BPq - BDq$. Eſt autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq; ideoque, ſi ad DF demittatur perpendiculum GT, ut GTq ſeu $GDq - DFq$ ad BDq, utque GDq ad BPq, & diviſim ut DFq ad $BPq - BDq$. Quare cum area DPq ſit ut PQ, id eſt, ut $BPq - BDq$; erit area DTV ut datum DFQ. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis eſt. *Q. E. D.*

LIBER SECUNDUS. SECT. III. PROP. XIII. THEOR. X.

Caſ. 3. Sit AP velocitas in deſcenſu corporis, & $APq + 2BAP$ reſiſtentia, & $BDq - ABq$ vis gravitatis, exiſtente angulo DBA recto. Et ſi centro D, vertice principali B, deſcribatur hyperbola rectangula $BETV$ ſecans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit hyperbolæ hujus ſector DET ut tempus totum deſcenſus.

Nam velocitatis incrementum PQ, eique proportionalis area DPQ, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt, ut $BDq - ABq - 2BAP - APq$ ſeu $BDq - BPq$. Et area DTV eſt ad aream DPQ ut DTq ad DPq, ideoque ut (r) GTq ſeu $GDq - BDq$ ad BPq, utque GDq ad BDq, & diviſim ut BDq ad $BDq - BPq$. Quare cum area DPQ ſit ut $BDq - BPq$, erit area DTV ut datum BDq.

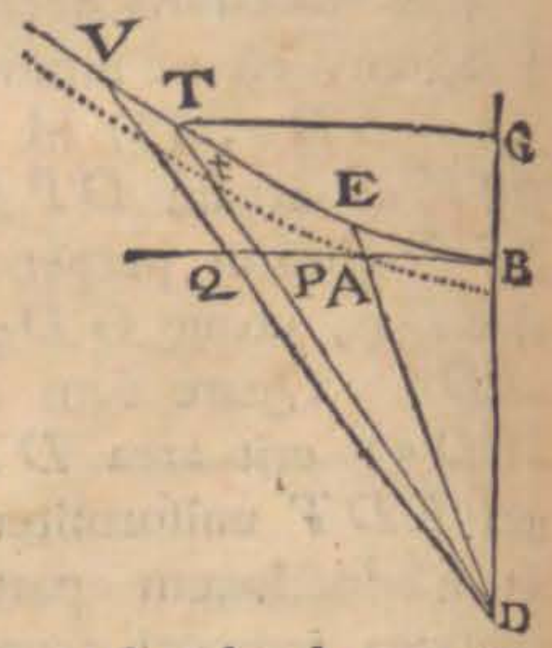


Creſcit igitur area EDT lum evaneſcens DPq, non differt a ſectore circuli centro D & radio DQ deſcripti, inter lineas DQ & DP; hic verò ſector eſt ad ſimilem ſectorem DTV, ut DP^2 ad DT^2, quarè area DTV, eſt ad aream DPQ, ut DT^2 ad DP^2, & permutando, area DTV eſt ad DT^2, ut area DPQ ad DP^2. Cum igitur (eadem.) area DPQ ſit ut DP^2, erit etiam area DTV ut DT^2, ſeu ut datum quadratum DB^2; ergo, tempore dato, data eſt area DTV, & ideò temporibus æqualibus *æqualiter decreſcit area EDT, ad modum temporis futuri &c.* 138

(q) * *Id eſt ut BPq − BDq.* Eſt enim $APq + 2BAP + ABq = BPq$.

(r) *Ut GTq.* Nam ob ſimilitudinem triangulorum DGT, PBD eſt DTq ad DPq ut $GTq = GDq - DFq$ (ex conic. vid. not. in caſ. prop. 9.) ad BDq, *utque GDq ad BDq, & diviſim &c.*

DE MOTU CORPORUM.



EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum *DTV*, & propterea tempori deſcenſus proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Corol. Si centro *D* ſemidiametro *DA* per verticem *A* ducatur arcus *At* ſimilis arcui *ET*, & ſimiliter ſubtendens angulum *ADT*: velocitas *AP* erit ad velocitatem, quam corpus tempore *EDT*, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli *DAP* ad aream ſectoris *DAt*; ideoque ex dato tempore datur. (f) Nam velocitas, in medio non reſiſtente, tempori, atque ideo ſectori huic proportionalis eſt; in medio reſiſtente eſt ut triangulum; & in medio utroque, ubi quam minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis, pro more ſectoris & trianguli.

Scho-

(f) * *Nam velocitas in medio non reſiſtente* (25. lib. 1.) *tempori* atque adeò ſectori EDT, & proindè *ſectori DAt, proportionalis eſt;* in medio reſiſtente eſt ut AP, ſeu ob datam BD ut $\frac{1}{2}$ BD×AP; ſivè ut triangulum ADP; & in medio utroque ubi quam minima eſt, nempe initio deſcenſûs è quiete vel in fine aſcenſûs accedit ad rationem æqualitatis ob reſiſtentiam evaneſcentem, evaneſcente velocitate; pro more, ſectoris DAt & trianguli DAP coeuntibus punctis t & P cum puncto A.

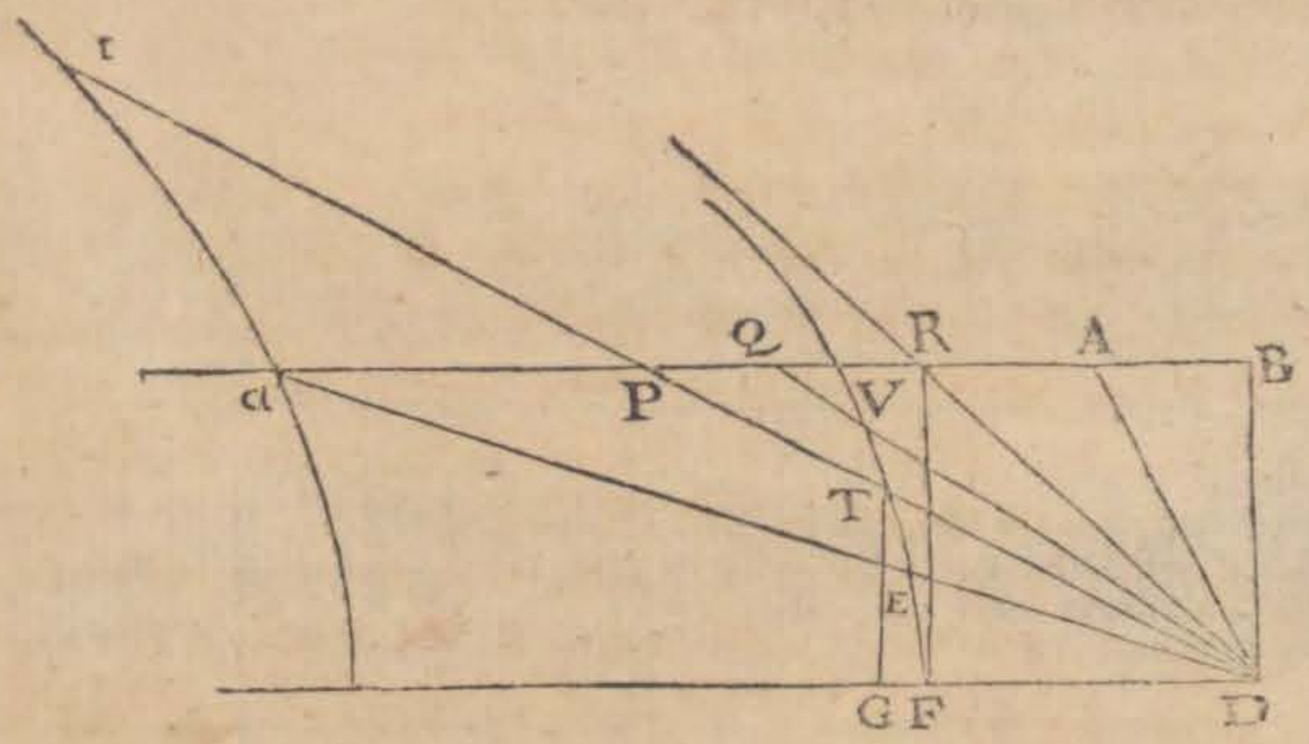
139. Quoniam ubi in corporis deſcenſu BP fit = BD, angulus BDP ſemirectus evadit, & recta DP aſymptotus hyperbolæ æquilateræ BET; manifeſtum eſt quod corpus è quiete cadendo nonniſi finitam velocitatem infinito tempore poſſit acquirere. Erit enim velocitas tempore infinito acquiſita BD−AB. Si verò corpus verticaliter deorſum datâ cum velocitate projiciatur, vel illa velocitas maximæ ſeu terminali BD−AB æqualis eſt, & in hoc caſu corpus motu uniformi deſcendit ob reſiſtentiam gravitati æqualem; vel terminali minor eſt, & corporis cadentis motus perpetuò acceleratur, donec infinito tempore velocitatem maximam acquirat; vel tandem terminali major eſt, tumque corporis motus perpetuò retardatur, donec infinito tempore elapſo ad velocitatem terminalem reducatur; hoc autem caſu ſic abſolvitur conſtructio.

Sit Aa velocitas datæ projectionis terminali major, AP velocitas perpetuò decreſcens, $AP^2 + 2BAP$ reſiſtentia, & $BD^2 - AB^2$ vis gravitatis, exiſtente angulo DBA recto; & ſi capiatur BR=BD, compleaturque quadratum DBRF, ac centro D & vertice principali F deſcribatur hyperbola rectangula FETV, ſecans rectas Da, DP & DQ, in E, T, V; tempus deſcenſûs ab initio uſquequò reſidua corpori velocitas ſit Ap, erit ut ſector hyperbolicus DET; nam velocitatis decrementum PQ, in datâ temporis particulâ factum eique proportionalis area DPQ

LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XIII. THEOR. X.

Scholium.

Demonſtrari (†) etiam poſſet caſus in aſcenſu corporis, ubi vis gravitatis minor eſt quam quæ exponi poſſit per DAq ſeu $ABq + BDq$, & major quam quæ exponi poſſit per $ABq - BDq$, & exponi debet per ABq. (†) Sed propero ad alia.



DPQ eſt ut exceſſus reſiſtentiæ ſuprà gravitatem (18), id eſt, ut $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, ſeu $BP^2 - BD^2$; & area DTV eſt ad aream DPQ, ut DT^2 ad DP^2, ideoque ut GT^2, (ſeu $GD^2 - BD^2$) ad BD^2. Quare cum area DPQ, ſit ut $BP^2 - BD^2$, erit area DTV ut datum BD^2. Creſcit igitur area EDT, uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori deſcenſûs proportionalis eſt. Coincidente verò puncto P, cum R, & ideò rectâ DP, cum aſymptoto DR, velocitas AP terminali AR ſeu BD — AD æqualis evadit, & ſector DET infinitus, proindeque tempus etiam infinitum ſit. Q. E. D.

140. Hinc etiam ſi centro D, ſemidiametro Da, per verticem a, ducatur arcus Hyperbolicus at ſimilis arcui ET, & ſimiliter ſubtendens angulum aDT; velocitas aP, in medio reſiſtente tempore EDT, extincta, erit ad velocitatem quam corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente è quiete deſcendendo acquirere poſſet ut area trianguli DaP, ad aream ſectoris Dat, ideóque ex dato tempore datur, & hinc datur quoque velocitas reſidua AP. Nam velocitas in medio non reſiſtente acquiſita tempori atquè ideò ſectori DET, & proinde ſectori ſimili Dat proportionalis eſt; velocitas in medio reſiſtente extincta eſt ut triangulum DaP, & in medio utroque ubi quam minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis pro more ſectoris Dat, & trianguli DaP. 140.

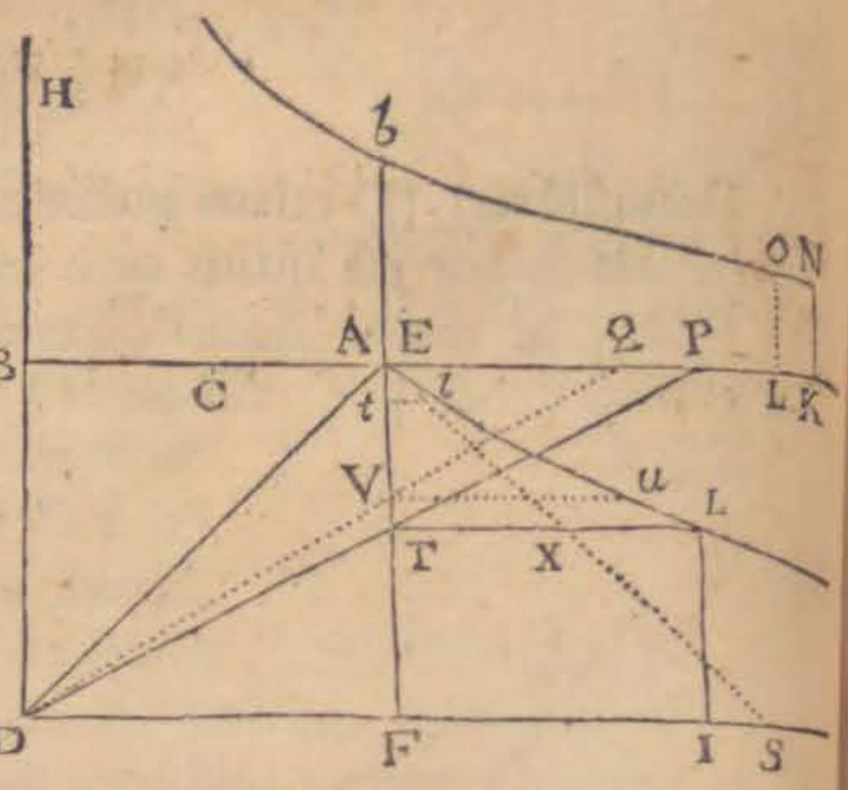
(†) 141. *Demonſtrari poſſet caſus in aſcen-*

DE MOTU CORPORUM.

ascensu corporis, ubi vis gravitatis..... exponi debet per ABq. * Velocitas in ascensu exponatur per AP ut prius, sit resistentia ut APq + 2BAP, exponatur vis gravitatis per ABq capiatur BD & DF = BA erectoque perpendiculo FTA erit tempus ascensus totius ut sector sive Triangulum DTA, agatur enim DVQ abscindens & velocitatis momentum PQ & sectoris DTA momentum DTV, velocitatis decrementum PQ est ut summa resistentiæ & gravitatis sive ut APq + 2BAP + ABq id est (per 4. 2^i. Elem.) ut BPq; est autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq, sive ob Triangula similia DTF, DPB, ut DFq ad BPq, est ergo area DTV ut datum DFq. *Decrescit igitur area DTA ad modum temporis futuri per subductionem particularum DTV, & propterea tempori ascensus totius proportionalis est.* *

Si itaque resistentia ponatur esse ut $AP^2 + 2BAP$, vis autem gravitatis ut AB^2; tempus ascensûs totius erit ut AT & etiam ut $\frac{AP}{BP}$. Nam triangulum DTA, ob altitudinem constantem DF, est ut basis ATBP & propter Triangula similia DTF, ATP est DF : TF = AP : AT; & jungendo terminos secundæ rationis cum terminis primæ est DF + AP (sive BP) : TF + AT (sive BD) = AP : AT, est ergo $AT = \frac{AP \times BD}{BP}$ sive ob datum BD, AT est ut $\frac{AP}{BP}$.

142. In isto casu velocitas AP est ad velocitatem quam corpus tempore DAT sive $\frac{AP}{BP}$, in spatio non resistente ascendendo amittere vel amittere descendendo acquirere posset, ut BP ad AB. Nam velocitas in medio non resistente tempori atque ideò areæ DAT sive rectæ AT proportionalis est; in medio resistente est ut AP, & in medio utroque ubi quam minima est, accedit ad rationem æqualitatis; sed cum capiatur BD = AB, ratio linearum AP, AT, in puncto A ubi quam minima est, accedit ad rationem linearum AF, FD quæ est æqualitatis. Quare velocitas AP, in medio resistente erit ad velocitatem in medio non resistente eodem tempore PN amissam vel acquisitam ut AP ad AT; hoc est ob Triangula similia APT, BPD ut BP ad BD



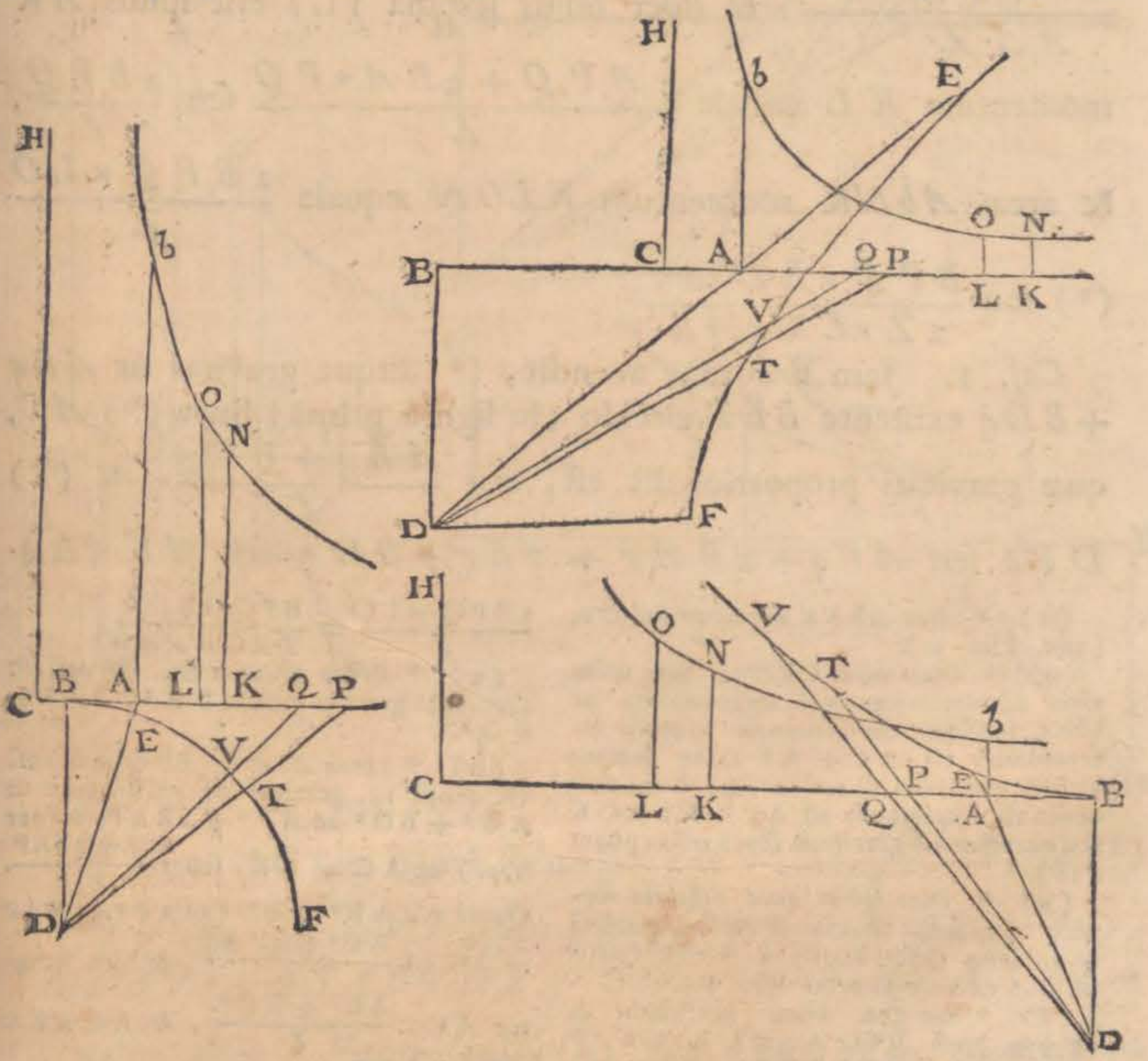
vel AB. Q. E. D.

143. Ex formulis quas (19) dedimus facile intelligitur quomodo ad hoc Theorema X. deveniatur. Nam si dicatur gravitas g, velocitas v, resistentia $2av + vv$, & tempus t; corpore ascendente erit (16. 17) $gdt + 2avdt + vvdt = -dv$, & ideò $dt = \frac{-dv}{vv+2av+g}$. Ponatur $v + a = x$, & ideò $dv = dx$, & $vv + 2av = xx - aa$, fiet $dt = \frac{-dx}{xx+g-aa}$. Undè si fuerit $g = aa$, erit $dt = \frac{-dx}{xx}$; si $g - aa = bb$, erit $dt = \frac{-dx}{xx+bb}$. Si $g - aa = -bb$ erit $dt = \frac{-dx}{xx-bb}$. Fluens quantitatis $-\frac{dx}{xx}$, est $\frac{1}{x}$, fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx+bb}$, pendet a quadraturâ sectoris circularis (107), fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx-bb}$, à quadraturâ sectoris hyperbolici; atque hi sunt tres casus pro corporis ascensu; pro descensu verò est (19) $gdt - 2avdt - vvdt = dv$, & ideò $dt = \frac{dv}{g-2av-vv} = \frac{dx}{g+aa-xx} = \frac{dx}{bb-xx}$, ponendo $v + a = x$ & $g + aa = bb$, fluens autem quantitatis $\frac{dx}{bb-xx}$, pendet a quadraturâ hyperbolæ.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione arithmeticâ; si vires ex resistentiâ & gravitate compositæ sumantur in progressione geometricâ.

Capiatur AC in (fig. tribus ultimis) gravitati, & AK resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes pun-



cti A si corpus descendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab, quæ sit ad DB ut DBq ad $4BAC$: & descriptâ ad asymp-

DE MOTU CORPORUM.

totos rectangulas CK, CH hyperbolâ bN, erectaque KN ad CK perpendiculari, (t) area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressione arithmeticâ, (u) dum vires CK in progressione geometricâ sumuntur. (x) Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maximâ sit ut excessus areæ $AbNK$ supra aream DET.

Nam cum AK sit ut resistentia, id est, ut $APq+2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq+2BAP}{Z}$; & (per hujus lemma 11.) erit ipsius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ+2BA\times PQ}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ\times LO}{Z}$ (z) seu $\frac{BPQ\times BD\,cub.}{2Z\times CK\times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, (a) sitque gravitas ut $ABq+BDq$ existente BET circulo (in figurâ primâ) linea (b) AC, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq+BDq}{Z}$, & (c) DPq seu $APq+2BAP+ABq+BDq$ erit $AK\times Z+\frac{2BPQ\times LO}{Z}=\frac{BPQ\times BD^3}{2Z\times CK\times AB}$.

(t) * *Area AbNK augebitur vel &c.* (380. Lib. 1.).

(u) * *Dum vires CK &c.* Sunt enim vires acceleratrices vel retardatrices ut CK, siquidem in corporis ascensu vis retardatrix est AC+AK, seu summa virium gravitatis & resistentiæ, & in descensu vis acceleratrix est AC−AK=CK seu excessus vis gravitatis supra resistentiam (18).

(x) * *Dico igitur quod distantia corporis ascendentis ab ejus altitudine maximâ* & distantia descendentis à puncto quetis ex quo decidit *sit ut excessus* &c.

(z) * *Seu &c.* Nam (per theor. 4. de hyp.) est $LO:Ab=CA:CK$, & (per constr.) $Ab:DB=DB^2:4BA\times AC$, ideoque (ex æquo) $LO:DB=DB^2:4BA\times CK$, & hinc $LO=\frac{DB^3}{4KC\times BA}$. Quarè momentum $KLON=LO\times KL=\frac{2BPQ\times LO}{Z}=\frac{BPQ\times BD^3}{2Z\times CK\times AB}$.

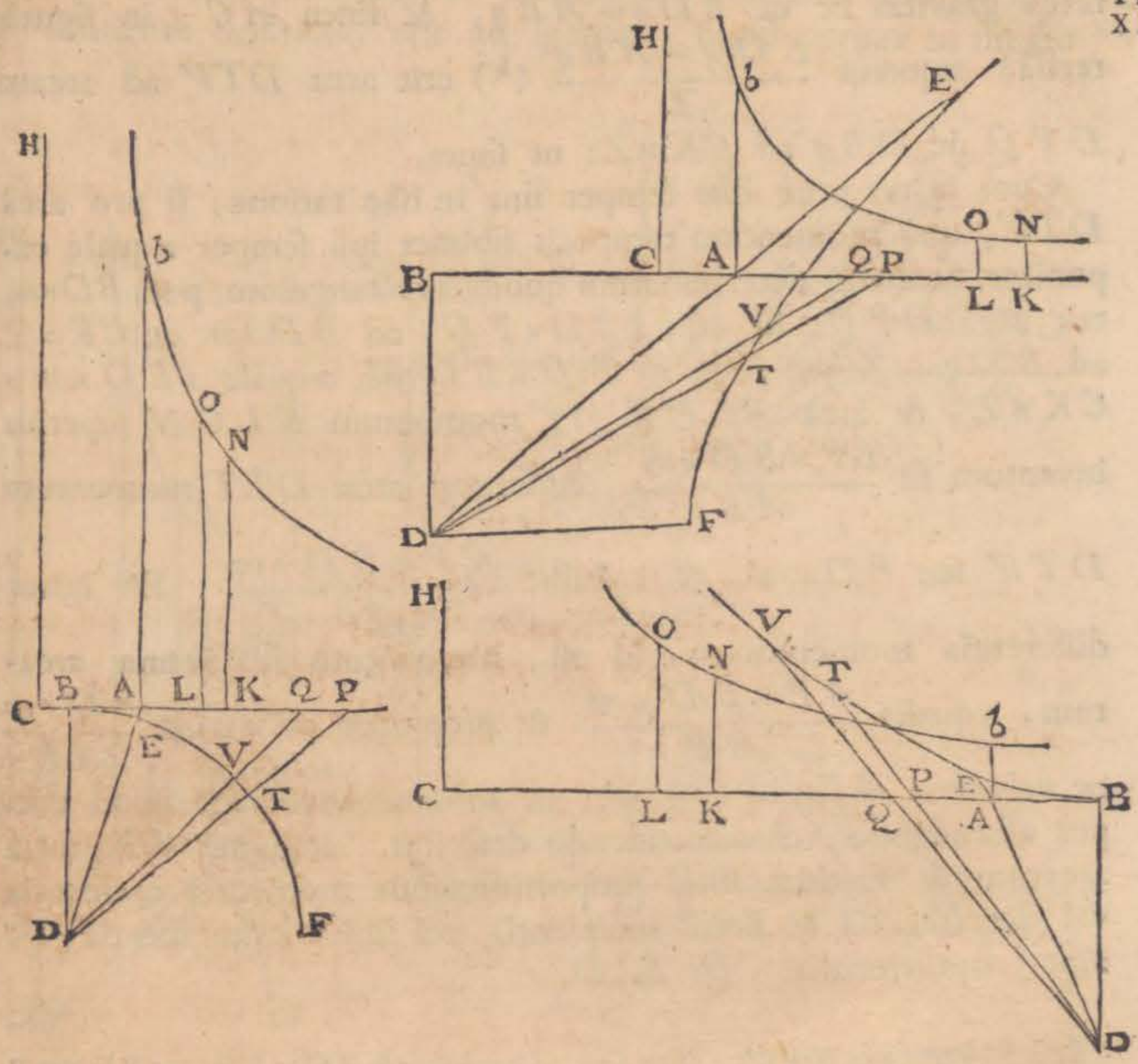
(a) * *Sitque gravitas &c.* In cas. 1°. prop. 13. gravitas erat ut $DA^2=AB^2+BD^2$.

(b) * *Linea AC &c.* Est enim in cas. 1°. prop. 13. gravitas ad resistentiam ut AB^2+BD^2 ad AP^2+2BAP, & (per hyp.) ut AC ad AK, seu $\frac{AP^2+2BAP}{Z}$. Quarè erit AB^2+BD^2 ad AP^2+2BAP ut AC ad $\frac{AP^2+2BAP}{Z}$, & hinc habetur $AC=\frac{AB^2+BD^2}{Z}$, & $AC\times Z=AB^2+BD^2$.

(c) * *Et DPq &c.* Ob angulum DBP rectum, & quia $AK\times Z=AP^2+2BAP$, atque $AC\times Z=AB^2+BD^2$, ut ex superioribus patet.

$AC \times Z$ seu $CK \times Z$; (d) ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad $CK \times Z$.

Cas. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas sit ut $ABq - BDq$,



(e) linea AC (in figurâ secundâ) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & (f) DTq erit ad DPq ut DFq seu DBq ad $BPq - BDq$ seu $APq + 2BAP + ABq - BDq$, id est, ad $AK \times Z +$

(d) * *Ideóque area DTV &c.* Nam (ex dem.) in 1°. casu prop. 13.) area DTV est ad aream DPQ, ut DT^2 vel DB^2 ad DP^2, & est $DP^2 = CK \times P$.

(e) * *Linea AC &c.* Patet ut in primo casu hujus. 143.

(f) *Et DTq erit ad DPq.* Patet (ex dem. in cas. 2°. prop. 13.)

DE MOTU CORPORUM.

$AC \times Z$ seu $CK \times Z$. (g) Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Cas. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea gravitas sit ut $BDq - ABq$, & linea AC (in figurâ tertiâ) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ (h) erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut supra.

Cum igitur areæ illæ semper sint in hâc ratione; si pro areâ DTV, quâ momentum temporis sibimet ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, putà $BD \times m$, erit area DPQ, id est, $\frac{1}{2}BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad BDq. Atque inde fit $PQ \times BD\,cub.$ æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ (i) momentum $KLON$ superius inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV seu $BD \times m$, & restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$ ut velocitas AP, id (k) est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum & spatium illud proportionalibus momentis crescentia vel decrescentia & simul incipientia vel simul evanescentia, (l) sunt proportionalia. *Q. E. D.*

Co-

(g) * *Ideoque area DTV &c.* Nam (ex dem. in 2°. cas. prop. 13.) area DTV, est ad aream DPQ, ut BD^2 ad $BD^2 - BP^2 = BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2 = AC \times Z - AK \times Z = CK \times Z$.

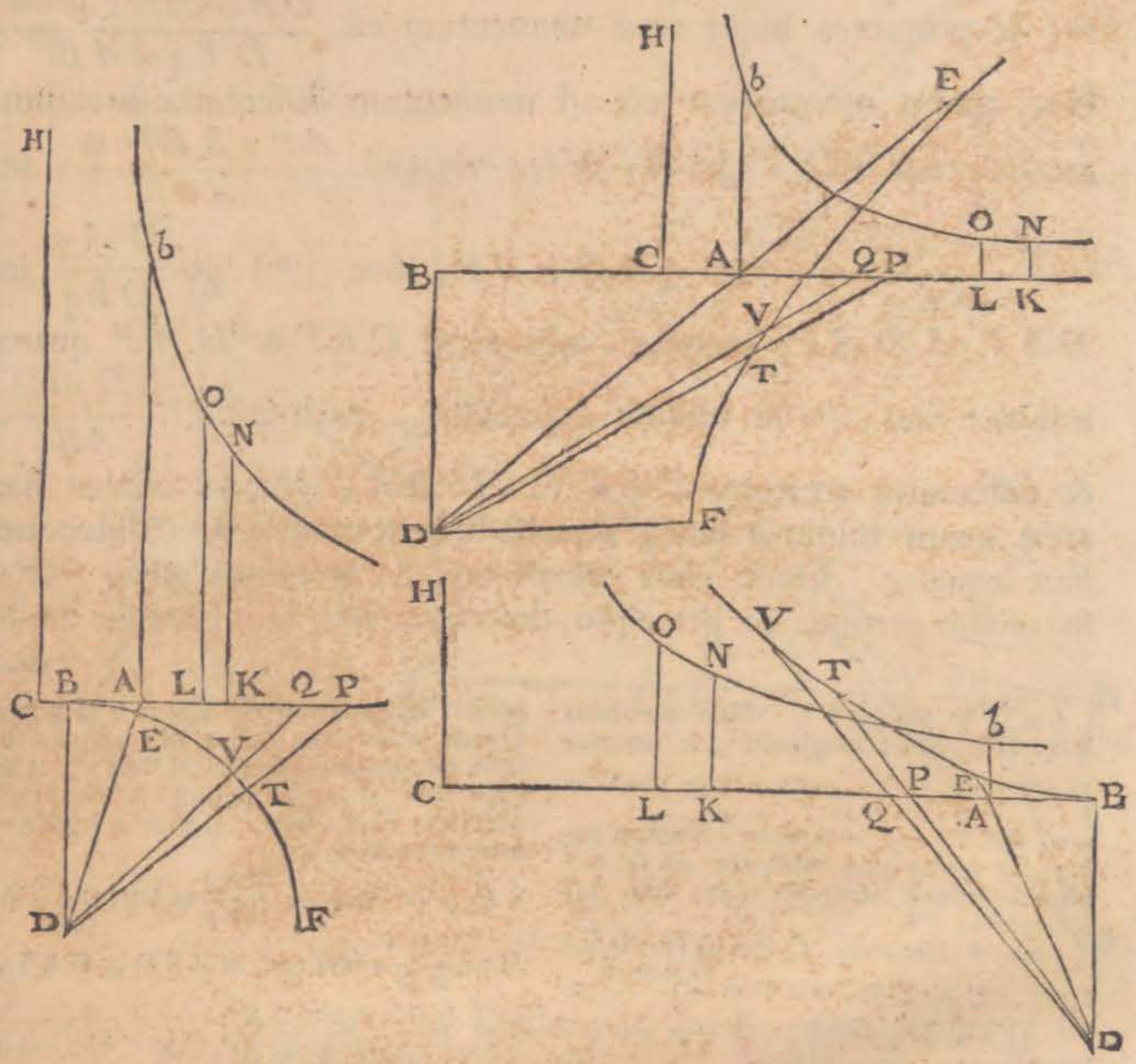
(h) * *Erit area DTV.* (Ex demonstratis in 3°. cas. prop. 13.) area DTV est ad aream DPQ, ut BD^2 ad $BD^2 - BP^2 = BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2 = AC \times Z - AK \times Z = CK \times Z$.

(i) * *Momentum KLON superius inventum* est $\frac{BPQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB} - \frac{BP \times PQ \times BD^2}{2Z \times CK \times AB}$. Quarè cum sit $PQ \times BD^3 = 2BD \times m \times CK \times Z$, erit $KLON = \frac{BP \times BD \times m}{AB}$.

(k) * *Id est ut momentum spatii.* Nam dato temporis momento, momentum spatii est ut velocitas (11.).

(l) * *Sunt proportionalia.* (Per coroll. Lem. 4. Lib. 1.) Dum autem evanescit AP, seu velocitas, evanescit quoque resistentia AK, cum areâ AbNK, & tempore DTE.

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream *DET* ad lineam *BD*, dicatur *M*; & longitudo alia *V* ſumatur in eâ ratione ad longitudinem *M*, quam habet linea *DA* ad lineam *DE*: ſpatium, quod corpus aſcenſu vel deſcenſu toto in medio reſiſtente deſcribit, erit ad ſpatium, quod corpus in medio



non reſiſtente è quiete cadendo eodem tempore deſcribere poteſt, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{AB}$: ideoque ex dato tempore datur. Nam ſpatium in medio non reſiſten-

DE MOTU CORPORUM.

ſtente eſt in duplicatâ ratione temporis, ſive (m) ut V^2; & ob datas BD & AB ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$. (n) Hæc area æqualis eſt areæ $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$, & (o) ipſius M momentum eſt m; & propterea hujus areæ momentum eſt $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$. Hoc autem momentum eſt ad momentum differentiæ arearum prædictarum DET & $AbNK$, viz. ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2}BD \times AP$, ſive (p) ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET ad DAP; ideoque, ubi areæ DET & DAP quam minimæ ſunt, (q) in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & differentia arearum DET & $AbNK$, quando omnes hæ areæ quam minimæ ſunt, æqualia habent momenta; (r) ideoque ſunt æquales. Unde cum velocitates, & propterea etiam ſpatia in medio utroque in principio deſcenſus vel fine aſcenſus ſimul de-

(m) * *Sivè ut* V^2. Nam ob datas BD, DA, DE, longitudo quæ æquatur $DET \times \frac{DA}{BD \times DE}$ (per hyp.) eſt ut area DET, ſeu ut tempus. Spatium autem in medio non reſiſtente eſt in duplicatâ ratione temporis (27. Lib. 1.) ideoque ut V^2.

(n) * *Hæc area.* Quoniam (per hyp.) $V : M = DA : DE$, erit $V = \frac{DA \times M}{DE}$ & $V^2 = \frac{DA^2 \times M^2}{DE^2}$, adeoque $\frac{BD \times V^2}{AB} = \frac{DA^2 \times BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$.

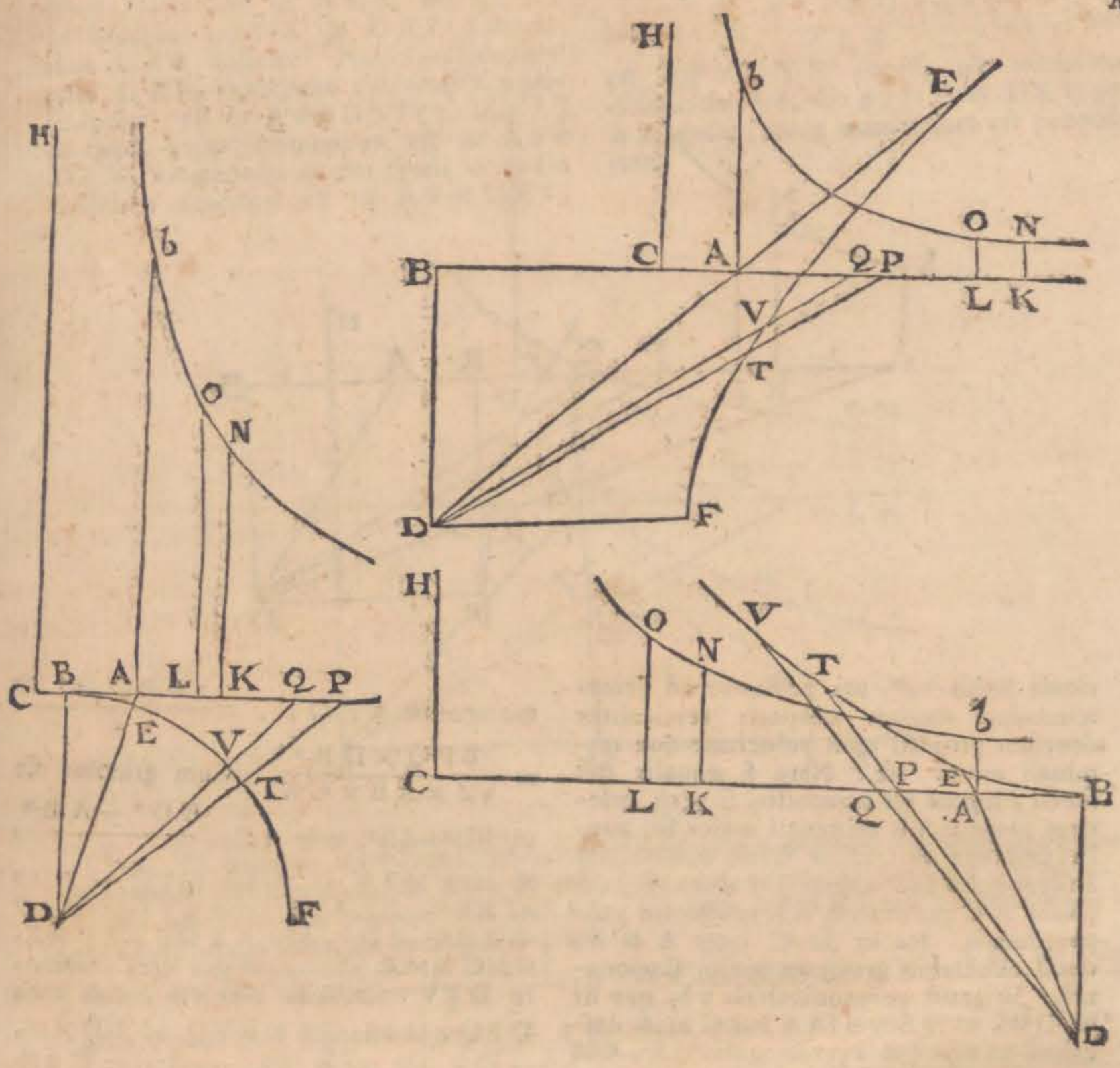
(o) * *Et ipſius M momentum eſt m.* Cum enim ſit (per hyp.) $M = \frac{DET}{BD}$, momentum ipſius M, erit $\frac{DTV}{BD}$, ſed ſuperiùs ſupponebatur $DTV = BD \times m$; Quarè momentum ipſius M, eſt m; Et ideò momentum quadrati M^2 eſt $2M \times m$ (per caſ. 3. Lem. hujus) & *propterea* ob datas DA, BD, DE & AB, *hujus areæ momentum* &c.

(p) * *Sivè ut* $\frac{DAq}{DEq}$ *in* DET *&c.* Ob $M = \frac{DET}{BD}$, ideoque $M \times BD = DET$, & $\frac{1}{2}BD \times AP = DAP$.

(q) * *In ratione æqualitatis.* Ubi enim areæ DET & DAP quam minimæ ſunt, ſit $DET : DAP = DE^2 : DA^2$, ideóque $\frac{DA^2}{DE^2} \times DET = DAP$.

(r) *Ideóque ſunt æquales.* Quandò ſunt quam minimæ.

descripta accedant (f) ad æqualitatem; ideoque tunc sint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & $AbNK$ dif- LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XIV. THEOR. XI.

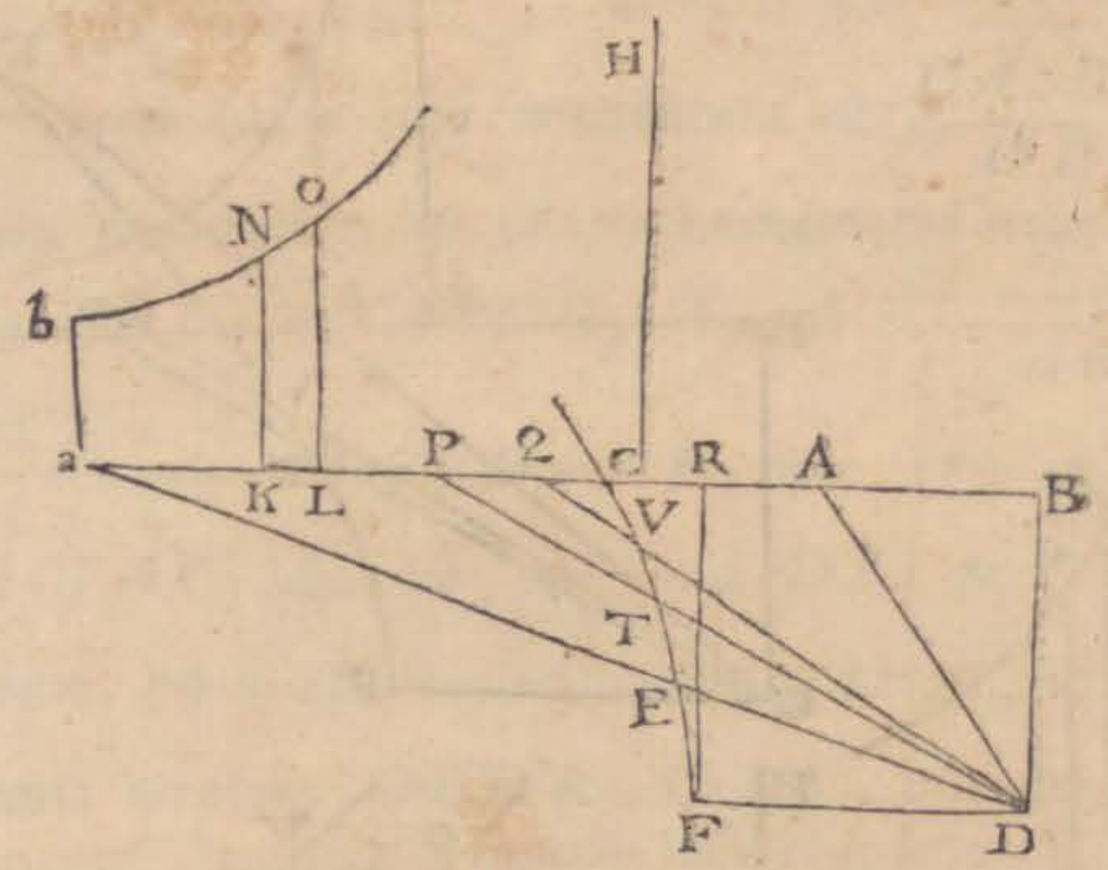


ferentia; & præterea cum spatium in medio non resistente sit perpetuò ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & spatium in medio resistente sit perpetuo ut arearum DET & $AbNK$ differentia: necesse est, ut

(f) *Accedant ad æqualitatem.* Ob resistentiam cum velocitate nascentem vel evanescentem, manente gravitate. 144. Constructione casûs 3i. propositio-

DE MOTU CORPORUM.

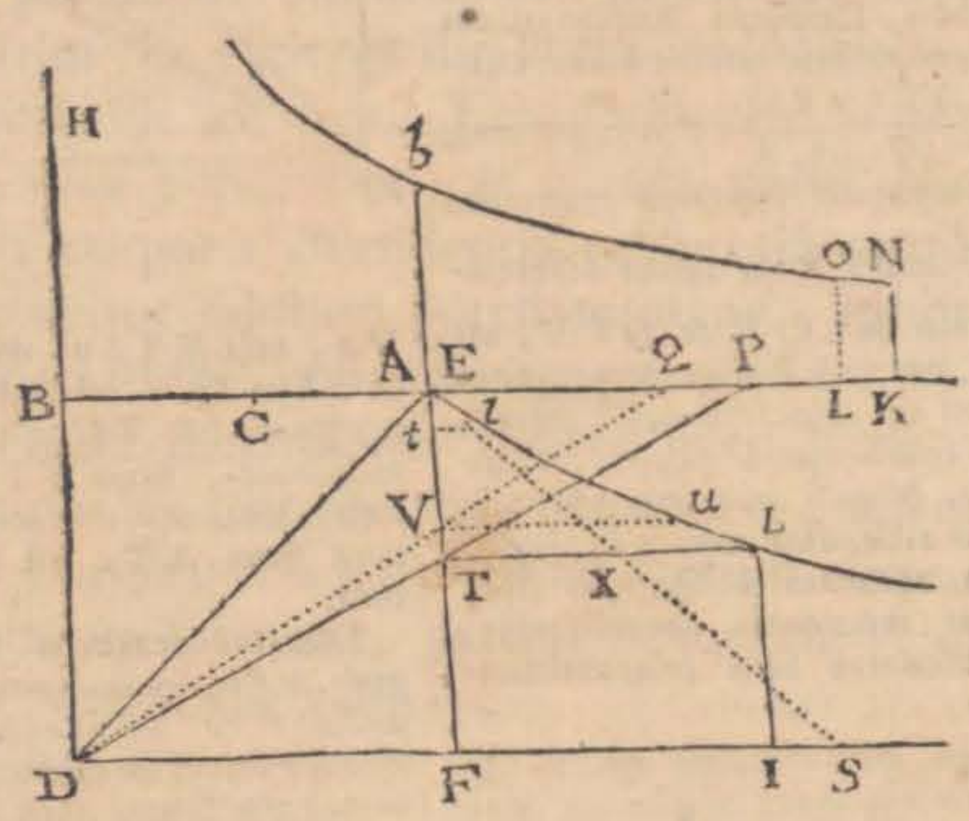
ſpatia in medio utroque, in æqualibus quibuſcunque temporibus deſcripta, ſint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & $AbNK$ differentia. *Q. E. D.*



tionis hujus 14ᵃᵉ. uti poſſumus ad determinandum motum corporis verticaliter deorſum projecti cum velocitate quæ terminali minor eſt. Nam ſi æqualis ipſi fuerit, motus eſt æquabilis; ſi verò celeritas projectionis terminali major ſit, paulò mutanda erit caſus tertii conſtructio. Iiſdem enim poſitis quæ (in not. 139.) capiatur AC gravitati & AK reſiſtentiæ proportionalis, ità ut ſit C inter A & K, quod reſiſtentia gravitate major ſupponatur. Erigatur perpendicularis a b, quæ ſit ad DB, ut DB^2, ad $4AB \times Ca$, & deſcriptâ ad aſymptotos rectangulas CK, CH hyperbolâ bN, erectâque KN ad CK, perpendiculari, area abNK augebitur in progreſſione arithmeticâ, dum vires CK in progreſſione geometricâ minuuntur. Spatium autem tempore DET deſcriptum erit ut exceſſus areæ abNK, ſuprà aream DET; nam ponatur, (ut in demonſtratione prop. 14.) $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$, & ideò $KL = \frac{2BPQ}{Z}$, atque areæ abNK momentum $KLON = \frac{2BPQ \times LO}{Z} = \frac{BPQ \times DB^3}{2Z \times AB \times CK}$. Cum gravitas ſit ut $BD^2 - AB^2$, erit $AC = \frac{BD^2 - AB^2}{Z}$, & area DTV ad aream DPQ ut BD^2 ad $BP^2 - BD^2$ (139) ſive $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, ſive $AK \times Z - AC \times Z$, vel $CK \times Z$. Si itaque pro areâ conſtante DTV, ſcribatur $BD \times m$, erit area DPQ, id eſt, $\frac{1}{2}BD \times PQ$ ad $BD \times m$, ut $CK \times Z$ ad BD^2, atque indè fit $PQ \times BD^3 = 2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ abNK momentum KLON ſuperiùs inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$ auferatur areæ DET momentum DTV ſeu $BD \times m$ & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt, momentum differentiæ arearum ut velocitas AP, id eſt,

eſt, ut momentum ſpatii quod corpus deſcribit, ideóque differentia arearum ut ſpatium deſcriptum.

145. Hinc ſpatium tempore DET, velocitate uniformi Aa deſcriptum eſt ad ſpatium eodem tempore deſcriptum in medio reſiſtente ut factum AaxDET ad arearum abNK & DET differentiam in AB ductam. Nam ſpatium tempore DET, velocitate uniformi Aa deſcriptum, eſt ut AaxDET (5. lib. 1.) & ſpatii hujus momentum eſt ut AaxDTV; momentum autem ſpatii in medio reſiſtente deſcripti eſt ut APxDTV, ſeu ut velocitas in momentum temporis ducta (12) & quia evaneſcente DET, fit AP=Aa, hæc momenta AaxDTV, APxDTV, initio temporis æqualia ſunt, ſicut & ſpatia initio deſcripta. Sed APxDTV=APxBDxm & momentum differentiæ arearum abNK & DET; eſt $\frac{APxBDxm}{AB}$ (144). Ergo APxDTV æquale eſt momento differentiæ arearum abNK & DET per AB ducto, unde manifeſtum eſt propoſitum. LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XIV. THEOR. XI. 145.



146. Si corporis aſcendentis velocitas exponatur per longitudinem AP, & reſiſtentia per AK quæ ponatur eſſe ut $AP^2 + 2BAP$, ita ut aſſumptâ datâ quâvis quantitate Z, ſit $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$; vis autem gravitatis exponatur per AC, quæ ſit ſemper ut AB^2, ita ut ſit $AC = \frac{AB^2}{Z}$ eademque conſtructio fiat quæ (not. 14'.) * & in A erigatur perpendiculum $Ab = \frac{AB^2}{4CA}$. Denique erecto perpendiculo in C deſcribatur ad Aſymptotos Rectangulos CK, CH hyperbolâ bN, erectâque KN ad CK perpendiculari, area AbNK diminuetur in progreſſione Arithmeticâ dum vires CK in progreſſione Geometricâ decreſcente ſumuntur. Et diſtantia corporis ab ejus altitudine maximâ erit ut exceſſus areæ AbNK ſupra Triangulum DET.

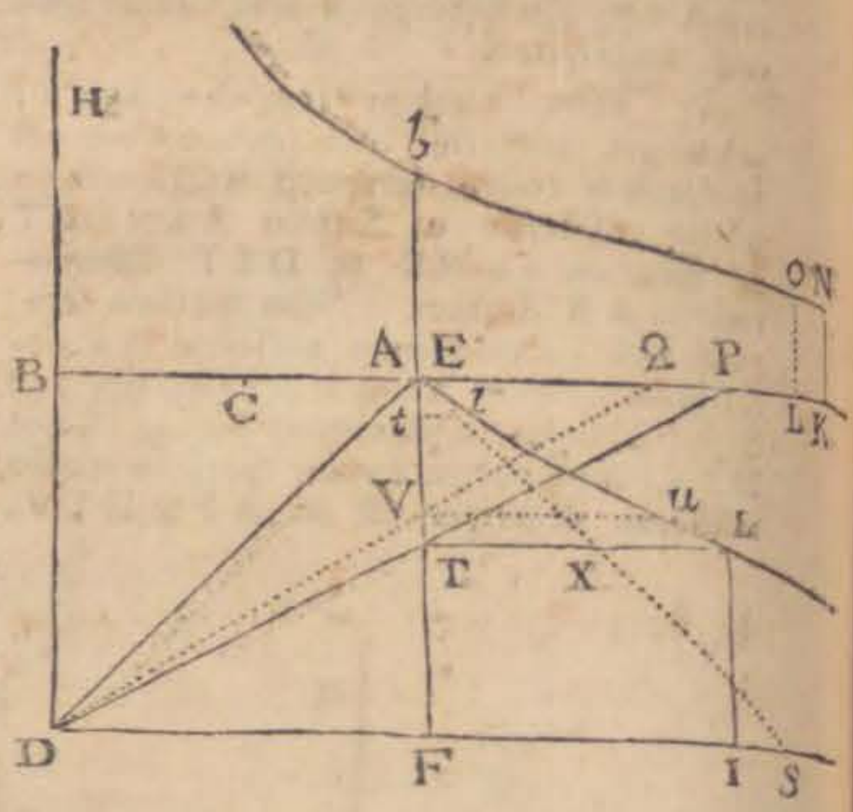
Cum enim ſit $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$ erit ipſius AK momentum KL (per lib. 2. Lem. II.) $= \frac{2APQ + 2BAxPQ}{Z}$ $= \frac{2BPQ}{Z}$ & areæ AbNK momentum $KLoN = \frac{2BPQxLO}{Z}$, & quia, per naturam hyp. eſt CK : CA = Ab (ſive $\frac{AB^2}{4CA}$) : LO, eſt $LO = \frac{AB^2}{4CK}$, ideoque $KLON = \frac{BP}{S\ 2}$

DE MOTU CORPORUM.

$\frac{BP \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$. Est verò area DTV ad aream DPQ ut DT^2 ad DP^2, sive etiam ob Triangula similia TDF, BDP, ut DF^2 sive AB^2 ad BP^2, seu $AP^2 + 2BAP + AB^2$ (per 4. 2. El.) hoc est (quia ex hypothesi est $AP + 2BAP = AK \times Z$, & $AB^2 = CA \times Z$) ad $CK \times Z$.

Hinc si pro area DPQ scribatur ejus valor $\frac{1}{2}BD \times PQ = \frac{1}{2}AB \times PQ$, erit area $DTV = \frac{AB \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$, quæ valorem constantem exprimere debet, quia momentum temporis sibi semper æquale exponit, ejus itaque loco scribatur Rectangulum $AB \times m$ in quo m erit momentum constans, est $m = \frac{AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$, erit ergo areæ AbNK momentum superius inventum $\frac{BP \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK} = BP \times m$, igitur differentia momentorum KLON & DTV, est $BP \times m - AB \times m = AP \times m$ & propterea ob datum m ut velocitas AP, id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo describit, & quo minuitur corporis distantia ab ejus altitudine maximâ. Ideoque differentia arearum & spatium illud proportionalibus momentis decrescentia, simulque evanescentia sunt proportionalia.

Verùm in isto casu facilius quam per methodum Newtonianam obtinetur spatium à corpore ascendente usque ad quietem in medio resistente descriptum, & ejus relatio ad spatium in medio non resistente eodem tempore percurrendum: Etenim per punctum A asymptotis DB, DF describatur hyperbola, & ex puncto T ducatur perpendiculum TL ad Hyperbolam usque, Trilineum ATL erit ut spatium quæsitum. Ducatur LI ad asymptotum perpendicularis, erit FI = TL & TF = LI, sed ex natura Hyperbolæ est DF:DI = LI (sive TF):AF, & dividendo DF:FI (sive TL) = TF:AT, hoc est alternando DF:TF = TL:AT (sed per 141) est DF:TF = AP:AT, ergo est AP = TL, itaque ducta ex V parallela



Vu, erit VTLu, momentum areæ ATL = VT × TL, est autem VT momentum temporis, & TL = AP ipsa velocitas eo momento, ergo VT × T est ut momentum spatii eo momento descripti, ergo tota area ATL est ut spatium descriptum.

Ducatur præterea tangens AS & designet At ultimum temporis momentum, & ducta tl, Trilineum evanescens ATL æquale fiet Triangulo Atl, & eo ultimo momento spatia tam in medio resistente quam in non resistente descripta erunt æqualia, ideoque per idem triangulum Atl exprimentur; spatia vero in medio non resistente descripta sunt ut Quadrata temporum, ideoque spatium tempore At in medio non resistente descriptum erit ad spatium tempore AT in eodem medio descriptum sicut $\overline{At}^2$ ad $\overline{AT}^2$, sive ut area trianguli Atl ad aream ATX; spatium verò in medio resistente descriptum tempore At erit ad spatium tempore AT in eodem medio descriptum ut Atl ad trilineum ATL, unde liquet quod spatium in medio non resistente descriptum, ascendendo ad quietem usque, erit ad spatium in medio resistente descriptum, ut ATX ad ATL.

Scho-

LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XIV. THEOR. XI.

Scholium.

(t) Reſiſtentia corporum ſphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex denſitate medii. Et reſiſtentiæ partem illam, quæ oritur ex denſitate fluidi, diximus eſſe in duplicatâ ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, eſt uniformis, ſive ut momentum temporis: ideoque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim vi uniformi ſeu in ratione momentorum temporis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Sed ſufficit aditum patefeciſſe ad hanc ſpeculationem in propoſitionibus VIII. & IX. quæ præcedunt, & eorum corollariis. In (u) iiſdem utique pro corporis aſcendentis reſiſtentiâ uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur ſubſtitui poteſt reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus ſolâ vi inſitâ movetur; & corpore rectâ aſcendente addere licet hanc uniformem reſiſtentiam vi gravitatis; eandemque ſubducere, quando corpus rectâ deſcendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Et viam aperui in propoſitionibus præcedentibus XIII. & XIV. in (x) quibus etiam reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis, ſubſtitui poteſt, vel cum eâdem, ut prius, componi. Sed propero ad alia.

SEC.

(t) (*) *Reſiſtentia corporum.* (Vid. Lem. num. 1.).

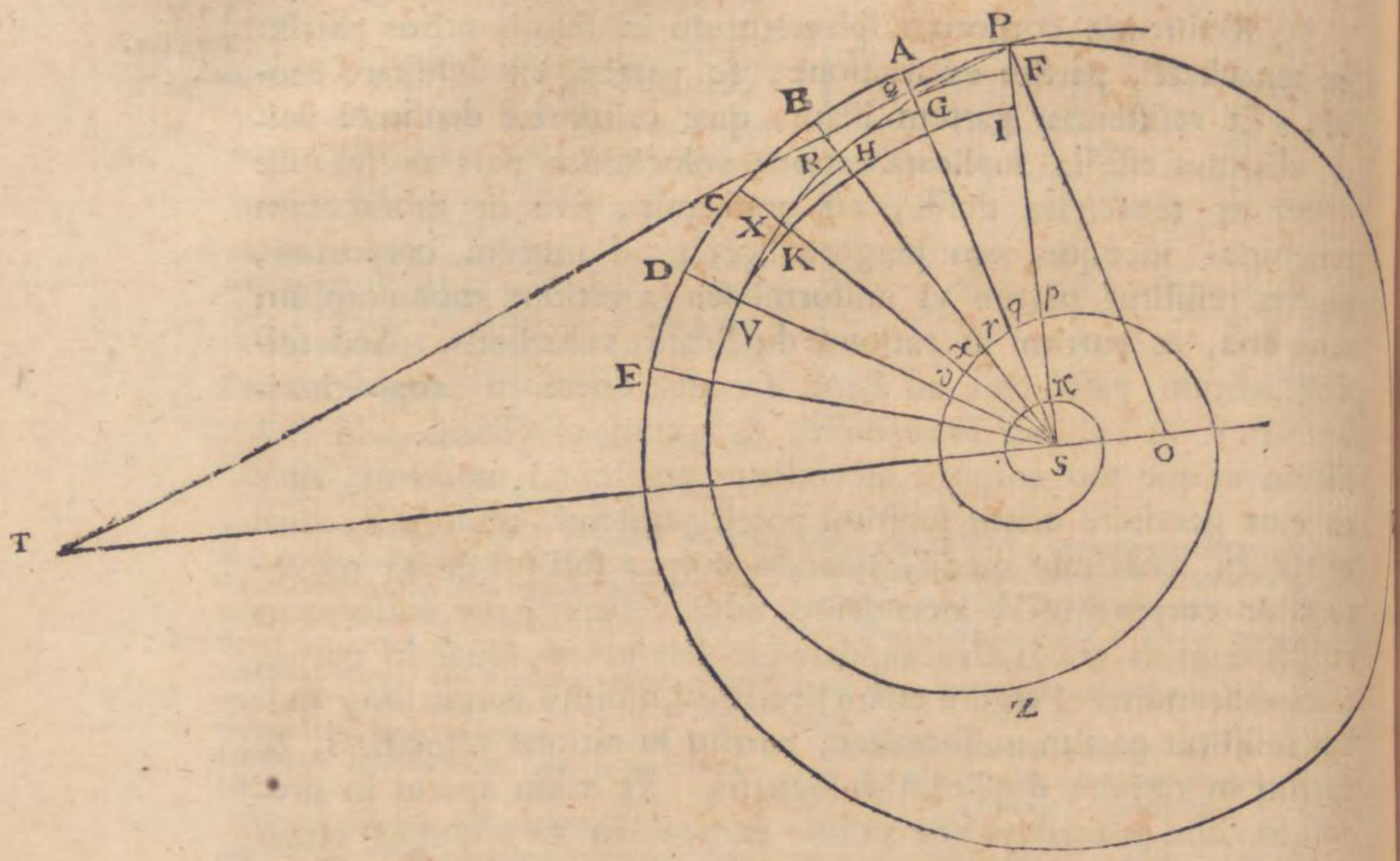
(u) (*) *In iiſdem utique* (105).

(x) * *In quibus etiam reſiſtentia uniformis*, hoc eſt, ſi corpus ſolâ vi inſitâ feratur, in conſtructionibus prop. 13. & 14., quæ ſunt pro corporis aſcenſu, loco gravitatis ſubſtituenda eſt reſiſtentia uniformis quæ oritur ex tenacitate medii; ſi corpus aſcendens vi gravitatis etiam urgeatur, quantitas illa quæ ſolam gravitatem exponebat, ſummam gravitatis & reſiſtentiæ uniformis in prædictis conſtructionibus exponet. Tandem ſi corpus vi gravitatis deſcendat, eadem quantitas quæ ſolam gravitatem exponebat, exceſſum gravitatis ſuprà reſiſtentiam uniformem in conſtructionibus quæ ſunt pro deſcenſu repræſentabit (cæteris manentibus). 146.

DE MOTU CORPORUM.

SECTIO IV.

De corporum circulari motu in mediis reſiſtentibus (†).



(†) Newtonus in hâc ſectione præcipuas ſupponit Logarithmicæ ſpiralis proprietates, poſtulat igitur inſtituti noſtri ratio ut de illâ curvâ aliquid præmittamus.

147. Circulus PAEL, centro S, & radio quovis SP deſcriptus diviſus ſit in arcus quotlibet æquales PA, AB, BC, CD &c., ſintque radiorum PS, AS, BS, CS &c., partes PS, QS, RS, XS &c. in continuâ progreſſione geometricâ, puncta P, Q, R, X &c., erunt in *Spirali Logarithmicâ* in quâ proindè ſi radii QS, RS, XS &c., ſint numeri, arcus circuli PA, PB, PC &c., ſicut & anguli PSQ, PSR, PSX &c., erunt ut illorum numerorum Logarithmi, prorsùs ut in vulgari Logarithmicâ axis partes ſunt ut Logarithmi ordinatarum correſpondentium.

148. Quoniam autem progreſſio geometrica in infinitum decreſcere & creſcere poteſt, manifeſtum eſt ſpiralem Logarithmicam utrinquè tam ad centrum S accedendo quam ab eodem verſùs M recedendo per gyros infinitos continuari poſſe, continuatâ progreſſione radiorum decreſcentium vel creſcentium circà centrum S, ad quod idcircò curva decreſcentibus radiis proportionalibus, magis magiſque accedit, licet numquam illud poſſit attingere, ſive ut loqui amant, licet illud centrum non attingat niſi poſt infinitas revolutiones.

149. Angulus SQR, quem radius quilibet SQ, cum curvâ ad eaſdem partes conſtituit conſtans eſt; ſi quidem evaneſcentibus arcubus æqualibus PA, AB, BC &c., triangula evaneſcentia PSQ, QSR, RSX &c., ſimilia fiunt propter latera circà æquales ad centrum angulos proportionalia (147) & ideò alii anguli homologi

gi SPQ, SQR, SRX &c., & PQS, QRS, RXS, æquales ſunt.

150. Quoniam itaquè ſpira quælibet PQRZp, pqrzπ &c., totidem triangulis PQS & pqS, QRS & qrS &c. ſimilibus ſimiliterque poſitis diviſa eſt, ſpiræ omnes quæ à radio poſitione dato SP, ad eundem radium ductæ ſunt, inter ſe ſimiles radiiſque correſpondentibus proportionales erunt, id eſt PS:pS=PQRZp:pqrzπ &c. Atquè hinc ſequitur (147) tam ſpiras omnes quam radios ipſis correſpondentes ad centrum uſquè in progreſſione geometricâ decreſcere, ſunt enim PS, pS, πS, &c. progreſſionis geometricæ termini æquidiſtantes ob æqualem angulorum æqualium PSQ, QSR, pSq, qSr, &c. numerum in ſingulis ſpiris comprehenſum undè radiorum quoque differentiæ Pp, pπ &c. in eâdem geometricâ progreſſione decreſcunt.

151. Ductâ rectâ PT ſpiralem tangente in P, & rectâ PO ad eandem perpendiculari, per centrum S erigatur ad radium SP perpendiculum TSO rectis PT & PO occurrens in T & O, longitudo ſpiralis PZpzπS, ad centrum uſque S, æquabitur tangenti PT, eritque proindè ad radium SP in datâ ratione PT ad SP, vel OP ad OS. Nam centro S, radiis SQ, SR, SX, SV &c. înfinitè propinquis deſcripti ſint arcus circulares QF, RG, XH, VK &c., & ob angulos QFP, RGQ, XHR rectos, anguloſque QPF, RQG, XRH &c. æquales (149), triangula evaneſcentia PFQ, QGR, RHX &c. ſimilia ſunt triangulo PST, eſt igitur PT:PS =PQ:PF=QR:QG=RX:RH &c. & compoſite PT:PS=PQ+QR+RX &c.:PF+QG+RH &c. id eſt, ut longitudo ſpiralis ad totum radium PS. Quarè longitudo ſpiralis æquatur tangenti PT. Eſt autem ubique tangens PT ad radium correſpondentem PS, in ratione datâ, ob triangulum PTS ſpecie datum (149) & ob triangula TPS, POS, (per conſtr.) ſimilia, eſt etiam OP:OS= PT:PS, ſeu ut longitudo ſpiralis ad radium.

152. Hinc quoque patet quod ſi centro S & radio quovis VS deſcribatur circulus ſecans ſpiralem in V & radium PS, in I, pars ſpiralis PV erit ad partem PI, radii PS ut tangens PT ad totum radium PS. Quarè ſi, manentibus circulorum radiis SP, SI, mutetur utcumque angulus TPS, quem ſpiralis ſeu ipſius tangens continet cum radio PS, longitudo ſpiralis tota ad centrum uſquè S, ſicut & longitudo inter duos circulos radiis SP & SI deſcriptos comprehenſa, erit ut ſpiralis tangens PT, ſeu ut ſecans anguli TPS. Oſtendimus (151) longitudinem ſpiralis æqualem eſſe tangenti PT, & partem ſpiralis PV, inter prædictos circulos contentam, eſſe ad tangentem PT, in ratione PI ad PS, quæ (per hyp.) data eſt; manente autem radio ſeu ſinu toto PS, eſt PT ſecans anguli PTS.

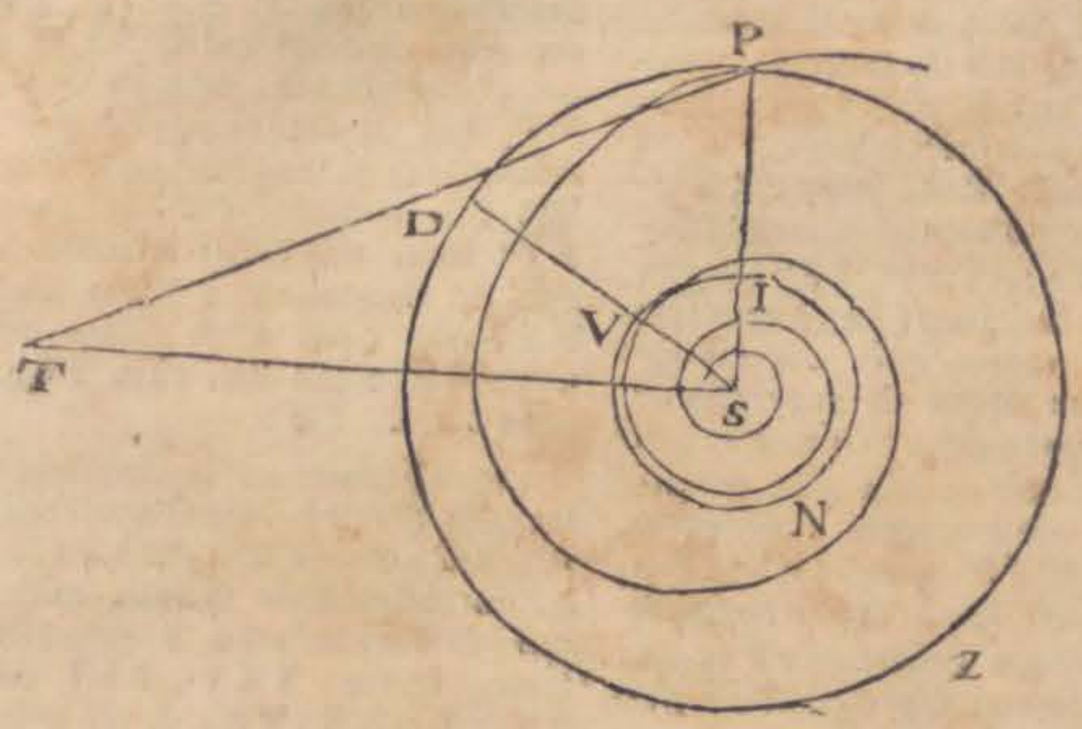
153. Dicantur radius conſtans PS=a, ſubtangens ST=b, arcus quilibet circuli PC vel PCLP+PC, vel 2PCLP+PC=x, correſpondens ſpiralis radius SX=y, qui creſcente arcu x decreſcit, erit ob triangulorum XKV, PST ſimilitudinem PS:ST=XK:VK, & ob ſectores SVK, SDC ſimiles SK ſive SX:SC ſeu PS=VK:DC, ideoque ex æquo SX: ST=XK:DC; id eſt, $y:b=-dy:dx=-\frac{b\,dy}{y}$, hinc ſumptis fluentibus $x=Q-b\,L.y$, & quia ubi $x=0$, fit $y=a$, erit $Q=b\,L.a$, & ideò $x=b\,L.a-b\,L.y=b\,L.\frac{a}{y}$; ſi itaque datus fuerit radius y cum arcu circulari x, ſeu angulo PSC dabitur b ſubtangens anguli ſpiralis, eſt enim $b=\frac{x}{L.\frac{a}{y}}$. 153.

Si verò datus ſit tum arcus x tum ſubtangens b dabitur radius y; Ponatur enim $L.h=1$ & erit $\frac{x}{b}\times L.h=L.\frac{a}{y}$, adeòque $h^{\frac{x}{b}}=\frac{a}{y}$; $y=\frac{a}{h^{\frac{x}{b}}}$, & hinc etiam $a=y\times h^{\frac{x}{b}}$.

154. Hinc ſi manentibus radiis SP ſeu a, & SV vel SI ſeu y, adeòque & $L.\frac{a}{y}$, mutetur utcumque angulus TPS, quem ſpiralis cum radio continet, arcus circularis PD vel x, comprehenſus inter radios SP & SVD, erit ſemper ut ſubtangens ſpiralis ST, ſeu b, quæ, manente radio ſeu ſinu toto PS, eſt ut anguli TPS tangens.

155.

DE MOTU CORPORUM.



155. Iisdem positis, hoc est, manentibus radiis SP sive a, & SI sive y, & utcumque mutato angulo TPS, numerus revolutionum spiralis inter circulos PDZP, & IVNI centro S & radiis datis SPSV vel SI descriptos est ut tangens ST anguli TPS, quem spiralis cum radio continet. Sit enim c circumferentia circuli PTZP, & n numerus integer vel fractus revolutionum spiralis a puncto P ad punctum V inter circulos PDZP, & IVNI erit (153) $nc = x = bL.\frac{a}{y}$; & hinc $n = \frac{b}{c} \times L.\frac{a}{y}$. Quarè ob datas c, a & y, (per hyp.) erit n ut b, id est numerus revolutionum inter circulos datos ut subtangens spiralis ST, seu ut tangens anguli TPS, quem spiralis cum radio continet.

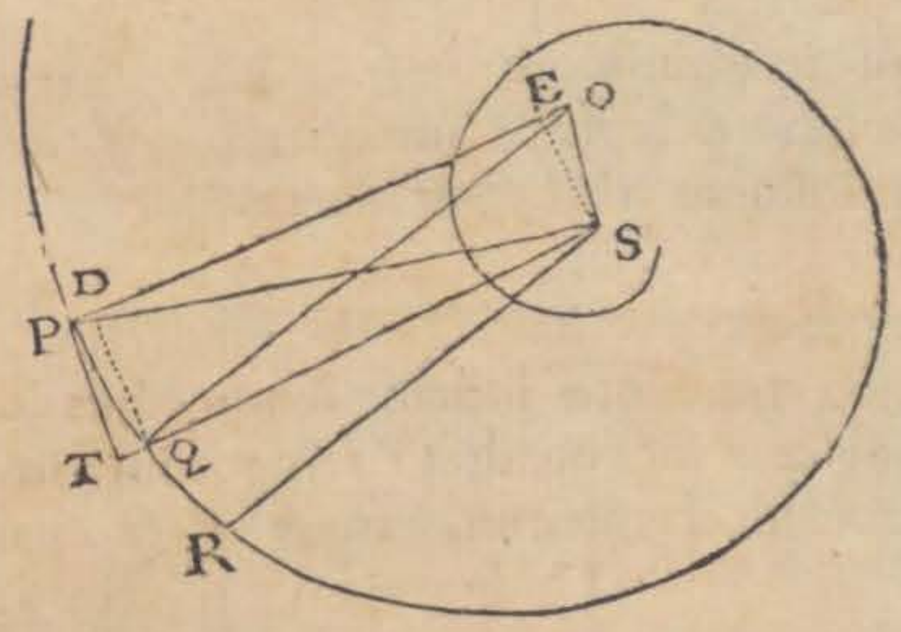
156. Spiralis post infinitos sibi super impositos gyros comprehendit cum radio PS spatium duplum trianguli PST. Iisdem enim positis quæ num. 153, cum sit (fig. 14.) PS (a):ST(b)=XK($-dy$) :VK=$-\frac{bdy}{a}$, erit sector SVK seu SVX $= = \frac{ybdy}{2a}$, & sumptis fluentibus, sector SPV=$Q-\frac{by^2}{4a}$; quia verò evanescente sectore SPV, fit $y=a$, erit $Q=\frac{ba^2}{4a}$, & hinc SPV=$\frac{baa-byy}{4a}$. Quarè ubi radius $y=o$, fiet area SPV = $\frac{ba}{4}=\frac{PS \times ST}{4}=\frac{1}{2}$ Triang. PST.

SEC-

LEMMA III.

Sit PQR *ſpiralis quæ ſecet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* SQ *in* T; *& ad ſpiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jungatur* SO. *Dico quod ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ × 2 PS *ad* PQ *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *OPQ*, *OQR* ſubducantur anguli æquales *SPQ*, *SQR*, & manebunt anguli æquales *OPS*, *OQS*. Ergo circulus qui tranſit per puncta O, S, P tranſibit (y) etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitus *PQ* tanget ſpiralem, (z) ideoque perpendiculariter ſecabit rectam *OP*. Fiet igitur *OP* diameter circuli hujus, & angulus *OSP* in ſemicirculo rectus. *Q. E. D.*



Ad *OP* demittantur perpendicula *QD*, *SE*, & (a) linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: *TQ* ad *PD* ut *TS* vel *PS* ad *PE*, ſeu 2 *PO* ad 2 *PS*; item *PD* ad *PQ* ut *PQ* ad 2 *PO*; & ex æquo perturbatè *TQ* ad *PQ* ut *PQ* ad 2 *PS*. Unde fit *PQq* æquale *TQ* × 2 *PS*. *Q. E. D.*

PRO-

(y) * *Tranſibit etiam per punctum Q.* (per prop. 21. lib. 3. Elem.)

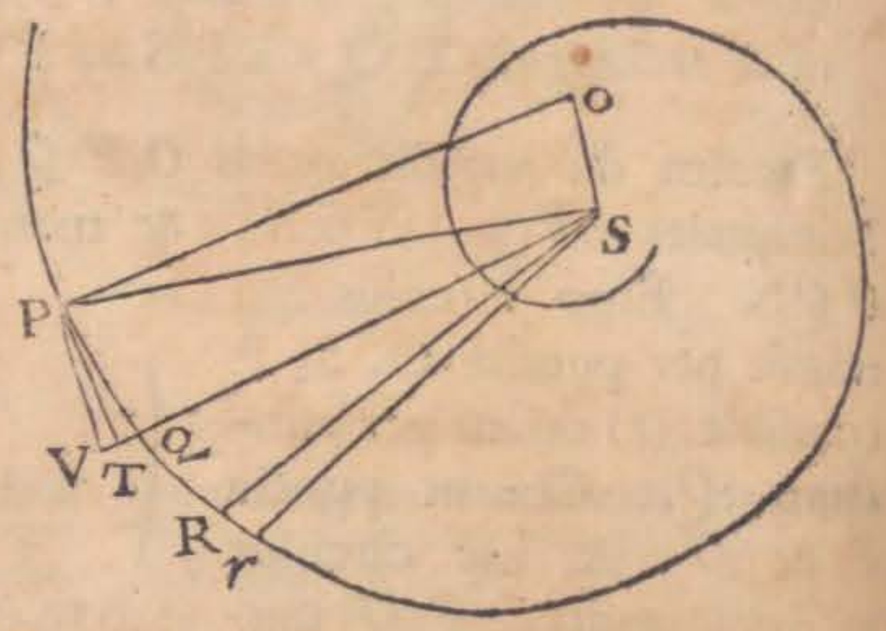
(z) *Ideóque perpendiculariter ſecabit rectam OP*, quæ (per hyp.) perpendicularis eſt ad arcum QP, fiet igitur OP diameter circuli hujus (per prop. 19. lib. 3. Elem.) & angulus OSP in ſemicirculo rectus (per prop. 31. lib. 3. Elem.).

(a) * *Et linearum rationes ultimæ.* Quoniam lineæ PT, DQ, ES ad PO normales, ſunt parallelæ, erit (per prop. 10. lib. 6. Elem.) TQ : PD = TS vel PS : PE, & ob ſimilitudinem triangulorum PSO, PES, PS : PE = PO : PS, ſeu 2 PO : 2 PS, ideoque TQ : PD = 2 PO : 2 PS. Quia verò radii OP, OQ ſunt ad arcum eva- 156.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

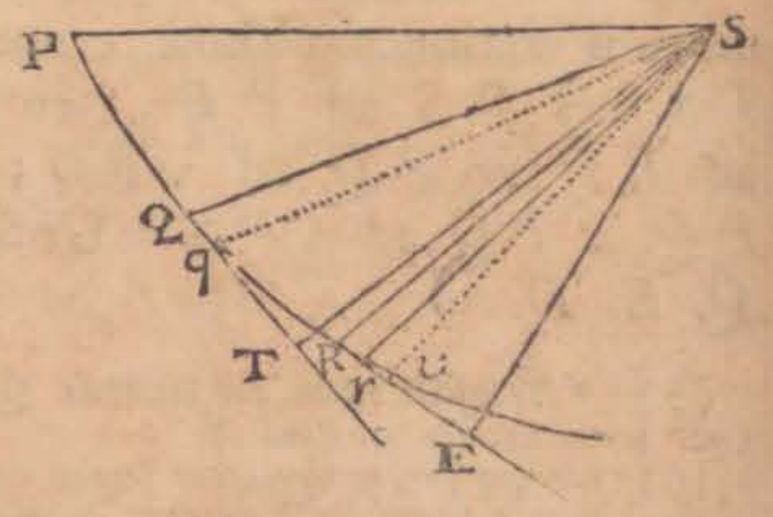
Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum à centro immobili, sitque vis centripeta in duplicatâ ratione densitatis: dico quod corpus gyrari potest in spirali, quæ radios omnes à centro illo ductos intersecat in angulo dato.



Ponantur quæ in superiore lemmate, & producatur SQ ad V, ut sit SV æqualis SP. Tempore quovis, in medio resistente, describat corpus arcum quam minimum PQ, & tempore duplo arcum quam minimum PR; & decrementa horum arcuum ex resistentiâ oriunda, sive defectus ab arcubus, qui in medio non resistente iisdem temporibus describerentur, (b) erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Est itaque decrementum arcus PQ pars quarta decrementi arcus PR. (c) Unde etiam, si areæ PSQ æqualis capiatur area QSr,

evanescentem PQ perpendiculares, punctum O est centrum, PO radius & 2PO diameter circuli spiralem osculantis in P (121. lib. 1.) & (per lem. 7. lib. 1.) PQ hujus circuli arcus vel chordæ; atque adeo (ex naturâ circuli) abscissa PD est ad chordam PQ ut PQ ad diametrum 2PO. Quare *ex æquo perturbatè* &c.

(b) * *Erunt ad invicem.* Cùm enim resistentia per arcum PR considerari possit tanquam vis retardatrix (4) decrementa arcuum minimorum PQ, PR ex resistentiâ oriunda sunt ut spatia quæ urgente vi acceleratrice resistentiæ æquali corpus describeret iisdem temporibus quibus describit arcus illos PQ, PR; Quarè decrementa illa sunt ut quadrata temporum quibus generantur (per Lem. X. lib. 1.),



(c) * *Undè etiam si areæ.* Corpus ea velocitate quam habet in loco P, temporibus æqualibus describat arcus quam minimos Pq, qr, in medio non resisten-

te,

QSr, erit decrementum arcus PQ æquale dimidio lineolæ Rr; ideoque vis reſiſtentiæ & vis centripeta ſunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}Rr$ & TQ quas ſimul generant. Quoniam vis centripeta, quâ corpus urgetur in P, (d) eſt reciprocè ut SPq, & (per (e) lem. x. lib. 1.) lineola TQ, quæ vi illâ generatur, eſt in ratione compoſitâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus PQ deſcribitur (nam reſiſtentiam in hoc caſu, ut infinitè minorem quam vis centripeta, negligo) erit $TQ \times SPq$, id eſt (per lemma noviſſimum) $\frac{1}{2}PQq \times SP$, in ratione duplicatâ temporis, (g) ideoque tempus eſt ut ut $PQ \times \sqrt{SP}$; & (h) corporis velocitas, quâ arcus PQ illo tempore deſcribitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc eſt, in ſubduplicatâ ratione ipſius SP reciprocè. Et ſimili argumento, velocitas quâ arcus QR deſcribitur, eſt in ſubduplicata ratione ipſius SQ reciprocè. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut (i) velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt, in ſubduplicatâ ratione SQ ad SP, ſive ut SQ ad $\sqrt{SP \times SQ}$; &

te, & arcus PQ, QR in medio reſiſtente, & erit (ex dem.) $4Qq = Rv$, ſunt autem areæ PSq & qSv æquales (per prop. 1. Lib. 1.) ideóque ob areas PSQ, & QSr, etiam æquales (per hyp.) erit PSq − PSQ ſeu area QSq æqualis qSV − QSv, ſeu rSv − QSq, & hinc area rSv æqualis eſt $2QSq$; ſed demiſſis ex centro S ad tangentes QT & rt per puncta Q & r ductas perpendiculis ST & st, areæ evaneſcens QSq eſt $\frac{1}{2}ST \times Qq$, & area rSv, eſt $\frac{1}{2}St \times rv$. Quare $ST \times Qq$ æquatur $\frac{1}{2}St \times rv$, & coeuntibus punctis P & v, fit $= St = ST$ atque adeo $Qq = \frac{1}{2}rv$, & $2Qq = rv$. Cum igitur ſuprà invenerimus $4Qq = Rv$, erit $4Qq - 2Qq$, ſeu $2Qq = Rv - rv = Rr$, & ideò $Qq = \frac{1}{2}Rr$. Itaque eodem tempore quo reſiſtentia generat decrementum Qq, ſeu $\frac{1}{2}Rr$, vis centripeta quâ corpus a tangente PT (vid. fig. text.) ad punctum Q arcûs PQ retrahitur generat decrementum TQ, & ideò vis reſiſtentiæ eſt ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}Rr$ ad TQ, (per cor. 4. Lem. X.) atque hæc omnia generaliter obtinent, quæcunque fuerit tum curva PQR, cujus proprietates nondum adhibuimus, tum vis centripeta, tum reſiſtentia, tum velocitas corporis. 156

(d) * *Eſt reciprotè ut SPq* (per hyp.).

(e) * *Per Lem. X.* (cor. 3.).

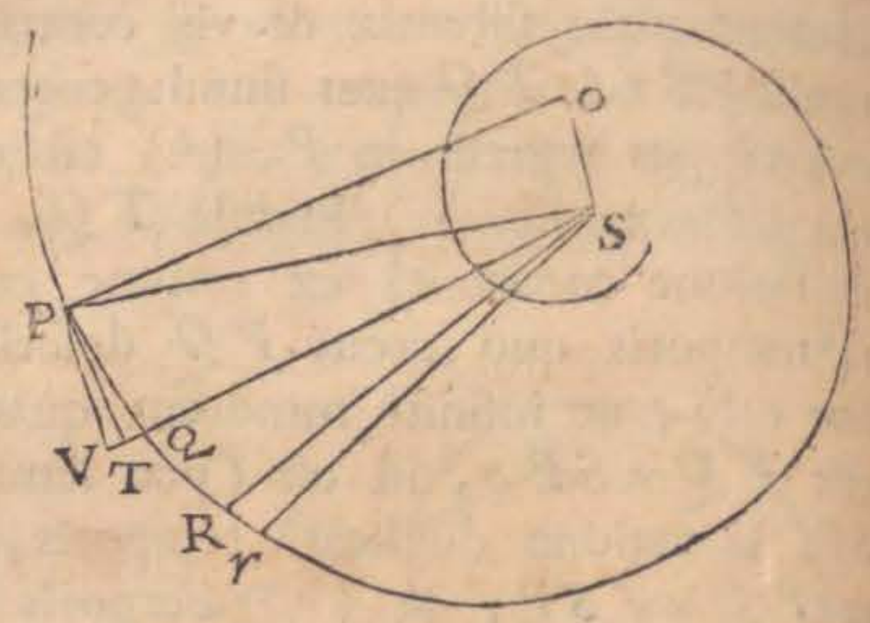
(g) * *Ideoque tempus.* (Neglectâ fractione datâ $\frac{1}{2}$) *eſt ut* &c.

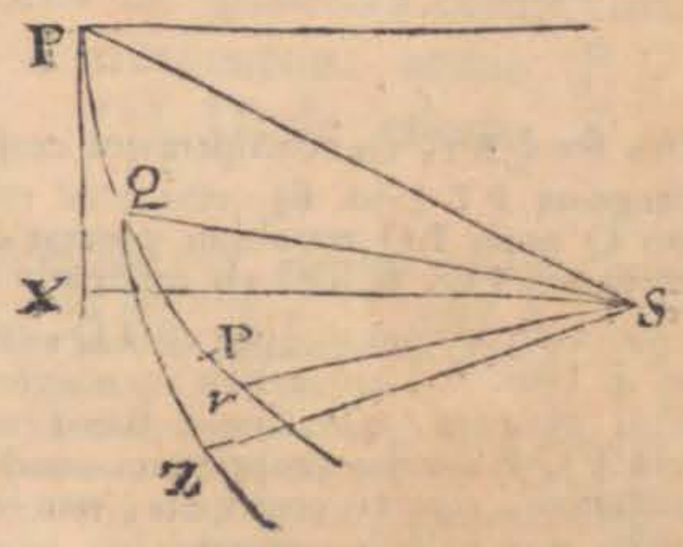
(h) * *Et corporis velocitas.* (14).

(i) * *Ut velocitates deſcriptrices ad invicem* (11), quia arcus illi PQ, & QR, æqualibus temporibus deſcribuntur (per Hyp.).

DE MOTU CORPORUM.

& (k) ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, eſt arcus PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. (l) Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ſeu $\frac{1}{1}VQ$. Nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ad $\frac{1}{2}VQ$ eſt (m) æqualitatis. Quoniam decrementum arcus PQ, ex reſiſtentiâ oriundum, ſive hujus duplum Rr, (n) eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim; (o) erit reſiſtentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad





(k) * *Et ob æquales angulos.* Ex centro S ad tangentes PX, QZ demiſſa ſint perpendicula SX, SZ, & areæ æquales PSQ & QSr, erunt $\frac{1}{2}SX \times PQ$, & $\frac{1}{2}SZ \times Qr$, ideòque SX ad SZ ut Qr ad PQ; ſed ob angulos rectos ad X & Z, & angulos æquales XPS & ZQS (per lem. 3.) ſimilia ſunt triangula SXP & SZQ, & ideò SX : SZ = SP : SQ, quare fit Qr : PQ = SP : SQ.

(l) * *Sumantur proportionalium* &c. Cum enim ſit (per dem.) $PQ : SQ = QR : \sqrt{SP \times SQ}$, & $PQ : SQ = Qr : SP$, erit etiam $Qr : SP = QR : \sqrt{SP \times SQ}$, unde erit $PQ : SQ = Qr - QR$ ſeu $Rr : SP - \sqrt{SP \times SQ}$, & hinc $PQ : Rr = SQ : SP - \sqrt{SP \times SQ}$.

(m) * *Eſt æqualitatis.* Eſt enim $SQ = SP - vQ$, & proindè $SP \times SQ = SP^2 - SP \times vQ$, ideoque extrahendo radicem quadratam (per formulam lib. 1. 551.) fit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2}vQ - \frac{vQ^2}{8SP}$ — &c., in infinitum; cæteri verò termini poſt ſecundum negligi poſſunt, quia coeuntibus P & Q, evaneſcunt reſpectu vQ, & ideò erit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2}vQ$, ac proindè $\frac{1}{2}vQ = SP - \sqrt{SP \times SQ}$.

(n) * *Eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim.* (Per cor. 3. Lem. X. lib. 1.)

(o) *Erit reſiſtentia &c.* Nam tempus eſt ut $PQ \times \sqrt{SP}$ (ex Dem.).

ad $\frac{1}{2}VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ sive ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & (p) ob similia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad $\frac{1}{2}VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2}OS$. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistentia, (q) id est, in ratione densitatis medii in P & ratione duplicatâ velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur spiralis, & (r) ob datam rationem OS ad OP, densitas medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus densitas est reciprocè ut distantia à centro SP, corpus gyrari potest in hâc spirali. *Q. E. D.*

Corol.

(p) * *Et ob similia triangula PVQ, PSO*, angulus PSO (per Lemma novissimum) rectus est & ideò æqualis angulo etiam recto PVQ, & præterea si ex angulis rectis QPO & VPS subducatur communis angulus QPS, remanent æquales VPQ & SPO; Quare triangula PVQ & PSO sunt similia.

(q) * *Id est in ratione &c.* (per Hyp.)

(r) * *Ob datam rationem OS ad OP.* Datâ spirali datur angulus QPS & hinc in Triangulo SPO datur angulus SPO cum isto QPS rectum faciens, datur etiam rectus PSO (per Lem. 3.) atque ideò trianguli POS anguli omnes dantur, & proindè datur ratio OS ad OP.

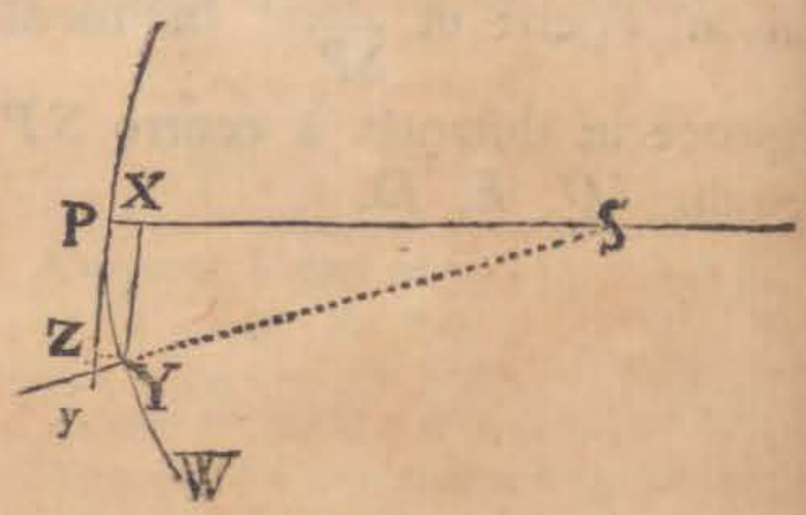
DE MOTU CORPORUM.

Corol. 1. (f) Velocitas in loco quovis P ea ſemper eſt, quâcum corpus in medio non reſiſtente eâdem vi centripetâ gyrari poteſt in circulo, ad eandem à centro diſtantiam SP.

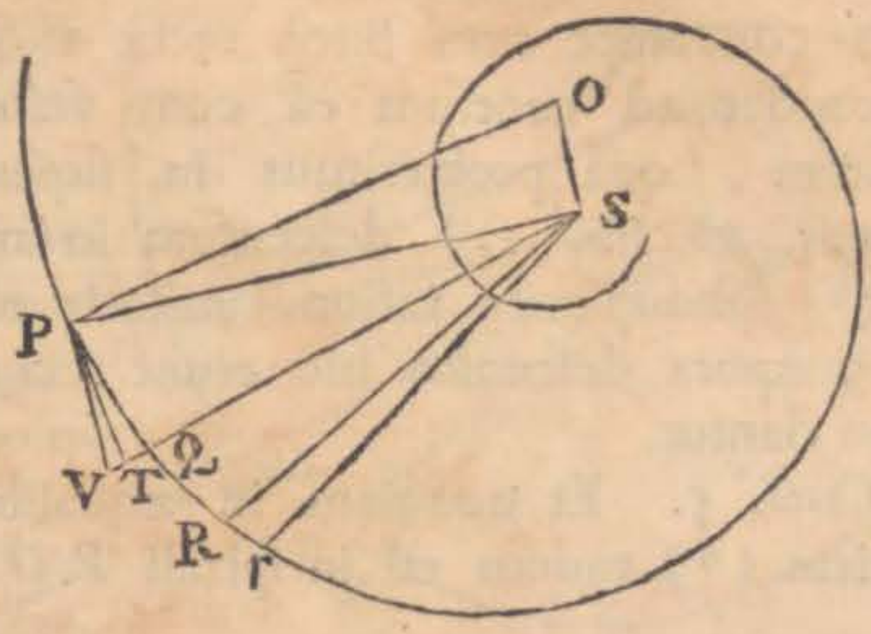
Corol. 2. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP, eſt ut $\frac{OS}{OP}$, ſin diſtantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et (t) inde ſpiralis ad quamlibet medii denſitatem aptari poteſt.

Corol. 3. Vis reſiſtentiæ in loco quovis P, eſt ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}OS$ ad OP. Nam vires illæ ſunt

(f) * *Velocitas in loco quovis P &c.* * Gyretur corpus in medio non reſiſtente in circulo P W radio P S deſcripto, in eoque retineatur vi centripetâ quæ ſit eadem cum illâ qua corpus urgetur in puncto P ſpiralis (vide fig. textûs). Sumatur in radio P S particula P X æqualis T Q, ſive ſpatio quod generatur per vim centripetam quâ corpus retinetur in ſpirali in P, ductâque tangente P Z, è puncto Y ducatur per centrum linea S Y y ad Tangentem uſque, Y y erit ſpatium quod generatur per vim centripetam quâ corpus in circulo retinetur, ſed coeuntibus punctis P & Y, linea y Y fit ultimò parallela lineæ P S, ideoque y Y fit æqualis particulæ P X, ſive T Q, cum ergo eadem ſit vis centripeta tam in Circulo quam in ſpirali & ſpatia æqualia y Y & T Q ab illâ vi centripeta generentur, æquali tempore utrinque generabuntur, unde eodem tempore quo corpus in ſpirali in Q pervenerit eo ipſo tempore perveniet in Y in circulo, velocitas ergo in ſpirali erit ad velocitatem in hoc circulo ut eſt arcus P Q ad arcum P Y, ſed ex natura ſpiralis per Lemma III. eſt $PQ = \sqrt{TQ \times 2PS}$, & ex natura circuli eſt $PY = \sqrt{PX \times 2PS}$ & ex conſtructione cum ſit $PX = TQ$ erit $PY = \sqrt{TQ \times 2PS}$ ergo $PQ = PY$, ergo velocitas in loco quovis ſpiralis ea eſt quâcum corpus eâdem vi centripetâ in medio non reſiſtente ad eandem à centro diſtantiam gyrari poteſt.



(t) * *Et inde ſpiralis &c.* * Fingantur duo media diverſæ denſitatis talia tamen ut in ſingulo medio denſitas in locis diverſis ſit reciprocè ut diſtantia locorum a centro. Sumptâ verò in utroque æquali à centro diſtantiâ S P, ſit ratio denſitatis prioris medii ad denſitatem poſterioris in eo loco ut a ad b, ea ratio eadem erit in aliâ quâcumque diſtantiâ à centro, putà in diſtantiâ S X. Nam in utroque medio denſitas in P erit ad denſitatem in X ut $\frac{1}{SP}$ ad $\frac{1}{SX}$; Itaque ſi in priore medio denſitas in P fuerit ut a, denſitas in X erit ut $\frac{a \times SP}{SX}$, & ſi in ſecundo medio denſitas in P fuerit ut



sunt ad invicem ut $\frac{1}{2} R r$ & $T Q$ sive (u) ut $\frac{\frac{1}{4} V Q \times P Q}{S Q}$ & $\frac{\frac{1}{2} P Q q}{S P}$ hoc est, ut $\frac{1}{2} V Q$ & $P Q$, seu (x) $\frac{1}{2} O S$ & $O P$. (y) Datâ igitur spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam, & vice versâ ex datâ illâ proportione datur spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hâc spirali, (z) nisi ubi vis resistentiæ minor est quam dimidium vis centripetæ.

ut b densitas in X erit ut $\frac{b \times SP}{SX}$, est verò $\frac{PS}{SX}$ ad $\frac{b \times SP}{SX}$ ut a ad b, ergo in his duobus mediis densitates erunt ubique in datâ ratione a ad b, in æqualibus à centro distantiis.

Si itaque data sit spiralis quæ in medio priore describitur, inveniri poterit illa quæ in posteriore medio describi posset; nam sumpta distantia quâvis SP, fiat a ad b ut $\frac{OS}{OP}$ ad $\frac{b \times OS}{a \times OP}$ hæc erit ratio quæ in hâc novâ spirali intercedet inter lineas, lineis OS & OP correspondentes, sive quia angulus S in Triangulo OSP est rectus, hæc erit ratio inter finum anguli quem facit linea PS cum perpendiculari ad curvam, & Radium; quo finu dato ejusque angulo, spiralis obtinetur ad hanc medii densitatem aptata.

Ex quibus illustratur quod præcedit in hoc ipso Corollario, si duæ spirales in diversis mediis describantur, mediorum densitates in eadem distantia erunt ut $\frac{OS}{OP}$, sed si distantiæ a Centro diversæ sumantur Ratio inversa distantiarum est huic conjungenda, eruntque ideo mediorum densitates ut $\frac{OS}{OP \times SP}$.

(u) * *Sive ut &c.* Nam (per Dem.) $PQ : Rr = SQ : \frac{1}{2} VQ$, & (per Lem. 3.) $TQ = \frac{PQ^2}{2PS}$, & punctis Q & P coeuntibus, est $SQ = SP$. 156.

(x) * *Seu* $\frac{1}{2} OS$ *&* OP. Quia triangula PVQ, PSO similia sunt (ex Dem.) est $\frac{1}{2} VQ : PQ = \frac{1}{2} OS : OP$.

(y) * *Datâ igitur spirali.* Nam datâ spirali datur specie triangulum PSO (ex Dem.) & indè datur ratio OS ad OP, & viceversâ datâ hâc ratione, datur specie triangulum rectangulum PSO, & hinc datur angulus POS æqualis angulo QPS quem spiralis cum radio continet, ideóque datur spiralis. Iis enim datis & assumpto ut libet radio SP, dabitur subtangens spiralis Logarithmicæ, seu tangens anguli QPS, & hinc dato angulo quovis PSR, dabitur radius SR cum puncto R in spirali (153).

(z) * *Nisi ubi vis resistentiæ minor est &c.* Cum enim vis resistentiæ sit ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}$ OS ad OP, & ad dimidium vis centripetæ ut $\frac{1}{2}$ OS ad $\frac{1}{2}$ OP, seu ut OS ad OP, sitque trianguli rectanguli PSO (Lem. 3.) crus OS minus hypothenusâ OP, manifestum est vim resistentiæ minorem esse dimidiâ vi centripetâ.

DE MOTU CORPORUM.

tæ. (a) Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ, & ſpiralis conveniet cum lineâ rectâ PS, inque hâc rectâ corpus deſcendet ad centrum eâ cum velocitate, quæ ſit ad velocitatem, quâ probavimus in ſuperioribus in caſu parabolæ (theor. x. lib. 1.) deſcenſum in medio non reſiſtente fieri, in (b) ſubduplicatâ ratione unitatis ad numerum binarium. (c) Et tempora deſcenſus hic erunt reciprocè ut velocitates, atque ideo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus à centro diſtantiis velocitas (d) eadem eſt in ſpirali PQR atque in rectâ SP, & lon-

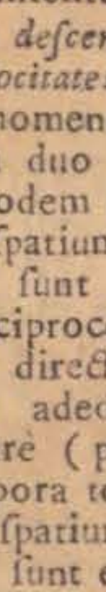
(a) * *Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ &c.* Ideóque OS æqualis OP, & puncto O in infinitum abeunte, fiet O P perpendicularis ad S P, & angulus POS ipſique æqualis angulus QPS quem ſpiralis continet cum radio P S evaneſcet, convenietque proindè ſpiralis cum lineâ rectâ P S.

(b) * *In ſubduplicatâ ratione unitatis.* Nam (in theor. X. lib. 1.) corporis in medio non reſiſtente rectâ cadentis velocitas in loco quovis P æqualis eſt velocitati quâ corpus ad diſtantiam dimidiam a centro, ſeu ad diſtantiam $\frac{1}{2}$ S P circulum deſcribere poteſt, & (per cor. 1. hujus) corporis in medio reſiſtente ſpiralem ſeu rectam P S cum quâ ſpiralis convenire ſupponitur deſcribentis velocitas in eodem loco P æqualis eſt velocitati quâcum corpus in medio non reſiſtente gyrari poteſt in circulo ad integram diſtantiam S P. Sed velocitates corporum diverſos circulos deſcribentium (in hypotheſi quod vires centripetæ ſunt reciprocè ut quadrata radiorum) ſunt inter ſe reciprocè in Radiorum ratione ſubduplicatâ (per converſ. cor. 6. prop. 4. lib. 1.) adeóque velocitas in circulo cujus radius S P eſt ad velocitatem in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ S P, ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad $\sqrt{1}$, ſive ut 1. ad $\sqrt{2}$, erit ergo velocitas corporis in medio reſiſtente per rectam P S deſcendentis ad velocitatem deſcendentis in medio non reſiſtente per rectam eandem & in eodem loco P exiſtentis, ut 1 ad $\sqrt{2}$. Q. E. D.

* Obſervandum verò quod velocitates initiales utrinque debent eſſe ſecundum Legem quæ in reliquo motu obtinet, hoc eſt velocitas initialis in medio reſiſtente eſſe debet æqualis celeritati quâ corpus ad eamdem à centro diſtantiam in medio non reſiſtente circulum deſcriberet, & velocitas initialis in medio non reſiſtente æqualis eſſe debet velocitati quâ corpus ad dimidiam a centro diſtantiam in medio non reſiſtente in circulo revolveretur.

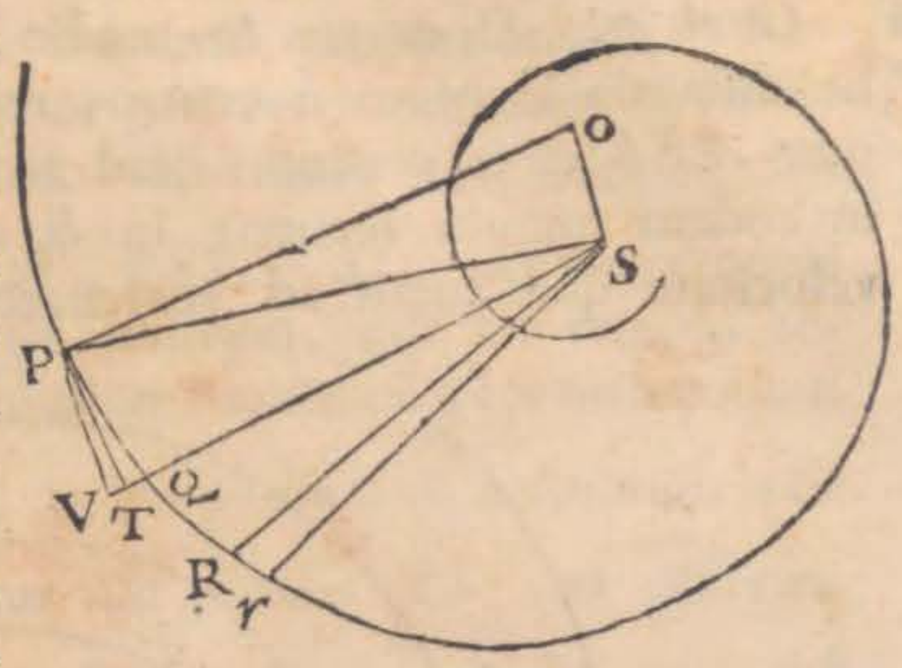
Quoniam itaque velocitas corporis in medio non reſiſtente deſcendentis datur (per theor. X. lib. 1.) dabitur etiam velocitas in medio reſiſtente deſcendentis

(c) * *Et tempora deſcenſûs, hic erunt reciprocè ut velocitates, atquè ideò dantur.* Nam momenta temporis quibus corpora duo in medio reſiſtente & in eodem non reſiſtente deſcribunt ſpatium idem quam minimum R r, ſunt ut corporum velocitates reciprocè (12) id eſt ut $\sqrt{2}$ & 1 directè (per modo demonſtrata) adeóque in datâ ratione. Quarè (per cor. Lem. 4. lib. 1.) tempora tota quibus corpora illa idem ſpatium quodvis P R deſcribunt, ſunt etiam in eâdem datâ ratione $\sqrt{2}$ ad 1, ſeu ut velocitates reciprocè. Cum igitur (per prop. 36. & 37. lib. 1.) detur tempus quo corpus in medio non reſiſtente cadendo ſpatium quodlibet deſcribit, dabitur quoquè tempus quo corpus in medio reſiſtente ſpatium quodvis datum cadendo percurrit.



(d) *Eadem eſt in ſpirali.* (Per cor. 1. hujus).

longitudo ſpiralis ad longitudinem rectæ *P S* eſt in datâ ratione, (e) nempe in ratione *OP* ad *OS*; tempus deſcenſus in ſpirali erit ad tempus deſcenſus in rectâ *S P* in ((f)) eâdem illâ datâ ratione, proindeque datur.



Corol. 6. Si centro *S* intervallis duobus quibuſcunque datis deſcribantur duo circuli; & manentibus hiſce circulis, mutetur utcunque angulus quem ſpiralis continet cum radio *P S*: numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in ſpirali à circumferentiâ ad circumferentiam, complere poteſt, eſt ut (g) $\frac{PS}{OS}$, ſive ut tangens anguli illius quem ſpiralis continet cum radio *P S*; (h) tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt, ut ſecans anguli ejuſdem, vel etiam reciprocè ut medii denſitas.

Co-

(e) * *Nempè in ratione OP ad OS* (151).

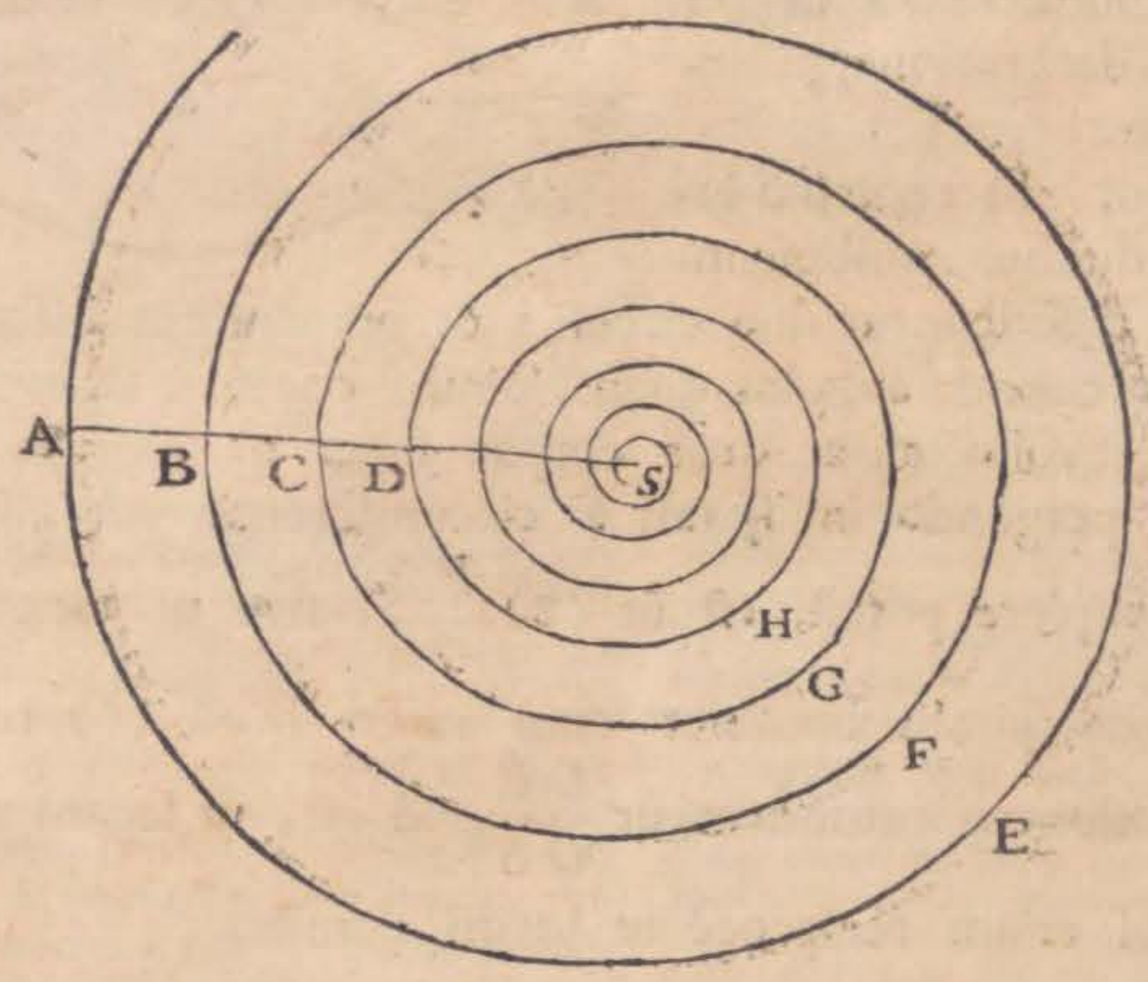
(f) * 157. *In eâdem illâ ratione.* Spatia enim velocitatibus æqualibus & uniformibus deſcripta ſunt ut tempora quibus deſcribuntur; unde ſi ſpiralis PQR & recta PS, diviſæ intelligantur in partes quam minimas totis proportionales, quod fit dum puncta diviſionum in ſpirali & in radio PS à centro S æquidiſtant (152) tempora quibus partes illæ quam minimæ in ſpirali & in rectâ PS homologæ deſcribuntur, erunt ut eædem partes, ſeu in datâ ratione, ſiquidem velocitas in ſpirali & in recta PS in iis punctis à centro æquidiſtantibus ſunt æquales eidem, nempe celeritati corporis circa idem centrum ad eandem diſtantiam in circulo revolventis; ideóque (per cor. lem. 4. lib. 1.) totum tempus deſcenſûs in ſpirali erit ad totum tempus deſcenſûs in rectâ PS per ſpatia homologa in datâ illâ ratione longitudinis nempe ſpiralis ad longitudinem PS, ſeu in ratione OP ad OS. 157.

(g) * *Eſt ut* $\frac{PS}{OS}$, *ſivè ut tangens anguli &c.* (155). Si autem ſinus totus ſit 1, cum ſit OS, ad PS, ut ſinus totus ad tangentem anguli POS, ſeu anguli æqualis QPS, erit tangens illa $\frac{PS}{OS}$.

(h) * *Tempus verò revolutionum earundem ut* $\frac{OP}{OS}$, *id eſt, ut ſecans &c.* Eſt enim tempus illud revolutionum inter circulos duos datos, ad tempus deſcenſûs per partem datam rectæ PS inter circulos contentam ut longitudo revolutionum illarum ad partem hanc rectæ PS, circulis duobus interceptam (157); ſed mutato utcumquè angulo quem ſpiralis continet

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 7. Si corpus in medio, cujus denſitas eſt reciprocè ut diſtantia locorum à centro, revolutionem in curvâ quâcunque *AEB* circa centrum illud fecerit, & radium primum *AS* in eodem angulo ſecuerit in *B* quo prius in *A*, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in *A* reci-



procè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro (id eſt, ut *AS* ad mediam proportionalem inter *AS* & *BS*) (i) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones *BFC*, *CGD*, &c. facere, & interſectionibus diſtinguet radium *AS* in partes

cum radio PS longitudo revolutionum inter duos circulos datos comprehenſa eſt ut ſecans anguli illius (152). Quare cum datum ſit tempus deſcensûs per partem datam rectæ PS inter circulos datos contentam, erit tempus revolutionum inter circulos ut ſecans anguli quem ſpiralis continet cum radio PS ſeu ut $\frac{OP}{OS}$; Si enim ſinus totus ſit 1 erit OS ad OP ut 1, ad ſecantem anguli POS ſeu QPS, & ideò ſecans eſt $\frac{OP}{OS}$. Porrò datâ rectâ PS, denſitas eſt ut $\frac{OP}{OS}$ reciprocè (per cor. 2. hujus). Ergò &c.

(i) * *Corpus illud perget &c.* Centro S & radio dato SA deſcripta intelligatur ſpiralis Logarithmica quæ primâ revolutione abſolutâ, tranſeat per punctum B datum in radio SA (153) & ſpiralis illa ſuis ſemper ſimilibus revolutionibus diſtinguet radium AS in partes AS, BS, CS, DS &c. continuè proportionales (150). Fingamus etiam quod iiſdem poſitis quæ (in

tes AS, BS, CS, DS, &c. continuè proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut perimetri orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directè, & velocitates in principiis A, B, C, inversè; id est, ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, sive ut $\frac{1}{3}AS$ ad AB quam proximè. Unde tempus illud totum expeditè invenitur.

LIBER SECUNDUM. SECT. IV. PROP. XV. THEOR. XII.

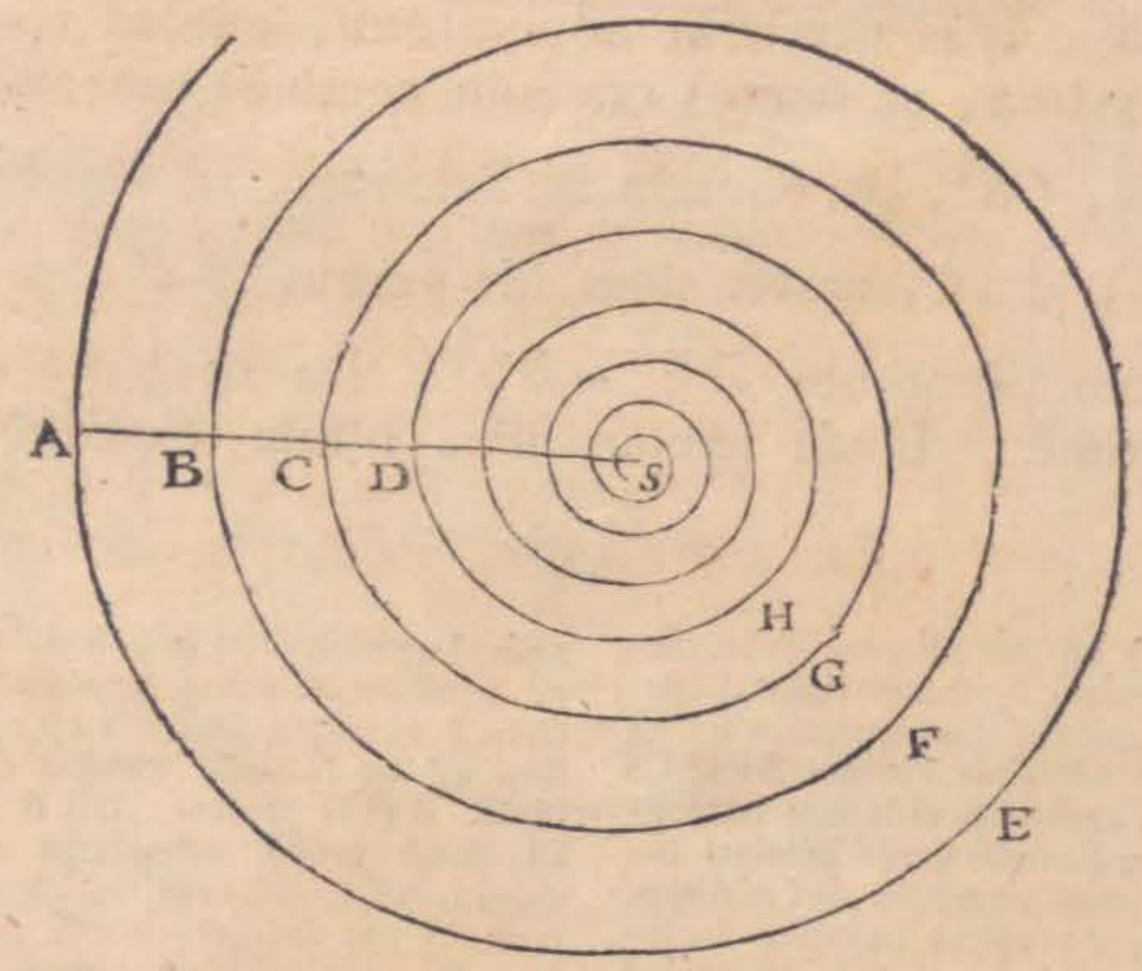
Co-

(in prop. 15.) corpus aliquod P in medio justæ densitatis spiralem illam Logarithmicam describat, dum corpus aliud Q in alio medio describit curvam AEBFCS & in iisdem à centro S distantiis densitates duorum mediorum erunt in datâ ratione, cum in utroque medio sit (per hyp. cor. hujus & per prop. 15) densitas in loco A ad densitatem in loco B, ut SB ad SA. Simili modo velocitates corporum P & Q in loco B, erunt ut eorumdem velocitates in loco A, (per prop. 15. & hyp. coroll. hujus) ideóque in datâ ratione; vires autem centripetæ quibus corpora P & Q urgentur, sunt in utroque medio iisdem in locis eædem (per hyp.), & tandem ob angulos datos quos tam spiralis Logarithmica, quam curva AEB continet cum radio AS, directiones motuum in utrâque curvâ pares sunt in locis A & B; Quarè postquam corpus Q primâ revolutione AEB absolutâ, pervenit in B, per quod punctum transit etiam spiralis Logarithmica, eodem modo determinatur ad æmulandum motum corporis P secundam suam revolutionem absolventis, quo determinatum fuerat in loco A ut æmularetur motum corporis ejusdem P primam suam revolutionem perficientis; cum (per dem.) omnia paria sint in locis B & A videlicet mediorum densitates, corporum velocitates, directiones, viresque centripetæ. Quoniam igitur secunda spiralis Logarithmicæ revolutio à puncto B ad punctum C priori à puncto A ad punctum B absolutæ similis est (150), necessum est ut secunda quoque curvæ revolutio BFC priori AEB sit similis; Et simili modo ostendetur revolutiones omnes BFC, CGD &c. & motus corporis Q eas absolventis esse inter se similes. Erunt igitur revolutiones AEB, BFC, CGD &c. ut radii AS, BS, CS &c. id est, continuè proportionales, & ob similitudinem motuum in similibus revolutionibus AEB, BFC &c. si ex centro S ductus intelligatur radius revolutiones illas secans in F, E, G &c. quæ erunt in revolutionibus AEB, BFC &c. loca homologa, erit velocitas corporis Q in loco E ad velocitatem ejus in loco A ut velocitas in F ad velocitatem in B, & proindè velocitas in E ad velocitatem in F, ut velocitas in A ad velocitatem in B, id est, (per hyp. cor. hujus) ut $BS^{\frac{1}{2}}$ ad $AS^{\frac{1}{2}}$; sed tempora quibus spatia homologa quam minima in locis E & F describuntur sunt ut spatia illa directè & velocitates inversè (12); Quarè cum spatia homologa in locis E & F sint ut radii AS & BS, & velocitates ibidem ut $AS^{\frac{1}{2}}$ & $BS^{\frac{1}{2}}$ inversè (ex dem.) tempus quo spatium minimum revolutionis AEB describitur est ad tempus quo describitur spatium homo-

157.

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in mediis, quorum denſitas aut uniformis eſt, aut aliam quamcunque legem aſſignatam obſervat. Centro *S*, in-



tervallis continuè proportionalibus *SA*, *SB*, *SC*, &c. deſcribe circulos quotcunque, & ſtatue tempus revolutionum inter peri-

logum revolutionis ſimilis BFC ut $AS \times AS^{\frac{1}{2}}$, ad $BS \times BS^{\frac{1}{2}}$, id eſt, ut $AS^{\frac{3}{2}}$ ad $BS^{\frac{3}{2}}$, ideóque in datâ ratione. Undè (per cor. lem. 4. lib. 1.) tempus totum quo corpus Q primam ſuam revolutionem AEB abſolvit eſt ad tempus quo ſecundam revolutionem BFC, perficit in eâdem ratione $AS^{\frac{3}{2}}$ ad $BS^{\frac{3}{2}}$. Et ſimili argumento liquet tempora revolutionum BFC, CGD &c. eſſe inter ſe ut ſunt $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ &c. Cum igitur revolutionum tempora ſint quantitates $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, $DS^{\frac{3}{2}}$, &c. progreſſionem geometricam in infinitum decreſcentem conſtituant, tempus totum quo corpus Q, perveniet ad centrum S erit ad tempus revolutionis primæ AEB ut ſumma omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, $DS^{\frac{3}{2}}$ &c. pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; porrò ſumma illa eſt ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$ ut hic terminus primus ad differentiam duorum priorum, nempè $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$. Nam ſcribatur ſic terminorum ſeries, $AS^{\frac{3}{2}} : BS^{\frac{3}{2}} = BS^{\frac{3}{2}} : CS^{\frac{3}{2}} = CS$

perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in medio (k) de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in medio proposito, ut (l) medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proximè: Sed & in eadem quoque ratione esse secantem anguli quo spiralis præfinita, in medio de quo egimus, secat radium AS, ad secantem anguli quo spiralis nova secat radium eundem in medio proposito: (m) Atque etiam ut sunt eorundem angulorum tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proximè. Si (n) hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possumus quibus modis ac temporibus corpora in medio quocunque regulari gyrari debebunt.

LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XV. THEOR. XII.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in spiralibus ad (o) formam ovalium accedentibus peragantur; tamen conci-

quam proximè; Et hinc dato tempore revolutionis primæ AEB, tempus totum quo corpus pervenit ad centrum expeditè invenitur. Sit, exempli causâ, AS ad AB ut 3000000 ad 1, & tempus primæ revolutionis = 1, erit tempus totum = 2000000, quam proximè. 157.

$= CS^{\frac{3}{2}} : DS^{\frac{3}{2}}$, &c. in infinitum, & ultimo progressionis termino evanescente, erit summa antecedentium, id est, summa omnium terminorum quæ dicatur S ad summam consequentium, seu summam omnium terminorum dempto primo, ut primus ad secundum, hoc est $S : S - AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : BS^{\frac{3}{2}}$; undè habetur dividendo $S : AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$; Est autem $BS = AS - AB$, & ideò $BS^{\frac{3}{2}} = (AS - AB)^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB + \frac{3}{8} \times \frac{AB^2}{AS^{\frac{1}{2}}} -$ &c. in infinitum (551. lib. 1.). Quapropter si distantia AB minima fuerit, respectu radii AS, fiet $BS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB$, quam proximè, neglectis nimirum cæteris terminis fere evanescentibus; erit igitur $S : AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB = \frac{2}{3} AS : AB$

(k) * *In medio de quo egimus.* (In prop. 15. & cor. ejus), cujus nimirum densitas est reciprocè ut distantia locorum à centro.

(l) * *Ut medii propositi densitas*, (per cor. 6. hujus) supponendo spirales Logarithmicas, per puncta A, B, C, D, in utroque medio descriptas.

(m) * *Atquè etiam ut sunt &c.* Per cor. 6. hujus.

(n) * *Si hæc fiant passim inter circulos binos*, invenietur in medio regulari lex quâ motus continuabitur per circulos omnes, seu, inter circulos omnes, quemadmodum inventis prioribus seriei regularis terminis, cognoscitur lex quâ illa progreditur, *atquè hoc pacto &c.*

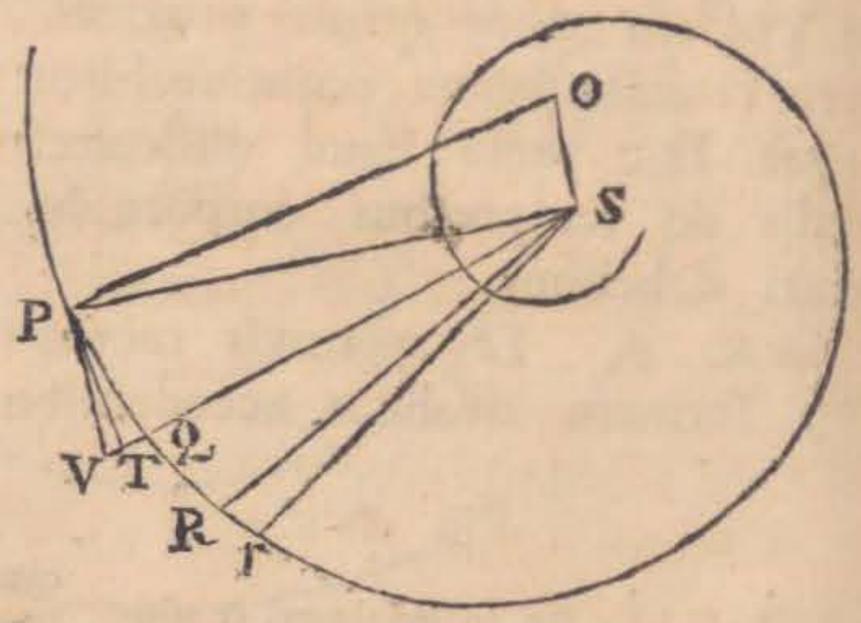
(o) * *Ad formam ovalium accedentibus &c.* Sunt enim spirales quarum re-

De Motu Corporum.

cipiendo ſpiralium illarum ſingulas revolutiones iiſdem ab invicem intervallis diſtare, iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum ſpirali ſuperius deſcriptâ, (p) intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi ſpiralibus peragantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejuſdem diſtantiæ: dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.



Demonſtratur eâdem methodo cum propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in P ſit reciprocè ut diſtantiæ SP, dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index eſt $n+1$: (q) colligetur ut ſupra, quod tempus, quo corpus deſcribit arcum quemvis PQ; erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; & reſiſtentia in P ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^{n}}$, ſive ut $\frac{1,-\frac{1}{2}n \times VQ}{PQ \times SP^{n} \times SQ}$, ideoque ut $\frac{1-\frac{1}{2}n \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc eſt, ob datum $\frac{1-\frac{1}{2}n \times OS}{OP}$, reciprocè ut SP^{n+1}. Et propterea, cum velocitas ſit reciprocè ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, denſitas in P erit reciprocè ut SP.

Co-

volutiones ſingulæ ferè concentricæ ſunt & ad formam circulorum accedunt; aliarum revolutiones accedunt ad formam ovalium centro ſpiralis pro ellipſeos vel ovalis foco accepto.

(p) * *Intelligemus etiam* (ut in cor. 8°.) *quomodò &c.*

(q) * *Colligetur ut ſuprà &c.* Quæcumque enim ſit vis centripeta, illa eſt ad vim reſiſtentiæ ut TQ ad $\frac{1}{2} Rr$ (per dem. prop. 15). Quoniam igitur vis centripeta quâ corpus urgetur in P, eſt reciprocè ut SP^{n+1}, & (per cor. Lem. X. lib. 1.) lineola TQ quæ vi illâ generatur, eſt in ratione compoſitâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus PQ deſcribitur; erit $TQ \times SP^{n+1}$, id

Corol. 1. (r) Resistentia est ad vim centripetam ut $1-\frac{1}{2}n$ $\times OS$ ad OP.

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciprocè ut SP *cub.* (f) erit $1-\frac{1}{2}n=0$; ideoque resistentia & densitas medii nulla erit, ut in propositione nonâ libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciprocè ut dignitas aliqua radii SP cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa (t) in negativam mutabitur. *Scho-*

id est, (per Lem. 3.) $\frac{1}{2}PQ^2\times SP^n$, in ratione duplicatâ temporis, ideóque tempus est ut $PQ\times SP^{\frac{n}{2}}$, & corporis velocitas quâ arcus PQ illo tempore describitur ut $\frac{PQ}{PQ\times SP^{\frac{n}{2}}}$, seu $\frac{1}{SP^{\frac{n}{2}}}$; & simili argumento velocitas quâ arcus QR describitur est ut $\frac{1}{SQ^{\frac{n}{2}}}$; sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates describtrices ad invicem, id est, in ratione $SQ^{\frac{n}{2}}$ ad $SP^{\frac{n}{2}}$, & (per dem. prop. 15.) arcus Qr, est ad arcum PQ ut SP ad SQ; Quarè (per compositionem rationum & ex æquo) $Qr:QR=SP\times SQ^{\frac{n}{2}}:SQ\times SP^{\frac{n}{2}}=SQ^{\frac{1}{2}n-1}:SP^{\frac{1}{2}-1}$, & sumptis terminorum differentiis $Qr:Rr=SQ^{\frac{1}{2}n-1}:SQ^{\frac{1}{2}n-1}-SP^{\frac{n}{2}-1}$. Quia verò $SP=SQ+VQ$, ideòque (549 lib. 1.) $SP^{\frac{1}{2}n-1}=SQ^{\frac{1}{2}n-1}+\frac{1}{2}\overline{n-1}\times VQ\times SQ^{\frac{1}{2}n-2}$ + &c., neglectis reliquis terminis respectu priorum evanescentibus, erit $SQ^{\frac{1}{2}n-1}-SP^{\frac{1}{2}n-1}=(1-\frac{1}{2}n)\times VQ\times SQ^{\frac{1}{2}n-2}$, atque adeò $Qr:Rr=SQ:(1-\frac{1}{2}n)VQ$. Erat autem $PQ:Qr=SQ:SP$; undè (ex æquo) fit $PQ:Rr=SQ^2:(1-\frac{1}{2}n)VQ\times SP$, & hinc $Rr=(1-\frac{1}{2}n)\frac{VQ\times SP\times PQ}{SQ^2}=\frac{(1-\frac{1}{2}n)\times VQ\times PQ}{SQ}$, ob $SP=SQ$, ubi puncta Q & P coeunt. 157. Quoniam decrementum arcûs PQ ex resistentiâ oriundum, sive hujus duplum Rr, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim, erit resistentia ut $\frac{Rr}{PQ^2\times SP^n}$, id est, ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)VQ}{PQ\times SP^n\times SQ}$. Sivè ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)OS}{OP\times SP^{n+1}}$ (quia $VQ:PQ=OS:OP$ ex dem. prop. 15.) hoc est, ob datum $\frac{(1-\frac{1}{2}n)\times OS}{OP}$ ut $\frac{1}{SP^{n+1}}$. Et propterea cum velocitas (ex dem.) sit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$, si ex resistentiâ auferatur duplicata velocitatis ratio $\frac{1}{SP^n}$, manebit medii densitas in P, ut $\frac{1}{SP}$, seu reciprocè ut SP.

(r) * *Resistentia est ad vim centripetam.* Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}Rr$ & TQ, sivè ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)VQ\times PQ}{2SQ}$ & $\frac{PQ^2}{2SP}$, hoc est, ut $(1-\frac{1}{2}n)VQ$ & PQ, seu $(1-\frac{1}{2}n)OS$ & OP.

(f) * *Erit* $1-\frac{2}{2}n=0$. Cum enim (per hyp.) sit $n+1=3$, erit $n=2$, $\frac{1}{2}n=1$ & $1-\frac{1}{2}n=0$.

(t) * *In negativam mutabitur.* Tum enim $n+1$, erit numerus ternario major, & ideò n binario major, & hinc $1-\frac{1}{2}n$, numerus negativus. Co-

DE MOTU CORPORUM.

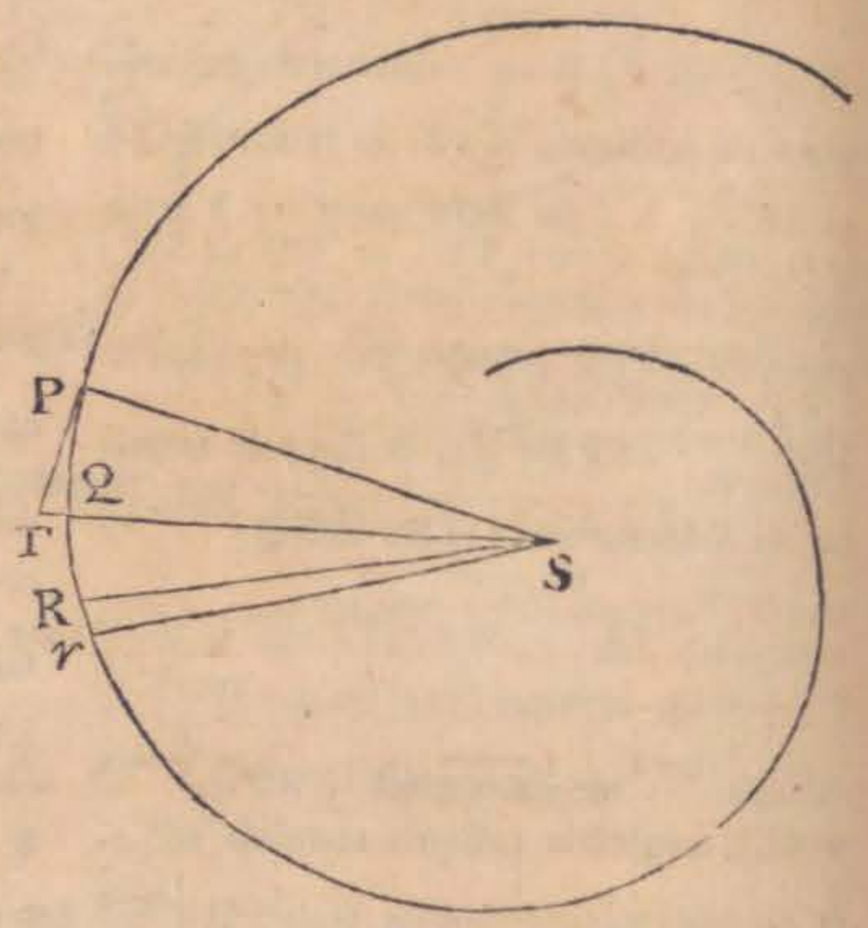
Scholium.

Cæterum hæc propoſitio & ſuperiores, quæ ad media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeo parvorum, ut medii ex uno corporis latere major denſitas quam ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque cæteris paribus denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in mediis, quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA VI.

Invenire & vim centripetam & medii reſiſtentiam, quâ corpus in datâ ſpirali, datâ velocitatis lege, revolvi poteſt.

Sit ſpiralis illa *P Q R*. Ex velocitate, quâ corpus percurrit arcum quam minimum *PQ*, dabitur tempus, & ex altitudine *TQ*, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum *PSQ* & *QSR*, differentia



Coroll. 4. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP, eſt ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)\,OS}{OP}$; ſin diſtantia illa non datur ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)\,OS}{OP \times SP}$, ſeu ob datum numerum $1-\frac{1}{2}n$, ut $\frac{OS}{OP}$, vel $\frac{OS}{OP \times SP}$.

Coroll. 5. Quoniam (per cor. 1. prop. 15.) mutato utcumque ſpiralis angulo, ità ut

RSr, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur resistentia ac (u) densitas medii.

LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XVIII. PROB. V.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Datâ lege vis centripetæ, invenire medii densitatem in locis singulis, quâ corpus datam spiralem describet.

Ex vi centripetâ invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda medii densitas; ut (x) in propositione superiore.

Methodum vero tractandi hæc problemata aperui in hujus propositione decimâ, & lemmate secundo; & lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentiâ mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

ut etiam evanescat, & spiralis cum radio conveniat, velocitas corporis in loco quovis P ea semper est quâcum corpus in medio non resistente eâdem vi centripetâ gyrari potest in circulo ad eandem à centro distantiam SP (per Const. 1. Cor. 7. Prop. IV. lib. 1.) liquet (per cor. 5. prop. 15. & 152.) tempora descensûs a puncto dato P ad centrum usquè S, fore etiam (in hyp. prop. 16.) ut spiralium variarum longitudines; quod observavit Joannes Bernoullius in actis eruditorum Lipsi. an. 1713. ubi hanc materiam eleganter tractat.

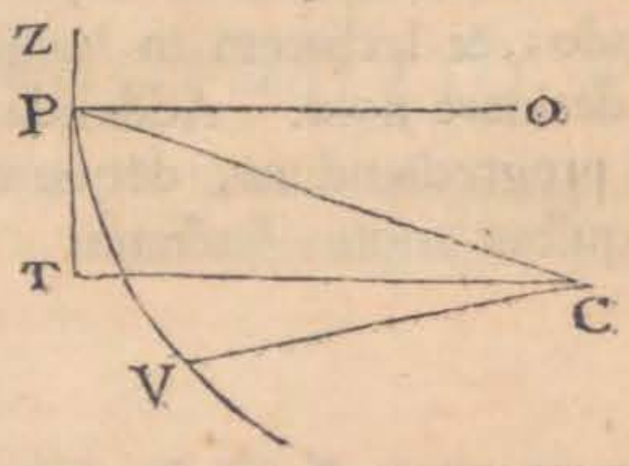
(u) * *Ac densitas medii.* Sit, exempli causâ, curva PQR spiralis Logarithmica & velocitas in loco quovis P ut $\frac{1}{SP^m}$, erit tempus quo describitur arcus PQ, ut $PQ \times SP^m$ (12); vis autem centripeta quæ (per cor. 4. Lem. X. lib. 1.) est ut Lineola TQ directè & quadratum temporis inversè erit ut $\frac{TQ}{PQ^2 \times SP^{2m}}$, id est, (per Lem. 3. hujus) ut $\frac{1}{SP^{2m+1}}$. Inventis tempore & velocitate, invenietur (ut in not. ad prop. 16.) resistentia ut $\frac{(1-m)VQ}{SQ \times PQ \times SP^{2m}}$, sivè ut $\frac{(1-m)OS}{OP \times SP^{2m+1}}$, & auferendo duplicatam velocitatis rationem $\frac{1}{SP^{2m}}$ erit densitas ut $\frac{(1-m)OS}{OP \times SP}$, sive ut $\frac{1}{SP}$. 157.

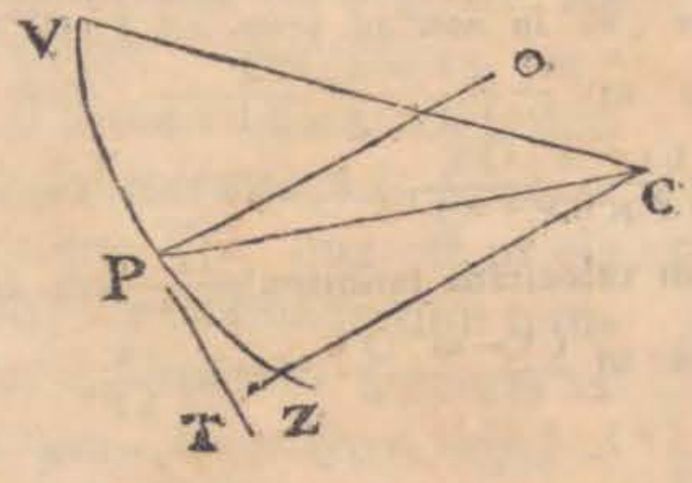
(x) * *Ut in propositione superiore.* Sit vis centripeta in P ut $\frac{1}{SP^{n+1}}$ & quoniam TQ est ut vis centripeta & quadratum temporis quo describitur arcus PQ, erit $TQ \times SP^{n+1}$, id est, (per Lem. 3.) $PQ^2 \times SP^n$ ut quadratum temporis, ideoque tempus ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & corporis velocitas quâ arcum PQ illo tempore describit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$ (11); determinatis autem tempore & velocitate, invenietur resistentia & densitas ut in notâ superiore.

De Motu Corporum.

PROBLEMA.

Vis centripeta tendens ad datum punctum C sit in loco quovis P ut distantiæ CP dignitas CP^n reciprocè, & medii resistentia sit ut medii densitas & velocitatis dignitas quælibet conjunctim, requiritur tum medii densitas in locis singulis quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ V P Z moveatur, tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis.



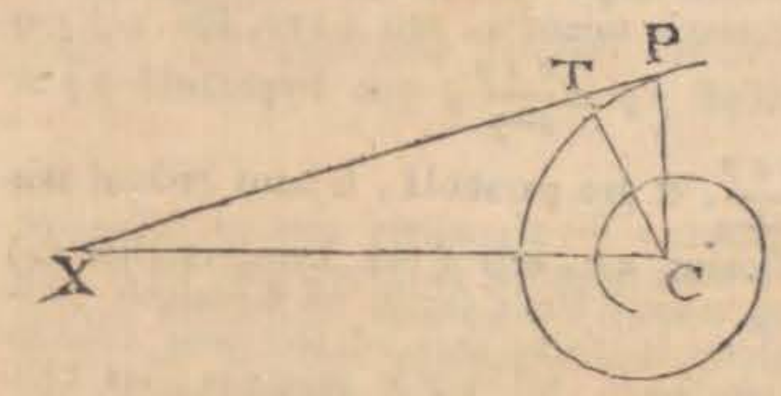


158. Dicantur vis centripeta in loco P, g, resistentia r, medii densitas k, velocitas corporis v, distantia P C, y, radius P O circuli curvam osculantis in P, R, arcus V P s; perpendiculum C T in tangentem P T ductum p, & a, b, n, m, quantitates datæ, erit (per hyp.) $g = \frac{a}{y^n}$, & $r = \frac{k v^m}{b}$, sed est semper (27) $vv = \frac{R p g}{y} = \frac{a R p}{y^{n+1}} = \frac{a p dy}{y^n dp}$. Velocitas igitur per alterutram ex his æquationibus dabitur. Porrò (26) $r = \frac{-v dv - g dy}{ds}$ $= \frac{-v dv}{ds} - \frac{a dy}{y^n ds}$, vel etiam (ibid.) $\pm r = \frac{-v dv \times \sqrt{yy - pp} - g dy \times \sqrt{yy - pp}}{y dy}$ $= \frac{-v dv \times \sqrt{yy - pp}}{y dy} - \frac{a \sqrt{yy - pp}}{y^{n+1}}$. Quarè si in alterutrâ harum æquationum loco $v dv$ scribatur ipsius valor, qui reperitur capiendo fluxionem æquationis $vv = \frac{a R p}{y^{n+1}} = \frac{a p dy}{y^n dp}$, obtinebitur resistentia r, seu $\frac{k v^m}{b}$, ejusque valore diviso per $\frac{v^m}{b}$ quod datum est inventâ velocitate v, dabitur medii densitas k. Q. E. I.

159. Exemplo sit spiralis Logarithmica. In illâ ob datum angulum T P C datur ratio P C ad C T seu y ad p; sit ergò $c : a = y : p$, & ideò $p = \frac{a y}{c}$; atque $dp = \frac{a dy}{c}$, & erit $vv = \frac{a p dy}{y^n dp} = \frac{p c}{y^n} = \frac{a}{y^{n-1}}$. Ex his verò habetur $\sqrt{yy - pp} = \frac{y \sqrt{cc - aa}}{c}$, & $v dv = \frac{(1-n) a dy}{2 y^n}$; undè pro corporis descensu invenitur $r = \frac{(3-n) a \sqrt{cc - aa}}{2 c y^n}$; & pro ascensu $r = \frac{(n-3) a \sqrt{cc - aa}}{2 c y^n}$, ideoque resistentia est reciprocè ut y^n. Cum autem (per hyp.) fit $r = \frac{k v^m}{b} = \frac{k a^{\frac{m}{2}}}{b y^{\frac{mn-m}{2}}}$, erit densitas k ut $r y^{\frac{mn-m}{2}}$, seu ut $\frac{y^{\frac{mn-m}{2}}}{y^n} = y^{\frac{mn-m-2n}{2}}$, & hinc si ponatur $m = 2$, erit densitas k, ut y^{-1}, seu ut $\frac{1}{y}$, prorsus ut (in prop. 16.) demonstratum est.

160. Coroll. 1. Per superiores æquationes (158) ex datâ corporis velocitate invenitur tum vis centripeta, tum resistentia

tia & medii denſitas. Eſt enim $g = \frac{vvy}{Rp}$ $= \frac{vvdp}{pdy}$; undè habetur vis centripeta g; datis autem vi centripetâ & celeritate, invenitur tum reſiſtentia r, tum medii denſitas k, ut ſupra (158).



161. Exemplum ſit in ſpirali hyperbolicâ cujus hæc eſt proprietas ut ſi per centrum C erigatur ad radium CP, perpendicularis CX tangenti PX per P ductæ occurrens in X ſit ſubtangens illa CX conſtans. Velocitas ſit ut tangens PX, & reſiſtentia r ut denſitas medii & quadratum velocitatis conjunctim, hoc eſt $r = \frac{kv^2}{b}$, dicaturque CX, c, & ideò $PX = \sqrt{yy+cc}$, atquè (per hyp.) $v = \frac{e\sqrt{yy+cc}}{c}$, & e, quantitas data. Erit ob triangula CPT, XPC ſimilia, $PX(\sqrt{yy+cc}) : CX(c) = PC(y) : CT(p)$, & ideò $p = \frac{cy}{\sqrt{yy+cc}}$, $dp = \frac{c^3 dy}{\overline{yy+cc}^{\frac{3}{2}}}$, & $\sqrt{yy-pp} = \frac{yy}{\sqrt{yy+cc}}$. Quarè fiet (160) $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{e^2}{y}$; id eſt, vis centripeta ut diſtantia PC reciprocè. Quia verò $vv = \frac{ee}{cc} \times (yy+cc)$ erit $vdv = \frac{eeydy}{cc}$ & propterea pro corporis deſcenſu $r = \frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy} + \frac{g\sqrt{yy-pp}}{y} = \frac{eeyy}{cc\sqrt{yy+cc}} + \frac{e^2}{\sqrt{yy+cc}} = \frac{e^2 \times yy+cc}{cc\sqrt{yy+cc}}$ $= \frac{e^2}{c^2} \times \sqrt{yy+cc}$, adeóque reſiſtentia ut tangens PX, ſeu ut velocitas. Cum igitur ſit $r = kv^2 = \frac{ke^2}{cc} \times (yy+cc) = \frac{e^2}{cc} \times \sqrt{yy+cc}$, erit denſitas medii $k = \frac{1}{\sqrt{yy+cc}}$, ſeu reciprocè ut tangens PX ſive reciprocè ut velocitas.

162. Coroll. 2. Datâ medii denſitate & conceſſis figurarum quadraturis, dabitur vis centripeta & corporis velocitas. Eſt enim (27. & 160.) $vdv + \frac{vvdp}{p} = -rds = \frac{kv^m ds}{b}$ (158) & dividendo per v^m, & multiplicando per p^{2-m}, fit $p^{2-m}v^{1-m}dv + v^{2-m}p^{1-m}dp = \frac{-kp^{2-m}ds}{b}$, & ſumptis utrinque fluentibus habetur, $\frac{1}{2-m} \times p^{2-m} \times v^{2-m} = -S.\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, ideòque $v^{2-m} = (m-2)\frac{S.kp^{2-m}ds}{b \times p^{2-m}}$. Quare ſi denſitas medii k, ſit ut functio quævis diſtantiæ PC à centro C, inveniri poterit fluens $S.kp^{2-m}ds$ aut algebraice aut per figurarum quadraturas, & loco ds, ſcribi poteſt $\pm \frac{ydy}{\sqrt{yy-pp}}$ (26). Inventâ autem velocitate v, obtinetur vis centripeta g per æquationem $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{vvy}{Rp}$ (160).

163. Cor. 3. Si in ſuperiori corollario ſit $m = 2$, id eſt, reſiſtentia ut denſitas & quadratum velocitatis conjunctim, erit $2-m = 0$, & æquatio $p^{2-m}v^{1-m}dv + v^{2-m}p^{1-m}dp = -\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, in hanc mutabitur $\frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = -\frac{kds}{b}$; undè ſumptis fluentibus, habetur $L.v + L.p = -S.\frac{kds}{b}$, & $L.v = -S.\frac{kds}{b} - L.p$, ex quâ æquatione invenitur v, & hinc habetur g ut ſuprà.

DE MOTU CORPORUM.

164. Cor. 4. Sit in Hypothesi coroll. 3. densitas medii k uniformis, velocitas corporis in loco dato $v=c$, & perpendiculum p in eodem loco $=q$ datæ, erit $L.v=-\frac{ks}{b}-L.p+Q$, & quia in loco V, fit $s=0$, $v=c$, $p=q$, erit $Q=L.c+L.q=L.cq$. Et hinc $L.v=L.\frac{cq}{p}-\frac{ks}{p}$. Ponatur $L.h=1$, ut sit $L.v=L.\frac{cq}{p}-\frac{ks}{b}\times L.h=L.\frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$. Undè deducitur $v=\frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$, $vv=\frac{c^2q^2}{p^2h^{\frac{2ks}{b}}}$, & hinc $g=\frac{vvy}{Rp}=\frac{c^2q^2y}{Rp^3h^{\frac{2ks}{b}}}$, vel $g=\frac{vvdp}{pdy}=\frac{c^2q^2dp}{p^3h^{\frac{2ks}{b}}dy}$.

165. Cor. 5. In his autem omnibus inveniri potest tempus per æquationem $ds=\frac{ds}{v}$, seu $s=S.\frac{ds}{v}$ (13).

166. Cor. 6. Datâ vi centripetâ & resistentiâ ac densitate medii, inveniri potest æquatio ad trajectoriam Z P V quam corpus projectile circà centrum virium C describit. Sit, exempli gratiâ, medium uniforme, resistentia ut quadratum velocitatis & vis centripeta $=\frac{a}{y^n}$ & (164) erit $\frac{a}{y^n}=\frac{c^2q^2dp}{p^3h^{\frac{2ks}{b}}dy}$, ideoque $h^{\frac{2ks}{b}}=\frac{c^2q^2y^ndp}{ap^3dy}$, & $L.h^{\frac{2ks}{3}}=\frac{2ks}{b}=L.\frac{c^2q^2y^ndp}{ap^3dy}$; capiantur utrinque fluxiones, factâ dy constante, & fiet (26) $\frac{2kds}{b}\left(=\pm\frac{2kydy}{b\sqrt{yy-pp}}\right)=\frac{ndy}{y}+\frac{ddp}{dp}-\frac{3dp}{p}$ (Notum supponimus (40). quantitatis cujusvis Logarithmicæ $L.z$ fluxionem esse $\frac{dz}{z}$). Hinc verò habetur $\frac{2ks}{b}=L.y+L.dp-3L.p-\frac{L.dy.}{Q}$, ubi $\frac{dy}{Q}$, est quantitas constans, ideoque fit $\frac{2ks}{b}=L.y^n+L.\frac{Qdp}{dy}-L.p^3=L.\frac{Qy^ndp}{p^3dy}$; & hinc $h^{\frac{2ks}{b}}=\frac{Qy^ndp}{p^3dy}$, æquatio ad trajectoriam.

167. Schol. Si curva V P Z sit sectio conica cujus umbilicus C axis major c semiaxis minor e, erit (276. lib. 1.) pro ellipsi $pp=\frac{eey}{c-y}$; pro hyperbolâ $pp=\frac{eey}{c+y}$, & pro parabolâ, si latus rectum axis dicatur $4e$, erit (per Lem. 14. lib. 1.) $pp=ey$. Undè facile est superioris problematis solutiones ad sectiones conicas transferre. Sit V P Z parabola, vis centripeta $g=\frac{a}{y^n}$, resistentia $r=\frac{kv^2}{b}$, & quæratur tum corporis velocitas tum resistentia & medii densitas in loco quovis P. Quoniam $pp=ey$, erit $2pdp=edy$, $dp=\frac{edy}{2p}$, $\frac{p}{dp}=\frac{2pp}{edy}=\frac{2y}{dy}$; undè fit (158) $vv=\frac{apdy}{y^ndp}=\frac{2a}{y^{n-1}}$; Hinc verò habetur $vdv=\frac{(1-n)ady}{y^n}$, atquè ideò pro corporis descensu (158) $r=\frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy}+\frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}}=\frac{(2a-na)\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; & pro ascensu $r=\frac{(na-2a)\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; resistentia igitur est semper ut $\frac{PT}{PC^{n+1}}$; porrò est (per hyp.) $r=\frac{kv^2}{b}=\frac{2ak}{by^{n+1}}=(2a-na)\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$, vel $=(na-2a)\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; Quarè erit medii densitas k, ut $\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^2}$, seu ut $\frac{PT}{PC^2}$. Et simili modo in ellipsi & hyperbolâ invenitur medii densitas ut $\frac{PT}{PC^2}$. At in circulo fit $PT=0$, ideóque medii densitas & resistentia nulla.

Evan-

SECTIO V.

De denſitate & compreſſione fluidorum, deque hydroſtaticâ. (†)

Definitio Fluidi.

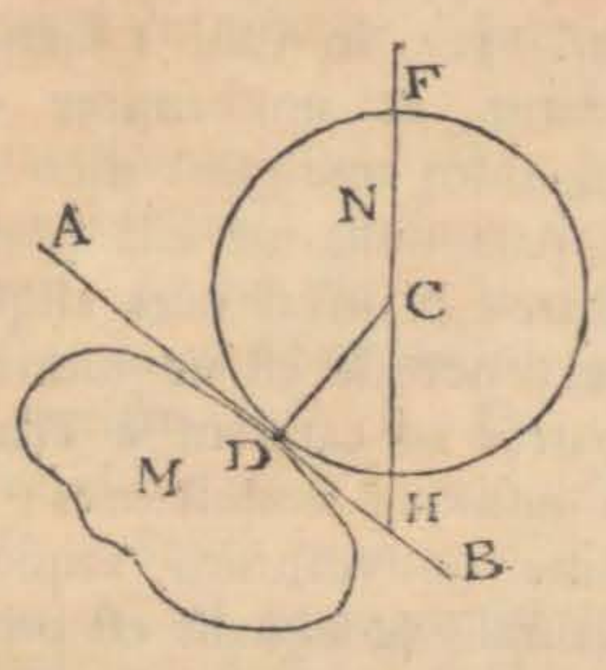
Fluidum eſt corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moventur inter ſe.

Evaneſcit quoque reſiſtentia, ſi $n = 2$, id eſt, ſi vis centripeta ſit ut quadratum diſtantiæ reciprocè, quo caſu ſectiones conicæ, ut lib. 1°. demonſtratum eſt, in medio non reſiſtente deſcribuntur. Si n eſt numerus binario minor, ſectiones conicæ per deſcenſum deſcribi poſſunt; per aſcenſum verò ſi n, binario major. Tandem ubi eſt $n = 1$, hoc eſt, vis centripeta diſtantiæ PC, reciprocè proportionalis, velocitas in parabolâ ſicut & in ſpirali Logarithmicâ uniformis eſt.

(†) 168. *Hydroſtatica* eſt ſcientia preſſionum quas fluida vel ipſorum partes in ſe mutuò vel in corpora ſolida exercent.

169. *Fluidum homogeneum* dicitur, cujus denſitas eſt uniformis, adeò ut nimirum æqualis materiæ quantitas ſub voluminibus æqualibus ubique per totam fluidi maſſam contineatur, *fluidum heterogeneum* appellatur cujus denſitas uniformis non eſt.

170. *Gravitas ſpecifica* corporis eſt ratio ponderis ejuſdem ad volumen; ità ut corpora ejuſdem gravitatis ſpecificæ dicantur quæ ſub æqualibus voluminibus æquale pondus habent; ſpecificè graviora vel leviora quæ ſub æqualibus voluminibus majus vel minus pondus continet; Quarè cum denſitas ſit ratio maſſæ ad volumen corporis (2. lib. 1.) ubi pondera ſunt ut maſſæ, gravitates ſpecificæ ſunt ut denſitates.



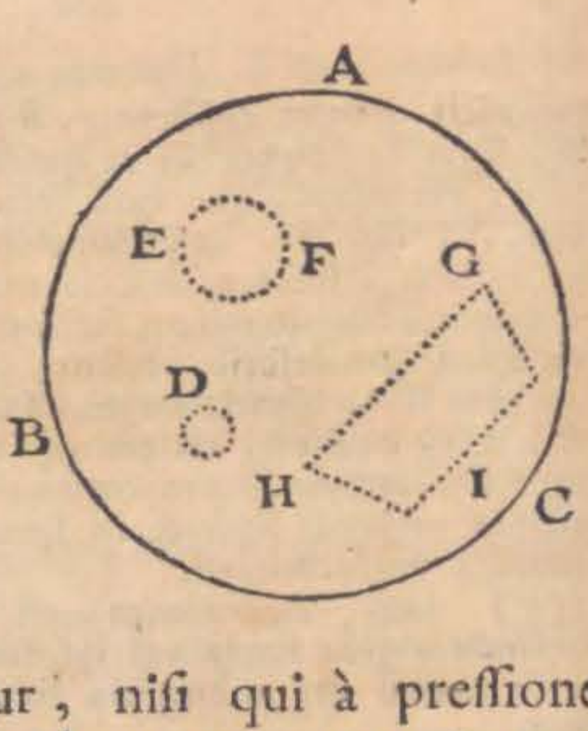
171. Lemma. *Preſſiones quas corpora quævis in ſe mutuò exercent, fiunt juxtà directiones communi plano contingenti perpendiculares, & per punctum contingentiæ eorumdem corporum tranſeunt.* 171.

Corpus N vi quâlibet ſecundum directionem FC urgeatur, tangaturque in D à corpore M; producatur FC ut plano AB quod utrumque corpus contingit in D occurrat in H, ductâ per D rectâ DC ad planum AB perpendiculari, vis quâ corpus N urgetur, exponatur per lineam CH, & hæc (per leg. mot. cor. 2.) reſolvi poterit in vires æquipollentes CD & DH. Sed corpus M minimè premitur vi DH ſecundum directionem plani contactûs agente; quarè ſolâ vi CD ad planum AB normali & per punctum contactûs D tranſeunte premitur. Q. E. D.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vaſe quocunque immoto claditur & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſitâ condenſationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum conſideratione) æqualiter premuntur undique, & ſine omni motu à preſſione illâ orto permanent in locis ſuis.



Caſ. 1. In vaſe ſphærico *A B C* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejuſdem pars nulla ex illâ preſſione movebitur. Nam ſi pars aliqua *D* moveatur, neceſſe eſt ut omnes hujuſmodi partes ad eandem à centro diſtantiam undique conſiſtentes, ſimili motu ſimul moveantur; atque hoc ideo quia ſimilis & æqualis eſt omnium preſſio, & motus omnis excluſus ſupponitur, niſi qui à preſſione illâ oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propius accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur; contra hypotheſin. Non poſſunt longiùs ab eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur; etiam contra hypotheſin. Non poſſunt ſervatâ ſuâ à centro diſtantiâ moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non poteſt pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco ſuo movebitur. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Dico jam, quod fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim *E F* pars ſphærica fluidi, & ſi hæc undique non premitur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſque dum ipſa undique permatur æqualiter; & partes ejus, per caſum primum, permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebant in locis ſuis, per caſum eundem primum, & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis,

per

per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falsò dicebatur quod ſphæra *E F* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.* LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XIX. THEOR. XIV.

Caſ. 3. Dico præterea quod diverſarum partium ſphæricarum æqualis ſit preſſio. Nam partes ſphæricæ contiguæ ſe mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus legem III. Sed &, per caſum ſecundum, undique premuntur eâdem vi. Partes igitur duæ quævis ſphæricæ non contiguæ, (a) quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque, prementur eâdem vi. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi poſſunt à partibus ſphæricis in punctis quibuſcunque, & ibi partes illas ſphæricas æqualiter premunt, per caſum 3. & viciſſim ab illis æqualiter premuntur, per motus legem tertiam. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vaſe claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus ſe mutuo æqualiter premant & quieſcant inter ſe; manifeſtum eſt quod fluidi cujuſcunque *GHI*, quod undique premitur æqualiter, partes omnes ſe mutuo premunt æqualiter, & quieſcunt inter ſe. *Q. E. D.*

Caſ. 6. Igitur ſi fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter; cedet idem preſſioni fortiori, per definitionem fluiditatis.

Caſ. 7. Ideoque in vaſe rigido fluidum non ſuſtinebit preſſionem fortiorem ex uno latere quàm ex alio, ſed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quam primum à parte magis preſſâ recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; redu-

(a) * *Quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque.* Nam pars illa intermedia duas alias partes ſphæricas in punctis contactûs premet atque ab illis premetur æqualiter, (ex dem.). 171.

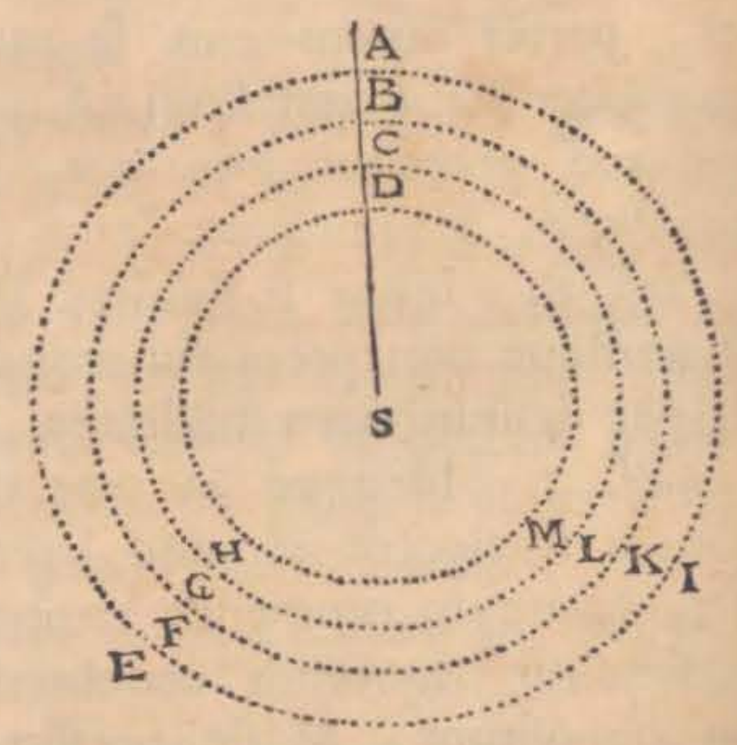
De Motu Corporum.

reducetur preſſio undique ad æqualitatem, in momento temporis, ſine motu locali: & ſubinde partes fluidi, per caſum quintum, ſe mutuò prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externâ ſuperficie illatam, mutari poſſunt, niſi quâtenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intenſiùs vel remiſſiùs ſeſe premendo difficiliùs vel faciliùs labuntur inter ſe.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

Si (b) *fluidi ſphærici, & in æqualibus à centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.*



Sit *DHM* ſuperficies fundi, & *AEI* ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris *BFK*, *CGL* diſtinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema *AE* vi ſimplici gravitatis propriæ, quâ & omnes

(b) 172. *Si fluidi ſphærici &c.* Fluidi quieſcentis ſuperficies ad gravitatis directionem perpendicularis eſt ubique, & ideo ſi vis gravitatis ad centrum unum dirigatur, ſphærica eſt. Si enim ſuperficiei fluidi pars aliqua ad gravitatis directionem inclinata ſit, reſolvatur vis gravitatis in duas vires quarum una directionem habeat ſuperficiei fluidi perpendicularem, altera parallelam; & (ex definitione) fluidum ſecundum hanc directionem movebitur, contra hyp. Erit igitur pars quælibet

nes orbis ſupremi partes & ſuperficies ſecunda *BFK* (per prop. XIX.) pro (c) menſurâ ſuâ æqualiter premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit preſſionem duplam. Hâc preſſione, pro menſurâ ſuâ, & inſuper vi propriæ gravitatis, id eſt, preſſione triplâ urgetur ſuperficies tertia *CGL*. Et ſimiliter preſſione quadruplâ urgetur ſuperficies quarta, quintuplâ quintâ, & ſic deinceps. Preſſio igitur quâ ſuperficies unaquæque urgetur, non eſt ut quantitas ſolida fluidi incumbentis, ſed ut numerus orbium ad uſque ſummitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc eſt, gravitati ſolidi cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (ſi modo orbium augeatur numerus & minuatur craſſitudo in infinitum, ſic ut actio gravitatis à ſuperficie infimâ ad ſupremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Suſtinet ergo ſuperficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* (d) Et ſimili argumentatione patet propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quâvis aſſignatâ diſtantiæ à centro, ut & ubi fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur à toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet quæ in propoſitione deſcribitur; pondere reliquo à fluidi figurâ fornicatâ ſuſtentato.

Co-

libet ſuperficiei ad gravitatis directionem perpendicularis: & quoniam nulla eſt alia ſuperficies, præter ſphæricam, quæ hanc habeat proprietatem, ut lineæ omnes ipſi perpendiculares ad centrum unum concurrant, ſuperficies illa fluidi ſphærica erit. Q. E. D.

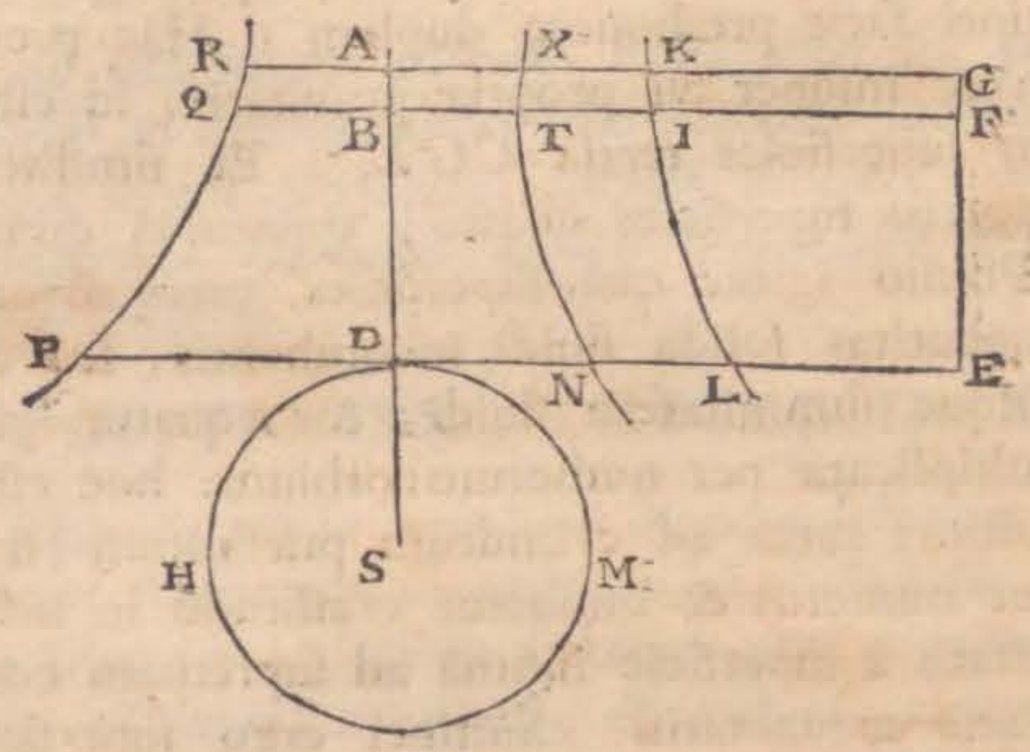
(c) * *Pro menſurâ ſuâ æqualiter premuntur.* Singulæ, nimirum, ſuperficiei ſecundæ partes, ſemotâ partium illarum propriâ gravitate, æque premuntur ac partes æquales ſuperficiei ſupremæ; quod per Prop. XIX. manifeſtum fit, ſi ſpatium quod illas ſuperficies continet tanquam vas aliquod conſideretur quod fluidum æqualiter undique compreſſum complectitur.

(d) * *Et ſimili argumentatione &c.* Patet ut in ſuperiori demonſtratione, quod pondus partium omnium æqualium D, C, B, A in totâ rectâ DA exiſtentium ſuſtineatur à parte D correſpondente fundi ſphærici DHM. Hoc igitur fundum ſuſtinet pondus cylindri, cujus baſi æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis DA; modo tamen in locis à fundo ſphærico DHM & à baſi planâ cylindri æquidiſtantibus, eadem ſervetur fluidi denſitas, eademque vis gravitatis quæ in baſim cylindri perpendiculariter tendat ubique.

172.

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 2. In æqualibus autem à centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive (c) ſuperficies preſſa ſit hori-



173. Deſignet DAGE prædictum cylindrum, cujus baſis DE æqualis ſit fundo ſphærico DHM. Per punctum D, & per puncta B & A infinitè propinqua ductæ ſint rectæ DE, BF & AG perpendiculares ad AS; in illis perpendicularibus capiantur DL, BI, AK denſitatibus fluidi & DN, BT, AX viribus gravitatis acceleratricibus in locis D, B, A proportionales, ſintque curvæ LIK & NTX loca punctorum L, I, K, & N, T, X. Producatur KA in R, ut ſit ſemper AR rectangulo AX×AK proportionalis, & RQP curva quam punctum R perpetuo tangit: & preſſio fluidi in fundum ſphæricum DHM erit ut fundum DHM & area DARP conjunctim. Nam preſſio fluidi cylindrulo BAGF contenti in baſim DE eſt ut quantitas materiæ in vim gravitatis ſingularum particularum ducta (per definit. VIII. lib. 1.). Quantitas materiæ cylindro BAGF contenta eſt ut cylindrus BAGF & denſitas conjunctim (2. lib. 1.), id eſt, ut baſis cylindri DE & rectangulum AB×AK. Quare preſſio fluidi cylindro BAGF contenti eſt ut baſis DE & ſolidum AB×AK×AX, ſeu ut baſis DE & rectangulum AB×AR conjunctim. Dividatur tota fluidi altitudo DA in parte innumeras ut AB, & erit preſſio fluidi totius in baſim cylindri DE vel in fundum ſphæricum DHM, ut baſis DE vel fundum DHM & area DARP conjunctim. Q. E. D.

Si vis acceleratrix gravitatis conſtans ſit, curva XTN in rectam lineam mutabitur axi AD parallelam, eritque proinde preſſio fluidi in fundum DHM, ut fundum hoc & area DAKL conjunctim; in hâc enim hypotheſi, ob datam AK, area DARP proportionalis eſt areæ DAKL.

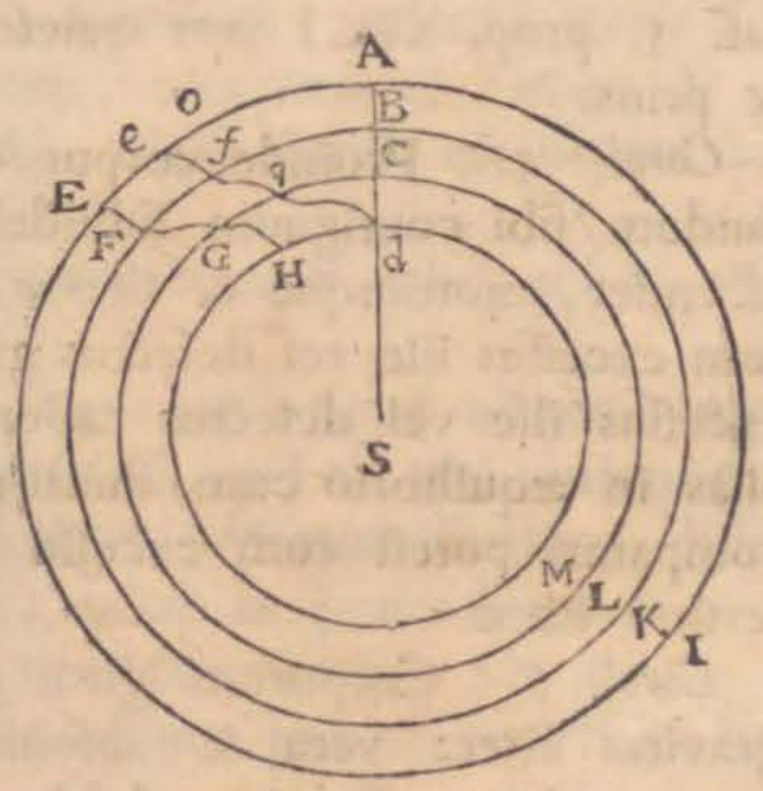
Si vis gravitatis & denſitas fluidi conſtantes ſint, curvæ XIN, KIL & KQP in rectas lineas axi AD parallelas migrant; & ideo preſſio fluidi in fundum ſphæricum DHM, vel in baſim cylindri DE, eſt ut fundum illud DHM, vel baſis DE, & altitudo fluidi AD conjunctim. Si vero conferantur liquores in ſe homogenei, ſed diverſæ inter ſe denſitatis, preſſiones erunt in ratione compoſitâ baſium, altitudinum & denſitatum, modo gravitas acceleratrix conſtans, ſit in utroque liquore æqualis; nam ſi inæqualis eſſet, preſſiones forent in ratione compoſitâ baſium, altitudinum, denſitatum & virium gravitatis.

(c) * *Sive ſuperficies preſſa ſit horizonti &c.* * Sumatur quævis particula inter duos orbes concentricos BFK, CGL, illa

zonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; ſive (f) fluidum, à ſuperficie preſſâ ſurſum continuatum, ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam rectam, vel ſerpit obliquè per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maximè irregulares, amplas vel anguſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur, applicando demonſtrationem theorematis hujus ad caſus ſingulos fluidorum.

Corol. 3. Eâdem demonſtratione colligetur etiam (per prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex preſſione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter ſe; ſi modo excludatur motus qui ex condenſatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ cor-



173.

illa particula per caſum 5. Prop. XIX. undique æqualiter premitur, ergo per motus Leg. III. undique æqualiter premit, ſubſtituatur itaque loco particulæ cujuſvis hanc contingentis ſuperficies quævis, ſive horizontalis, ſive perpendicularis, ſive obliqua, æqualis erit in eam preſſionis quantitas: *Ergo in æqualibus à centro diſtantiis &c.*

(f) * *Sive fluidum à ſuperficie preſſâ &c.* Si fluidum vaſe utlibet irregulari EFGHdgfe contineatur, vaſis fundum Hd ſuſtinebit pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi Hd, & altitudo DA eadem quæ fluidi in vaſe contenti. Iiſdem enim poſitis, quæ in demonſtratione propoſitionis hujus, premitur ſuperficies ſuprema Ee vi ſimplici gravitatis propriæ, quâ & ſuperficies ſecunda Ff pro menſura ſua æqualiter premitur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda Ff vi propriâ gravitatis, quæ addenda eſt vi priori. Hâc preſſione, pro menſurâ ſuâ, & inſuper vi propriæ gravitatis, urgetur ſuperficies tertia Gg; & ſic deinceps. Quare patet, ut ſupra, preſſionem quam ſuperficies infima Hd ſubit, æqualem eſſe ponderi cylindri cujus eſt altitudo DA & baſis fundo Hd æqualis.

Manente igitur tum baſi Hd, tum fluidi altitudine perpendiculari DA, manet fluidi in baſim preſſio, utcumque mutetur vaſis fluidum continentis figura. Atque hinc in vaſis communicantibus æquilibrium eſt, ubi perpendiculares fluidi altitudines ſupra fundum commune in utroque vaſe æquantur, dummodo in paribus à centro virium gravitatis S diſtantiis tam fluidi denſitas quam vis gravitatis ſervetur eadem. Nam ſi, manente vi gravitatis acceleratrice, conferantur fluida in ſe homogenea, ſed diverſæ inter ſe denſitatis, erit in vaſis communicantibus æquilibrium, ubi fluidorum in utroque vaſe altitudines perpendiculares erunt in ratione denſitatum reciprocâ, quia in eo caſu fluidorum in baſim communem preſſiones æquales ſunt (173).

DE MOTU CORPORUM.

corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si ſphæricum eſt manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt manebit quadratum: idque ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive fluido liberè innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magnitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret & indueret formam fluidi; hoc, ſi prius aſcenderet vel deſcenderet vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet vel deſcenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum cauſæ permanent. Atqui (per caſ. 5. prop. XIX.) jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod ſpecificè gravius eſt quam fluidum ſibi contiguum ſubſidebit, & quod ſpecificè levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus, aliàs in æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutrâ libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt gravitas altera vera & abſoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas abſoluta eſt vis tota quâ corpus deorſum tendit: relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis quo corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis ſuis, id eſt, inter

ſe

ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent. Quæ in aëre ſunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quâtenus aëris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quam exceſſus verorum ponderum ſupra pondus aëris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minus gravia, aërique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparativè levia ſunt, non verè, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in aquâ corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparativè & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ vel ab eâ ſuperatur. Quæ verò nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparativè tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aquâ. Nam ſimilis eſt horum caſuum demonſtratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde ſi medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel à gravitate propriâ, vel ab aliâ quâcunque vi centripetâ, & corpus ab eâdem vi urgeatur fortius; differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus à vi illâ urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifugâ haberi debet.

Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora incluſa non mutent eorum figuras externas, patet inſuper (per corollarium prop. XIX.) quod non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe: proindeque, ſi animalia immergantur, & ſenſatio omnis à motu partium oriatur; nec lædent corpora immerſa, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quâtenus hæc corpora à compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum ſyſtematis fluido comprimente circundati. Syſtematis

DE MOTU CORPORUM.

partes omnes iisdem agitabuntur motibus; ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quâtenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

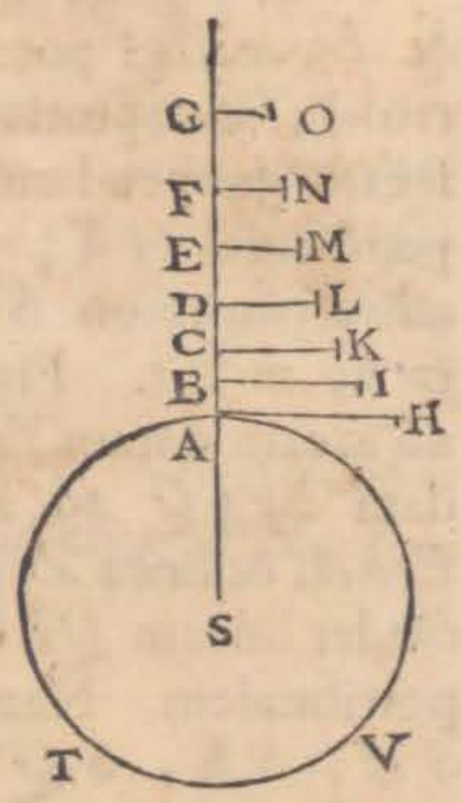
Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus à vi centripetâ distantiis suis à centro reciprocè proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantiæ illæ sumantur continuè proportionales, densitates fluidi in iisdem distantiis erunt etiam continuè proportionales.

Designet ATV fundum sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE, SF, &c distantias continuè proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c. quæ sint ut densitates medii in locis A, B, C, D, E, F; & (g) specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, (h) quod perinde est, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, à B ad C, à C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D, &c. (i) Et hæ gra-

(g) 174. *Et specificæ gravitates &c.* Fluidi enim cujus singulæ particulæ vi gravitatis urgentur gravitas specifica est ut densitas & vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Est enim gravitas specifica ut pondus directè & volumen inverse (170); Sed pondus (per defin. VIII. lib. 1.) est ut quantitas materiæ & vis gravitatis acceleratrix conjunctim; quantitas verò materiæ (2. lib. 1.) est ut densitas & volumen conjunctim. Quare, conjunctis his rationibus, gravitas specifica est ut densitas & vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Q. E. D.

(h) * *Vel, quod perinde est, ut &c.* Cum enim (per hyp.) distantiæ SA, SB, SC, SD &c. sint continuè proportionales, earum differentiæ AB, BC, CD &c. ipsis proportionales erunt.

(i) * *Et hæ gravitates ductæ &c.* Nam si pondus quod fundum sphæricum ATV sustinet, exponatur per cylindrum cujus basis æqualis sit superficiei ATV & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis, volumen fluidi cylindrici pro altitudine AB erit $ATV \times AB$, ideoque ob datam superficiem ATV, erit volumen illud ut AB, multiplicetur illud per gravitatem specificam & factum erit ut pondus seu pressio; quare cum (ex demonst.) gravitas specifica sit ut $\frac{AH}{AB}$, pressio fluidi



gravitates ductæ in altitudines *A B*, *B C*, *CD*, &c. conficient preſſiones *A H*, *B I*, *C K*, &c. quibus fundum *A T V* (juxta theorema xv.) urgetur. Suſtinet ergo particula *A* preſſiones omnes *A H*, *B I*, *C K*, *D L*, ([k]) pergendo in infinitum; & particula *B* preſſiones omnes præter primam *A H*; & particula *C* omnes præter duas primas *A H*, *B I*; & ſic deinceps: ideoque particulæ primæ *A* denſitas *A H*, eſt ad particulæ ſecundæ *B* denſitatem *B I* ut ſumma omnium $AH+BI+CK+DL$, in infinitum, ad ſummam omnium $BI+CK+DL$, &c. Et *B I* denſitas ſecundæ *B* eſt ad *C K* denſitatem tertiæ *C*, ut ſumma omnium $BI+CK+DL$, &c. ad ſummam omnium $CK+DL$, &c. Sunt igitur ſummæ illæ differentiis ſuis *A H*, *B I*, *C K*, &c. proportionales, atque ideo continuè proportionales (per hujus lem. 1.) proindeque differentiæ *A H*, *B I*, *C K*, &c. ſummis proportionales, ſunt etiam continuè proportionales. Quare cum denſitates in locis *A*, *B*, *C*, &c. ſint ut *A H*, *B I*, *C K*, &c. erunt etiam hæ continuè proportionales. Pergatur per ſaltum, & ex æquo in diſtantiis *S A*, *S C*, *S E* continuè proportionalibus, erunt denſitates *A H*, *C K*, *E M* continuè proportionales. Et eodem argumento, in diſtantiis quibuſvis continuè proportionalibus *S A*, *S D*, *S G*, denſitates *A H*, *D L*, *G O* erunt continuè proportionales. Coeant jam puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. eo ut progreſſio gravitatum ſpecificarum à fundo *A* ad ſummitatem fluidi continua reddatur, & in diſtantiis quibuſvis continuè proportionalibus *S A*, *S D*, *S G*, denſitates *A H*, *D L*, *G O*, ſemper exiſtentes continuè proportionales, manebunt etiamnum continuè proportionales. *Q. E. D.*

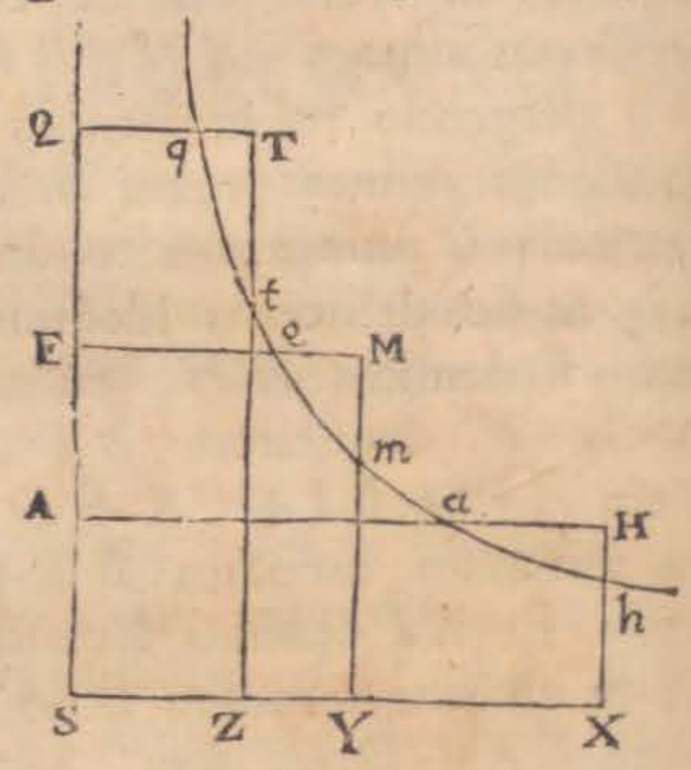
Co-

di cylindrici, cujus eſt altitudo A B, erit ut A H; & ita de cæteris.

([k]) 175. * *Pergendo in infinitum.* Quoniam enim (per hyp.) denſitas compreſſioni proportionalis eſt, ubi compreſſio nulla evadit, evaneſcit quoque denſitas, ſeu, fluidum fit infinitè rarum, ac proinde in infinitum expanditur; cum ratio voluminis ad materiæ quantitatem infinita evadat (2. lib. 1.).

DE MOTU CORPORUM.

Corol. Hinc si detur densitas fluidi in duobus locis, putà *A* & *E*, colligi potest ejus densitas in alio quovis loco *Q*. Centro *S*, asymptotis rectangulis *SQ*, *SX* describatur hyperbola secans perpendicula *AH*, *EM*, *QT* in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula *HX*, *MY*, *TZ*, ad asymptoton *SX* demissa, in *h*, *m* & *t*. Fiat area *YmtZ* ad aream datam *YmhX* ut area data *EeqQ* ad aream datam *EeaA*; & linea *Zt* producta abscindet lineam *QT* densitati proportionalem. Namque si lineæ *SA*, *SE*, *SQ* sunt continuè proportionales, (l) erunt areæ *EeqQ*, *EeaA* æquales, & inde areæ his proportionales *YmtZ*, *XhmY* etiam æquales, & lineæ *SX*, *SY*, *SZ*, id est, *AH*, *EM*, *QT* (m) continuè proportionales, ut oportet. Et si lineæ *SA*, *SE*, *SQ* obtinent alium quemvis ordinem in serie continuè proportionalium, lineæ *AH*, *EM*, *QT*, ob proportionales areas hyperbolicas, (n) obtinebunt eundem ordinem in aliâ serie quantitatum continuè proportionalium.



PRO-

(l) * *Erunt areæ EeqQ, EeaA æquales*, per not. 379. lib. 1.

(m) * *Continue proportionales*, (379. lib. 1.)

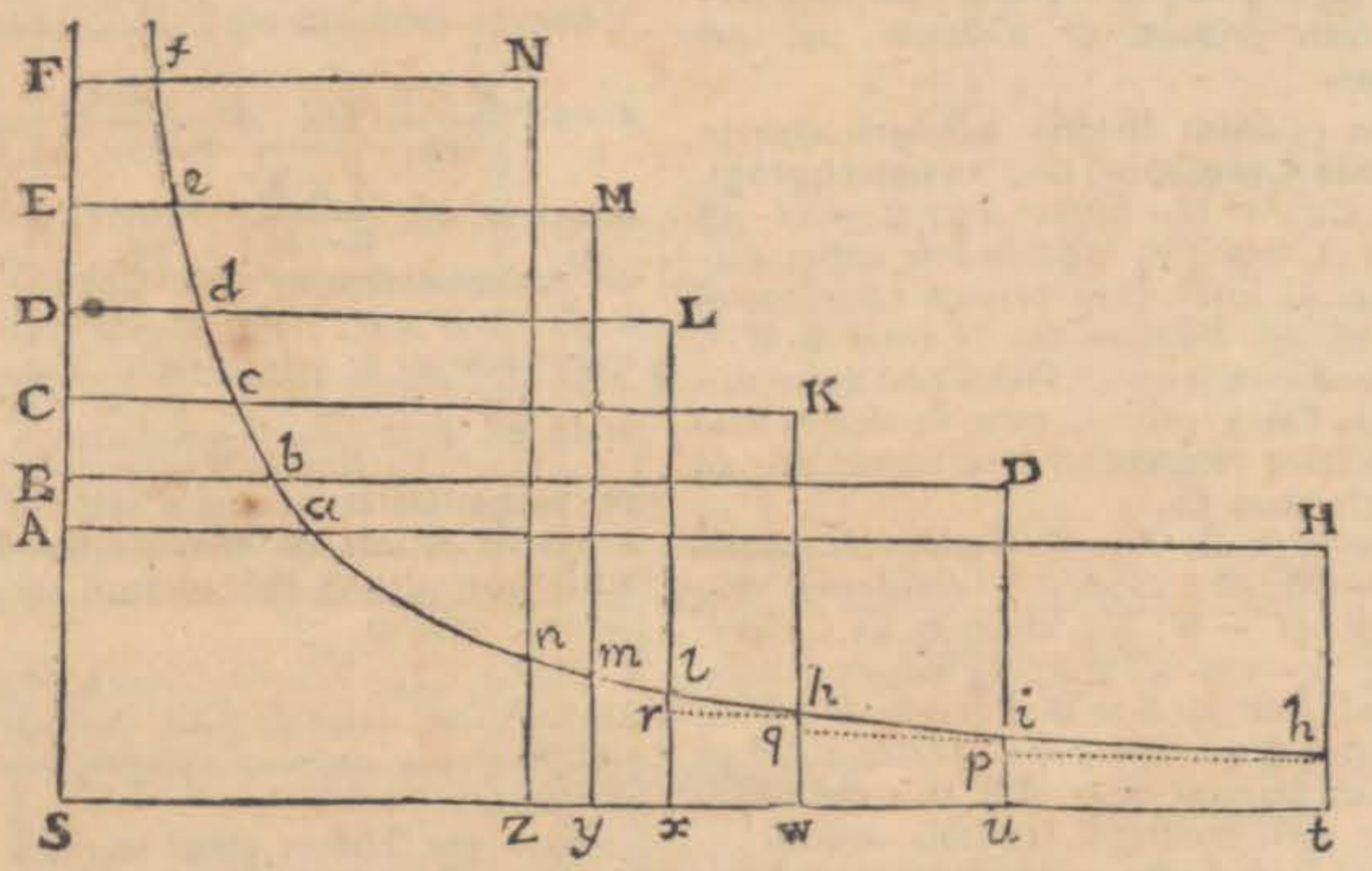
(n) * *Obtinebunt eumdem ordinem &c.* * Etenim areæ Hyperbolicæ EeaA, QqaA sunt Logarithmi linearum SE, SQ, & pariter areæ VmtZ, XhtZ sunt Logarithmi linearum SY, SX, (379, 389, lib. 1.) sed cum areæ YmtZ, XhtZ sint per constructionem proportionales areis EeaA, QqaA, illæ areæ YmtZ, XhtZ per Doctrinam Logarithmorum (n. 38) poterunt esse Logarithmi linearum SE, SQ; cum ergo eædem quantitates possint esse Logarithmi tam quantitatum SE, SQ, quam quantitatum SY, SX oportet ut istæ quantitates SE, SY & SQ, SX correspondentia loca occupent in Progressionibus Geometricis ad quas pertinent.

LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXII. THEOR. XVII.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

Sit fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus à gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum à centro reciprocè proportionali deorſum trahantur: dico quod, (o) ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione muſicâ, denſitates fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione geometricâ.

Deſignet *S* centrum, & *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* diſtantias in progreſſione geometricâ. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*,



CK, &c. quæ ſint ut fluidi denſitates in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*,

(o) * *Quod ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione muſica*, aut, quod idem eſt, ſi tales ſumantur diſtantiæ ut earum reciprocæ ſint in progreſſione arithmeticâ.

* Scilicet tres quantitates dicuntur eſſe in continuâ proportione Muſicâ ſive Harmonicâ ſi prima ſit ad tertiam ut differentia primæ & ſecundæ ad differentiam ſecundæ & tertiæ. Et ſi ſit ſeries plurium quantitatum talium ut terminus quivis ſit ad ſubſequentem, ut differentia prioris à termino intermedio, ad differentiam hujus intermedii à poſteriore termino, ea ſeries dicitur *Progreſſio Muſica.* 175.

Cor. 1. *In progreſſione Muſicâ factum duorum priorum terminorum eſt ad factum duorum quorumvis immediatè ſibi ſuccedentium ut differentia inter duos primos terminos ad differentiam inter hos ultimos.* Nam ſumto termini progreſſionis Muſicæ *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* &c. & differentiæ inter ſingulos *M*, *N*, *P*, *Q*, *R* &c. erit per definitionem hujus progreſſionis

DE MOTU CORPORUM.

E, &c. & ipſius gravitates (P) ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, ſecundam à B ad C, tertiam à

$A : C = M : N$
$B : D = N : P$
$C : E = P : Q$
$D : F = Q : R$, unde ex compoſitione rationum patet quod eſt
$A \times B : E \times F = M : R$.

Cor. 2. *Differentia inter duos primos terminos eſt ad differentiam inter duos quoſvis alios, ut ſecundus terminus, toties mulctatus differentiâ ſua à primo quot ſunt termini inter primum & ultimum, ad eum ultimum.*

Nam (iiſdem litteris adhibitis quæ in ſuperiore Corollario) cum ex naturâ progr. ſit $A:C=M:N$, ſitque $A = B - M$, eſt $B - M : C = M : N$, ergo in hoc caſu, differentia M inter duos primos terminos A & B eſt ad differentiam N inter B & C ut ſecundus terminus B ſemel mulctatus differentiâ ſuâ à primo, cum ſit unicus terminus inter primum A & ultimum C, ad eum ultimum C.

Cum ergo ſit $B - M : C = M : N$, viciſſim $B - M : M = C : N$, & dividendo $B - 2M : M = C - N : N$; cumque ſit $C - N = B$, eſt $B - 2M : M = B : N$, ſed, per defin. progreſſ. eſt $B : N = D : P$ ergo $B - 2M : M = D : P$ & viciſſim $B - 2M : D = M : P$, ſunt verò duo termini inter A & D unde rurſus in hoc caſu conſtat Corollarii veritas.

Item cum ſit $B - 2M : D = M : P$ & viciſſim $B - 2M : M = D : P$, erit dividendo $B - 3M : M = D - P : P$, cumque ſit $D - P = C$ erit $B - 3M : M = C : P$ cumque per defin. progr. ſit $C : P = E : Q$ erit $B - 3M : M = E : Q$ & viciſſim $B - 3M : E = M : Q$, ſunt verò inter A & E tres termini: Cumque eadem recurrat ſemper demonſtratio ſi numerus terminorum progreſſionis inter primum & ultimum ſit n; ſi ſecundus terminus dicatur B, differentia à primo M, ultimus terminus ſit F, differentiâ a præcedente R erit, $M : R = B - nM : F$. Q. E. Dem.

Cor. 3. *In Progreſſione Muſicâ ſecundus terminus toties mulctatus ſuâ differentiâ à primo quot ſunt termini inter eum & ultimum eſt ad ultimum ut factum duorum primorum terminorum progreſſionis ad factum duorum poſtremorum.*

Liquet utique ex collatione duorum præcedentium Corollariorum; unde eſt ſemper $B - nM : F = A \times B : E \times F$.

Theor. I. *Quilibet terminus progreſſionis Muſicæ eſt æqualis facto duorum primorum terminorum diviſo per ſecundum terminum toties mulctatum differentiâ ſuâ à primo quot ſunt termini à primo ad eum ultimum terminum.*

Primus terminus eſt $\frac{A \times B}{B}$, ſecundus terminus $\frac{A \times B}{A}$ ſed $A = B - M$ ergo 2us terminus eſt $\frac{A \times B}{B - M}$. Pro reliquis terminis habetur ſemper per Coroll. 3. $B - nM : F = A \times B : E \times F$ diviſis ergo Conſequentibus per F, erit $B - nM : 1 = A \times B : E$ unde eſt $E = \frac{A \times B}{B - nM}$ ſed cum n deſignaret numerum terminorum inter A & F hic exprimit numerum terminorum a primo ad E hoc ultimo annumerato, unde patet Theor. veritas.

Theor. II. *Termini omnes progreſſionis Muſicæ ſunt inter ſe ſicut quantitates quarum reciprocæ conſtituunt progreſſionem Arithmeticam.*

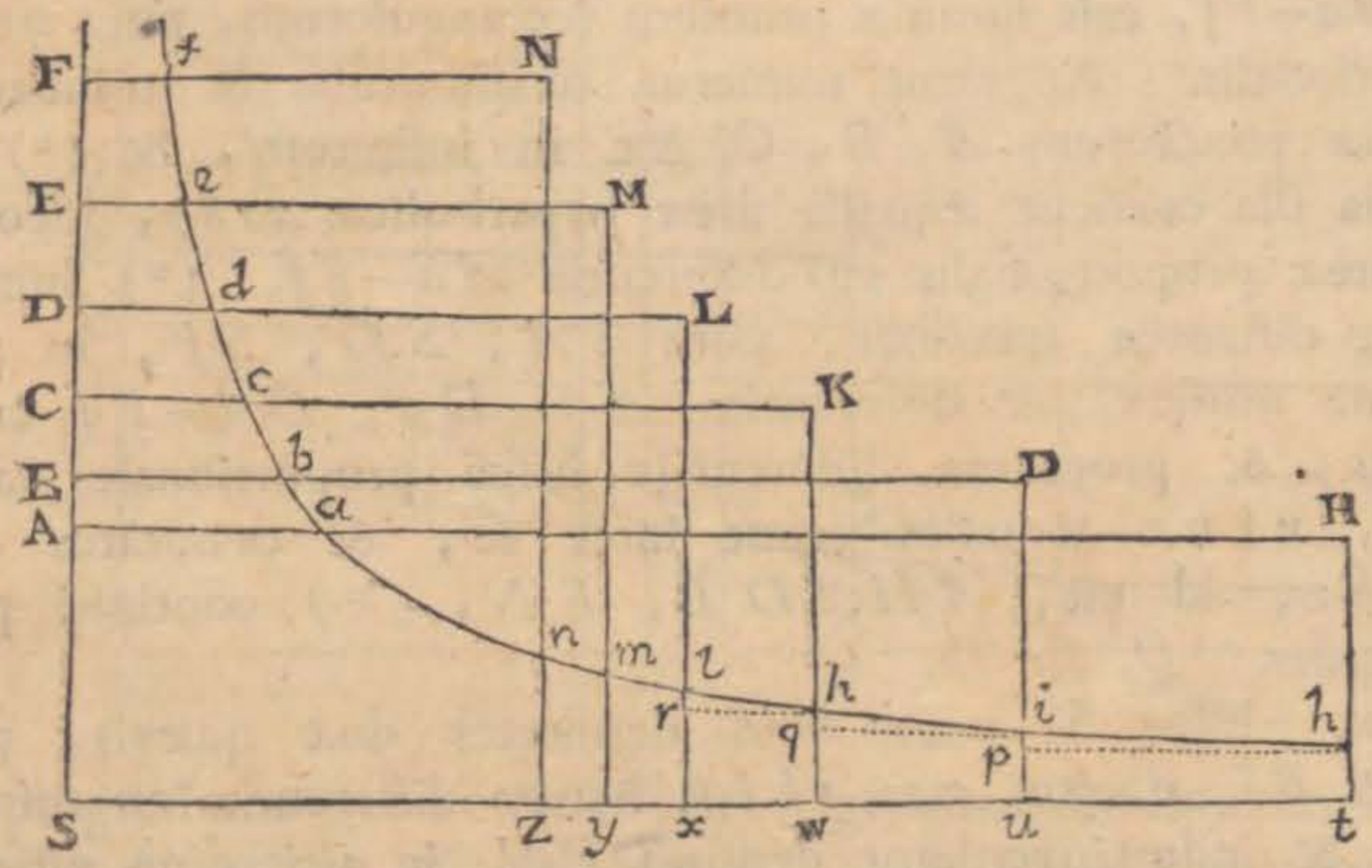
Nam per Theor. prius termini $A : B. C. D. E$ &c. prog. Muſicæ ſunt $\frac{A \times B}{B}$, $\frac{A \times B}{B - M}$, $\frac{A \times B}{B - 2M}$, $\frac{A \times B}{B - 3M}$, &c. $\frac{A \times B}{B - nM}$. Diviſis itaque omnibus per $A \times B$ ſunt ut $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B - M}$, $\frac{1}{B - 2M}$, $\frac{1}{B - 3M}$, $\frac{B}{B - nM}$. Sed hæ ſunt reciprocæ quantitatum B, $B - M$, $B - 2M$, $B - 3M - B - nM$ quæ ſunt in progreſſione arithmeticâ; Ergo &c.

Scholium, Progreſſio muſica poteſt eſſe decreſcens & omnia ut prius procedent, mutatis ſignis negativis in poſitiva.

(p) * *Graviates ſpecificæ in iiſdem locis erunt &c.* (174).

C ad *D* &c. Et hæ ductæ in altitudines *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. vel, quod perinde eſt, in diſtantias *SA*, *SB*, *SC*, &c. altitudinibus illis proportionales, (q) conficient exponentes preſſionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum denſitates ſint ut harum preſſionum ſummæ, differentiæ denſitatum *AH* − *BI*, *BI* − *CK*, &c. erunt ut ſummarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro *S*, aſymptotis *SA*, *Sx* deſcribatur

LIBER SECUNDUS. SECT. V. PROP. XXII. THEOR. XVII.



hyperbola quævis, quæ ſecet perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, &c. in *a*, *b*, *c*, &c ut & perpendicula ad aſymptoton *Sx* demiſſa *Ht*, *Iu*, *Kw* in *h*, *i*, *k*, & denſitatum differentiæ *tu*, *uw*, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. ſeu *tp*, *uq*, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id

(q) * *Conficient exponentes preſſionum, ſeu quantitates preſſionibus proportionales, &c.* Quod patet ut in demonſtratione prop. XXI. 174.

DE MOTU CORPORUM.

eſt, ut Aa, Bb, &c. Eſt* enim, (r) ex naturâ hyperbolæ, SA ad AH vel St, ut th ad Aa, ideoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa. Et ſimili argumento eſt $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale Bb, &c. (f)

Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. contiuuè proportionales, & propterea differentiis ſuis $Aa-Bb$, $Bb-Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hiſce proportionalia ſunt rectangula tp, uq, &c. ut & ſummis differentiarum $Aa-Cc$ vel $Aa-Dd$ ſummæ rectangulorum $tp+uq$ vel $tp+uq+wr$. Sunto ejuſmodi termini quam plurimi, & ſumma omnium differentiarum, puta $Aa-Ff$, erit ſummæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur diſtantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & (t) rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ $zthn$, ideoque huic areæ proportionalis eſt differentia $Aa-Ff$. (u) Sumantur jam diſtantiæ quælibet, puta SA, SD, SF, in progreſſione muſicâ, & differentiæ $Aa-Dd$, $Dd-Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hiſce proportionales areæ $thlx$, $xlnz$ æquales erunt inter ſe, & denſitates St, Sx, Sz, id eſt, AH, DL, FN, (x) continuè proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi dentur fluidi denſitates duæ quævis, puta AH & BI, dabitur area $thiu$, harum differentiæ tu reſpondens; & inde invenietur denſitas FN, in altitudine quâcunque SF, ſumendo aream $thnz$ ad aream illam datam $thiu$ ut eſt differentia $Aa-Ff$ (y) ad differentiam $Aa-Bb$.

Scho-

(r) * *Ex natura hyperbolæ*, per theor. 4. de hyperbola.

(f) * *Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. continuè proportionales.* Nam (per hyp.) SA, SB, SC ſunt continuè proportionales, & (per theor. 4. de hyp.) Aa, Bb, Cc ſunt reciprocè ut SA, SB, SC, ideoque etiam continuè proportionales.

(t) * *Et rectangula evadent æqualia areæ hyperbolicæ zthn*, per Lemma III. lib. 1.

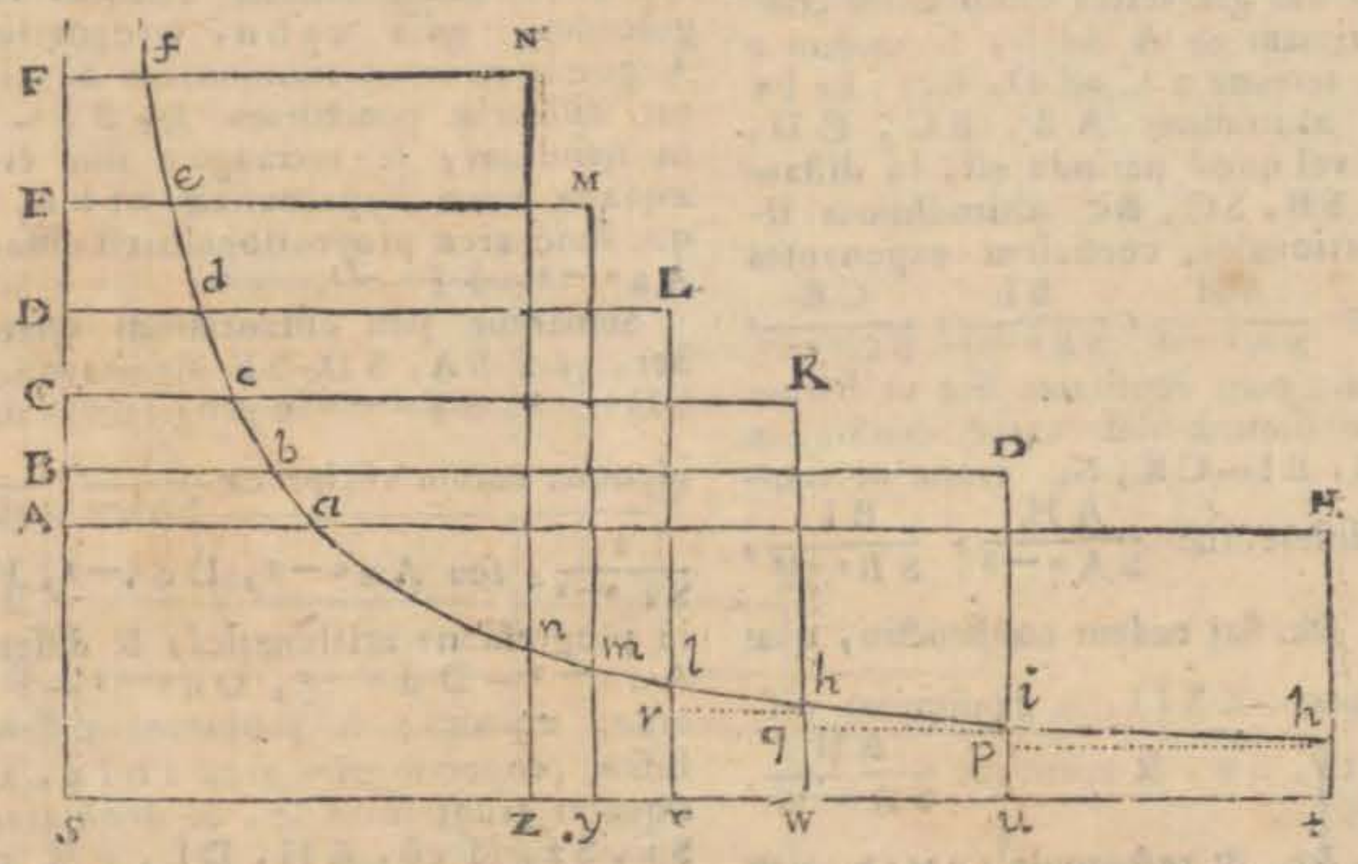
(u) * *Sumantur jam* diſtantiæ quælibet, puta SA, SD, SF in progreſſione muſicâ, & earum reciprocæ Aa, Dd, Ff erunt in progreſſione arithmetica, ideoque differentiæ Aa — Dd, Dd — Ff æquales.

(x) * *Continuè proportionales.* (379 lib. 1.)

(y) 176. * *Ad differentiam Aa — Bb.* Quoniam vero area thiu eſt ad aream thnz

Scholium.

(z) Simili argumentatione probari poteſt, quod ſi gravitas particularum fluidi diminuatur in triplicatâ ratione diſtantiarum à centro, & quadratorum diſtantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\ cub.}{SAq}$, $\frac{SA\ cub.}{SBq}$, $\frac{SA\ cub.}{SCq}$) ſumantur in progreſſione arithmeticâ; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt



in progreſſione geometricâ. Et ſi gravitas diminuatur in quadruplicatâ ratione diſtantiarum, & cuborum diſtantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\ cub.}$, $\frac{SAqq}{SB\ cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\ cub.}$, &c.) ſumantur in

thnz ut Logarithmus lineæ St vel AH ad Logarithmum lineæ Sz ſeu FN (379 & 380 lib. 1.), denſitas FN per tabulas logarithmorum inveniri poterit. Et vice verſâ datâ denſitate FN invenietur altitudo SF: nam per prop. ſuperiorem dabitur $Aa - Ff$, & inde dabitur Ff, unde invenietur $FS = \frac{SA \times Aa}{Ff}$ (per theor. 4. de hyp.). Quia vero fluidi elaſticitas, cæteris paribus, vi comprimenti, ideoque denſitati (per hyp.) proportionalis eſt, patet per hoc corollarium ex datis altitudinibus inveniri poſſe elaſticitates, & vice verſâ.

(z) 177. * *Simili argumentatione probari poteſt &c.* Sit vis centripeta particularum fluidi reciproce ut diſtantiæ di- 177.

DE MOTU CORPORUM.

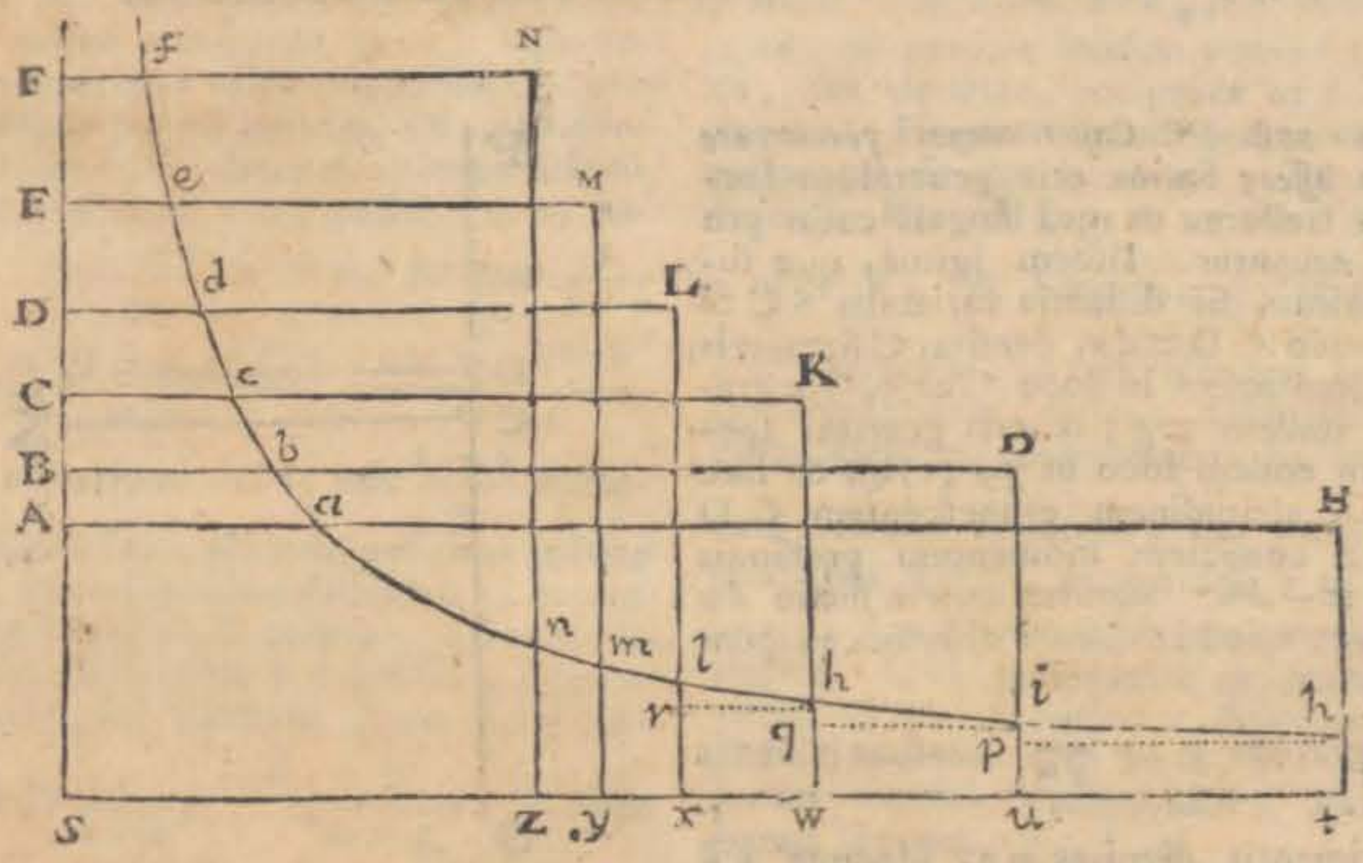
in progressione arithmeticâ; densitates AH, BI, CK, &c. erunt in progressione geometricâ. Et sic in infinitum. Rursus

gnitas, cujus index est n; designet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE distantias in progressione geometricâ. Erigantur perpendicula AH, BI, CK &c. quæ sint ut fluidi densitates in locis A, B, C, D, E &c. Et ipsius gravitates specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SA^n}, \frac{BI}{SB^n}, \frac{CK}{SC^n}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari primam ab A ad B, secundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE &c. vel quod perinde est, in distantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes pressionum $\frac{AH}{SA^{n-1}}, \frac{BI}{SB^{n-1}}, \frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. Quare cum densitates sint ut harum pressionum summæ differentiæ densitatum AH−BI, BI−CK; &c erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA^{n-1}}, \frac{BI}{SB^{n-1}}, \frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. fiat eadem constructio, quæ supra in prop. XXII, & densitatum differentiæ tv, uw, & erunt ut $\frac{AH}{SA^{n-1}}, \frac{BI}{SB^{n-1}}$, &c. & rectangula $tv \times th$, $uw \times ui$, &c., seu tp, uq &c. ut $\frac{AH \times th}{SA^{n-1}}, \frac{BI \times ui}{SB^{n-1}}$, &c. id est, ut Aa^{n-1}, Bb^{n-1}, &c. Est enim (per theor. 4. de hyp.) $AH \times th$ æquale $SA \times Aa$, & Aa reciprocè ut SA, seu directè ut $\frac{1}{SA}$, ideoque $\frac{AH \times th}{SA^{n-1}}$ ut $SA \times Aa \times Aa^{n-1}$, sive ut Aa^{n-1} cum sit $SA \times Aa = 1$, & simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB^{n-1}}$ ut Bb^{n-1}, &c. sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. ideoque Aa^{n-1}, Bb^{n-1}, Cc^{n-1} &c. continuè proportionales, & propterea differentiis suis $Aa^{n-1} - Bb^{n-1}$, $Bb^{n-1} - Cc^{n-1}$, &c. proportionales, ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula tp, uq, &c. ut & summis differentiarum $Aa^{n-1} - Cc^{n-1}$, vel $Aa^{n-1} - Dd^{n-1}$ summæ rectangulorum $tp + uq$, vel $tp + uq + wr$. Sunto ejusmodi termini quam plurimi, & summa omnium differentiarum; puta $Aa^{n-1} - Ff^{n-1}$, erit summæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ $zthn$, ideoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa^{n-1} - Ff^{n-1}$.

Sumantur jam distantiarum quarumlibet, puta SA, SD, SF dignitate SA^{n-1} SD^{n-1}, SF^{n-1} in progressione musicâ, ideoque earum reciprocæ $\frac{1}{SA^{n-1}}, \frac{1}{SD^{n-1}}$, $\frac{1}{SF^{n-1}}$, seu Aa^{n-1}, Dd^{n-1}, Ff^{n-1} in progressione arithmeticâ, & differentiæ $Aa^{n-1} - Dd^{n-1}$, $Dd^{n-1} - Ff^{n-1}$ erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ $thlx$, $xl\pi z$ æquales erunt inter se, & densitates St, Sx, Sz, id est, AH, DL, FN continuè proportionales. Quare si gravitas particularum fluidi diminuatur in ratione quâcumque multiplicatâ distantiarum, cujus exponens sit n, & dignitatum SA^{n-1}, SB^{n-1}, SC^{n-1}, &c. reciproca (nempe $\frac{SA^n}{SA^{n-1}}, \frac{SA^n}{SB^{n-1}}, \frac{SA^n}{SC^{n-1}}$, &c. in quibus SA data est) sumantur in progressione arithmeticâ; densitates AH, BI, CK, &c. erunt in progressione geometricâ.

Si itaque loco n scribantur numeri 3, 4, 5, 6 &c. in infinitum; & rursus scribantur 0, −1, −2, −3 &c. in infinitum, patet veritas scholii in hypothesi densitatis vi comprimenti proportionalis. Quando autem $n = 0$, seu quando gravitas particularum fluidi in omnibus distantiis eadem est, est $\frac{SA^n}{SA^{n-1}} = SA$, $\frac{SA^n}{SB^{n-1}} = SB$,

ſus ſi gravitas particularum fluidi in omnibus diſtantiis eadem ſit, & diſtantiæ ſint in progreſſione arithmeticâ denſitates erunt in progreſſione geometricâ, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas ſit ut diſtantia, & quadrata diſtantiarum ſint in progreſſione arithmeticâ, denſitates erunt in progreſſione geometricâ. Et ſic in infinitum. Hæc ita ſe habent ubi fluidi compreſſione condenſati denſitas eſt ut vis compreſſionis, vel, quod perinde eſt, ſpatium à fluido occupatum reciprocè ut hæc vis. Fingi poſſunt aliæ condenſationis leges, ut quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-quadratum denſitatis, ſeu triplicata



SB, ideoque ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione arithmeticâ, denſitates erunt in progreſſione geometricâ, ideoque diſtantiæ ſunt ut denſitatum logarithmi, quia creſcentibus diſtantiis in progreſſione arithmeticâ, decreſcunt denſitates in progreſſione geometricâ. Quia vero *per experimenta conſtat, quod denſitas aëris*, cæteris paribus ac potiſſimum manente eodem caloris gradu, *ſit ut vis comprimens vel accuratè vel ſaltem quam proximè* in aëre quem experimentis poſſumus ſubjicere, vis autem aërem inferiorem comprimens, cæteris etiam paribus, æqualis ſit ponderi aëris totius incumbentis, ideoque proportionalis altitudini mercurii in barometro, & præterea particularum aëris gravitas, in minoribus ſaltem à telluris ſuperficie diſtantiis, conſtans cenſeri poſſit, patet, quod, cæteris paribus, aëris denſitatem, ad hujusmodi diſtantias minores, metiri poſſimus per logarithmos. Sed de his plura videre eſt in elementis aërometriæ Clar. Wolfii, in libro 2°. phoronomiæ, & in ſectione 10ª. Hydrodynamicæ Clar. Danielis Bernoulli. 178

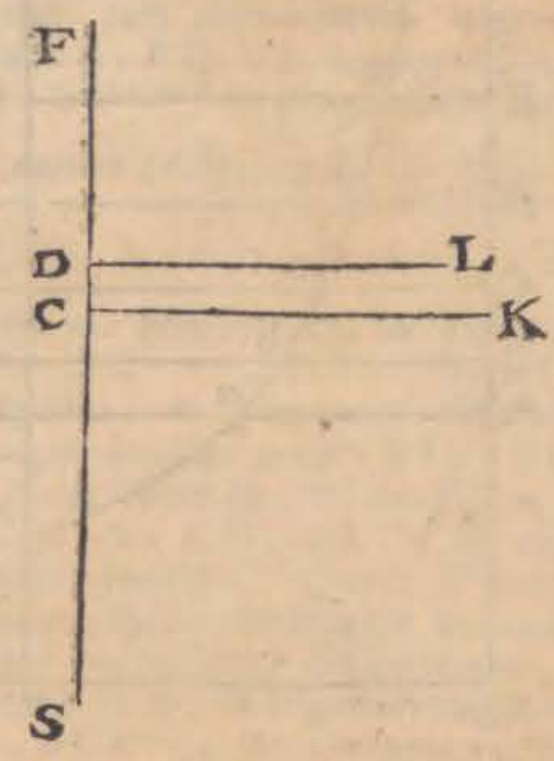
DE MOTU CORPORUM.

ta ratio vis eadem cum quadruplicatâ ratione denſitatis. Quo in caſu, ſi gravitas eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ à centro, denſitas erit reciprocè ut cubus diſtantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, & ſi gravitas eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ, denſitas erit reciprocè in ſeſquiplicatâ ratione diſtantiæ. Fingatur quod vis comprimens ſit in duplicatâ ratione denſitatis, & gravitas reciprocè in ratione duplicatâ diſtantiæ, & denſitas erit reciprocè ut diſtantia. (a) Caſus omnes percurrere longum eſſet. Cæterum per experimenta conſtat quod denſitas aëris ſit ut vis comprimens vel accuratè vel ſaltem quam proximè: & propterea denſitas aëris in atmoſphærâ terræ eſt ut pondus aëris totius incumbentis, id eſt, ut altitudo mercurii in barometro.

(a) 178. * *Caſus omnes percurrere longum eſſet;* Satius erit generalem formulam tradere, ex quâ ſinguli caſus pro lubitu eruantur. Iiſdem igitur, quæ ſupra, poſitis, ſit diſtantia variabilis $SC = x$, altitudo $CD = dx$, denſitas $CK = y$, vis tota comprimens in loco $C = v$, vis gravitatis ibidem $= g$; & erit gravitas ſpecifica in eodem loco ut gy (174), & hæc ducta in altitudinem evaneſcentem CD ſeu dx conficient momentum preſſionis $gy\,dx = -dv$. Sumitur autem fluxio dv negativè, quod creſcente diſtantiâ x, pondus incumbens v decreſcat.

Sit gravitas g ut $\frac{1}{x^m}$, denſitas y ut vis comprimentis dignitas v^n, ideoque $y^{\frac{1}{n}}$ ut v, & ſumptis fluxionibus $\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}}\,dy$ ut dv. Loco g & dv ſubſtituantur hi valores in æquatione $gy\,dx = -dv$, & fiet $\frac{y\,dx}{x^m} = -\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}}\,dy$ ſeu $-\frac{dx}{x^m} = \frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}}\,dy$. His vero æquationibus, non æqualitates, ſed proportiones tantum exponimus, & ideo coefficientes datas negligimus.

Si in ultimâ æquatione ponatur $n = 1$,



id eſt, denſitas vi comprimenti proportionalis, erit $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^m}$. Sumantur quantitates $\frac{1}{x^{m-1}}$ in progreſſione arithmeticâ; & earum fluxiones, ſeu differentiæ naſcentes $-\frac{(m-1)\,dx}{x^m}$, ideoque & $\frac{-dx}{x^m}$ conſtantes erunt; & propterea quantitates $\frac{dy}{y}$ etiam datæ; ac proinde denſitates y ſuis differentiis dy proportionales, erunt con-

continuè proportionales (per lem. II. lib. II.). Si in eadem hypotheſi ponatur $m=1$, fit $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$; unde ſi capiantur quantitates $\frac{dx}{x}$ conſtantes, ſeu diſtantiæ x in progreſſione geometricâ, erunt etiam quantitates $\frac{dy}{y}$ conſtantes, & ideo denſitates y in progreſſione geometricâ. Prorſus ut in prop. XXII, XXI. & initio ſcholii hujus demonſtratum eſt. Sumptis fluentibus, æquatio $\frac{1}{n}y^{\frac{1-2n}{n}}dy=-\frac{dx}{x^m}$ in hanc abit $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{m-1}x^{1-m}+Q$. *conſt.* in quâ non poteſt eſſe $m=1$, nec $n=1$, neque $n=0$, ut patet. Ut autem determinetur valor conſtantis Q, primum definienda eſt altitudo SF; ubi denſitas y evaneſcit. Nam ſi altitudo illa finita eſt & dicatur $=a$, poſitâ $y=0$, habebitur $Q=\frac{-1}{m-1}a^{1-m}$, & hinc $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{x^{1-m}-a^{1-m}}{m-1}=\frac{a^{1-m}-x^{1-m}}{m-1}$, in qua æquatione debet eſſe $\frac{1-n}{n}$ numerus poſitivus, ſeu n numerus poſitivus unitate minor, ut creſcentibus diſtantiis x, decreſcant denſitates y, & contra. Si altitudo SF ad quam denſitas y evaneſcit, infinita ſupponatur, erit conſtans $Q=0$, ac proinde æquatio $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{m-1}x^{1-m}$. Nam ſi in æquatione $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{x^{1-m}-a^{1-m}}{m-1}$, ponatur y nulla & x infinita, quantitas conſtans a erit infinita, contra hypotheſim.

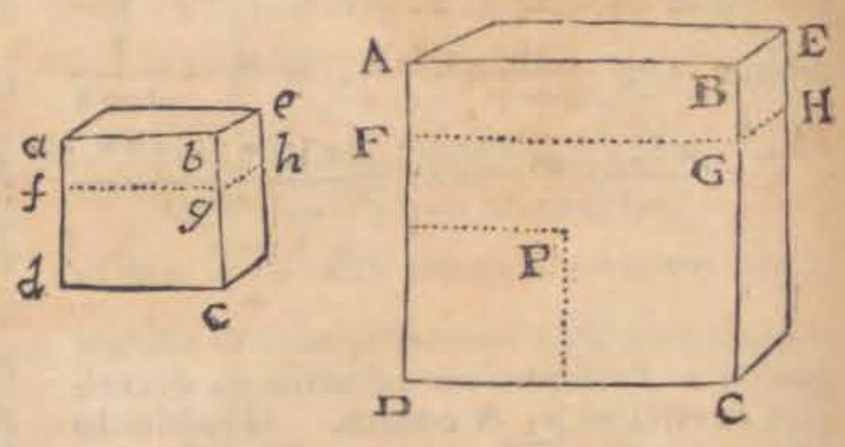
Jam vero ſi gravitas eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ, id eſt ſi $m=2$, æquatio $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{m-1}x^{1-m}$ in hanc migrat $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{x}$, unde eſt y ut $x^{\frac{n}{1-n}}$ reciprocè. Fingatur quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-quadratum denſitatis, ſeu y^4 ut v^3, ideoque y ut $v^{\frac{3}{4}}$, & hinc $n=\frac{3}{4}$; & erit $x^{\frac{1}{1-n}}=x^3$, ac proinde denſitas y ut x^3 reciprocè, ſeu denſitas, reciprocè ut cubus diſtantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, hoc eſt, y^5 ut v^3, adeoque y ut $v^{\frac{3}{5}}$, & hinc $n=\frac{3}{5}$; & erit y ut $x^{\frac{3}{2}}$ reciprocè, id eſt, denſitas reciprocè in ſeſquiplicatâ ratione diſtantiæ. Fingatur quod vis comprimens ſit in duplicatâ ratione denſitatis, ſeu y ut $v^{\frac{1}{2}}$; & hinc erit $n=\frac{1}{2}$, ac proinde y ut x reciprocè, ſive denſitas eſt reciprocè ut diſtantia. Quæ Newtonus in ſcholio dixerat. Vide monumenta Academiæ Regiæ ſcientiarum anni 1716, ubi hanc materiam tractat Varignonius, quem hic ſumus ſequuti.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVII.

Si fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum. Et vice versâ, particulæ viribus quæ sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt fluidum elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.

Includi intelligatur fluidum in spatio cubico ACE, dein compressione redigi in spatium cubicum minus ace; & particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, (b) distantiæ erunt ut cuborum latera AB, ab; & (c) mediorum densitates reciprocè ut spatia continentia AB *cub.* & ab *cub.* In cubi majoris latere plano $ABCD$ capiatur quadratum DP æquale lateri plano cubi minoris db; & ex hypothesi, pressio, quâ quadratum DP urget fluidum inclusum, erit ad pressionem, quâ illud quadratum db urget fluidum inclusum, ut medii densitates ad invicem, hoc est, ut ab *cub.* ad AB *cub.* Sed pressio, quâ quadratum DB urget fluidum inclusum, est ad pressionem, quâ quadratum DP urget idem fluidum, ut quadratum DB ad quadratum DP, hoc est, ut AB *quad.* ad ab *quad.* Ergo, ex æquo, pressio quâ quadratum DB urget fluidum, est ad pressionem quâ quadratum db urget fluidum, ut ab ad AB. Planis FGH, fgh, per media cuborum ductis, distinguatur fluidum in duas partes, & hæ (d) se mutuo prement iisdem viri-



(b) * *Distantiæ erunt ut cuborum latera* AB, ab, per lemma V. lib. I.

(c) * *Et mediorum densitates, ut &c.* ob datam in utroque spatio fluidi massam (2. lib. 1.).

(d) * *Et hæ se mutuo prement iisdem viribus &c.* Pressiones enim in unoquoque spatio sunt ubique æquales; nam cum fluidum uniforme supponatur, si pressio minor esset in uno loco quam in alio, sta-

viribus, quibus premuntur à planis AC, ac, hoc eſt, in proportione ab ad AB: ideoque vires centrifugæ, quibus hæ preſſiones ſuſtinentur, ſunt in eâdem ratione. Ob eundem particularum numerum ſimilemque ſitum in utroque cubo, vires quas particulæ omnes ſecundum plana FGH, fgh exercent in omnes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum FGH in cubo majore, ſunt ad vires, quas ſingulæ exercent, in ſingulas ſecundum planum fgh in cubo minore, ut ab ad AB, hoc eſt, reciprocè ut diſtantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice versâ, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciprocè ut diſtantiæ, id eſt, reciprocè ut cuborum latera AB, ab; ſummæ virium erunt in eâdem ratione, & preſſiones laterum DB, db ut ſummæ virium; & preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris DB ut $ab\ quad.$ ad $AB\ quad.$ Et, ex æquo, preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris db ut $ab\ cub.$ ad $AB\ cub.$ id eſt, vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

(e) Simili argumento, ſi particularum vires centrifugæ ſint reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitatum. Si ſtatim cederet fluidum magis preſſum, atque ita preſſio ad æqualitatem reſtitueretur, ut in caſu 6°. prop. XIX.

(e) * *Simili argumento &c.* Sunto D & d particularum diſtantiæ in ſpatiis cubicis ACE & ace quæ ſunt ut AB & ab, earumdem vires centrifugæ ut D^n & d^n reciprocè, fluidi denſitates E & e; & vires comprimentes erunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ & $e^{\frac{n+2}{3}}$.

Nam cum ſummæ virium quas omnes ſimul particulæ exercent in latera DB, db, ſint ut ſingularum particularum vires erunt iſtæ ſummæ virium ut D^n & d^n reciprocè, ſeu ut ab^n & AB^n directè; & preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati DB ut ab^2 ad AB^2; unde ex æquo preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati db, hoc eſt, vis comprimens in ſpatio ACE ad vim comprimentem in ſpatio ace, ut ab^{n+2} ad AB^{n+2}. Sunt autem denſitates, ſive eſt E ad e, ut ab^3 ad AB^3, & ideo

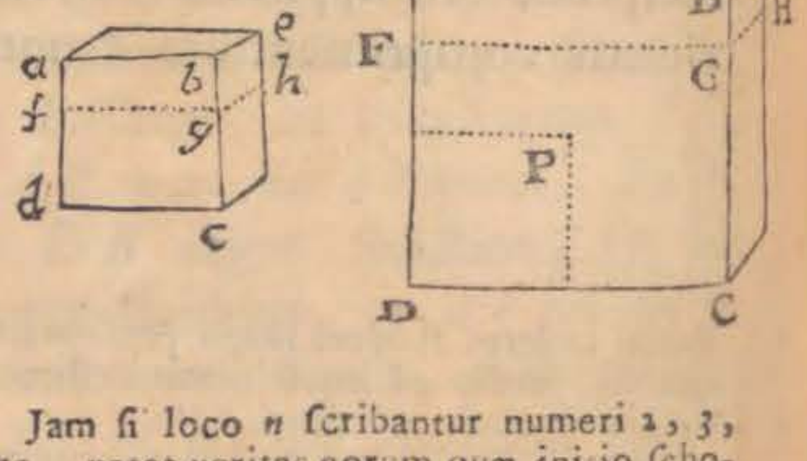
DE MOTU CORPORUM.

Si vires centrifugæ ſint reciprocè in triplicatâ vel quadruplicatâ ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantiâ, & E pro denſitate fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciprocè ut diſtantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index eſt numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index eſt numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero ſunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longè ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur ferè in ſui generis corporibus ſibi proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in laminâ ferè terminatur. Nam corpora ulteriora non tam à magnete quam à laminâ trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugant alias ſui generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur fluida de quibus actum eſt in hâc propoſitione. Quod ſi particulæ cujuſque virtus in infinitum propagetur, (f) opus erit vi majori ad æqualem condenſationem majoris

ideo $E\frac{n+2}{3}$ ad $e\frac{n+2}{3}$ ut ab^{n+2} ad AB^{n+2}.

Quare vires comprimentes ſunt ut $E\frac{n+2}{3}$ & $e\frac{n+2}{3}$. Q. E. D.

Et vice versâ, ſi vires comprimentes ſunt ut denſitatum dignitates $E\frac{n+2}{3}$, $e\frac{n+2}{3}$, ſeu ut ab^{n+2}, AB^{n+2}; erit preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati db in eâdem ratione, & preſſio quadrati DB eſt ad preſſionem quadrati DP, ut AB^2 ad ab^2; &, ex æquo, preſſio quadrati DB ad preſſionem quadrati db, ut ab^n ad AB^n, ſeu ut d^n ad D^n. Sunt autem vires particularum ſingularum ut ſummæ virium, hoc eſt, ut preſſiones laterum DB, db; quare vires particularum centrifugæ ſunt reciprocè ut diſtantiarum dignitates D^n, d^n. Q. E. D.



Jam ſi loco n ſcribantur numeri 1, 3, &c., patet veritas eorum quæ initio ſcholii dixit Newtonus.

(f) * *Opus erit vi majori &c.* Non enim ſolum vincenda erit per compreſſionem vis centrifuga particularum proximarum, ſed & remotiorum vis erit ſuperanda quæ (ex hyp.) in infinitum propagatur.

joris quantitatis fluidi. An vero fluida elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, quæstio physica est. Nos proprietatem fluidorum ex ejusmodi particulis constantium mathematicè demonstravimus, ut philosophis ansam præbeamus quæstionem illam tractandi.

SECTIO VI.

De motu & resistentiâ corporum funependulorum.

(g) PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

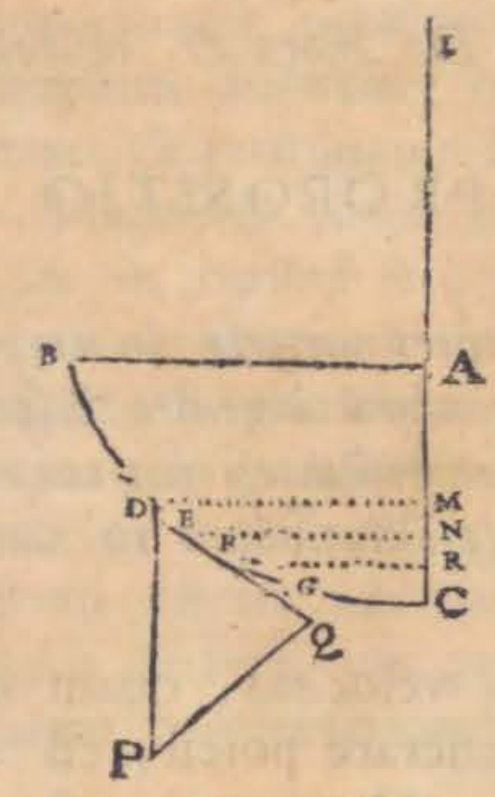
Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum à centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione compositâ ex ratione ponderum & ratione duplicatâ temporum oscillationum in vacuo.

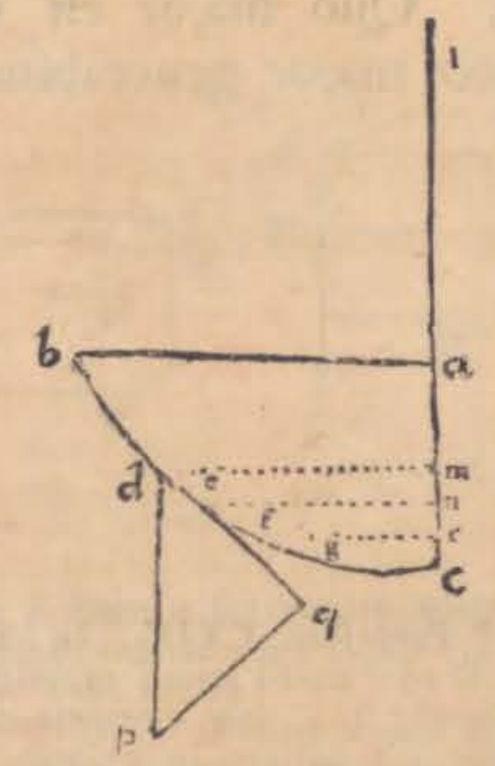
Nam velocitas, quam data vis in datâ materiâ, dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directè, & materia inversè. Quo major est vis vel majus tempus, vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus legem

(g) * *Propositio XXIV.* In hâc propositione & ejus corollariis supponitur corpora funependula, quæ comparantur, in cycloidibus aut saltem in exiguis magni circuli arcubus oscillari. * Pondera autem corporum hic duplici de causâ à materiâ ipsorum distinguuntur; primo, quod nondum assumi possit gravitatem agere secundum rationem massarum, cum id ipsum ex isto Theoremate postea deducatur, cor. 7.; & secundo, in diversis locis gravitas diversa esse potest (ut quidem ex experimentis constat) ideoque corporum duorum in diversis iis locis spectatorum ratio materiæ eadem manebit, non verò ratio ponderum. 172.

DE MOTU CORPORUM.

gem ſecundam manifeſtum eſt. (h) Jam verò ſi pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices in locis à perpendiculo æqualiter diſtantibus ſunt ut pondera: ideoque ſi corpora duo oſcillando deſcribant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum (i) tempora quibus corpora deſcribant ſingulas arcuum partes correſpondentes ſint ut tempora oſcillatio-





(h) *Jam verò ſi pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices in locis à perpendiculo æqualiter diſtantibus ſunt ut Pondera.*

* Nam ſi Pendula ejuſdem ſint longitudinis, Cycloides plane ſimiles & æquales deſcribent: In unaquâque autem Cycloide, vires quibus corpora in locis quibuſvis D, vel d accelerantur, ſunt ad totum ſinguli corporis pondus in locis altiſſimis, ut arcus Cycloidis inter loca propoſita D, d & puncta infima C, c, ad totas ſemi Cycloides (Cor. Prop. LII. Lib. 1.) Ergo ſi ſemicycloides ſint æquales & loca D & d à perpendiculo æqualiter diſtent, arcus DC & dc erunt æquales, ideoque vis quâ corpus acceleratur in primâ Cycloide in puncto D, erit ad totum ejus corporis pondus, ut vis quâ corpus acceleratur in alterâ Cycloide in puncto d, ad totum ejus corporis pondus. Unde viciſſim, vis quâ acceleratur primum corpus in puncto D, eſt ad vim quâ alterum acceleratur in puncto d, ut totum prioris corporis pondus, ad pondus alterius corporis, ideoque *ſi pendula ſint ejuſdem longitudinis vires motrices &c.* Q. E. D.

(i) *Cum tempora quibus corpora deſcribant ſingulas arcuum partes* (æquales) *correſpondentes ſint ut tempora oſcillationum totarum.*

* Sint arcus DC, dc æquales, ſecenturque in partes æquales infinite parvas DE, EF &c.; de, ef &c., ex punctis D, E, F & d, e, f, ducantur perpendiculares ad axem, DM, EN, FR; Dm, en, fr; liquet lineolas MN & mn, MR & mr ex hypotheſi fore æquales; Ex naturâ autem gravitatis, velocitas acquiſita in E erit ad velocitatem acquiſitam in F ut Radix altitudinis MN ad Radicem MR, & pariter velocitas acquiſita in e, erit ad velocitatem acquiſitam in f ut $\sqrt{mn}$ ad $\sqrt{mr}$, cum ergo $\sqrt{MN} = \sqrt{mn}$ & $\sqrt{MO} = mo$ velocitas acquiſita in E eſt ad velocitatem acquiſitam in F, ut velocitas acquiſita in e eſt ad velocitatem acquiſitam in f, & viciſ-

lationum totarum, (†) erunt velocitates ad invicem in correſpondentibus oſcillationum partibus, ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè: ideoque quantitates materiæ ut vires & oſcillationum tempora directè & velocitates reciprocè. (‡) Sed velocitates reciprocè ſunt ut tempora, atque ideo tempora directè & velocitates reciprocè ſunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ ſunt ut vires motrices & quadrata temporum, id eſt, ut pondera & quadrata temporum. (††) *Q. E. D.*

LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXIV. THEOR. XIX.

Co-

viciſſim velocitas acquiſita in E, eſt ad velocitatem acquiſitam in e; ut velocitas acquiſita in F eſt ad velocitatem acquiſitam in f. Sed quoniam arcus E F & e f F G & f g ſunt infinite parvi & æquales, uniformiter deſcribi cenſendi ſunt, & tempora quibus deſcribuntur erunt in ratione reciprocâ velocitatum, ideoque tempus quo deſcribitur E F eſt ad tempus quo deſcribitur e f, ut velocitas in e ad velocitatem in E, & tempus quo deſcribitur F G eſt ad tempus quo deſcribitur f g, ut velocitas in f ad velocitatem in F &c. ſed rationes velocitatum in E & e, in F & f &c. ſunt ſemper æquales inter ſe, ergo & rationes temporum quæ iſtarum ſunt inverſæ ſunt æquales inter ſe; ergo tempora quibus ſingulæ partes arcus D C deſcribuntur, ſunt ad tempora quibus correſpondentes partes arcus d c deſcribuntur, in eâdem ratione, ergo omnes antecedentes & omnes conſequentes ſummando, omnia ſimul tempora quibus percurruntur omnes partes arcus D C, hoc eſt, totum tempus oſcillationis per D C, eſt ad omnia tempora quibus partes arcus d c percurruntur, hoc eſt ad totum tempus oſcillationis per d c ut tempus unum quo quædam pars arcus D C percurritur, eſt ad tempus quo pars correſpondens arcus d c percurritur. Q. E D.

(†) *Erunt velocitates ad invicem in correſpondentibus oſcillationum partibus, ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè.* * Ex demonſtratione notæ ſuperioris liquet velocitates in correſpondentibus partibus eſſe omnes in eâdem ratione, ideoque ut velocitas acquiſita in E ad velocitatem acquiſitam in e, ſed cum arcus D E & d e infinite parvi ſupponantur, cenſendum eſt, vires motrices uniformiter agere, dum illi arcus percurruntur, motus ergo per eas productus creſcet tam pro ratione virium ipſarum quam pro ratione temporis quo arcus illi deſcribuntur ſive (ex demonſtratis) pro ratione temporum oſcillationum integrarum, motus verò ex Def. 2. lib. 1. æſtimatur à Newtono ex velocitate & materiâ conjunctim, ergo velocitates productæ in *correſpondentibus oſcillationum partibus erunt ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directè & quantitates materiæ inversè.*

178.

(‡) *Sed velocitates ſunt reciprocè ut tempora.* * Ex demonſtratis (ad notam ſuperiorem i) liquet velocitatem acquiſitam in E eſſe ad velocitatem acquiſitam in e ut velocitas acquiſita in puncto quovis arcus D C ad velocitatem acquiſitam in puncto correſpondenti arcus d c; Ex eâdem demonſtratione liquet velocitatem acquiſitam in E eſſe ad velocitatem acquiſitam in e, in ratione reciprocâ temporum quibus deſcribuntur arcus E F, & e f; hæc verò tempora eſſe ut tempora oſcillationum integrarum, unde velocitas acquiſita in puncto quovis arcus D C, eſt ad velocitatem acquiſitam in puncto correſpondenti arcus d e, in ratione reciprocâ temporum oſcillationum totarum. Q. E. D.

(††) *Quod Erat Demonſtrandum.* * In demonſtratione probatum eſt quod ſi deſcribantur arcus æquales D C, d c quantitates materiæ ſunt ut pondera & quadra-

DE MOTU CORPORUM

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

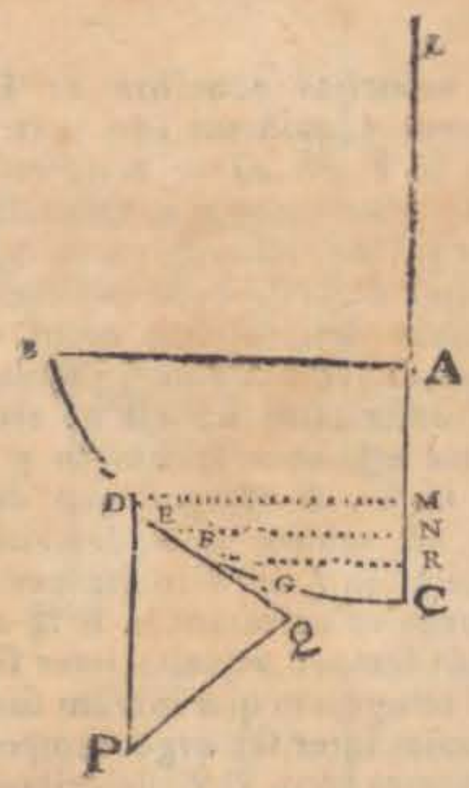
Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

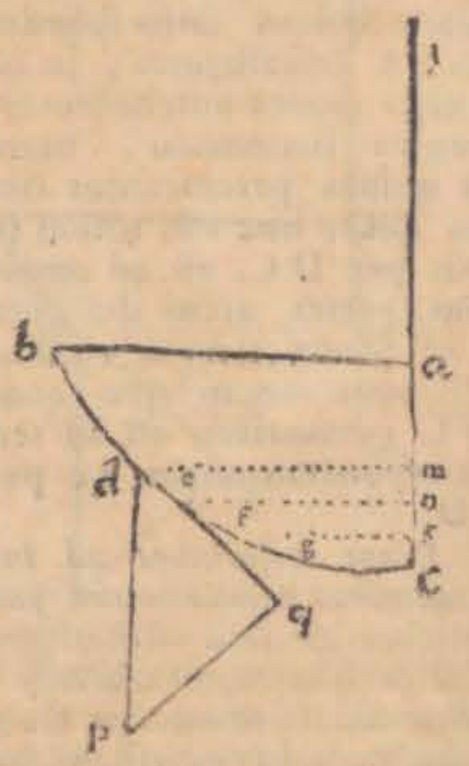
Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciprocè ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde (k) cum quadrata temporum, cæteris paribus, sint ut longitudines pendulorum; si & tempora & quantitates

drata temporum, sumatur jam arcus b c major vel minor arcu d c sed quantitates materiæ & pondera utrinque maneant eadem quæ prius, & pariter ob Isochroneitatem curvæ b d c, tempus oscillationis per b c, æquale erit tempori oscillationis per d c, ideoque quicumque sint arcus descripti si modo maneat penduli longitudo, eademque sit utrinque cyclois, pariter verum erit quod quantitates materiæ sunt ut pondera & quadrata temporum oscillationum.

(k) *Unde cum quadrata temporum cæteris paribus sint ut longitudines pendulorum.* * Fingatur L C, l c inæqualia esse, & arcus D C, d c non sumi æquales ut prius, sed similes, sive proportionales longitudinibus L C, l c, secetur D C in partes æquales inter se, & d c in partes similes, ita ut sit D E ad d e ut L C ad l c ductisque perpendiculis D M, E N, d m, e n &c. liquet ex similitudine figurarum altitudines M N & m n, M R & m r &c. esse etiam inter se in ratione L C ad l c, velocitates verò quibus describuntur arcus E F, F G sunt ut √ M N ad √ M R, & velocitates quibus describuntur arcus e f, f g sunt ut √ m n ad √ m r, sed quia M N & m n, M R & m r, sunt in eâdem ratione ideoque & earum radices, vicissim, velocitas quâ describitur E F est ad velocitatem quâ describitur e f, ut velocitas quâ describitur F G ad velocitatem quâ describitur f g; & sic ordine perpetuo demonstrabitur velocitates quibus successivæ partes correspondentes utriusque curvæ percurruntur fore semper in eâdem ratione; tempora verò quibus arcus similes describuntur sunt directè ut illi arcus & inversè ut velocitates; ergo cum ra-





titates materiæ æqualia ſunt, (l) pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et (m) univerſaliter, quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directè, & longitudo penduli inversè.

Corol. 6. Sed & in medio non reſiſtente quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo penduli inversè. Nam pondus comparativum eſt vis motrix corporis in medio quovis gravi, ut (n) ſupra explicui; ideoque idem præſtat in tali medio non reſiſtente atque pondus abſolutum in vacuo. *Co-*

tio arcuum correſpondentium ſit ſemper eadem, nempe ratio L C ad l c, ut & ratio velocitatum quibus percurruntur illi arcus, ſingula tempuſcula quibus deſcribuntur particulæ arcus D C eamdem rationem habebunt ad tempuſcula quibus correſpondentes particulæ arcus d c percurruntur; ideoque tempora tota oſcillationum per D C & d c erunt directe ut longitudines L C & l c, & inverse ut velocitates in punctis quibuſvis correſpondentibus arcuum D C & d c, putà in punctis infimis C & c, ſed quia ex hypotheſi quod pondera ſunt æqualia, & quantitates materiæ ſunt æquales velocitates ſunt proportionales Radicibus quadratis altitudinum, velocitates in punctis C & c erunt ut $\sqrt{MC}$ & $\sqrt{mc}$ ſed ex ſimilitudine curvarum & arcuum eſt m c ad M C ſicut l c ad L C, ergo velocitates in punctis C & c ſunt ut $\sqrt{LC}$ ad $\sqrt{lc}$, ideoque tempora oſcillationum integrarum in arcubus DC, dc erunt ut $\frac{LC}{\sqrt{LC}}$ ad $\frac{lc}{\sqrt{lc}}$, unde quadrata temporum erunt ut $\frac{LC^2}{LC}$ ad $\frac{lc^2}{lc}$ ſive ut L C ad l c, hoc eſt ut longitudines pendulorum. Q. E. D.

(l) * *Pondera erunt ut longitudines pendulorum, & univerſaliter quantitas materiæ Pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directè & longitudo Penduli inversè.* * Sint duo pendula A & B, quæ materiâ, pondere & oſcillationum temporibus diſcrepent, ſed æqualis ſint longitudinis; ex Theoremate, erit quantitas materiæ

pendulæ in A ad quantitatem materiæ pendulæ in B, ut pondus & quadratum temporis oſcillationum penduli A conjunctim ad pondus & quadratum temporis oſcillationum penduli B conjunctim; ſit tertium pendulum C, cujus materia & pondus eadem ſint cum materiâ & pondere penduli B, diverſa verò ſit utriuſque longitudo, longitudo penduli C erit ad longitudinem penduli B (ſive penduli A, perinde enim eſt ex hypotheſi) ut quadratum temporis in Pendulo C ad quadratum temporis in pendulo B, quod itaque æquale erit quadrato temporis in pendulo C, per longitudinem penduli A multiplicato & per longitudinem penduli C diviſo; Unde quantitas materiæ in A erit ad quantitatem materiæ in B ſive in C, ut pondus & quadratum temporis in A conjunctim ad pondus in B, ſive in C, cum quadrato temporis in C & longitudine penduli A directè & longitudine penduli C inverse: unde liquet quantitatem materiæ in A eſſe ad quantitatem materiæ in C, ut pondus & quadratum temporis in pendulo A directe & ejus longitudo inverse ad pondus & quadratum temporis penduli C directè & ejus longitudinem inverse. Q. E. D. *univerſaliter.*

178.

Unde ſi & tempora & quantitates materiæ eadem ſunt, pondera ſunt ut longitudines pendulorum directe.

(m) * *Et univerſaliter.* Vide Notam ſuperiorem.

(n) * *Ut ſupra explicui*, in cor. VI. & VIII. prop. XX.

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 7. Et (o) hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis; tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, (p) ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora funependula quibus, in medio quovis, resistitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente moventur, oscillationes in cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.

Sit AB cycloidis arcus, quem corpus D tempore quovis in medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in C, ita ut C sit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix quâ corpus urgetur in loco quovis D vel d vel E ut (q) longitudo

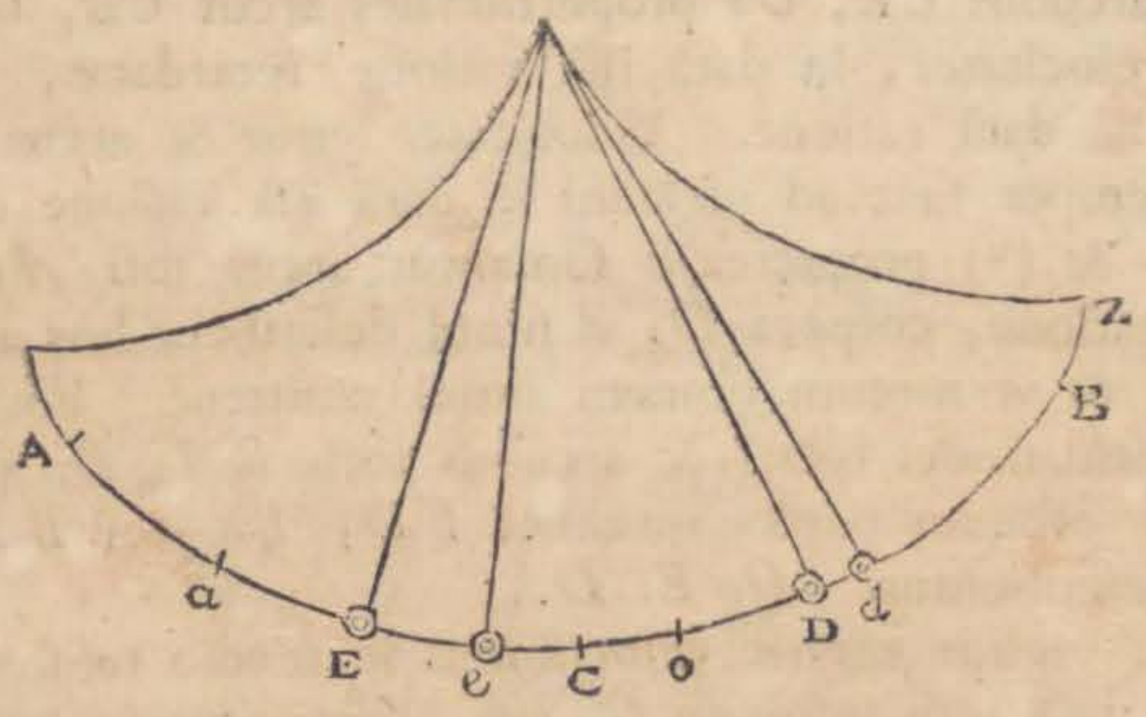
(o) * *Et hinc liquet ratio &c.* Nam ex datis pendulorum longitudinibus, oscillationum temporibus, & ponderibus corporum, datur ratio quantitatum materiæ in illis corporibus (per cor. V.); & contra.

(p) * *Ad cognoscendam variationem gravitatis.* Ubi enim ejusdem penduli oscillationes tardiores sunt, gravitatis actio, cæteris paribus, minor est, cum in eodem pendulo pondera sint reciprocè ut quadrata temporum (per cor. III.). Sed de his plura ad prop. XX. lib. III. dicentur. Quanta autem in illis experimentis adhibenda sit diligentia, Clariss. D. de Mairan eâ quâ solet perspicuitate & elegantiâ exponit in monumentis Acad. Reg. Scient. an. 1735.

179. Quia numeri oscillationum æqualibus temporibus à diversis pendulis absolvendarum sunt reciprocè ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt (473. lib. 1.), numeri oscillationum æqualibus temporibus peractarum erunt (per cor. V. prop. hujus) in compositâ ratione ex ratione subduplicata directa ponderum & subduplicatis rationibus inversis massarum & longitudinum pendulorum; sive, quoniam pondus est ut factum ex massâ in vim gravitatis acceleratricem, erunt prædicti oscillationum numeri in ratione subduplicata directa virium gravitatis acceleratricium & ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversâ; ac proinde pendulorum inæqualium, sed eâdem vi gravitatis agitatorum, numeri oscillationum eodem tempore absolvendarum sunt in reciprocâ subduplicatâ ratione longitudinum pendulorum, & numeri oscillationum in duobus pendulis æqualibus erunt in subduplicatâ ratione virium gravitatis. Hæc est regula quam ad comparandas corporum gravitates tradit Joh. Bernoulli in actis erudit. Lipsi. an. 1713.

(q) * *Ut longitudo arcus &c.* Per demonstr. Prop. LI. & cor. II. Prop. LII. Lib. I.

do arcus *CD* vel *Cd* vel *CE*. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum reſiſtentia ſit ut momentum temporis, ideoque detur, exponatur eadem per datam arcus cycloidis partem *CO*, & ſumatur arcus *Od* in ratione ad arcum *CD* quam habet arcus *OB* ad arcum *CB*: & vis quâ corpus in *d* urgetur in medio reſiſtente, cum ſit exceſſus vis *Cd* ſupra reſiſtentiam *CO*, exponetur per arcum *Od*, ideoque erit ad vim, quâ corpus *D* urgetur in medio non reſiſtente in loco *D*, ut arcus *Od* ad arcum *CD*; & propterea etiam in loco *B* ut ar-



cus *OB* ad arcum *CB*. Proinde ſi corpora duo, *D*, *d* exeant de loco *B*, & his viribus urgeantur: cum vires ſub initio ſint ut arcus *CB* & *OB*; (r) erunt velocitates primæ & arcus primo deſcripti in eâdem ratione. Sunto arcus illi *BD*, & *Bd*, arcus reliqui *CD*, *Od* erunt in eâdem ratione. Proinde vires, ipſis *CD*, *Od* proportionales manebunt in eâdem ratione ac ſub initio, & propterea corpora pergent arcus in eâdem ratione ſimul deſcribere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui *CD*, *Od* ſemper erunt ut arcus toti *CB*, *OB*, &

(r) * *Erunt velocitates primæ &c.* Nam, dato temporis momento, velocitates genitæ ſunt ut vires (13. lib. 1.) & ut ſpatia deſcripta (per cor. 4. lem. X. lib. 1.) 179.

DE MOTU CORPORUM.

& propterea arcus illi reliqui (f) ſimul deſcribentur. Quar corpora duo D, d ſimul pervenient ad loca C & O, alterum quidem in medio non reſiſtente ad locum C, & alterum in medio reſiſtente ad locum O. Cum autem velocitates in C & O ſint ut arcus CB, OB; erunt arcus, quos corpora ulterius pergendo ſimul deſcribunt, in (t) eâdem ratione. Sunto illi CE & Oe. Vis quâ corpus D in medio non reſiſtente retardatur in E eſt ut CE, & vis quâ corpus d in medio reſiſtente retardatur in e eſt ut ſumma vis Ce & reſiſtentiæ CO, id eſt ut Oe; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus CE, Oe proportionales arcus CB, OB; proindeque velocitates, in datâ illâ ratione retardatæ, manent in eâdem illâ datâ ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in datâ illâ ratione arcuum CB & OB; & (u) propterea ſi ſumantur arcus toti AB, aB in eâdem ratione, corpora D, d ſimul deſcribent hos arcus, & in locis A & a motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis BA, Ba proportionales ſunt arcuum partes quælibet BD, Bd vel BE, Be quæ ſimul deſcribuntur. *Q. E. D.*

Corol. Igitur motus velociſſimus in medio reſiſtente non incidit in punctum infimum C, ſed (x) reperitur in puncto illo O, quo arcus totus deſcriptus aB biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad a, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo à B ad O.

PRO-

(f) * *Simul deſcribentur.* Quia enim eſt ſemper CB ad OB, ut CD ad Od; evaneſcente arcu Od, evaneſcet etiam arcus CD, ſeu punctum d cum O, & D cum C ſimul coincident.

(t) * *In eâdem ratione.* Sunt enim velocitates, ut ſpatia dato temporis momento deſcripta, tam in medio reſiſtente quam in medio non reſiſtente (11.)

(u) * *Et propterea.* Si ſumatur arcus AC æqualis CB, & deinde arcus a B ad arcum AB in datâ ratione OB ad CB; corpora D & d ſimul deſcribent hos arcus, & in locis A & a motum omnem ſimul amittent. Nam cum ſit ſemper arcus CE ad Oe ut CB ad OB, ſeu ut CA ad Oa, ubi arcus CE æqualis evadet arcui CA, fiet quoque arcus Oe æqualis arcui Ca; & quia motus in medio non reſiſtente extinguitur in A, ob CA = CB; in medio reſiſtente extinguetur quoque in a, eo quod velocitates in locis E, e & A, a ſint in datâ ratione.

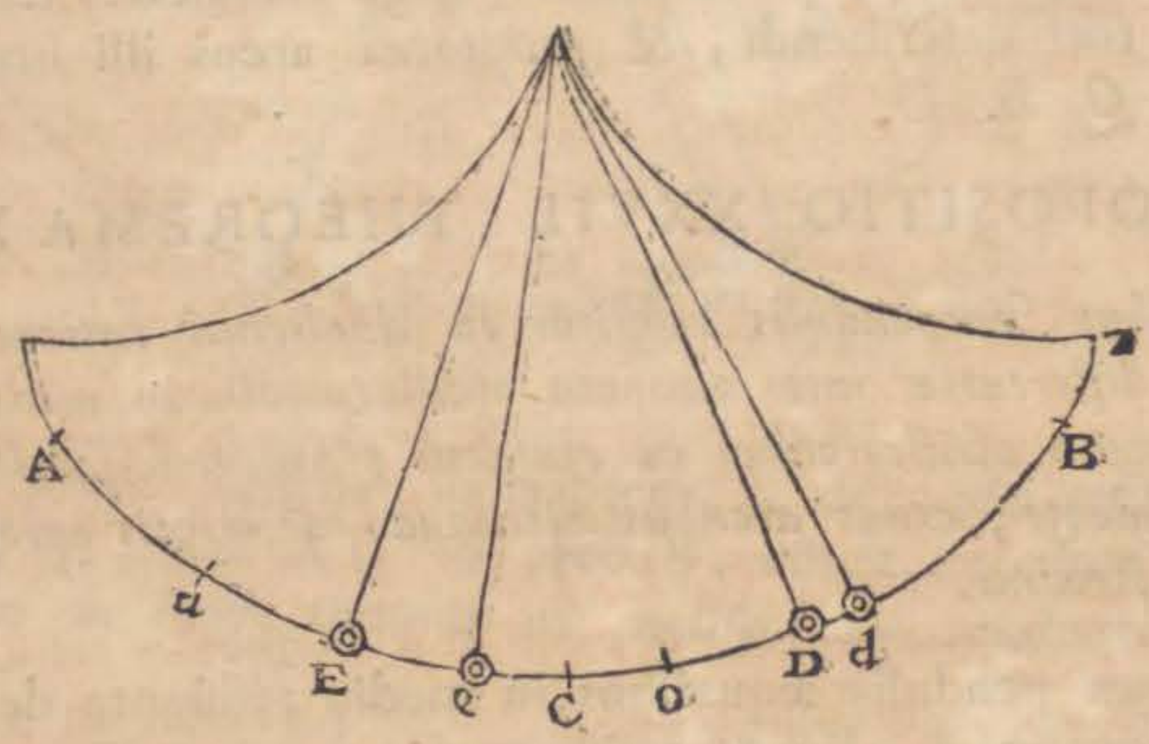
(x) * *Sed reperitur in puncto illo O, quo &c.* Nam ratio velocitatum in mediis reſiſtente & non reſiſtente eſt ſemper eadem

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXVI. THEOR. XXI.

Corporum funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in cycloide ſunt Iſochronæ.

(x) Nam ſi corpora duo, à centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus



eadem in punctis correſpondentibus, ut in d & D, in O & C, in e & E; ſed corporis in medio non reſiſtente oſcillantis velocitas maxima eſt in loco infimo C, & iiſdem gradibus retardatur in aſcenſu, quibus antea accelerabatur in deſcenſu; quare motus velociſſimus in medio reſiſtente reperitur in O, & iiſdem deinde gradibus retardatur in aſcenſu, quibus ante accelerabatur in deſcenſu.

(y) * *Nam ſi corpora duo*, exempli causâ B & D (vide fig. ſup.) *à centro ſuſpenſionis æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales* B a, D e, *& velocitates in arcuum partibus correſpondentibus*, ſeu in arcuum B a, D e quadrantibus, partibus tertiis &c., *ſint ad invicem ut arcus toti* B a, D e: *reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus à gravitate oriundis* (ſecundum tangentes cycloïdis agentibus) *quæ ſint ut iidem arcus* B a, D e, *auferantur* dum corpus deſcendit, *vel addantur* dum corpus aſcendit, *hæ reſiſtentiæ; erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa*, dato temporis momento genita, *ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ* (18), *velocitates ſemper erunt ut arcus toti* B a, D e: *igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eâdem ratione. Sed in principio motûs, ubi corpora incipiunt* è locis B, D *deſcendere & arcus illos* B a, D e *deſcribere*, ideoque ubi reſiſtentia nulla eſt, *vires ſunt arcubus illis proportionales.* Vires igitur, & velocitates, & arcus deſcripti, ac proinde & arcus deſcribendi, manent ſemper in datâ ratione. Quare corpora duo

179

DE MOTU CORPORUM.

arcus toti; reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus à gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eâdem ratione. Sed in principio motus, ut corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cum ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si corporibus funependulis reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales quam proximè.

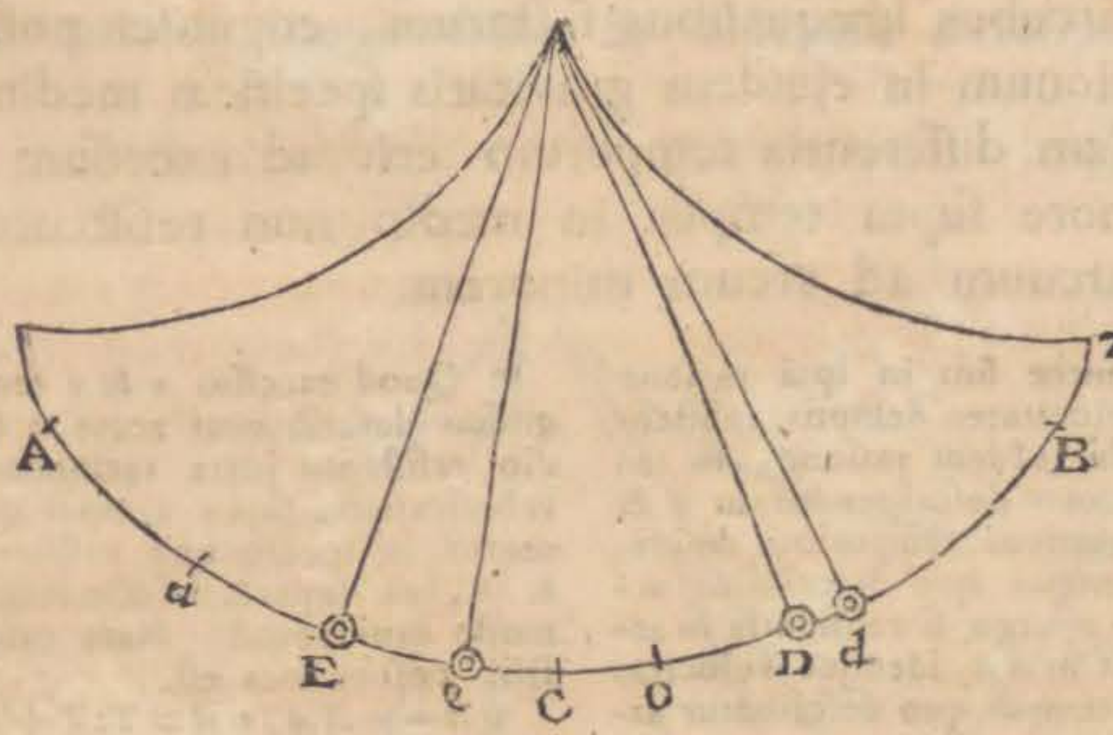
(z) Nam pendulis æqualibus in medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales A, B; & reſiſtentia corporis in arcu A, erit ad

ſimul perveniunt ad punctum infimum C; & eodem modo probatur quod arcus Ca, Ce ſimul deſcribant.

Scholion. Newtonus in duabus propoſitionibus præcedentibus oſtendit cycloidem eſſe curvam iſochronam, (quam alii tautochronam appellant,) non tantùm in medio non reſiſtente, ſed etiam in medio quod in ratione momentorum temporis, & in medio quod ratione ſimplici velocitatis reſiſtit; Verum quænam ſit curva illa tautochrona in hypotheſi reſiſtentiæ velocitatum quadrato proportionalis non indicat. Elegantiſſimas hujuſce problematis ſolutiones dedére celeberrimi mathematici Eulerus tom. 4. Acad. Petrop. & tom. 2. Mechanicæ, necnon Clariſſ. Bernoullius in monumentis Acad. Reg. Scientiarum Pariſ. an. 1730. Novam viam quâ curvæ tautochronæ in medio quolibet reſiſtente poſſint inveniri aperuit D. Fontaine in iiſdem monumentis anni 1734.

(z) * *Nam pendulis æqualibus in medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales A & B,* * ad pleniorem hujus demonſtrationis evidentiam, fingatur illos arcus in totidem partes quam minimas inter ſe æquales dividi, ſingulæ in utroque arcu erunt totis arcubus proportionales dicanturque *a* & *b*, ſi medium aut non reſiſteret aut reſiſteret in ratione velocitatum, velocitates initio particularum quarum-

ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B, in duplicatâ ratione velocitatum, id est, ut AA ad BB, quam proximè. Si resistentia in arcu B esset ad resistentiam in arcu A ut AB ad AA, tempora in arcubus A & B forent æ- LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXVII. THEOR. XXII.



qualia, per propositionem superiorem. Ideoque resistentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit excessum temporis in arcu A supra tempus in medio non resistente; & resisten-

rumvis correspondentium *a* & *b*, forent ut arcus ipsi *A* & *B*; At in medio resistente in ratione duplicatâ velocitatis paulo diversa erit hæc velocitatum ratio sed propter exiguam rationem resistentiæ ad velocitatem, negligi poterit hæc differentia, & supponi potest velocitates manere in ratione arcuum quam proximè; quod si ita supponatur *resistentia corporis in* quovis *puncto arcus A erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B*, sicut quadrata velocitatum in punctis illis correspondentibus eorum arcuum, id est ut *quadrata ipsorum arcuum AA & BB quam proximè*. Designetur vero velocitas initio arcus *a* per *v A*, & initio arcus *b* per *v B*. Designetur porro resistentia initio arcus *a* per *m AA*, & resistentia initio arcus *b* per *m BB*; In medio non resistente tempuscula quibus singulæ particulæ *a* & *b*, describentur erunt æqualia, (per Prop. II. lib 1.) designentur verò per *T*; Cum ergo in medio resistente propter velocitatem imminutam longius fiat tempus in inversâ ratione velocitatum sit *x* excessus ille tempusculi quo arcus *a* describitur in medio resistente supra tempusculum quo idem arcus in medio non resistente percurritur habebiturque ex hypothesibus $vA - mAA : vA = T : T + x$. 179.

Ut inveniatur ratio hujus excessus *x* ad excessum tempusculi quo arcus describitur in medio resistente secundum Legem duplicatam velocitatis, supra tempusculum *T*, quo idem arcus in medio non resistente percurritur; supponatur arcum B in tali medio ut resistentia in punctis *a* arcûs *A*, sit ad resistentiam in punctis correspondentibus *b* arcûs *B*, sicut *A* est ad *B*, ideoque sicut velocitates initio arcuum illorum, sive cum resistentia in *a* sit *mAA* resistentia in *b* fingatur esse *mAB*,

cui æ-

DE MOTU CORPORUM.

resistentia B B efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes A B & B B quam proximè, id est, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in medio resistente, in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente. Nam differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente, ut (b) differentia arcuum ad arcum minorem. Co-

cùm ergo resistentiæ sint in ipsâ ratione velocitatum, velocitates demptis resistentiis manebunt in eâdem ratione, in ratione nempe arcuum describendorum *a* & *b*, qui ergo æqualibus temporibus describentur, sed tempus quo describitur arculus *a* est $T+x$ ergo si resistentia in arcu *B*, sive *b* sit mAB ideoque velocitas sit $vB-mAB$ tempus quo describetur arcus *b* erit etiam $T+x$.

Cum autem revera resistentia initio arcus *b* non sit mAB sed mBB, si *y* sit excessus tempusculi in quo *b* describitur in medio resistente juxta quadrata velocitatum supra tempus quo idem arcus in medio non resistente percurritur, erit tempus $T+x$ ad tempus $T+y$ reciproce sicut velocitas $vB-mAB$ quæ supponebatur, ad velocitatem $vB-mBB$, eritque ideo $vB-mBB$ ad $vB-mAB=T+x$, ad $T+y$, cum ergo subtractio quantitatum mBB, mAB ex velocitate vB producat excessus *x* & *y* supra tempus *T*, oportet ut illæ quantitates mBB, mAB, sint reciproce ut *x* & *y*, sed mAB & mBB sunt ut *A* ad *B*, ergo *A* est ad *B*, sicut *x* est ad *y*, ideoque excessus *x* temporis arcus *A* in medio resistente in duplicatâ ratione velocitatis supra tempus in eodem arcu *A* in medio non resistente, est ad excessum *y* temporis arcus *B* in eodem medio supra tempus in eodem arcu *B* in medio non resistente, ut arcus *A* ad arcum *B*, cumque idem ratiocinium in omnibus arcubus quamminimis *a* & *b* institui possit, summæ omnium excessuum tempusculorum in arcu *A*, erit ad summam omnium excessuum tempusculorum in arcu *B* ut *A* ad *B*. Q. E. D.

* Quod excessus *x* & *y* tempusculorum quibus describuntur arcus *a* & *b*, in medio resistente juxta rationem duplicatam velocitatum, supra tempus quo describerentur in medio non resistente sint ut *A* & *B*, ex superiori demonstratione alio modo erui potest. Nam manentibus quæ illic posueramus est.

$vA-mAA:vA=T:T+x$ est etiam simili ratione $vB-mBB:vB=T:T+y$ & dividendo in utraque proportione fit

$$vA-mAA:mAA=T:x$$
$$vB-mBB:mBB=T:y.$$

Sed ob exiguitatem resistentiæ velocitatis respectu assumi potest $vA-mAA$ prò vA, & $vB-mBB$ pro vB, unde est quam proximè

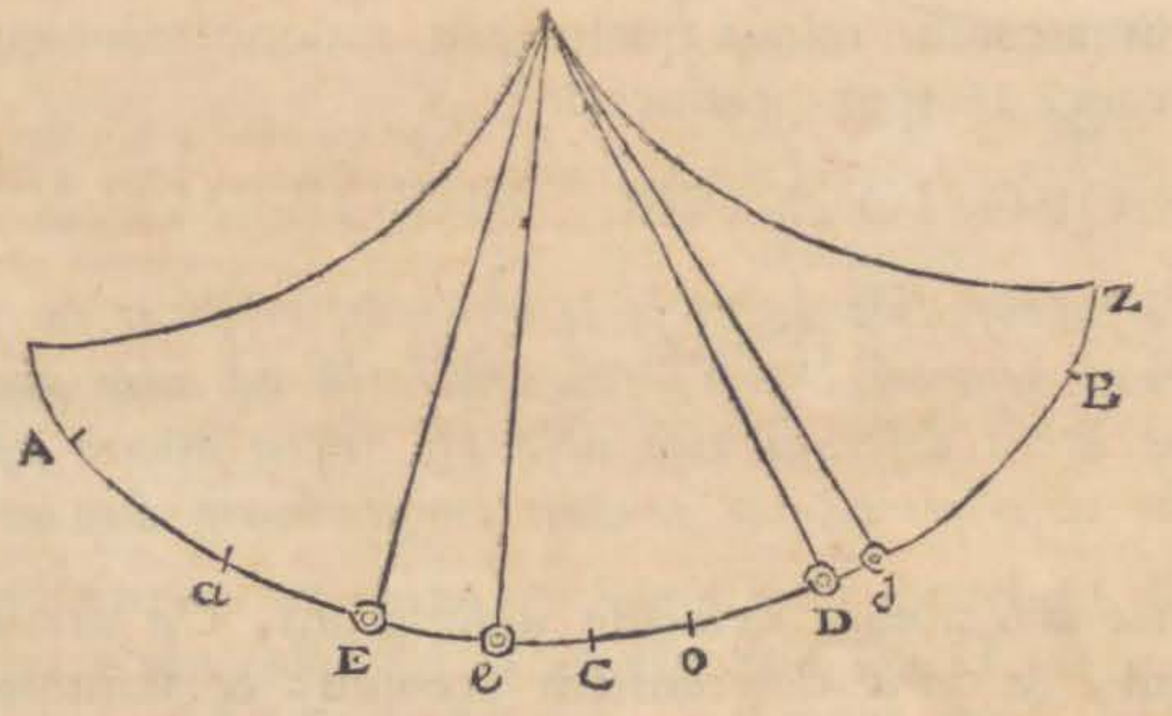
$$vA:mAA=T:x$$
$$vB:mBB=T:y$$ & reducendo priores rationes utriusque proportionis ad minores terminos.

$$v:mA=T:x$$
$$v:mB=T:y$$ & vicissim
$$v:T=mA:x$$
$$v:T=mB:y,$$ unde est
$$mA:x=mB:y,$$ ideo vicissim
$$mA:mB=x:y,$$ sed $mA:mB=A:B$, ideoque $A:B=x:y$. Ideoque excessus temporum in medio resistente in duplicatâ ratione velocitatum, supra tempora in medio non resistente in arcubus inæqualibus sunt ut illi arcus.

(b) * *Differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente ut differentia arcuum ad arcum minorem* †.

* Tempus per arcum *A* est $T+x$, tempus per arcum minorem *B*, est $T+y$, ergo differentia temporum $T+x-T-y=x-y$,

Corol. 2. (c) Oſcillationes breviores ſunt magis iſochronæ, & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in medio non reſiſtente, quam proximè. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora ſunt paulo majora, (d) propterea quod reſiſtentia in deſcenſu corporis quâ tempus producitur, (e) major ſit pro ratione longitudinis in deſcenſu deſcriptæ, quam reſi-



$x-y$, & exceſſus temporis in minore arcu ſupra tempus in medio non reſiſtente eſt y juxta denominationes notæ ſuperioris, ſed ex Theoremate eſt $x:y=A:B$ ergo dividendo $x-y:y=A-B:B$, hoc eſt *differentia temporum eſt ad exceſſum &c.*

(c) * *Oſcillations breviores ſunt magis Iſochronæ & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in medio non reſiſtente quam proximè.* * Breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in medio non reſiſtente quam proximè; ſit A arcus major, B minimus, inventum eſt (in nota a) quod erat $vA-mAA:vA=T:T+x$, & etiam quod erat $vB-mBE:vB-mAB=T+x:T+y$, unde per compoſitionem rationum invenitur $v^2AB-mvAAB-mvABB+m^2AABB$ (ſive $\overline{v^2AB-mvA^2B}\times 1-\frac{mB}{v}$ ad $v^2AB-mvA^2B=T:T+y$, itaque in primo termino neglecto $-\frac{mB}{v}$ (quod infinitè parvum ſupponitur ob exiguitatem arcus B ut & quantitatis m reſpectu v) fiet $v^2AB-mvAAB:v^2AB-mvAAB=T:T+y$; eſt ergo $T=T+y$, ſive tempus in medio non reſiſtente idem ac in medio reſiſtente quam proximè. 179.

Sed oſcillationes in medio non reſiſtente ſunt Iſochronæ. hinc ergo Oſcillationes breviores in medio reſiſtente ad has quam proximè accedentes cæteris ſunt magis Iſochronæ. Q. E. D.

(d) * *Propterea quod reſiſtentia in deſcenſu* &c. Quo major eſt reſiſtentia, eo minor fit, cæteris paribus, corporis deſcendentis velocitas, & ideo, manente deſcenſûs longitudine, tempus per reſiſtentiam producitur; & contra, quo major eſt reſiſtentia, eò citius extinguitur velocitas corpori inſita in aſcenſu.

(e) * *Major ſit pro ratione longitudi-*

DE MOTU CORPORUM.

resistentia in ascensu subsequente quâ tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum medii. (f) Nam corporibus tardescentibus paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia medium, eo quem à corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utrâque causâ tempus producitur.

PROPOSIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

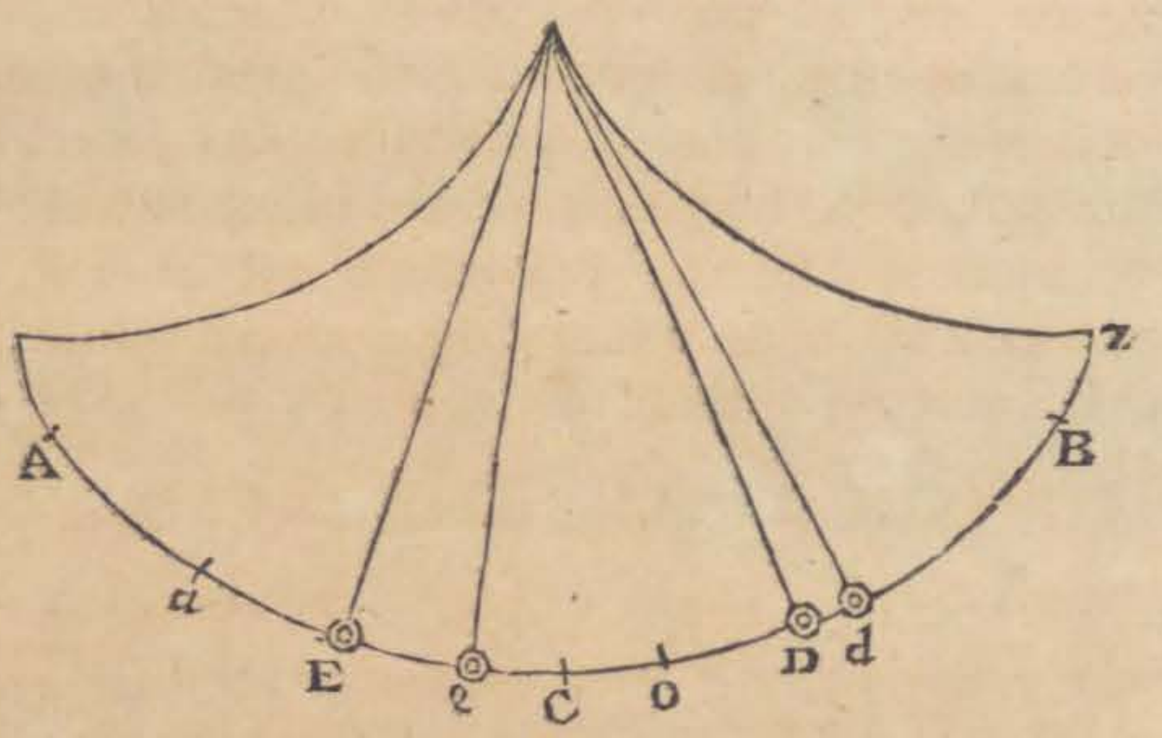
Si corpori funependulo in cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcus descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Designet *BC* arcum descensu descriptum, *Ca* arcum ascensu descriptum, & *Aa* differentiam arcuum: & stantibus quæ in propositione XXV. constructa & demonstrata sunt, erit vis, quâ corpus oscillans urgetur in loco quovis *D*, ad vim resistentiæ ut

nis. Longitudo in descensu descripta semper major est quam longitudo descripta in ascensu subsequente, si medium resistit; cum longitudines illæ in medio non resistente sint æquales (92. lib. I.).

(f) * *Nam corporibus tardescentibus*, seu quorum velocitas continuo decrescit, ut fit in corporum ascensu, paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis; & corporibus acceleratis, seu descendentibus, paulo magis resistitur quam iis quæ uniformiter progrediuntur. In priore enim casu, medium eo quem à corporibus accepit motu, quemque aliquandiu ob inertiam materiæ conservat, in eamdem plagam pergit cum corporibus, & ob validiorem ab initio motûs continue decrescentis acceptam impressionem magis agitatur, ac proinde magis conspirat cum corporibus motis, minoremque iis resistentiam objicit. At in secundo casu cum motus perpetuo acceleretur, medium ex prioribus ictibus non satis velocem motum accepit, & ideo ejus celeritas novis impulsibus continuo augenda est ut possit cum corporibus motis conspirare; hincque corporibus acceleratis resistit magis quam uniformiter progredientibus. Pendulis igitur in descensu magis resistit medium, in ascensu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utrâque causâ tempus producitur. Nam quo major est resistentia in descensu, & minor in ascensu, eo magis producitur tempus, ut supra dictum est.

ut arcus *CD* ad arcum *CO*, qui (g) ſemiſſis eſt differentiæ illius *Aa*. Ideoque vis, quâ corpus oſcillans urgetur in cycloidis principio ſeu puncto altiſſimo, id (h) eſt, vis gravitatis, LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXVIII. THEOR. XXIII.



erit ad reſiſtentiam ut arcus cycloidis inter punctum illud ſupremum & punctum infimum *C* ad arcum *CO*; id eſt (ſi arcus duplicentur) ut cycloidis totius arcus, ſeu (i) dupla penduli longitudo, ad arcum *Aa*. *Q. E. D.*

PRO-

(g) * *Qui ſemiſſis eſt differentiæ illius Aa.* Nam (per hyp.) arcus C A æqualis eſt arcui C B, & (per cor. prop. XXV.) arcus O a æqualis eſt arcui O B; quare C A − O a, ſeu A a − C O = C B − O B = C O, & hinc A a = 2 C O, ac C O = $\frac{1}{2}$ A a.

(h) * *Id eſt vis gravitatis.* In cycloidis principio ſive puncto altiſſimo tangens cycloidis eſt in directione gravitatis, & idcirco vis in cycloide æqualis eſt vi gravitatis in illo puncto, ut patet ex cor. prop. LI. lib. I. 179.

(i) * *Seu dupla penduli longitudo* (462. lib. 1.).

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Posito quod corpori in cycloide oscillanti resistitur in duplicatâ ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

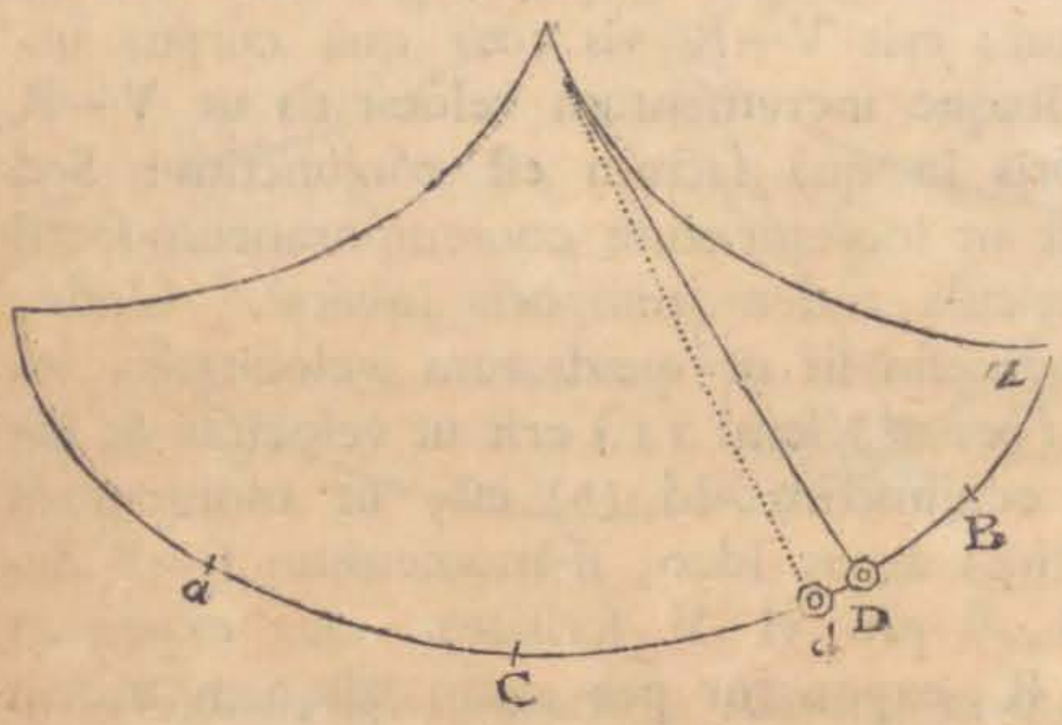
Sit Ba arcus oscillatione integrâ descriptus, sitque C infimum cycloidis punctum, & CZ semissis arcus cycloidis totius, longitudini penduli æqualis; & quæratur resistentia corporis in loco quovis D. Secetur recta infinita OQ in punctis O, S, P, Q, eâ lege, ut (si erigantur perpendicula OK, ST, PI, QE, centroque O & asymptotis OK, OQ describatur hyperbola $TIGE$ secans perpendicula ST, PI, QE in T, I & E, & per punctum I agatur KF parallela asymptoto OQ occurrens asymptoto OK in K, & perpendiculis ST & QE in L & F) fuerit area hyperbolica $PIEQ$ ad aream hyperbolicam $PITS$ ut arcus BC descensu corporis descriptus ad arcum Ca ascensu descriptum, & area IEF ad aream ILT ut OQ ad OS. Dein perpendiculo MN abscindatur area hyperbolica $PINM$ quæ sit ad aream hyperbolicam $PIEQ$ ut arcus CZ ad arcum BC descensu descriptum. Et si perpendiculo RG abscindatur area hyperbolica $PIGR$, quæ sit ad aream $PIEQ$ ut arcus quilibet CD ad arcum BC descensu toto descriptum; erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ ad aream $PINM$.

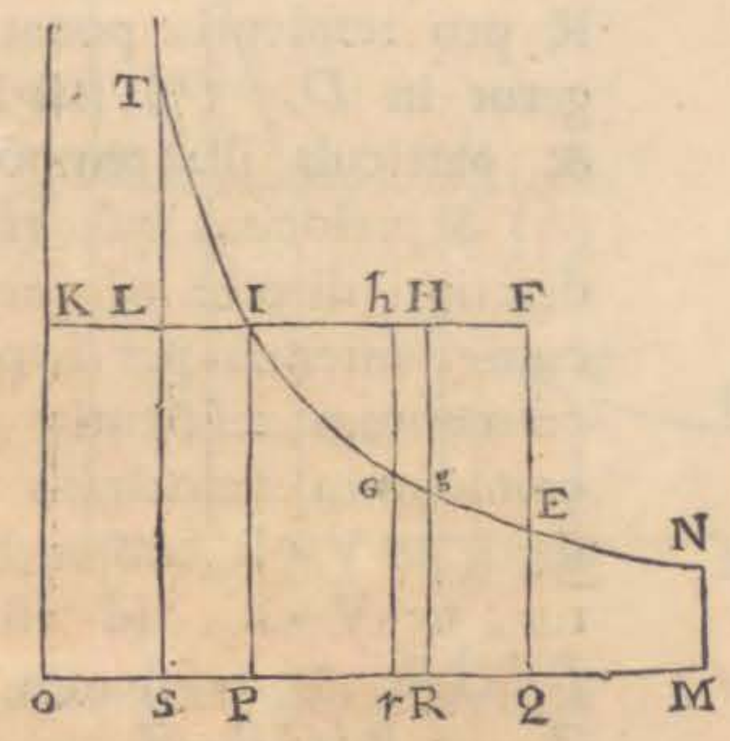
Nam cum vires à gravitate oriundæ quibus corpus in locis Z, B, D, a urgetur, (k) sint ut arcus CZ, CB, CD, Ca, & (l) arcus illi sint ut areæ $PINM$, $PIEQ$, $PIGR$, $PITS$; exponantur tum arcus tum vires per has areas respectivè. Sit insuper Dd spatium quam minimum à corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam $RGgr$ parallelis RG, rg comprehensam; & producatur rg

(k) * *Sint ut arcus &c.*, per demonstrata in prop. LI. & Cor. 2. prop. LII. lib. I.

(l) * *Et arcus illi sint ut areæ*, per constructionem.

rg ad h, ut ſint $GHhg$, & $RGgr$, contemporanea (m) arearum IGH, $PIGR$ decrementa. Et (n) areæ $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ incrementum $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, ſeu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$, ſeu





$Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad RG; ideoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR \times GR$ ſeu (o) $OP \times PI$, hoc eſt (ob (p) æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, $PIHR$

(m) * *Arearum IGH, PIGR decrementa.* Cum enim corpus e loco D deſcendit in arcu DC, decreſcit area PIGR huic arcui proportionalis, & cum eâ decreſcit quoque area IGH.

(n) * *Et areæ &c.* Nam, ob datas OQ, & IEF, decrementum areæ $\frac{OR}{OQ}$IEF $-$IGH, ſumptis duorum terminorum fluxionibus, invenitur æquale $\frac{Rr}{OQ}$IEF$-$GHhg; & ideo, mutatis ſignis, ejuſdem areæ incrementum eſt $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, ſeu &c. 179.

(o) * *Seu OP × PI.* Per theor. 4. de hyperbolâ.

(p) * *Ob æqualia &c.* Cum ſit $HG = HR - GR$, erit $OR \times HG = OR \times HR - OR \times GR$; ſed $OR \times HR$ æquale eſt rectangulo ORHK, & (per theor. 4. de hyp.) $OR \times GR$ æquale eſt rectangulo OPIK. Quare $OR \times HG = ORHK - OPIK = PIHR = PIGR + IGH$.

DE MOTU CORPORUM.

$PIHR$ & $PIGR+IGH$) ut $PIGR+IGH-\frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OPIK$. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ dicatur Y, atque areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ detur, (q) erit incrementum areæ Y ut $PIGR-Y$.

Quod si V designet vim à gravitate oriundam, arcui describendo CD proportionalem, quâ corpus urgetur in D, & R pro resistentia ponatur; erit V−R vis tota quâ corpus urgetur in D. (r) Est itaque incrementum velocitatis ut V−R & particula illa temporis in quâ factum est conjunctim: Sed (s) & velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directè & particula eadem temporis inversè. Unde, cum resistentia per hypothesin sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ (per (t) lem. 11.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id (u) est, ut momentum spatii & V−R conjunctim; atque ideo, si momentum spatii detur, ut V−R; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens $PIGR$, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut $PIGR-Z$.

Igitur areâ $PIGR$ per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione $PIGR-Y$,

(q) * *Erit incrementum areæ, ut* $PIGR-Y$. Quoniam enim (hyp.) est $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH=Y$, & (ex demonstratis) incrementum areæ $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ est ad decrementum (ex hyp.) datum $RGgr$, ut $PIGR+IGH-\frac{OR}{OQ}IEF$, seu $PIGR-Y$, ad datum rectangulum $OPIK$; manifestum est quod incrementum areæ Y sit ad $PIGR-Y$ in datâ ratione, nimirum in ratione decrementi dati $RGgr$ ad rectangulum datum $OPIK$.

(r) * *Est itaque incrementum velocitatis, ut &c.* (18).

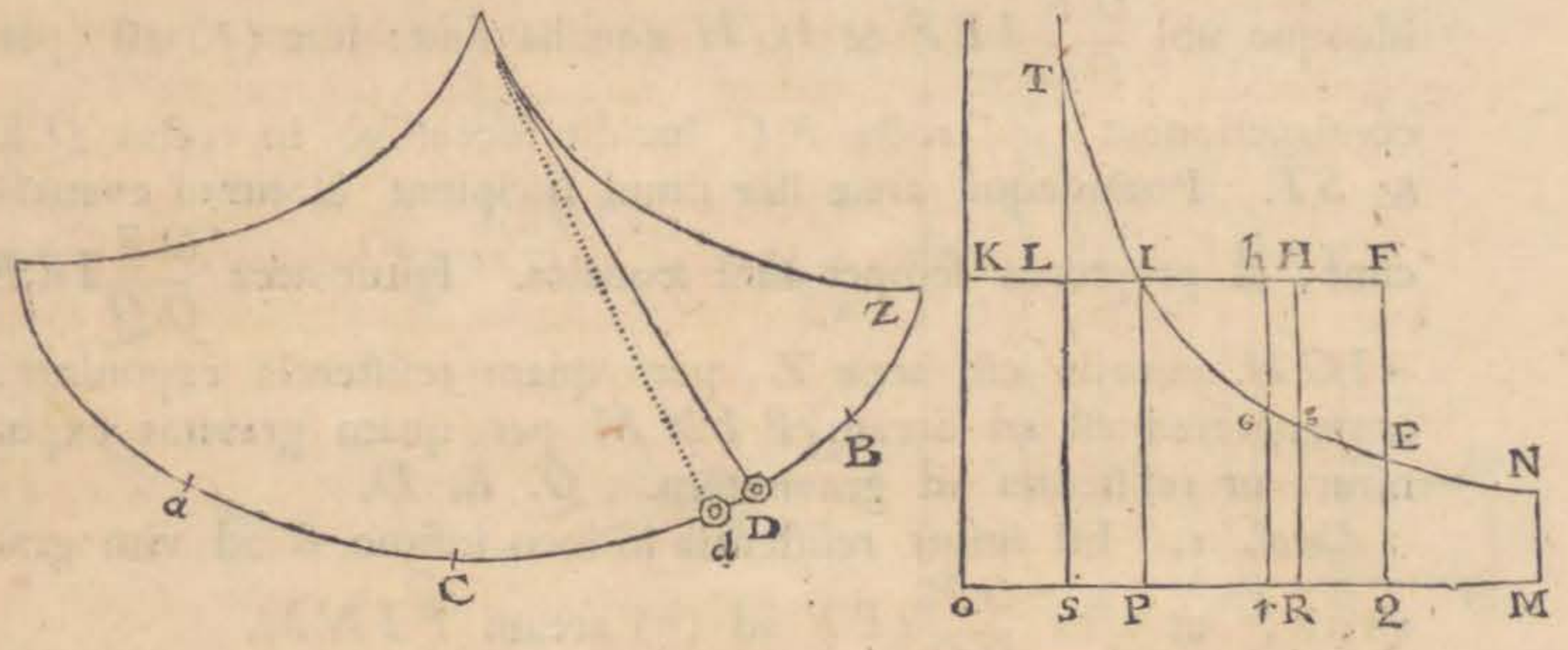
(s) * *Sed & velocitas ipsa est &c.* (11)

(t) * *Per Lemma* II. casu 3°. idque statim apparet: nam si velocitas dicatur v, cum sit R ut vv, erit dR ut $2vdv$, seu ut vdv.

(u) * *Id est, ut momentum spatii &c.* Quia (ex dem.) velocitatis incrementum est ut $V-R$ & momentum temporis conjunctim, velocitas autem ipsa ut incrementum spatii directe & momentum temporis inversè; erit ex æquo, velocitas in suum incrementum ducta, ut $V-R$ & incrementum spatii conjunctim, in quâ ratione est etiam incrementum resistentiæ (ex dem.).

Y, & area Z in ratione $PIGR-Z$. Et propterea ſi areæ & Z ſimul incipiant & ſub initio æquales ſint, hæ (x) per additionem æqualium momentorum pergent eſſe æquales, & æqualibus itidem momentis ſubinde decreſcentes ſimul evaneſcent. Et viciſſim, ſi ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, æqualia habebunt momenta & ſemper erunt æquales: id adeo quia

LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXIX. PROB. VI.



ſi reſiſtentia Z augeatur, velocitas unà cum arcu illo *Ca*, qui in aſcenſu corporis deſcribitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis unà cum reſiſtentia ceſſat propius accedente ad punctum *C*, (y) reſiſtentia citius evaneſcet quam area Y. Et contrarium eveniet ubi reſiſtentia diminuitur. Jam

(x) * *Hæ per additionem æqualium momentorum pergent eſſe æquales*, &c. Cum enim ſemper creſcat area *Y* in ratione $PIGR-Y$, & area *Z* in ratione $PIGR-Z$; ſi areæ illæ *Y* & *Z* ſimul incipiant & initio æquales ſint, erunt etiam areæ $PIGR-Y$ & $PIGR-Z$ ſub initio æquales; &, ob datam incrementorum areæ *Y* & areæ *Z* ad $PIGR-Y$ & $PIGR-Z$ rationem, incrementa illa ſicut & $PIGR-Y$ ac $PIGR-Z$ manebunt ſemper æqualia, uti ſub initio. Quare etiam areæ *Y* & *Z* æqualibus itidem momentis ſubinde decreſcent & ſimul evaneſcent.

(y) * *Reſiſtentia citius evaneſcet quam area* Y., *& contrarium &c.* Nam ſi area *Z* ſemper æqualis ſit areæ *Y*, ſimul incipient ſimulque evaneſcent. Incipit autem area *Y* (ut infra oſtendetur) ubi recta R G incidit in rectam Q E, & deſinit ubi recta R G incidit in rectam S T, ſuntque Q & S puncta fixa per arcuum C B, C a longitudines determinata (per conſtr.). Quare ſi reſiſtentia *Z* augeatur vel minuatur ita ut ceſſet in puncto arcûs C a infra vel ſupra a poſitum, citius vel tardius evaneſcet area *Z* quam area *Y*, quia hæc non deſinit niſi ubi corpus pervenit ad locum a. Reſiſtentia igitur, ſeu area *Z* nec major nec minor eſſe poteſt quam area *Y*, ſi ſimul incipiant & ſimul evaneſcant. 172.

DE MOTU CORPORUM.

Jam vero area Z incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio motus ubi arcus CD arcui CB æquatur & recta RG incidit in rectam QE, & in fine motus ubi arcus CD arcui Ca æquatur & RG (z) incidit in rectam ST. Et area Y seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incipit desinitque ubi nulla est, ideoque ubi $\frac{OR}{OQ} IEF$ & IGH æqualia sunt: hoc (a) est (per constructionem) ubi recta RG incidit successivè in rectas QE & ST. Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescunt, & propterea semper sunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ æqualis est areæ Z, per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream $PINM$ per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ} IEF$ ad (b) aream $PINM$.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area $PIHR$ est ad aream IEF ut OR ad OQ. Eo enim in casu momentum ejus (nimirum $PIGR - Y$) (c) evadit nullum. *Corol.*

(z) * *Incidit in rectam ST.* Hæc patent per constructionem, quâ areæ PIQ, PIGR, PITS factæ sunt arcubus CB, CD, Ca proportionales.

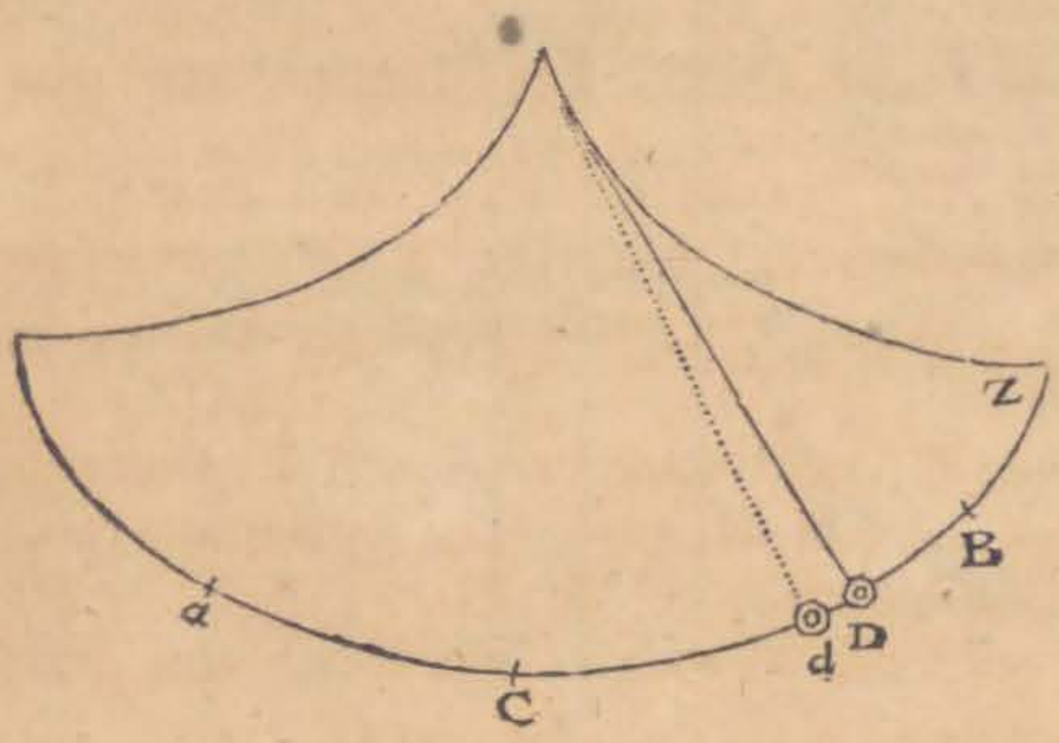
(a) * *Hoc est (per constructionem) ubi &c.* Ubi enim *Y* evanescit, fit quoque $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH = o, & ideo $\frac{OR}{OQ}$ IEF = IGH; hoc autem contingit ubi fit IEF : IGH = OQ : OR, quod evenit primo ubi recta RG incidit in rectam QE & incipit area *Y*. Tunc enim IEF = IGH & OQ = OR ideoque IEF. IGH = OQ:OR. Est etiam $\frac{OR}{OQ}$ IEF = IGH, quando fit OR = OS & IGH = ILT: nam cum (per constr.) fit area IEF ad aream ILT ut OQ ad OS, si ponatur OR = OS, fiet ILT = IGH, eritque area IEF ad aream IGH ut OQ ad OR, & hinc $\frac{OR}{OQ}$ IEF = IGH. Est autem OR = OS, ubi recta RG incidit in rectam ST, & area *Y* definit ibidem.

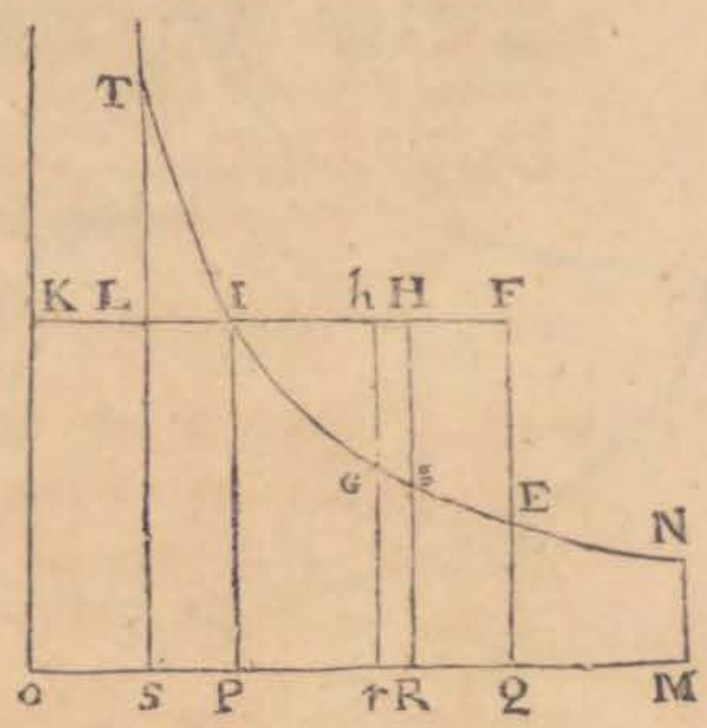
(b) * *Ad aream PINM.* Nam evanescente arcu CD, evanescit ipsi proportionalis area PIGR, & hinc evanescit etiam area IGH, fitque OR = OP, atque proinde $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH = $\frac{OP}{OQ}$ IEF.

(c) * *Evadit nullum.* Momentum areæ *Y* est ut PIGR − *Y* (ex dem.), id est, ut PIGR + IGH − $\frac{OR}{OQ}$ IEF = PIHR − $\frac{OR}{OQ}$ IEF. Quâ propter momentum areæ *Y* nullum fit, & ideo resistentia

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in subduplicatâ ratione resistentiæ, & ipso motus initio æquatur velocitati corporis in eâdem cycloide sine (d) omni resistentiâ oscillantis.

Cæ-



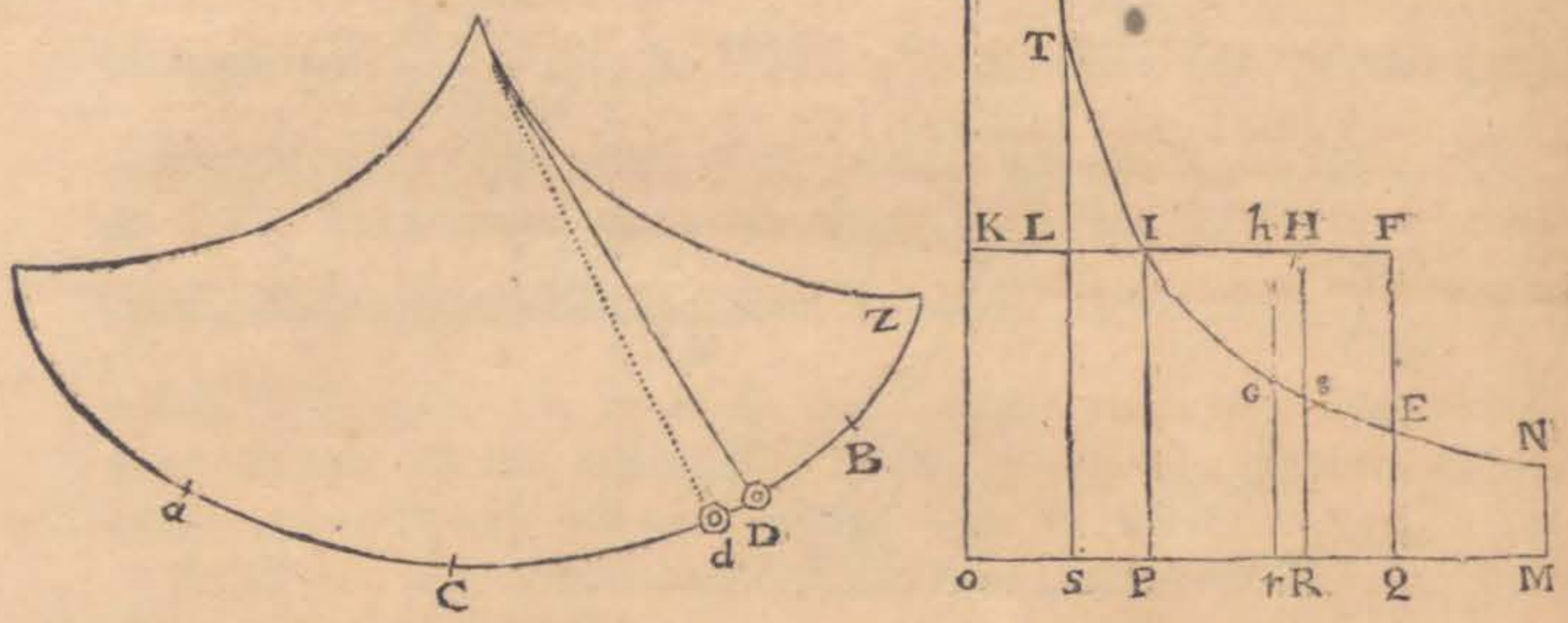


stentia (cui area *Y* proportionalis est) maxima evadit (48), ubi est $PIHR - \frac{OR}{OQ} IEF = o$, seu ubi $PIHR = \frac{OR}{OQ} IEF$, ac proinde ubi area PIHR est ad aream IEF ut OR ad OQ.

(d) * *Sine omni resistentiâ oscillantis.* Quoniam velocitatis quadratum in loco quovis D est ut resistentia, seu ut area *Y* in medio resistente; & ut $CB^2 - CD^2$ (per prop. LII. lib. I.) seu ut $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2$ in medio non resistente; si velocitates illæ dicantur *v*, *V*, sintque *C* & *E* quantitates constantes, erit $vv = C \times Y$, & $VV = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$. Et quia initio motûs, dum corpus est in B, velocitates illæ æquales sunt, ob resistentiam respectu vis à gravitate oriundæ evanescentem; erit initio motus $C \times Y = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$; sed initio motus est *Y*, seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH = \frac{OR}{OQ} IEF - IEF + QR \times FE =$ 179.
$\frac{OR \times IEF - OQ \times IEF + OQ \times QR \times FE}{OQ}$
$= \frac{QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF}$, coincidente nimirum GH cum EF, & QR seu HF evanescente. Et similiter initio motus est $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2 = \overline{PIEQ + PIGR} \times \overline{PIEQ - PIGR} = 2PIEQ - QR \times QE \times \overline{QR \times QE} = 2PIEQ \times QR \times QE$, neglecto termino evanescente $QR^2 \times QE^2$. Quare erit initio motus $\frac{C \times QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF} = E \times QR \times QE \times 2PIEQ$, & ideo $C : E = 2PIEQ \times QE : \frac{OQ \times FE - IEF}{OQ}$; unde, cum sit semper $vv : VV = C \times Y : E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$, erit quoque $vv : VV = 2PIEQ \times QE \times \frac{OR}{OQ} \overline{IEF - IGH} : \frac{\overline{OQ \times FE - IEF}}{OQ} \times \overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2$.

DE MOTU CORPORUM.

Cæterum (e) ob difficilem calculum quo reſiſtentia & velocitas per hanc propoſitionem inveniendæ ſunt, viſum eſt propoſitionem ſequentem ſubjungere.



Innoteſcet igitur velocitas in medio reſiſtente per inventam ipſius rationem ad velocitatem in medio non reſiſtente in ſingulis locis.

(e) * *Cæterum ob difficilem calculum &c.* Sit $OP=a$, $PI=FQ=b$, $OS=x$, & ideo $ST=\frac{ba}{x}$, $SP=LI=a-x$, & $LT=\frac{ba}{x}-b$. Deinde $OQ=z$, & hinc $QE=\frac{ba}{z}$, $PQ=FI=z-a$, & $FE=b-\frac{ba}{z}$. Et erit areæ PIEQ elementum $=\frac{badz}{z}$, areæ PITS elementum $=-\frac{badx}{x}$; & inde area $PIEQ=baL.z+Q$ *conſt.*; & quia area illa evaneſcit ubi eſt $PQ=z-a=0$, ſeu ubi $z=a$, invenitur conſtans $Q=-baL.a$, atque adeo area $PIEQ=baL.z-baL.a=baL.\frac{z}{a}$. Simili modo reperitur area PITS $=baL.\frac{a}{x}$. Sit jam arcus BC ad arcum Ca, ut m ad 1; & erit (per conſtr.) $m:1=baL\frac{z}{a}:baL\frac{a}{x}=L.\frac{z}{a}:L.\frac{a}{x}$, ac proinde $L.\frac{z}{a}=mL.\frac{a}{x}=L.\frac{a^m}{x^m}$, atque $\frac{z}{a}=\frac{a^m}{x^m}$, & $z=\frac{a^{m+1}}{x^m}$.

Porro ex ſuperioribus denominationibus invenitur areæ IEF elementum $=bdz-\frac{badz}{z}$, & inde area ipſa $IEF=bz-baLz+Q$ *conſt.* quæ cum ſit o ubi $FI=z-a$ evaneſcit ſitque $z=a$, eſt $Q=-ba+baL.a$ ideoque $IEF=baL\frac{a}{z}+bz-ba$; & ſimiliter habetur area $ILT=baL.\frac{a}{x}+bx-ba$. Sed (per conſtr.) area IEF eſt ad aream ILT ut OQ ad OS, ſeu ut z ad x: quare $z:x=baL.\frac{a}{z}+bz-ba$

$-ba:baL\frac{a}{x}+bx-ba$, & dividendo per b, ac loco z ſcribendo ipſius valorem $\frac{a^{m+1}}{x^m}$, fit $a^{m+1}:x^{m+1}=aL.\frac{x^m}{a^m}+\frac{a^{m+1}}{x^m}-a:aL.\frac{a}{x}+x-a$; unde habetur $a^{m+2}L.\frac{a}{x}+a^{m+1}x-a^{m+2}=ax^{m+1}L.\frac{x^m}{a^m}+a^{m+1}x-ax^{m+1}$; & inde eruitur $mx^{m+1}Lx-mx^{m+1}La+a^{m+1}Lx-x^{m+1}=a^{m+1}L.a-a^{m+1}$. Si itaque ex hâc æquatione per ſerierum regreſſum, vel quâcumque alia methodo, determinetur valor x per arbitrariam lineam a, & deinde per æquationem $z=\frac{a^{m+1}}{x^m}$ inveniatur valor ipſius z; Newtoniana conſtructio ad calculum logarithmorum revocabitur.

Scholion. Hermannus prop. 73. & 74. lib. 2. phoronomiæ geminam conſtructionem dedit, quâ corporis in curvâ qualibet oſcillantis reſiſtentia velocitatis quadrato proportionalis definitur, & Newtonianam pro cycloide conſtructionem ope logarithmicæ ſimpliciorem reddidit. Difficile autem non eſt (44) hanc Newtoni conſtructionem revocare ad logarithmicam per punctum N & aſymptoto KO ad partes O productâ deſcribendam.

179.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta aB *æqualis sit cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ sint ad longitudinem penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum & arcum ascensu toto subsequente descriptum ducta in arcuum eorundem semissummam, æqualis erit areæ* BKa *à perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.*

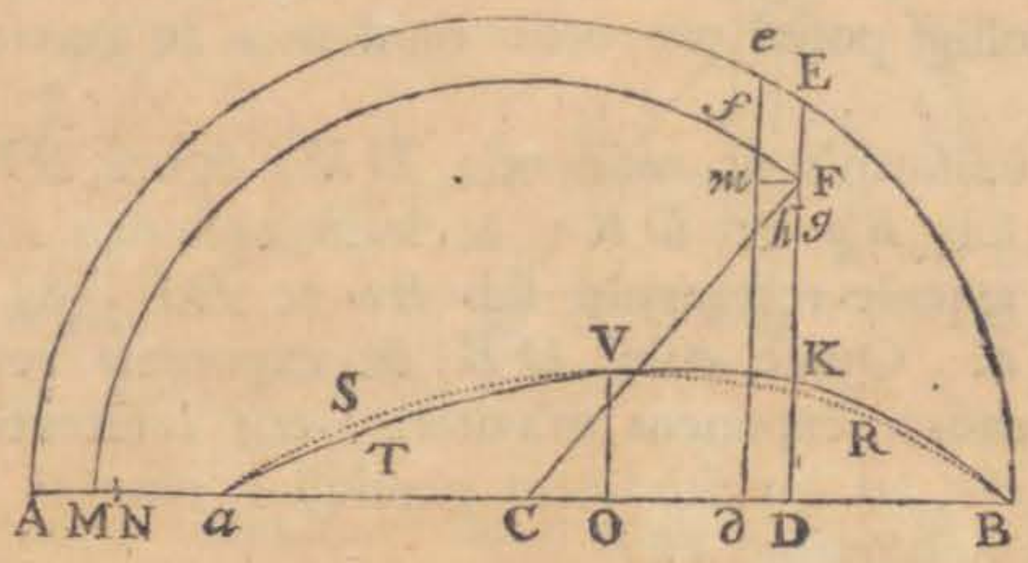
Exponatur enim tum cycloidis arcus, oscillatione integrâ descriptus, per rectam illam sibi æqualem *aB*, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem *AB*. Bisecetur *AB* in *C*, & (f) punctum *C* repræsentabit infimum cycloidis punctum, & (g) erit *CD* ut vis à gravitate oriundâ, quâ corpus in *D* secundum tangentem cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem penduli quam (h) habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem *CD*, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & si in *DE* capiatur *DK* in eâ ratione ad longitudinem penduli quam habet resistentia ad gravitatem, erit *DK* exponens resistentiæ. Centro *C* & intervallo *CA* vel *CB* constructur semicirculus *BEeA*. Describat autem corpus tempore quam minimo spatium *Dd*, & erectis perpendiculis *DE*, *de* circumferentiæ occurrentibus in *E* & *e*, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, descendendo à puncto *B*, acquireret in locis *D* & *d*. Patet hoc (per prop. LII. lib. I.). Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa *DE*, *de*; sitque *DF* velocitas quam acquirit in *D* cadendo de *B* in medio resistente. Et si cen-

(f) * *Et punctum C repræsentabit infimum cycloidis punctum.* Nam cycloidis punctum infimum arcum quem corpus in medio non resistente oscillando describit in duas partes æquales dividit.

(g) * *Et erit CD ut vis à gravitate oriunda &c.* patet per demonstr. prop. LI. lib. I.

(h) * *Quam habet vis in D ad vim gravitatis*, per cor. I. prop. LI. & not. 462. lib. I.

centro C & intervallo CF describatur circulus FfM occurrens rectis de & AB in f & M, (i) erit M locus ad quem deinceps sine ulteriore resistentiâ ascenderet, & df velocitas quam acquireret in d. Unde etiam si Fg designet velocitatis momentum quod corpus D describendo spatium quam minimum Dd, ex resistentiâ medii amittit; & sumatur CN æqualis Cg: erit N locus ad quem corpus deinceps sine ulteriore resistentiâ ascenderet, & MN erit decrementum ascensus ex velocitatis il-



lius amissione oriundum. Ad df demittatur perpendiculum Fm, & velocitatis DF decrementum Fg à resistentiâ DK genitum, erit ad velocitatis ejusdem incrementum fm à vi CD genitum, ut vis generans DK (k) ad vim generantem CD. Sed & (l) ob similia triangula Fmf, Fhg, FDC, est fm ad Fm seu Dd ut CD ad DF; & ex æquo Fg ad Dd ut DK ad DF. Item Fh ad Fg ut DF ad CF; & ex æquo perturbatè Fh (m) seu MN ad Dd ut DK ad CF seu CM;

(i) * *Erit M locus ad quem &c.* Eamdem enim velocitatem haberet corpus in D, ad si seclusâ omni resistentiâ percurrisset spatium CF—CD, & ideo (per modo demonstrata) in loco d haberet velocitatem df, & in loco M nullam.

(k) * *Ad vim generantem CD.* Sunt enim velocitatum elementa dato temporis momento genita, ut vires generantes (13. lib. 1.)

(l) * *Ob similia triangula &c.* Sunt enim anguli ad m, h, & D recti, angulus CFD duobus triangulis FDC, Fhg communis, & angulus fFm æqualis angulo CFD, quia si ex angulis rectis mFD, fFC subducatur communis angulus mFC, remanebunt anguli æquales fFm, CFD. Tria igitur triangula Fmf, Fhg & FDC æquales angulos habent, suntque proinde similia. 179.

(m) * *Fh seu MN.* Cum sit CM æqualis CF, & CN æqualis Cg seu Ch, angulo hCg evanescente, est MN = CM — CN = CF — Ch = Fh.

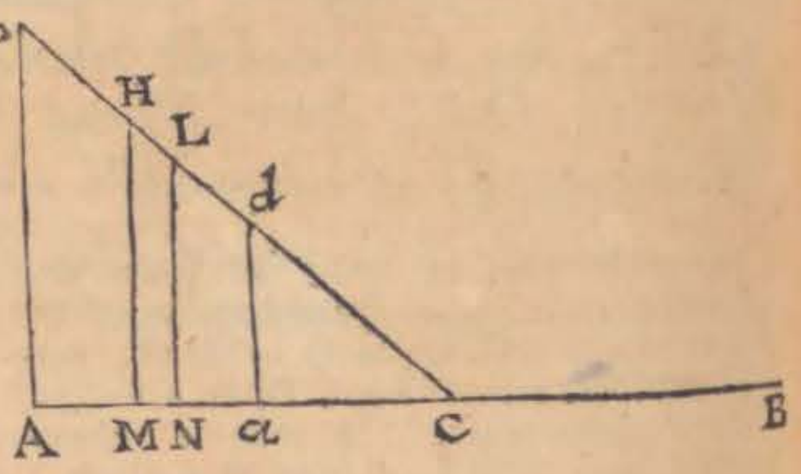
DE MOTU CORPORUM.

(n) ideoque ſumma omnium $MN \times CM$ æqualis erit ſummæ omnium $Dd \times DK$. Ad punctum mobile M erigi ſemper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ CM, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem Aa; & trapezium ex illo motu deſcriptum ſive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2} aB$ (o) æquabitur ſummæ omnium $MN \times CM$, ideoque ſummæ omnium $Dd \times DK$, id eſt, areæ $BKVTa$. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ex lege reſiſtentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa colligi poteſt proportio reſiſtentiæ ad gravitatem quam proximè.

Nam ſi uniformis ſit reſiſtentia DK, figura $BKTa$ rectangulum erit ſub Ba & DK; & inde rectangulum ſub $\frac{1}{2} Ba$ & Aa erit æquale rectangulo ſub Ba & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2} Aa$. Quare cum DK ſit exponens reſiſtentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2} Aa$ ad longitudinem penduli; omninò ut in prop. XXVIII. demonſtratum eſt.

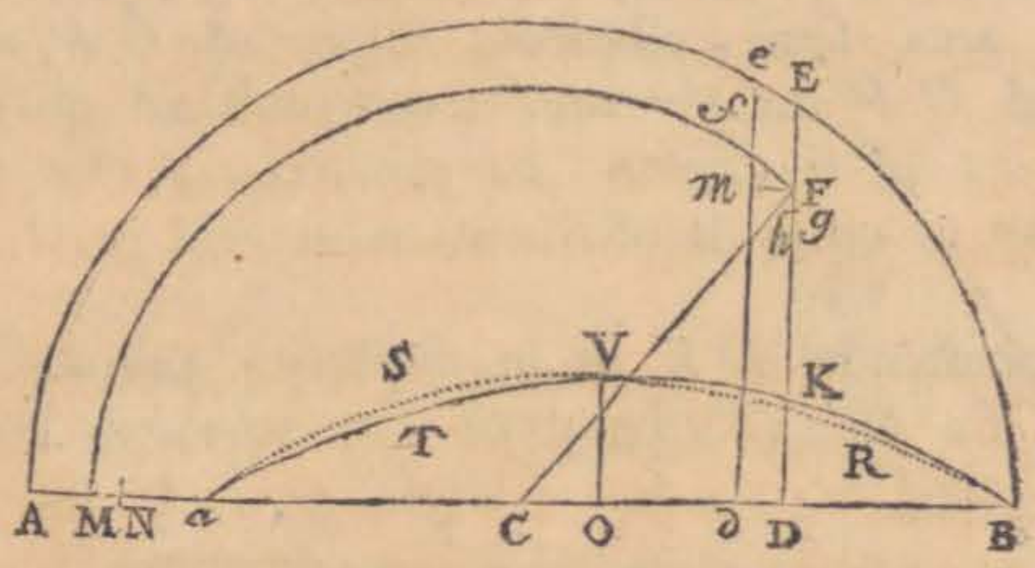
Si reſiſtentia ſit ut velocitas, figura $BKTa$ ellipſis erit quam proximè. Nam ſi corpus, in medio non reſiſtente, oſcillatione in-



(n) * *Ideoque ſumma omnium MN× CM &c.* Quoniam (per modo demonſtrata) MN×CM=Dd×DK, erit ſumma omnium MN×CM æqualis ſummæ omnium Dd×DK, modo ſimul incipiant ſimulque deſinant. Incipit autem ſumma omnium Dd×DK in B & deſinit in a, & ſumma omnium MN×CM incipit in A, & ideo ſi deſinat in a, erunt ſummæ illæ æquales.

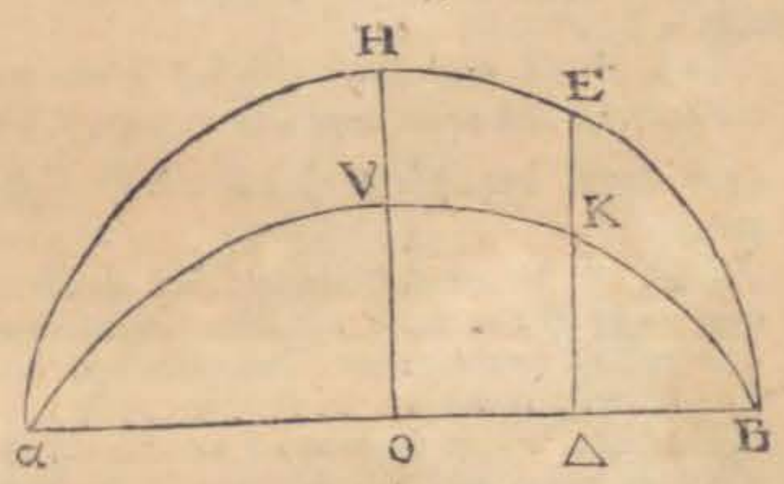
(o) * *Æquabitur ſummæ &c.* Erigatur ad punctum A perpendiculum AP=AC, jungatur PC, & ductis per M & N ac a perpendiculis MH, NL, ab; erit ſemper MN×CM=MN×HM; ideoque ſi ordinata variabilis HM ducatur in totam longitudinem Aa, erit trapezium APba æquale ſummæ omnium MN×CM ab A ad a; ſed trapezium illud eſt CAP−Cab=$\frac{1}{2}$CA²−$\frac{1}{2}$Ca²=$\frac{1}{2}$(CA+Ca)×(CA−Ca)=$\frac{1}{2}$aB×Aa, ob CB=CA. Ergo &c.

integrâ deſcriberet longitudinem BA, velocitas in loco quovis D foret ut circuli diametro AB deſcripti ordinatim applicata DE. Proinde cum Ba in medio reſiſtente, & BA in medio non reſiſtente, (P) æqualibus circiter temporibus deſcri- LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXX. THEOR. XXIV.



bantur; ideoque velocitates in ſingulis ipſius Ba punctis, ſint quam proximè ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis BA, ut eſt Ba ad BA; erit velocitas in puncto D in medio reſiſtente ut circuli vel ellipſeos ſuper diametro Ba

(P) * 180. *Æqualibus circiter temporibus deſcribantur.* Quia reſiſtentia minuendo corporis velocitatem tempus producit in deſcenſu à B ad C, illudque contrahit in aſcenſu à C ad a, longitudines BA in medio non reſiſtente & Ba in medio reſiſtente, earumque longitudinum partes proportionales, æqualibus circiter temporibus deſcribuntur. Sunt autem velocitates ut ſpatia eodem temporis momento deſcripta (11); quare velocitates in partibus longitudinum BA, Ba correſpondentibus ſunt quam proximè ut longitudines BA, Ba, id eſt, in ratione datâ. Centro O & diametro AB deſcribatur circulus BEHa, ſitque BΔ in hac figurâ ad BD in figurâ textûs, ut Ba ad BA, hoc eſt, ut velocitas in loco Δ in medio reſiſtente ad velocitatem in loco D in medio non reſiſtente; & ductâ



180.

ordinatâ ΔE, erit etiam, ob figurarum ſimilitudinem ΔE ad DE ut Ba ad BA, ideoque ut velocitas in medio reſiſtente ad velocitatem in medio non reſiſtente. Velocitas igitur in medio reſiſtente erit ſemper ut ordinata variabilis ΔE.

DE MOTU CORPORUM.

Ba descripti ordinatim applicata; (q) ideoque figura $BKVTa$ ellipsis erit quam proximè. Cum resistentia velocitati proportionalis supponatur, sit OV exponens resistentiæ in puncto medio O; & ellipsis $BRVSa$, centro O, semiaxibus OB, OV descripta, figuram $BKVTa$, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproximè. Est igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut (r) area semi-ellipseos hujus ad $OV \times BO$: id est, Aa ad OV ut (f) area semicirculi ad quadratum radii, sive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11} Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem gravitatem.

Quod si resistentia DK sit in duplicatâ ratione velocitatis, figura $BKVTa$ ferè (t) parabola erit verticem habens V & axem

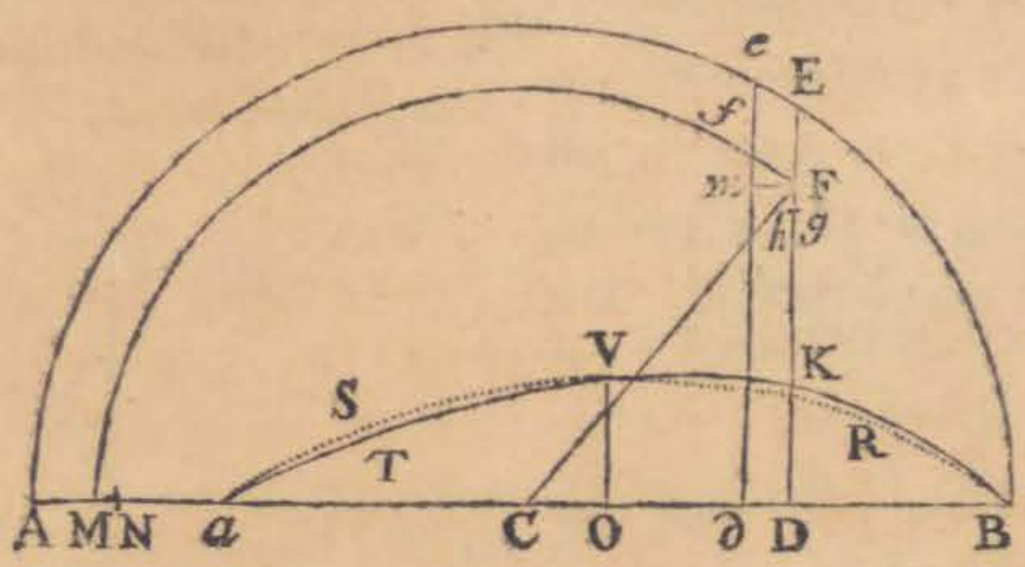
(q) * *Ideoque figura BKVTa* ellipsis erit quam proximè. Cum enim (ex modo demonstratis) velocitas in loco quovis Δ sit semper ut ordinata ΔE ad circulum, & (per hyp.) resistentia ΔK in hac figurâ, vel DK in figura textus, sit semper ut velocitas ΔE, erit ΔK ut ΔE; & quia $\Delta E^2 = a\Delta \times \Delta B$ (ex naturâ circuli), erit etiam ΔK^2 ut $a\Delta \times \Delta B$, & ideo figura BKVTa ellipsis, cujus centrum O, semiaxes aO, & OV, si OV exponat resistentiam in puncto medio O axis aB.

(r) * *Ut area semi ellipseos hujus ad OV×BO.* Est enim area illa $= Aa \times \frac{1}{2} aB$ (per prop. hanc), & $\frac{1}{2} aB = BO$ (per constr.).

(f) * *Ut area semicirculi ad quadratum radii &c.* Area ellipseos cujuscumque est ad rectangulum sub axibus in ratione datâ, nimirum in ratione areæ circuli ad quadratum diametri (250. lib. 1.); circulus enim est ellipsis cujus sunt axes æquales; unde area semi ellipseos BKVTa est ad quartam partem rectanguli sub axibus, seu ad rectangulum sub semiaxibus OV×BO, ut area semicirculi ad quadratum radii. Sed si circuli radius sit 7, erit semiperipheria 22 circiter, & area semicirculi 7×11, ideoque area semicirculi ad quadratum radii ut 11 ad 7 circiter. Est igitur Aa ad OV ut 11 ad 7, & proinde $OV = \frac{7}{11} Aa$. Et propterea (per prop. hanc) $\frac{7}{11} Aa$ est ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem pondus.

(t) * *Ferè parabola erit.* Ordinata ΔE ad semicirculum BEHa (vide fig. not. 180.) est semper ut velocitas in loco Δ in medio resistente, & (ex naturâ circuli) $\Delta E^2 = a\Delta \times \Delta B$, & (ex hyp.) resistentia ΔK est ut velocitatis quadratum, seu ut ΔE^2, adeoque ΔK est ut rectangulum $a\Delta \times \Delta B$ sive ut $\overline{OB} + \overline{O\Delta} \times \overline{OB} - \overline{O\Delta}$ hoc est ut $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$. * Sed in Parabolâ cujus vertex foret V & axis VO differentia abscissarum foret semper ad differentiam quadratorum ordinatarum in utriusque abscissæ extremo ductarum, in datâ ratione. Jam verò si ex K ducatur in axem perpendicularis KP, est $K\Delta = PO$ & PO est differentia abscissarum VP & VO, est $O\Delta = PK$ ordinatæ in P, ideoque est $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$ differentia quadratorum ordinatarum in punctis P & O, cum ergo KD & $\overline{OE}^2 - \overline{O\Delta}^2$ sint in datâ

axem OV, (u) ideoque æqualis erit rectangulo ſub $\frac{2}{3}Ba$ & OV quam proximè. Eſt igitur rectangulum ſub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa æquale rectangulo ſub $\frac{2}{3}Ba$ & OV, ideoque OV æqualis $\frac{3}{4}Aa$: & propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ipſius gravitatem ut $\frac{3}{4}Aa$ ad longitudinem penduli. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXX. THEOR. XXIV.



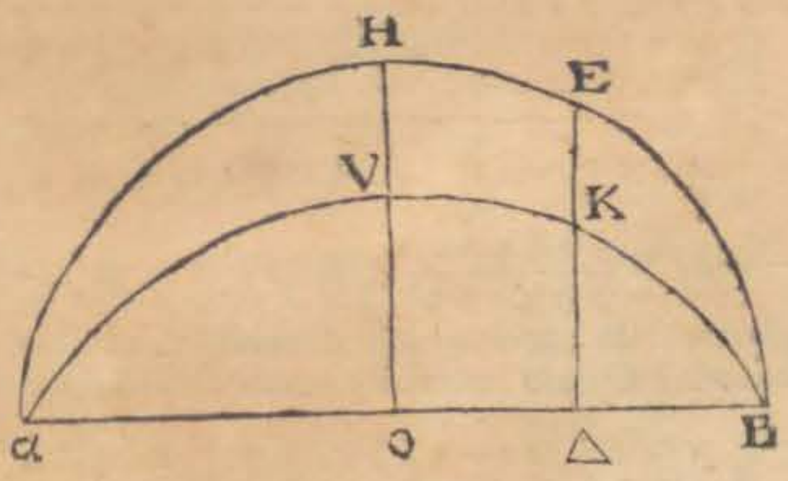
Atque has concluſiones in rebus practicis abundè ſatis accuratas eſſe cenſeo. Nam cum ellipſis vel parabola $BRVSa$ congruat cum figura $BKVTa$ in (x) puncto medio V, hæc ſi ad partem alterutram BRV vel VSa excedit figuram illam, (y) deficiet in ab eâdem ad partem alteram, & ſic eidem æqua-

datâ ratione figura BKVTa parabola erit verticem habens V & axem OV (per theor. 1. de parab.)

(u) * *Ideoque æqualis erit rectangulo ſub* $\frac{2}{3}Ba$ *&* OV *quam proximè.* Nam area parabolica BKVO eſt $\frac{2}{3}BO \times VO$ (Theor 4. de parab.) & ipſius duplum, ſeu area tota BKVa eſt $\frac{2}{3}aB \times OV$.

(x) * *In puncto medio V.* Supponitur enim quod OV accuratè exhibeat reſiſtentiam in puncto medio O, quodque parabola vel ellipſis per punctum V deſcripta ſit.

(y) * *Deficiet ab eâdem ad partem alteram.* Quia duæ ellipſeos vel parabolæ



partes BRV & aSV ſimiles ſunt & æquales, ſi reſiſtentiæ in deſcenſu à B ad O majores ſint quam pro ratione ordinatarum DR ad ellipſim vel parabolam,

DE MOTU CORPORUM.

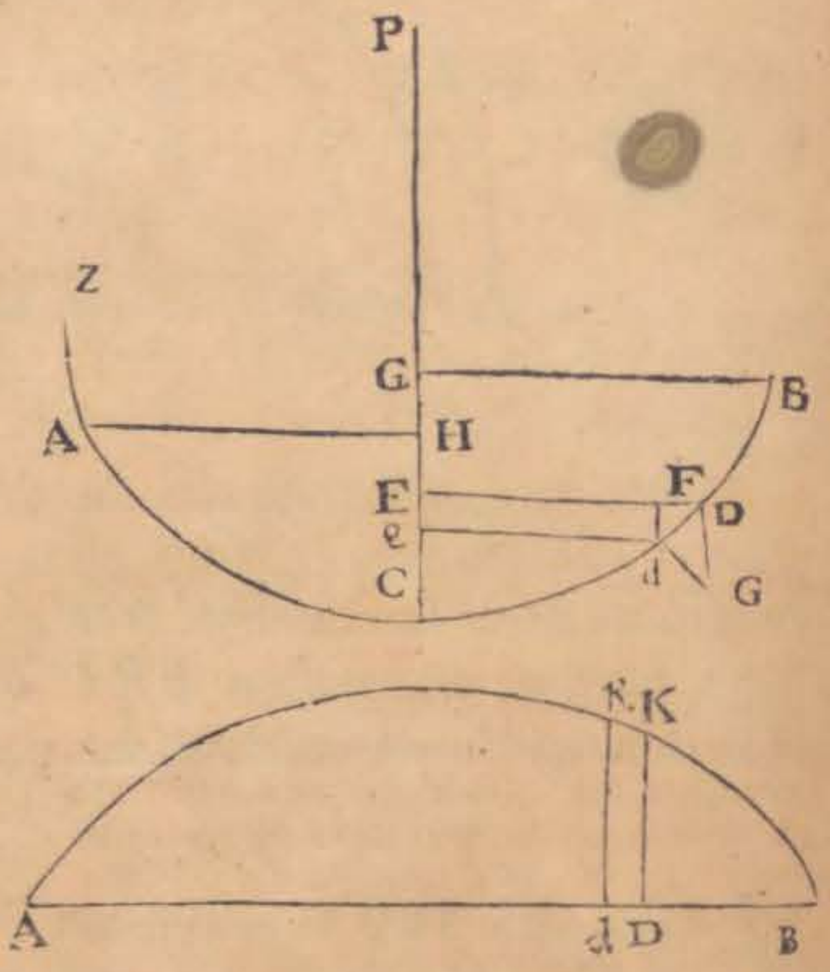
quabitur quam proximè (z).

PRO-

ad alteram partem minores erunt; & contra.

181. Sit resistentia in ratione sesquiplicatâ velocitatis, id est, (vide fig. not. 180.) ΔK ut $\Delta E^{\frac{3}{2}}$; & quoniam (ex naturâ circuli) $\Delta E = (BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{1}{2}}$, & proinde $\Delta E^{\frac{3}{2}} = (BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{3}{4}}$, erit ΔK ut $(BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{3}{4}}$, & (in fig. textûs) DK ut $(BO^2 - DO^2)^{\frac{3}{4}}$. Dicantur $BO = a$, $VO = b$, $DO = x$, $DK = y$, & erit $b : y = a^{\frac{3}{2}} : (aa - xx)^{\frac{3}{4}}$, ideoque $y = \frac{b(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$; & hinc areæ OVKD momentum $ydx = bdx\frac{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$.

Quantitas $(aa - xx)^{\frac{3}{4}}$ in seriem infinitam resolvatur (551. lib. 1.), & invenietur $dx(aa-xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}dx - \frac{3x^2dx}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^4dx}{4\times8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\times5x^6dx}{4\times8\times12a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3\times5\times9x^8dx}{4\times8\times12\times16a^{\frac{13}{2}}}$ — &c. Et sumptis fluentibus $S.dx(aa-xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}x - \frac{x^3}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^5}{5\times4\times8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\times5x^7}{7\times4\times8\times12a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3\times5\times9x^9}{9\times4\times8\times12\times16a^{\frac{13}{2}}}$ — &c. $= \frac{50841a^{\frac{5}{2}}}{71680}$, factâ $x = a$, & neglectis, ob parvitatem, cæteris seriei terminis. Quare cum sit area $OVKD = \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} \times S.dx(aa-xx)^{\frac{3}{4}}$, si ponatur $x = a$ erit area $OVKB = \frac{50841}{71680}ba$, & $2OVKB$ seu area tota $BKVTa = \frac{50841}{35840}ba = \frac{10}{7}ba$, circiter. Est itaque $\frac{10}{7}VO \times BO = Aa \times BO$, & hinc $VO = \frac{7}{10}Aa$; ac propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{7}{10}Aa$ ad longitudinem penduli.



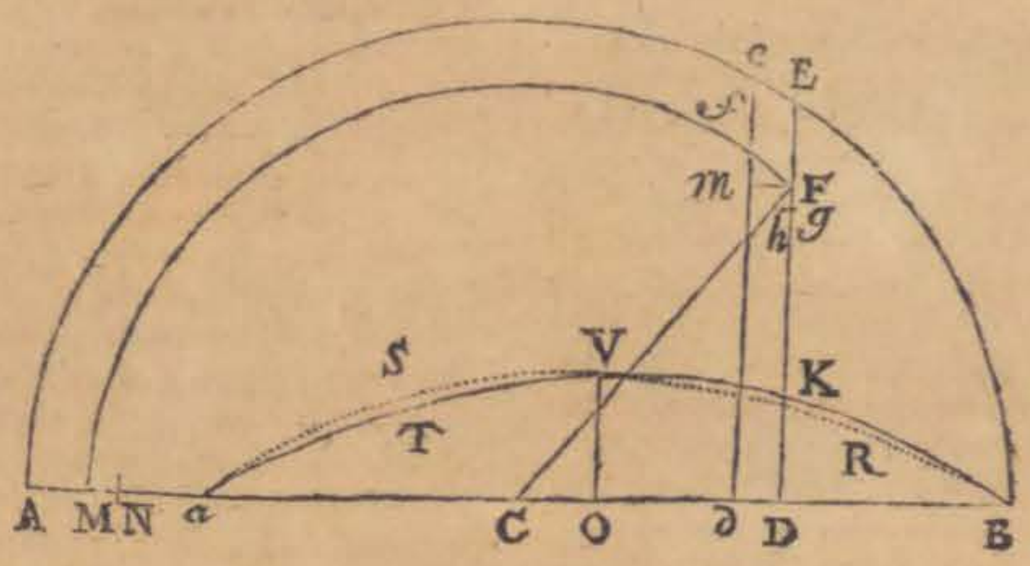
(z) * 182. *Quam proximè.* Propositionem 72. lib. 2. phor. quæ 30æ. hujus libri fere similis est, sed generalis, & demonstratu facilis, hic adjungemus.

Si curvæ cujusvis BCZ arcus totus AB, quem grave descensu per BC & subsequente ascensu per CA in medio resistente describit, extendatur in lineam rectam BA, & ad singula hujus rectæ puncta D erigantur perpendicula DK proportionalia medii resistentiis quas mobile in homologis curvæ BCA punctis D subit, sitque BKA curva quam punctum K perpetuo tan-

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si corporis oſcillantis reſiſtentia in ſingulis arcuum deſcriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in datâ ratione; differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum ſubſequente aſcenſu deſcriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.

Oritur enim differentia illa (a) ex retardatione penduli per reſiſtentiam medii, ideoque eſt ut retardatio tota eique proportionalis



reſiſtentia retardans. In ſuperiore propoſitione rectangulum ſub rectâ $\frac{1}{2}aB$ & arcuum illorum CB, Ca differentia Aa æqualis

tangit: area curvilinea BKAB æquabitur rectangulo PC × GH ex recta PC, quæ gravitatem conſtantem exponit, in differentiam GH abſciſſarum GC, HC arcuum BC, CA deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum.

Ex punctis D, d infinitè propinquis demittantur ad PC perpendicula DE, de, & ex puncto d ad ED perpendiculum dF; & vis gravitatis PC erit ad vim tangentialem in loco D, quâ motus corporis in curvâ acceleratur, ut Dd ad Fd.

* Nam ducta DG parallela PC & Gd in curvam perpendiculari, exprimat DG gravitatis actionem, exprimet Dd vim Tangentialem, ſed ob ſimilitudinem Triangulorum DdG, DdF eſt DG: Dd = Dd: FD, erit ergo Dd ad Fd ut vis gravitatis ad vim Tangentialem, quâpropter cum Dd ſumatur ubique æqualis ut eſt actio gravitatis, ubique Fd exprimet vim Tangentialem; eſt Fd = Ee, ſi itaque PC repræſentet vim gravitatis erit Dd : Ee = PC ad vim Tangentialem, † ideoque vis illa tangentialis = $\frac{PC \times Ee}{Dd}$. 182.

Sed corporis deſcendentis vis acceleratrix æqualis eſt exceſſui vis tangentialis ſupra reſiſtentiam; erit igitur vis acceleratrix in loco D = $\frac{PC \times Ee}{Dd} - DK$. Ducatur hæc vis in elementum ſpatii Dd, & fiet $PC \times Ee - DK \times Dd = v\,dv$, ſi velocitas in loco D ſit v (18, 19); & hinc, ſumptis fluentibus, habetur $PC \times GE - BKD = \frac{1}{2}vv$. Fiat BD = BA, & ideo $v = 0$, atque GE = GC − CH = GH, & erit PC × GH − BKAB = 0, ac proinde PC × GH = PKAB. Q. E. D.

(a) * *Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per reſiſtentiam medii.*

DE MOTU CORPORUM.

erat areæ $BKTa$. Et area illa, si maneat longitudo aB, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum DK; hoc est, in ratione resistentiæ, (b) ideoque est ut longitudo aB & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub Aa & $\frac{1}{2}aB$ est ut aB & resistentia conjunctim, & propterea Aa ut resistentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia ar-

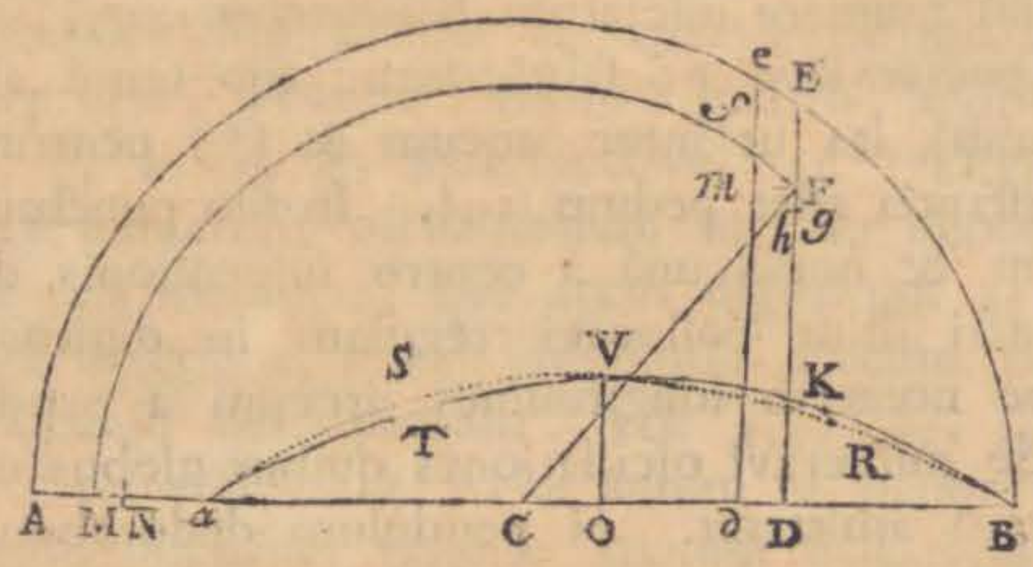
* Dividantur arcûs à duobus pendulis descripti in partes proportionales infinitè parvas, & totum illud quod deest singulo arcui, poterit concipi ut effectus retardationum quas corpora passa sunt singularum illarum particularum initio, spatium verò quod propter singulam retardationem deficit, est ut illa retardatio & tempus per quod corpus motum fuit post illam retardationem receptam usque ad finem oscillationis; sed quoniam in oscillationibus utut inæqualibus tempora quibus similes arcuum partes describuntur sunt æqualia, in medio non resistente, & in medio resistente saltem quam proximè, (180) spatia quæ deficiunt propter retardationes in proportionalibus arcuum partibus receptas, sunt ut illæ retardationes.

* *Ideo differentia arcuum est ut retardatio tota, eique proportionalis resistentia retardens*, si quantitates materiæ corporum pendulorum sint æquales, retardatio in singulis arcuum descriptorum partibus est ut resistentia in iisdem locis, sed ut resistentiæ sunt in datâ quâdam Lege velocitatem ex Hypothesi & velocitates in arcuum partibus proportionalibus sunt in Ratione datâ, ideo resistentiæ in singulis arcuum partibus proportionalibus sunt in ratione datâ, ac per consequens omnes retardationes, sunt in eâdem ratione, summæ ergo retardationum erunt in eâdem ratione datâ, Ergo tota spatia deficientia illis retardationibus proportionalia erunt in eâdem ratione, *Differentiæ ergo inter arcum descensu descriptum & arcum ascensu subsequente descriptum* in variis arcubus ab eodem corpore descriptis, *sunt in Datâ Lege Resistentiæ.*

183. * Cor. 1. Differentiæ arcuum, respectu arcuum descensu descriptorum eandem sequuntur Legem quam resistentiæ sequuntur respectu velocitatum. Nam cum tempora quibus correspondentes & proportionales arcuum partes describuntur sint æqualia, velocitates erunt semper ut illæ arcuum partes, sive ut arcus toti, (180) quam proximè, ergo resistentiæ, retardationes & differentiæ arcuum eamdem Legem sequuntur respectu arcuum ac respectu velocitatum.

Cor. 2. * *Si Corpora pendula differant quantitate materiæ, Differentiæ arcuum sunt directè in Lege datâ arcuum & inversè ut quantitates materiæ*: Nam eo in casu retardationes in singulis arcuum partibus sunt directè ut resistentiæ & inversè ut quantitates materiæ; nam resistentia motus jacturam producit, quæ motus jactura est factum ex retardatione & massâ retardatâ, (per Def. 2. lib. 1.).

(b) * *Ideoque est ut longitudo aB & resistentia conjunctim.* Area illa si maneat longitudo aB, augetur vel diminuitur in ratione resistentiæ DK; si verò constans maneat resistentia seu ordinata DK, sed augeatur aB omnesque ejus partes dD in ratione totius aB augeantur, area illa augetur vel diminuitur in ratione longitudinis aB; unde si longitudo aB variabilis fit & resistentia seu ordinata DK in singulis longitudinum aB locis correspondentibus augeatur vel diminuatur in datâ ratione, area BKTa augebitur vel diminuetur in ratione compositâ ex ratione longitudinis aB & ratione resistentiæ auctæ vel diminutæ, proindeque rectangulum sub Aa & $\frac{1}{2}$ aB erit ut aB & resistentia conjunctim, & propterea Aa ut resistentia.



arcuum in eodem medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicatâ ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicatâ ratione arcus totius: & contra.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicatâ vel aliâ quâvis ratione velocitatis, differentia erit in eâdem ratione arcus totius: & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicatâ: & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successivè describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcus descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his propositionibus, per oscillationes pendulorum in mediis quibuscunque, invenire licet resistentiam mediorum. Aeris verò

De Motu Corporum.

verò reſiſtentiam inveſtigavi per experimenta ſequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi, ita ut inter uncum & (c) centrum oſcillationis globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & unciâ unâ à centro ſuſpenſionis diſtans; & è regione puncti illius collocavi regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum à pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes quibus globus octavam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur à perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totâque oſcillatione primâ, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſitâ, arcum digitorum fere quatuor: (d) idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 121, ita ut aſcenſu ultimo deſcriberet arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor; amiſit octavam motus partem oſcil-

(c) * *Et centrum oſcillationis globi.* Quid ſit centrum oſcillationis & quomodo inveniri poſſit, indicavimus in ſcholio poſt notam 478. lib. 1. Et ex his quæ ibi dicta ſunt, ſatis liquet in longioribus pendulis graviori globo inſtructis & filo tenui, centrum oſcillationis cum centro globi coincidere quam proximè.

(d) * *Idem oſcillationibus 164. amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti* $1\frac{3}{4}$.

* Liquet (ex notâ *a* precedente) quod differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum ſit toti retardationi quam corpus paſſum eſt proportionalis, ideoque, motui deſtructo per reſiſtentiæ actionem; aſcendat itaque corpus in fine primæ oſcillationis ad altitudinem qualemcunque, ſumaturque differentia arcus aſcenſu deſcripti ab arcu deſcenſu primo percurſi: Secundâ oſcillatione corpus aſcendere deberet in vacuo ad eam altitudinem ad quam in fine primæ oſcillationis aſſurrexerat, & ſumatur quod deeſt in ſecundo aſcenſu ab illâ altitudine, duæ illæ differentiæ ſunt ut motus in ſingulâ oſcillatione amiſſi, earum ſumma eſt ergo ut ſummâ motus amiſſi in utraque oſcillatione, ſed duæ illæ differentiæ ſunt differentia inter altitudinem è quâ corpus primo deſcendit & altitudinem ad quam ultimo aſſurrexit; Ergo ratiocinio ad 164. oſcillationes continuato differentia inter altitudinem è quâ corpus primò deſcendit & altitudinem ad quam ultimo aſſurrexit, eſt ut ſumma motus quem reſiſtentia durantibus illis 164 oſcillationibus deſtruere valuit.

oscillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, respectivè. Igitur differentia inter arcus descensu primo & ascensu ultimo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 respective. (e) Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, & in oscillatione unâ mediocri, quâ arcus digitorum $3\frac{1}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{2424}$, $\frac{1}{6929}$, $\frac{4}{7171}$, $\frac{8}{3777}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti respectivè. (f) Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicatâ ratione arcuum descriptorum quam proximè, in minoribus verò paulò majores quàm in eâ ratione; & propterea (per corol. 2. prop. xxxi. libri hujus) resistentiæ forent ut quadrata velocitatum, deberent esse ut ipsi arcus $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16. Sed ex ipsâ inspectione liquet minores differentias majoribus numeris exprimi quam ipsi arcus, majores verò ferè iisdem. Si verò supponeretur resistentiam non tantùm esse in ratione duplicatâ velocitatum, sed etiam partem aliquam aliun-

(e) * *Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum &c.* Exempli causâ, si in primo casu dividatur differentia $\frac{1}{4}$ per numerum oscillationum 164, habebitur $\frac{1}{656}$ differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum in una mediocri oscillatione; quia differentia $\frac{1}{4}$ ex omnibus differentiis quæ per oscillationes 164 producuntur, composita est; & quia arcus totus unâ mediocri oscillatione descriptus medius est arithmeticè inter arcum maximum fere digitorum 4. primâ oscillatione descriptum, & arcum minimum digitorum $2\frac{3}{2}$ ultimâ oscillatione descriptum, ideo arcus ille mediocris invenitur capiendo dimidium summæ arcuum $4+2\frac{3}{2}$, quod est $3\frac{3}{4}$, aut etiam capiendo summam arcuum dimidiorum, videlicet $2+1\frac{3}{4}$. Atque eodem modo de cæteris ratiocinandum est.

(f) * *Hæ autem in majoribus oscillationibus &c.* * Dividantur omnes arcuum differentiæ in oscillatione mediocri per primam, omnes illæ differentiæ erunt ut 1.; 2.7107.; 9.5072., 36.9577.; 141.8378.; 542.8965.

Quadrata verò arcuum sunt ut 1, 4, 16, 64, 256, 1024. unde ex eorum numerorum inspectione liquet differentias quæ in minoribus oscillationibus observatæ sunt esse ad eas quæ in majoribus arcubus observantur in majore ratione quam duplicatâ arcuum; In majoribus verò oscillationibus rationes illarum differentiarum ad rationem duplicatam arcuum magis accedunt, ut enim arcûs in progressione duplâ fuere sumpti, ratio duplicata arcuum proximorum est ratio 1 ad 4. jam verò 9.5072. est non multo major 4ta. parte numeri 36.9577., iste autem ad 4. partem numeri 141.8378., magis accedit, propius adhuc iste accedit ad quartam partem numeri 542.8965. Unde inter arcus magnos, motus amissos in duplicatâ fere ratione arcuum sive velocitatum sumi posse deducitur. 182.

Idem manifestius patebit si dividantur hi numeri qui arcuum differentias exprimunt per ipsorum arcuum rationes, habebuntur enim 1.; 1.3553; 2.3788; 4.6197; 8.8648; 16.9655, qui si resistentiæ forent ut quadrata velocitatum, deberent esse ut ipsi arcus $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16. Sed ex ipsâ inspectione liquet minores differentias majoribus numeris exprimi quam ipsi arcus, majores verò ferè iisdem. Si verò supponeretur resistentiam non tantùm esse in ratione duplicatâ velocitatum, sed etiam partem aliquam

DE MOTU CORPORUM.

ſtentia globi, ubi celerius movetur, eſt in duplicatâ ratione velocitatis quam proximè; ubi tardiùs, paulò major quam in eâ ratione.

(g) Deſignet jam V velocitatem maximam in oſcillatione quâvis, ſintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum ſit $AV+BV^{\frac{3}{2}}+CV^2$. (h) Cum velocitates maximæ ſint in cycloide ut ſemiſſes arcuum oſcillando deſcrip-

aliunde quam ex merâ inertiâ materiæ oriundam, eſſe ut velocitas, ideoque cum hæ quantitates mox inventæ ſint quotientes differentiarum arcuum per velocitates diviſarum, hæ quantitates conſtarent parte conſtante & aliâ parte velocitati ſive arcui proportionatâ.

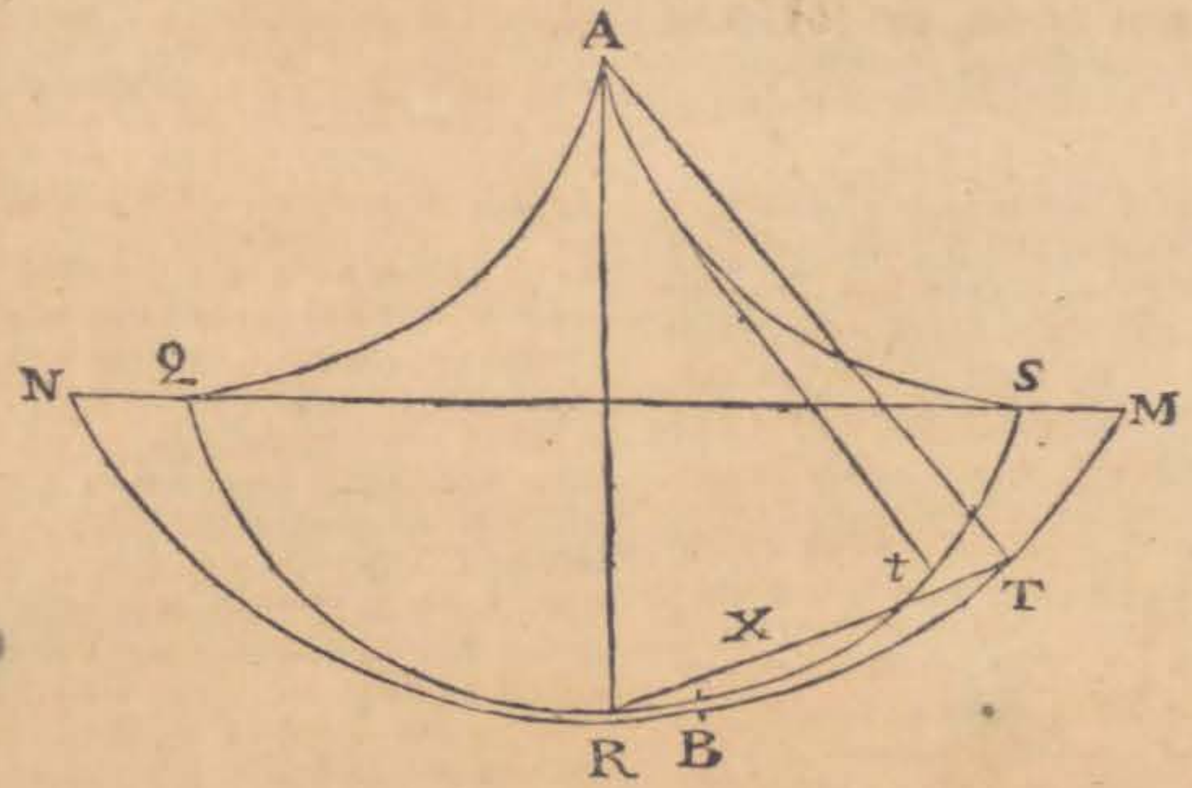
Sumatur itaque prima quantitas 1, & ordine conferatur cum 2ª, tum cum tertia, cum quarta &c. ſupponaturque illas conſtare duabus partibus altera velocitati proportionata altera conſtanti, v. gr. ſit prima quantitas $1=a+x$ ſecunda $1.3553=2a+x$, iis ita binatim calculatis ut eruatur valor a & x, quantitas conſtans x, in ſingulo calculo eadem non invenietur, ſed varii iſti obtinebuntur valores hoc ordine .6447; .5404; .4829; .4757; .4849, qui decreſcunt ordine quodam regulari (ultimo excepto ob aliqualem exiguum errorem), unde liquet, rationem differentiarum arcuum, non eſſe partim in ratione duplicatâ ipſorum arcuum, & partim in eorum arcuum ratione ſimplici ſed his adjungi debere rationem aliquam intermediam quam ſeſquiplicatam arcuum aſſumit *Newtonus* quod cum experimentis propius conſentit.

(g) * *Deſignet jam V velocitatem maximam*, ſive quantitatem velocitati maximæ proportionalem, *in oſcillatione quâvis, ſintque A, B, C quantitates* conſtantes, quarum valores per experimenta determinabuntur; & fingamus quod reſiſtentia, ſeu differentia arcuum ipſi proportionalis (prop. XXXI.), ſit partim ut velocitas, partim ut velocitatis quadratum, & partim ut velocitatis dignitas cujus index $\frac{3}{2}$, & proinde *ſupponamus quod arcuum differentia ſit* $AV+BV^{\frac{3}{2}}+CV^2$ *&c.*

(h) * *Cum velocitates maximæ &c.* Corpus pendulum in medio non reſiſtente oſcilletur in cycloide SBRQ, ſitque A punctum ſuſpenſionis, & R punctum infimum ac medium arcus totius SRQ. Centro A & radio AR deſcribatur arcus circuli MTRN, in quo corpus idem, vel aliud ſimile & æquale oſcilletur in eodem medio non reſiſtente. Sit TR arcus circularis æqualis arcui cycloidis tR, & RB arcus quam minimus cycloidi & circulo communis (465. lib. 1.). Jam ſi corpus e locis T & B ſucceſſive cadat in circulo, erit ipſius velocitas maxima in R deſcenſu per arcum TR acquiſita, ad velocitatem deſcenſu per arcum BR acquiſitam, ut chorda TXR ad chordam arcus RB (88. lib. 1.), aut, quod idem eſt (per lemma VII. lib. 1.), ut chorda TXR ad arcum cycloidis BR; & velocitas deſcenſu per arcum BR acquiſita in R eſt ad velocitatem maximam deſcenſu per arcum cycloidis tBR acquiſitam, ut arcus BR ad arcum tBR ſeu arcum circuli æqualem TBR (per demonſtr. prop. LI. lib. 1). Quare, ex æquo, velocitas maxima in R deſcenſu per arcum circularem TBR acquiſita eſt ad velocitatem maximam in R deſcenſu per cycloidis arcum tBR acquiſitam, ut chorda RT ad arcum tBR vel TBR. Sunt autem velocitate maximæ in medio reſiſtente velocitatibus maximis in medio non reſiſtente proportionales quam proximè, & in puncto medio arcuum qui oſcillatione integra deſcribuntur, ferè contingunt (180). Paribus igitur arcubus, velocitates maximæ in cycloide ſunt ad velocitates maximas in circulo, ut ſemiſſes

oriptorum, in circulo vero ut ſemiſſium arcuum illorum chordæ; ideoque paribus arcubus majores ſint in cycloide quam in circulo, in ratione ſemiſſium arcuum ad eorundem chordas; (i) tempora autem in circulo ſint majora quam in cycloide

LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.



miſſe arcuum oſcillando deſcriptorum ad eorumdem arcuum circularium chordas, quam proximè; & ideo, paribus arcubus majores ſunt in cycloide quam in circulo in ratione ſemiſſium arcuum ad eorumdem chordas in circulo ductas.

(i) * *Tempora autem in circulo ſunt majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciprocâ.* * Id eſt, tempora in circulo ſunt ad tempus in arcu quovis Cycloidis, ut ſemiſſis arcus circuli oſcillando deſcripti ad ejuſdem ſemiſſis chordam, ſive invertendo & temporum dimidia ſumendo, tempus ſemioſcillationis in Cycloide eſt ad tempus ſemioſcillationis in circulo (pendulis exiſtentibus ejuſdem longitudinis) ut chorda arcus deſcripti ad ipſum arcum, quæ quidem proportio proxime tantùm obtinet.

* Eſt enim tempus oſcillationis integræ cujuſvis in Cycloide ad tempus deſcenſûs per dimidiam penduli longitudinem ut ſemiperipheria ad radium (vide not. 470. ad Prop. LII. lib. I.) ideoque etiam tempus ſemioſcillationis in cycloide ad tempus illud deſcenſûs per dimidiam penduli longitudinem ut quadrans circuli ad radium, ſed tempus deſcenſus per quadruplum dimidiæ longitudinis penduli, ſive tempus deſcenſûs per Diametrum circuli cujus pendulum eſt radius, eſt duplum temporis deſcenſus per dimidiam penduli longitudinem, ideoque tempus ſemioſcillationis in Cycloide eſt ad tempus deſcenſûs per Diametrum circuli cujus longitudo penduli eſt radius, ut circuli quadrans ad Diametrum. Sed, ratio temporis lapſûs per Diametrum circuli ad tempus ſemioſcillationis in arcu ejuſdem circuli eſt (ut mox liquebit) compoſita ex ratione Diametri ad quadrantem circuli & chordæ ad arcum, quam proximè, unde ex æquo erit tempus in Cycloide ad tempus in circulo ut chorda circuli ad ejus arcum oſcillando deſcriptum. Rationem autem temporis deſcenſus per Diametrum circuli ad tempus ſemioſcillationis in arcu ejus circuli eſſe compoſitam ex ratione Diametri ad

1 8 2.

DE MOTU CORPORUM.

de in velocitatis ratione reciprocâ; patet arcuum differentias (quæ

quadrantem circuli & ex ratione chordæ ad arcum oscillando descriptum, saltem quam proxime, sequenti calculo constabit.

Descendat itaque corpus per arcum L B centro C descriptum & Diametro A B, sit *t* tempus quæsitum quo corpus descendit per eum arcum L B, sitque *b* tempus datum quo corpus labitur per Diametrum A B, & quo velocitate per eum lapsum in B acquisitâ posset describere uniformiter duplum A B sive 2 A B, sumatur in arcu L B portiuncula infinitè parva M m quam corpus descendens uniformiter describere censeatur tempore infinitè parvo dt, ducanturque ex punctis L & M lineæ L H, M E in diametrum perpendiculares; Cum tempora quibus spatia data uniformiter describuntur sint ut illa spatia directè & velocitates quibus percurruntur inversè, sitque velocitas quæ in B acquisita est per lapsum ex A B ad velocitatem per lapsum ex L in M, sive ex H in E acquisitam, ut $\sqrt{AB}$ ad $\sqrt{HE}$, erit $b : dt = \frac{2AB}{\sqrt{AB}} : \frac{Mm}{\sqrt{HE}}$; Dicatur ergo AB=1; HB=$h$, BE=$x$, EM=$y$; HE=$h-x$ erit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, est autem Mm=$\sqrt{dx^2+dy^2}$ & ex naturâ circuli (cum sit $yy = x - xx$, & $2ydy = dx - 2xdx$, sive $dy = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-xx}})dx$ invenietur $\sqrt{dx^2+dy^2} = \pm\frac{dx}{2\sqrt{x-xx}}$, & quoniam dum crescit B E decrescit L M est M m = $\frac{-dx}{2\sqrt{x-xx}}$, resolvatur ergo $\frac{1}{\sqrt{x-xx}}$ in seriem per formulam Newtonianam invenietur $\frac{1}{\sqrt{x-xx}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2\times4}$ &c. ideoque Mm sive $\frac{-dx}{2\sqrt{x-xn}} = \frac{1}{2} \times - \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times4}$ &c. Pariter resolvatur $\frac{1}{\sqrt{h-x}}$ in seriem per eamdem formulam erit $\frac{1}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{2h^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{2\times4h^{\frac{5}{2}}}$ &c. $= \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}\times1 + \frac{x}{2h} + \frac{3x^2}{2\times4h^2}$ &c. Ductis ergo per se mutuo his seriebus

$$\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}}\times - \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times4}\text{ &c.}$$
$$- \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2h} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times2h} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times4\times2h}\text{ &c.}$$
$$- \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times4h^2} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times2\times4h^2} - \frac{3\times3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times4\times2\times4h^2}\text{ &c.}$$
&c. &c. &c.

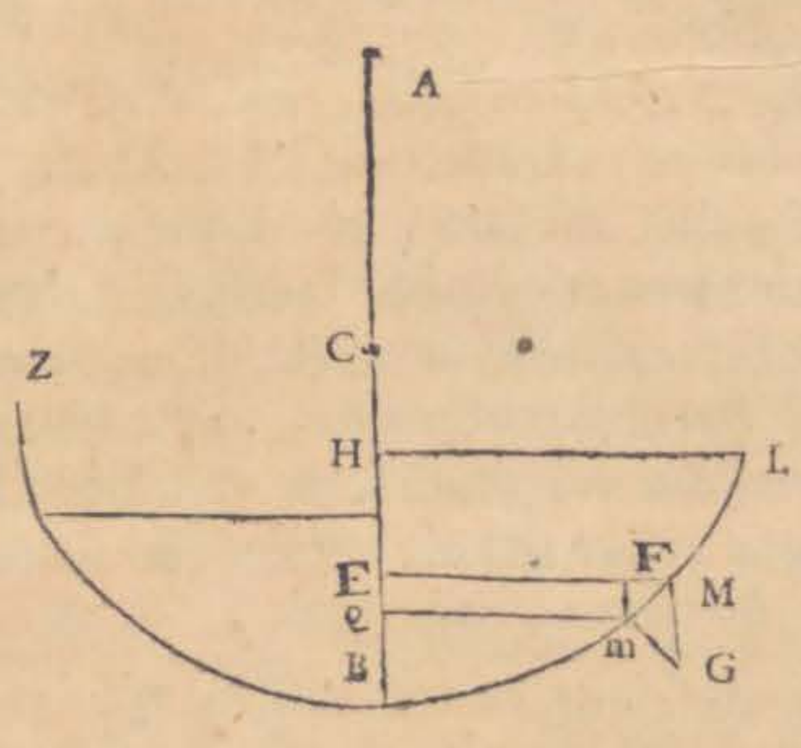
ideoque integralis

$$S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}}\times - 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times3} - \frac{2\times3x^{\frac{5}{2}}}{2\times4\times5}\text{ &c.}$$
$$- \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times3h} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{2\times2\times5h} - \frac{2\times3x^{\frac{7}{2}}}{2\times4\times2\times7h}\text{ &c.}$$
$$- \frac{2\times3x^{\frac{5}{2}}}{2\times4\times5h^2} - \frac{2\times3x^{\frac{7}{2}}}{2\times2\times4\times7h^2} - \frac{2\times3\times3x^{\frac{9}{2}}}{2\times4\times2\times4\times9h^2}\text{ &c.}$$
&c. &c. &c.

Cum ergo sit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$ erit $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, sed quando t sit o, tunc est $h = x$ ideoque Integralis quæsita in hanc mutatur, (posito ubique h pro x)

$$S.\frac{Mm}{h-x} = -1 - \frac{h}{2\times3} - \frac{3h^2}{2\times4\times5}\text{ &c.}$$
$$- \frac{1}{2\times3} - \frac{h}{2\times2\times5} - \frac{3h^2}{2\times4\times2\times7}\text{ &c.}$$
$$- \frac{3}{2\times4\times5} - \frac{3h}{2\times2\times4\times7} - \frac{2\times3\times3h^2}{2\times4\times2\times4\times9}\text{ &c.}$$
&c. &c. &c.

Ideoque hæc est quantitas illa constans quæ debet tolli ex valore integralis quæ in proportione $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$ pro $S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$ adhibetur, quæcunque assumatur valor in-



indeterminatæ x, ſed ubi totus arcus L B eſt deſcriptus tunc x fit o, & evaneſcit prior ſeries $\frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times -2x^{\frac{1}{2}}$ &c. ergo in eo caſu integralis $S. \frac{M\,m}{\sqrt{h-n}}$ eſt æqualis ſoli quantitati illi conſtanti adſumptæ cum ſignis mutatis ideoque eſt,

$$b : t = 2 : \quad 1 + \frac{h}{2\times3} + \frac{3h^2}{2\times4\times5} \text{ &c.}$$
$$+ \frac{1}{2\times3} + \frac{h}{2\times2\times5} \text{ &c.}$$
$$+ \frac{3}{2\times4\times5} \text{ &c.}$$
$$\text{&c.}$$

Jam autem cum M m, fit æqualis ſeriei

$$\frac{1}{2} \times \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times4} \text{ &c. ejus}$$

integralis eſt $\frac{1}{2}\times2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times3} + \frac{2\times2x^{\frac{5}{2}}}{2\times4\times5}$ &c.

$= \sqrt{x} \times 1 + \frac{x}{2\times3} + \frac{3x^2}{2\times4\times5}$ &c. in quâ ſi fiat $x = 1$ habebitur ſemiperipheria circuli, & ſi fiat $x = h$ habebitur arcus L B, tumque illæ duæ ſeries in has abibunt

$$1 + \frac{1}{2\times3} + \frac{3}{2\times4\times5} \text{ &c.}$$

& $\sqrt{h} \times 1 + \frac{h}{2\times3} + \frac{3h^2}{2\times4\times5}$ &c.

Quæ ſi per ſe mutuo ducantur earum factum erit 228.

$$\sqrt{h} \times 1 + \frac{h}{2\times3} + \frac{3h^2}{2\times4\times5} \text{ &c.}$$
$$\frac{1}{2\times3} + \frac{h}{2\times3\times2\times3} \text{ &c.}$$
$$\frac{3}{2\times4\times5} \text{ &c.}$$
$$\text{&c.}$$

Sed termini hujus ſeriei ſaltem primi, iidem ſunt cum terminis ſeriei ſuperius inventæ pro valore $S. \frac{M\,m}{\sqrt{h-n}}$, ſit ergo arcus L B $= a$, Peripheria circuli cujus Diameter eſt 1 ſit p, erit $\sqrt{h} \times S. \frac{M\,m}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2}$, ſive $S. \frac{M\,m}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2\sqrt{h}}$, ſed $\sqrt{h}$ eſt æqualis chordæ L B, ex naturâ circuli, quæ ſi dicatur c, erit $S. \frac{M\,m}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2c}$. Unde tandem eſt $b : t = 2 : \frac{ap}{2c} = 1 : \frac{ap}{4c} = 1 \times c : a \times \frac{p}{4}$ ſive eſt b tempus deſcenſus per Diametrum vel per chordam quamlibet ad t tempus deſcenſus per arcum in ratione compoſitâ ex ratione Diametri 1 ad $\frac{p}{4}$ ſive quadrantem peripheriæ, & ex ratione chordæ c ad arcum a. Q. E. D.

DE MOTU CORPORUM.

(quæ (k) ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim) eaſdem fore, quamproximè, in utráque curvâ: (†) deberent enim differentiæ illæ in cycloide augeri, unà cum reſiſtentia, in duplicatâ circiter ratione arcûs ad chordam, ob velocitatem in ratione illâ ſimplici auctam; & diminui, unà cum quadrato temporis, in eâdem duplicatâ ratione. Itaque ut reductio fiat ad cycloidem, eædem ſumendæ ſunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in circulo obſervatæ, velocitates verò maximæ ponendæ ſunt arcubus vel dimidiatis vel integris, hoc eſt, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in caſu ſecundo, quarto & ſexto, numeros 1, 4 & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ in caſu ſecundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ in caſu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in caſu ſexto. Et ex his æquationibus, (l) per debitam collationem & reductionem analyticam, fit A=0, 0000916, B=0, 0010847, & C=0, 0029558. Eſt igitur differentia arcuum ut $0, 0000916V + 0, 0010847V^{\frac{3}{2}} + 0, 0029558V^2$: & propterea cum (per corollarium propoſitionis xxx. applicatum ad hunc caſum) reſiſtentia globi in medio arcus oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, (m) ſit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}$ A

(k) * *Quæ ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim.* (per cor. 3. lem. X). Reſiſtentia enim conſiderari poteſt ut vis quæ retardationem producit, & differentia arcuum ut ſpatium quod corpus vi illâ mediocri ac conſtante ſollicitatum deſcriberet. Hinc arcuum differentiæ erunt quam proxime ut *reſiſtentia directè & quadratum temporis conjunctim.*

(†) * *Deberent differentiæ in Cycloide augeri unà cum reſiſtentia in duplicatâ circiter ratione, arcus ad chordam ob velocitatem in ratione illa ſimplici auctam*, quia ſcilicet pars maxima reſiſtentiæ eſt ut quadrata velocitatum.

(l) * *Per debitam collationem.* Prima æquatio eſt $\frac{\frac{1}{2}}{121} = \frac{1}{2 \times 121} = A + B + C$. 2^2. diviſa per 4. eſt $\frac{1}{71} = A + 2B + 4C$, & tertia diviſa per 16. eſt $\frac{3}{58} = A + 4B + 16C$. Ex his autem æquationibus facilè eruuntur valores litterarum *A*, *B*, *C*, ſi fractiones $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{71}$, & $\frac{3}{58}$ ad decimales reducantur.

(m) * *Sit ad ipſius pondus.* *AV* eſt pars differentiæ arcuum genita per reſiſtentiæ partem illam quæ eſt ut velocitas

:BV

$\frac{7}{11}AV+\frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli; si pro A, B & C scribantur numeri inventi, fiet resistentia globi ad ejus pondus, ut $0,0000583\,V+0,0007593\,V^{\frac{3}{2}}+0,0022169\,V^2$ ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis & regulam, id est, ad 121 digitos. Unde cum V in casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus globi in casu secundo ut 0, 0030345 ad 121, in quarto ut 0, 041748 ad 121, in sexto ut 0, 61705 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in casu sexto descripsit, erat $120-\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ seu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cum radius esset 121 digitorum, & longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum globi descripsit (n) erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistentiam aeris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, (o) sed in medio ferè loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si glo-

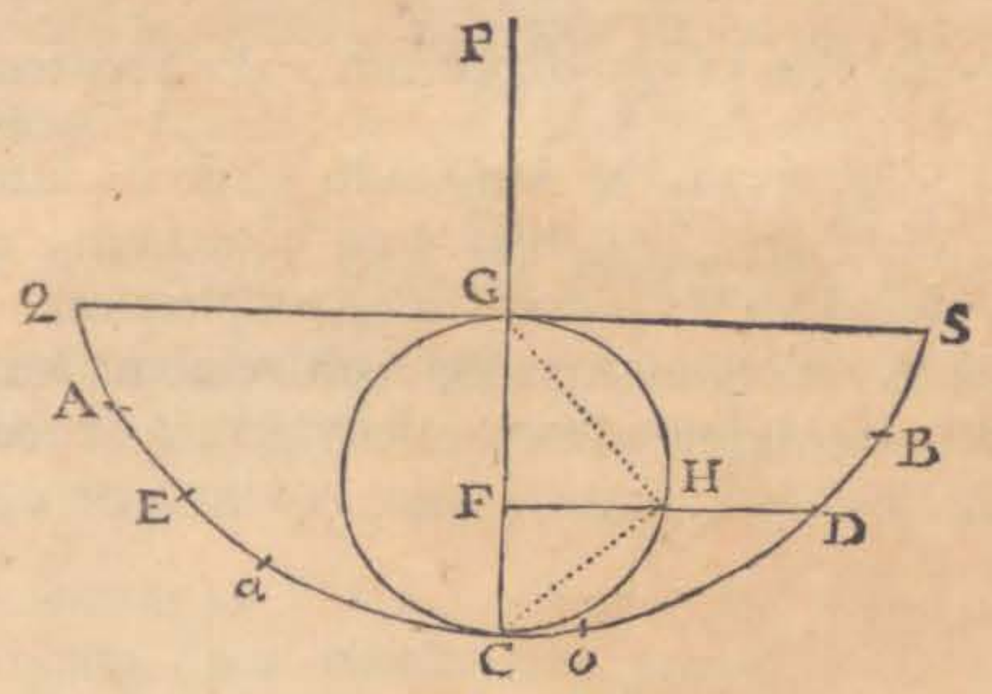
$BV^{\frac{3}{2}}$, pars differentiæ arcuum genita per resistentiæ partem quæ est in sesquiplicatâ ratione velocitatis; & CV^2 pars differentiæ arcuum producta per resistentiæ totius partem quadrato velocitatis proportionalem (per cor. 4. prop. 31). Sed (per cor. prop. 30.) si resistentia sit ut velocitas, est $\frac{7}{11}AV$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in puncto medio arcûs descripti ad ejusdem pondus; si resistentia sit ut velocitatis quadratum, resistentia illa in puncto medio arcûs descripti est ad corporis pondus ut $\frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli, & (181) si resistentia sit in ratione sesquiplicatâ velocitatis, est illa ad corporis pondus ut $\frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}}$ ad longitudinem penduli. Quare cum hic supponatur resistentia partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione sesquiplicatâ & partim in duplicatâ, resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti, ubi velocitas est V, erit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}AV+\frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}CV^2$, ad longitudinem penduli. 182.

(n) * *Erat* $124\frac{3}{31}$ *digit.* Sunt enim radii ut similes circulorum arcus, & ideò radius 121, est ad suum arcuum $119\frac{5}{29}$ ut radius 126, ad arcum correspondentem $124\frac{3}{31}$ quamproximè.

(o) * *Sed in medio ferè loco.* Patet per (not. 180).

DE MOTU CORPORUM.

globus descensu suo toto in medio non resistente (P) describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{52}$, idque in cycloide, ad quam motum penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in cycloide ad arcum istum $62\frac{3}{52}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis



(p) * *Describeret arcûs illius partem dimidiam.* Corpus oscillando describat arcum Ba in medio resistente & arcum BA in medio non resistente; sit C punctum cycloidis infimum; O, punctum medium arcûs Ba, & arcus CD fit æqualis arcui BO, velocitas maxima descensu corporis per arcum BO acquisita in medio resistente est ad velocitatem maximam per arcum BC acquisitam in medio resistente ut arcus BO, ad arcum BC (180). Sed si corpus è loco D in medio non resistente cadendo describat arcum DC, erit etiam velocitas ipsius in C descensu per arcum DC acquisita ad velocitatem acquisitam ibidem descensu per arcum BC ut arcus CD, vel æqualis BO ad arcum BC, (prop. 51. lib 1). Ergò velocitas in medio resistente per arcum BO acquisita in O æqualis est velocitati quam corpus in medio non resistente cadendo per arcum DC=BO haberet in C; & propterea (85. lib. 1.) velocitas illa æqualis est velocitati quam corpus perpendiculariter cadendo in medio non resistente, & casu suo describendo altitudinem FC æqualem sinui verso arcûs CD, acquirere posset. Sit jam P punctum suspensionis, PC longitudo penduli SDC semicycloidis, SG & DF ad PC normales, & CHGC circulus diametro GC descriptus secans DF in H. Jungatur chorda CH, & erit arcus cycloidis SD=2GC−2CH, & arcus SE=2GC (462. lib. 1.) ideóque arcus DC=2CH. Est autem (ex naturâ circuli) CF ad CH ut CH ad CG, & hinc CF ad 2CH seu DC, ut 2CH ad 4CG, sive ut DC ad 2PC; Hoc est, sinus versus CF, ad arcum CD, ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam.

lis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipſa eſt quam corpus cadendo & caſu ſuo ſpatium 15, 278 digitorum deſcribendo acquirere poſſet. Tali igitur cum velocitate globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad ejus pondus ut 0,61705 ad 121, vel (ſi (q) reſiſtentiæ pars illa ſola ſpectetur quæ eſt in velocitatis ratione duplicatâ) ut 0,56752 ad 121.

(r) Experimento autem hydroſtatico inveni quod pondus globi hujus lignei eſſet ad pondus globi aquei magnitudinis ejuſdem ut 55 ad 97: & propterea cum 121 ſit ad 213, 4 in eâdem ratione, erit reſiſtentia globi aquei præfatâ cum velocitate progredientis (ſ) ad ipſius pondus ut 0,56752 ad 213, 4, id eſt, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cum pondus globi aquei, quo tempore globus cum velocitate uniformiter continuatâ (t) deſcribat longitudinem digitorum 30,556, velocitatem illam omnem in globo cadente generare poſſet; (u) manifeſtum eſt quod vis reſiſtentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$, hoc eſt, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$.

Et

(q) * *Si reſiſtentiæ pars illa ſola &c.* Si enim in quantitate, o, 0022169 V^2 quæ eſt ad longitudinem penduli ut reſiſtentiæ pars velocitatis quadrato proportionalis ad corporis pondus loco V ſcribatur 16, & loco V^2 ſcribatur 256, fiet 0,0022169 V^2 = 0, 56752, quamproximè.

(r) * *Experimento autem hydroſtatico.* Experimentum facile eſt. Cum enim corpus fluido immerſum, eâdem vi ſurſum urgeatur quâ par fluidi volumen ſuſtinetur, id eſt, vi quæ æqualis eſt ponderi fluidi ejuſdem magnitudinis (cor. 5. & 6. prop. 20. lib. hujus) corpus fluido ſpecifice leviori immerſum ponderis ſui partem amittet æqualem ponderi fluidi ejuſdem vominis; & propterea ſi corpus illud fluido immerſum ponderetur, cognoſcetur pondus fluidi ejuſdem magnitudinis cum corpore. Si fluidum corpore immergendo ſpecificè gravius fit, corpori illi adjungi poteſt aliud corpus majoris gravitatis ſpecificæ ut eorum ſumma fluido ſpecifice gravior fiat. 182

(ſ) *Ad ipſius pondus.* Reſiſtentia globi ſolidi æqualis eſt reſiſtentiæ globi aquei ejuſdem magnitudinis & cum eâdem velocitate in eodem medio progredientis, ſed reſiſtentia globi ſolidi eſt ad ejuſdem pondus ut 0, 56752 ad 121, & pondus globi ſolidi ad pondus globi aquei ut 121 ad 213.4, ſeu ut 1 ad $376\frac{1}{50}$ quamproximè.

(t) * *Deſcribat longitudinem digit.* 30,556, duplam nimirum longitudinis digitorum 15.278, quæ velocitatem illam omnem in globo cadente generare poſſet (29. lib. 1.).

(u) * *Manifeſtum eſt.* Sunt enim velocitates dato tempore genitæ vel extinctæ, ut vires quibus generantur vel extinguuntur (13. lib. 1.).

DE MOTU CORPORUM.

Et propterea quo tempore globus, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ, longitudinem ſemidiametri ſuæ, ſeu digitorum $3\frac{1}{16}$, deſcribere poſſet, (x) eodem amitteret motus ſui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oſcillationes quibus pendulum quartam motus ſui partem amiſit. In ſequente tabulâ numeri ſupremi denotant longitudinem arcus deſcenſu primo deſcripti, in digitis & partibus digiti expreſſam: numeri medii ſignificant longitudinem arcûs aſcenſu ultimo deſcripti; & loco infimo ſtant numeri oſcillationum. Experimentum deſcripſi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. (y) Calculum tentet qui volet.

Deſ.

(x) * *Eodem amitteret motûs ſui partem.* Nam velocitates eâdem vi conſtante vel extinctæ ſunt ut tempora quibus generantur vel extinguuntur (13. lib. 1.), ſed tempora quibus corpora duo eâdem velocitate uniformi percurrunt longitudines digit. 30, 556, & digit. $3\frac{7}{16}$, ſunt ut hæ longitudines (5 lib 1.). Quarè velocitates amiſſæ ſunt ut eædem longitudines, & ideò 30, 556 ad $3\frac{7}{16}$, ut $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ ad velocitatem amiſſam eo tempore quo globus longitudinem ſemidiametri ſuæ ſeu digit. $3\frac{7}{16}$, percurrit; undè invenitur velocitas illa amiſſa $= \frac{1}{3342}$, quamproximè.

(y) * *Calculum tenter.* Quoniam experimentum magis accuratum eſt, calculum tentabimus. Erunt igitur differentiæ arcuum primo deſcenſu & ultimo aſcenſu deſcriptorum.

$\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16.

Arcus in unâ mediocri oſcillatione deſcripti, ſunt

$3\frac{1}{2}$, 7, 14, 28, 56, 112.

Differentiæ arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu in unâ mediocri oſcillatione deſcriptorum, ſunt

$$\frac{\frac{1}{2}}{374}, \frac{1}{272}, \frac{2}{162\frac{1}{2}}, \frac{4}{83\frac{1}{3}}, \frac{8}{41\frac{2}{3}}, \frac{16}{22\frac{2}{5}}$$

ſive ut 1. 2.7500; 9.2061; 35.5040; 143.7760; 528.5882

Hæ autem differentiæ in majoribus oſcillationibus ſunt in duplicatâ ratione arcuum deſcriptorum ſatis proximè; Nam $\frac{8}{41\frac{2}{3}} : \frac{16}{22\frac{2}{5}} = 34 : 125$, & $34 : 126 = 1 : 4$; hoc eſt, in duplicatâ ratione arcuum deſcriptorum. Et ſimiliter $\frac{4}{83\frac{1}{3}} : \frac{8}{41\frac{2}{3}} = 1 : 4$, accuratè; in minoribus verò oſcillationibus, differentiæ illæ ſunt in ratione paulò majore quam duplicatâ arcuum deſcriptorum. Eſt enim $\frac{1}{272} : \frac{1}{162\frac{1}{2}} = 325 : 1088$ & hæc ratio major eſt ratione 1 ad 4. Deſignet jam V, ut ſupra, velocitatem maximam in oſcillatione quâvis, & $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$, differentiam arcuum; & quoniam velocitates ponendæ ſunt arcubus deſcriptis ſcil. numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, analogæ, ſcribamus in caſ. 2°. 4°. & 6°. numeros 1, 4, 16, pro V, & prodibit arcuum differentia $\frac{1}{272} = A + B + C$ in caſ. 2°. $\frac{4}{83\frac{1}{3}} = 4A + 8B + 16C$ in caſ.

Deſcenſus primus	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oſcillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Poſtea globum plumbeum diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$ ſuſpendi filo eodem, ſic ut inter centrum globi & punctum ſuſpenſionis intervallum eſſet pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oſcillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum ſubſequentium prior exhibet numerum oſcillationum quibus pars octava motus totius ceſſavit; ſecunda numerum oſcillationum quibus ejuſdem pars quarta amiſſa fuit.

Deſ-

caſ. 4°. & $\frac{16}{22\frac{1}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in caſ. 6°. Ex his æquationibus habetur $A = 0{,}0005096$, $B = 0{,}0005884$, & $C = 0{,}0025784$. Eſt igitur differentia arcuum ut $0{,}0005096\,V + 0{,}0005884\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0025784\,V^2$, & propterea cum reſiſtentia globi in medio arcûs oſcillando deſcripti ubi velocitas eſt V, ſit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli, fiet reſiſtentia globi ad ejus pondus ut $0{,}0003243\,V + 0{,}0004119\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0019338\,V^2$, ad longitudinem penduli inter centrum ſuſpenſionis & regulam, id eſt, ad 121 digit. Unde cum V in caſ. 2°. deſignet 1; in 4°. 4, in 6°. 16; erit reſiſtentia ad pondus globi in caſ. 2°. ut 0,0267 ad 121; in 4°. ut 0,0355332 ad 121; in 6°. ut 0,5266032 ad 121.

Ponatur reſiſtentia in tardioribus motibus partim uniformis & partim velocitati, partim velocitatis quadrato proportionalis, ideòque arcuum differentia ſit $A + BV + CV^2$, & ſcribamus in caſ. 1°. 2°. & 3°. numeros 1, 2, 4, pro V, prodibunt æquationes $A + B + C = \frac{1}{748}$, $A + 2B + 4C = \frac{1}{272}$, & $A + 4B + 16C = \frac{4}{323}$, ex quibus eruitur $A = 0{,}00034$, $B = 0{,}00003255$, & $C = 0{,}0006714$; & propterea cum (per cor. prop. 30.) reſiſtentia globi in medio arcûs oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, ſit ad ipſius pondus ut $\frac{1}{2}A + \frac{7}{11}BV + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli; ſi pro A, B, & C, ſcribantur numeri inventi, fiet reſiſtentia globi ad ejus pondus ut $0{,}00017 + 0{,}0002071\,V + 0{,}0005035\,V^2$ ad 121, id eſt, in 1°. caſ. ut 0,0008806 ad 121; in 2°. caſ. ut 0,0025982 ad 121; in 3°. caſ. ut 0,0090544, ad 121; reſiſtentia verò uniformis erit ad pondus globi ut 0,00017 ad 121, ſeu ut 1, ad 735294.

182.

DE MOTU CORPORUM.

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oscillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	510	518	420	318	204	121	70

In tabulâ priore seligendo ex observationibus tertiam, quintam & septimam, & exponendo velocitates maximas in his observattionibus particulatim per numeros 1, 4, 16 respectivè, & generaliter per quantitatem V ut supra: emerget in observatione tertiâ $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quintâ $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in septimâ $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ vero æquationes reductæ dant $A = 0{,}001414$, $B = 0{,}000297$, $C = 0{,}000879$. Et inde prodit resistentia globi cum velocitate V moti in eâ ratione ad pondus suum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009V + 0{,}000208V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem quæ est in duplicatâ ratione velocitatis, hæc erit ad pondus globi ut $0{,}000659V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ in experimento primo ad pondus globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0{,}002217V^2$ ad 121: (z) & inde fit resistentia globi lignei ad resistentiam globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in $0{,}002217$ ad $26\frac{1}{4}$ in

(z) * *Et indè fit resistentia.* Est enim (ex dem.) resistentia globi lignei $57\frac{7}{22} \times \frac{0{,}002217}{121}$; & resistentia globi plumbei $26\frac{1}{4} \times \frac{0{,}000659}{121}$, ideóque resistentia globi lignei ad resistentiam globi plumbei ut $57\frac{7}{22} \times 0{,}002217$ ad $26\frac{1}{4} \times 0{,}000659$ id est, $7\frac{1}{3}$ ad 1.

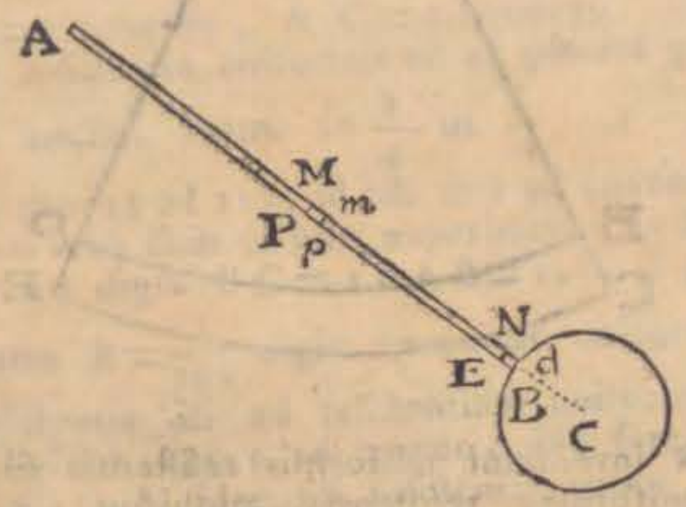
in 0, 000659, id est, ut $7\frac{1}{5}$ ad 1. Diametri globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, seu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproximè. Ergo resistentiæ globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicatâ diametrorum. (a) At nondum cosideravimus resistentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventâ resistentiâ subduci debet. Hanc accuratè definire non potui, sed majorem tamen inveni quam partem tertiam resistentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod resistentiæ

LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

(a) 184. *At nondum consideravimus* &c.

PROBLEMA.

Fili tensi oscillantis resistentiam invenire in medio cujus resistentia est ut velocitatis & diametri globi quadrata conjunctim.



Filum cylindricum homogeneum A B, circà punctum A, oscilletur, sitque ejus longitudo A B = a, diameter E N = $2b$, globi C, diameter = $2r$, longitudo variabilis A P = x, P p = dx; & cylindruli evanescentis P M, velocitas erit ut distantia A P, ejusque proindè resistentia ut $xx\,dx$, sive ut altitudo cylindruli P p & quadratum velocitatis conjunctim; & hinc, sumptâ fluente, resistentia fili A P, sit ut $\frac{1}{3}x^3$, & totius fili A B resistentia ut $\frac{1}{3}a^3$. Capiatur in B, cylindrulus B N, cujus altitudo B E sit æqualis diametro fili E N, seu $2b$, & resistentia fili A E, erit ut $\frac{1}{3}(a-2b)^3$, ideoque cylindri B N resistentia ut $\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{3}(a-2b)^3$. Est igitur resistentia fili totius A B, ad resistentiam cylindri B N, ut a^3 ad $a^3-(a-2b)^3$; sed ut infra prop. 34 demonstrabitur, cylindri B N resistentia est ad resistentiam globuli huic cylindro inscripti ut 2 ad 1, & resistentia globuli hujus est ad resistentiam globi C, in ratione quamproxime compositâ ex ratione quadrati diametri E N, ad quadratum diametri 2 B C, & ratione quadrati velocitatis globuli ad quadratum velocitatis globi C hoc est, ut $bb(a-b)^2$ ad $rr(a+r)^2$. Quare (per compositionem rationum & ex æquo) resistentia fili A B, est ad resistentiam globi C, ut $2a^3bb(a-b)^2$, ad $a^3rr(a+r)^2-rr(a+r)^2\times(a-2b)^3$, seu ponendo $a+r=c$, ut $a^3b(a-b)^2$ ad $3a^2rrcc-6abrrcc+4bbrrcc$, & hinc resistentia fili ad resistentiam totius penduli ut $a^3b(a-b)^2$, ad $a^3b(a-b)^2+rrcc(3aa-6ab+4bb)$ Q. E. I. 163.

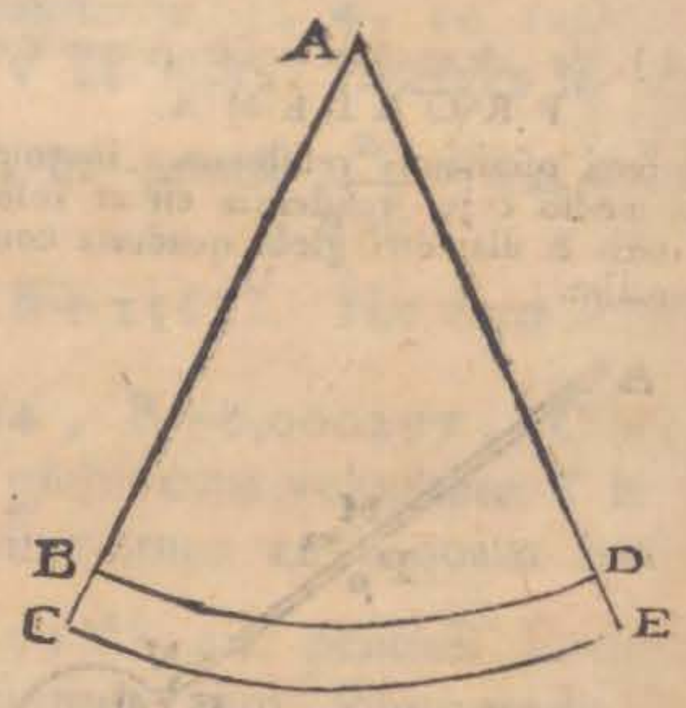
185. Coroll. Si fili semidiameter b, sit admodum exigua respectu longitudinis ejusdem a, erit fere $3aa-6ab+4bb=3aa-6ab+3bb=3(a-b)^2$. Quare fili resistentia erit ad resistentiam globi ut a^3b ad $3rrcc$, & ad resistentiam totius penduli ut a^3b ad $a^3b+3rrcc$. Exempli causâ. Sit $c=126$ digit $r=1$ digit. $a=125$ digit. $b=\frac{1}{100}$ digit. & resistentia fili erit ad resistentiam totius penduli ut 1953125 ad 4762800, seu ut 1 ad 2,438 quamproxime.

DE MOTU CORPORUM.

tiæ globorum, demptâ fili reſiſtentiâ, ſunt quam proxime in duplicatâ ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$ ad $1-\frac{1}{3}$, ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1 non longe abeſt à diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cum reſiſtentia fili in globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum ſuſpen-

186. Inveniri etiam poteſt pars illa reſiſtentiæ fili quæ uniformis eſt, quæque in tardioribus motibus obſervatur; poſito quod uniformis illa reſiſtentia fili ſit ad uniformem reſiſtentiam globi, ut ſpatium ſolidum quod filum oſcillando deſcribit ad ſpatium ſolidum quod deſcribit globus. Filum cylindricum AB oſcillatione unâ deſcribat ſpatium ſolidum ſeu priſma cujus baſis eſt ſector circularis ABD, & altitudo diameter fili, interea dum globi centrum C, deſcribit arcum CE; diameter fili dicatur $2R$, & ſpatium à filo deſcriptum erit $R \times AB \times BD$; ſpatium verò a globo deſcriptum eſt factum ex area circuli cujus radius BC, in arcuum CE quem centrum C deſcribit; ſeu eſt $\frac{22}{7} BC^2 \times CE$. Quarè uniformis reſiſtentia fili eſt ad uniformem reſiſtentiam globi ut $R \times AB \times BD$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times CE$, hoc eſt, ob rectas AB, AC arcubus BD, CE proportionales, ut $R \times^2 AB^2$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times AC$, totaque uniformis reſiſtentia penduli ad uniformem reſiſtentiam globi ut $R \times AB^2 + \frac{22}{7} BC^2 \times AC$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times AC$.



Exempli causâ. Sit $R = \frac{1}{100}$ digit. AC $= 126$ digit. $BC = 3\frac{7}{16}$, $AB = 122\frac{9}{16}$ ut in experimentis primo ac ſecundo, & invenietur uniformis reſiſtentia fili ad uniformem reſiſtentiam globi ut 1 ad 31 circiter, & ideo reſiſtentia fili eſt reſiſtentiæ totius penduli pars $\frac{1}{32}$. Cum igitur ſupra inventa ſit reſiſtentia uniformis ad pondus globi lignei ut 1 ad 735294, ſubductâ reſiſtentiâ fili, erit uniformis reſiſtentia globi lignei ad ejuſdem pondus unciar. Rom. $57\frac{7}{22}$ ut 1 ad 760000 circiter. Quæramus nunc reſiſtentiam uniformem globi plumbei in ultimo experimento. Mediocres arcuum differentiæ in primâ tabulâ ſumptæ ſunt in caſ. 1°. 2°. & 3°. $\frac{1}{1808}$, $\frac{1}{912}$, & $\frac{1}{386}$, reſpectivè. Loco V, in quantitate $A + BV + CV^2$, ſcribantur ſucceſſivè numeri 1, 2, & 4, & prodi-

ſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu à nodo deſcriptus 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus 28 dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. (b) Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri à nodo deſcriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oſcillatione mediocri à centro globi deſcriptum; & ita dif-

dibunt æquationes $A+B+C=\frac{1}{1808}$, $A+2B+4C=\frac{1}{912}$, & $1A+4B+16C=\frac{1}{386}$, ex quibus habetur $A=0,0001455$ $B=0,0004076$, & $C=0,0000679$. Unde reſiſtentia uniformis eſt ad pondus globi unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut $\frac{1}{2}A$ ſeu 0,0000728 ad 121, id eſt, ut 1 ad 1662088. Jam verò cum in hoc experimento ſit AC = 126 digit. BC = 1, AB = 125, ſi ponatur $R=\frac{1}{100}$ digit. invenitur uniformis reſiſtentia fili ad reſiſtentiam uniformem globi ut 15625 ad 39600, ſive fere ut 2 ad 5; & ideo fili reſiſtentia totius reſiſtentiæ uniformis partes continet $\frac{2}{7}$. Quarè uniformis reſiſtentia globi plumbei eſt ad ejus pondus unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut 1 ad 2326923 circiter; & hinc uniformis reſiſtentia globi plumbei cujus diameter eſt digit. 2, eſt ad reſiſtentiam globi lignei uniformem cujus diameter eſt digit. $6\frac{7}{8}$ ut $26\frac{1}{4}\times 760000$ ad $57\frac{7}{22}\times 2326923$, hoc eſt, ut 19950000 ad 133374995 ſive ut 1 ad 6,685.

Verum ſi ponatur reſiſtentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, reſiſtentia globi lignei invenitur eſſe ad ejuſdem pondus $57\frac{7}{22}$ unciar. Rom. in ratione 1 ad 450000 circiter, & reſiſtentia uniformis globi plumbei ad ejus pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. in ratione 1, ad 910900 per tabulam primam; & in ratione 1, ad 1021097 per tabulam ſecundam ultimi experimenti; undè ſumptâ mediocri ratione, reſiſtentia uniformis globi plumbei eſt ad pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. ut 1 ad 966000 circiter. Et ideò, in hâc reſiſtentiæ Hypotheſi, uniformis reſiſtentia globi plumbei cujus eſt diameter digit. 2, eſt ad reſiſtentiam uniformem globi lignei cujus diameter eſt digit. $6\frac{1}{8}$, ut $26\frac{1}{4}\times 450000$ ad $57\frac{7}{22}\times 966000$ ſeu ut 1, ad 4,687, circiter. 186.

(b) * *Ejus pars decima.* Si oſcillatio ex itu & reditu penduli, ſeu ex bino deſcenſu binoque aſcenſu componatur, quinque oſcillationes ſic acceptæ æquivalent oſcillationibus decem quarum ſingulæ ex uno tantùm deſcenſu unoque aſcenſu conſtant. Priore ſignificatione Newtonus oſcillationes quinque, de quibus hic loquitur, accepiſſe videtur, ut potè qui differentiam 4 digit. Per N. 10 dividit ut differentiam inveniat inter arcus deſcenſu uno & ſubſequente aſcenſu deſcriptos in unâ mediocri oſcillatione ex deſcenſu uno unoque aſcenſu compoſitâ.

DE MOTU CORPORUM.

differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0, 4475. (c) Si longitudo penduli, manente longitudine arcus descripti, augeretur in ratione 126 ad 122 $\frac{1}{2}$; tempus oscillationis augeretur & velocitas penduli diminueretur in ratione illâ subduplicatâ, maneret vero arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum differentia 0, 4475. Deinde si arcus descriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia ista 0, 4475 (d) augeretur in duplicatâ illa ratione, ideoque evaderet 1, 5295. Hæc ita se haberent, ex hypothesi quod resistentia penduli esset in duplicatâ ratione velocitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum suspensionis & centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum foret 1, 5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318, 136. Rursus ubi pendulum superius ex globo ligneo constructum centro oscillationis, quod à puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum descensu & ascensu descriptum (e) fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta

(c) * *Si longitudo penduli*, in medio non resistente *augeretur in ratione* 126 *ad* 122 $\frac{1}{2}$, *tempus oscillationis*, ob datam globi funependuli massam & pondus, *augeretur in ratione illâ subduplicatâ* (per cor. 6. prop. 24.) quod etiam in medio resistente verum est quam proximè (180).

* Mutatâ longitudine penduli & manente longitudine arcûs descripti, velocitas penduli diminuetur in ratione subduplicatâ longitudinis penduli, (ideoque inversè ut tempus); Nam velocitates descensu per arcus quosvis acquisitæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum illis arcubus correspondentium; Chordæ verò pro quibus arcus sumere hic liceat, sunt mediæ proportionales inter absciss as suas & circulorum Diametros, si ergo sumantur arcus æquales in circulis inæqualibus, absciss æ eorum arcuum erunt inverse ut Diametri circulorum sive inversè ut eorum Radii, hoc est inversè ut longitudines pendulorum, ergo velocitates quæ sunt in ratione subduplicatâ absciss arum, erunt in ratione subduplicatâ inversâ longitudinum pendulorum; Cum ergo arcuum differentiæ sint ut resistentia & quadratum temporis conjunctim, resistentiaque sit ut quadratum velocitatis, sitque quadratum velocitatis inverse ut longitudo pendulorum, & quadratum temporis directè ut longitudo pendulorum, compensatis rationibus manebunt eædem arcuum differentiæ, si mutatâ pendulorum longitudine arcus æquales describantur.

(d) * *Augeretur in duplicatâ illâ ratione.* (Per cor. 2. prop. 31.).

(e) * *Fuit* $\frac{126}{121}$ *in* $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$. Cum enim in cas. 6°. experimenti primi penduli sen

fili,

ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49, 396. Duxi autem differentias haſce in pondera globorum, ut invenirem eorum reſiſtentias. Nam differentiæ oriuntur ex reſiſtentiis, (f) ſuntque ut reſiſtentiæ directè & pondera invertè. Sunt igitur reſiſtentiæ ut numeri 318, 136 & 49, 396. Pars autem reſiſtentiæ globi minoris, quæ eſt in duplicatâ ratione velocitatis, erat ad reſiſtentiam totam ut 0,56752 ad 0,61675, id eſt, ut 45,453 ad 49,396; & pars reſiſtentiæ globi majoris propemodum æquatur ipſius reſiſtentiæ toti; ideoque partes illæ ſunt ut 318.136 & 45,453 quamproximè, id eſt, ut 7 & 1. Sunt autem globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ ſunt ut 7,438 & 1, id eſt, ut globorum reſiſtentiæ 7 & 1 quamproximè. Differentia rationum haud major eſt, quam quæ ex fili reſiſtentiâ oriri potuit. Igitur reſiſtentiarum partes illæ quæ ſunt, paribus globis, ut quadrata velocitatum; ſunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum globorum.

LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

Cæterum globorum, quibus uſus ſum in his experimentis, maximus non erat perfectè ſphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quaſdam brevitatis gratiâ neglexi; de calculo accurato in experimento non ſatis accurato minimè ſollicitus. Optarim itaque, (g) cum demonſtratio vacui ex his dependeat, ut experimenta cum globis & pluribus & majoribus & magis accu-

fili ad nodum uſquè longitudo eſſet 121 digit. arcus deſcriptus erat $119\frac{5}{29}$ digit. & arcuum differentia $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit. Et mutatâ penduli longitudine in ratione 126 ad 121, arcus deſcriptus & differentia mutantur in eâdem ratione, fiebatque proindè arcus $\frac{126}{121} \times 119\frac{5}{29}$, ſeu $124\frac{3}{31}$ digit. & differentia $\frac{126}{121} \times \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit.

(f) * *Suntque ut reſiſtentiæ directè & pondera inversè.* Nam (per cor. prop. 30.) differentiæ illæ in datos numeros ductæ ſunt ad penduli longitudinem, ut reſiſtentia ad gravitatem ſeu pondus globi penduli; datâ igitur penduli longitudine, differentiæ illæ ſunt ut reſiſtentiæ directè & pondera inversè. 186.

(g) 187. * *Cum demonſtratio vacui &c.* Utrum reſiſtentia quam in motis corporibus experimur, tota ſit in eorum externâ ſuperficie, an verò partes etiam internæ in ſuperficiebus propriis reſiſtentiam notabilem ſentiant, experimentis globorum in medio reſiſtente oſcillantium inveniri poteſt. Nam ſi, exempli causâ, globorum in dato medio paribus velocitatibus motorum reſiſtentiæ ſemper eſſent in

DE MOTU CORPORUM.

accuratis tentarentur. Si globi ſumantur in proportione geometricâ, putà quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo reſiſtentias diverſorum fluidorum inter ſe tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aquâ fontanâ, fecique ut immerſa pendula in medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{5}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in tabulâ ſequente deſcripſimus, exiſtente videlicet longitudine penduli à puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Ar-

in duplicatâ diametrorum ratione, inſenſibilis foret in partibus internis reſiſtentia; cum enim reſiſtentia illa interna à numero, magnitudine, figurâ & texturâ internarum partium penderet, non poſſet eadem conſtanter manere in globis æqualibus & heterogeneis, ligneis v. g. & plumbeis, nec in globis inæqualibus externarum ſuperficierum ſed potiùs ſolidorum rationem ſequeretur. Porrò ſuperioribus experimentis jam probatum eſt in velocioribus globorum motibus, reſiſtentias quadratis diametrorum proportionales eſſe quam proximè, concludendum igitur eſt nullam eſſe notabilem in partibus corporum internis reſiſtentiam, quod tamen deinceps pluribus aliis argumentis demonſtrabit Newtonus. Verum ſi medium quoddam æthereum vel longè ſubtiliſſimum omnes omnium corporum poros & meatus repleret, propter medii illius ætherei ſummam denſitatem atquè inertiam omni materiæ propriam, partes internæ corporum per magnam reſiſtentiam ſentirent. At qui Carteſianum mundi pleni ſyſtema emendarunt noviſque inventis ornarunt eruditiſſimi ſagaciſſimique Mathematici, ii, repudiatis veteribus effugiis, quibus Carteſianorum vulgus utitur, ex ſubtilitate ac mobilitate ætheris & pororum quibus corpora omnia pertuſa ſunt diſpoſitione petitis, hoc unum reſponſum proferunt, ætheream materiam corporum gravium motibus minime reſiſtere, quod ſit omni gravitate deſtituta. Duplicis itaque generis materiam in univerſo diſtinguunt, gravem alteram cujus partes in vorticulos diviſæ non ſunt, alteram non gravem, omnis tamen gravitatis cauſam, cujus partes ex tenuiſſimis variorum ordinum vorticulis elaſticis conſtant. Cum autem vis motrix ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibenda, decreſcente corporis hujus gravitate, in eâdem ratione decreſcat, nullaque ſit ætheris gravitas, conſequens eſſe aiunt ut corpus grave quod in æthere datâ celeritate fertur, nonniſi infiniteſimam motûs ſui partem ex reſiſtentiâ ætheris finito quovis tempore deperdat. Verùm præterquam quod totum hoc ſiſtema, ut ut elegans ac venuſtum, fictis ferè ad arbitrium hypotheſibus, quas Newtonus è Phyſicâ experimentali vellet eliminari, nititur, plurimiſque & graviſſimis aliis ex Mechanicâ atquè Aſtronomiâ difficultatibus premitur, adductum modò reſponſum his etiam laborat incommodis. Primùm quidem evidens eſt vim illam quæ ad corpus grave contrà gravitatis directionem ſuſtinen-

Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum in aqua		$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	11	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oscillationum in aere	$85\frac{1}{2}$	287	535						

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aquâ amissi sunt. Erant quidem oscilla-

nendum necessaria est, cum corporis pondere decrescere debere; sed non ità manifestum est vim motricem ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibendam, in ratione ponderis decrescere oportere, ubi vis illius motricis directio gravitatis directioni opposita non est, sed illi perpendicularis aut cum illâ conspirans. Præterea materia omnis ætherea circa solem, stellas, atque planetas singulos perniciissimo motu in orbem acta vi centrifugâ pollet quâ à centris magnorum vorticum, atque etiam à centris singulorum vorticulorum propriis recedere nititur, undè cæterorum corporum gravitas ortum habet; at vis illa centrifuga quæ cum vi centripetâ seu gravitate conferri potest, idem præstare in æthere debet ratione motûs in datâ materiæ quantitate datâ vi motrice imprimendi, quod in cæteris corporibus gravitas præstat. Nulla igitur esse ratio videtur cur corpus grave datâ celeritate motum nonnisi infinitesimam suæ celeritatis particulam ex æ heris non gravis, resistentiâ amittat siquidem illud vi centrifugâ pollet; Et, si materia ætherea suâ vi centrifugâ vel certe vi indè ortâ corporum gravitatem producat, eorumque motum finitum acceleret & extinguat finito tempore, multò magis eadem materia corpus grave movere, aut motum ejus finito tempore extinguere debet, si finitâ velocitate in illud incurrat ac continuò urgeat, cum vis centrifuga infinitesima sit, si cum vi quâ corpus spatium finitum tempore infinito describit, conferatur. 187.

* Et quidem resistentia ex gravitate materiæ occurrentis non pendet, sed ex ejus inertiâ, quâ fit ut nullum corpus ab alio motum suscipiat quin tantumdem motus in eo destruat, idque Mechanici communiter statuunt tam ex consensu omnium quorumcumque Phænomenorum, ubi (semotâ gravitatis consideratione) nullus motus motum producendo non consumitur, quam ex Principiis Metaphysicis quâ liquet quod si res ita se non haberet, vel minimus motus infinitum motum produceret, totaque Universi moles ex Atomi progressione dimoveretur, quod absurdum. Unde si Æther non resisteret, hoc est vi inertiæ careret, fingendæ forent duæ materiæ species quarum altera vi inertiæ prædita foret, altera verò non, ita ut quamvis ab occurrente materia dimoveatur, nihil tollat de ejus motu; simul autem statuitur quod id æther corporum motum sistere potest aut mutare quomodocumque, nam si æther sit gravitatis causa oportet ut illa ipsa materia ætherea quæ corporis moti actione movetur dum tamen nihil quicquam de illius motu tollit, possit illud idem corpus si sursum feratur sistere, in adversum ejus directionem mutare &c. Quæ Metaphysicè etiam inter se repugnare videntur, nec satis fuisse perpensa ab ingeniosissimis Cartesianismi restauratoribus.

DE MOTU CORPORUM.

oscillationes in aere paulo celeriores quàm in aquâ. At si oscillationes in aquâ in eâ ratione accelerarentur ut motus pendulorum in medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aquâ, quibus (h) motus idem ac prius amitteretur; ob resistentiam auctam & simul quadratum temporis diminutum in eâdem ratione illâ duplicatâ. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aquâ oscillationibus $1\frac{1}{5}$ amissi sunt; (i) ideoque resistentia penduli in aquâ est ad ejus resistentiam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV+CV^2$ differentiam arcuum in descensu & subsequente ascensu descriptorum à globo in aere cum velocitate maximâ V moto; & cum velocitas maxima in casu columnæ quartæ sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum in casu columnæ quartæ ad differentiam in casu columnæ primæ (k) ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his casibus 1 & 8 pro

(h) * *Motus idem ac prius amitteretur.* Differentia arcuum motui amisso proportionalis, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim (per cor. 5. Lem. X); sed aucta paululum velocitate, resistentia quamproximè augetur in ejus ratione duplicatâ (per hyp.) & simul quadratum temporis minuitur in eâdem ratione illâ duplicatâ, quia totus arcus descriptus numero oscillationum $1\frac{1}{5}$ idem quam proxime manet. Quare motus amissus numero oscillationum $1\frac{1}{5}$ idem manet, si oscillationes in aquâ accelerentur ut dictum est (vid. not. sup. c).

(i) * *Ideoque resistentia penduli.* Nam motus in aëre amissus unâ mediocri oscillatione, quâ arcus digit. 14 describitur, est pars $\frac{1}{535}$ motûs totius oscillationibus 535, amissi; Et similiter motus in aquâ amissus æquali oscillatione quâ arcus digit. 14 pari velocitate describeretur est quam proximè pars $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ejusdem motûs totius amissi oscillationibus $1\frac{1}{5}$ in aquâ & oscillationibus 535 in aëre. Quare cum resistentiæ totæ unâ oscillatione mediocri sint ut partes illæ motûs amissæ, est resistentia penduli in aquâ ad ejus resistentiam in aëre ut $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ad $\frac{1}{535}$, id est, ut 535 ad $1\frac{1}{5}$.

(k) * *Ut* $\frac{2}{535}$ *ad* $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$. Dividendo nimirum arcuum differentias per numerum os-

8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$ seu $A + 8C = 535$ indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$ & $C = 64\frac{3}{14}$ & $A = 21\frac{2}{7}$: atque ideo resistentia, (l) cum sit ut $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$ seu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco resistentia penduli in aquâ est ad resistentiæ partem illam in aere, quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus considerenda venit, (m) ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim, id est, ut 571 ad 1. Si penduli in aquâ oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aquâ oscillantis resistentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate in aere oscillantis, (n) ut 850 ad 1 circiter, hoc est, ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

LIBER SECUNDUS. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aquâ, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicatâ. Ejus rei causam investigan-

oscillationum ut differentia in unâ mediocri oscillatione habeatur, quemadmodum suprà factum est.

idcircò (ex æquo) & per compositionem rationum) *resistentia penduli in aquâ est ad resistentiæ partem illam in aere, &c.* 187.

(l) * *Cum sit ut* $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$. (per cor. prop. 30.).

(m) * *Ut* $61\frac{12}{17}$ *ad* &c. Est enim, ex suprà dictis, resistentia in aquâ ad resistentiam totam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$ & resistentia tota in aere ad resistentiæ partem illam in aere quæ velocitatis quadrato proportionalis est ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$, &

(n) * *Ut* 850. *ad* 1, circiter. Si enim resistentia fili ponatur ut suprà factum est, æqualis tertiæ parti resistentiæ totius in aere, erit fere resistentia penduli in aquâ ad ejus resistentiam totam in aere ut $535 - \frac{6}{15}$ ad $1\frac{1}{5} - \frac{6}{15}$, seu ut 2673 ad 4, & $2673 \times 61\frac{12}{17}$ ad $4 \times 48\frac{9}{56}$, ut 850 ad 1 circiter.

DE MOTU CORPORUM.

gando, in hanc incidi, quod arca nimis angusta esset pro magnitudine globi penduli, & motum aquæ cedentis præ angustiâ suâ nimis impediebat. Nam si globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; resistentia augebatur, in duplicatâ ratione velocitatis quam proximè. Id tentabam constituendo pendulum ex globis duobus, quorum inferior & minor oscillaretur in aquâ, superior & major proximè supra aquam filo affixus esset, & in aere oscillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut (o) in tabulâ sequente describitur.

Arcus descensu primo descriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amisso proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo resistentias mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proximè supra mercurium affixus erat globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aquâ communi, ut pendulo in fluido utroque successivè oscillante, invenirem proportionem resistentiarum; & prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi globum pendulum paulo majorem adhibebam, putà cujus diameter esset quasi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat resistentia argen-

(o) * *In tabulâ sequente.* Arcuum differentiæ dividantur per numerum oscillationum in casu unoquoque, & prodibunt differentiæ in oscillatione unâ mediocri 1.1851; 0.3076; .0827; .0235; .0073; .0023 .0010 quæ sunt quam proximè ut quadrata velocitatum, sive ut 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{64}$ $\frac{1}{256}$ in majoribus oscillationibus; priores enim termini sunt proximè sequentium fere quadrupli, in minoribus verò oscillationibus præcedentes termini sunt in minore ratione ad sequentes.

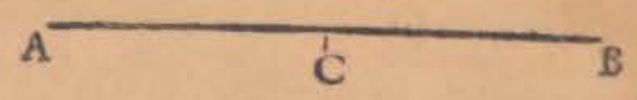
argenti vivi in eâ ratione ad reſiſtentiam aquæ, quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum eſt, propterea quod in his ultimis vas nimis anguſtum fuit pro magnitudine globi immerſi. Ampliato globo, deberet etiam vas ampliari. Conſtitueram quidem hujuſmodi experimenta in vaſis majoribus & in liquoribus tum metallorum fuſorum, tum aliis quibuſdam tam calidis quam frigidis repetere: ſed omnia experiri non vacat, & ex jam deſcriptis ſatis liquet reſiſtentiam corporum celeriter motorum denſitati fluidorum in quibus moventur proportionalem eſſe quam proximè. Non dico accuratè. Nam fluida tenaciora, pari denſitate, proculdubio magis reſiſtunt quâm liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quàm aqua pluvialis, aqua quàm ſpiritus vini. Verum in liquoribus, qui ad ſenſum ſatis fluidi ſunt, ut in aere, in aquâ ſeu dulci ſeu ſalsâ, in ſpiritibus vini, terebinthi & ſalium, in oleo à fæcibus per deſtillationem liberato & calefacto, oleoque vitrioli & mercurio, ac metallis liquefactis, & ſi qui ſint alii, qui tam fluidi ſunt ut in vaſis agitati motum impreſſum diutius conſervent, effuſique liberrimè in guttas decurrendo reſolvantur, nullus dubito quin regula allata ſatis accuratè obtineat: præſertim ſi experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis inſtituantur.

Denique cum nnonullorum opinio ſit, medium quoddam æthereum & longè ſubtiliſſimum extare, quod omnes omnium eorporum poros & meatus liberrimè permeet; à tali autem medio per corporum poros fluente reſiſtentia oriri debeat: ut tentarem an reſiſtentia, quam in motis corporibus experimur, tota ſit in eorum externâ ſuperficie, an vero partes etiam internæ in ſuperficiebus propriis reſiſtentiam notabilem ſentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis ab unco chalybeo ſatis firmo, mediante annulo chalybeo, ſuſpendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad conſtituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus ſurſum præacutus erat acie concavâ, ut annulus arcu ſuo ſuperiore aciei annixus liberrimè moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita con-

DE MOTU CORPORUM.

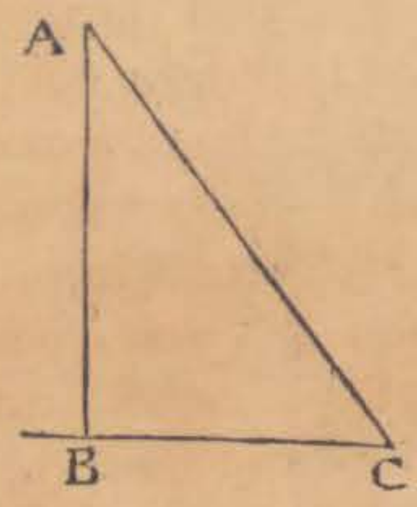
conſtitutum deducebam à perpendiculo ad diſtantiam quaſi pedum ſex, idque ſecundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oſcillante pendulo, ſupra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum ſuſpenſionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accuratè notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demiſſo notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oſcillationis primæ, ſecundæ ac tertiæ. Hoc repetebam ſæpius, ut loca illa quam potui accuratiſſimè invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, unà cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. Nam filum tenſum (P) dimidio ponderis ſui pendulum à perpendiculo digreſſum ſemper urget. Huic ponderi addebam pondus aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quaſi pars ſeptuageſima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere ſuo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oſcillantis eadem eſſet longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimiſſo, numerabam oſcillationes quaſi ſeptuaginta & ſeptem, donec pyxis ad locum ſecundo notatum rediret, totidemque ſubinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rurſus totidem donec pyxis reditu ſuo attingeret locum quartum. Unde concludo quod reſiſtentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad reſiſtentiam

(P) * *Dimidio ponderis ſui.* Fili tenſi AB homogenei & æqualis ubique craſſitiei centrum gravitatis eſt in loco medio C, (59. lib. 1.) ideóque vis quâ filum pondere ſuo toto P, ad rotandum circà A, urgetur, eſt ut $AC \times P$, ſeu ut $\frac{1}{2} P \times AB$. (63. lib. 1.) jam ſi inveniendum ſit pondus Q in B locandum ut momentum $Q \times AB$ æquivaleat momento ſeu vi fili totius; erit $Q \times AB = \frac{1}{2} P \times AB$, ideóque $Q = \frac{1}{2} P$. Quarè filum tenſum dimidio ponderis ſui P pendulum à perpendiculo digreſſum ſemper urget.



tiam pyxidis vacuæ quàm 78 ad 77. Nam ſi æquales eſſent ambarum reſiſtentiæ, pyxis plena ob vim ſuam inſitam ſeptuagies & octies majorem vi inſitâ pyxidis vacuæ, motum ſuum oſcillatorium tanto diutius conſervare deberet, atque ideo completis ſemper oſcillationibus 78 (q) ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oſcillationibus 77.

Deſignet igitur A reſiſtentiam pyxidis in ipſius ſuperficie externâ, & B reſiſtentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & ſi reſiſtentiæ corporum æquivelocium in partibus internis ſint ut ma-



que inclinatis agere hic neceſſum non eſt; ſi enim corpus in lineâ rectâ AC ad horizontem BC utcumque inclinatâ aſcendat vel deſcendat, reſiſtentia & celeritas in quibuſcumque locis & ſpatium deſcriptum ac tempus quo deſcriptum eſt, definiuntur per Prop. 3. Sect. 1; 8am. & 9am. Sect. 2; 13im. & 14am. Sect. 3. ac per notas iiſdem locis adjunctas. Cum enim vis gravitatis ſecundum directionem AB urgentis ſit ad ipſius partem quæ agit juxtà directionem AC, in datâ ratione lineæ AC ad AB, ſeu in datâ ratione ſinûs totius ad ſinum anguli inclinationis ACB; ſi loco vis gravitatis horizonti perpendicularis adhibeatur in calculis & conſtructionibus pars illius data quæ ſecundum directionem AC agit, conſtructiones calculique in citatis locis non mutantur. Supereſt igitur ut corporis in curvâ lineâ aſcendentis aut deſcendentis motum definiamus. 188.

Deſ-

(q) * *Ad loca illa notata redire.* Si reſiſtentiæ in ſingulis oſcillationibus eſſent æquales, motus amiſſi, ut poté reſiſtentiis proportionales, eſſent quoque æquales; ſed motus amiſſi, paribus oſcillationum temporibus, ſunt ut maſſæ ſeu pondera corporum & ſpatia motibus amiſſis deſcribenda conjunctim; ideoque ſpatia illa eſſent ut pondera inverſe; hoc eſt, ſpatium motu pixidis vacuæ amiſſo in unâ oſcillatione deſcribendum, eſſet ad ſpatium motu pixidis plenæ oſcillatione unâ amiſſo percurrendum ut 78 ad 1, & propterea ſpatia illa, completâ unicâ pixidis vacuæ oſcillatione, & pixidis plenæ oſcillationibus 78 abſolutis, forent æqualia quamproxime, atquè ideò pixis plena, completis ſemper oſcillationibus 78, ad loca notata rediret.

Cum in hâc Sectione 6ta. Newtonus de ſolo corporum in cycloide oſcillantium motu egerit, multa verò à recentioribus authoribus inventa ſint, quibus generalis motuum in curvis quibuſlibet theoria longe promota eſt, principia quibus uſi ſunt ſequenti problemate breviter exponemus.

PROBLEMA.

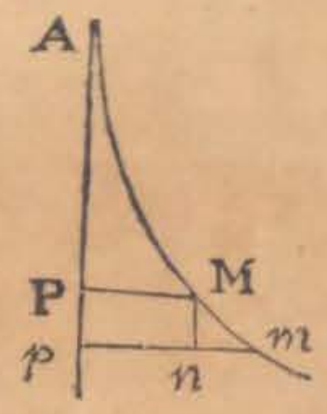
188. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis, definire motum corporis per curvam quamlibet aſcendentis vel deſcendentis in medio uniformi cujus reſiſtentia eſt ut velocitatis functio quælibet.

De corporum aſcenſu ac deſcenſu in lineis rectis ad horizontem quemodocum-

DE MOTU CORPORUM.

materia, ſeu numerus particularum quibus reſiſtitur: erit 78 B reſiſtentia pyxidis plenæ in ipſius partibus internis: ideoque pyxidis vacuæ reſiſtentia tota A + B erit ad pyxidis plenæ reſiſtentiam totam A + 78 B ut 77 ad 78, & diviſim A + B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A + B ad B ut 77 × 77 ad 1, & diviſim A ad B ut 5928 ad 1. Eſt igitur reſiſtentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejuſdem reſiſtentia in externâ ſuperficie, & amplius. Sic vero diſputamus ex hypotheſi quod major illa reſiſtentia pyxidis plenæ, non ab aliâ aliquâ causâ latente oriatur, ſed ab actione ſolâ fluidi alicujus ſubtilis in metallum incluſum.

Hoc



Deſcendat primùm corpus è loco dato A per curvam A M, ducatur verticalis A P, ad quam ex punctis M, & m, infinite propinquis demittantur perpendicula M P, m p, & ex M ad p m perpendiculum M n. Gravitas conſtans ſecundùm directionem verticali A P parallelam ſemper agens ſit $= g$, reſiſtentia in loco M $= r$, velocitas corporis ibidem $= v$; tempus quo deſcribitur A M $= t$, A P $= x$, A M $= s$, P p $=$ M n $= dx$, & M m $= ds$. Jam verò M m, eſt ad M n, ſeu ds ad dx, ut vis gravitatis g ad ipſius partem in directione M m agentem quæ ideo erit $= \frac{g\,dx}{ds}$; ſubducatur vis reſiſtentiæ r, & vis reſidua quâ corpus in loco M, juxtà directionem M m urgetur erit $= \frac{g\,dx}{ds} - r$. Undè (18) fit $g\,dx - r\,ds = v\,dv$. Hujus autem æquationis fluens ità ſumi debet ut evaneſcentibus x & s evaneſcat quoque v ſi velocitas corporis in loco A nulla ſit, & fiat $v = c$, ſi velocitas corporis in A, ſit $= c$. Simili modo ſi corpus è loco dato A per arcum A M aſcendat, & omnia ut modò ſuppoſuimus maneant, erit (18) $g\,dx + r\,ds = -v\,dv$, cujus æquationis fluentem ità ſumi oportet ut poſitis x & $s = 0$, fiat v, æqualis velocitati in loco A datæ.

Si abciſſa x in verticali B C per curvæ A C D punctum infimum C ducta capiatur, ſitque B P $= x$, & cætera maneant ut ſupra, erit adhuc pro corporis deſcenſu $g\,dx - r\,ds = v\,dv$; at pro aſcenſu per arcum C μ ſi data ſint puncta A & B, dicaturque C μ vel A C $\mu = s$, erit $-g\,dx + r\,ds = -v\,dv$, ſeu adhuc $g\,dx - r\,ds = v\,dv$, quia creſcente s decreſcit x & contrà. Si vero dicatur C P $= x$ & C M $= s$, quia hæ quantitates reſpectu aliarum B P, & A M negativæ ſunt, fiet pro deſcenſu $-g\,dx + r\,ds = v\,dv$, ſeu $g\,dx - r\,ds = -v\,dv$, & pro aſcenſu ſi dicatur C $\mu = s$ erit $g\,dx + r\,ds = -v\,dv$ quarum æquationum altera in alteram abit, mutato ſigno quantitati r, præfixo. Ex datâ igitur lege reſiſtentiæ, loco r ſcribatur ipſius valor per v & datas quantitates, & ex datâ æquatione ad curvam A M, loco dx ſcribatnr valor ejus per ds, s & datas quantitates in ſuperioribus formulis ſeu æquationibus; & deinde per curvarum quadraturas vel per ſeries, capiantur, ut oportet, formularum fluentes, obtinebi-

tur

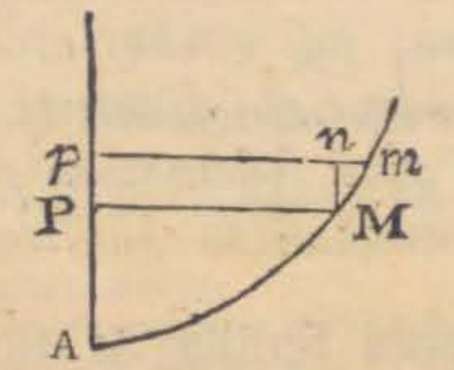
Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in quâ illud aliquando deſcripſeram, intercidit. Unde fractas quaſdam numerorum partes, quæ memoriâ exciderunt omittere compulſus ſum.

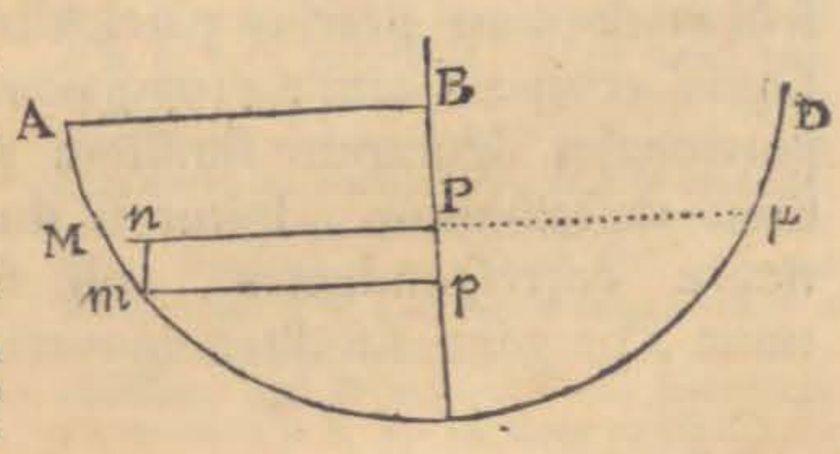
Nam omnia denuò tentare non vacat. Primâ vice, cum unco infirmo uſus eſſem, pyxis plena citius retardabatur. Cauſam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oſcillationibus obſequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum ſuſpenſionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti ſupra deſcripſimus.

SEC-

tur v per s & contrà, atque etiam r per s, & quia tempus t, quo arcus s deſcribitur eſt S. $\frac{ds}{v}$, dabitur quoque tempus. Q. E. I.

Exempli causâ. Sit reſiſtentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, quæ eſt Hypotheſis naturæ, ſeu ſit $r = \frac{aa + vv}{b}$, dicanturque BP $= x$, AM $= s$ & æquatio $g\,dx - r\,ds = v\,dv$ in hanc migrabit $g\,dx - \frac{aa\,ds}{b} = v\,dv + \frac{vv\,ds}{b}$; ut hoc ſecundum æquationis membrum debitam formam acquirat ponatur $ds = \frac{\frac{1}{2}\,b\,dz}{z}$, ſeu $s = \frac{1}{2}\,b$ L. z, æquatio evadet $g\,z\,dx - \frac{1}{2}\,aa\,dz = z\,v\,dv + \frac{1}{2}\,vv\,dz$, ſumptis fluentibus, fit g S. $z\,dx - \frac{1}{2}\,aaz = \frac{1}{2}\,zvv$. Undè invenietur $vv = \frac{2\,g\,\text{S.}\,z\,dx}{z} - aa$. Eſt autem S. $z\,dx$, area curvæ cujus abſciſſa x & ordinata z; & z datur per s, ope logarithmicæ, & x per s ope æquationis ad curvam AM. Sit h numerus cujus logarithmus eſt unitas, ſeu L. $h = 1$, erit s L. $h = \frac{1}{2}\,b$ L. z, & $\frac{2s}{b}$ L. h = L. $h^{\frac{2s}{b}} =$ L. z. atquè $h^{\frac{2s}{b}} = z$, undè habetur $vv = \frac{2\,g\,\text{S.}\,h^{\frac{2s}{b}}\,dx}{h^{\frac{2s}{b}}} - aa$.





Si in his æquationibus ponatur $a = 0$, definietur motus corporis in lineâ quâlibet curvâ deſcendentis & aſcendentis in medio uniformi, cujus reſiſtentia velocitatis quadrato proportionalis eſt. Cæterum totam hanc materiam copioſiſſimè & accuratiſſimè tractavit clariſſ. Eulerus tom. 2. Mechan.

DE MOTU CORPORUM.

SECTIO VII.

De motu fluidorum & resistentiâ projectilium.

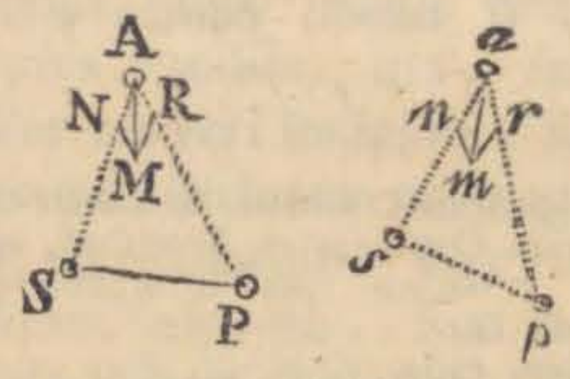
PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint & proportionales, singulæ in uno systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ in uno sunt systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fugent se mutuò, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè: dico quod systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri. (r)

Corpora similia & similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: putà si particulæ unius systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similium partes à particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem incœptorum motuum, pergent similiter moveri, usque donec sibi mutuo occur-

(r) * *Similiter moveri.* Sunto A & a, P & p, S & s, &c. particulæ in duobus systematibus sibi mutuò correspondentes. Particula A in suo systemate tempore T, describat spatium quam minimum A B, & particula correspondens a, in altero systemate tempore t, describat spatium a b, priori A B, simile similiterque situm, ità ut sit A B, ad a b, ut diameter particulæ A, ad diametrum particulæ a, sivè ut A S ad a s, vel P S ad p s, & angulus A S B æqualis angulo a s b, atque S A B æqualis s a b. Et aliæ sibi mutuò correspondentes particulæ quiescant vel simili modo moveantur. His positis, demonstrandum est quod si sumantur tempora alia quæ sint ut T & t particulæ correspondentes erunt utrinque similiter positæ.

currant. Nam ſi nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter (f) in lineis rectis per motus leg. 1. Si viribus aliquibus ſe mutuo agitant, & vires illæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè; quoniam particularum ſitus ſunt ſimiles & vires proportionales, (t) vires totæ quibus particulæ correſpondentes



in ſingulo ſyſtemate ſimiliter eſt poſita. Q. erat 1um. 185.

2o. Vires illæ compoſitæ erunt ut particularum Diametri inverse & quadrata velocitatum directè.

Secetur utcumque in directione AS lineola AN quæ vim particulæ S exprimat, ducaturque NM, parallela AP, & ex M ducatur MR parallela AS, fiet parallelogrammum ANMR, in quo MR=AN, & angulus AMR=ang. MAN, ideoque AN ad AR ut ſinus anguli MAR ad ſinum ang. MAN, ſive ut PA ad SA, hoc eſt ut vires particularum *S* & *P*, ideoque AR exprimet vim particulæ *P*, & AM exprimet vim compoſitam ex viribus *S* & *P*. Sumatur in as lineola an, quæ ſit ad AN, ut as ad AS inverse, & ut quadratum velocitatis in *a* ad quadratum velocitatis in *A* directè, ductiſque nm & mr parallelis lineis ap, as erunt an & ar ut vires particularum s & p, & am exprimet vim ex iis compoſitam.

Sed ob ſimilitudinem triangulorum ANM, anm eſt AN ad AM ſicut an ad am, ſive vis particulæ *A*, ad vim compoſitam ex particulis *S* & *P*, ut vis particulæ *a* ad vim compoſitam ex particulis *s* & *p*, ideoque viciſſim, vis particulæ *A* ad vim particulæ *a* ut, vis compoſita ex vi particularum *S* & *P*, ad vim compoſitam ex viribus particularum *s* & *p*; Sed vis particula *A* eſt ad vim particulæ *a*, inverse ut

par-

(f) * *In lineis rectis per mot. leg.* 1. Ideóque ob velocitates uniformes & ſimiles motuum directiones pergent ſimiliter moveri temporibus proportionalibus, uſque ad occurſus ſuos primos.

(t) * *Vires totæ quibus particulæ correſpondentes agitantur ſimiles habebunt determinationes, & erunt ad invicem ut correſpondentium particularum Diametri inverse & quadrata velocitatum directè.*

* Particula *A* inter duas *S* & *P*, & particula *a* inter duas *s* & *p* ſint ſimiliter ſitæ, & quácumque celeritate in directione ſimiliter poſitâ particulæ illæ *A* & *a* ferantur, trahanturque vel fugentur illæ particulæ *A* & *a* à particulis *S* & *P*, *s* & *p* per vires quæ ſint ut Diametri particularum correſpondentium inverse ſive ut lineæ homologæ inverse, & quadrata velocitatum directè, dico 1o. quod directio vis compoſitæ trahentis particulas *A* & *a* ſimiliter poſita erit in utroque ſyſtemate, nam anguli SAP & sap, quos faciunt vires agentes, ex hypotheſi æquales ſunt, vis autem compoſita ſequetur Diagonalem quæ faciat angulos cum directione utriuſque vis componentis quorum ſinus ſint reciproce ut vires agentes, per nat. virium compoſitarum, ſit ea Diagonalis hic AM, illic am, erit ergo ſinus anguli SAM, ad ſinum anguli PAM, inverse ut vis particulæ S ad vim particulæ *P* ſive directè ut lineæ homologæ SA & PA (nam quoniam de unico corpore A nunc agitur ratio quadratorum velocitatum hic nihil mutat) pariter ſinus anguli sam eſt ad ſinum Anguli pam ut sa ad pa; ſed eſt SA ad PA ſicut sa ad pa ex hypotheſi, ergo anguli æquales SAP & sap in eadem ratione ſecantur per lineas AM, am, ideoque anguli SAM & sam, MAP & map ſunt æquales, ergo directio vis compoſitæ trahentis particulas *A* & *a*

DE MOTU CORPORUM.

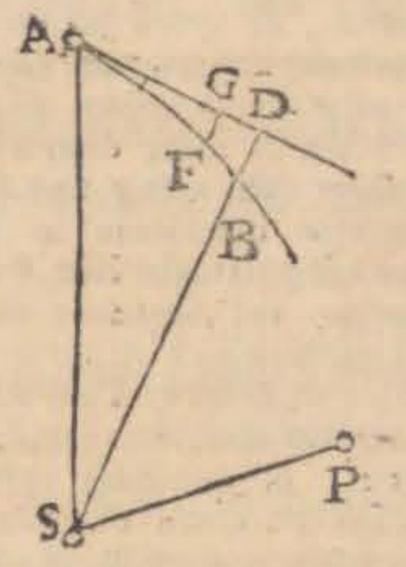
tes agitantur, ex viribus ſingulis agitantibus (per legum corol. larium ſecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt, ut correſpondentium particularum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: & propterea efficient ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. (u) Hæc ita ſe habebunt (per corol. 1. & 8. prop. IV. lib. 1.) ſi modo centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam particularum Diametri, & directè ut velocitatum Quadrata ex hypotheſi, ergo vires compoſitæ ſunt in eâdem ratione. Q. E. D.

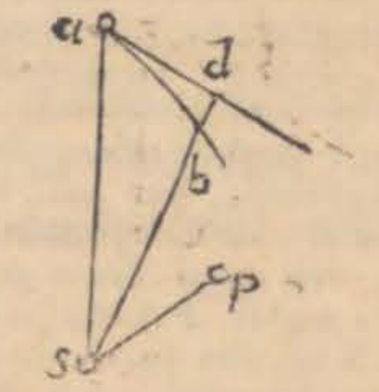
Idem ratiocinium ad vires compoſitas ex pluribus particulis extendetur. Unde *vires totæ &c.*

(u) * *Hæc ità ſe habebunt.* (*Per cor.* 1. *&* 8. *prop.* 4. *lib.* 1.) Aut quod idem eſt per hoc Lemma.

189. Lemma. Si corpora duo A, a, circà centra immota S, s, projiciantur ſecundum directiones A D, a d, quæ cum diſtantiis A S & a s æquales angulos DAS, d a s conſtituunt, & urgeantur viribus acceleratricibus centra illa S, s reſpicientibus, quæ ſemper ſint inter ſe ut quadrata velocitatum corporum directè & diſtantiæ à centris inversè, corpora illa figuras ſimiles circà centra S & s deſcribent, ſimileſque & proportionales figurarum illarum partes temporibus proportionalibus percurrent.

In projectilium directionibus capiantur partes quam minimæ A D, a d diſtantiis A S, a s proportionales. Jungantur S D, s d & corpora A, a temporibus quibuſvis T, t deſcribant arcus A B, a b qui lineas S D, s d attingunt. Sumantur arcus A F, a b qui eodem tempuſculo deſcripti ſint, & ductâ F G parallelâ S D, erit (4. lib. 1.) F G ad b d ut vis centralis quâ corpus A urgetur ad vim centralem quâ urgetur corpus a; & quia vires illæ (per hyp.) ſunt ut quadratum velocitatum directè & diſtantiæ A S, a s, inversè, velocitates autem ſunt ut ſpatia quæ ſimul deſcripta fuiſſent in Tangente A G, a d, erit F G ad b d, ut $AG^2 \times as$ ad $ad^2 \times AS$. Sed (per cor. 1. Lem. XI.) $BD : FG = AD^2 : AG^2$; quare (per compoſitionem rationum & ex æquo) $Bd : bd = AD^2 \times as : ad^2 \times AS$. Cum igitur ob triangulorum A S D, a s d, ſimilitudinem (ex hyp.) ſit A D : a d = A S : a s & ideò $AD^2 \times as : ad^2 \times AS = AS : as$; erit B D : b d = A S : a s, & ob ſimilitudi-





nem

niam (x) ob tranſlationum ſimilitudinem, ſimiles manent eorum ſitus inter ſyſtematum particulas; ſimiles inducentur mutationes in figuris quas particulæ deſcribunt. Similes igitur erunt correſpondentium & ſimilium particularum motus uſque (y) ad occurſus ſuos primos, & propterea ſimiles occurſus, & ſimiles reflexiones, & ſubinde (per jam oſtenſa) ſimiles motus inter ſe donec iterum in ſe mutuo inciderint, & ſic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpora duo quævis, quæ ſimilia ſint & ad ſyſtematum particulas correſpondentes ſimiliter ſita, inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, ſintque eorum magnitudines ac denſitates ad invicem ut magnitudines ac denſitates correſpondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Eſt enim eadem ratio partium majorum ſyſtematis utriuſque atque particularum.

Corol. 2. Et ſimiles & ſimiliter poſitæ ſyſtematum partes omnes quieſcant inter ſe: & earum duæ, quæ cæteris majores ſint, & ſibi mutuo in utroque ſyſtemate correſpondeant, ſecundum lineas ſimiliter ſitas ſimili cum motu utcumque moveri incipiant: hæ ſimiles in reliquis ſyſtematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri; atque ideo ſpatia diametris ſuis proportionalia deſcribere.

PRO-

nem figurarum, ut AD ad ad, ideoque ob æquales angulos D & d, triangula ADB, adb erunt ſimilia, & propterea arcus AB, ab, ſimiles & ſimiliter ſiti. Simili modo demonſtrabitur quod corpora è locis B & b progreſſa ſimiles arcus ac ſimiliter poſitos deſcribant, atque ità deinceps. Deſcribent ergò figuras ſimiles circà centra S & s. His verò demonſtratis patet (196. lib. 1.) quod deſcribent ſimiles & proportionales figurarum ſimilium partes temporibus proportionalibus, ſeu quæ ſemper ſint ut tempora. T & t.

(x) * *Ob tranſlationum ſimilitudinem.* Oriuntur enim centrorum illorum tranſlationes ex cauſis proportionalibus & ſimiliter agentibus, videlicet ex ſimilibus particularum ſimilium & correſpondentium motibus, adeò ut quemadmodum initio motûs centra ſimiliter moveri cœperunt, ſimiliter quoque deinceps moveri pergant. 189.

(y) * *Uſque ad occurſus ſuos primos &c.* Nam cum particularum correſpondentium diſtantiæ, poſt quævis tempora proportionalia, ſint ſemper in datâ diametrorum ratione in duobus ſyſtematibus (ex dem.), neceſſe eſt ut diſtantiæ temporibus proportionalibus evaneſcant, & proindè ut particularum occurſus primi

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iisdem positis, dico quod systematum partes majores resistuntur in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum suarum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione densitatis partium systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices à quibus oriuntur, (z) id est, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per hypothesin) ut quadrata velocitatum directè & distantiæ particularum correspondentium inversè & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directè: ideoque cum distantiæ particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, (a) & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum; resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium systematum. *Q. E. D.* (b) Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri &

vires

contingant, ubi particulæ illæ figurarum similium partes similes describserunt. Ex quo sequitur particularum illarum occursus primos similes fore, tum ratione directionum, quod jam demonstratum est, tum etiam ratione velocitatum & quantitatum motûs. Siquidem spatia percursa temporibus proportionalibus sunt semper in datâ ratione, ideoque velocitates in locis similibus sunt semper in datâ ratione, & inde ob particularum correspondentium similitudinem & datam densitatum rationem, quantitates motûs quæ sunt ut velocitates & densitates & volumina conjunctim, in locis similibus manent in datâ ratione. Reflexiones igitur quæ ex ejusmodi motibus atque occursibus similibus nascuntur, similes erunt.

(z) * *Id est ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ* (per def. 8. lib. 1.)

(a) * *Et quantitates materiæ sint &c.* Quantitates materiæ sunt ut densitates & volumina partium conjunctim (2. lib. 1.), & ob partium similitudinem, volumina sunt ut cubi laterum homologorum, seu diametrorum, ideóque quantitates materiæ sunt ut densitates partium & cubi diametrorum.

(b) * *Posterioris generis resistentiæ &c.* Si enim vires reflexionum supponantur æqua-

vires conjunctim. Numeri autem reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directè, & ſpatia inter earum reflexiones inversè. Et vires reflexionum ſunt ut velocitates & magnitudines & denſitates partium correſpondentium conjunctim; id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, reſiſtentiæ partium correſpondentium ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi ſyſtemata illa ſint fluida duo elaſtica ad modum aeris, & partes eorum quieſcant inter ſe: corpora autem duo ſimilia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas, utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ fluidorum ſe mutuo agitant, ſint ut corporum projectorum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: corpora illa temporibus proportionalibus ſimiles excitabunt motus in fluidis, & ſpatia ſimilia ac diametris ſuis (c) proportionalia deſcribent.

Corol. 2. Proinde in eodem fluido projectile velox reſiſtentiam patitur, quæ eſt in duplicatâ ratione velocitatis quam proximè. Nam ſi vires, quibus particulæ diſtantes ſe mutuo agitant,

quales, reſiſtentiæ ſunt ut numeri reflexionum ſeu occurſuum; & ſi numeri reflexionum æquentur, reſiſtentiæ ſunt ut vires reflexionum correſpondentium; undè, conjunctis his rationibus, reſiſtentiæ quæ ex particularum & partium majorum occurſibus & reflexionibus oriuntur, ſunt ſemper ut reflexionum correſpondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum, cæteris paribus, ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directe, &, cæteris paribus, ſunt inversè ut ſpatia inter particularum & partium correſpondentium occurſus ſeu reflexiones intercepta, id eſt, inversè ut partium correſpondentium diametri, ideóque *numeri reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directè* & earumdem diametri inversè. *Et vires reflexionum ſunt ut* motûs quantitates in occurſibus *id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium correſpondentium. Et conjunctis his omnibus rationibus &c.* 189.

(c) * *Proportionalia deſcribent.* Probatur enim ut in dem. prop. 32. lemmate (189) ſimiles ſimilium figurarum partes temporibus proportionalibus à corporibus illis ſemper deſcribi. Undè corollarium hoc patet (per cor. 1. & 2. prop. 32.).

DE MOTU CORPORUM.

tant, augerentur in duplicatâ ratione velocitatis, (d) reſiſtentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè; (e) ideoque in medio, cujus partes ab invicem diſtantes ſeſe viribus nullis agitant, reſiſtentia eſt in duplicatâ ratione velocitatis accuratè. Sunto igitur media tria *A*, *B*, *C* ex partibus ſimilibus & æqualibus & ſecundum diſtantias æquales regulariter diſpoſitis conſtantia. Partes mediorum *A* & *B* fugiant ſe mutuo viribus quæ ſint ad invicem ut *T* & *V*, illæ medii *C* ejuſmodi viribus omninò deſtituantur. Et ſi corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; ſitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G* in ſubduplicatâ ratione virium *T* ad vires *V*: reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *E*, & reſiſtentia corporis *F* ad reſiſtentiam corporis *G*, (f) in velocitatum ratione duplicatâ; & propterea reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *F* ut reſiſtentia corporis *E* ad reſiſtentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quâcunque, ac diminuendo vires particularum medii *B* in eâdem ratione duplicatâ, (g) accedet medium *B* ad formam & conditionem medii *C* pro lubitu,

(d) * *Reſiſtentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè.* Nam ſi idem corpus variâ cum velocitate in uno eodemque fluido ſimiliter projiciatur, eædem ſunt reſiſtentiæ, ac ſi corpora duo ſimilia & æqualia ſimiliter projicerentur in duobus fluidis prioribus omnino paribus; ſed in hoc caſu, ob æquales inter ſe partium correſpondentium diametros & denſitates, reſiſtentiæ ſunt in duplicatâ ratione velocitatum accuratè (per prop. 33. & ejus coroll. 1.). Ergò &c.

(e) * *Ideóque in medio &c.* In medio cujus partes ab invicem diſtantes ſeſe viribus quibuſcumque in ratione velocitatis duplicatâ creſcentibus agitant, reſiſtentia (ex modò dem.) eſt ſemper in eâdem ratione duplicatâ; Quare ſi vires illæ quibus particulæ ſeſe agitant, ſupponantur quam minimæ, manebit ſemper reſiſtentia in ratione velocitatis duplicatâ accuratè; evaneſcant tandem illæ vires manet reſiſtentia in ratione velocitatis duplicata; ſed idem melius patet per ſecundam partem demonſtrationis propoſitionis hujus 33.

(f) * *In velocitatum ratione duplicatâ.* (Ex demonſtratis initio coroll. hujus.).

(g) * *Accedet medium B* &c. Si enim velocitates corporum D & F, quam maximè augerentur vires particularum medii B, manentibus viribus medii A & velocitate corporis E quam maximè decreſcerent, quia eſt ſemper vis medii A ad vim medii B ut quadratum velocitatis corporis D ad quadratum velocitatis corporis E.

bitu, & idcirco reſiſtentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his mediis, perpetuò accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum reſiſtentiæ corporum *D* & *F* ſint ad invicem ut reſiſtentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ ſimiliter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velociſſimè moventur, reſiſtentiæ ſunt æquales quam proximè: & propterea cum reſiſtentia corporis *F* ſit in duplicatâ ratione velocitatis, erit reſiſtentia corporis *D* in eâdem ratione quam proximè.

([h]) *Corol.* 3. Corporis in fluido quovis elaſtico velociſſimè moti eadem ferè eſt reſiſtentia ac ſi partes fluidi viribus ſuis centrifugis deſtituerentur, ſeque mutuo non fugerent: ſi modo fluidi vis elaſtica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna ſit ut vires non habeant ſatis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cum reſiſtentiæ ſimilium & æquivelocium corporum, in medio cujus partes diſtantes ſe mutuo non fugiunt, ([i]) ſint ut quadrata diametrorum; ſunt etiam æquivelocium & celerrimè motorum corporum reſiſtentiæ in fluido elaſtico ut quadrata diametrorum quam proximè.

Corol. 5. Et cum corpora ſimilia, æqualia & æquivelocia, in mediis ejuſdem denſitatis, quorum particulæ ſe mutuo non fugiunt, ſive particulæ illæ ſint plures & minores, ſive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & viciſſim (per motus legem tertiam) æqualem ab eâdem reactionem patiantur, hoc eſt, æqualiter reſiſtantur: manifeſ-

(h) * *Corollarium* 3. Patet per cor. 2. in quo vis T quâ particulæ medii A in quo corpus D movetur ſe fugiunt, qualiſcumque ſupponitur; corporum D & F ubi velociſſimè moventur, reſiſtentiis manentibus æqualibus quam proximè, licet medii C in quo corpus F movetur, particulæ viribus centrifugis prorſus deſtituantur: Patet etiam ex eo quod ſupponatur vires non habere ſatis temporis ad agendum, unde caſus redit ad eum in quo vires illæ nullæ ſunt. 189.

(i) * *Sint ut quadrata diametrorum.* Per 2am. partem dem. prop. hujus, ob datas corporum velocitates & medii denſitatem datam.

DE MOTU CORPORUM.

nifeſtum eſt etiam quod in ejuſdem denſitatis fluidis elaſticis, ubi velociſſimè moventur, æquales ſint eorum reſiſtentiæ quam proximè; ſive fluida illa ex particulis craſſioribus conſtent, ſive ex omnium ſubtiliſſimis conſtituantur. Ex medii ſubtilitate reſiſtentia projectilium celerrimè motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita ſe habent in fluidis, quorum vis elaſtica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod ſi vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expanſione ad inſtar lanæ vel ramorum arborum, aut ex aliâ quâvis causâ, quâ motus particularum inter ſe redduntur minus liberi: reſiſtentia, ob minorem medii fluiditatem, erit major quàm in ſuperioribus corollariis.

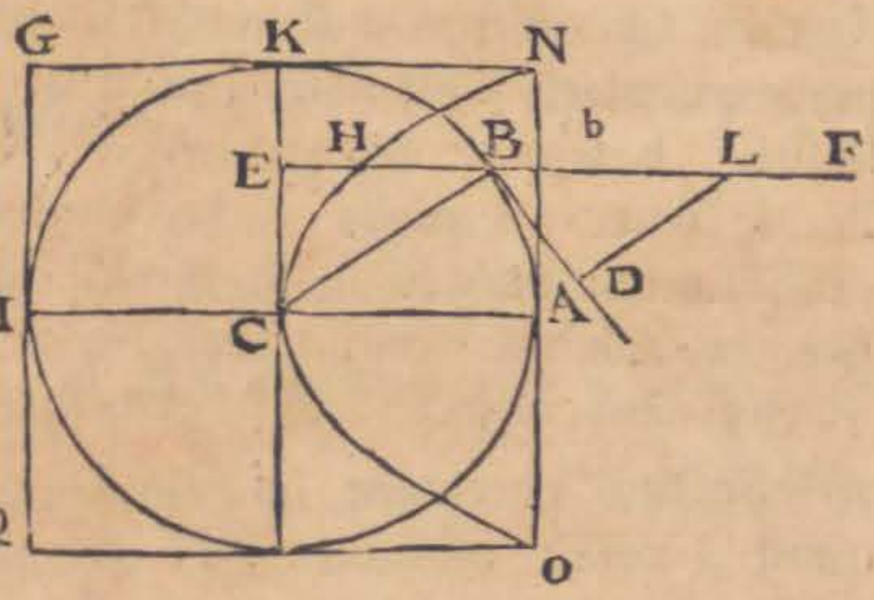
PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

Si globus & cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias libere diſpoſitis conſtante, ſecundum plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit reſiſtentia globi duplo minor quàm reſiſtentia cylindri.

Nam quoniam actio medii in corpus eadem eſt (per legum corol. 5.) ſive corpus in medio quieſcente moveatur, ſive medii particulæ eâdem cum velocitate (k) impingant in corpus quieſcens: conſideremus corpus tanquam quieſcens, & videamus quo impetu urgebitur à medio movente. Deſignet igitur *A B K I* corpus ſphæricum centro *C* ſemidiametro *C A* deſcriptum, & incidant particulæ medii datâ cum velocitate in corpus illud ſphæricum, ſecundum rectas ipſi *A C* parallelas: ſitque *F B* ejuſmodi recta. In eâ capiatur *L B* ſemidiametro *C B* æqualis, & ducatur *B D* quæ ſphæram tangat in *B*. In *K C* &

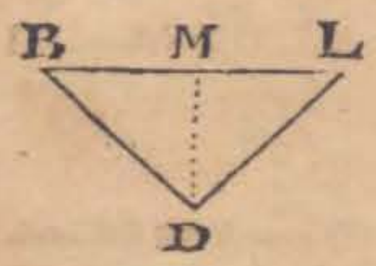
(k) * *Impingant in corpus quieſcens.* Eadem enim eſt in utroque caſu velocitas reſpectiva, eademque proindè vis percuſſionis (per dem. in cor. 5. leg. mot.) idem quoque manifeſtum eſt per motûs Leg. 3. quia fluidum & corpus ob reactionem actioni æqualem & contrariam, in utroque caſu in ſe mutuò agunt.

& *BD* demittantur perpendiculares *BE*, *LD*, & vis quâ particula medii, ſecundum rectam *FB* obliquè incidendo, globum ferit in *B*, erit ad vim quâ particula eadem cylindrum *ONGQ* axe *ACI* circa globum deſcriptum perpendiculariter feriret in *b*, (l) ut *LD* ad *LB* vel *BE* ad *BC*. Rurſus efficacia hujus vis ad movendum globum ſecundum incidentiæ ſuæ plagam *FB* vel *AC*, eſt ad ejuſdem efficaciam ad movendum globum ſecundum plagam determinationis ſuæ, id eſt, ſecundum plagam rectæ *BC* quâ globum directè urget (m) ut *BE* ad *BC*. Et (n) conjunctis rationibus, efficacia particulæ in globum ſecundum rectam *FB* obliquè incidentis, ad movendum eundem ſecundum plagam incidentiæ ſuæ, eſt ad



(l) * *Ut LD ad LB vel BE ad BC.* Si enim recta data LB exponat vim quâ particula medii circularem baſim cylindri perpendiculariter ferit in b, & vis illa (per leg. cor. 2.) reſolvatur in vires BD, LD, vis BD juxtà directionem tangentis in B agens nullam efficaciam habet ad globum promovendum & recta LD vim exponet quâ particula medii globulum perpendiculariter ferit in B. Quia verò radius CB, tangenti perpendicularis eſt, & ideo (per conſtr.) DL parallela CB, triangula rectangula CEB, BDL, ſimilia ſunt, imo ob BL=CB (per conſtr.) æqualia; Eſt igitur LD ad LB ut BE ad BC.

(m) 190. * *Ut BE ad BC.* Vis LD ductâ ex puncto D ad LB perpendiculari DM, iterum reſolvatur in vires LM & MD, & ob triangulorum LMD LDB, ſimilitudinem, erit vis LM ad vim LD, ut LD ad LB, ſeu ut BE ad BC; nulla verò ratio habenda eſt vis MD, cujus directio perpendicularis eſt ad axem AI, quia ſimili conſtructione factâ ad alteram hujus axis partem in puncto ſphæræ

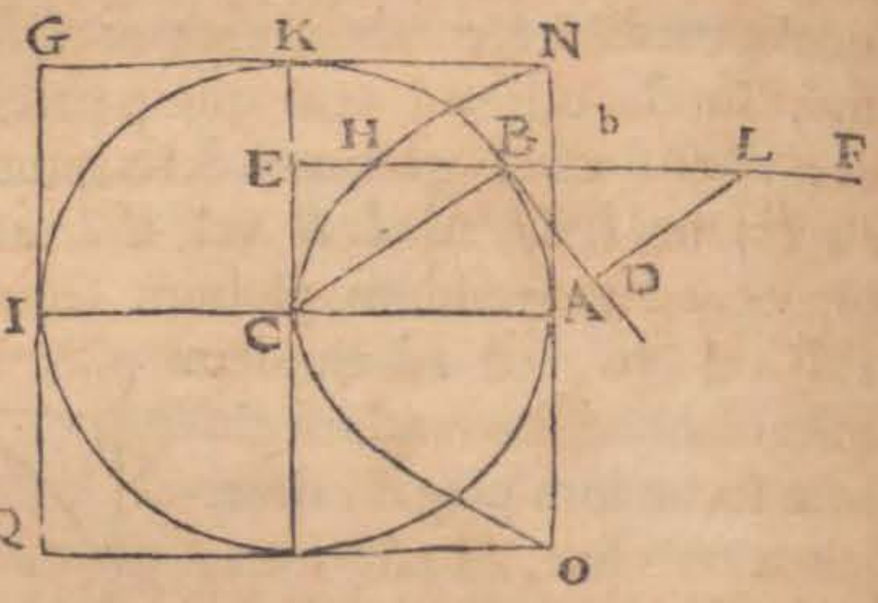


quod puncto B directè oppoſitum eſt, vis MD, vi æquali & directe oppoſitâ elidi- 190.
tur. Undè ſola conſideranda eſt vis LM quæ ſecundùm directionem axi AI parallelam agit. Eſt autem vis LM ad vim LB quâ particula medii circularem baſim cylindri perpendiculariter ferit in b, ut LD^2 ad LB^2, ob continuè proportionales LM, LD, LB.

(n) * *Conjunctis rationibus.* Et ex æquo.

DE MOTU CORPORUM.

ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipſum movendum in plagam eandem, ut BE quadratum ad BC quadratum. Quare ſi in bE, quæ perpendicularis eſt ad cylindri baſem circularem NAO & æqualis radio AC, ſumatur bH æqualis $\frac{BE\ quad.}{CB}$: erit bH ad bE ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. (o) Et propterea ſolidum quod à rectis omnibus bH occupatur erit ad ſolidum quod à rectis omnibus bE occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in cylindrum. (p) Sed ſolidum prius eſt parabolois vertice C, axe CA & latere recto CA deſcriptum, & ſolidum poſterius eſt cylindrus para-



(o) * *Et propterea ſolidum.* Si in omnibus rectæ NA punctis erigantur perpendicula ut bH & bE, ſitque NHC curva quam punctum H perpetuò tangit, & recta KC locus omnium punctorum E; ſolidum quod perpendiculis omnibus bH, per totam baſim cylindri ductis occupatur, æquale erit conoidi ſeu figuræ ſolidæ quæ ex rotatione figuræ planæ NHCA circà axem CA factâ generatur, & ſolidum quod à rectis omnibus bE occupatur erit cylindrus ex rotatione rectanguli AK circà eundem axem CA factâ deſcriptus.

(p) * *Sed ſolidum prius.* Cum (per conſtr.) ſit $bH = \frac{BE^2}{CB}$ ideoque $bH \times CB = \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2$ & (ex naturâ circuli) $BC = CA = KC$, ideoque $BE^2 = KC^2 - CE^2$ & $bH \times CB$, ſeu $\overline{KC - EH} \times KC$, ſeu $KC^2 - KC \times EH = KC^2 - CE^2$, ideoque $KC \times EH = CE^2$; ſed ſi ex puncto H duceretur ad CA, ordinata perpendicularis, hæc eſſet æqualis CE, & abſcinderet à CA, partem æqualem EH. Quare rectangulum ſub abſciſſâ & datâ lineâ KC ſive CA, æquale eſt quadrato ordinatæ ad CA perpendicularis; undè curva CHN, (per theor. 1. de Parab.) eſt Parabola cujus vertex C, axis CA, & latus rectum CA.

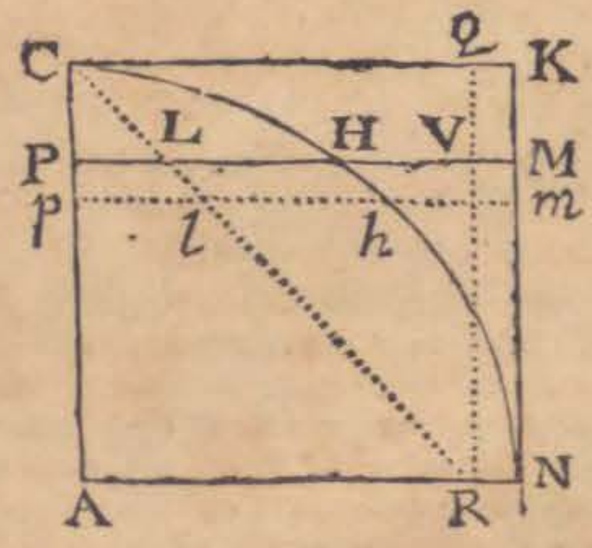
paraboloidi circumſcriptus: & notum eſt (†) quod parabolois ſit ſemiſſis cylindri circumſcripti. Ergo vis tota medii in globum eſt duplo minor quam ejuſdem vis tota in cylindrum. Et propterea ſi particulæ medii quieſcerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia globi duplo minor quam reſiſtentia cylindri. *Q. E. D.* LIBER SECUND. SECT. VI PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.

Scholium.

(q) Eâdem methodo figuræ illæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt, eæque inveniri quæ ad motus ſuos in mediis reſiſtentibus continuandos aptiores ſunt. Ut ſi baſe circulari

†) * *Et notum eſt quod &c.*

191. Lemma. Parabolois ſeu ſolidum ex rotatione Parabolæ CHN, circà axem CA genitum eſt ſemiſſis cylindri circumſcripti, qui producitur ex rotatione rectanguli AK circà latus CA. Per punctum mobile P, erigatur ad axem CA normalis PM, parabolam ſecans in H, & rectam KN in M; & in rotatione figuræ totius circà axem CA, lineæ PH & PM circulos deſcribent, qui erunt inter ſe ut radiorum PH, PM quadrata, ſeu (ex naturâ Parabolæ) & ob PM = AN, ut abſciſſæ CP, CA. Ducatur jam punctum P cum verticali PHM per totam altitudinem CA, & ſolidum ex rotatione figuræ CHN genitum erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli CKNA ortum, ut ſumma omnium circulorum quos recta mobilis PH rotando deſcribit, ad ſummam omnium circulorum quos deſcribit recta PM, hoc eſt, ut ſumma omnium CP, ad ſummam omnium CA. In lineâ AN, capiatur AR æqualis AC, jungatur CR ſecans PH in L, & erigatur ad AR, perpendicularis RQ, ſecans PM in V; cum ſit ſemper PL = CP, & PV = CA, ſumma omnium CP, ſeu PL, per totam altitudinem CA, eſt triangulum iſoſcele CRA, & ſumma omnium

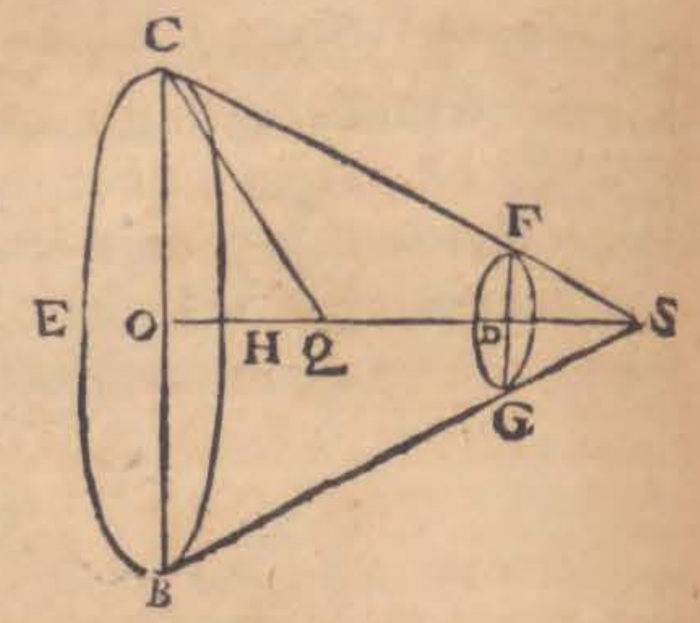


CA, ſeu PV, per eandem altitudinem CA, eſt quadratum CARQ; cum igitur triangulum CRA, ſit ſemiſſis quadrati CARQ, Paraboloïs eſt etiam ſemiſſis cylindri circumſcripti. Q. E. D.

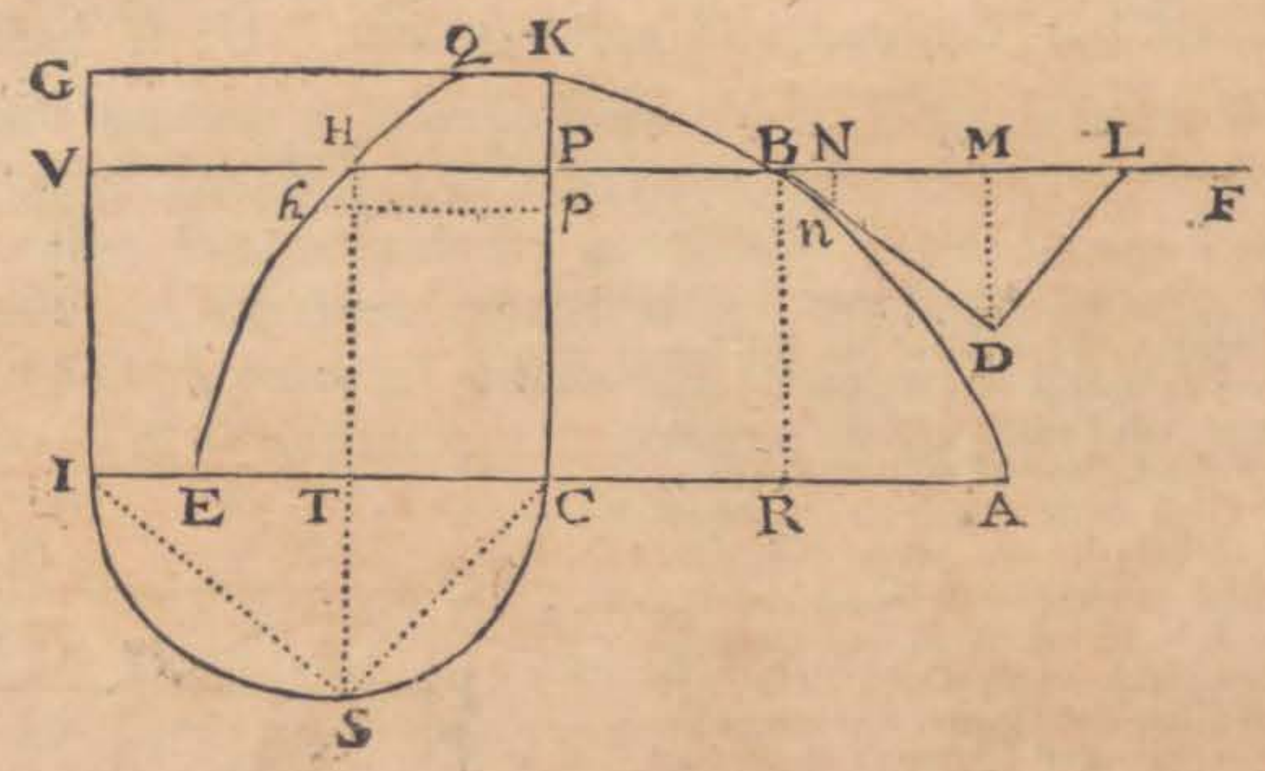
(q) 192. *Eadem methodo &c.* Solidum 192.

DE MOTU CORPORUM.

lari $CEBH$, quæ centro O, radio OC describitur, & altitudine OD, construendum sit frustum coni $CBGF$, quod omnium eâdem basi & altitudine constructorum & secundum plagam axis sui versus D progredientium frustorum minimè resistatur:



bi-



dum ex rotatione curvæ cujusvis KBA, circà rectam AI positione datam genitum in medio resistente moveatur secundùm directionem rectæ IA, & oporteat resistentiam quam patitur conferre cum resistentia cylindri secundùm eandem directionem moti & cujus basis est circulus radio KC ad AC normali descriptus. Diametro CI ad arbitrium assumptâ describatur semicirculus CSI, agatur per punctum I chorda IS, parallela BD curvam tangenti in puncto quovis B; ducatur per B recta BV parallela AI, & per S recta SH parallela CK, ambæ concurrentes in H, sitque QHE curva quam punctum H perpetuò tangit; & completo rectangulo CKGI, resistentia solidi rotundi per conversionem curvæ KBA circà CA geniti erit ad resistentiam basis ipsius, seu circuli centro C & radio CK descripti, ut solidum ex rotatione figuræ KQHE circà CI genitum, ad cylindrum rotatione rectanguli CKGI circà eandem CI factâ descriptum. Producatur enim HB ad L, ut sit BL = CI; ex puncto L demittatur ad BD perpendicularis LD, & ex D ad BL perpendicularis DM; & eodem modo quo suprà (190) patet efficaciam particulæ medii ad movendum solidum totum KBA secundùm plagam incidentiæ suæ LB esse ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in basim circularem KC, perpendiculariter in P ad cylindrum qui rotatione rectanguli CKGI describitur movendum in plagam eandem, ut est LD^2 ad LB^2, seu etiam ut est LM ad LB; sed

sed (per constr.) CI=LB, & ob angulum SIC=DBI & angulum ISC=BDI, est etiam CT seu PH=LM; Quare solidum quod à rectis omnibus PH, occupatur erit ad solidum quod à rectis omnibus PV=CI, occupatur, aut quod idem est, solidum ex rotatione figuræ CKQHE circà CI, erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli CKGI genitum, ut resistentia solidi quod figura CKBA circà CA, rotata describit, ad resistentiam baseos circularis quam describit recta CK quæ eadem est cum resistentiâ cylindri cujuslibet ejusdem basis, quia superficies cylindri quam recta KG rotando circà AI describit, nullam resistentiam patitur, secundùm directionem motûs ipsi KG parallelam. Q. E. D.

193. Ex constructione liquet, si recta quæ curvam KBA tangit in A sit ad axem CA normalis, punctum E coincidere cum puncto I, & si recta tangens curvam KBA, in K perpendicularis sit ad KC, punctum Q in quo curva EH secat latus KG coincidere cum puncto K.

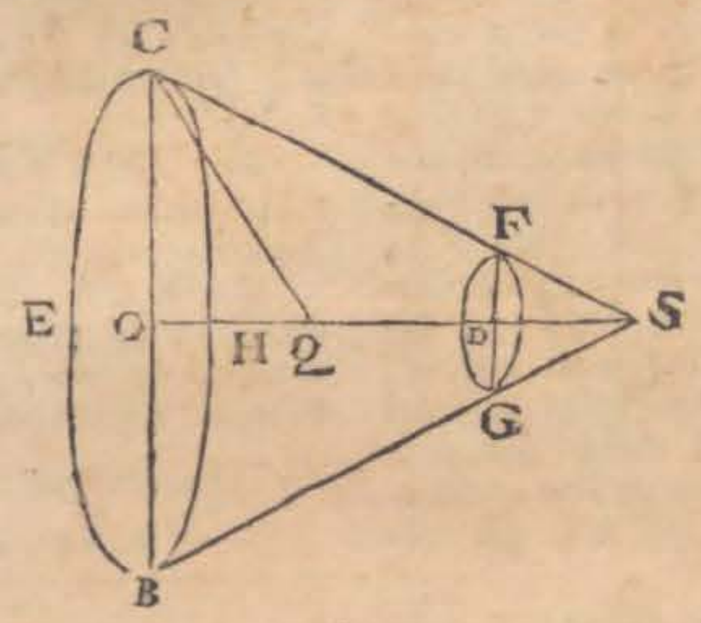
194. Ex puncto B demittatur ad CA perpendicularis BR, dicaturque CI=a, AR=x, BR=HT=CP=y, HP=CT=z, BN=dx, Nn perpendicularis ad BL curvæque occurrens in n=dy, ac proinde $Bn^2=dx^2+dy^2$. Et quoniam triangula BnN, ICS, similia sunt (per constr.) erit $Bn^2:Nn^2=CI^2:CS^2=CI:CT$, hoc est, $dx^2+dy^2:dy^2=a:z$. Et propterea $ady^2=zdx^2+zdy^2$, formula per quam ex datâ æquatione ad curvam KBA, inveniri potest æquatio ad curvam alteram EHQ & contrà; nam quoniam CP=y, si loco dx eruatur ex æquatione curvæ KBA ejus valor in y & dy habebitur æquatio quæ continebit z, y & dy sive CP, PH & fluxionem PC, cum constantibus.

195. Ducta sit ordinata ph alteri PH infinitè propinqua, & si radius sit ad peripheriam circuli ut unitas ad numerum p, erit py peripheria circuli quem linea PC circà axem CI, rotando describit, ideòque annulus cylindricus quem arcus PHhp in eâdem convolutione describit, erit $pzydy$, & indè solidum ex rotatione figuræ CPHE, genitum, erit S.$pzydy$, fluente hâc ità sumptâ ut factâ $y=0$ ea evanescat. Quare cum cylindrus convolutione rectanguli CPVI, descriptus sit $\frac{1}{2}payy$, resistentia solidi ex revolutione figuræ ABR geniti, erit ad resistentiam baseos ipsius circuli radio BR descripti ut S.$pzydy$ ad $\frac{1}{2}payy$, seu ut S $zydy$ ad $\frac{1}{2}ayy$.

196. Sit KBA ellipsis vel hyperbola cujus vertex A axis principalis AI. Sit semiaxis principalis =b, semilatus rectum =c, AR=x, RB=y, & erit $byy=2bcx-cxx$ æquatio ad ellipsim; & $byy=2bcx+cxx$, æquatio ad hyperbolam. Prioris æquationis fluxio $bydy=bcdx-cxdx$, ex quâ habetur $dx^2=\frac{b^2y^2dy^2}{(bc-cx)^2}=\frac{by^2dy^2}{b^2cc-2bccx+ccxx}=\frac{by^2dy^2}{bcc-cyy}$. Hinc æquatio (194) $ady^2=zdy^2+zdx^2$, in hanc abit $*ady^2=\frac{zb^2dy^2}{-cy^2+bcc}+zdy^2$ sive dividendo per dy^2 & ad communem denominatorem revocando utrumque æquationis membrum fit $-acy^2+abcc=by^2z-cy^2z+bccz$ ergo est $z=\frac{-acy^2+abcc}{b-c\times y^2+bcc}$ & factâ divisione $z=\frac{-ac}{b-c}+\frac{ab^2c^2}{(b-c)\times(b-c\times y^2+bcc)}$ unde erit $zydy=\frac{-acydy}{b-c}+\frac{ab^2c^2ydy}{(b-c)\times(b-c\times y^2+bcc)}$ sumptisque fluentibus est S.$zydy=\frac{-acy^2}{2(b-c)}+\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}$ L.$\overline{b-c\times y^2+bcc}$ + *Q. const.* (ut patebit si hujus quantitatis fluxio sumatur): Factâ autem $y=0$ erit $0=\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}$ L.bcc + *Q. const.* ideoque *Q. const.* $=-\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}$ L.bcc, unde tandem habetur S.$zydy=-\frac{acy^2}{2(b-c)}+\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}$ (L.$\overline{b-c\times y^2+bcc}$ − L.bcc) sive S.$zydy=-\frac{acy^2}{2(b-c)}+\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}$ L.$\frac{b-c\times y^2+bcc}{bcc}$, Est ergo resistentia conoïdis Elliptici ABR ad resistentiam suæ baseos, seu circuli radio BR descripti ut $-\frac{cy^2}{2(b-c)}+\frac{b^2c^2}{2(b-c)^2}$ L.$\frac{b-c\times y^2+bcc}{bcc}$ ad yy. Pro conoide Hy-

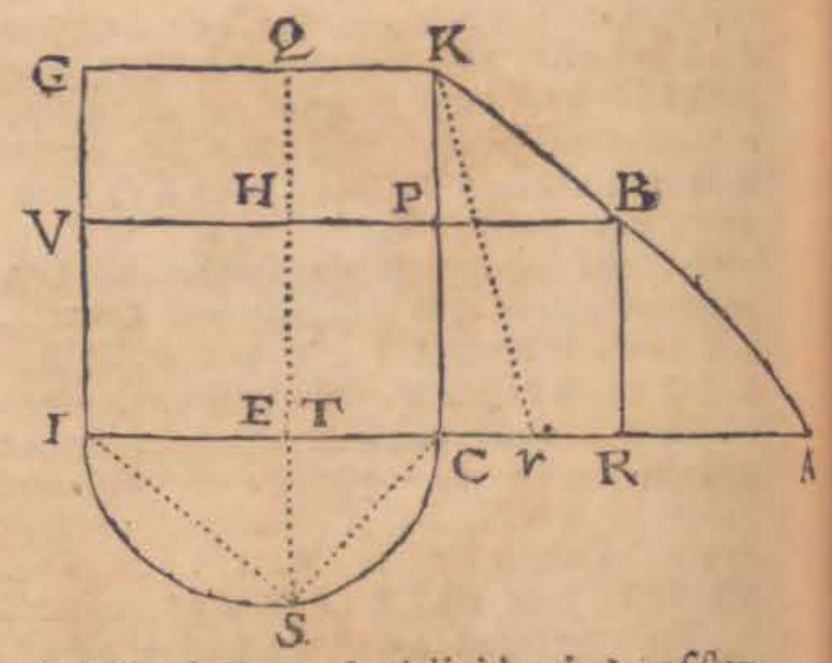
DE MOTU CORPORUM.

(r) biseca altitudinem OD in Q & produc OQ ad S ut sit QS æqualis QC, & erit S vertex coni cujus frustum quæritur.



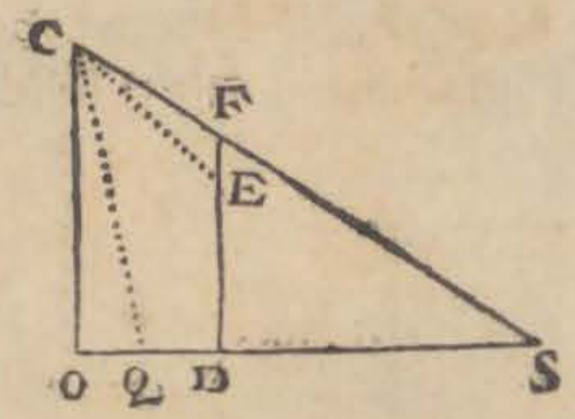
Hyperbolico, invenietur $a dy^2 = \frac{z b y^2 dy^2}{cy^2 + bcc} + z dy^2$ unde eodem iterato calculo prodibit ratio ejus resistentiæ ad resistentiam baseos ut $+ \frac{cy^2}{2(b+c)} + \frac{b^2c^2}{2(b+c)^2} \times$ L. $\frac{b+c \times y^2 + bcc}{bcc}$ ad y^2. Pro conoide Parabolico, fiat in formulâ resistentiæ Conoidis Elliptici axis b Infinitus, cæterisque terminis in quibus b non occurrit deletis, erit Conoidis Parabolici resistentia ad resistentiam suæ Baseos ut $\frac{b^2c^2}{2b^2} \times$ L. $\frac{by^2 + bcc}{bcc}$ ad y^2, sive ut c^2 I. $\frac{y^2+cc}{cc}$ ad yy.

197. Sit KBA linea recta, & quia chorda IS parallela est rectæ KA, (192) punctum H est semper in lineâ rectâ THQ, ideoque resistentia coni revolutione trianguli KAC circà AC geniti erit ad resistentiam circuli radio CK descripti, ut cylindrus ex rotatione rectanguli CKQT ad cylindrum ex rotatione rectanguli CKGI circà CI, id est, ob communem utriusque cylindri basim, ut altitudo CT ad altitudinem CI; & est CT ad CI, in ratione duplicatâ CS ad CI vel KC ad KA, seu in ratione duplicatâ sinûs anguli KAC ad sinum totum. Simili modo resistentia coni quem recta BA rotata describit est ad resistentiam circuli radio BR descripti in eâdem ratione duplicatâ KC ad KA; & (dividendo) resistentia annuli conici quem recta KB, circà CA rotata describit est ad resistentiam annuli circularis quem in eâdem convolutione describit recta KP in eâdem duplicatâ ratione KC ad KA. Resistentia verò coni truncati convolutione figuræ KBR circà CR, geniti, est ad resistentiam baseos ipsius sive circuli radio CK, descripti ut solidum quod figura CKQHVI, circà CI rotando describit, ad cylindrum ex rotatione rectanguli CKGI ortum. Est autem solidum prius summa duorum cylindrorum, revolutione rectangulorum CKQT & THVI circà CI productorum, hoc est, (ob areas circulorum radiorum quadratis proportionales) ut summa $CK^2 \times CT + CP^2 \times TI$.



(r) 198. * *Biseca altitudinem &c.* Datis CK & CR invenienda sit positio rectæ KB ut

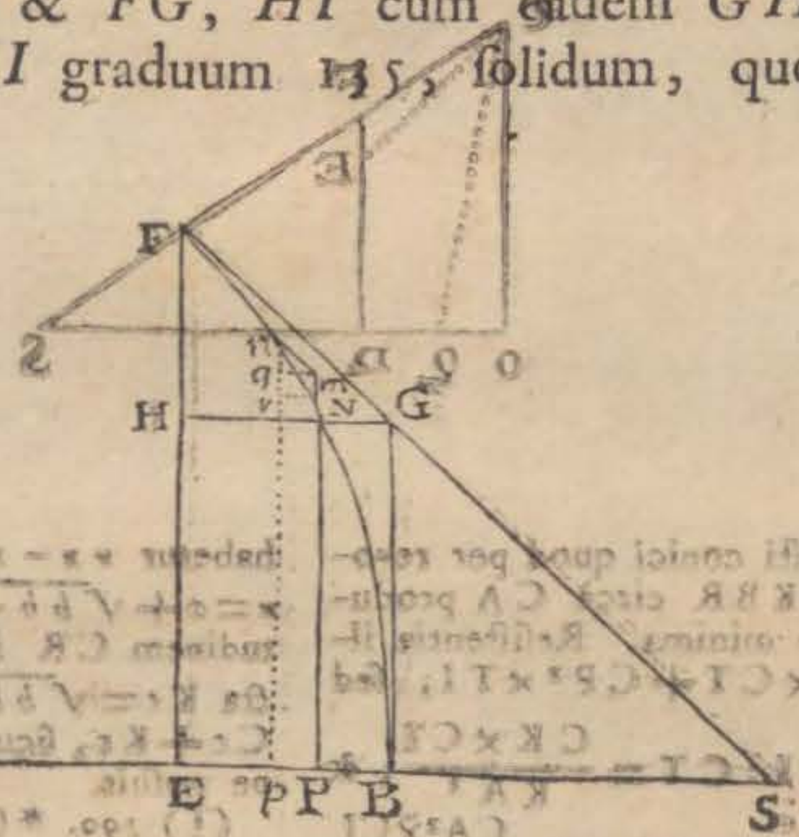
(e) Unde obiter, cum angulus CSB semper sit acutus, con- LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.



ut resistentia frusti conici quod per revolutionem figuræ KBR circà CA producitur sit omnium minima. Resistentia illa est ut $CK^2 \times CT + CP^2 \times TI$; sed $KA^2 : CK^2 = CI : CT = \frac{CK \times CI}{KA^2}$; & similiter $KA^2 : CA^2 = CI : TI = \frac{CA^2 \times CI}{KA^2}$. Quarè ob datam CI, resistentia coni truncati erit ut $\frac{CK^4 + CP^2 \times CA^2}{KA^2}$. Dicantur $KC = b$, $CR = 2c$, $CA = x$, ideóque $KA^2 = bb + xx$, & quia $CA\ (x) : KC\ (b) = RA\ (x - 2c) : BR$, seu CP, erit $CP = \frac{bx - 2cb}{x}$, & indè resistentia coni truncati erit ut $\frac{b^4 + (bx - 2cb)^2}{bb + xx} = \frac{b^4 + b^2x^2 - 4b^2cx + 4c^2b^2}{bb + xx} = bb + \frac{4bbcc - 4bbcx}{bb + xx}$. Capiatur hujus quantitatis fluxio & (40) ponatur nihilo æqualis, fiet $-\frac{4bbcdx}{bb+xx} - 2xdx\frac{(4bbcc - 4bbcx)}{(bb+xx)^2} = 0$, sive $\frac{1}{bb+xx} - \frac{2cx - 2xx}{(bb+xx)^2} = 0$, ideóque $-bb - xx - 2cx + 2xx = 0$, unde habetur $xx - 2cx = bb$, & indè eruitur $x = c + \sqrt{bb + cc}$. Biseca igitur altitudinem CR in r, ut sit $Cr = c$, & junctà $Kr = \sqrt{bb + cc}$, erit x, seu $CA = Cr + Kr$, sicut Newtonus in constructione posuit. 198

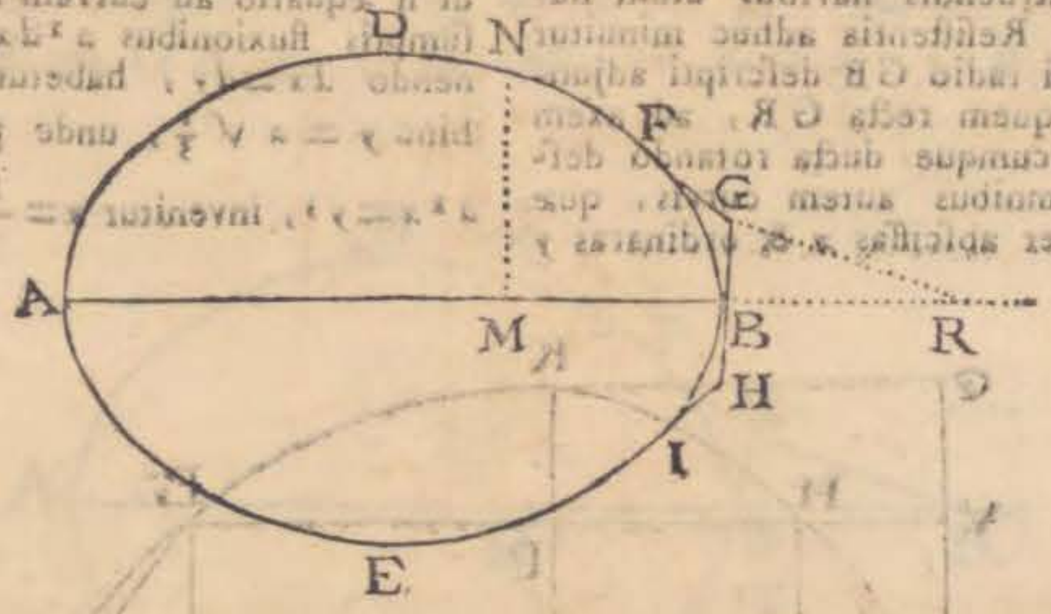
(f) 199. * *Undè obiter.* Angulus externus (vid. fig. textûs) æqualis est summæ angulorum æqualium QCS & QSC, id est, angulo CSB; & quia COQ rectus est, angulus CQO ideoque & æqualis CSB, est semper acutus. Altitudo OD quamminima evadat tandemque evanescat; & quoniam (in hâc hypoth.) rectæ OC, OS, QS, CQ æquales fiunt, angulus CSO, & æqualis DFS fit semirectus, ejusque complementum ad duos rectos DFC grad. 135. Ducatur ad FD recta quælibet CE & evanescente OD resistentiâ coni truncati quem figura CFD circà OS rotata describit, erit in suo genere minima (198), ideóque minor quam resistentia coni truncati ex revolutione figuræ CED circà OS geniti; subducatur utrinque resistentia circuli quem rectà DE rotando describit; & resistentia superficiei ex rotatione figuræ CFE circà OS, minor erit quam resistentia annuli conici quem in eâdem revolutione describit recta CE.

De Motu Corporum. (t) consequens est, quod si solidum *ADBE*, convolutione figuræ ellipticæ vel ovalis *ADBE* circa axem *AB* factâ generetur, & tangatur figura generans à rectis tribus *FG*, *GH*, *HI* in punctis *F*, *B* & *I*, eâ lege ut *GH* sit perpendicularis ad axem in puncto contactus *B*, & *FG*, *HI* cum eâdem *GH* contineant angulos *FGB*, *BHI* graduum 135, solidum, quod convolutione



(t) 200. *Consequens est.* Ut hæc consequentia pateat, demonstrandum est resistentiam superficiei quæ per rotationem figuræ F G B circà axem A B gignitur, minorem esse resistentiâ superficiei quam in eâdem revolutione arcus F B, describit. Ductis itaque ad curvam ordinatis verticalibus & infinitè propinquis P N, p n, & ex puncto n ad P N productam recta n m, parallelâ F G, atque ex m & N in p n perpendicularibus m q, N r; dicantur F E ad axem A B normalis $= b$, G B $= c$, B P $= x$, P N $= y$, & quia productâ F G ut axi occurrat in s, est ob angulos F F S, B G S semirectos (per hyp.) E S $=$ F E $= b$, & B S $=$ G B $= c$, erit E B $= b - c$. Est quoque P p $=$ m q $=$ q n $= dx$, r n $= dy$, & hinc q r $= dy - dx$, ac proinde P m $= y + dy - dx$, & p n $= y + dy$. Vis particulæ fluidi in G B perpendiculariter incidentis sit $= dx$, & radius circuli ad peripheriam ut 1 ad p; his positis, resistentia circuli radio P N descripti exponi poterit (195) per $\frac{1}{2} p a y y$; resistentia circuli radio P m descripti per $\frac{1}{2} p a (y + dy - dx)^2 = \frac{1}{2} p a y y + p a y dy - p a y dx$, neglectis scilicet terminis qui respectu $p a y dy$ & $p a y dx$, evanescunt. Hinc resistentia annuli circularis quem recta N m, rotando describit, exponetur per differentiam $p a y dy - p a y dx$. Resistentia circuli radio p n descripti erit ut $\frac{1}{2} p a (y + dy)^2 = \frac{1}{2} p a y y + p a y dy$, ex quâ si auferatur resistentia circuli radio P m descripti, remanebit resistentia annuli circularis ex rotatione rectæ q n geniti $= p a y dx$ & cum sit (197) n m^2 ad n q^2, seu F S^2 ad F E^2, sive 2 ad 1, ut illius annuli resistentia ad resistentiam superficiei ex revolutione rectæ n m genitæ, hæc resistentia erit ut $\frac{1}{2} p a y dx$. Quare resistentia superficiei quam figura n m N circà E B rotata describit, exponatur per quantitatem $p a y dy - \frac{1}{2} p a y dx$, & sumptis fluentibus, habitum resistentiarum summa per totum arcum B N exponetur per $\frac{1}{2} p a y y - \frac{1}{2} p a \times$ B N P aream, cui nihil addendum est nec subducendum; cum factâ $y = 0$, hæc fluens evanescat, ut oportet. Si verò loco y scribatur b, seu F E, resistentia om-

tione figuræ *ADFGHIE* circa axem eundem *AB* generatur, minus reſiſtitur quam ſolidum prius, ſi modo utrumque ſecundum plagam axis ſui *AB* progrediatur; & utriuſque terminus *B* præcedat. Quam quidem propoſitionem in conſtruendis navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.



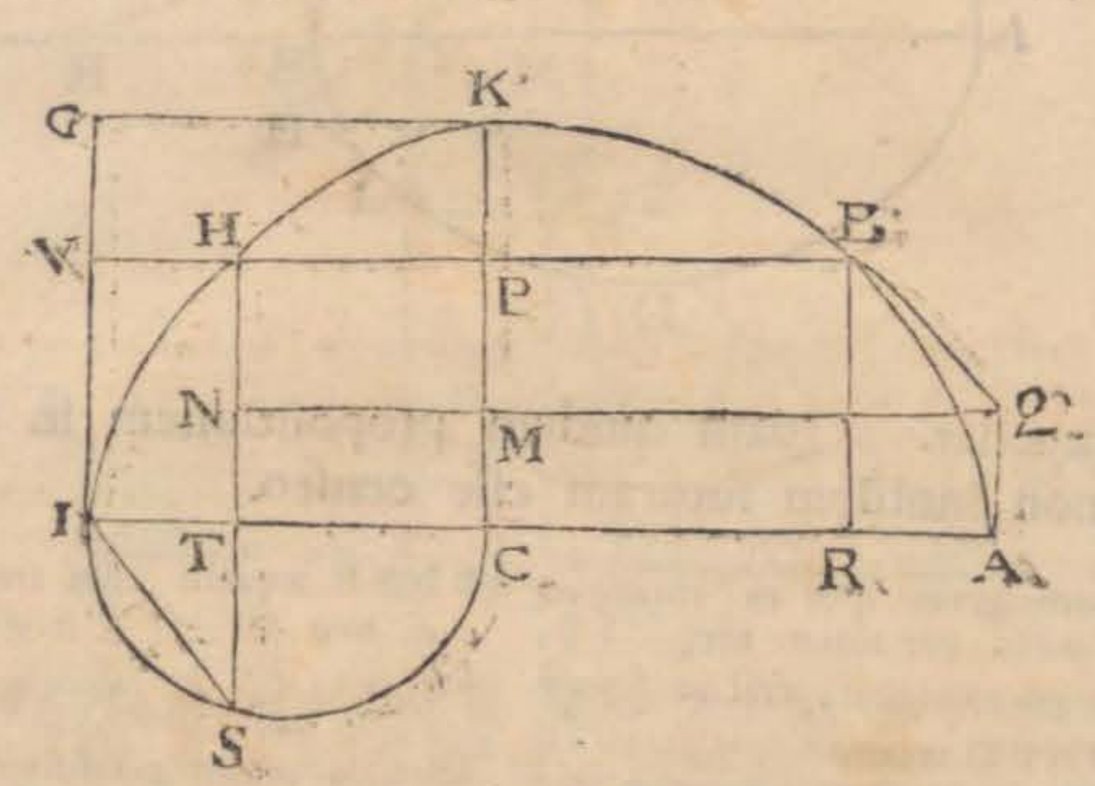
omnium ſuperficierum quæ ex rotatione figurarum n m N, per totum arcum F B, deſcriptarum generarentur, erit ut $\frac{1}{2} pabb - \frac{1}{2} pa \times$ B N F E aream.

Porrò reſiſtentia circuli radio G B deſcripti exponenda eſt per $\frac{1}{2} p\, a\, cc$, & reſiſtentia circuli radio F E deſcripti per $\frac{1}{2} p\, a\, bb$; ideóque ducta G H ad F E normali, reſiſtentia annuli circularis ex rotatione rectæ F H, per $\frac{1}{2} p\, abb - \frac{1}{2} p\, acc$; unde cum ſit F S² ad F E², ſeu 2 ad 1, ut annuli illius reſiſtentia ad reſiſtentiam ſuperficiei ex rotatione rectæ F G, hæc reſiſtentia erit ut $\frac{1}{4} pabb - \frac{1}{4} pacc$; totaque proinde reſiſtentia coni truncati ex rotatione figuræ F G B geniti exponetur per $\frac{3}{4} pabb + \frac{1}{4} pacc$. Quare reſiſtentia omnium ſuperficierum quas figuræ n m N, per totum arcum B N F diſtributæ rotando deſcribunt, eſt ad reſiſtentiam frusti conici ex revolutione figuræ F G B orti ut $\frac{1}{2} pabb - \frac{1}{2} pa \times$ B N F E, ad $\frac{1}{4} pabb + \frac{1}{4} pacc$; ſive dividendo per $\frac{1}{4} pa$, ut $2bb - 2$ B N F E ad $bb + cc$. Si area B N F E æqualis eſſet trapezio B G F E, cum hoc ſit $= \frac{1}{2} EB \times \overline{FE + BG} = \frac{bb - cc}{2}$, foret $2bb - 2$ B N F E $= bb + cc$; ideóque prædictæ reſiſtentiæ duæ æquales eſſent; ſed trapezium B G F E majus eſt area B N F E, quæ (per hyp.) tota in trapezio continetur, & propterea quantitas $abb - 2$ B N F E, major eſt quantitate $bb + cc$; reſiſtentia igitur omnium ſuperficierum, ex rotatione figurarum n m M, ſuperat reſiſtentiam coni truncati ex revolutione figuræ F G B producti. Verùm (199) reſiſtentia ſuperficiei quam figura n m N circa E B rotando deſcribit, minor eſt reſiſtentia ſuperficiei quam in eâdem rotatione deſcribit n N; ideoque reſiſtentia omnium ſuperficierum quas figuræ n m N, per totum arcum F N F diſtributæ rotando deſcribunt, minor eſt reſiſtentia totius ſuperficiei ex rotatione arcûs B N F genitæ. Ergo reſiſtentia coni truncati per rotationem figuræ F G B deſcripti minor quoque eſt quam reſiſtentia ſuperficiei ex rotatione arcûs B N F productæ. Q. E. D. 200.

201. Quæcumque igitur ſit figura (in textu) A N B, regularis vel irregularis, modò

DE MOTU CORPORUM.

modò arcus FB concavitatem axi AB obvertat, & totus intrà lineas FG, BG contineatur, per hanc Newtoni propositionem inveniri semper potest alia figura majoris capacitatis & minoris resistentiæ. Quod in constructendis navibus usum habere potest. Resistentia adhuc minuitur si loco circuli radio GB descripti adjungatur conus quem recta GR, ad axem productum utcumque ducta rotando describit. In omnibus autem curvis, quæ æquatione inter abscissas x & ordinatas y definiuntur, facillimè invenitur punctum B per quod ducta tangens angulum semirectum cum ordinatâ perpendiculari constituit. Quia in illo puncto B, ordinatæ fluxio dy æqualis est fluxioni abscissæ dx ut si æquatio ad curvam fit $a^2x=y^3$, & sumptis fluxionibus $a^2dx=3y^2dy$, ponendo $dx=dy$, habetur $a^2=3y^2$, & hinc $y=a\sqrt{\frac{1}{3}}$, undè per æquationem $a^2x=y^3$, invenitur $x=\frac{1}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.



PROBLEMA.

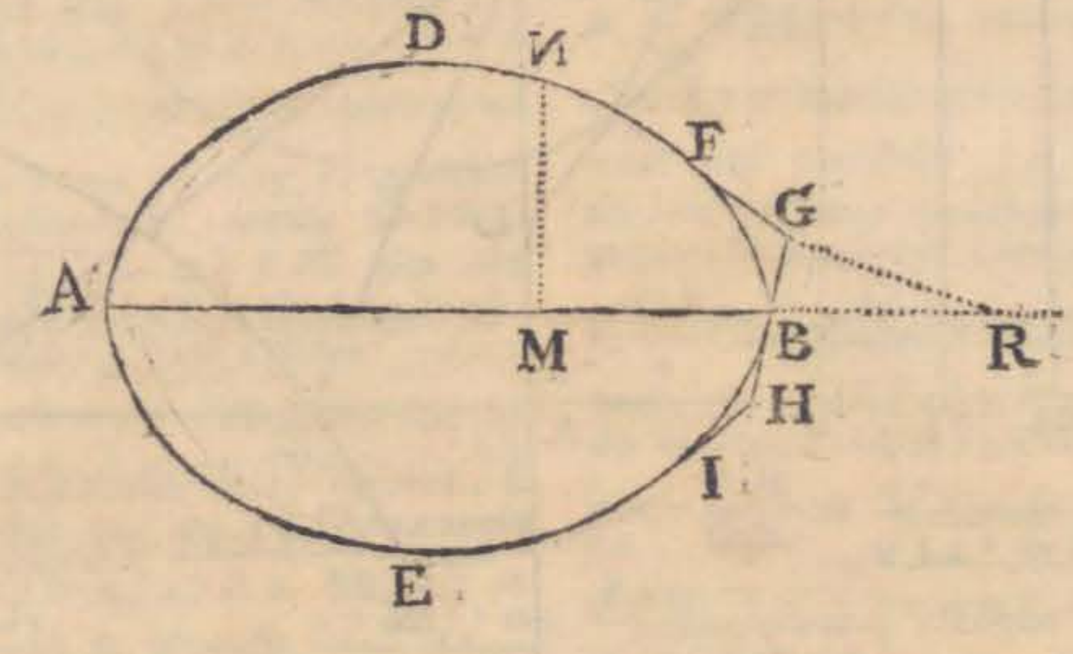
202. Datâ curvâ KBA quam recta QA ad axem CA perpendicularis tangit in A, invenire punctum B per quod si ducatur tangens altera BQ priori QA occurrens in Q, resistentia solidi per convolutionem figuræ KBQA, circà axem CA descripti sit in suo genere minima.

Eâdem constructione quâ suprà (192) factâ, ex puncto Q ducatur ad HT perpendicularis QN secans KC in M dicanturque $CI=a$, $AR=x$, BR seu $PC=y$, PH seu $TC=z$, $QA=v$, & peripheria circuli radio 1 descripti $=p$. His positis resistentia solidi ex revolutione arcûs BA circà axem CA geniti exponi potest per S. $pzydy$, (195); resistentia verò coni truncati ex rotatione figuræ BQA circà CA, per $\frac{1}{2}pavv+\frac{1}{2}pyyz-\frac{1}{2}pvvz$. Sit R resistentia data solidi ex rotatione arcûs totius KBA geniti; & resistentia superficiei quam in eâdem rotatione describit arcus KB, erit $R-S.pzydy$, ideòque resistentia solidi per rotationem figuræ KBQA, erit $R-S.pzydy+\frac{1}{2}pavv+\frac{1}{2}pyyz-\frac{1}{2}pvvz$. Hujus quantitatis fluxio nihilo æqualis fiat (40) & ob datam R, habebitur $-pzydy+pavdv+pzydy+\frac{1}{2}pyydz-pzvdv-\frac{1}{2}pvvdz=0$; unde invenitur $(z-a)2vdv=(yy-vv)dz$. Cùm igitur fit etiam (194) $ady^2=zdx^2+zdy$, ex his æquationibus & ex æquatione ad curvam KBA, invenientur valores litterarum x, y, v, seu RA, RB, & AQ. Q.E.I.

Exempli causâ. Sit KBA parabola, cujus vertex A, axis AC, latus rectum $=4c$, & ideò $4cx=yy$, erit $AQ=v=\frac{1}{2}y$, ex naturâ Tangentis Paraboles, $\frac{1}{4}yy=cx=vv$, $cdx=2vdv$, $yy-vv=3cx$, $ydy=2cdx$, $dy^2=\frac{cdx^2}{x}$. Undè æquatio

(u) Quod si figura $DNFG$, ejusmodi sit curva, ut, si ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, & à puncto dato G ducatur recta GR quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N, & axem productum secet in R, fuerit MN ad GR ut GR *cub.* ad $4BR \times GB\,q$; solidum

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.

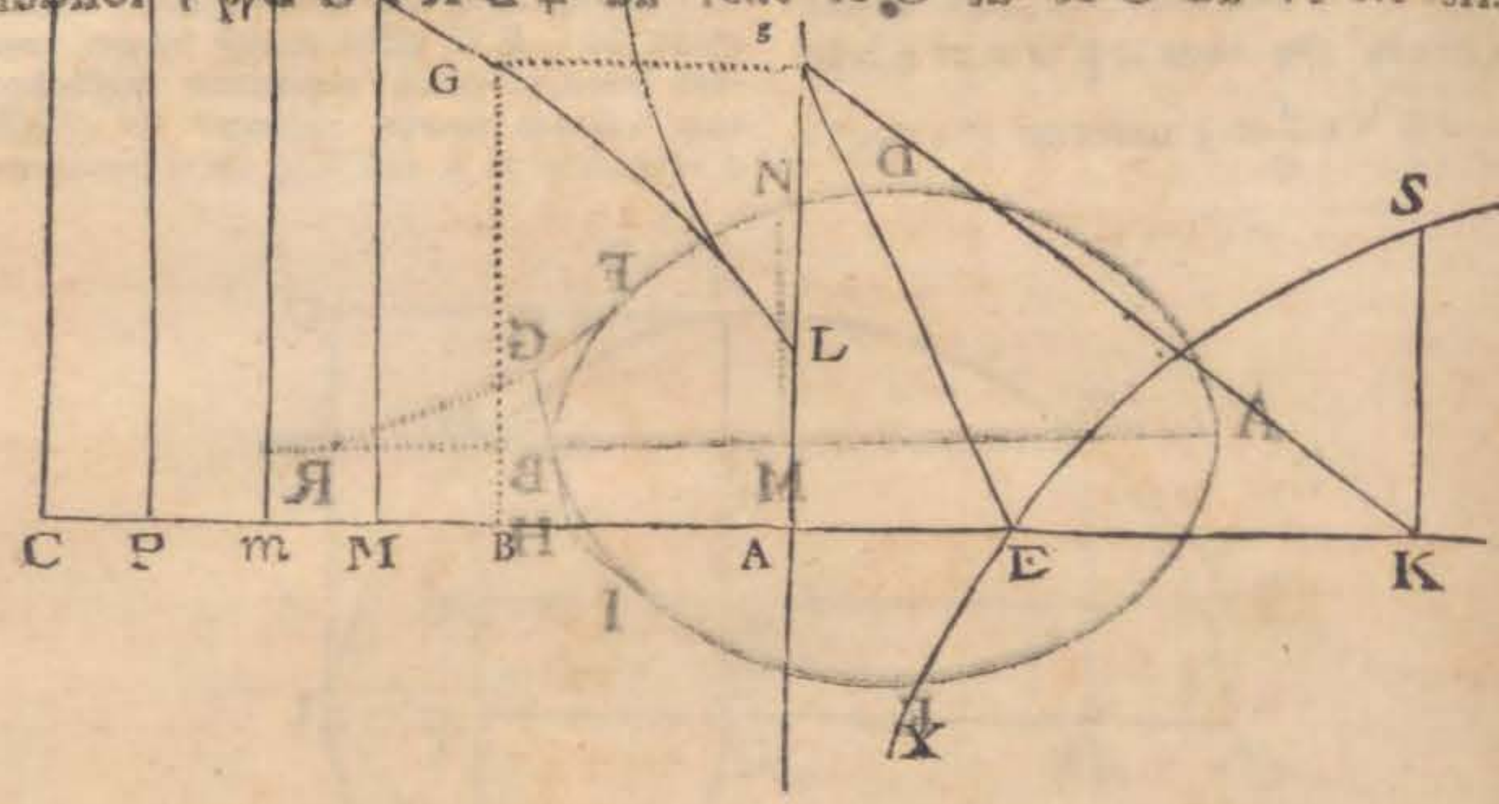


quod figuræ hujus revolutione circa axem AB factâ describitur, in medio raro prædicto ab A versus B movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eâdem longitudine & latitudine descriptum solidum circulare.

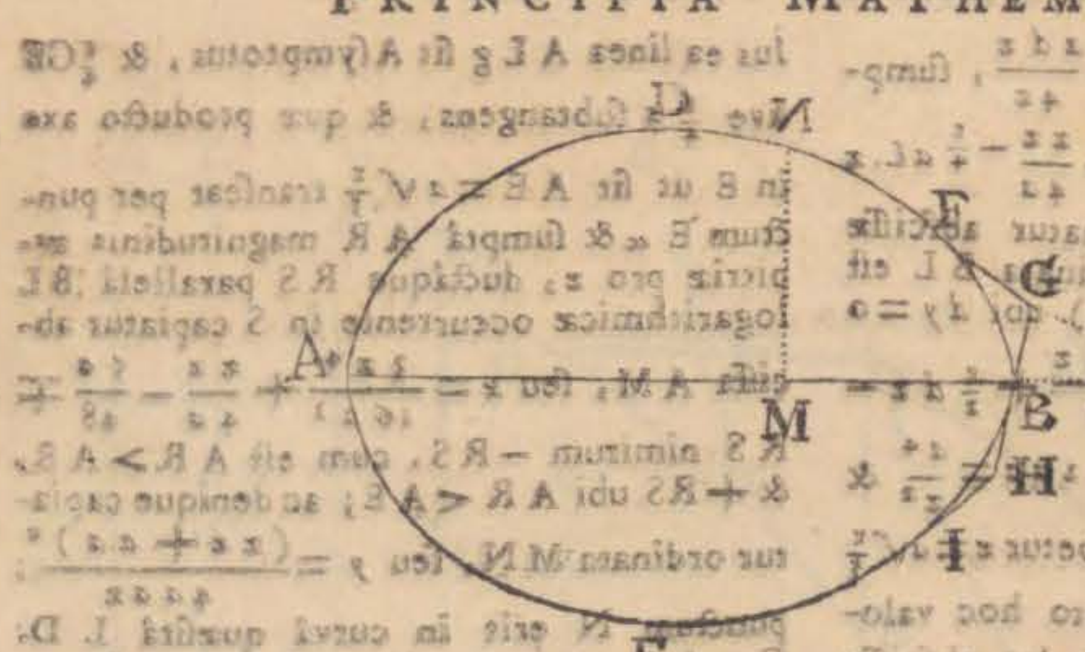
tio $a dy^2 = z dx^2 + z dy^2$, in hanc mutatur $\frac{a c dx^2}{x} = z dx^2 + \frac{c z dx^2}{x}$, ex quâ habetur $z = \frac{ac}{c+x}$, & $dz = \frac{-acdx}{(c+x)^2}$. Ex his verò omnibus æquatio $(z-a)\,2v\,dv = (yy - vv)\,dz$, in hanc migrat $-\frac{acxdx}{c+x} = -\frac{3accxdx}{(c+x)^2}$, sive $1 = \frac{3c}{c+x}$ ex quâ eruitur $x = 2c$, & hinc $y = 2c\sqrt{2}$, & $z = \frac{1}{3}a$. Quare cum sit a ad z, in ratione duplicatâ sinûs totius ad sinum anguli BQM, erit $\sqrt{3}$ ad 1 ut sinus totus ad sinum anguli BQM, qui proindè est 35° 16′, angulus QBR, 54°. 44′ & angulus BQA 125°. 46′.

203

(u) 203. *Quod si figura &c.* Invenienda sit



sit curva L D, quæ circà axem C B rotata describat superficiem solidi quod in fluido motum secundùm axis directionem à C, versus B, minorem patiatur resistentiam quam solidum quodvis aliud per puncta L & D pari ratione descriptum & similiter motum. Ex punctis curvæ infinitè propinquis N, n, Q, demittantur ad axem C B ordinatæ N M, n m, P Q & ad n m, Q P, perpendicula N r, n s. Sit p peripheria circuli cujus radius est unitas, & data a vim exponat quâ singulæ fluidi particulæ in rectam N M perpendiculariter incurrunt. His positis resistentia annuli circularis quem recta n r, circà axem C B rotata describit, exponi potest, ut suprà, per $\frac{1}{2}pa \times (nn + Nr^2 \times NM)$ seu per $pa \times$ N M $\times$ m n, ob $nn - Nr^2 = NM^2 - 2MN \times mn + NM^2 = 2MN \times mn - NM^2 = 2MN \times mn$. Et quia mn^2 est ad nr^2 ut resistentia illa ad resistentiam superficiei quam linea n N circà C B rotata describit (nfn) hæc resistentia erit ut $\frac{pa \times MN \times nr^2}{nN^2}$; eodemque modo patet resistentiam superficiei ex rotatione lineæ Q n genitæ exponi posse per $\frac{pa \times mn \times QS^3}{Qn^2}$. Ducatur curvam hanc in aliam mutari Q h N inter puncta N, Q ductam & Q S, n r tanquam magnitudine datas assumi variantibus N r, & n s, dicanturque constantes $MN = b$, $mn = c$, $nr = f$, $Qs = g$ & variabiles $Nn = v$, $nQ = z$, $Nr = m$, $ns = n$, & resistentia superficiei quam arculus Q n N circà C B rotando describit, exponetur per $\frac{pabf^3}{vv} + \frac{pacg^3}{zz}$, si curva Q n N sit ea quæ minimam resistentiam patitur, hujus quantitatis fluxio (40 & per hyp.) nihilo æquanda est, & inde habetur $\frac{2pabf^3vdv}{vv} + \frac{2pacg^3zdz}{zz} = 0$. Producta ergo lineâ s n, usque ad novum punctum h, ad quod ducuntur lineæ N h, Q h, ipsas tangant perpendicula n e, n t, & evanescente n h, erit $th = dz$ & $eh = dv$. Quia verò, evanescente n h triangula n e h, n r N, & n t h, Q s n, similia sunt; erit $Nn\ (v) : Nr\ (m) = nh : eh\ (-dv)$, &



$\dot{x} s n (n v) : Q n (z) = t h (d z) : n h$, ideoque ex æquo, $n v : m z = d z : -d v = \frac{m z d z}{n v}$. Loco $-d v$, scribatur hic ipsius valor in æquatione modò inventâ, & illa in hanc migrabit $\frac{2 p a b f^3 m z z d z}{n v^5} = \frac{2 p a c g^3 z d z}{z^4}$, & hinc fit $\frac{2 p a b f^3 m}{v^4} = \frac{2 p a c g^3 n}{z^4}$ seu $\frac{2 p a \times M N \times n r^3 \times N r}{N n^4} = \frac{2 p a \times m n \times Q s^3 \times n s}{Q n^4}$. Undè manifestum est quantitatem $\frac{M N \times n r^3 \times N r}{N n^4}$ pro quolibet curvæ puncto N, datam seu constantem esse.

* Quæ quidem curva DNFG (vide figuram textus) talis esse debet, ut angulus quem facit in G cum linea BG sit semirecti complementum per notam 200. illic ergo linea BG data, est ipsa ordinata MN & Triangulum nRN est Rectangulum æquicrurum ideoque $Nr = nr$ & $Nn^2 = 2nr^2$ ergo quantitas constans $\frac{M N \times n r^3 \times N r}{N n^4}$ in hanc ab it $\frac{G B \times n r^4}{4 n r^4} = \frac{G B}{4}$. Talis ergo est hujus curvæ natura ut quovis in puncto ducatur ordinata MN sit semper $\frac{M N \times n r^3 \times N r}{N n^4} = \frac{G B}{4}$, sive ponendo pro MN, y; pro nr, dy; pro Nr, dx; pro Nn^2, $dx^2 + dy^2$, erit $\frac{y dy^3 dx}{dx^2 + dy^2} = \frac{G B}{4}$: sive adhibendo constructionem Newtoni, si ducatur GR Tangenti Parallela, ob triangula GBR, nrN ubique similia, erit $\frac{G B}{G R} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ & $\frac{B R}{G R} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ ideoque $\frac{GB^3 \times BR}{GR^4} = \frac{dy^3 dx}{dx^2 + dy^2}$ & $\frac{MN \times GB^3 \times BR}{GR^4} = \frac{GB}{4}$ sive $MN \times GB^2 \times 4BR = GR^4$ unde est $MN : GR = GR^3 : GB^2 \times 4BR$. Q. E. D.

Dicatur $GB = a$, fiet $\frac{y^3 dy^3 dx}{(dx^2 + dy)^2} = \frac{a}{4}$ ideoque $a^4 y dx dy^3 = a (dx^2 + dy)^2$, ex quâ curvæ LND per Logarithmicam constructio eruitur. Ponatur $dx = \frac{z dy}{a}$, & hoc valore loco dx in æquatione ad curvam substituto, habetur $\frac{4 y z d y^4}{a} = \frac{a^4 (z z + a a)^2 d y^4}{a^4}$, unde invenitur $y = \frac{(z z + a a)^2}{4 a^2 z} = \frac{z^3}{4 a a} + \frac{1}{2} z + \frac{a a}{4 z}$, & (sumptis fluxionibus) $dy = \frac{3 z^2 d z}{4 a a} + \frac{1}{2} dz - \frac{a a d z}{4 z z}$; loco dy scribatur hic ipsius valor in æquatione assumptâ $dx = \frac{z dy}{a}$, &

203.

fit

DE MOTU CORPORUM

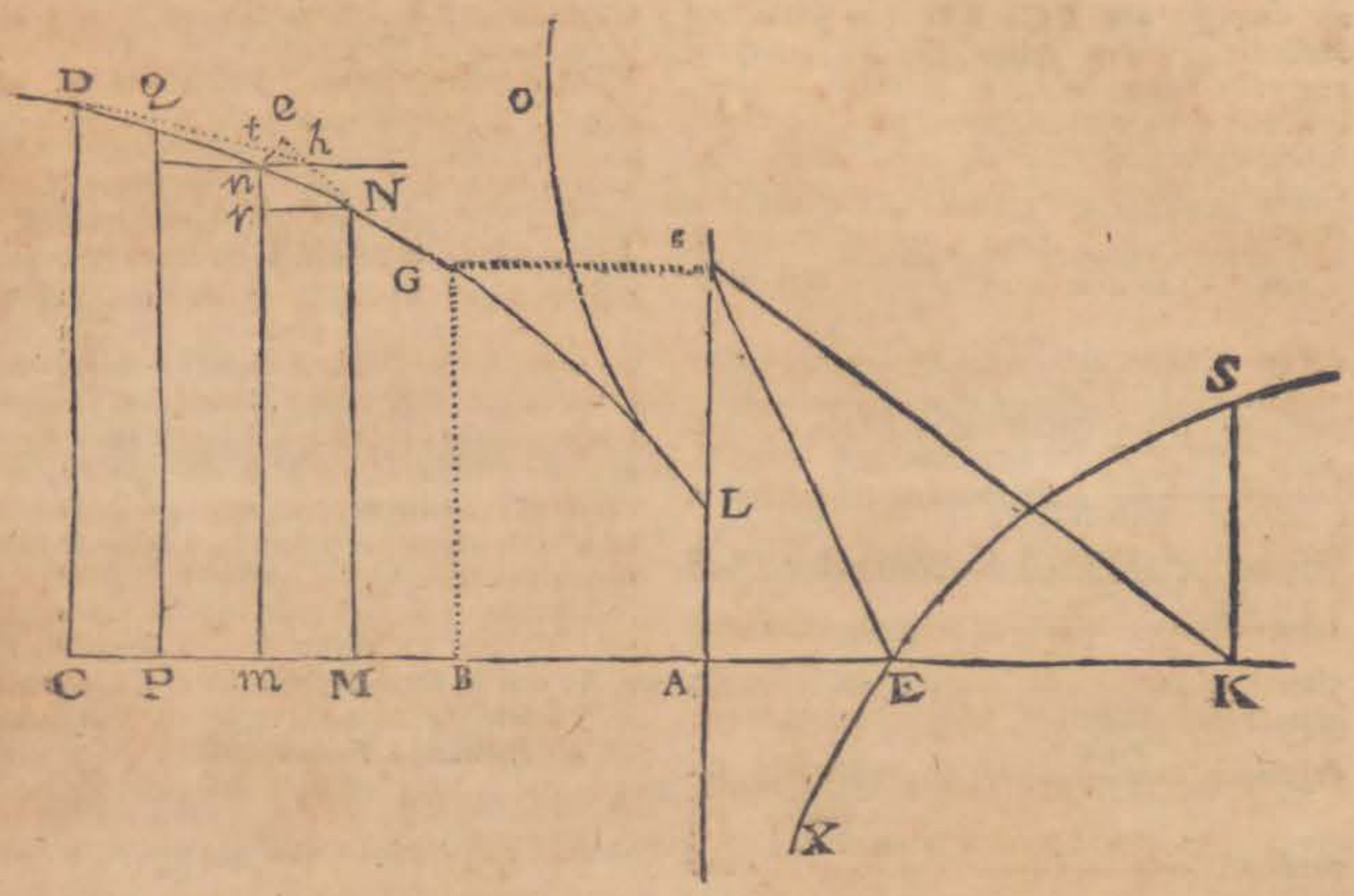
fit $dx = \frac{3z^3dz}{4a^3} + \frac{zdz}{2a} - \frac{adz}{4z}$, sumptisque fluentibus $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{1}{4}aL.z + Q$ *const.* Porrò si assumatur abscissæ initium in loco B, ubi ordinata BL est omnium minima, id est (40) ubi $dy = o$ quo supposito, fit $\frac{3z^2dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aadz}{4zz} = o$, ideoque $3z^2 + 2aa = \frac{a^4}{z^2}$ & $z^4 + \frac{2}{3}a^2z^2 = \frac{1}{3}a^4$ undè habetur $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ (& $y = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$), substituto hoc valore loco z, in æquatione quæ dat abscissæ x valorem, habebitur ex Hypothesi initium axeos eritque $x = o = \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}aL.a\sqrt{\frac{1}{3}} + Q$ *const.* & ideo $Q = -\frac{5a}{48} + \frac{1}{4}aL.a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

* Erit igitur abscissa $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a \times \overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$ & ut habeatur origo abscissarum, notandum quod ordinata in B sive GB æqualis sit a, ex suprà demonstratis, cum itaque sit ubique $y = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z}$ erit in eo puncto $a = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z}$ ex quâ æquatione si eruatur valor z invenietur $z = a$, ac per consequens erit $x = \frac{3a^4}{16a^3} + \frac{aa}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}aL.\frac{a}{a\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}aL.\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}a \times L.\sqrt{3}$. Describatur ergo Logarithmica XV, Asymptoto YZ & subtangente æquali $\frac{1}{4}$GB, sive $\frac{1}{4}a$, in quâ sumatur ubivis ordinata pm, quæ producatur in r donec pr = 3pm, ducatur ad Logarithmicam rt quæ sit Asymptoto parallela; erit $\frac{1}{2}$rt æqualis Logarithmo $\sqrt{3}$ in Logarithmica cujus subtangens $\frac{1}{4}a$, itaque $\frac{GB}{3} - \frac{1}{2}rt = x$, quo valore translato ex B ad A in axe producto habetur A origo abciſſarum: In eo puncto A ductâ perpendiculari ALg, describatur Logarithmicâ SX cujus ea linea ALg sit Asymptotus, & $\frac{1}{4}$GB sive $\frac{1}{4}a$ subtangens, & quæ producto axe in E ut sit $AE = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ transeat per punctum E &c & sumptâ AR magnitudinis arbitriæ pro z, ductâque RS parallelâ BL logarithmicæ occurrente in S capiatur abciſſa AM, seu $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} \mp$ RS nimirum $-$RS, cum est AR > AE, & $+$RS ubi AR < AE; ac denique capiatur ordinata MN, seu $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$; punctum N erit in curvâ quæsitâ LD. Quod ut pateat, demonstrandum superest, esse $\mp RS = -\frac{1}{4}\overline{aL.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Hoc autem manifestum est; nam RS, est differentia logarithmorum correspondentium quantitatibus AR & AE, (sive z & $a\sqrt{\frac{1}{3}}$) sumptorum in Logisticâ cujus subtangens est $\frac{1}{4}a$, & hæc differentia positiva est, ubi AR (z) > AE ($a\sqrt{\frac{1}{3}}$) negativa ubi AR (z) < AE ($a\sqrt{\frac{1}{3}}$), & nulla, cum fit AR = AE, seu $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, ut oportet. Quarè cum AR superat AE, est $-RS = -\frac{1}{4}a \times \overline{Lz - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$, & ubi AE superat AR, fit $+RS = -\frac{1}{4}a \times \overline{L.z - La\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Est igitur semper $\mp RS = -\frac{1}{4}a\overline{Lz - La\sqrt{\frac{1}{3}}}$.

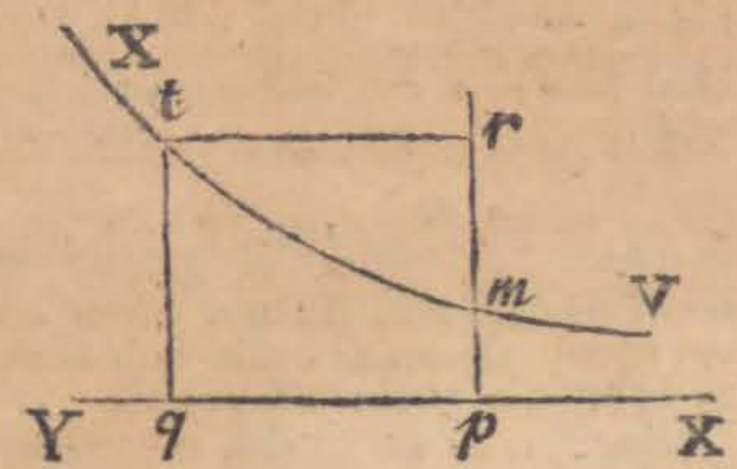
204. Datâ minimâ ordinatâ AL, curva LND, describi potest. Nam cum sit (ex dem.) $AL = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}AE$, & GB sive Ag = a, datâ AL dantur Ag, AE, & subtangens Logarithmicæ quæ proindè poterit describi.

205. Datis duabus ordinatis MN & CD magnitudine, curva describi potest. Si enim in æquatione $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$ loco y scribantur seorsim datæ MN, & CD dabuntur z & a undè dabitur minima ordinata $AL = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

206. Datâ ordinatâ quâlibet CD cum abscissâ correspondente CA, curva describi potest. Si enim in æquatione $y =$ (zz



$\frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$, loco y ſcribatur data CD, habebitur z per a & datas quantitates; deindè ſi in æquatione alterâ $x=\frac{3z^4}{16a^3}+\frac{zz}{4a}-\frac{5a}{48}-\frac{1}{4}a\overline{L.z-La\sqrt{\frac{1}{3}}}$, loco x ſubſtituatur data CA & loco z, ejus valor per a & datas inventus, dabitur æquatio inter a & datas quantitates, & ex hâc æquatione invenietur linea a, quâ datâ, datur ordinata minima AL.



207. Recta gR, parallela eſt tangenti per punctum N ductæ. Eſt enim (per conſtr.) $dx=\frac{z\,dy}{a}$, ideoque nr(dy): rN(dx)=gA(a):AR(z.) ex quâ proportione & propter angulum rectum in r, & in A, patet triangula nrN, gAR, ſimilia eſſe, & propterea gR parallelam nN, ſeu tangenti per N ductæ. Hinc cum AE ſit æqualis $a\sqrt{\frac{1}{3}}=z$ ubi $z=0$ (103) erit gE tangenti per L ductæ parallela, ſitque Ag=a eſt $gE^2=\frac{a^2}{3}+a^2=\frac{4a^2}{3}$ atquè adeo $gE=2a\sqrt{\frac{1}{3}}=2AE$ erit gE ad AE ut 2, ad 1, & ità ſinus totus ad ſinum anguli AgE, ſivè ad ſinum anguli quem curva conſtituit cum minimâ ordinatâ AL, qui proindè eſt 30°. 207.

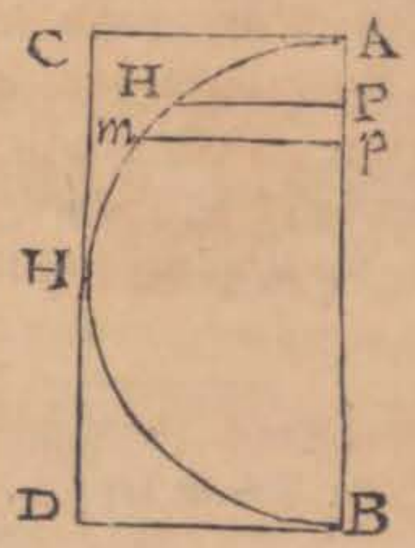
208. Quoniam AR, in infinitum creſcere ac decreſcere poteſt ſi capiatur ſemper AR>BE, deſcribetur curvæ ramus LND, qui concavitatem axi BC obvertit, & ab utroque axe AC, Ag, in infinitum recedit; at ſi ſemper ſumatur BR<BE, deſcribetur alter curvæ ramus LO, qui

DE MOTU CORPORUM.

qui priori LD convexitatem offert, & ab utroque axe BC, BG, in infinitum abscedit; curva igitur DLO punctum regressûs habet in L, & solidum minimæ resistentiæ ex ejus circà axem AC revolutione genitum, convexum vel concavum, & partim convexum, partim concavum esse potest.

209. Quoniam $dx = \frac{z\,dy}{a}$, erit areæ curvæ elementum $y\,dx = \frac{z\,y\,dy}{a}$, elementum arcus curvæ $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy\sqrt{aa+zz}}{a}$, elementum superficiei à curvâ circà axem AC rotatâ genitæ $= \frac{2\,p\,y\,dy\sqrt{aa+zz}}{a}$ (si p sit semiperipheria circuli cujus radius est unitas); elementum solidi in eâdem revolutione descripti $= \frac{p\,z\,y^2\,dy}{a}$; & resistentia superficiei $\frac{2\,p\,y\,dy\sqrt{aa+zz}}{a}$, erit $\frac{a\,dy^2}{dx^2+dy^2}\,y\,dy = \frac{a\,dy^2}{dy^2 \times aa+zz}\,y\,dy$ sive ut $\frac{y\,dy}{aa+zz}$. Porrò si in his fluxionibus loco y, & dy, substituantur ipsarum valores qui ex æquationibus $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$, & $dy = \frac{3\,z^2\,dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aa\,dz}{4zz}$ habentur, fluens $S.\,y\,dx$, seu area curvæ inveniri poterit algebraicè, aliæ verò fluentes ab hyperbolæ quadraturâ pendent.

Schol. Quæ ad solidum minimæ resistentiæ spectant, ea ferè omnia mutuati sumus ex Illmo. Marchione Hospitalio, tum in act. Lipsienſ. an. 1699, tum in monum. Parisienſ. ejusdem anni. De eodem solido plurima etiam dederunt celeb. viri Joh. Bernoull. in act. Lipsienſ. an. 1699. 1700. Hermannus in Phoronomiâ, & Facio ad calcem libri de murorum inclinatione &c. Sed qui totam hanc Newtoni propositionem maximâ universalitate pertractatam habere volunt, legant tractatum a Clariſſ. Bouguero editum, & ab Academiâ Regiâ Parisiensi an. 1727. præmio condecoratum, cui titulus; *De la mâture des Vaisseaux*, nec non monum. Parisienſ. an 1733. in quibus elegantissima & universalissima legitur ultimæ Scholii Newtoniani partis solutio. Rem a clariſſ. autore demonstratam hic observatu dignissimam judicamus, videlicet, solidum rotundum cujus constructionem modò dedimus, in quâlibet hujus solidi directione & juxtà quamlibet fluidi impulsionem, minimam omnium pati resistentiam, exceptis quibusdam casibus qui in navigationis praxi vix unquam occurrunt, cum scilicet directio solidi majores angulos cum axe constituit; & quod mirum est, in his casibus, solidum illud quod erat minimæ resistentiæ & navigationi aptissimum, solidum maximæ resistentiæ & ad usum navigationis omnium minime idoneum evadit. Quæ verò ad universalem solidorum in fluidis resistentiam pertinent, peti possunt ex aureo Joh. Bernoullii libello qui inscribitur: *Essai d'une nouvelle le Theorie de la manœuvre des Vaisseaux. & ex Hermanni Phoronomiâ.*



210. Lemma. *Sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria.* Sphæra generatur per revolutionem semicirculi AHB circà diametrum AB, & cylindrus sphæræ circumscriptus per revolutionem rectanguli ACBD, cujus latera AC, BD circuli radio sunt æqualia. Ductis ordinatis infinitè propinquis PM, pm, dicantur $AC = r$, semiperipheria $AHB = p$, $AP = x$, $Pp = dx$, & quia circulorum areæ sunt in ratione duplicatâ radiorum, erit quadratum radii CA, seu rr, ad aream circuli AHB, nempè rp, ut MP^2, seu $2rx - xx$ ad aream circuli radio PM descripti, quæ ideò erit $2px - \frac{pxx}{r}$; & hinc so-

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus æqualibus & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constet: invenire resistentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus eâdem diametro & altitudine descriptus progredi intelligatur eâdem velocitate secundum longitudinem axis sui in eodem medio. Et ponamus quod particulæ medii, in quas globus vel cylindrus incidit, vi reflexionis quam maximâ resiliant. Et cum resistentia globi (per propositionem novissimam) sit duplo minor quam resistentia cylindri, & globus sit ad cylindrum ut duo ad tria, & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas, ipsasque quam maximè reflectendo, (x) duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, communicabit motum particulis, (y) qui sit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri; & globus, quo tempore totam longitudinem diametri suæ uniformi-

solidum ex rotatione elementi P M m p, circà A B genitum, erit $2pxdx-\frac{pxxdx}{r}$, sumptisque fluentibus, solidum ex rotatione segmenti circularis A M P ortum, erit $pxx-\frac{px^3}{3r}$, & factâ A P = A B, seu $x=2r$, sphæra tota habetur $=4prr-\frac{8}{3}prr=\frac{4}{3}prr$. Sed cylindrus sphæræ circumscriptus est factum ex areâ circuli radio A C descripti in cylindri altitudinem A B, seu est $2prr$. Quarè sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut $\frac{4}{3}prr$ ad $2prr$, id est, ut 4 ad 6, sive ut 2 ad 3. Q. E. D.

(x) * *Duplam sui ipsius velocitatem* &c. Cum singulæ particulæ, cylindri respectu, minimæ sint, si nulla esset particularum medii reflexio, eâdem cum cylindro velocitate moverentur; ac accedente vi reflexionis perfectâ, velocitas illa duplicatur (53. lib. 1.). 210.

(y) * *Qui sit ad totum cylindri motum* &c. Quantitates motûs sunt ut velocitates & massæ conjunctim; massæ verò sunt ut volumina & densitates; ideòque quantitates motûs ut velocitates & volumina & densitates conjunctim. Cum igitur cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, medii volumen dimidio volumini cylindri æquale duplâ cum velocitate moveat, sitque proindè factum ex volumine cylindri in ipsius velocitatem æquale facto ex volumine medii moto in ejus velocitatem, motus particulis medii communicatus, erit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri.

DE MOTU CORPORUM.

miter progrediendo deſcribit, (z) communicabit motum eundem particulis; (a) & quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit, communicabit motum particulis, qui ſit ad totum globi motum ut denſitas medii ad denſitatem globi. Et propterea globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ uniformiter progrediendo deſcribit, ut denſitas medii ad denſitatem globi.

Caſ. 2. Ponamus quod particulæ medii in globum vel cylindrum incidentes non reflectantur; & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ſimplicem ſuam velocitatem ipſis communicabit, ideoque reſiſtentiam patitur duplo minorem quàm in priore caſu, & reſiſtentia globi erit etiam duplo minor quàm prius.

Caſ. 3. Ponamus quod particulæ medii vi reflexionis neque maximâ neque nullâ, ſed mediocri aliquâ reſiliant à globo; & reſiſtentia globi erit in eâdem ratione mediocri inter reſiſtentiam in primo caſu & reſiſtentiam in ſecundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc ſi globus & particulæ ſint infinitè duræ, & vi omni elaſticâ, & propterea etiam vi omni reflexionis deſtituta: reſiſtentia globi erit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas medii ad denſitatem globi.

Co-

(z) * *Communicabit motum eundem particulis*, ob reſiſtentiam globi reſiſtentiâ cylindri duplo minorem (prop. 34. lib. 2.).

(a) *Et quo tempore duas tertias partes &c.* * Huc redit compoſitio rationum à Newtono indicata: Totus Globi motus eſt ad Cylindri motum, ut 2 ad 3 hæc enim eſt utriuſque maſſæ ratio; Totus Cylindri motus eſt ad motum à cylindro communicatum quo tempore dimidiam ſuam longitudinem deſcribit ut denſitas Cylindri (ſive Globi) ad denſitatem medii, motus ille à cylindro communicatus idem eſt cum motu à Globo communicato dum totam ſuam Diametrum percurrit; Denique motus ille à Globo communicatus dum totam ſuam Diametrum percurrit eſt ad motum ab eo Globo communicatum dum percurrit duas Diametri ſuæ tertias partes ut 3 ad 2, Ideoque totus Globi motus eſt ad motum ab eo communicatum dum percurrit duas Diametri ſuæ partes conjunctim ut 2 ad 3, ut denſitas Globi ad denſitatem medii, & ut 3 ad 2, ſive primâ ratione & hâc ultimâ ſeſe compenſantibus ut denſitas Globi ad denſitatem medii. Q. E. D.

(b) *Corol.* 2. Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt in duplicatâ ratione velocitatis.

Corol. 3. Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt in duplicatâ ratione diametri.

Corol. 4. Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt ut denſitas medii.

Corol. 5. Reſiſtentia globi eſt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis & duplicatâ ratione diametri & ratione denſitatis medii.

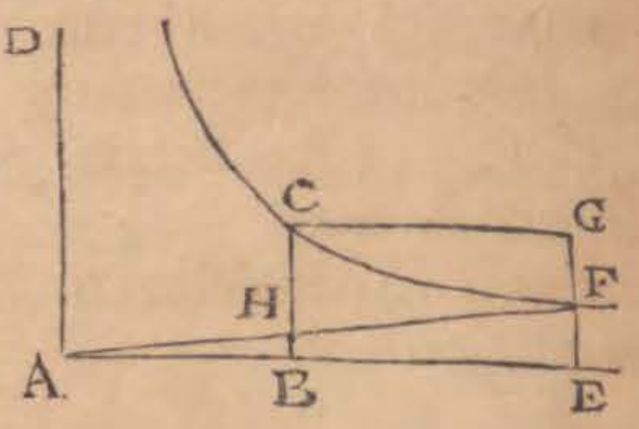
Corol. 6. Et motus globi cum ejus reſiſtentia ſic exponi poteſt. Sit *AB* tempus quo globus per reſiſtentiam ſuam uniformiter continuatam totum ſuum motum amittere poteſt. Ad

AB

(b) * *Reſiſtentia globi cæteris paribus eſt in duplicata ratione velocitatis.* * Sint globi æquales in eodem medio moti diversâ cum velocitate; motus totus uniuſcujuſque eſt ad motum ab ipſo communicatum tempore quo duas tertias ſuæ Diametri percurrit, ut Denſitates globorum ad denſitates mediorum, ideoque ex hypotheſi in eâdem ratione, ergo etiam velocitas unius eſt ad velocitatem alterius ut motus ab illis communicati temporibus quibus duas tertias ſuarum Diametrorum (æquales quippe longitudines) percurrunt. Dividantur illa tempora in partes minimas utrinque æquales, & quia Reſiſtentia ſingulis momentis, ejuſdem Globi reſpectu, uniformis cenſetur, Reſiſtentiæ momentaneæ erunt directè ut motus amiſſi & inverſè ut tempora quibus amittuntur, ſed motus amiſſi ſunt ut velocitates directe & tempora ſunt inverſe ut velocitates, quia æquales longitudines percurruntur motibus qui uniformes, ſaltem quam proxime, cenſentur, ergo reſiſtentiæ momentaneæ ſunt bis ut velocitates, hoc eſt in ratione duplicatâ velocitatis. 210.

(†) * *Reſiſtentia globi cæteris paribus eſt in duplicatâ ratione Diametri.* * Sint globi æquiveloces, æque denſi, in eodem medio moti, ſed diverſæ ſint earum Diametri, fingantur duo Cylindri ejuſdem cum iis Diametri, & etiam æquiveloces & æque denſi, reſiſtentiæ quas patientur Cylindri ſingulis momentis erunt ut numerus partium in quas incurrunt, illi verò numeri partium ſunt ut Quadrata Diametrorum: Sed facile liquet reſiſtentias Cylindrorum & globorum æquivelocium, ejuſdem Diametri, in eodem medio eſſe in datâ ratione, ergo ut reſiſtentia unius Cylindri ad reſiſtentiam alterius, ita reſiſtentia unius Globi ad reſiſtentiam alterius, ſunt ergo Globorum reſiſtentiæ ut Quadrata Diametrorum.

DE MOTU CORPORUM.



AB erigantur perpendicula AD, BC. Sitque BC motus ille totus, & per punctum C asymptotis AD, AB describatur hyperbola CF. Producatur AB ad punctum quodvis E. Erigatur perpendiculum EF hyperbolæ occurrens in F. Compleatur parallelogrammum $CBEG$, & agatur AF ipsi BC occurrens in H. Et si globus tempore quovis BE, motu suo primo BC uniformiter continuato, in medio non resistente describat spatium $CBEG$ per aream parallelogrammi expositum, idem in medio resistente describet spatium $CBEF$ per aream hyperbolæ expositum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam EF, amissâ motus ejus parte FG. (c) Et resistentia ejus in fine temporis ejusdem exponetur per longitudinem BH, amissâ resistentiæ parte CH. Patent hæc omnia per corol. 1. & 3. prop. v. lib. II.

Corol. 7. Hinc si globus tempore T per resistentiam R uniformiter continuatam amittat motum suum totum M: idem globus tempore t in medio resistente per resistentiam R in duplicatâ velocitatis ratione decrescentem, (d) amittet motus sui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente parte $\frac{TM}{T+t}$; & describet spatium quod sit ad spatium motu uniformi M eodem tempore t descrip-

(c) *Et resistentia ejus in fine &c.* Resistentia sub initio ubi velocitas est BC, exponatur per eandem lineam BC, & quia resistentiæ sunt ut velocitatum quadrata, atque BC ad FE, ut velocitas sub initio ad velocitatem in fine temporis BE residuam (cor. 1. prop. 5. lib. 2.) erit BC^2 ad FE^2 ut BC ad lineam quæ resistentiam exponit in fine temporis BE, ideòque linea hæc $= \frac{FE^2}{BC}$. Sed (per theor. 4. de hyp.) & ob similitudinem triangulorum ABH, AEF, est BC: FE = AE: AB = FE: HB, & hinc $HB = \frac{FE^2}{BC}$. Quare recta HB exponet resistentiam in fine temporis BE, & proinde recta CH partem amissam resistentiæ illius quæ sub initio exponebatur per lineam BC.

(d) * *Amittet motûs sui partem &c.* Pars motûs M in fine temporis t residua dicatur m, & quia (ex dem.) $T : t = AB : BE$, & hinc $T + t : T = AE : AB$, & præterea $M : m = CB : FE = AE : AB$; erit $T + t : T = M : m$, unde habetur $m = \frac{MT}{T+t}$, & inde motûs M pars amissa est $M - \frac{MT}{T+t} = \frac{tM}{T+t}$.

ſcriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, (e) propterea quod area hyperbolica $BCFE$ eſt ad rectangulum $BCGE$ in hâc proportione. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXV. PROB. VII.

Scholium.

In hâc propoſitione expoſui reſiſtentiam & retardationem projectilium ſphæricorum in mediis non continuis, & oſtendi quod hæc reſiſtentia ſit ad vim quâ totus globi motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore globus duas tertias diametri ſuæ partes velocitate uniformiter continuatâ deſcribat, ut denſitas medii

(e) * *Propterea quod area hyperbolica.* Dicantur $AB=a$, $BC=b$, $BE=x$, $AE=a+x$; & quia (theor. 4. de hyp.) $FE=\frac{ab}{a+x}$, elementum areæ CFEB, erit $\frac{ab\,dx}{a+x}$, & area ipſa $CFEB=ab\,S.\frac{dx}{a+x}$, quæ fluens ità ſumenda eſt ut evaneſcat ubi fit $x=0$, ſed fluens S. $\frac{dx}{a+x}$ ità ſumpta eſt logarithmus numeri $\frac{a+x}{a}$, deſumptus ex logiſticâ cujus ſubtangens eſt unitas, aut quod idem eſt, ex hyperbolâ cujus dignitas unitati æqualis eſt (382. lib. 1. & 40. lib. 2.); Si enim ponatur $x=0$, numerus $\frac{a+x}{a}$, evadit $=1$, & ideò $L.\frac{a+x}{a}=0$. Quarè area $BCFE=ab\,L.\frac{a+x}{a}$; rectangulum verò $BCGE=bx$. Eſt ergò area hyperbolica BCFE ad rectangulum BCGE, ut $ab\,L.\frac{a+x}{a}$ ad bx, hoc eſt, dividendo per ab, ut $L.\frac{a+x}{a}$ ad $\frac{x}{a}$. Verum (ex dem. & hyp.) $\frac{a+x}{a}=\frac{T+t}{T}$, & $\frac{x}{a}=\frac{t}{T}$; Quare area Hyperbolica BCFE, eſt ad rectangulum BCGE, ut $L.\frac{T+t}{T}$ ad $\frac{t}{T}$. Supereſt igitur inveniendus logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$, per logarithmicam cujus ſubtangens eſt unitas. Porrò ejuſdem numeri logarithmi diverſæ ſpeciei ſunt inter ſe in datâ ratione (38) & numerus 2,302585092994 eſt logarithmus numeri denarii ſumptus in logarithmicâ cujus ſubtangens eſt unitas, & ejuſdem numeri denarii logarithmus in tabulis ſumptus eſt 1,0000000=1; Quarè ut 1, ad 2,302585092994, ità logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ in tabulis ſumptus ad logarithmum ejuſdem numeri ſumptum in logarithmicâ cujus ſubtangens eſt unitas, vel in Hyperbolâ cujus dignitas eſt 1; habetur ergò logarithmus quæſitus, ſi logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ ex tabulis ſumptus multiplicetur per numerum 2,302585092994. 210.

DE MOTU CORPORUM.

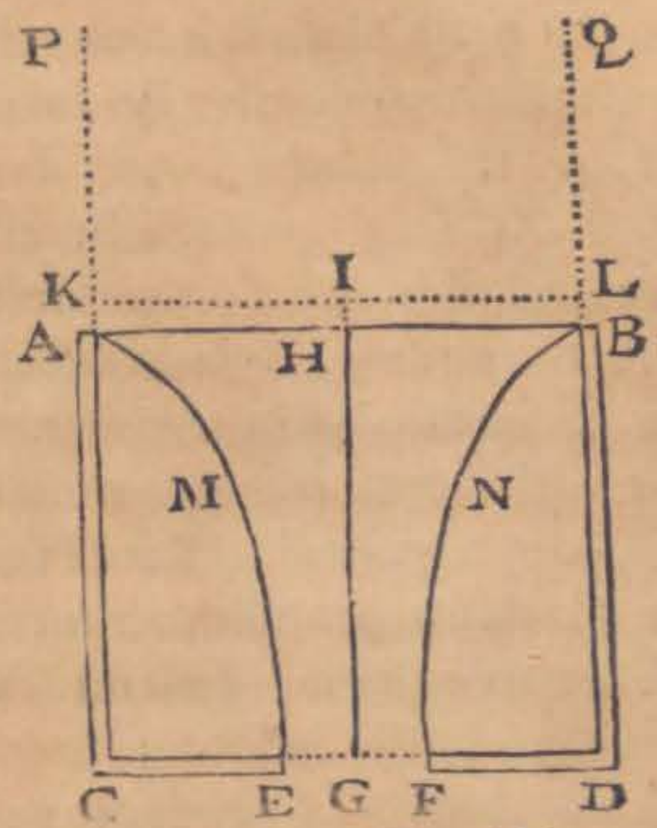
medii ad denſitatem globi, ſi modo globus & particulæ medii ſint ſummè elaſtica & vi maximâ reflectendi polleant: quodque hæc vis ſit duplo minor ubi globus & particulæ medii ſunt infinitè dura & vi reflectendi prorſus deſtituta. In mediis autem continuis qualia ſunt aqua, oleum calidum, & argentum vivum, in quibus globus non incidit immediatè in omnes fluidi particulas reſiſtentiam generantes, ſed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, reſiſtentia eſt adhuc duplò minor. Globus utique in hujuſmodi mediis fluidiſimis reſiſtentiam patitur quæ eſt ad vim quâ totus ejus motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri ſuæ deſcribat, ut denſitas medii ad denſitatem globi. Id quod in ſequentibus conabimur oſtendere.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vaſe cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit *ACDB* vas cylindricum, *AB* ejus orificium ſuperius, *CD* fundum horizonti parallelum, *EF* foramen circulare in medio fundi, *G* centrum foraminis, & *GH* axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge cylindrum glaciei *APQB* ejuſdem eſſe latitudinis cum cavitate vaſis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuo deſcendere, & partes ejus quam primum attingunt ſuperficiem *AB* liqueſcere, & in aquam converſas gravitate ſuâ defluere in vas; & cataractam vel columnam aquæ *ABNFEM* cadendo formare, & per foramen *EF* tranſire, idemque adæquatè implere. Ea verò ſit uniformis velocitas glaciei deſcendentis ut & aquæ contiguæ in circulo *AB*, quam aqua cadendo (f) & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IH* acqui-

(f) * *Et caſu ſuo deſcribendo altitudinem IH.* Hâc igitur Hypotheſi idem præſtatur ac ſi in loco AB nova ſuperficies aquæ continuò crearetur, cum motu initiali quadem cadendo ex altitudine IH ſingula ejus ſuperficiei particula acquirere potuiſſet, & deindè particulæ aquæ e loco AB vi propriæ gravitatis cadendo ſeſe mutuò attrahe-



quirere poteſt; & jaceant *IH* & *HG* in directum, & per punctum *I* ducatur recta *KL* horizonti parallela & lateribus glaciei occurrens in *K* & *L*. Et velocitas aquæ effluentis per foramen *EF* (g) ea erit quam aqua cadendo ab *I* & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirere poteſt. (h) Ideoque per theoremata *Galilæi* erit *IG* ad *IH* in duplicatâ ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo *AB*, hoc eſt, in duplicatâ ratione circuli *AB* ad circulum *EF*; (i) nam hi circuli ſunt reciprocè ut velocitates aquarum quæ per ipſos eodem tempore & æquali quantitate, adæquatè tranſeunt. De velocitate aquæ horizontem verſus hic agitur. Et motus horizonti parallelus quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur à gravitate, nec motum horizonti perpendicularem à gravitate oriundum mutet, hic non conſideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæſionem ſuam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur; ſed motum horizon-

herent horizontaliter ad cataractam vel columnam A B N I E M formandam.

(g) * *Ea erit quam aqua* (per hyp.).

(h) * *Ideoque per theoremata Galilæi.* 28. lib. 1.

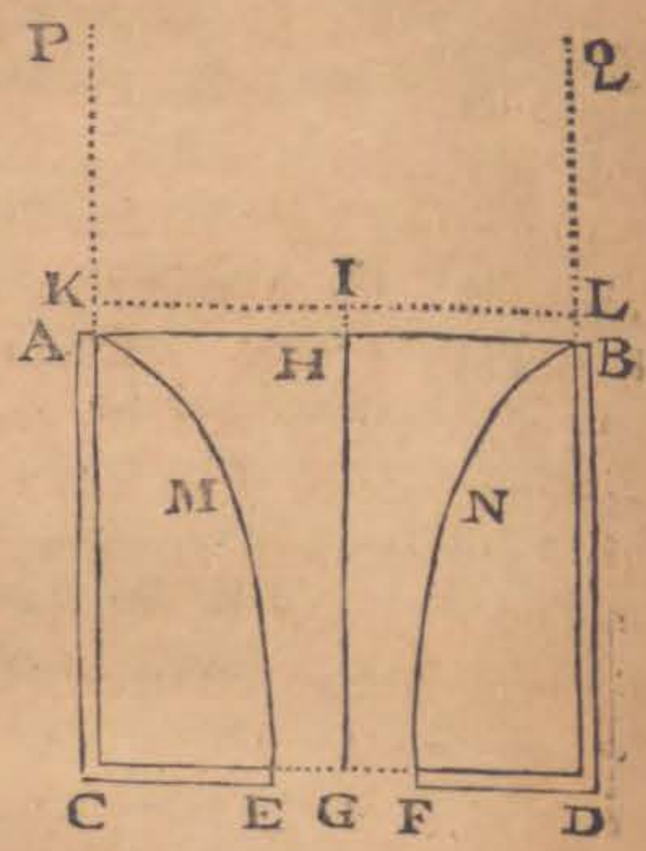
(i) 271. *Nam hi circuli* &c. Quoniam aqua per totam cataractam ABNIEM, eodem ſemper tenore fluere ſupponitur, neceſſe eſt ut eadem aquæ quantitas per ſingulas cataractæ ſectiones axi IG perpendiculares, ſeu per ſingulos circulos AB, MN, EF horizonti parallelos eodem tempore tranſeat. Nam ſi dato tempore major vel minor aquæ copia per circulum AB quam per circulum MN tranſiret, aqua inter illos circulos vel intumeſceret vel decreſceret, & cataractæ figuram mutaret (contrà Hyp.). Quantitas aquæ per circulum quemlibet MN, dato tempore fluentis æquatur cylindro aqueo, cujus baſis eſt circulus MN, & altitudo eſt æqualis longitudini quam ſuperficies aquæ MN, cum velocitate acquiſitâ uniformiter progrediendo eodem tempore dato deſcriberet; & longitudo illa eſt ut aquæ per circulum MN fluentis velocitas (5. lib. 1.) & ideo quantitas aquæ

271.

DE MOTU CORPORUM.

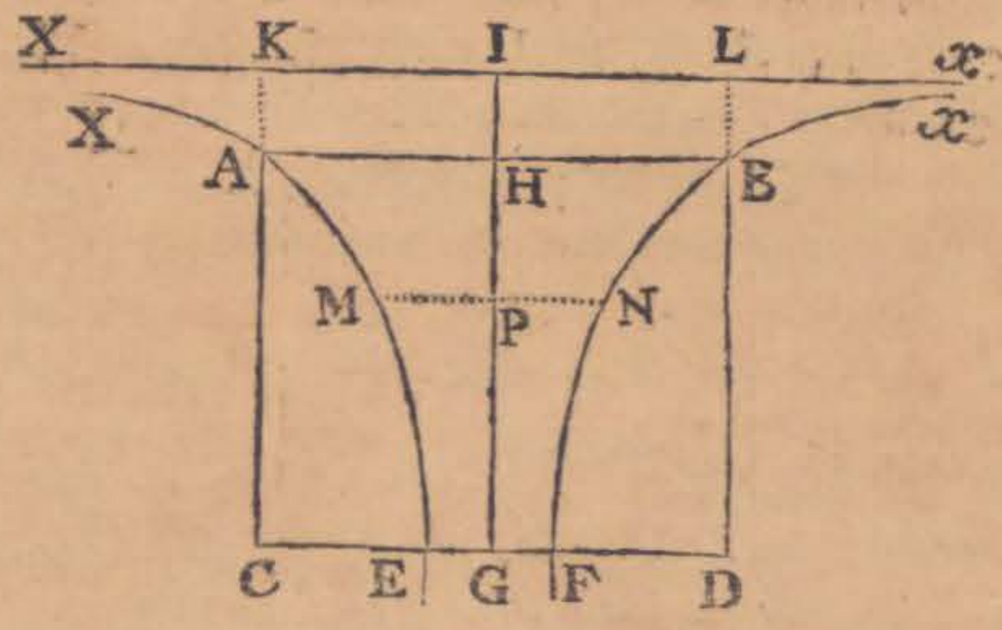
rizonti parallelum, à cohæſione illâ oriundum, hic non conſideramus.

Caſ. 1. Concipe jam cavitatem totam in vaſe, in circuitu aquæ cadentis *ABNFEM*, glacie plenam eſſe, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum tranſeat. Et ſi aqua glaciem tantùm non tangat, vel, quod perinde eſt, ſi tangat & per glaciem propter ſummam ejus polituram quam liberrimè & ſine omni reſiſtentiâ labatur; hæc defluet per foramen *EF* eâdem velocitate



ac

per circulum M N dato tempore fluentis, eſt ut circulus M N & velocitas conjunctim. Quare cum data ſit quantitas aquæ per ſingulos circulos dato tempore tranſeuntis, circulus M N eſt reciprocè ut velocitas aquæ quæ per ipſum tranſit. Q. E. D.



272. His ità conſtitutis, facile eſt cataractæ figuram geometricè definire. Secet M N axem I G in P; & quia altitudo I P eſt in duplicatâ ratione velocitatis aquæ in P, hæc vero velocitas eſt inverſe ut circulus M N, & denique circulus M N eſt in ratione duplicatâ radii M P, eſt ideo I P ſeu abſciſſa in ratione quadruplicatâ inverſa radii ſeu ordinatæ M P, ſive I P ut $\frac{1}{MP^4}$, & ideo $MP^4 \times IP$, quantitas data. Eſt igitur curva E M A, Hyperbola quarti gradûs, aſymptotos habens I G, I K, quibus convexitatem obvertit. Producantur arcus E M A, & aſymptotus I K

ad

ac prius, (k) & pondus totum columnæ aquæ *ABNFEM* impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, & fundum vasis sustinebit pondus glaciei columnam ambientis.

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

Liquescat jam glacies in vase; & effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. (l) Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere: non major, quia glacies in aquam resoluta non potest descendere nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vasis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus esse debet quam prius. Nam

ad partes X in infinitum, & figura EAXXIG circà asymptotum seu axem IG, rotata cataractam describet in infinitum ad partes X, x, productam; figura verò EMAHG, hanc cataractæ partem quæ intra vas ABDC, continetur generabit.

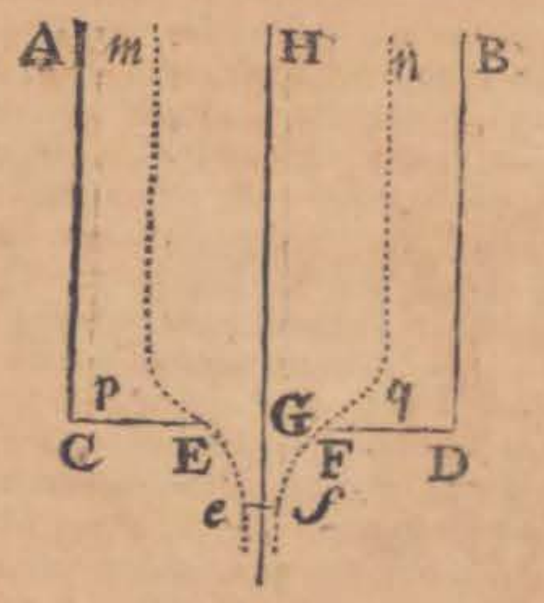
273. Tota cataracta EAXxBF, æquatur cylindro cujus basis est circulus EF, & altitudo 2IG. Sint enim altitudo IG $= x$, ordinata EG $= y$, a linea data, & (272) $x = \frac{a^5}{y^4}x$, ideoque $y^4 = a^5$ æquatio ad Hyperbolam EMAX. Et si semiperipheria circuli cujus radius est unitas, dicatur p erit circuli EF area $= pyy$, & cylindrus EG × 2IG $= 2pyyx = \frac{2pa^5}{yy}$. Cum verò sit $x = \frac{a^5}{y^4}$, ac proindè $dx = -\frac{4a^5dy}{y^5}$, cataractæ elementum $pyydx = -\frac{4pa^5dy}{y^3} = -4pa^5y^{-3}dy$, & sumptis fluentibus, tota cataracta ad asymptotum usque Xx producta, erit $= \frac{2pa^5}{yy} = 2EF \times IG$. Q. E. D.

(k) 274. *Et pondus totum &c.* Pondus quidem totum columnæ aquæ ABNFEM in defluxum ejus generandum impenditur; attamen totum aquæ motum non generat, cum motûs illius pars pendeat à motu superficiei AB, quæ (per hyp.) eam habet velocitatem quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IH acquirere potest. Sed totum aquæ defluxum mathematicè considerare possumus tanquam genitum pondere aquæ totius, quæ in cataractâ EAXxBF, usque ad asymptotum Xx producta continetur quæque æqualis est cylindro aqueo basi EF & altitudine 2IG, descripto (273). 274.

(l) * *Non minor erit quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere*, atquè ità aquæ descensum accelerare; *non tamen major erit, quia glacies in aquam resoluta*, ob reactionem actioni æqualem & contrariam, *non potest descendere, nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem.* Idem igitur manet in aquâ totâ ad descendendum & per foramen EF effluendum conatus. At *eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.*

DE MOTU CORPORUM.

(m) Nam particulæ aquæ jam non tranſeunt omnes per foramen perpendiculariter; ſed à lateribus vaſis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis tranſeunt motibus; & curſum ſuum deorſum flectentes in venam aquæ exilientis conſpirant, quæ exilior eſt paulo infra foramen quam in ipſo foramine, exiſtente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proximè, ſi modo diametros rectè dimenſus ſum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, exiſtente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur anguſtior, hanc laminam non fundo ſed lateri vaſis effixi ſic, ut vena illa egrederetur ſecundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aqua plenum eſſet, aperui foramen ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad diſtantiam quaſi dimidii digiti à foramine quam accuratiſſimè menſurata, prodiit partium viginti & unius quadrageſimarum digiti. (n) Erat igitur diameter foraminis hujus circularis



(m) * *Nam particulæ aquæ &c.* Clariſſ. Daniel Bernoullius paragr. 3. Sect. 4ª. hydrodynnamicæ obſervavit particulas ceræ hiſpanicæ aquis innatantes ità cum aquâ in vaſe moveri, ut quæ foraminis centro G imminent, per lineam verticalem H G, deſcendant, aliæ verò omnes utrinque poſitæ motu ferè verticali deſcendant primùm per lineas m p, n q, ferè ad fundum uſque C D, tumque curſum ſuum verſùs foramen E F per lineas P E, q F ſenſim inflectant. Itaque vena aquæ exilientis E F ſe duplici de causâ contrahitur uſque in e f paulo infra foramen E F. Prima contractionis illius cauſa eſt acceleratio motûs, quæ omnibus gravibus cadentibus communis eſt, & quâ fit ut major ſit velocitas aquæ in loco inferiori e f quam in ſuperiore E F; quia enim aquam eſſe in ſtatu manente, eandemque proinde (271) illius quantitatem per ſectiones E F & e f, eodem tempore effluere ſupponimus, ſectio e f eſt ad ſectionem E F in ratione velocitatis aquæ in loco E F, ad ejus velocitatem in loco e f (271) & ideo ſectio e f, cæteris paribus, minor eſſe debet ſectione E F. Secunda contractionis venæ cauſa, quam ſolam hic conſiderat Newtonus, eſt obliquitas motûs particularum aquæ per lineas P E, q F, ad foramen E F tendentium; hinc enim fit, ut ſeclusâ etiam omni acceleratione motûs à gravitate ortâ, particulæ aquæ convergant, venamque contrahant, atque ideo motum ſuum accelerent.

(n) * *Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad*

circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproximè. Aqua igitur tranſeundo per foramen, convergit undique, & poſtquam effluxit ex vaſe, tenuior redditur convergendo, & per attenuationem acceleratur donec ad diſtantiam ſemiſſis digiti à foramine pervenerit, & ad diſtantiam illam tenuior (o) & celerior fit quam in ipſo foramine in ratione 25×25 ad 21×21 ſeu 17 ad 12 quamproximè, id eſt in ſubduplicatâ ratione binarii ad unitatem circiter. (p) Per experimenta vero conſtat quod quantitas aquæ, quæ per foramen circulare in fundo vaſis

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

ad 21 quamproximè. Hæc ratio in experimentis conſtans ferè manet, ſi aqua è vaſe ſatis amplo per exiguum foramen laminæ tenuiſſimæ inſculptum effluat, licet in vaſe mutetur aquæ foramini incumbentis altitudo. Experimenta illa iterarunt celeberrimi Mathematici Marchio Polenus lib. de caſtellis & Daniel Bernoullius ſect. 4ª. Hydrodynamicæ. Hæc ſunt Illuſtr. Marchionis verba pag. 38. 39. «Proclive autem erit intelligere, confirmari ex allatis experimentis rationem inter diametros foraminum & aquæ contractæ diametros à viro ſummo Iſaaco Newtono, ut antè diximus, conſtitutam. Non tamen inficias iverim perexiguam aliquam differentiam intereſſe inter contractiones aquæ effluentis ex minoribus foraminibus, & aquæ contractiones ex majoribus effluentis. Anteà deſcripti foraminis in laminâ ferreâ diameter ad diametrum aquæ contractæ fuit in eâ ratione quam habet numerus 52 ad 41; cum Newtoniana ſit ratio numeri 50 ad 42. ſic omninò eâdem lege, non ſemper contrahi aquæ venas oſtendunt variæ contractiones in aquæ à variis fruſtis conicis effluxu obſervatæ, quin etiam huc debebunt referri illæ quas animadverti differentiæ inter diametros ad perpendiculum ſumptas, & diametros ſecundum lineam horizonti parallelam menſas. At quanta ſit differentia inter aquæ contractiones non auſim definire; neque verò illa Newtoniana ratio inter diametrum foraminis & contractæ aquæ diametrum ſumi debet ceu præciſa, cum ipſe vir ſummus in citato opere hæc habeat; exiſtente ejus (nempè aquæ contractæ (diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel 5 & $\frac{1}{2}$ ad 6 & $\frac{1}{2}$, quamproximè, ſi modo diametros reètè dimenſus ſum». Bernoullius verò «Sect. 4. parag. 7°. hæc habet: Interim aſſumptis laminâ tenui, vaſe ampliſſimo, foramine ad 4 vel 6 lineas in diametro aſſurgente, ſolet ratio inter foramen & Sectionem venæ contractæ non multum recedere ab illâ quam Newtonus ſtatuit». Verùm utriuſque authoris experimenta demonſtrant, rationem illam diametri venæ contractæ ad diametrum foraminis multum variari, ſi per oblongos variæque figuræ canales, non verò ex ſimplici foramine in tenuiſſimâ laminâ inſculpto è vaſe effluat aqua. 274.

(o) * *Et celerior fit quam in ipſo foramine.* Nam velocitates ſunt reciprocè ut circuli per quos aqua eodem tempore tranſit (171), circuli verò ſunt in ratione duplicatâ diametrorum; & ideo velocitas aquæ per ſectionem circularem venæ contractæ tranſeuntis eſt ad velocitatem aquæ per foramen effluentis ut 25×25 ad 21×21 hoc eſt, 625 ad 441, quod utrumque diviſum per 37 dat rationem 17 ad 12, vel utrumque diviſum per 441, dat rationem 1.41 &c. ad 1, eſt verò Radix binarii numeri 1.41 &c., eſt ergo velocitas aquæ per venam contractam ad velocitatem per foramen in ratione radicis binarii numeri ad unitatem.

(p) *Per experimenta verò conſtat.* Datâ quantitate aquæ per datum foramen ſeu per datam venæ contractæ Sectionem dato tempore effluentis, ſic illius veloci-

DE MOTU CORPORUM.

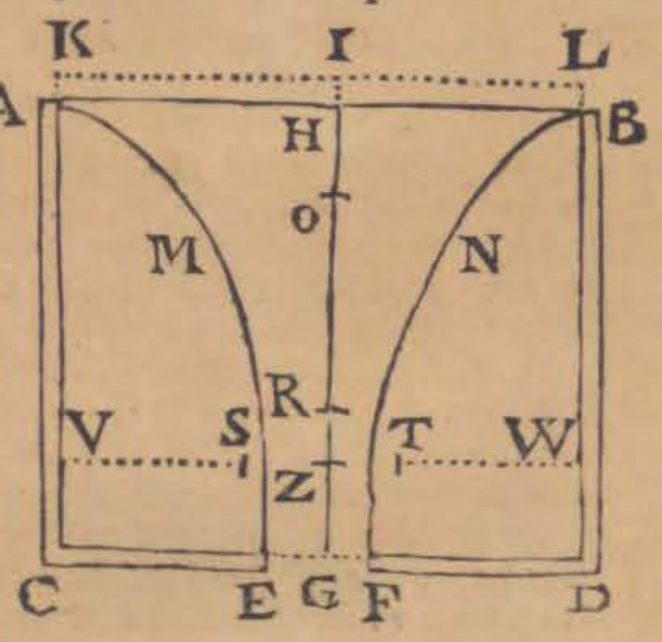
sis factum, dato tempore effluit, ea sit quæ cum velocitate prædictâ, non per foramen illud, sed per foramen circulare, cujus diameter est ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideoque aqua illa effluens velocitatem habet deorsum in ipso foramine quam grave cadendo & casu suo (q) describendo dimidiam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirere potest quamproximè. Sed postquam exivit ex vase, acceleratur convergendo donec ad distantiam à foramini-

tas inquiritur. Quoniam data aquæ quantitas æquatur cylindro vel prismati cujus basis est foramen datum aut venæ contractæ sectio, & altitudo spatium quod aqua tempore dato cum illâ velocitate quam in foramine aut venæ Sectione habet, uniformiter progrediendo describeret, dividitur quantitas aquæ data per foraminis aut Sectionis venæ aream, & quotiens erit spatium quod aqua dato tempore uniformiter progrediendo describeret, atque ità nota fit aquæ velocitas cujus dimidium est altitudo ex quâ cadere debuit ut eam velocitatem acquireret. Sit jam a altitudo quam corpus grave tempore minuti unius secundi sine resistentiâ cadendo describit, v velocitas hoc casu acquisita, & ideò $2a$ spatium quod velocitate uniformi v tempore minuti unius secundi describi potest (30. lib. 1.) sit b altitudo aquæ in vase stagnantis, c celeritas quam grave per altitudinem b sine resistentiâ cadendo acquirit, & s spatium quod cum celeritate c uniformiter progrediendo tempore minuti unius secundi describeret, erit $a:b=vv:cc$ (28. lib. 1.) & $2a:s=v:c$ (5. lib. 1.) ideóque $a:b=4aa:ss$; unde habetur $ss=4ab$, & $s=\sqrt{4ab}$. Si igitur aqua è vase per venæ contractæ Sectionem effluat cum velocitate c quam grave cadendo & casu suo describendo altitudinem b aquæ in vase stagnantis acquirit, spatium s quod ex quantitate aquæ tempore minuti unius secundi e vase effluentis, ut suprà dictum est, habetur, debet esse æquale $\sqrt{4ab}$. Hinc si altitudo a, sit pedum Paris. 14, erit $ss=56b$, quæ est ipsa regula quam D. Pitot in monum. Acad. Paris. an. 1730. tradidit. At si altitudo a ponatur esse pedum Paris. $15\frac{1}{12}$ seu $\frac{181}{12}$ (47 1. lib. 1.) erit $ss=\frac{181}{3}b$. Verùm ut aquæ in vase stagnantis altitudo & velocitas per foramen effluentis quo tempore experimentum capitur, eadem ad sensum maneant, ut oportet, usurpari potest vas satis amplum exiguo pertusum foramine, vel si vas paulò angustius adhibeatur, tantum aquæ affundi superne debet quantum per inferius lumen effluit, & cavendum est ne affusa aqua cum aliquo impetu cadendi extimam aquæ in vase stagnantis superficiem attingat. Quibus autem artibus id possit effici fuse exponunt locis suprà citatis Marchio Polenus & Daniel Bernoullius quos lector consulere potest. Attamen his adhibitis cautelis, velocitas aquæ per venæ contractæ Sectionem effluentis paulò minor per experimenta quam per theoriam invenitur, quod variis resistentiis tribuendum esse videtur, & certe Illustr. Marchio Polenus, cum in libro de castellis pag. 64. opinatus fuisset velocitatem illam in experimentis valde esse minorem quam in theoriâ, pluribus deinde experimentis ad calculos revocatis priorem sententiam mutavit in Epistola ad Marinonium.

(q) *Describendo dimidiam altitudinem.* Velocitas quam corpus quodlibet grave, sine resistentiâ cadendo & casu suo describendo dimidiam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirit, est ad velocitatem ejus per totam altitudinem aquæ cadendo acquisitam ut 1 ad $\sqrt{2}$ (28. lib. 1.)

ramine diametro foraminis prope æqualem pervenerit, & velocitatem acquiſiverit majorem in ratione ſubduplicatâ binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & caſu ſuo deſcribendo totam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis, acquirere poteſt quamproximè.

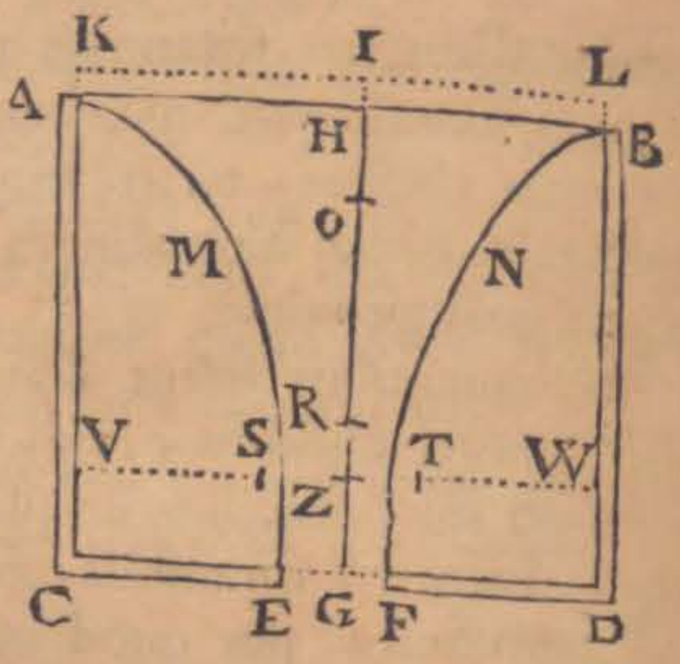
In ſequentibus igitur diameter venæ deſignetur per foramen illud minus quod vocavimus *EF*. Et plano foraminis *EF* parallelum duci intelligatur planum aliud ſuperius VW ad diſtantiam diametro foraminis æqualem circiter & foramine majore *ST* pertuſum; per quod utique vena cadat, quæ adæquatè impleat foramen inferius *EF*, atque ideo cujus diameter ſit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter tranſibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam ſolutio problematis poſtulat quamproximè. Spatium vero, quod planis duobus & venâ cadente clauditur, pro fundo vaſis haberi poteſt. Sed ut ſolutio problematis ſimplicior ſit & magis mathematica, præſtat adhibere planum ſolum inferius pro fundo vaſis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & è vaſe per foramen *EF* in plano inferiore factum egrediebatur, motum ſuum perpetuo



1). Sed, ex ſuprà oſtenſis, velocitas aquæ per vaſis foramen tranſeuntis eſt ad velocitatem per venæ contractæ Sectionem fluentis, id eſt, ad velocitatem quam grave cadendo per totam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis acquirit, in eâdem ratione 1, ad $\sqrt{.2}$; Quarè velocitas quam grave per dimidiam altitudinem aquæ ſtagnantis cadendo acquirit, æqualis eſt velocitati aquæ per foramen effluentis, modò tamen aqua per ſimplex foramen in tenuiſſimâ laminâ factum, ut ſuprà expoſitum eſt, effluat è vaſe. 274.

DE MOTU CORPORUM.

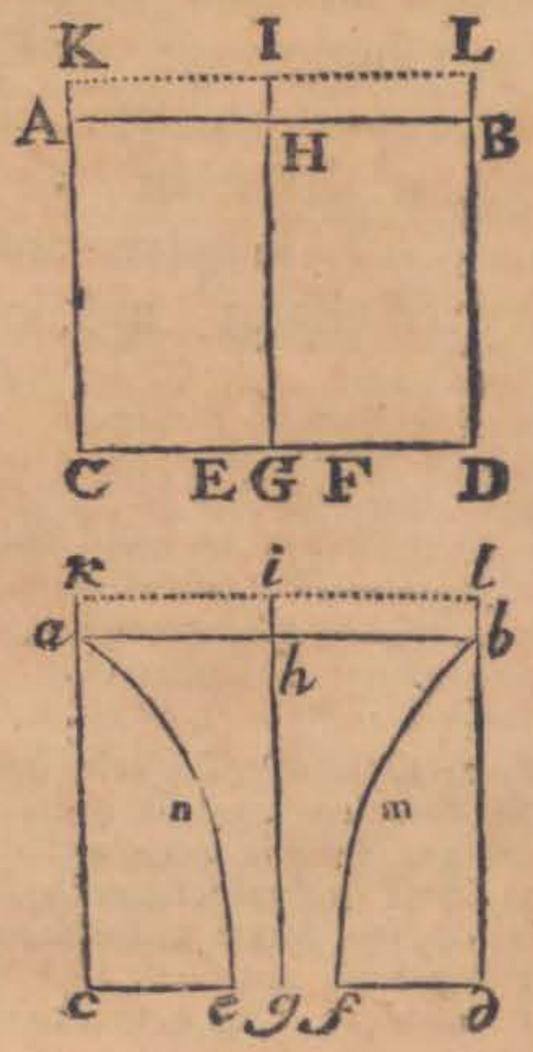
petuo ſervet, & (r) glacies quietem ſuam. In ſequentibus igitur ſit ST diameter foraminis circularis centro Z deſcripti per quod cataracta effluit ex vaſe ubi aqua tota in vaſe fluida eſt. Et ſit EF diameter foraminis per quod cataracta cadendo adæquatè tranſit, ſive aqua exeat ex vaſe per foramen illud ſuperius ST, ſive cadat per medium glaciei in vaſe tanquam per infundibulum. Et ſit diameter foraminis ſuperioris ST ad diametrum inferioris EF ut 25 ad 21 circiter, & diſtantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis ſit diametro foraminis minoris EF. Et velocitas aquæ è vaſe per foramen ST exeuntis ea erit in ipſo foramine deorſum quam corpus cadendo à dimidio altitudinis IZ acquirere poteſt: velocitas autem cataractæ utriuſque cadentis ea erit in foramine EF, quam corpus cadendo ab altitudine totâ IG (f) acquiret.



Caſ.

(r) * *Et glacies quietem ſuam.* Sunto vaſa duo æqualia A B D C, a b d c, in quorum primo glacies omnis in aquam reſoluta ſit, & in altero glacies quietem ſuam conſervet, ut aqua cataractam a b n f e m formando effluat per foramen e f Sectioni venæ contractæ è foramine E F exilientis æquale; & loco vaſis ABDC, in problematis ſolutione ſubſtitui poterit vas alterum a b d c, in quo aquæ per lumen e f effluentis eadem eſt velocitas quam aqua e vaſe A B D C exiliens habet in Sectione venæ contractæ, eademque proindè aquæ quantitas in defluxum impenditur, & propterea idem aquæ pondus fundo incumbit in utroque vaſe. Quoniam enim cataractæ a b n f e m figura & lex ſecundùm quam aqua cataractâ illâ movetur notæ ſunt, problematis ſolutio & facilior & magis mathematica fiet, ſi loco vaſis A B D C mente ſubſtituatur vas a b d c.

(f) * *Acquiret.* Hæc ex ſuprà demonſtratis patent.



Caſ. 2. Si foramen *E F* non ſit in medio fundi vaſis, ſed fundum alibi perforetur: aqua effluet eâdem cum velocitate ac prius, ſi modo eadem ſit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore deſcendit ad eandem profunditatem (t) per lineam obliquam quam per lineam perpendicularem, ſed deſcendendo eandem velocitatem acquirit in utroque caſu, (u) ut *Galilæus* demonſtravit.

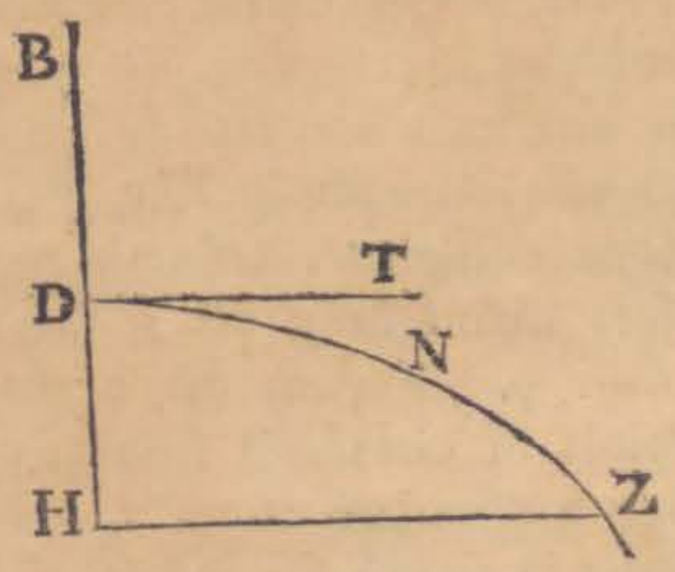
Caſ. 3. Eadem eſt aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vaſis. Nam ſi foramen parvum ſit, (x) ut intervallum inter ſuperficies *A B* & *K L* quoad ſenſum evaneſcat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram parabolicam effornet: ex (y) latere recto hujus parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea ſit quam corpus ab aquæ in vaſe ſtagnantis altitudine *HG* vel *IG* cadendo acquirere potuiſſet. Facto

(t) * *Per lineam obliquam.* In hoc ſecundo caſu pars aquæ per lineas ad foramen obliquas deſcendit.

(u) * *Ut Galilæus demonſtravit.* (81. & 85. lib. 1.).

(x) 275. * *Ut intervallum inter ſuperficies A B & K L.* I H eſt ad I G in ratione quadruplicatâ diametri E F ad diametrum A B (272), aut quod idem eſt, in ratione duplicatâ areæ circuli E F ad aream circuli A B, ideòque ſi ratio E F ad A B parva ſit, minor adhuc erit ratio I H ad I G, & H G, I G erunt ad ſenſum æquales.

(y) * *Ex latere recto hujus Parabolæ.* Aquæ gutta e loco D, ſecundùm directionem quamlibet D T exiliat cum eâ velocitate quam per altitudinem B D cadendo acquirere poteſt, & ſublatâ medii reſiſtentiâ, deſcribat parabolam D N Z, cujus vertex D, tangens D T, & diameter D H ſeu verticalis B D producta (40. lib. 1.); capiatur abſciſſa D H æqualis altitudini B D, ducaturque ordinata H Z, quæ tangenti D T parallela erit; & quo tempore gutta aquæ vi gravitatis cadendo altitudinem B D vel D H deſcribit uniformi illâ velocitate quam caſu per B D acquiſivit, deſcribit longitudinem H Z ipſius B D vel D H duplam, (30. lib. 1.). Latus rectum



Parabolæ D N Z, pertinens ad diametrum D H eſt $\frac{HZ^2}{DH}$ (theor. 1. de parab.) ideòque cum ſit H Z = 2 D H = 2 B D, latus rectum eſt 4 B D. Igitur altitudo B D quam aqua cadendo deſcribere debet ut velocitatem acquirat cum quâ e loco D exilit, eſt quarta pars lateris recti ad diametrum D H parabolæ D N Z pertinentis. 275.

DE MOTU CORPORUM.

cto utique experimento inveni quod, si altitudo aquæ stagnantis supra foramen esset viginti digitorum & altitudo foraminis supra planum horizonti parallelum esset quoque viginti digitorum, vena aquæ prosilientis incideret in planum illud ad distantiam digitorum 37 circiter à perpendiculo quod in planum illud à foramine demittebatur captam. Nam sine resistentiâ, vena (z) incidere debuisset in planum illud ad distantiam digitorum 40, existente venæ parabolicæ latere recto digitorum 80.

Cas. 4. Quinetiam aqua effluens, si sursum feratur, eâdem egreditur cum velocitate. Ascendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vase stagnantis altitudinem *GH* vel *GI*, nisi quâtenus ascensus ejus ab aeris resistentiâ aliquantulum impediatur; (a) ac proinde eâ effluit cum velocitate quam ab altitudine illâ cadendo acquirere potuisset. Aquæ stagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (per prop. XIX. lib. 2.) & pressioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, sive descendat per foramen in fundo vasis, sive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, sive egrediatur in canalem & inde ascendat per foramen parvum in superiore canalis parte factum. Et velocitatem quâ aqua effluit eam esse, quam in hâc propositione assignavimus, non solum ratione colligitur, sed etiam per experimenta notissima jam descripta manifestum est.

Cas. 5. Eadem est aquæ effluentis velocitas sive figura foraminis sit circularis sive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet à figurâ foraminis, sed oritur ab ejus altitudine infra planum *K L*.

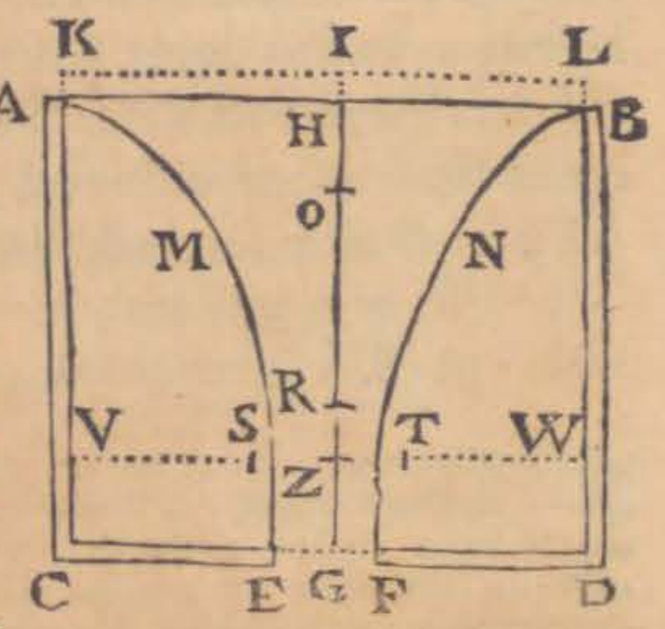
Cas. 6. Si vasis *ABDC* pars inferior in aquam stagnantem im-

(z) * *Incidere debuisset in planum illud.* Sit enim (in fig. notæ superioris) altitudo B D = D H digit. 20, & quia B D est pars quarta lateris recti parabolæ D N Z, quam aqua sine resistentiâ describeret, latus illud rectum est digit. 80, & ordinata H Z æqualis 2 D H est digit. 40 differentia 3 digit. inter distantias 40. & 37. digit. resistentiis tribuenda est.

(a) * *Ac proindè eâ effluit cum velocitate.* (25. 26. lib. 1.)

immergatur & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit *GR*: velocitas quâcum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen *EF* in aquam ſtagnantem, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IR* acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſubſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minimè accelerabit. Patebit etiam & hic caſus per experimenta, (b) menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.

(c) *Corol.* 1. Hinc ſi aquæ altitudo *CA* producatur ad *K*, ut ſit *AK* ad *CK* in duplicatâ ratione areæ foraminis in quâvis fundi parte facti, ad aream circuli *AB*: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *KC* acquirere poteſt.



(d) *Corol.* 2. Et vis, quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen *EF*, & altitudo 2*GI* vel 2*CK*. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc altitudinem acquirit, pondere ſuo ab altitudine *GI* cadendo velocitatem ſuam, quâ exilit, acquirere poteſt.

Co-

(b) * *Menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit*, & quantitates aquæ iiſdem temporibus effluenti.

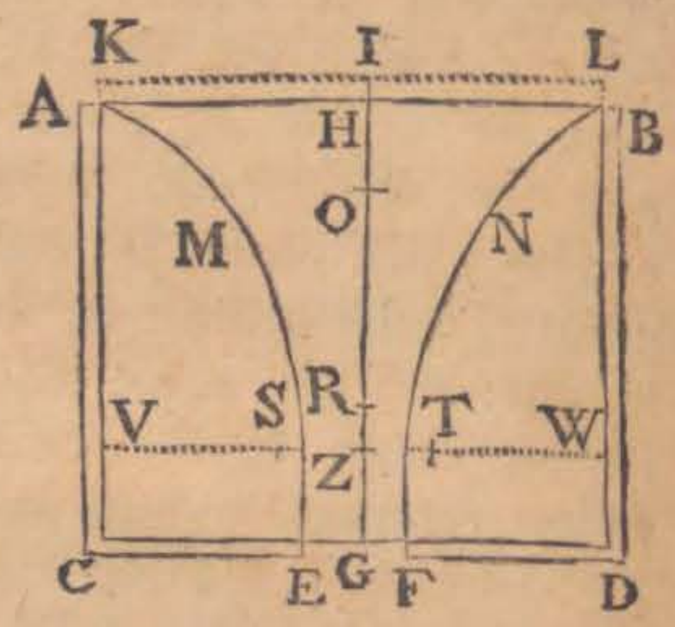
(c) * *Cor.* 1. Patet per not. 275 & caſ. 2um. ac 5um.

(d) * *Cor.* 2. De hujus corollarii veritate diù multumque diſputatum eſt inter Comitem Riccatum, Danielem Bernoullium, Petrum Antonium Michelottum, Jacobum Jurinum, aliſque eruditiſſimos viros. Cum enim in primâ principiorum editione, Newtonus, nondum obſervatâ contractione venæ, ſtatuiſſet, vim quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualem eſſe ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen *EF*, & altitudo 2*GI*, & in ſecundâ editione, habita ratione venæ contractæ, vim illam duplam feciſſet, priorem vis illius menſuram adverſus Comitem Riccatum & Jurinum tuebatur cum Michelotto Daniel Bernoullius quorum diſſertationes videre eſt in exercitationibus Mathematicis quæ an. 1724. Venetiis editæ ſunt. Verum Daniel Bernoullius paragr. 9°. ſect. 1^a hydrodynamicæ poſtremæ ſententiæ Newtoni ità ſuffragatur: «iſta ſententia a me olim & «& ab aliis fuit impugnata, ab aliis rur-

275

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 3. Pondus aquæ totius in vaſe *ABDC* eſt ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut ſumma circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum *EF*. Sit enim *IO* media proportionalis inter *IH* & *IG*; & aqua per foramen *EF* egrediens, quo tempore gutta cadendo ab *I* deſcribere poſſet altitudinem *IG*, æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus *EF* & altitudo eſt 2*IG*, id eſt, cylindro cujus baſis eſt circulus *AB* & altitudo eſt 2*IO*, (e) nam circulus *EF* eſt ad circulum *AB* in ſubduplicatâ ratione altitudinis *IH* ad altitudinem



«ſus confirmata. Nunc autem poſtquam «hanc aquarum motarum theoriam medi«tatus ſum, lis ità dirimenda mihi vide«tur ut cum aquæ ad motum uniformem «pervenerint, quæ quidem Hypotheſis eſt «Newtoni, tunc rectè altitudine 2 GI, vis «illa definiatur, ſed ab initio fluxûs, ubi «velocitas adhuc nulla eſt, vis ſimplici al«titudini GI reſpondeat, moxque creſ«cente velocitate, ſimul vis aquam ad ef«fluxum animans creſcat, & tandem ad «eam magnitudinem exſurgat quam New«tonus aſſignavit..... Rectè etiam Ill. «Riccatus cum quo mihi de hoc argumen«to res erat, interrogatus, unde vis illa «duplæ aquarum altitudini conveniens ori«ri poſſit, cum obturato orificio, gutta «eidem imminens vi ſimplicis altitudinis «urgeri manifeſtè appareat, reſpondit diſ«tinguendum eſſe ſtatum quietis à ſtatu mo«tûs.» Jam verò hujus cor. 2. demonſtrationem dedimus (274.); aliam, quam Newtonus indicat, expoſuerunt comes Riccatus in citatis exercitationibus & Euſtachius Manfredius in adnotationibus ad cap. 1. tractatûs Guilelmini de naturâ fluminum (quod præclarum opus poſt fata ſummi viri, Clariſſ. Fratres Gabriel & Heraclitus Manfredi an. 1739. Bononiæ edi curarunt). Demonſtratio ſic poteſt exponi. Quo tempore cylindrus aquæ, cujus baſis æqualis eſt foramini EF, & altitudo GI vi ponderis ſui cadendo deſcriberet altitudinem IG, & velocitatem aquæ exilientis acquireret; eodem tempore è foramine EF efflueret aquæ quantitas æqualis alteri cylindro aqueo, cujus baſis eſt foramen EF, & longitudo 2 GI (30. lib. 1.), id eſt, cylindro prioris duplo; & ideò ob velocitatem quam cylindrus per altitudinem IG, cadendo acquirit, æqualem velocitati aquæ exilientis, quantitas motûs in illo cylindro vi ponderis ejuſdem cylindri genita, eſt ad quantitatem motûs eodem tempore in aquâ exiliente productam ut 1 ad 2. Sed vires uniformes quibus cylindri cadentis & aquæ exilientis motus generantur, ſunt ut motûs quantitates eodem tempore à viribus illis genitæ (15. lib. 1). Quare pondus cylindri aquæ, cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo GI, eſt ad vim quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt ut 1 ad 2, & proinde hæc vis æqualis eſt ponderi cylindricæ columnæ aquæ cujus baſis eſt foramen EF & altitudo 2 GI. Q. E. D.

(e) * *Nam circulus EF eſt ad circulum AB, in ſubduplicatâ ratione altitudinis IH, ad altitudinem* IG (per cor. 1.) *id eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis IO, ad altitudinem* IG; ideoque factum ex circulo AB in altitudinem 2 IO æquale eſt facto

titudinem IG, hoc eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG: & quo tempore gutta cadendo ab I deſcribere poteſt altitudinem IH, aqua egrediens (f) æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo eſt $2IH$: & quo tempore gutta cadendo ab I per H ad G deſcribit altitudinum differentiam HG, aqua egrediens, (g) id eſt, aqua tota in ſolido $ABNFEM$ æqualis erit differentiæ cylindrorum, id eſt, cylindro cujus baſis eſt AB & altitudo $2HO$. Et propterea aqua tota in vaſe $ABDC$ eſt ad aquam totam cadentem in ſolido $ABNFEM$ ut (h) HG ad $2HO$, id eſt, ut $HO+OG$ ad $2HO$, ſeu $IH+IO$ ad $2IH$. Sed pondus aquæ totius in ſolido $ABNFEM$ in aquæ defluxum (i) impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vaſe eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut $IH+IO$ ad $2IH$, (k) atque ideo ut ſumma circulorum EF & AB ad duplum circulum EF.

(l) *Corol.* 4. Et hinc pondus aquæ totius in vaſe $ABDC$ eſt

facto ex circulo EF in altitudinem 2IG, aut, quod idem eſt, cylindrus cujus baſis eſt circulus EF & altitudo 2IG, æquatur cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo 2IO.

(f) * *Æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo 2IH.* Eadem enim aquæ quantitas eodem tempore tranſit per circulos AB, & EF (271) & quantitas aquæ per circulum AB, tranſeuntis eo tempore quo gutta cadendo deſcribere poteſt altitudinem IH, æqualis erit cylindro aqueo cujus baſis eſt circulus AB & altitudo 2IH. (30. lib. 1.).

(g) * *Id eſt aqua tota.* Nam ex iis quæ ante caſ. 1. dicta ſunt, manifeſtum eſt aquam totam prædicto ſolido contentam, per foramen EF eodem tempore effluere, quo aquæ gutta vi gravitatis ſuæ è loco I per H ad G cadendo deſcribit altitudinem HG.

(h) * *Ut HG ad 2HO &c.* Volumen aquæ in vaſe ABDC contentæ æquatur capacitati vaſis ſeu cylindro cujus baſis eſt circulus AB, & altitudo HG; & propterea aqua tota in vaſe ABDC, eſt ad aquam totam cadentem in ſolido ABNFEM, ut HG ad 2HO (ex dem.), id eſt, ut HO+OG ad 2HO, & quia (per hyp.) IH:IO=IO:IG=IO−IH:IG−IO =HO:OG, erit HO+OG:2HO= IH+IO:2IH. 275.

(i) *Impenditur*, ut probatum eſt initio caſ. 1.

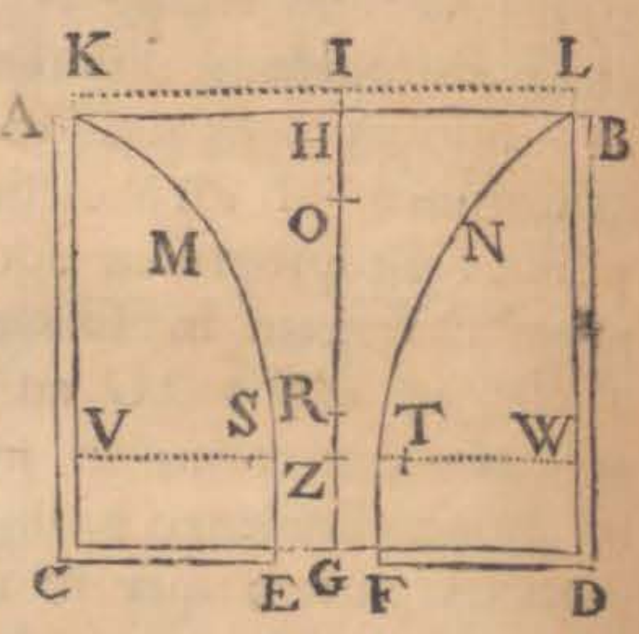
(k) * *Atquè ideò ut ſumma circulorum.* Quoniam enim (per hyp.) eſt IH ad IO ut IO ad IG, erit etiam IH+IO ad 2IH ut IG+IO ad 2IO, ſed (ex modò dem.) circulus AB eſt ad circulum EF ut IG ad IO, ideóque ſumma circulorum AB & EF ad duplum circulum EF ut IG+IO ad 2IO ſeu ut IH+IO ad 2IH. Quarè patet propoſitum.

(l) * *Cor.* 4. Pondus aquæ totius in vaſe ABDC ſit P ponderis illius pars quæ in defluxum impenditur ſit p & hinc $P-p$, pars ponderis totius quæ fundo vaſis ſeu plano æquali differentiæ circulorum CD & EF ſuſtinetur & in defluxum non impenditur. Et (per cor. 3.) erit $P:p = AB+EF:2EF$, ac proinde $P:P-p = AB+EF:AB-EF$.

DE MOTU CORPORUM.

est ad ponderis partem alteram quam fundum vasis sustinet, ut summa circulorum AB & EF ad differentiam eorundem circulorum.

(m) *Coro.* 5. Et ponderis pars, quam fundum vasis sustinet, est ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum AB & EF ad duplum circulum minorem EF, sive ut area fundi ad duplum foramen.



(n) *Coro.* 6. Ponderis autem pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad summa circulorum AB & EF, sive ut circulus AB ad excessum dupli circuli AB supra fundum. Nam ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius in vase, ut differentia circulorum AB & EF ad summam eorundem circulorum, per cor. 4.: & pondus aquæ totius in vase est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad differentiam circulorum AB & EF. Itaque ex æquo perturbatè, ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad summam circulorum AB & EF (o) vel excessum dupli circuli AB supra fundum.

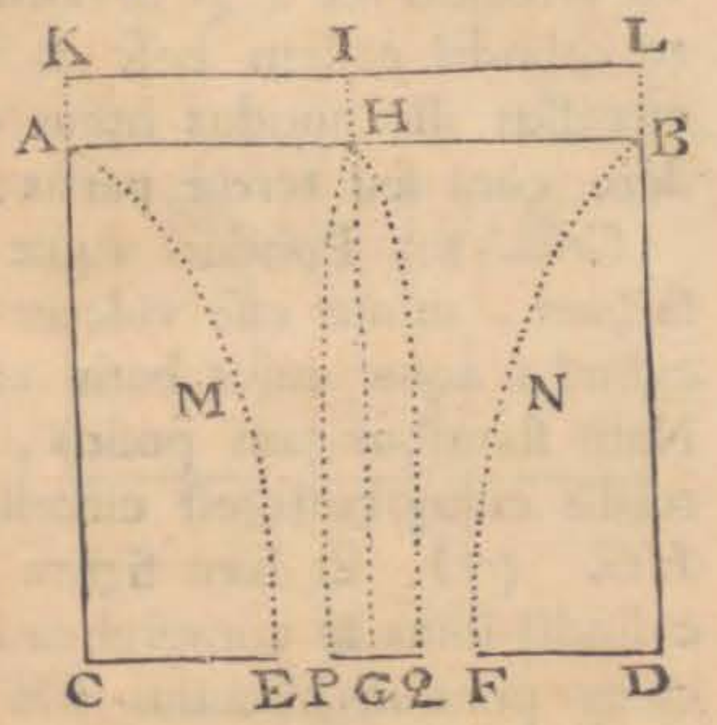
Corol. 7. Si in medio foraminis EF locetur circellus PQ cen-

(m) * *Cor.* 5. Cum sit $P:p = AB + EF:2EF$, erit quoque $P-p:p = AB-EF:2EF$. Est autem area fundi æqualis differentiæ circulorum AB & EF.

(n) * *Cor.* 6. *Ponderis autem pars quâ solâ fundum urgetur*, sive pondus aquæ quæ in spatio solido CEMA DFNB continetur, *est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit* & quæ æquatur solido aqueo cujus basis est differentia circulorum AB & EF, & altitudo GH, *ut circulus &c.*

(o) * *Vel excessum dupli circuli AB suprà fundum.* Cum fundum æquale sit differentiæ circulorum AB & EF, excessus dupli circuli AB, suprà fundum est $2AB-AB+EF$, seu $AB+EF$.

centro *G* descriptus & horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille sustinet, majus est pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est *GH*. Sit enim *ABNFEM* cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens *GH* ut supra, & congelari intelligatur aqua omnis in vase, (P) tam in circuitu cataractæ quàm supra circellum, cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ descensum non requiritur. Et sit *PHQ* columna aquæ supra circellum congelata, verticem habens *H* & altitudinem *GH*. Et finge cataractam hancce pondere suo toto cadere & non incumbere in *PHQ*, nec eandem premere, sed liberè & sine frictione præterlabi, nisi forte in ipso glaciei vertice quo cataracta ipso cadendi initio incipiat esse cava. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata *AMEC*, *BNFD*



(p) * *Tam in circuitu cataractæ.* Quemadmodum enim suprà ante cas. 1um., aqua omnis cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ descensum illiusque effluxum per foramen EF inutilis erat, in circuitu cataractæ congelata supponebatur, idque rectè factum experimentis posteà ostensum est, ità hic loci congelata supponi potest aqua omnis in vase tam in circuitu cataractæ quàm suprà circellum, cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ effluxum per spatium annulare EP, QF, non requiritur; Et quemadmodum glacies in circuitu cataractæ constituta, CEMA, DFNB pertingebat ad superficiem AB seu terminum glaciei continuò liquescentis KABL, ità aqua suprà circellum congelata producitur ad punctum H, in eâdem superficie AB positum; & uti glacies *in circuitu cataractæ convexa est versùs cataractam cadentem* (272), *sic etiam columna aquæ suprà circellum congelatæ PHQ convexa erit versus cataractam cadentem AHPEM, BHQFN;* 275.
* Considerari enim potest axis HG ut paries vasis cujus sectio sit HGCA, & foramen in fundo factum sit EP, qualiscumque autem sit Lex quâ effluit aqua ex vase, eodem modo quo factum est à Newtono in hujus demonstrationis casu primo, concipi potest cataracta trans glaciem effluens, adhibitis cautionibus illic notatis, ut hæc Hypothesis Mathematicâ congruat cum verâ effluxus aquæ Lege, quâtenus ad copiam aquæ effluentis dato tempore, quo posito evidens est lineam HP convexam sumi debere. Quâpropter si ex punctis P & Q ad punctum H ducantur lineæ rectæ, quæ cum diametro PQ triangulum constituant, conus ex revolutione hujus trianguli circà axem HG genitus, totus continebitur in solido quod per rotationem figuræ convexæ PHQ circà eundem axem HG generatur. Hoc igitur solidum, seu columna PHQ suprà circellum congelata, magnitudine superat conum illum...

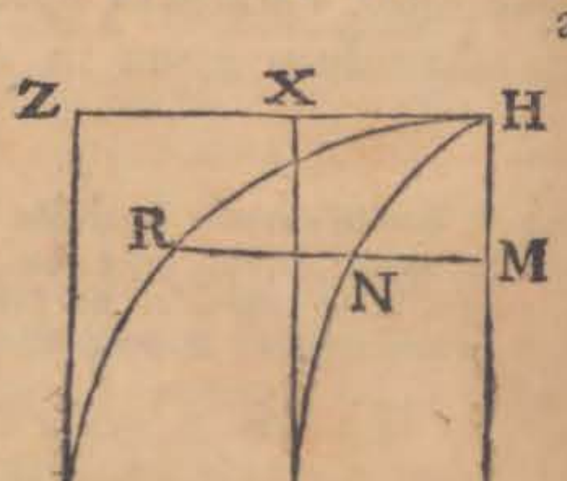
DE MOTU CORPORUM.

BNFD convexa eſt in ſuperficie internâ *AME*, *BNF* verſus cataractam cadentem, ſic etiam hæc columna *PHQ* convexa erit verſus cataractam, & propterea major cono cujus baſis eſt circellus ille *PQ* & altitudo *GH*, id eſt, major tertiâ parte cylindri eâdem baſe & altitudine deſcripti. Suſtinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id eſt, pondus quod pondere coni ſeu tertiæ partis cylindri illius majus eſt.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* ſuſtinet, minus eſſe videtur pondere duarum tertiarum partium cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt *HG*. Nam ſtantibus jam poſitis, deſcribi intelligatur dimidium ſ. hæroidis cujus baſis eſt circellus ille & ſemiaxis ſive altitudo eſt *HG*. (q) Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ *PHQ* cujus pondus circellus ille ſuſtinet. Nam ut motus aquæ ſit maximè directus, columnæ illius ſuperficies externa concurret cum baſi *PQ* (r) in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua

illum cujus baſis eſt circellus P Q & altitudo H G. Quarè (per Prop. X. lib 12. elem.) columna congelata P H Q, major eſt tertiâ parte cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus P Q & altitudo G H. Sed ſicut fundum E C, F D ſuſtinet pondus aquæ in ſpatio ſolido C E M A, D F N B contentæ, ità circellus P Q ſuſtinet pondus columnæ aquæ P H Q id eſt, pondus quod majus eſt pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus P Q & altitudo G H.

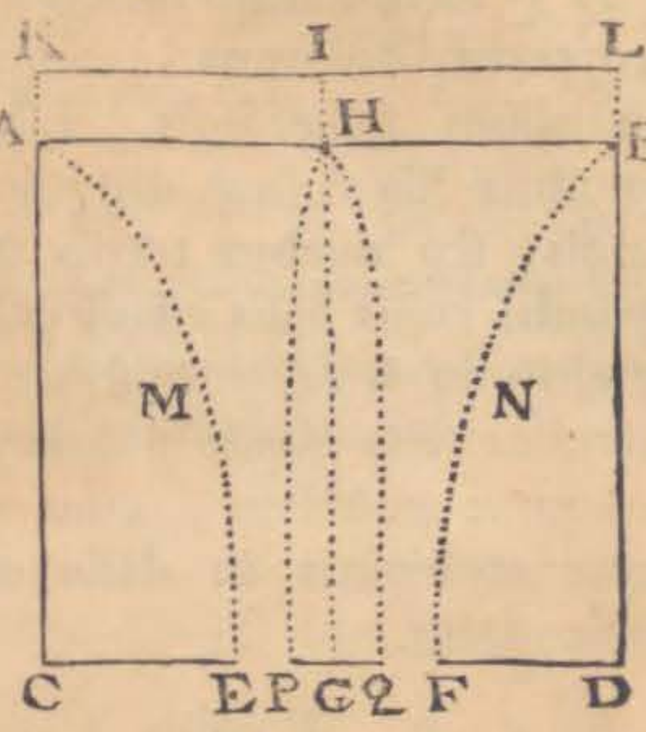
(q) * *Et hæc figura æqualis erit &c.* Centro G, & ſemiaxibus conjugatis G H & G P, deſcribatur ellipſeos quadrans H N P, & centro eodem G ac radio G H circuli quadrans H R S, compleanturque rectangula H G P X & H G S Z. Ducatur in circulo ordinata quævis R M, ellipſi occurrens in N, erit R M ad N M, in datâ ratione S G ad P G (247. lib. 1.) & propterea ſi figuræ illæ circà axem H G revolvantur, circulus quem radius M R in hâc revolutione deſcribet, erit ad circulum radio M N deſcriptum in datâ ratione SG^2 ad PG^2, ſeu in datâ ratione cylindri quem rectangulum H G S Z ro-

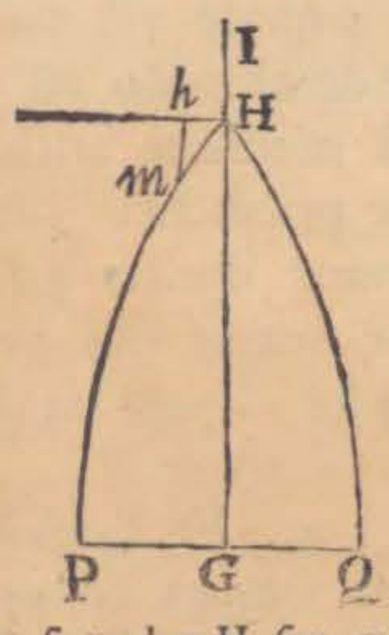


tando deſcribit ad cylindrum ex rotatione rectanguli H G P X genitum; unde (per cor. Lem. IV. lib. 1.) hæmiſphærium ex revolutione quadrantis circuli H R S G genitum, eſt ad hemiſphæroidem ex rotatione quadrantis ellipſeos H N P G in eâdem ratione. Cum igitur hemiſphærium ſit ad cylindrum circumſcriptum ut 2 ad 3 (170. lib. 2.) erit etiam hemiſphæroïs ad cylindrum circumſcriptum qui per rotationem rectanguli H G P X generatur, in eâdem ratione 2 ad 3. Q. E. D.

(r) * *In angulo nonnihil acuto.* Nam quemadmodum angulus quem cataractæ

aqua cadendo perpetuò acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cum angulus ille ſit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes (f) jacebit intra dimidium ſphæroidis. (t) Eadem verò ſurſum acuta erit ſeu cuſpidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem ſphæroidis ſit infinitè velocior quàm ejus motus horizontem verſus. (u) Et quò minor eſt circellus PQ, eò acutior erit vertex columnæ; & circello in infinitum diminuto, angulus





ABNFEM ſuperficies externa AME, BNF cum baſi CE, DF conſtituit, eſt ſemper acutus, quia aqua cadendo ſemper acceleratur (272.) Sic etiam, ob eandem rationem, columnæ PHQ ſuperficies externa concurret cum baſi PQ in angulo acuto HPQ, HQP. Quia verò circulo PQ evaneſcente, ſeu coincidente HP cum axe HG, angulus ille HPG rectus evadit; ſi circulus eſt valdè parvus; angulus HPG erit fere rectus ſeu nonnihil acutus.

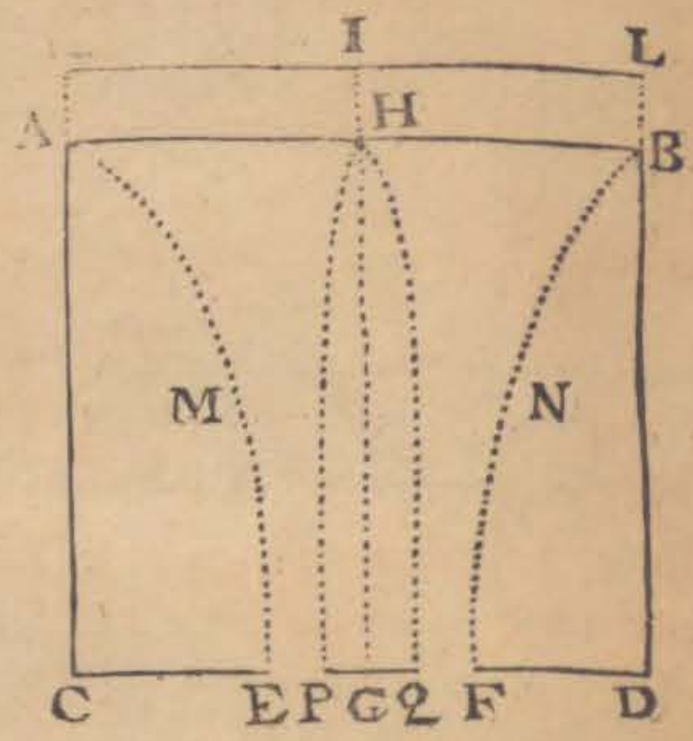
(f) *Jacebit intrà dimidium ſphæroidis.* Quia (ex naturâ ellipſeos) in quâ tangentes per axium vertices ductæ angulos rectos cum axibus conſtituunt, ſphæroidis ſuperficies cum circello PQ, concurrit in angulo recto.

(t) * *Eadem verò ſurſum acuta erit.* Cum enim partes aquæ duplici motu cieantur in H, alio verticali qui lapſu per altitudinem IH acquiritur, alio horizontali quo partes aquæ ad cataractam formandam ad ſe mutuò accedunt, uti ſuprà antè caſ. 1um. dictum eſt, atquè ideò guttula aquæ in H, lineam curvam HP motu compoſito deſcribat, neceſſum eſt ut angulus PHG ſit acutus, & proindè columna PHQ cuſpidata in H. Deſcribat enim guttula aquæ lineam quam minimam Hh, motu horizontali, & eodem temporis momento lineam hm, motu verticali, atquè arcum Hm motu compoſito; & velocitas horizontalis erit ad velocitatem verticalem ut Hh ad hm, id eſt, ut ſinus hmH ſeu mHG ad ſinum anguli hHm. Sed evaneſcente angulo hHm, ſeu angulo mHG recto exiſtente, ſinus anguli mHG, infinitè major eſt ſinu anguli hHm. Quare ſi angulus mHG rectus ſit, horizontalis motus aquæ erit infinitè major quam motus ejus verticalis. Quod abſurdum eſt; angulus igitur mHG acutus eſt. 276.

(u) * *Et quò minor eſt circellus PQ.* Nam ſi circellus PQ ità augeatur, ut adæquet foramen EF illudque occludat, columna PHQ evadet cylindrica, & rectâ mh coincidente cum Hh angulus mHG rectus erit; & contrà circello in infinitum diminuto, coincidet HmP, cum axe HG, anguluſque mHG evaneſcet. Columna igitur tam ad ſuperiores partes versùs H, quam ad inferiores partes versùs P & Q, jacebit intrà dimidium ſphæroidis.

DE MOTU CORPORUM.

P H Q in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium ſphæroidis. Eſt igitur columna illa minor dimidio ſphæroidis, ſeu duabus tertiis partibus cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo *G H*. Suſtinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cum pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.



Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *P Q* ſuſtinet, æquale eſt ponderi cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2} G H$ quamproximè. (x) Nam pondus hocce eſt medium arithmeticum inter pondera coni & hemiſphæroidis prædictæ. At ſi circellus ille non ſit valde parvus, ſed augeatur donec æquet foramen *E F*; hic ſuſtinebit pondus aquæ totius ſibi perpendiculariter imminentis, id eſt, pondus cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt *G H*.

Corol. 10. Et (quantum ſentio) pondus quod circellus ſuſtinet, eſt ſemper ad pondus cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2} G H$, (y) ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2} PQq$, ſive ut circulus *E F* ad exceſſum circuli hujus ſupra ſemiſſem circelli *P Q* quamproximè.

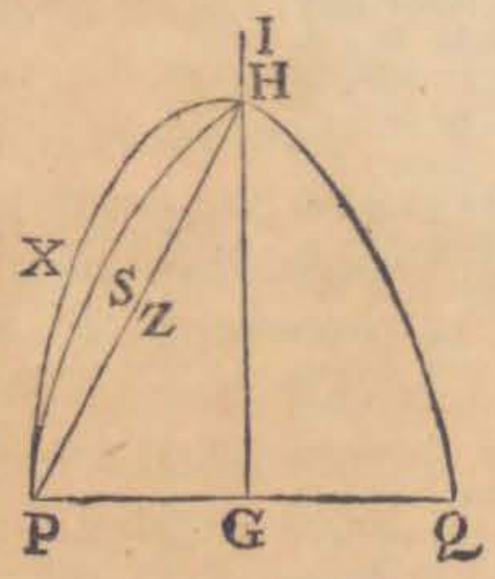
(x) * *Nam pondus hocce eſt medium arithmeticum.* Cum enim columna illa aquæ, quam circellus valdè parvus ſuſtinet, major ſit tertiâ parte cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo H G (cor. 7.), & minor duabus tertiis partibus ejuſdem cylindri (cor. 8.), erit ferè æqualis medio arithmetico inter cylindros $\frac{1}{3}$ P Q × H G; & $\frac{2}{3}$ P Q × H G. Eſt autem medium illud arithmeticum æquale dimidiæ ſummæ illorum cylindrorum, id eſt, cylindro $\frac{2}{2}$ P Q × H G, cujus baſis eſt circellus P Q, & altitudo $\frac{1}{2}$ HG.

(y) * *Ut EFq ad EFq* $- \frac{1}{2} PQq$. Hæc enim ſuppoſitio ſuperioribus determinationibus ſatisfacit. Nam ſit p pondus aquæ quam circellus ſuſtinet; P pondus cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo G H; & ſi (juxtà cor. hoc 10.) ponatur $p : \frac{1}{2} P = EF^2 : EF^2 -$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}PQ^2$, erit $p = \frac{\frac{1}{2}P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2}$. Sed quantitas $\frac{\frac{1}{2}P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2} = \frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2}$ semper major est quantitate $\frac{1}{3}P$, quod cor. 7. satisfacit. Et contrà quantitas illa $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2}$, minor est quam $\frac{2}{3}P$, ubi circellus est, satis parvus seu quamdiu $\overline{2PQ}^2 < EF^2$ (cum enim fit $\overline{PQ}^2 = \frac{EF^2}{2}$, tunc illa quantitas p est $\frac{2P \times \overline{EF}^2}{3EF^2} = \frac{2}{3}P$, (quæ est determinatio cor. 8.). Tandem ubi circellus infinitè minor est quam foramen EF, fit $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2} = \frac{1}{2}P$, & ubi circellus adæquat foramen EF, est $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2} = P$, quæ duo cum cor. 9. determinationibus congruunt.

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.



277. Si circellus PQ sit valdè parvus, & vertice P axe PG describatur per punctum H, parabolæ arcus PSH, & figura PSHG circà HG convolvatur, solidum indè genitum columnam aquæ quam circellus sustinet exhibebit quam proximè. Nam angulus SPG quem parabola cum axe PG, continet, rectus est, & ideò quam proximè æqualis angulo quem prædictæ columnæ superficies cum circello valdè parvo PQ efficit (cor. 8.); & evanescente PG, angulus SHG arcu parabolæ SH & rectâ HG comprehensus fit infinitè parvus, ut oportet (per idem cor. 8.). Præterea si jungatur recta PZH, & centro G, ac semiaxibus conjugatis GH, & GP describatur ellipseos quadrans PXH, & figuræ PZHG, PSHG, PXHG circà axem HG convolvantur, solidum quod per revolutionem figuræ parabolicæ PSHG generatur, majus erit cono ex rotatione trianguli PZHG genito, & minus hemisphæroide quam figura PXHG rotata describit, quod cor. 7°. & 8°. satisfacit. Tandem, calculo inito, facilè patet solidum quod per convolutionem figuræ PSHG, gignitur, esse ad cylindrum cujus basis est circellus PQ, & altitudo GH, ut 8 ad 15, quæ ratio non multum aberrat à ratione 1 ad 2 quam Newtonus in cor. 9. invenit. 277.

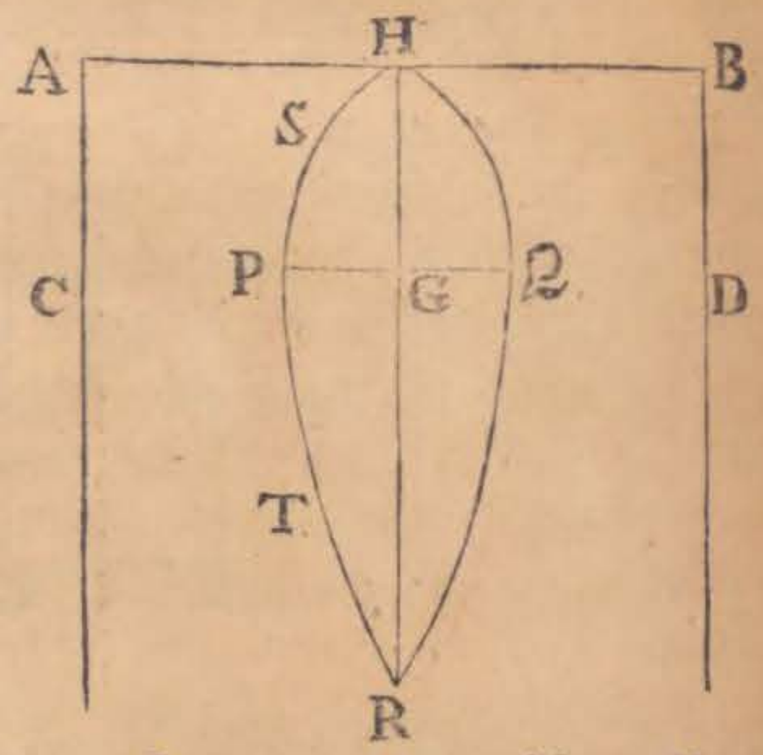
DE MOTU CORPORUM.

LEMMA IV.

Cylindri, qui ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia ex auctâ vel diminutâ ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem eſt cum reſiſtentia circuli eâdem diametro deſcripti & eâdem velocitate ſecundùm lineam rectam plano ipſius perpendicularem progredientis.

(z) Nam latera cylindri motui ejus minimè opponuntur: & cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminutâ, in circulum vertitur. PRO-

278. Si circulus PQ valdè parvus maneat reſpectu foraminis EF, foramen verò EF quantumvis augeatur finitum ſit, & vas ABDC infinitum evadat, æquales erunt altitudines IG & HG, & velocitas aquæ in loco PQ, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem HG, acquirere poteſt (per cor. 1. Prop. hujus 36.). Iiſdem poſitis, ſi vas ABDC infrà circulum PQ continuetur, & aqua poſtquam pervenit ad locum PQ, ſolâ vi inſitâ pergat uniformiter moveri cum illâ velocitate quam habet in loco PQ, ſitque PQR columna aquæ congelatæ, cujus fluiditas ad promptiſſimum alterius aquæ motum non requiritur, ut ſuprà de columnâ PHQ dictum eſt; erit GR = 2GH & PTR ferè arcus parabolæ cujus vertex P axis PG, & ordinata GR. Nam * fingatur conſiderari lapſum ejus aquæ quæ per conoeidem HPQ moveretur ſeorſim à lapſu reliquæ aquæ Vaſis, liquet quod eo tempore quo aquæ guttâ motu verticali uniformiter accelerato cadit ex H in G effluet bis ea aquæ copia quæ in conoeide HPQ continetur ea ergo aquæ copia erit æqualis cylindro cujus altitudo erit HG, & Baſis circulus PQ, particula verò G celeritate ex lapſu per H acquiſita deſcribet 2HG ſive GR, tota ergo aqua quæ per Conoidem HPQ movebitur occupabit figuram cujus Baſis eſt circulus PQ, cujus altitudo eſt 2HG, & ſoliditas dimidium cylindri cujus PQ foret Baſis & altitudo 2HG, ſed per præcedentem Paraboloeides eſt ferè dimidium cylindri circumſcripti ergo aqua per Conoidem effluit eum Paraboloeidem occuparet eſt ergo columna PQR columna aquæ congelatæ quæ ad promptiſſimum aquæ reliquæ ci-



cumpoſitæ motum non requiritur. Hæc ad demonſtrationem Scholii proximi hic adnectenda viſa ſunt, utrum ſatis rectè Newtonianæ demonſtrationis indolem ſimus aſſecati videat B. Lector,

Si quid noviſti rectiùs iſtis
Candidus imperti; ſi non, his utere mecum.

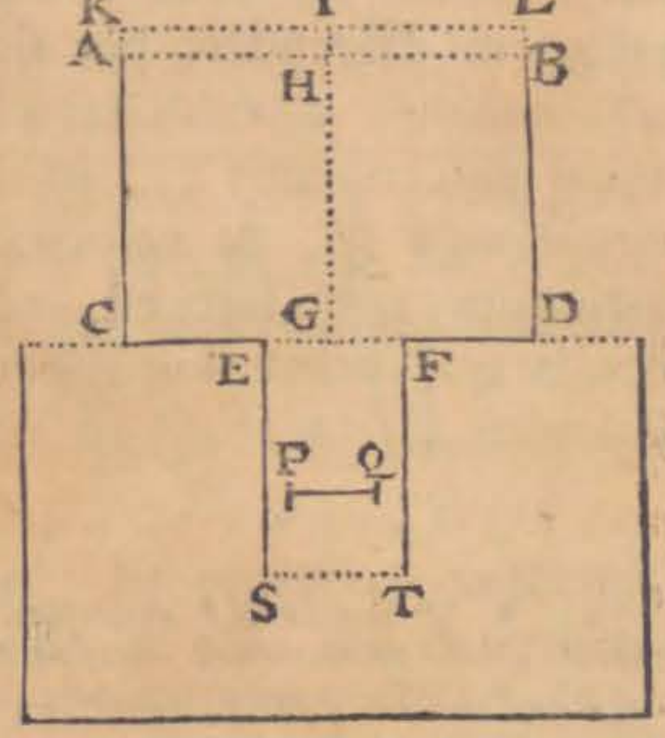
(z) * *Nam latera cylindri &c.* Hic enim latera cylindri eſſe politiſſima, & medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam ſupponitur.

279. Lemma. *Vires uniformes ſunt directè ut quantitates motus quas generant, & inversè ut tempora quibus illas generant,* (13. & 15. lib. 1.); & quia motûs quantitates ſunt ut maſſæ & velocitates conjunctim, ſivè ut volumina & denſitates & velocitates, *vires uniformes ſunt* etiam *in ratione compoſitâ ex rationibus directis voluminum, denſitatum & velocitatum & ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant*; cumque tempora illa ſint ut

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compresso infinito & non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur à magnitudine sectionis transversæ, est ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè.



Nam si vas *A B D C* fundo suo *CD* superficiem aquæ stagnantis tangat, & aqua ex hoc vase per canalem cylindricum *EFTS* horizonti perpendicularem in aquam stagnantem effluat, locetur autem circellus *PQ* horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur *CA* ad *K*, ut sit *AK* ad *CK* in duplicatâ ratione quam habet excessus orificii canalis *EF* supra circellum *PQ* ad circellum *AB*: manifestum est (per cas. 5. cas. 6. & cor. 1. prop. XXXVI) quod velocitas aquæ transeuntis per spatium annulare inter circellum & latera vasis, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *KC* vel *IG* acquirere potest.

ut spatia descripta directè & velocitates inverse (31. lib. 1.); *vires uniformes sunt quoque in ratione compositâ ex rationibus directis voluminum, densitatum & quadratorum velocitatis & ratione inversâ spatiorum descriptorum*, & quia velocitates sunt ut spatia descripta directè & tempora inverse, *vires uniformes sunt etiam in ratione compositâ ex ratione voluminum, densitatum & spatiorum describtorum, & ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.*

280. Cor. Quoniam cylindrorum volumina sunt ut eorum altitudines & diametrorum quadrata conjunctim; *vires uniformes quibus urgentur cylindri, sunt in ratione quæ componitur ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum & velocitatum à viribus illis genitarum, & ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant*; sunt etiam in ratione quæ componitur ex *rationibus directis altitudinum, quadratorum diametrorum, densitatum & quadratorum velocitatum, & ratione inversâ spatiorum descriptorum;* Sunt quoque vires illæ in ratione compositâ *ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum & spatiorum descriptorum, & ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.* Ubi prædictarum quantitatum, ex quibus virium ratio composita est, aliquæ datæ sunt, iis deletis habetur virium ratio. 280.

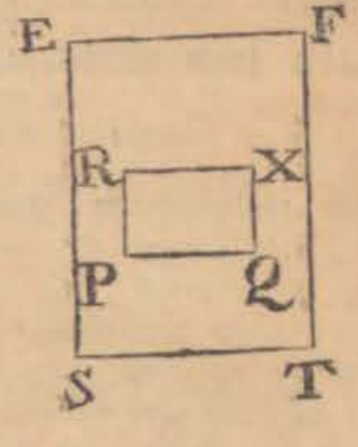
DE MOTU CORPORUM.

Et (per corol. x. prop. xxxvi.) si vasis latitudo sit infinita, (a) ut lineola HI evanescat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq-\frac{1}{2}PQq$ quam proximè. Nam vis aquæ, (b) uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ in quâcunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia EF, ST, & ascendat circellus in fluido undique compresso & ascensu suo cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis (c) ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ, & velocitas circelli ascendentis ad summam velocitatum, (d) hoc est, ad velocitatem relativam aquæ descendentis quâ præterfluit circellum ascendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, sive ut $EFq-PQq$ ad EFq.

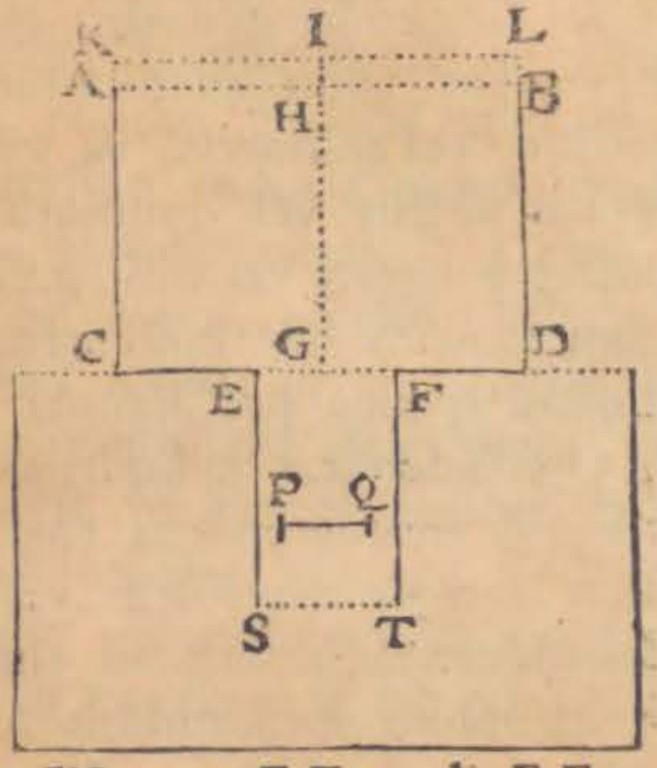
(a) * *Ut lineola HI evanescat.* Per cor. 1. prop. 37. aut (per not. 275.).

(b) * *Uniformi motu defluentis.* (Per cas. 6. prop. 36.).



(c) * *Ut differentia circulorum.* Velocitates uniformes sunt ut spatia eodem tempore descripta; sed intereadum circulus PQ spatium solidum, seu cylindrum PQXR describit, descendit aquæ quantitas huic cylindro æqualis, & propterea altitudo verticalis per quam aqua descendit, æquatur longitudini quæ habetur dividendo valorem cylindri PQXR per valorem sectionis annularis inter circulum PQ & vasis latera ES, FT comprehensam, ideóque si $\overline{EF}^2$ & $\overline{PQ}^2$, circulos, & RP, lineam rectam significent, altitudo illa per quam aqua descendit est $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$. Quarè velocitas circuli ascendentis est ad velocitatem aquæ descendentis ut altitudo RP, ad altitudinem $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$, id est, ut $\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2$ ad $\overline{PQ}^2$, sivè ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ.

(d) * *Hoc est ad velocitatem relativam.* Cum circulus ascendat & aqua descendat, velocitas relativa æqualis est summæ velocitatum oppositarum circuli & aquæ. Velocitas absoluta circuli ascendentis dicatur V, velocitas absoluta aquæ descendentis v, & quia circuli sunt ut diametrorum quadrata, si EF, & PQ, pro circulorum diametris sumantur; erit (ex dem.) $V:v = EF^2 - PQ^2 : \overline{PQ}^2$, & ideo $V:V+v = EF^2 - PQ^2 : EF^2$.



EFq. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, quâ ſupra oſtenſum eſt aquam tranſire per idem ſpatium annulare dum circellus interea immotus manet, id eſt, velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirere poteſt: & vis aquæ in circellum aſcendentem eadem erit ac prius (per legum corol. v.) id eſt, reſiſtentia circelli aſcendentis erit ad pondus cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq-\frac{1}{2}PQq$ quamproximè. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirit, ut $EFq-PQq$ ad EFq.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq-PQq$ & EFq, interque EFq & $EFq-\frac{1}{2}PQq$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirere poteſt, reſiſtentia verò ejus æqualis evadet ponderi cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo dimidium eſt altitudinis *IG*, à quâ cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli aſcendentis acquirat; (e) & hâc velocitate cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis ſuæ deſcribet. Reſiſtentia autem cylindri, hâc velocitate ſecundùm longitudinem ſuam progredientis, eadem eſt cum reſiſtentia circelli (per lemma IV.) ideoque æqualis eſt vi cuâ motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, (f) generari poteſt quamproximè. Si

(e) * *Et hâc velocitate*, cylindrus tempore cadendi duplum longitudinis IG, ſeu quadruplum longitudinis ſuæ $\frac{1}{2}$IG, deſcribet (30. lib. 1.).

(f) * *Generari poteſt quamproximè.* Quo enim tempore cylindrus cum prædictâ velocitate uniformiter progrediendo, deſcribit ſpatium 2IG, proprio pondere cadendo deſcriberet altitudinem IG, & velocitatem illam acquireret (30. lib. 1.). Cum igitur reſiſtentia æqualis ſit ponderi cylindri, patet propoſitum. 280.

DE MOTU CORPORUM.

Si longitudo cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus, quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, (g) augebitur vel minuetur in eâdem ratione, ideoque vis illa, quâ motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per lemma IV.

(h) Si denſitas cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eâdem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque cylindri cujuſcunque erit ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri quamproximè. *Q. E. D.*

Fluidum autem comprimi debet ut ſit continuum, (i) continuum verò eſſe debet & non elaſticum, ut preſſio omnis, quæ ab ejus compreſſione oritur, propagetur in inſtanti, & in omnes moti corporis partes æqualiter agendo reſiſtentiam non mutet. Preſſio utique, quæ à motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & reſiſtentiam creat.

(g) * *Augebitur vel minuetur.* Quantitas motûs in cylindro cujus baſis, denſitas & velocitas datæ ſunt, augetur vel minuitur in ratione longitudinis cylindri ſeu voluminis, & tempus quo cylindrus datâ illâ velocitate uniformiter progrediendo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augetur vel minuitur in eâdem longitudinis auctæ vel diminutæ ratione (5. lib. 1.) ideoque (179) vis *illa quâ motus auctus* &c.

(h) * *Si denſitas cylindri* cæteris manentibus, *augeatur vel minuatur, motus ejus ut & vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eâdem ratione augebitur vel minuetur* (279). Cum igitur cylindri cujuſcunque reſiſtentia æqualis ſit vi quâ motus cylindri aquæ ejuſdem baſis, altitudinis & velocitatis, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit generari vel tolli poſſit, & vis hæc ſit ad vim quâ totus prioris cylindri motus eodem tempore generari poſſit vel tolli, ut denſitas aquæ ad denſitatem cylindri, conſequens eſt ut reſiſtentia cylindri cujuſcumque ſit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit generari vel tolli poteſt, ut denſitas aquæ ad denſitatem cylindri quamproxime.

(i) * *Continuum verò eſſe debet & non elaſticum.* Nam ſi fluidum eſſet elaſticum, ipſius partes per compreſſionem condenſarentur, & deindè rarefierent, atque ità preſſio per motum progreſſivum, qui inſtantaneus eſſe non poteſt, propagaretur. At ſi fluidum continuum ſit & denſari compreſſione nequeat, preſſio propagabitur in inſtanti. Experimentis vero conſtat aquam in ſtatu naturali conſtitutam vix poſſe condenſari, ſeu in ſpatium minus compreſſione redigi; cum e contrà aer maximæ condenſationis & rarefactionis ſit capax.

efficat. Pressio autem quæ oritur à compressione fluidi, utcunque fortis sit, si propagetur in instanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque resistentiam nec auget nec minuit. Certè actio fluidi, quæ ab ejus compressione oritur, fortior esse non potest in partes posticas corporis moti quam in ejus partes anticas, ideoque resistentiam in hac propositione descriptam minuere non potest: & fortior non erit in partes anticas quam in posticas, si modo propagatio ejus infinitè velocior sit quam motus corporis pressi. Infinitè autem velocior erit & propagabitur in instanti, si modo fluidum sit continuum & non elasticum.

(k) *Corol.* 1. Cylindrorum, qui secundum longitudines suas in mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione densitatis mediorum.

(l) *Corol.* 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum. sed cylindrus in medio quiescente incluso secundum longitudinem suam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: resistentia ejus erit ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel

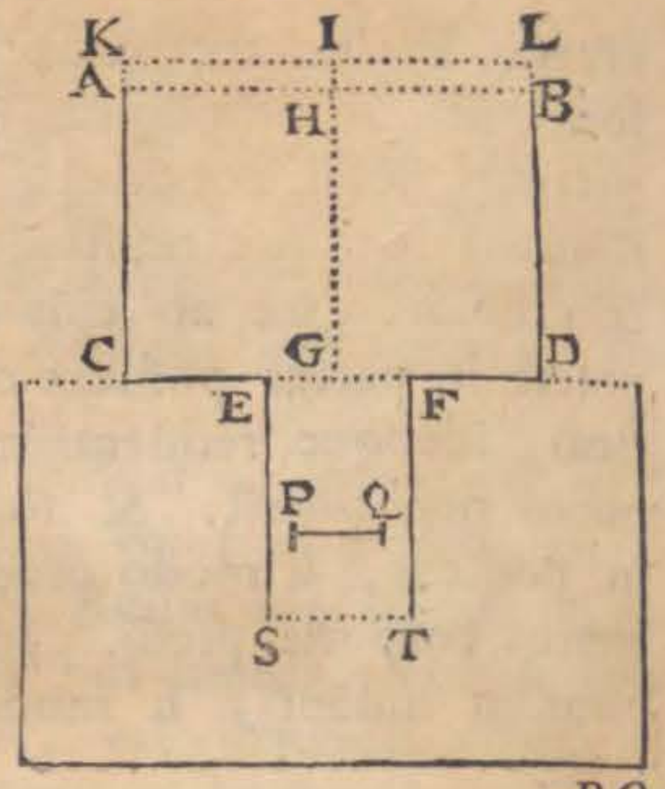
(k) *Cor.* 1. Sic demonstratur. Resistentia cylindri cujusque est directè ut densitas medii & vis uniformis quâ totus cylindri motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit vel generari vel tolli possit, & inversè ut densitas cylindri (ex dem.); Sed vis illa uniformis est in ratione compositâ ex rationibus directis longitudinis cylindri, quadrati diametri, densitatis & quadrati velocitatis & ex ratione inversâ spatii descripti, seu ex ratione inversâ longitudinis cylindri (280). Quare (per compositionem rationum & ex æquo), resistentia cylindri cujuscumque, si conferatur cum resistentiâ alterius cylindri, est in ratione quæ componitur ex ratione densitatis medii, & ratione duplicatâ diametri & duplicatâ ratione velocitatis. 280.

(l) * *Cor.* 2. Sic demonstratur. * Si Canalis non sit infinitus respectu baseos cylindri inclusi, resumantur ea quæ sub initium Theor. illius 37. dicebantur; Primo nempe quod ascendente circello in canali clauso, velocitas relativa aquæ semper sit ad ejus velocitatem ut basis cana-

DE MOTU CORPORUM.

vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq-\frac{1}{2}PQq$ ſemel, & ratione EFq ad $EFq-PQq$ bis, & ratione denſitatis medii ad denſitatem cylindri.

Corol. 3. Iiſdem poſitis, & quod longitudo L ſit ad quadruplum longitudinis cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq-\frac{1}{2}PQq$ ad EFq ſemel, & ratione EFq



$-PQq$

Iis EF ad annulum EP ſive ad differentiam circulorum EF & PQ ſive ut EF^2 ad EF^2-PQ^2; Quæratur igitur altitudo IG talis ut velocitas lapſu per eam acquiſita ſit ad velocitatem circelli, ut EF^2 ad EF^2-PQ^2, & ſi fingatur circellus immotus in medio foraminis EF & aquâ cadens ex altitudine IG ex vaſe ampliſſimo A B D B per illud foramen, cum velocitas aquæ juxta circellum tranſiens eadem ſit ac velocitas reſpectiva aquæ juxta cylindrum in canali clauſo motum, actio aquæ in circellum utrinque æqualis cenſenda eſt, ſed actio aquæ ſive ejus pondus in circellum per Cor. 10. Prop. 36. eſt ad cylindrum cujus baſis eſt circellus altitudo $\frac{1}{2}$IG ſicut EF^2 ad $EF^2-\frac{1}{2}PQ^2$, hæc itaque erit ratio Reſiſtentiæ ad pondus cylindri aquei cujus baſis eſt circellus & altitudo $\frac{1}{2}$IG; Sed gravitas eſt vis quæ tempore quo percurritur uniformiter quadruplum longitudinis $\frac{1}{2}$IG ſive 2IG velocitate lapſu per IG acquiſitâ, generare poteſt eam ipſam velocitatem, & pondus cylindri eſt ipſa gravitas per maſſam cylindri multiplicata, ergo pondus cylindri, eſt vis quæ dum percurritur quadruplum longitudinis cylindri velocitate lapſu per IG acquiſitâ, generare poteſt motum ejus cylindri eâ velocitate mori.

Cum, verò celeritas quæ lapſu per IG acquiritur ſit ad eam cum quâ cylindrus movetur ut EF^2 ad EF^2-PQ^2. Quadruplum longitudinis cylindri propriâ ſuâ celeritate alio tempore percurret quam ſi moveatur celeritate lapſu per IG acquiſitâ. Gravitas ergo cylindri, erit ad eam vim quâ cylindri velocitas acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis ſuæ propriâ ſuâ celeritate deſcribitur, directè ut celeritates quæ iis viribus acquiruntur & inverſè ut tempora quibus acquiruntur, quæ tempora (cum agatur de deſcribendo uniformiter eodem ſpatio quadruplo nempe longitudinis cylindri) ſunt inverſè ut velocitates, ideoque Pondus cylindri eſt ad vim quâ ejus cylindri motus acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis ſuæ propriâ ſuâ celeritate deſcribitur bis directe ut celeritas lapſu per IG acquiſita, ad celeritatem Cylindri, ſive bis ut EF^2, ad EF^2-PQ^2.

Ergo ex æquo Reſiſtentia eſt ad eam vim ſicut EF^2 ad $EF^2-\frac{1}{2}PQ^2$ & bis ut EF^2 ad EF^2-PQ. At, nec reſiſtentia nec ea vis mutantur longitudine cylindri mutata, ſed tantum denſitate mutatâ ut ex ipſa propoſitionis demonſtratione liquet, eſt autem vis quâ motus in Cylindro aqueo generatur, dato tempore quo quadruplum ſuæ longitudinis ſuâ cum velocitate percurrit, ad eam vim qua motus in æquali cylindro, ſed diverſæ denſitatis æquali cum velocitate moto, eodem tempore generatur, ut denſitas.

$-PQq$ ad EFq bis: (m) reſiſtentia cylindri erit ad vim quâ totus ejus motus, interea dum longitudinem L deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri.

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

Scholium.

In hâc propoſitione reſiſtentiam inveſtigavimus quæ oritur à ſolâ magnitudine tranſverſæ ſectionis cylindri, neglectâ reſiſtentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri poſſit. Nam quemadmodum in caſu primo propoſitionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vaſe, undique convergebant in foramen EF, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: ſic in hâc propoſitione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore cylindri termino preſſæ, cedunt preſſioni & (n) undique divergunt, retardat eorum tranſitum per loca in circuitu termini illius antecedentis verſus poſteriores partes cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem diſtantiam commoveatur & reſiſtentiam auget, (o) idque in eâ ferè ratione quâ effluxum aquæ è vaſe diminuit, id eſt in ratione duplicatâ 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in propoſitionis illius caſu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maximâ copiâ tranſirent per foramen EF, ponendo quod aqua omnis in vaſe

ſitas aquæ ſive medii, ad denſitatem Cylindri, ergo tandem Reſiſtentia eſt ad vim quâ motus in Cylindro generari vel tolli poteſt quo tempore quadruplum ſuæ longitudinis propriâ cum velocitate deſcribit, ut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ & bis ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$ & ut denſitas medii ad denſitatem Cylindri. Q. E. D.

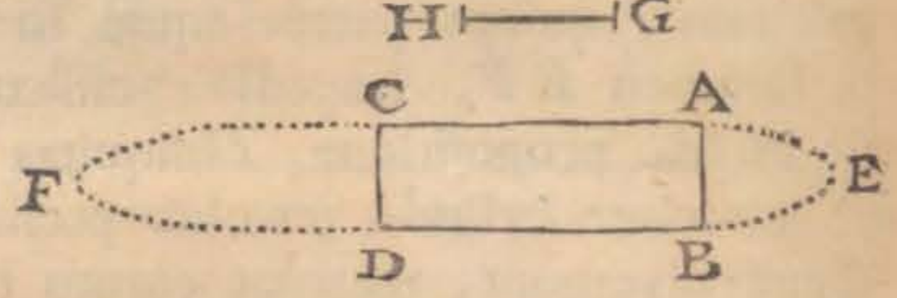
(m) * *Reſiſtentia cylindri erit ad vim.* Nam (per cor. 2. & hyp.) reſiſtentia cylindri eſt ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ uniformiter deſcribit vel generari poſſit vel tolli, in ratione compoſitâ ex ratione quadruplæ longitudinis cylindri ad longitudinem L & ratione denſitatis medii ad denſitatem cylindri, & (279) vis quâ totus cylindri motus, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari vel tolli poſſit, eſt ad vim quâ idem ejuſdem cylindri motus quo tempore longitudinem L uniformiter deſcribit vel tolli poſſit vel generari, in ratione inversâ temporum, ſive ob eamdem utrinque celeritatem in ratione inversâ ſpatiorum, hoc eſt, in ratione longitudinis L ad quadruplum longitudinis cylindri. Quare (ex æquo) reſiſtentia cylindri eſt ad vim quâ totus ejus motus, intereadum longitudinem L uniformiter deſcribit tolli poſſit vel generari, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri. 280.

(n) * *Et undiquè divergunt.* Vid. Prop. 41. & 42. lib. hujus.

(o) * *Idque in eâ ferè ratione.* Eodem enim ferè modo motus obliqui in aquæ partibus excitantur, ſive aqua in planum circuli immotum impingat, ſive circulus eâdem cum velocitate in aquâ quieſcente feratur.

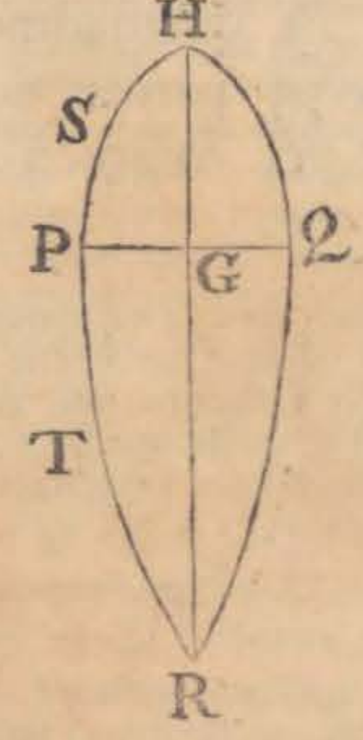
DE MOTU CORPORUM.

se quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret sine motu: sic in hâc propositione, ut obliquitas motuum tollatur & partes aquæ motu maximè directo & brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum cylindro, & sola maneat resistentia, quæ oritur à magnitudine sectionis transversæ, quæque diminui non potest nisi diminuendo diametrum cylindri, concipiendum est quod partes fluidi, quarum motus sunt obliqui & inutiles & resistentiam creant, quiescant inter se ad utrumque cylindri terminum, & cohæreant & (p) cylindro jungantur. Sit *A B C D* rectangulum, & sint *A E* & *B E* arcus duo parabolici axe *A B* descripti, latere autem recto quod sit ad spatium *HG*, describendum à cylindro cadente dum velo-



loci-

(p) * *Et Cylindro jungantur.* Ut num. 277. 278. factum est, ubi circulo P Q in quem aqua influebat cum eâ velocitate quam cadendo & casu suo describendo altitudinem H G acquirit & deinde movebatur uniformiterjunctæ sunt glaciei columnæ duæ parabolicæ P H Q & P R Q, quæ aquas exhibent, quarum fluiditas ac motus sunt inutiles, & parabolarum P S H, P T S erat vertex principalis P, axis P G, & ordinatæ G H, ac G R, ideóque parabolæ P S H, latus rectum $\frac{GH^2}{PG}$, & parabolæ P T R latus rectum $\frac{GR^2}{PG}$ seu $\frac{4GH^2}{PG}$ prioris $\frac{GH^2}{PG}$, quadruplum (per theor. 1. de parab.). Hinc si aqua quiescat & circulus P Q in aquâ moveatur cum eâdem velocitate quam grave cadendo & casu suo describendo altitudinem H G acquirit, columnæ illæ P H Q & P R Q aquas ferè exponent quarum fluiditas ac motus inutiles sunt ut partes aquæ motu maximè directo & brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum circulo. Sed (per Lem. IV.) loco circuli P Q substitui potest cylindrus A B D C



eâdem velocitate motus, & cujus bases A B, C D circulo P Q æquales sint, quibus proinde basibus adjungendæ sunt columnæ duæ A E B, C F D columnis P H Q, P R Q æquales respectivè, atque idipsum est quod Newtonus in hoc scholio fecit. Siquidem junctâ E F, mediis basibus A B, C D, occurrente in L & K, & positis

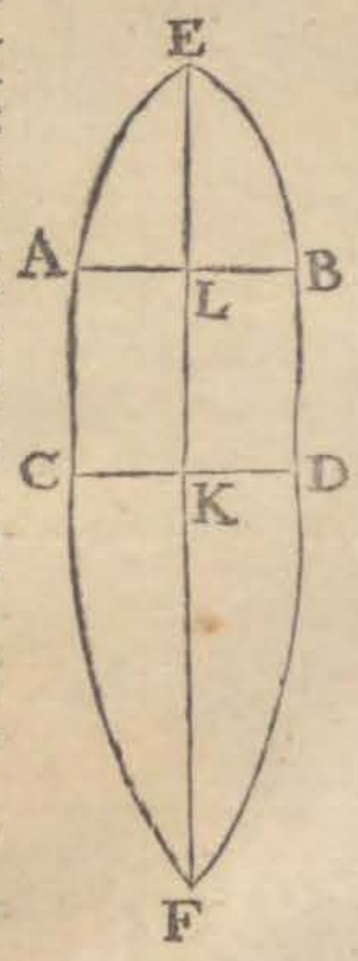
A B

locitatem ſuam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2}AB$. Sint etiam CF & DF arcus alii duo parabolici, axe CD & latere recto quod ſit prioris lateris recti quadruplum deſcripti; & convolutione figuræ circum axem EF generetur ſolidum cujus media pars $ABDC$ ſit cylindrus de quo agimus, & partes extremæ ABE & CDF contineant partes fluidi inter ſe quieſcentes & in corpora duo rigida concretas, quæ cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et ſolidi $EACFDB$, ſecundum longitudinem axis ſui FE in partes verſus E progredientis, reſiſtentia ea erit quamproxime quam in hâc propoſitione deſcripſimus, id eſt, quæ rationem illam habet ad vim quâ totus cylindri motus, interea dum longitudo $4AC$ motu illo uniformiter continuato deſcribatur vel tolli poſſit vel generari, quam denſitas fluidi habet ad denſitatem cylindri quamproximè. (q) Et hâc vi reſiſtentia minor eſſe non poteſt quàm in ratione 2 ad 3. per corol. 7. prop. XXXVI. LEM-

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

AB & CD ipſi PQ æqualibus; eſt (per Newt. conſtr.) Parabolæ AE latus rectum $\frac{HG^2}{AL}=\frac{HG^2}{PG}=\frac{EL^2}{AL}$, & ideò EL=HG. Et ſimili modo parabolæ CF, Newtonianâ conſtructione deſcriptæ, latus rectum eſt $\frac{4HG^2}{PG}=\frac{KF^2}{CK}=\frac{KF^2}{PG}$, ac proindè KF =2HG=GR. Columnæ igitur AEB & CFD, non differunt à columnis PHQ & PRQ.

(q) * *Et hâc vi reſiſtentia minor eſſe non poteſt* &c. Reſiſtentia (per cor. 7. prop. 36.) minor eſſe non poteſt pondere cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus PQ (ſive AB) & altitudo $\frac{1}{3}$ EL ſeu $\frac{1}{3}$ HG. (vid. figuras ſuperiores.) Velocitas quam hic cylindrus aquæ, vi ponderis ſui cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem EL acquirit, æqualis eſt velocitati cum quâ cylindrus ACDB, in aquâ movetur (ex dem.) & ideò cum baſis AB ſit etiam utrique cylindro communis, pondus cylindri aquæ erit ad vim quâ totus cylindri ABDC motus, quo tempore longitudinem 4AC uniformiter deſcribit, generari poſſit vel tolli, in ratione compoſitâ ex ratione denſitatis aquæ ad denſitatem cylindri ABDC, & ratione altitudinis $\frac{1}{3}$ EL ad altitudinem AC, & ratione ſpatii 4AC ad ſpatium 2EL (280), id eſt, in ratione compoſitâ ex ratione denſitatis aquæ ad denſitatem cylindri ABDC & ratione 2 ad 3. Si itaque vis quâ totus cylindri ABDC, motus, intereadum longitudinem 4AC, uniformiter deſcribit, generari vel tolli poſſit, ſit ad vim aliquam P, ut denſitas cylindri ABDC ad denſitatem aquæ, erit (ex æquo) pondus prædicti cylindri aquæ ad vim P ut 2 ad 3, atque ideò pondus cylindri aquæ; quo reſiſtentia minor eſſe non poteſt quam in ratione 2 ad 3. 280.



DE MOTU CORPORUM.

LEMMA V.

Si cylindrus, ſphæra & ſphærois, quorum latitudines ſunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur ſucceſſivè ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

(r) Nam ſpatia inter canalem & cylindrum, ſphæram, & ſphæroidem per quæ aqua tranſit, ſunt æqualia: & aqua per æqualia ſpatia æqualiter tranſit.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quòd aqua omnis ſupra cylindrum ſphæram vel ſphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ tranſitum non requiritur, ut in corol. VII. prop. XXXVI. explicui.

LEMMA VI.

Iiſdem poſitis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aquâ per canalem fluente.

Patet per lemma v. & motus legem tertiam. Aqua utique & corpora in ſe mutuo æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quieſcat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum reſiſtentiæ inter ſe.

Conſtat ex lemmate ſuperiore, nam motus relativi iidem inter ſe manent.

Scho-

(r) * *Nam ſpatia inter canalem & tranſverſas ſectiones, ſeu latitudines maximas cylindri, ſphæræ & ſphæroidis per quæ aqua tranſit ſunt æqualia.* Vid. Schol. ſequens.

Scholium.

Eadem eſt ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri poteſt; ſed in his lemmatis corpora eſſe politiſſima ſupponimus, & medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus ſuis obliquis & ſuperfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare poſſunt, quieſcant inter ſe tanquam gelu conſtrictæ, & corporibus ad ipſorum partes anticas & poſticas adhæreant, perinde ut in ſcholio propoſitionis præcedentis expoſui. Agitur enim in ſequentibus de reſiſtentiâ omnium minimâ quam corpora rotunda, datis maximis ſectionibus tranſverſis deſcripta, habere poſſunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam aſcendat, ad poſticam ſubſidat, præſertim ſi figura ſint obtuſa; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quàm ſi capite & caudâ ſint acutis. Et corpora in fluidis elaſticis mota, ſi ante & poſt obtuſa ſint, fluidum paulo magis condenſant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad poſticam; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & caudâ ſint acutis. Sed nos in his lemmatis & propoſitionibus non agimus de fluidis elaſticis, ſed de non elaſticis; non de inſidentibus fluido, ſed de altè immerſis. Et ubi reſiſtentia corporum in fluidis non elaſticis innoteſcit, augenda erit hæc reſiſtentia aliquantulum tam in fluidis elaſticis, qualis eſt aer, quàm in ſuperficiebus fluidorum ſtagnantium, qualia ſunt maria & paludes.

PRO-

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in fluido compresso infinito & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas fluidi ad densitatem globi quamproximè.

(r) Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; & propterea vis illa, quæ tollere possit motum omnem cylindri interea dum cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, globi motum omnem tollet interea dum globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem cylindri est ad hanc vim quamproximè ut densitas fluidi ad densitatem cylindri vel globi per prop. XXXVII. & resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri per lem. V, VI, VII. *Q. E. D.*

(t) *Corol.* 1. Globorum, in mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis, & duplicatâ ratione diametri, & ratione densitatis mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quâcum globus, vi ponderis sui comparativi, in fluido resistente potest descendere, ea est quam acquirere potest globus idem, eodem pondere, sine resistentiâ cadendo & casu suo describendo spatium quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas globi ad densitatem

(r) * *Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria* (170. lib. 1.) & propterea, cum eadem sit globi & cylindri densitas eademque velocitas (ex hyp.) quantitas motûs globi est ad quantitatem motûs cylindri ut duo ad tria, & tempus quo globus octo tertias partes diametri propriæ uniformiter describit, est ad tempus quo cylindrus eâdem uniformi velocitate quadruplum longitudinis suæ, hu duodecim tertias diametrorum globi describit, etiam ut duo ad tria. Quarè (178) vis uniformis quâ totus globi motus intereadum octo tertias partes diametri propriæ describit tolli possit vel generari, est ad vim uniformem quâ totus cylindri motus, quo tempore longitudinem quatuor diametrorum globi describit vel tolli vel generari possit ut duo ad tria directè & duo ad tria inversè, id est, in ratione æqualitatis. *Resistentia autem cylindri &c.*

(t) * *Cor.* 1. Patet per cor. 1. prop. 37., quia resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri circumscripti.

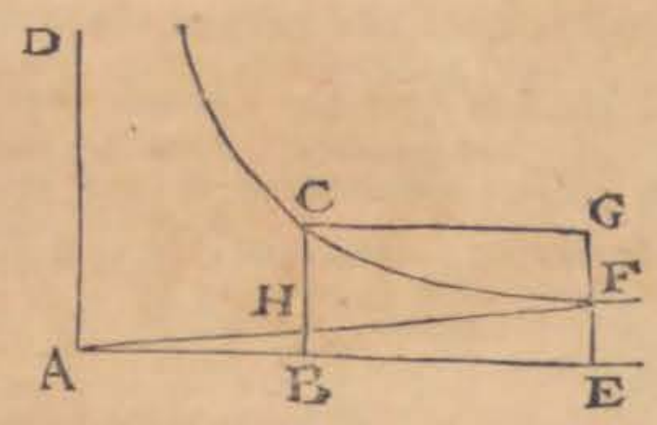
tatem fluidi. Nam globus tempore caſus ſui, cum velocitate cadendo acquiſitâ, (u) deſcribet ſpatium quod erit ad octo tertias diametri ſuæ, ut denſitas globi ad denſitatem fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare poſſit, quo tempore globus octo tertias diametri ſuæ eâdem velocitate deſcribit, ut (x) denſitas fluidi ad denſitatem globi: ideoque per hanc propoſitionem, vis ponderis æqualis erit vi reſiſtentiæ, & propterea globum accelerare non poteſt.

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVIII. THEOR. XXX.

(y) *Corol.* 3. Datâ & denſitate globi & velocitate ejus ſub initio motus, ut & denſitate fluidi compreſſi quieſcentis in quo globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas globi & ejus reſiſtentia & ſpatium ab eo deſcriptum, per corol. VII. prop. XXXV.

(u) * *Deſcribet ſpatium quod erit ad octo tertias partes diametri ſuæ &c.* Deſcribet enim ſpatium duplum illius quod vi ponderis ſui comparativi ſine reſiſtentia cadendo deſcripſit (30. lib. 2.), id eſt, *ſpatium quod erit ad octo tertias partes &c.*

(x) * *Ut denſitas fluidi ad denſitatem globi.* Sit D diameter globi, $2F$ ſpatium quod ſit ad $\frac{8}{3}D$ ut denſitas globi ad denſitatem fluidi; & tempus quo globus uniformiter deſcribit ſpatium $\frac{8}{3}D$, erit ad tempus quo eâdem uniformi velocitate deſcribit ſpatium $2F$, ut $\frac{8}{3}D$ ad $2F$ (5. lib. 1.), id eſt, ut denſitas fluidi ad denſitatem globi. Cum igitur vires uniformes ſint reciprocè ut tempora quibus motus æquales generant (279), patet propoſitum.



(y) 282. Cor. 3. *Datâ & denſitate globi & velocitate ejus ſub initio motus & denſitate fluidi datur ad omne tempus & velocitas globi, & ejus reſiſtentia & ſpatium ab eo deſcriptum.* * Primum, ex datâ denſitate globi, & denſitate fluidi, invenietur, per Cor. 2, vis æqualis reſiſtentiæ cum velocitas ea eſt quam acquirere poteſt is globus, cadendo in vacuo per vim ſui ponderis comparativi & deſcribendo ſpatium quod ſit ad quatuor tertias Diametri ſuæ ut denſitas globi ad denſitatem fluidi. 282.

Secundò, ex datâ hac reſiſtentiâ invenietur reſiſtentia quæ competit velocitati globi de quo agitur ſub initio ejus motus, quia reſiſtentiæ hic ſupponuntur eſſe ut quadrata velocitatum; iſtâ autem reſiſtentiâ cognitâ dabitur tempus quo ſi hæc reſiſtentia uniformiter ageret totam velocitatem quam habet globus ſub initio motus deſtruere poſſet, ſicque ſi BC deſignet eam velocitatem initio motus ſimulque reſiſtentiam ipſi competentem, deſigneturque per AB illud tempus quo ea velocitas per reſiſtentiam uniformem deſtrui poteſt, & ere-

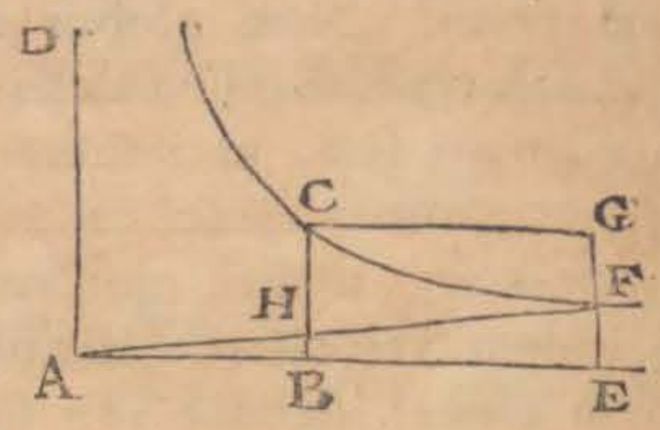
DE MOTU CORPORUM.

cto perpendiculo AD, asymptotis AD, AB per punctum C describatur Hyperbola, ex ejus Hyperbolæ constructione dabitur ad quodlibet tempus (quod designabitur per BE) velocitas residua EF, resistentia BH, & spatium descriptum CBEF; Quâ autem ratione hæc singula ad calculum revocentur dicendum.

I. Vis illa quæ resistentiæ æqualis esse debet cum Corpus habet velocitatem maximam quam lapsu suo in fluido dato acquirere potest, est ipsum pondus comparativum corporis, sit ergo A ejus pondus, Densitas data corporis est ad densitatem fluidi, ut A ad pondus æqualis voluminis fluidi, quo invento, detrahatur illud ex pondere A, relinquitur pondus comparativum globi in fluido quod dicatur B.

Ut præterea determinetur tempus quo eo pondere B corpus percurret cadendo spatium quod sit ad quatuor tertias Diametri suæ ut ejus densitas ad densitatem fluidi, sive, si dicatur *D* Diameter & dicatur *F* spatium quod sit ad $\frac{4}{3}D$ ut densitas globi ad densitatem medii, ut determinetur tempus quo globus pondere *B* cadendo percurret spatium *F* posito quod grave cadendo in vacuo pondere A tempore unius minuti secundi pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$ percurrit, & cum spatia diversis viribus acceleratricibus descripta eodem tempore sint ut illæ vires, spatium $15\frac{1}{12}$ pedum pondere A uno minuto secundo percursum est ad spatium eodem tempore pondere *B* percursum ut A ad B. Ut autem est illud spatium, ad spatium *F*, ita quadratum minuti unius secundi ad quadratum temporis quo eo pondere *B* spatium *F* percurretur, quod tempus dicatur *G*, cumque velocitate per lapsum acquisitâ duplum spatii lapsu percursi uniformiter describatur ipso lapsus tempore, ideo velocitate pondere *B* tempore *G* acquisitâ, eodem tempore *G* describeretur $2F$, cumque velocitas omnis exprimatur per spatium divisum per tempus erit ea velocitas maxima $\frac{2F}{G}$ quæ in posterum dicatur *H*.

II. Datâ autem quâvis aliâ ejusdem globi velocitate in eodem fluido eaque det



catur M, resistentia ipsi competens ita obtinetur, ut quadratum velocitatis H ad quadratum velocitatis hujusce *M*, ita est resistentia adversus velocitatem H cui pondus B æquipollet, ad resistentiam adversus velocitatem *M*, quam vocabo *R*; cum ergo prius data sit ratio *A* ad *B* dabitur etiam ratio *A* ad *R* ideoque dabitur spatium quod actione vi *R* uniformi suppositâ per unum minutum secundum describeretur, siquidem spatia per diversas vires uniformes acceleratrices descripta iisdem temporibus sunt ut illæ vires, ideoque *A* ad *R* ut $15\frac{1}{12}$ ped. ad spatium uno minuto secundo descriptum, cujus spatii duplum per unum minutum secundum divisum exprimit velocitatem vi *R* per unum minutum secundum productam. Unde invenietur tempus quo per eam vim *R* uniformiter agentem velocitas *M* produci vel etiam destrui posset, velocitates enim per eamdem vim acquisitæ sunt ut tempora quibus acquiruntur; Ergo velocitas tempore unius minuti secundi acquisita est ad velocitatem *M*, ut unum minutum secundum ad tempus quo vis *R* velocitatem *M* generare vel tollere posset. Unde tandem in Hyperbolæ constructione datur valor temporis per lineam A B designati.

Sumatur ergo BE quod sit ad A B ut tempus quod assumere lubet ad tempus illud quo vis *R* velocitatem *M* quæ per BC exprimitur generare vel tollere potest uniformiter agendo, & ducatur ordinata EF, ea designabit velocitatem globi eo tempore superstitem quæ ex naturâ Hyperbolæ habebitur, est enim AE, ad AB, sicut BC sive *M* ad BEF, unde cum sit AE = AB + BE; sitque AB tempus mox inventum, BE tempus assumptum, BC sive *M* velocitas data, datur etiam EF.

Datur pariter resistentia BH, est enim

BC²

(z) *Corol.* 4. Globus in fluido compreſſo quieſcente ejuſdem ſecum denſitatis movendo, dimidiam motus ſui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipſius diametrorum deſcripſerit, per idem corol. VII.

PRO-

BC^2 ad EF^2 ut R ad hancce novam reſiſtentiam, quæ, prioribus datis, etiam dabitur.

Denique datur ſpatium à corpore deſcriptum, datur enim ſpatium quod velocitate conſtanti M tempore BE percurritur; Eſt verò area $BCGE$ ad ſpatium Hyperbolicum $BCFE$, ut ſpatium velocitate conſtanti M tempore BE percurſum, ad ſpatium percurſum cum velocitate per reſiſtentiam decreſcente, at ex naturâ Logarithmorum Hyperbolicorum ſpatium Hyperbolicum $BCFE$ eſt Logarithmus quantitatis $\frac{AE}{AB}$, & quia Logarithmi earumdem quantitatum in diverſis Logarithmorum ſeriebus ſumpti ſunt proportionales, ſumatur Logarithmus illius quantitatis $\frac{AE}{AB}$ in Tabulis, vulgaribus, fiatque ut Logarithmus denarii numeri in Tabulis (ſive unitas) ad 2.30258509 qui eſt Logarithmus Hyperbolicus ejuſdem denarii numeri, ita Logarith. quantitatis $\frac{AE}{AB}$ ex Tabulis deſumptus ad Logarithmum Hyperbolicum ejus quantitatis, habebitur area $BCFE$, ſit ergo dignitas Hyperbolæ = 1, erit $BC = \frac{1}{AB}$ & area $BCGE = \frac{1}{AB} \times BE$, ideoque ut $\frac{BE}{AB}$, ad Logarithmum quantitatis $\frac{AE}{AB}$ è Tabulis deſumptum & multiplicatum per 2.30258509. Ita ſpatium velocitate conſtanti BC tempore BE percurſum, ad ſpatium percurſum cum velocitate per reſiſtentiam decreſcente: Q. E I.

(z) * *Cor.* 4.; * Cum globus & fluidum ejuſdem denſitatis ſupponantur, reſiſtentia iſto in caſu erit æqualis vi quâ totus motus globi generari vel tolli poſſet quo tempore octo tertias Diametri ſuæ uniformiter deſcriberet; itaque ſit BC motus globi, erit AB tempus quo uniformiter percurreret octo tertias ſuæ Diametri, ſit EF, dimidium BC, quoniam EF exprimit reſiduum motum, BE erit tempus quo dimidia pars motus amiſſa fuerit, ſed BC ad EF ut AE ad AB & eſt BC ad EF ut 2 ad 1, per conſt. ergo etiam $AE = 2AB$ & $BE = AB$, ideoque dimidium motum amittet quo tempore percurreret uniformiter octo tertias Diametri ſuæ; Sed illud ſpatium uniformiter percurſum eſt ad ſpatium percurſum velocitate per reſiſtentiam decreſcente ut $\frac{BE}{AB}$ (ſive $\frac{1}{1}$) ad Logarithmum è Tabulis deſumptum quantitatis $\frac{AE}{AB}$ (ſive $\frac{2}{1}$) multiplicatum per 2.30258509, & ille Logarithmus eſt .3010300, productum ergo erit .6931 &c. ideo 1. ad .6931 &c. ut $\frac{8}{5} D$, ad 1.84832 D, quod quidem paulo minus eſt quam 2 D, ideo Globus in fluido ejuſdem denſitatis dimidiam ſui motus partem prius deſcribet *quam longitudinem duarum ipſius Diametrorum deſcripſerit*, Q. E. D.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per fluidum in canali cylindrico clauſum & compreſſum uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicatâ orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra circulum maximum globi, & ratione denſitatis fluidi ad denſitatem globi quamproximè.

Patet per corol. 2. prop. XXXVII. procedit verò demonſtratio (a) quemadmòdum in propoſitione præcedente.

Scholium.

In propoſitionibus duabus noviſſimis (perinde ut in lem. v.) ſuppono quòd aqua omnis congelatur quæ globum præcedit, & cujus fluiditas auget reſiſtentiam globi. Si aqua illa omnis liqueſcat, augebitur reſiſtentia aliquantulum. Sed augmentum illud in his propoſitionibus parvum erit & negligi poteſt, propterea quòd convexa ſuperficies globi totum ferè officium glaciei faciat.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi, in medio fluidiſſimo compreſſo progredientis, invenire reſiſtentiam per phænomena.

Sit A pondus globi in vacuo, B pondus ejus in medio reſiſten-

(a) * *Quemadmodum in propoſitione præcedente.* Demonſtratio eadem manet, quæ in nota 281. adjungenda tantum hæc ſunt: reſiſtentia autem cylindri eſt ad hanc vim quam proximè in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicata orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra circulum maximum globi, & ratione denſitatis fluidi ad denſitatem globi (per cor. 2. prop. XXXVII.); & reſiſtentia globi æqualis eſt reſiſtentiæ cylindri, per Lem. V, VI, VII. Q. E. D.

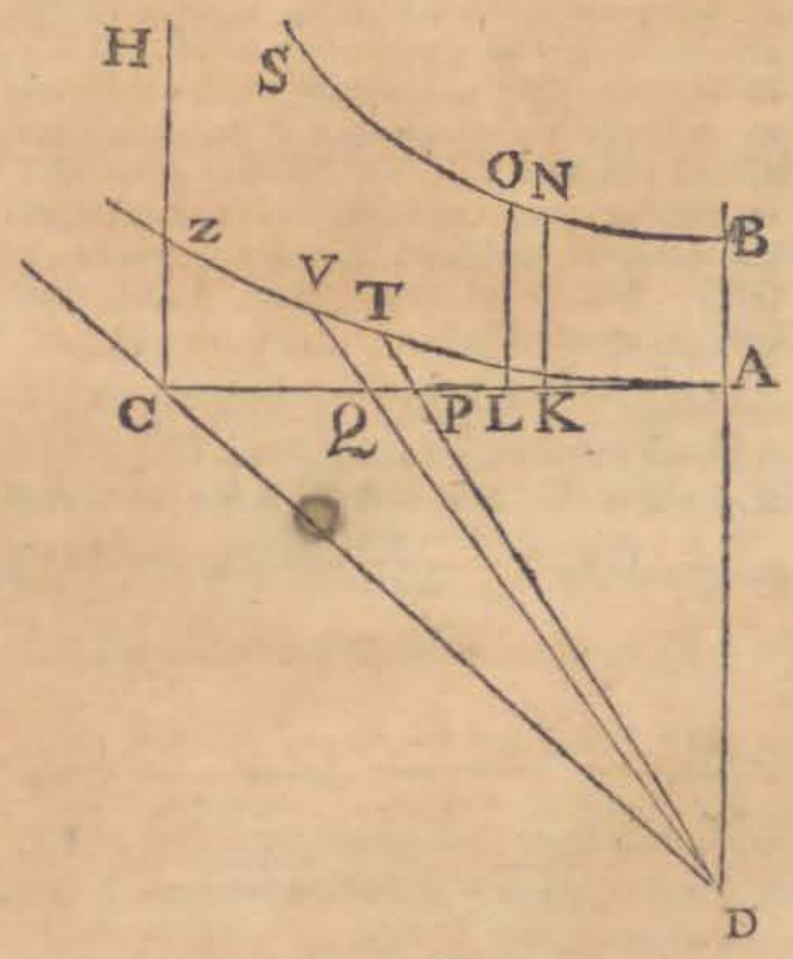
fiſtente, D diameter globi, F ſpatium quod ſit ad $\frac{4}{3}$D ut denſitas globi ad denſitatem medii, id eſt, (b) ut A ad A−B, G tempus quo globus pondere B ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit ſpatium F, & H velocitas quam globus hocce caſu ſuo acquirit. Et erit H velocitas maxima quâcum globus, pondere ſuo B, in medio reſiſtente poteſt deſcendere, per corol. 2. prop. XXXVIII. & reſiſtentia, quam globus eâ cum velocitate deſcendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: reſiſtentia verò, quam patitur in aliâ quâcunque velocitate, erit ad pondus B in duplicatâ ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, per corol. 1. prop. XXXVIII.

Hæc eſt reſiſtentia quæ oritur ab inertiâ materiæ fluidi. Ea verò quæ oritur ab elaſticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, (c) ſic inveſtigabitur.

De-

(b) 283. * *Id eſt, ut A ad A−B.* Denſitates corporum ejuſdem voluminis ſunt eorumdem pondera in vacuo (2. & 3. lib. 1); Sed A eſt pondus globi in vacuo, & A−B pondus æqualis globi aquæ etiam in vacuo; nam globus A aquæ immerſum ponderis ſui partem amittit æqualem ponderi paris voluminis æquæ (per cor. 6. prop. XX). Ergo &c.

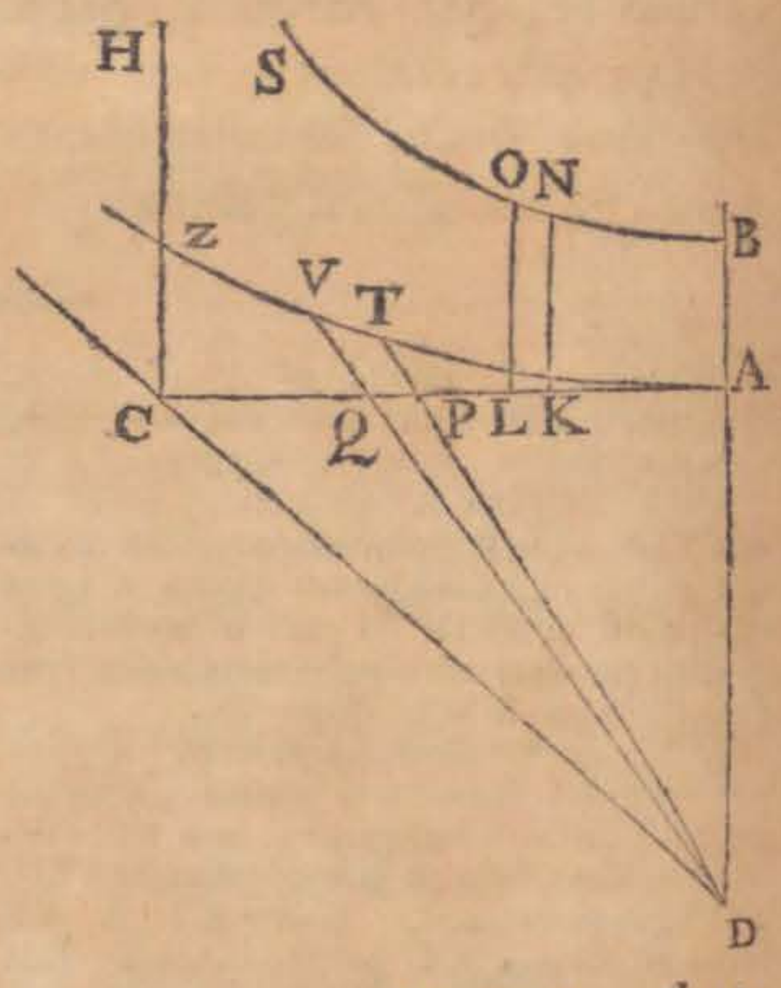
(c) 284. * *Sic inveſtigabitur.* Ut eorum quæ hic Newtonus profert, demonſtratio facilius intelligatur, non nulla revocanda ſunt, quæ in propoſitionibus VIII. & IX. demonſtravit. Sunto CH & AB rectæ ad datam AC perpendiculares, CH quidem infinita, & BA æqualis $\frac{1}{4}$AC. Centro C aſymptotis GH, CA deſcribatur per punctum B hyperbola BNS capiantur AC, AP, AK continuè proportionales, & per punctum K ducatur ad hyperbolam recta KN parallela AB. Et ſi corpus grave è quiete cadat in medio quod in duplicatâ velocitatis ratione reſiſtit, exponatque area ABNK ſpatium à corpore cadente deſcriptum; velocitas corporis hocce caſu acquiſita exponi poterit per lineam AP, & ipſius velocitas maxima per datam AC (per cor. 1. & 2 prop. VIII). Producatur jam BA ad D ut ſit AD æqualis AC, jungatur DC, &



centro D, aſymptoto DC ac vertice principali A deſcribatur altera hyperbola ATZ, quæ lineam DP productam ſecet in T, & lineam DQ ipſi DP infinitè propinquam in V; & ſector evaneſcens DTV erit æqua- 284.

DE MOTU CORPORUM.

Demittatur globus ut pondere ſuo B in fluido deſcendat; & ſit P tempus cadendi, idque in minutis ſecundis ſi tempus G in minutis ſecundis habeatur. Inveniatur numerus abſolutus N qui congruit logarithmo $0,4342944819\frac{2P}{G}$, ſitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquiſita



lis $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, & ſector ATD tempus exponet quo corpus cadendo deſcribit ſpatium ABNK & quo velocitatem AP acquirit (per caſum 2. prop. IX.). Spatium verò quod corpus tempore quovis ATD cadendo deſcribit, erit ad ſpatium quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo, deſcribere poteſt, ut area ABNK ad aream ATD (per cor. 1. prop IX), & tempus quo corpus in medio reſiſtente cadendo velocitatem AP acquirit, erit ad tempus quo velocitatem maximam AC in medio non reſiſtente vi ponderis ſui comparativi cadendo acquirere poſſet, ut ſector ATD ad triangulum ADC (per cor. 5. prop. IX.).

285. His præſuppoſitis, dicantur $AC = AD = a$, $AB = \frac{1}{4}a$, $AP = x$, $PQ = dx$, & quia $AC : AP = AP : AK$, erit $AK = \frac{xx}{a}$, $CK = \frac{aa - xx}{a}$, triangulum $PDQ = \frac{1}{2}a\,dx$, & ſector $DTV = \frac{PDQ \times AC}{CK} = \frac{\frac{1}{2}a^3\,dx}{aa - xx} = \frac{\frac{1}{4}aa\,dx}{a+x} + \frac{\frac{1}{4}aa\,dx}{a-x}$; undè, ſumtis fluentibus, habetur ſector $ATD = \frac{1}{4}aaL.\overline{a+x} - \frac{1}{4}aaL.\overline{a-x} = \frac{1}{4}aaL.\frac{a+x}{a-x}$, cui quantitati nihil addendum vel ſubducendum eſt, quia ubi fit $ATD = 0$, & $x = 0$, evaneſcit, ut oportet. Ducatur LO parallela KN ipſique infinitè propinqua; & cum ſit $AK = \frac{xx}{a}$ & (per theor. 4. de hyp.) $KN = \frac{CA \times AB}{CK} = \frac{\frac{1}{4}a^3}{aa - xx}$ ac $KL = \frac{2x\,dx}{a}$, erit areæ ABNK fluxio $KNOL = \frac{\frac{1}{2}a^2\,x\,dx}{aa - xx}$, ſumptiſque fluentibus, area $ABKN = Q$ *a conſt.* $- \frac{1}{4}aaL.\overline{aa - xx}$; quia verò area ABNK evaneſcit ubi fit $x = 0$, erit conſtans $Q = \frac{1}{4}aaL.aa$, & area accurata $ABNK = \frac{1}{4}aaL.aa - \frac{1}{4}aaL.aa - xx = \frac{1}{4}aaL.\frac{aa}{aa - xx}$. Porro

fita erit $\frac{N-1}{N+1}H$, altitudo autem descripta erit $\frac{2PF}{G} - 1{,}3862943611$

ro (284) tempus P quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem acquirit lineæ AP seu x proportionalem, est ad tempus G quo velocitatem maximam H vi ponderis sui comparativi B sine resistentia cadendo acquirere potest, ut sector ATD ad triangulum ADC, id est, $P:G = \frac{1}{4}aa$ L. $\frac{a+x}{a-x} : \frac{1}{2}aa = L.\frac{a+x}{a+x} : 2$. Quare erit $\frac{2P}{G} = L.\frac{a+x}{a-x}$, hoc logarithmo sumto in logistica cujus subtangens est unitas (38. lib. 11.). Quapropter si logarithmus numeri $\frac{a+x}{a-x}$ sumatur in tabulis, multiplicandus erit per numerum 2,302585093, ut in cor. 7. prop. XXXV factum est, & habebitur $\frac{2P}{G} = 2{,}302585093$ L. $\frac{a+x}{a-x}$, ideoque dividendo 1. per 2,3025 &c. numerus 0,4342944819. $\frac{2P}{G}$ est logarithmus tabularis numeri $\frac{a+x}{a-x}$. Itaque si per tabulas quæratur numerus absolutus N qui congruat Logarithmo 0,4342944819 $\frac{2P}{G}$, erit $N = \frac{a+x}{a-x}$, ideoque $x = \frac{a[N-1]}{N+1}$. Est autem (284) AC ad AP seu a ad x, ut velocitas maxima H ad velocitatem cadendo acquisitam. Quare hæc velocitas erit $\frac{xH}{a} = \frac{N-1}{N+1} \times H$, sicuti Newtonus invenit. Spatium quod globus velocitate maximâ H uniformiter progrediendo tempore P describit, est ad spatium $2F$ quod eadem velocitate H uniformiter percurrit tempore G, ut tempus P ad tempus G (5. lib. 1.), & propterea spatium illud est $\frac{2PF}{G}$. Altitudo S quam globus tempore P cadendo in medio resistente describit, est ad spatium $\frac{2PF}{G}$, ut area ABNK ad sectorem ATD (284), id est, ut $\frac{1}{4}aa$ L. $\frac{aa}{aa-xx}$ ad $\frac{1}{4}aa$ L. $\frac{a+x}{a-x}$, sive ut L. $\frac{aa-xx}{aa}$ ad L. $\frac{a+x}{a-x}$; Sed (ex dem.) $\frac{a+x}{a-x} = N$, & $x = \frac{a[N-1]}{N+1}$, ac proinde $\frac{aa}{aa-xx} = \frac{[N+1]^2}{4N} = \frac{N \times [N+1]^2}{4NN}$; & si logarithmi sumantur in logistica cujus subtangens est unitas, est $\frac{2P}{G} = L.\frac{a+x}{a-x} = L.N$, & L. $\frac{aa}{aa-xx} = L.\frac{N \times [N+1]^2}{4NN} = L.N + 2L.\frac{N+1}{N} - L.4$; ideoque L. $\frac{aa}{aa-xx} : L.\frac{a+x}{a-x} = L.N + 2L.\frac{N+1}{N} - L.4 : L.N = 1 + \frac{2L.\frac{N+1}{N} - L.4}{L.N} : 1 = 1 + \frac{G}{P}L.\frac{N+1}{N} - \frac{G}{2P}L.4 : 1 = S : \frac{2PF}{G}$. Quare altitudo $S = \frac{2PF}{G} - FL.4 + 2FL.\frac{N+1}{N}$. At si velimus tabularum logarithmis uti, ii multiplicandi sunt per numerum 2,302585092994, seu per 2,302585093. Hic numerus dicatur M, logarithmus numeri 4 in tabulis sumptus Q, & logarithmus etiam tabularis numeri $\frac{N+1}{N}$ sit L; & erit $S = \frac{2PF}{G} - MQF + 2MLF$. Est autem $2M = 4{,}605170186$, & Q in tabulis vulgaribus est 0,60206, seu accuratius 0,602059991 33, ideoque $MQ = 1{,}3862943611$ quamproxime. Quare altitudo S, quam globus in medio resistente cadendo tempore P describit, est $\frac{2PF}{G} - 1{,}3862943611F + 4{,}6051701 86LF$, uti Newtonus definivit.

284.

DE MOTU CORPORUM.

1,3862943611 F + 4,6051701861 LF. (d) Si fluidum satis profundum sit negligi potest terminus 4,6051701861 LF; & erit $\frac{2PF}{G}$ − 1,3862943611 F altitudo descripta quamproximè. Patent hæc per libri secundi propositionem nonam & ejus corollaria; ex hypothesi quòd globus nullam aliam patiatur resistentiam nisi quæ oritur ab inertiâ materiæ. Si verò aliam insuper resistentiam patiatur, descensus erit tardior, & ex retardatione innotescet quantitas hujus resistentiæ.

Ut corporis in fluido cadentis velocitas & descensus facilius innotescant, composui tabulam sequentem, cujus columna prima denotat tempora descensus, secunda exhibet velocitates cadendo acquisitas existente velocitate maximâ 100000000, tertia exhibet spatia temporibus illis cadendo descripta existente 2 F spatio quod corpus tempore G cum velocitate maximâ describit, & quarta exhibet spatia iisdem temporibus cum velocitate maximâ descripta. Numeri in quartâ columnâ sunt $\frac{2P}{G}$, & subducendo numerum 1,3862944 − 4,6051702 L, inveniuntur numeri in tertiâ columnâ, & multiplicandi sunt hi numeri per spatium F ut habeantur spatia cadendo descripta. Quinta his insuper adjecta est columna, quæ continet spatia descripta iisdem temporibus à corpore, vi ponderis sui comparativi B, in (e) vacuo cadente. *Tem-*

(d) * *Si fluidum satis profundum sit*, id est, si altitudo *S* quam globus tempore *P* cadendo describit, satis magna fuerit, negligi potest terminus 4,6051701861 *LF*. Cum enim sit *L* logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$, ubi N est numerus satis magnus, seu ubi numerus $\frac{N+1}{N}$ est fere æqualis unitati, Logarithmus *L* evanescit quam proximè. Sed, si velocitas maxima dicatur *H*, & velocitas tempore *P* casu globi acquisita *V*, est $H:V = a:x$ (285), & ideo $\frac{H+V}{H-V} = \frac{a+x}{a-x} = N$, & quando spatium descriptum *S* satis magnum est, fit $V = H$ quam proximè, ac proinde $\frac{H+V}{H-V}$ seu *N* numerus satis magnus, ut ex sequenti tabula manifestum est. Patet ergo propositum.

(e) * *In vacuo cadente.* Hujus tabulæ constructio paulo fusius exponenda videtur. Numeri singuli columnæ primæ, quibus exprimitur ratio temporis P ad tempus G, assumuntur pro lubitu; numeri verò in columna quarta correspondentes facillimè reperiuntur. Cum enim spatium tempore G velocitate maximâ H uniformiter descrip-

Tempora P	*Velocitates cadentis in fluido.*	*Spatia cadendo descripta in fluido.*	*Spatia motu maximo descripta.*	*Spatia cadendo descripta in vacuo.*
0,001G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001F	0,002F	0,000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,2F	0,0001F
0,1G	9966799	0,00099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179F	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16,6137057F	18F	81F
10G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056F	20F	100F

Scho-

scriptum sit 2 F, & spatia eâdem uniformi velocitate descripta temporibus, quibus describuntur, proportionalia sint; numeri columnæ quartæ, duplicatis numeris columnæ primæ correspondentibus, habentur. Quia verò spatia, à corpore vi ponderis sui comparativi B fine resistentia cadente, descripta, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur, & tempore G describitur spatium F; numeri columnæ quintæ sunt quadrata numerorum correspondentium in columna prima. Numeri columnæ secundæ velocitatem acquisitam cadendo in fluido tempore P indicant quæ est $\frac{N-1}{N+1} \times H$, sicque

285. inveniuntur: assumpto in columna prima termino quovis, Exempli causâ, 2 G pro P, fit $\frac{2P}{G} = \frac{4G}{G} = 4$, & hinc 0,4342944819 $\frac{2P}{G} = 1{,}7371779276$. Huic logarithmo in tabulis congruit numerus absolutus 54,59815 $= N$; unde fit $\frac{N-1}{N+1} = \frac{5359815}{5559815}$, & quia $H = 100000000$ (per hyp.), velocitas tempore P, sive 2 G, acquisita $\frac{N-1}{N+1} H$, est 96402758, uti Newtonus in tabula posuit. Inventis hoc modo numeris columnæ secundæ, inveniuntur quoque numeri colum-

DE MOTU CORPORUM.

Scholium.

Ut reſiſtentias fluidorum inveſtigarem per experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine internâ digitorum novem (f) pedis *Londinenſis*, profunditate pedum novem cum ſemiſſe, idemque implevi aquâ pluviali; & globis ex cerâ & plumbo incluſo formatis, notavi tempora deſcenſus globorum, exiſtente deſcenſus altitudine 112 digitorum pedis. Pes ſolidus cubicus *Londinenſis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus ſolidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus ſeu (g) grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius deſcriptus continet grana 132,645 in medio aeris, vel (h) grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet

næ tertiæ, videlicet $\frac{2P}{G} - 1,3861936111 + 4,6051702$ L. Quoniam enim datus eſt numerus $\frac{2P}{G}$, & jam inventus fuit numerus N, cognoſcetur numerus $\frac{N+1}{N}$ cum ipſius Logarithmo L; atque ita obtinebitur numerus columnæ tertiæ.

286. Ex hâc porro tabulâ patet verum eſſe poſſe, quod non nulli ſe obſervaſſe teſtantur, nimirum gravia in mediis reſiſtentibus cadentia brevi ſatis tempore ad maximam quam acquirere poſſint velocitatem pervenire & poſtea moveri uniformiter; licet per theoriam non niſi tempore infinito, ſeu nunquam, poſſint maximam illam velocitatem revera acquirere. Nam ſi tempus *P* quo globus in fluido quocumque cadit, ſit æquale tempori 5 G; globi velocitas acquiſita erit ad velocitatem maximam ut 9999092 ad 10000000, ſeu ut 1 ad 1,0000908, quamproxime, & ſpatium hoc tempore 5 G deſcriptum erit 8,6137964 *F*, & deinde ſpatia deſcripta creſcent fere in progreſſione arithmetica ad modum temporum. Elapſo igitur tempore 4G. vel 5G globus uniformiter deſcendere videbitur, licet ejus velocitas revera perpetuò creſcat. Si vero aſſumatur tempus *P* æquale 10G, tum velocitas acquiſita eſt ad velocitatem maximam ut 99999999 $\frac{1}{5}$ ad 100000000, & tantorum numerum differentia $\frac{2}{5}$ prorſus inſenſibilis eſt oculis humanis.

(f) * *Pedis Londinenſis.* Pes Londinenſis eſt ad pedem Pariſienſem ut 15 ad 16; uterque in digitos 12, & digitus in 12 lineas dividitur.

(g) * *Seu grana.* Libra Roma uncias 12, uncia 480. grana continet.

(h) 287. * *Vel grana* 132, 8 *in vacuo.* Corpus quodlibet ponderis ſui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris; corporum vero pondera abſoluta ſub paribus voluminibus ſunt ut eorum denſitates, & denſitas aquæ, juxta Newtonum, eſt ad denſitatem aëris ut 860 ad 1. Quare, cum globi aquei pondus in aëre parum differat ab ej ſdem pondere in vacuo, dicendum eſt, ut 860 ad 1, ita pondus globi aquei granorum 132, 645 ad pondus æqualis globi aëris, quod proinde erit granorum 0,1543 quam proxime. Addatur pondus hoc ponderi granorum 132, 645, & ſumma gran. 132, 7993, ſeu gran. 132,8 erit pondus prædicti globi aquæ in vacuo quam proxime. Dato igitur pondere globi cujuſlibet aquei in aëre, invenitur ejus pondus in vacuo, ſi ponderi dato addatur id

libet (i) alius eſt ut exceſſus ponderis ejus in vacuo ſupra pondus ejus in aquâ.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aquâ, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcripſit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor ſecundorum.

(k) Pondus globi in vacuo eſt $156\frac{13}{58}$ *gran.* & exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aquâ eſt $79\frac{13}{58}$ *gran.* (l) Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Eſt autem ut exceſſus ille ad pondus globi in vacuo, ita (m) denſitas aquæ ad denſitarem globi, (n) & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad ſpatium 2F, (o) quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius ſecundi, toto ſuo pondere granorum $156\frac{13}{58}$, (P) cadendo in vacuo de-

id quod ex diviſione ejuſdem ponderis per numerum 860 habetur.

(i) 288. * *Et globus quilibet &c.* Globus quilibet E eſt ad globum aqueum C diametro digiti unius deſcriptum, ut exceſſus ponderis globi E in vacuo ſupra pondus ejus in aqua, ad pondus granorum 132,8. Nam exceſſus ponderis globi E in vacuo ſupra pondus ejus in aquâ eſt pondus globi aquæ ejuſdem cum globo E diametri; Sed globi aquæ homogenei ſunt ut eorumdem pondera: eſt igitur globus E ad globum C ut exceſſus ponderis globi E in vacuo ſupra pondus ejus in aqua, ad pondus 132,8 granorum.

(k) * *Pondus globi in vacuo eſt* $156\frac{13}{58}$ *gran.* Si enim ex pondere globi in aëre gran. $156\frac{1}{4}$ ſubducatur pondus ejus in aqua, quod eſt gran. 77, reſiduum erit pondus globi aquæ ejuſdem voluminis gran. $79\frac{1}{4}$; & propterea (287) ut habeatur pondus globi in vacuo, ponderi gran. $156\frac{1}{4}$ addendum eſt pondus gran. $\frac{79\frac{1}{4}}{860}$, & prodit pondus globi in vaçuo gran. $156\frac{13}{58}$ quam proximè.

(l) * *Unde prodit globi diameter &c.* Eſt enim (288) pondus gran. 132,8 ad exceſſum $79\frac{13}{58}$, ut globus diametro digiti unius deſcriptus ad globum quæſitum; ideoque ut diametri 1 digiti cubus 1 ad diametri globi quæſiti cubum, qui proinde erit $\frac{79\frac{13}{58}}{132,8}$ partium digiti cubici. Hujus fractionis radix cubica, ſeu globi diameter, eſt 0,84224 partium digiti quam proxime. 288.

(m) * *Ita denſitas aquæ ad &c.* (283).

(n) * *Et ita partes octo tertiæ diametri globi &c.* Per Prop XL. lib. II.

(o) * *Quod proinde erit 4,4256 dig.* Nam $79\frac{13}{58} : 156\frac{13}{58} = 3015 : 5941 = 2,24597 : 4,4256$, quam proximè.

(p) 289. * *Cadendo in vacuo deſcribet digitos* $193\frac{1}{3}$. Quoniam corporis, præſertim gravioris, oſcillationes quæ in minoribus arcubus fiunt, iiſdem quam proximè temporibus peraguntur in aere & in vacuo (per cor. 2. prop. XXVII. lib. II.); ſpatium quod grave cadendo in vacuo tempore minuti unius ſecundi deſcribit, eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$, ſeu

DE MOTU CORPORUM.

describet digitos $193\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore sine resistentiâ cadendo in aquâ (q) describet digitos 95,219; (r) & tempore G, quod sit ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2,2128 *dig.* ad 95219 *dig.* describet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quâcum potest in aquâ descendere. (f) Est igitur tempus G $0''$,15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illâ maximâ H, globus describet spatium 2F digitorum 4,4256; (t) ideoque tempore minutorum quatuor secundorum describet spatium digitorum 116,1245. (u) Subducatur spatium 1,3862944F seu 3,0676 *dig.* & manebit spatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aquâ, in vase amplissimo, tempore minutorum quatuor secundorum describet. Hoc spatium, ob angustiam vasis lignei prædicti, (x) minui debet in ratione quæ com-

accuratius digitorum $181\frac{1}{6}$ quam proximè (471. lib. 1.); & quia pes Londinensis pede Parisiensi minor est in ratione 15 ad 16, erit spatium illud digitorum Londinensium $193\frac{11}{45}$, seu fere $193\frac{1}{4}$. Hoc spatium augeri paululum debet ob pondus in aëre oscillantis diminutum, & ideo poni potest digit. Lond. $193\frac{1}{5}$ quam proximè.

(q) * *Describet digitos 95, 219.* Nam vires uniformes sunt ut spatia quæ corpus viribus illis agitatum dato tempore describit (179); & propterea $156\frac{13}{38}$ est ad 77 ut $193\frac{1}{3}$ dig. ad spatium quod globus vi ponderis granorum 77 tempore minuti unius secundi sine resistentia cadendo describit; unde spatium hoc prodit 95,219 digit. quam proximè.

(r) * *Et tempore G, quod sit &c.* Spatia quæ corpus vi ponderis sui comparativi 77 gran. sine resistentiâ cadendo describit, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur (27. lib. 1.). Ergo tempus G, quo corpus vi ponderis sui comparativi sine resistentiâ cadendo describit spatium F (per prop. XL.), est ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2,2128 dig. ad 95,219 digit.

(f) 290. * *Est igitur tempus G* $0''$,15244. Si juxta notam 286, multiplicetur hæc fractio per numerum 5, productum erit $0''$,7622 seu 46‴ ferè. Quare globus, cujus diameter est 0,84224 partium digiti & pondus in aëre $156\frac{1}{4}$ gran., in aqua cadendo tempore 46‴ describet spatium 19 dig. circiter & maximam suam velocitatem acquirere atque postea uniformi velocitate descendere videbitur (286).

(t) * *Ideoque tempore minutorum quatuor secundorum &c.* Sunt enim tempora ut spatia velocitate uniformi H descripta, & $0''$,15244 est ad 4″ ut 4,4256 ad 116,1245 ferè.

(u) * *Subducatur spatium &c.* Tempus P est minutorum secundorum quatuor, & ut G ad P ita est 2 F ad digitos 116,1245; $= \frac{2PF}{G}$. Sed (per prop. XL) spatium quod globus in aqua cadendo tempore P describit, est $\frac{2PF}{G} - 1{,}3862944\,F$, neglecto, scilicet, termino 4,60517016 LF, qui ob parvitatem hic potest tutò contemni.

(x) 291. * *Minui debet in ratione &c.* Globi datâ velocitate moti resistentia in vase amplissimo sit *r*, in vase angustiore *R*, hujus vasis orificium æquale sit circulo *c*, cir-

componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi, id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod globus cadendo in aquâ in hoc vaſe ligneo tempore minutorum quatuor ſecundorum per theoriam deſcribere debuit quamproximè. Deſcripſit verò digitos 112 per experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{5}$ granorum in aere & $5\frac{1}{18}$ granorum in aquâ, ſucceſſivè demittebantur; & unuſquiſque cecidit in aquâ tempore minutorum ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Com-

circulus globi maximus ſit m, denſitas globi δ, denſitas fluidi d; vis uniformis quâ totus globi motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ uniformiter deſcriberet tolli poſſit vel generari, ſit p. Et (per prop. XXXVIII.) erit $p : r = \delta : d$; & (per prop. XXXIX.) $R : p = d c^3 : \delta \left[c - \frac{1}{2}m\right] \times [c-m]^2$; & propterea, conjunctis his rationibus, $R : r = c^3 : \left[c - \frac{1}{2}m\right] \times \left[c-m\right]^2$. Datâ igitur velocitate globi, reſiſtentia in vaſe ampliſſimo eſt ad reſiſtentiam in vaſe anguſtiore in datâ ratione $\left[c - \frac{1}{2}m\right] \times [c-m]^2$ ad c^3. Brevitatis causâ ponatur r ad R ut 1 ad n. Quando velocitas in vaſe ampliſſimo maxima eſt, ſeu H, reſiſtentia æqualis eſt ponderi B globi in aqua, & F eſt ſpatium quod globus tempore G vi ponderis B ſine reſiſtentia cadendo deſcribit ut velocitatem illam H acquirat. Sit h velocitas maxima globi in vaſe anguſtiore, quam cum acquiſivit, reſiſtentia ejus æqualis eſt ponderi B; & cum reſiſtentia globi in vaſe anguſtiore æqualis ſit nB ubi velocitas ejus eſt H (ex demonſtratis), & reſiſtentiæ ſint ut quadrata velocitatum, erit $HH : hh = nB : B = n : 1$, ideoque $H : h = \sqrt{n} : 1$. Sit g tempus quo globus ponderе B ſine reſiſtentiâ cadendo acquirit velocitatem h, & f ſpatium quod eodem tempore deſcribit; & erit $H : h = \frac{F}{g} : \frac{f}{g}$, ac proinde $\frac{F}{G} : \frac{f}{g} \sqrt{n} : 1$. Porro ſpatia in vaſe ampliſſimo tempore P, quod ſatis magnam habet rationem ad tempus G, cadendo deſcripta, ſunt quam proximè ut $\frac{2PF}{G}$, ſeu ut ſpatia eodem tempore motu maximo deſcripta, ut ex prop. XL. & ex tabulâ huic ſcholio præfixâ patet; & ſimiliter ſpatium eodem tempore P in vaſe anguſtiore deſcriptum erit etiam ut $\frac{2Pf}{g}$ ferè. Quare cum ſit $\frac{2PF}{G}$ ad $\frac{2Pf}{g}$ ut $\frac{F}{G}$ ad $\frac{f}{g}$, id eſt eſt (ex demonſtr.) ut $\sqrt{n}$ ad 1; ſpatium tempore P in vaſe ampliſſimo deſcriptum erit ad ſpatium eodem tempore in vaſe anguſtiore deſcriptum, ut $\sqrt{n}$ ad 1, id eſt, ut $c^{\frac{3}{2}}$ ad $[c-m] \times \left[c - \frac{1}{2}m\right]^{\frac{1}{2}}$, aut quod idem eſt, in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis c ad exceſſum $c - \frac{1}{2}m$ orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi, & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem c ad exceſſum ejus $c-m$, ſupra circulum maximum globi.

291.

DE MOTU CORPORUM.

Computum (y) incundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{12}$ *gran.* exceſſus hujus ponderis ſupra pondus in aquâ $71\frac{17}{48}$ *gran.* diameter globi 0,81296 *dig.* octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig.* ſpatium 2F 2,3217 *dig.* ſpatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran.* tempore $1''$ ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribat 12,808 *dig.* & tempus G $0'',301056$. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum poteſt in aquâ vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran.* deſcendere, tempore $0'',301056$ deſcribet ſpatium 2,3217 *dig.* & tempore $15''$ ſpatium 115,678 *dig.* Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 1,609 *dig.* & manebit ſpatium 114,069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore in vaſe latiſſimo cadendo deſcribere debet. Propter anguſtiam vaſis noſtri detrahi debet ſpatium 0,895 *dig.* circiter. Et ſic manebit ſpatium 113,174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vaſe, tempore $15''$ deſcribere debuit per theoriam quamproximè. Deſcripſit vero digitos 112 per experimentum. Differentia eſt inſenſibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera ſeorſim erant 121 *gran.* in aere & 1 *gran.* in aquâ, ſucceſſive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus $46''$, $47''$, & $50''$, deſcribentes altitudinem digitorum 112.

Per theoriam (z) hi globi cadere debuerunt tempore $40''$ cir-

Sed vaſis orificium *c* eſt 81 digitorum (ex dictis initio ſcholii hujus), & circuli *m* diameter inventa eſt 0,84224 partium digiti, ideoque ſi dicatur ut 7 ad 11 ita 0,84224 digit. ad ſemiperipheriam circuli *m*, hæc invenietur digit. 1,32352, & hinc circulus *m* prodit 0,5573 partium digiti quadrati circiter; ex quibus habetur $\frac{c}{c-m} = 1{,}0069$, & $\frac{c^{\frac{1}{2}}}{\left[c-\frac{1}{2}m\right]^{\frac{1}{2}}} = 1{,}0017$, ac proinde $\frac{c^{\frac{3}{2}}}{[c-m]\times\left[c-\frac{1}{2}m\right]^{\frac{1}{2}}} = 1{,}00561$. Quare ſpatium in vaſe ampliſſimo deſcriptum digit. 113,0569 eſt ad ſpatium in vaſe anguſtiore eodem tempore minutorumquatuor ſecundorum deſcriptum, ut 1,00861 ad 1, ſeu ut 1 ad 0,9914 ferè; unde hoc ſpatium prodit 111,08 digit.

(y) * *Computum ineundo &c.* Calculo experimenti primi fuſe expoſito, nulla ſupereſt difficultas in computo ſimili experimenti hujus.

(z) * *Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter.* Cum pondus globi ſit 121 granorum in aëre, & 1 grani in aqua, erit pondus æqualis globi aquæ granorum 120; & ideo pondus globi in vacuo gran. $121\frac{120}{860}$ ſeu $121\frac{6}{43}$ (287). Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi

circiter. Quod tardius ceciderunt, utrum minori proportioni resistentiæ quæ à vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad resistentiam quæ oritur ab aliis causis tribuendum sit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempestatis vel manus globum demittentis, vel etiam erroribus insensibilibus in ponderandis globis in aquâ, incertum esse puto. Ideoque pondus globi in aquâ debet esse plurium granorum, ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus descripta cœpi, ut investigarem resistentias fluidorum, antequam theoria in propositionibus proximè præcedentibus expositа mihi innotescceret. Postea, ut theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine internâ digitorum $8\frac{2}{3}$; profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cerâ & plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in aquâ. Et hos demisi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur & postea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, & cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aquâ extantis descensus eorum sub initio accelereretur. Et ubi penitùs immersi quiescebant, demittebantur quam cautissimè, ne impulsum aliquem à manu demittente acci-

bi in aqua est gran. 120 $\frac{6}{43}$. Unde prodeunt globi diameter 0,9671 partium digiti, spatium $2F$ 2,6004 digitorum, spatium quod globus pondere 1 grani sine resistentia cadendo tempore minuti unius secundi describit digit. 1,5959, & tempus G 0″,9026. Hoc tempore globus cum velocitate maximâ H uniformiter progrediendo describet spatium $2F$ seu 2,6004 dig. & tempore 40″ describet spatium 115,2404 did. Subducatur spatium 1,3862944 F seu 1,8024 dig., & manebit spatium 113,438 dig. quod globus cadendo in aqua in vase ampliſſimo tempore 40″ describeret; & hoc spatium, propter angustiam vasis aliquantulum minui debet, nimirum in ratione 10049 ad 10025 circiter. Globi igitur per theoriam spatium 112 digitorum cadendo describere debuerunt tempore 40″ circiter. 293.

DE MOTU CORPORUM.

acciperent. Ceciderunt autem ſucceſſivè temporibus oſcillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempeſtas jam paulò frigidior erat quàm cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oſcillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Experimento ſæpius capto, globi ceciderunt maximâ ex parte temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, ſuſpicor eoſdem retardatos fuiſſe impingendo in latera vaſis.

Jam computum per theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum. Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aquâ $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2 F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi, fine reſiſtentiâ cadendo deſcribit 9,88164 *dig.* Et tempus G $0'',376843$. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum poteſt in aquâ vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum deſcendere, tempore $0'',376843$ deſcribit ſpatium 2,8066 digitorum, & tempore $1''$ ſpatium 7,44766 digitorum, & tempore $25''$ ſeu oſcillationum 50 ſpatium 186,1915 *dig.* Subducatur ſpatium 1,386294 F, ſeu 1,9454 *dig.* & manebit ſpatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vaſe latiſſimo deſcribet. Ob anguſtiam vaſis noſtri, minuatur hoc ſpatium in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum hujus orificii ſupra ſemicirculum maximum globi, & ſimplici ratione ejuſdem orificii ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; & habebitur ſpatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vaſe tempore oſcillationum 50 deſcribere debuit per theoriam quamproximè. Deſcripſit verò ſpatium 182 digitorum tempore oſcillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in aquâ ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 & 33,

33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 29 quamproximè.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{1}{8}$ *gran.* in aere & $79\frac{1}{2}$ in aquâ ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 15 quamproximè.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in aquâ ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum ſemiſſe.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 28 quamproximè.

Cauſam inveſtigando cur globorum, ejuſdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oſcillarent circum centra, latere illo quod forte gravius eſſet primum deſcendente, & motum oſcillatorium generante. Nam per oſcillationes ſuas globus majorem motum communicat aquæ, quam ſi ſine oſcillationibus deſcenderet; & communicando, amittit partem motus proprii quo deſcendere deberet: & pro majore vel minore oſcillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recidit ſemper à latere ſuo quod per oſcillationem deſcendit, & recedendo appropinquat lateribus vaſis & in latera nonnunqnam impingitur. Et hæc oſcillatio in globis gravioribus fortior eſt, in majoribus aquam magis agittat. Quâpropter, ut oſcillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cerâ & plumbo conſtruxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope ſuperficiem ejus; & globum ita demiſi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, eſſet infimum ab initio deſcenſus. Sic oſcillationes factæ ſunt multo minotes

DE MOTU CORPORUM.

nores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis ſequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aquâ, ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maximâ ex parte tempore oſcillationum 51 circiter, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aere & $140\frac{3}{4}$ in aquâ, ſæpius demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam verò hi globi cadere debuerunt tempore oſcillationum $11\frac{1}{3}$ quamproximè.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aquâ, ſæpe demiſſi, cadebant temporibus oſcillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, deſcribentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oſcillationum 19, nonnunquam audivi impulſum eorum in latera vaſis antequam ad fundum pervenerunt.

Per theoriam verò cadere debuerunt tempore oſcillationum $15\frac{1}{9}$ quamproximè.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{29}{32}$ in aquâ ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maximâ ex parte 44 & 45, deſcribentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $46\frac{1}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{3}{8}$ in aquâ, aliquoties demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum 61, 62, 63, 64 & 65, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Et per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $64\frac{1}{3}$ quamproximè.

Per

Per hæc experimenta manifeſtum eſt quod, ubi globi tardè ceciderunt, ut in experimentis ſecundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi rectè exhibentur per theoriam, at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis ſextis, nonis ac decimis, (a) reſiſtentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oſcillant aliquantulum: & hæc oſcillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motus languorem citò ceſſat; in gravioribus autem & majoribus, ob motus fortitudinem diutius durat, & non niſi poſt plures oſcillationes ab aquâ ambiente cohiberi poteſt. Quinetiam globi, quo velociores ſunt, eo minus premuntur à fluido ad poſticas ſuas partes; & ſi velocitas perpetuo augeatur, ſpatium vacuum tandem à tergo relinquent, (b) niſi compreſſio fluidi ſimul augeatur. Debet autem compreſſio fluidi (per prop. XXXII. & XXXIII.) (c) augeri in duplicatâ ratione velocitatis, ut reſiſtentia ſit in eâdem duplicatâ ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulò minus premuntur à tergo, & defectu preſſionis hujus, reſiſtentia eorum fit paulo major quam in duplicatâ ratione velocitatis.

Congruit igitur theoria cum phænomenis corporum cadentium in aquâ, reliquum eſt ut examinemus phænomena cadentium in aere.

Exper. 13. A culmine eccleſiæ Sancti *Pauli*, in urbe *Londini*, menſe Junio 1710 globi duo vitrei ſimul demittebantur, unus

(a) * *Reſiſtentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis.* Si enim reſiſtentia accurate eſſet in duplicatâ velocitatis ratione, tempora cadendi tam per experimenta quam per theoriam definita, æquarentur; At ſi reſiſtentia major quam in duplicatâ ratione velocitatis, tempora quibus corpus cadendo datum ſpatium deſcribit, majora eſſe debent in experimentis quam in theoriâ, quæ minorem reſiſtentiam ſupponit.

(b) * *Niſi compreſſio fluidi ſimul augeatur.* Tanta enim eſſe poteſt globi velocitas, ut fluidum ad poſticas illius partes ſatis citò recurrere & locum à globo relictum ſtatim occupare nequeat, niſi fluidi compreſſio augeatur, ut per fluidum preſſio & motus celerius propagentur. 291.

(c) * *Augeri in duplicatâ ratione velocitatis &c.* Nam partes fluidi per compreſſionem in ſe mutuo agunt & reagunt; & ſi vires quibus fluidi particulæ ſe mutuò agitant, augeantur in duplicatâ ratione velocitatis, reſiſtentia eſt in eâdem ratione duplicatâ, per cor. 2. prop. XXXIII.

DE MOTU CORPORUM.

unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo describebant altitudinem pedum *Londinensium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbebat; & globi duo huic tabulæ impositi simul demittebantur, subtrahendo pessulum ope fili ferrei ad terram usque demissi ut tabula polis ferreis solummodo innixa super iisdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum illud ferreum tractum demitteretur & oscillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in (d) tabulâ sequente.

Globorum mercurio plenorum			*Globorum aere plenorum.*		
Pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi.*	*Pondera*	*Diametri*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	$4''$	510 *gran.*	5,1 *digit.*	$8''\frac{1}{2}$
983	0,8	4 −	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 +	515	5,0	$8\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	$8\frac{1}{2}$
784	0,75	4 +	641	5,2	8

Cæterum tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per theoriam *Galilæi*) minutis quatuor secundis (e) describent pedes *Londinenses* 257, & pedes 220 minutis tantum $3''$ per breve tempus descendunt; sed gravia omnia in vacuo cadentia tempore minuti unius secundi describunt pedis Londinensis digitos $193\frac{1}{3}$ (289), & spatia descripta sunt in duplicatâ ratione temporum (27. lib. 1.). Quare ut 1 ad 16 ita $193\frac{1}{3}$ dig. ad spatium quod globus mercurio plenus tempore $4''$ cadendo describit, quod proinde erit 3093 dig. seu 257 pedum Londinensium circiter. Simili modo, cum sit $3''$.

(d) * *In tabulâ* sequente 4 − significat tempus cadendi minutis quatuor secundis paulo minus fuisse, & 4 + tempus minutis quatuor secundis paulo majus indicat.

(e) * *Describent pedes Londinenses &c.* Quoniam densitas mercurii est ad densitatem aëris ut 11890 ad 1 circiter, parùm admodum minuitur mercurii pondus in aere, & ideo globi mercurio pleni eâdem ferè celeritate in aëre & in vacuo

$3''\ 42'''$. Tabula lignea utique, detracto peſſulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tardâ ſuâ devolutione impediebat deſcenſum globorum ſub initio. Nam globi incumbebant tabulæ prope medium ejus, & paulò quidem propiores erant axi ejus quam peſſulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præſertim in globis majoribus qui tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi ſex majores cecidere, evadent $8''\ 12'''$, $7''\ 42'''$, $7''\ 42'''$, $7''\ 57'''$, $8''\ 12'''$, & $7''\ 42'''$.

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 conſtructus, cecidit tempore $8''\ 12'''$, deſcribendo altitudinem pedum 220. (f) Pondus aquæ huic globo æqualis eſt 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis eſt $\frac{16600}{860}$ *gran.* ſeu $19\frac{3}{10}$ *gran.* ideoque pondus globi in vacuo eſt $502\frac{3}{10}$ *gran.* & hoc pondus eſt ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita ſunt 2F ad octo tertias partes diametri globi, id eſt, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in vacuo, toto ſuo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi deſcribit digitos $193\frac{1}{3}$ ut ſupra, & pondere 483 *gran.* deſcribit digitos 185,905, &

$3''.\ 42''' = 3''.7$, erit 1 ad 13.69 ut $193\ \frac{1}{3}$ dig. ad ſpatium tempore $3''.\ 42'''$ deſcriptum quod prodit ped. Lond. 220 circiter. Sed globi mercurio pleni ſpatium hoc 220 ped. tempore $4''$ deſcribunt in experimentis, & differentia temporum $4''$ & $3''.\ 42'''$ eſt $18'''$. Tempora igitur prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter.

(f) * *Pondus aquæ huic globo æqualis eſt* 16600 *granorum.* Globus aqueus, cujus diameter eſt unius digiti continet grana 132,8 (:87), & globorum homogeneorum, pondera ſunt ut diametrorum cubi, & propterea ut 1 ad 125 ita ſunt 132.8 grana ad pondus globi aquei cujus diameter eſt digitorum 5, quod proinde pondus eſt gran. 16600. Globorum æqualium pondera ſunt ut illorum denſitates, & denſitas aquæ eſt ad denſitatem aëris ut 860 ad 1. Quare pondus globi aëris diametro digitorum 5 deſcripti eſt $\frac{16600}{860}$ ſeu $19\frac{3}{10}$ gran. quam proximè. Hinc pondus globi vitrei aëre pleni in vacuo eſt gran. $483 + 19\frac{3}{10}$ ſeu gran. $502\ \frac{3}{10}$, & hoc pondus eſt ad pondus aëris globo æqualis, id eſt, denſitas globi, ſi homogeneus fingatur, ad denſitatem aëris, ut $502\ \frac{3}{10}$ ad $19\ \frac{3}{10}$, *& ita ſunt* 2F *&c.*, cætera patent ut in ſuperioribus calculis. 191.

DE MOTU CORPORUM.

& eodem pondere 483 *gran.* etiam in vacuo deſcribit ſpatium F ſeu 14 *ped.* $5\frac{1}{2}$ *dig.* (g) tempore $57''' 58''''$, & velocitatem maximam acquirit quâcum poſſit in aere deſcendere. Hâc velocitate globus, tempore $8'' 12'''$, deſcribet ſpatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1,3863 F ſeu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc ſpatium igitur globus tempore $8'' 12'''$, cadendo deſcribere debuit per theoriam. Deſcripſit verò ſpatium 202 pedum per experimentum. Differentia inſenſibilis eſt.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci tabulam ſequentem.

Globorum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 220.*	*Spatia deſcribenda per theoriam.*	*Exceſſus.*
510 *gran.*	5,1 *dig.*	$8''$ $12'''$	226 *ped.* 11 *dig.*	6 *ped.* 11 *dig.*
642	5,2	7 42	230 9	10 9
599	5,1	7 42	227 10	7 10
515	5	7 57	224 5	4 5
483	5	8 12	225 5	5 5
641	5,2	7 42	230 7	10 7

Exper. 14. Anno 1719. menſe Julio, D. Deſaguliers hujuſmodi experimenta iterum cepit, formando veſicas porcorum in orbem ſphæricum ope ſphæræ ligneæ concavæ ambientis; quam madefactæ implere cogebantur inflando aerem; & haſce arefactas & exemptas demittendo ab altiore loco in templi ejuſdem turri rotunda fornicata, nempe ab altitudine pedum 272; & eodem temporis momento demittendo etiam glo-

(g) 292. **Tempore* $57''' 58''''$. Hoc tempus, quod ante dictum eſt *G*, ducatur in numerum 5, & productum erit fere 5''; & propterea (186) globus cujus diameter eſt 5 digit. & pondus in aëre gran. 483, tempore minutorum ſecundorum quinque deſcribet ſpatium 124 pedum circiter, & deinde videbitur uniformiter deſcendere.

globum plumbeum cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui ſtantes in ſupremâ parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, & alii ſtantes in terrâ notabant differentiam temporum inter caſum globi plumbei & caſum veſicæ. Tempora autem menſurabantur pendulis ad dimidia minuta ſecunda oſcillantibus. Et eorum qui in terrâ ſtabant unus habebat horologium cum elatere ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam affabrè conſtructam cum pendulo etiam ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante. Et ſimilem machinam habebat unus eorum qui ſtabant in ſummitate templi. Et hæc inſtrumenta ita formabantur, ut motus eorum pro lubitu vel inciperent vel ſiſterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum ſecundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum quo veſica cecidit. Tempora, quibus veſicæ quinque poſt caſum globi plumbei primâ vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}''$, $17\frac{3}{4}''$, & $16\frac{7}{8}''$, & ſecundâ vice $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$ & $16\frac{3}{4}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, & tempora tota quibus veſicæ quinque ceciderunt, erant primâ vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$, & $21\frac{1}{8}''$; & ſecundâ vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$, & $21''$. Tempora autem in ſummitate templi notata, erant primâ vice $19\frac{1}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$, & $21\frac{5}{8}''$; & ſecundâ vice $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$, & $21\frac{1}{4}''$. Cæterum veſicæ non ſemper rectâ cadebant, ſed nonnunquam volitabant, & hinc inde oſcillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata ſunt & aucta nonnunquam dimidio minuti unius ſecundi, nonnunquam minuto ſecundo toto. Cadebant autem rectius veſica ſecunda & quarta primâ vice; & prima ac tertia ſecundâ vice. Veſica quinta rugoſa erat & per rugas ſuas nonnihil retardabatur. Diametros veſicarum deducebam ex earum circumferentiis filo tenuiſſimo bis circundato menſuratis. Et theoriam contuli cum experimentis in tabulâ ſequente, aſſumendo denſita-

tem

DE MOTU CORPORUM. tem aeris esse ad densitatem aquæ pluvialis ut 1 ad 860, & computando spatia quæ globi per theoriam describere (h) debuerunt cadendo.

Vesicarum pondera	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.*	*Spatia iisdem temporibus describenda per theoriam.*	*Differentia inter theor. & exper.*
128 *gran.*	5,28 *dig.*	$19''$	271 *ped.* 11 *dig.*	−0 *ped.* 1 *dig.*
156	5,19	17	272 $0\frac{1}{2}$	+0 $0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272 7	+0 7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277 4	+5 4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282 0	+10 0

Globorum igitur tam in aere quam in aquâ motorum resistentia prope omnis per theoriam nostram rectè exhibetur, ac densitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis est.

In scholio, quod sectioni sextæ subjunctum est, ostendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in aere, aquâ, & argento vivo motorum resistentiæ sunt ut fluidorum densitates. (i) Idem hic ostendimus magis ac-

(h) * *Describere debuerunt cadendo.* Exempli causâ calculum tentabimus experimenti cum tertia vesica facti. Hujus vesicæ diameter erat 5.3 digitorum & pondus in aëre granorum 137, 5. Globus aëris diametro digitorum 5.3 descriptus continet 23 grana quam proxime; unde vesicæ pondus in vacuo erat gran. 160,5, & ut 23 ad 160, 5 ita sunt octo tertiæ partes diametri vesicæ seu digiti $14\frac{2}{15}$ ad spatium 2 *F*, quod ita prodit digit. 98,626. Vesica cadendo in vacuo toto suo pondere 160,5 gran. tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$, & pondere 137,5 gran. describit digitos 165,628, & eodem pondere 137,5 gran. etiam in vacuo describit spatium *F* digitorum 49,313 tempore 0″,5456 & velocitatem maximam acquirit cum quâ possit in aëre descendere. Hâc velocitate vesica tempore minutorum secundorum $18\frac{1}{2}$ describet spatium 278 ped. & 8. digit. circiter. Subducatur spatium 1,3863 *F* seu 5. ped. & 8 digit., & manebunt 273 pedes; cum in tabula accuratiore calculo confecta spatium per theoriam describendum sit 272 ped. & 7 digit., & in experimento sit 272 ped.

(i) * *Idem hic ostendimus &c.* Nam theoria experimentis confirmatur, cui superiores computationes nituntur, supponit resistentiam, cæteris paribus, esse in ratione compositâ ex ratione duplicatâ velocitatis mobilis & ratione simplici densitatis fluidi.

accuratè per experimenta corporum cadentium in aëre & aquâ. Nam pendula ſingulis oſcillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis ſemper contrarium, & reſiſtentia ab hoc motu oriunda, ut & reſiſtentia fili quo pendulum ſuſpendebatur, totam penduli reſiſtentiam majorem reddiderunt quam reſiſtentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in ſcholio illo expoſita, globus ejuſdem denſitatis cum aquâ, deſcribendo longitudinem ſemidiametri ſuæ in aëre, amittere deberet motus ſui partem $\frac{1}{3342}$. At per theoriam in hac ſeptimâ ſectione expoſitam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem deſcribendo longitudinem eandem, (k) amittere deberet motus ſui partem tantum $\frac{1}{4583}$, poſito quod denſitas aquæ ſit ad denſitatem aëris ut 860 ad 1. Reſiſtentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob cauſas jam deſcriptas) quam per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum pendulorum in aëre, aquâ & argento vivo oſcillantium reſiſtentiæ à cauſis ſimilibus ſimiliter augeantur, proportio reſiſtentiarum in his mediis, tam per experimenta pendulorum, quam per experimenta corporum cadentium, ſatis rectè exhibebitur. Et inde concludi poteſt quod corporum in fluidis quibuſcunque fluidiſſimis motorum reſiſtentiæ, cæteris paribus, ſunt ut denſitates fluidorum.

His

(k) * *Amittere deberet motus ſui partem tantùm* $\frac{1}{4586}$. Sit D diameter globi V ejus velocitas ſub initio motus in fluido, $2F$ ſpatium quod ſit ad $\frac{8}{3}D$ ut denſitas globi ad denſitatem aëris, hoc eſt, ut 860 ad 1, ideoque $2F = \frac{6880}{3}D$; ſit T tempus quo globus cum velocitate V uniformiter progrediendo deſcribit ſpatium $2F$, & t tempus quo eâdem uniformi velocitate deſcribit ſpatium $\frac{1}{2}D$; & erit $t : T = \frac{1}{2}D : \frac{6880}{3}D = 3 : 13760$, & inde $t : T + t = 3 : 13763$, ideoque $\frac{t}{T+t} = \frac{3}{13763} = \frac{1}{4586}$ quam proximè. Eſt autem $\frac{tV}{T+t}$ velocitatis V pars amiſſa tempore t (per cor. 3. prop. 38.). Globus igitur deſcribendo longitudinem ſemidiametri ſuæ in aëre, per theoriam in hac ſeptimâ ſectione expoſitam amittere debet motus ſui partem $\frac{1}{4586}$. 291.

DE MOTU CORPORUM.

(l) His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motus ſui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproximè. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus ſub initio motus, & T tempus, quo globus velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}$D ut denſitas globi ad denſitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, per corol. VII. prop. XXXV. In motibus tardis reſiſtentia poteſt eſſe paulò minor, (m) propterea quod figura globi paulo aptior ſit ad motum quam figura cylindri eâdem diametro deſcripti. In motibus velocibus reſiſtentia poteſt eſſe paulò major, propterea quod elaſticitas & compreſſio fluidi non (n) augeantur in duplicatâ ratione velocitatis. Sed hujuſmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis aër, aqua, argentum vivum & ſimilia fluida, per diviſionem partium in infinitum, ſubtiliarentur & fierent media infinitè fluida; tamen globis projectis haud minus reſiſterent. Nam reſiſtentia, de quâ agitur in propoſitionibus præcedentibus oritur ab inertiâ materiæ; & inertia materiæ cor-

(l) * *His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motus ſui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus* & ſolâ vi inſitâ motus, *dato tempore amittet quam proximè*; theoriam enim cum experimentis conſentire vidimus tum in fluidis elaſticis, quale eſt aër, tum in fluidis non elaſticis, quale eſt aqua. Quæ ſequuntur, manifeſta ſunt per notam ad cor. 3. prop. XXXVIII. (282).

(m) * *Propterea quod figura globi paulo aptior ſit ad motum &c.* Nam in Lemmate VII. lib. II. & in ſequentibus propoſitionibus ſuppoſitum eſt, globi & cylindri, quorum eadem eſt diameter, æqualem eſſe reſiſtentiam.

(n) * *Non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis*, in quâ tamen augeri deberent, uti expoſitum eſt in experimento 12.

corporibus eſſentialis eſt & quantitati materiæ ſemper proportionalis. Per diviſionem partium fluidi, reſiſtentia quæ oritur à tenacitate & frictione partium diminui quidem poteſt: ſed quantitas materiæ per diviſionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui reſiſtentia, de quâ hic agitur, ſemper proportionalis eſt. Ut hæc reſiſtentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in ſpatiis per quæ corpora moventur. Et propterea ſpatia cœleſtia, per quæ globi planetarum & cometarum in omnes partes liberrimè & ſine omni motus diminutione ſenſibili perpetuo moventur; fluido omni corporeo deſtituuntur, ſi forte vapores longe tenuiſſimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab exceſſu preſſionis fluidi ad projectilis partes anticas ſupra preſſionem ad ejus partes poſticas, & non minor eſſe poteſt in mediis infinite fluidis quam in aere, aquâ & argento vivo pro denſitate materiæ in ſingulis. Hic autem preſſionis exceſſus, pro quantitate ſuâ, non tantum motum ciet in fluido, ſed (o) etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea reſiſtentia in omni fluido eſt ut motus in fluido à projectili excitatus, nec minor eſſe poteſt in æthere ſubtiliſſimo pro denſitate ætheris, quam in aëre, aquâ & argento vivo pro denſitatibus horum fluidorum.

(o) * *Sed etiam agit in projectile*, per motûs legem III.

De Motu Corporum.

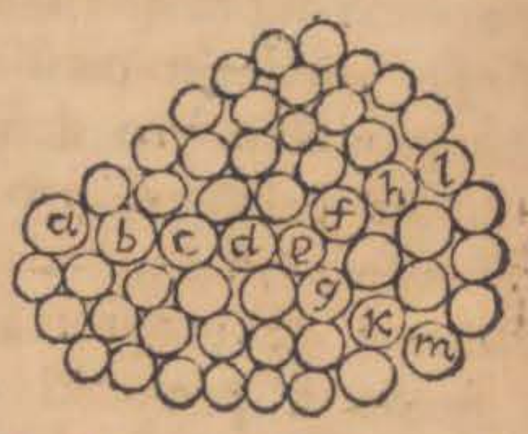
SECTIO VIII.

De motu per fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

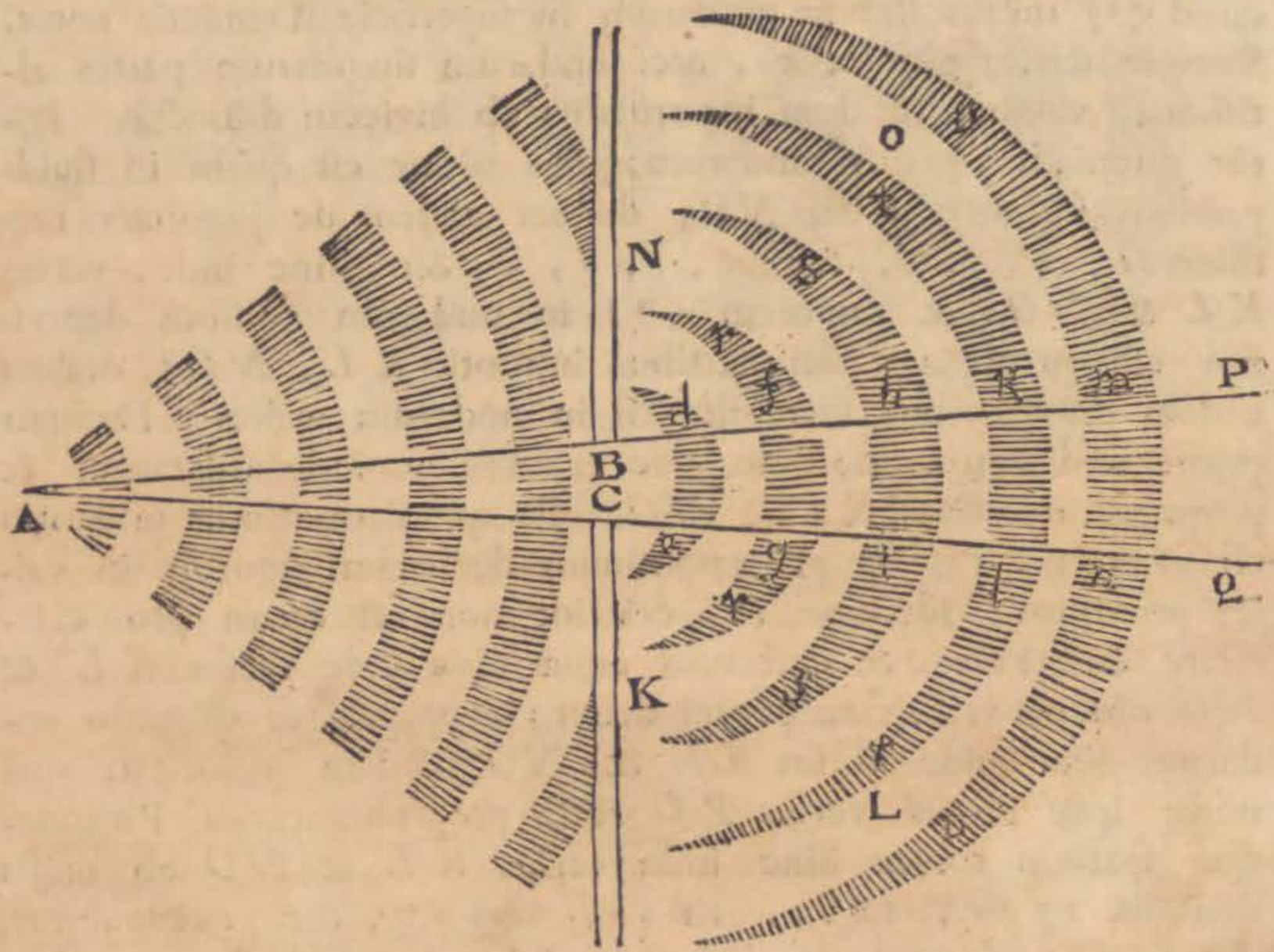
Preſſio non propagatur per fluidum ſecundum lineas rectas, niſi ubi particulæ fluidi in directum jacent.

Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in lineâ rectâ, poteſt quidem preſſio directè propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas obliquè poſitas *f* & *g* obliquè, & particulæ illæ *f* & *g* non ſuſtinebunt preſſionem illatam, niſi fulciantur à particulis ulterioribus *h* & *k*; quâtenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non ſuſtinebunt preſſionem niſi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* eaſque premant, & ſic deinceps in infinitum. Preſſio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & obliquè propagabitur in infinitum; & poſtquam incipit obliquè propagari, ſi inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accuratè in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*



Corol. Si preſſionis, à dato puncto per fluidum propagatæ, pars aliqua obſtaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in ſpatia pone obſtaculum. Id quod ſic etiam demonſtrari poteſt. A puncto *A* propagetur preſſio quâquâverſum, idque ſi fieri poteſt ſecundum lineas rectas, & obſtaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* tranſit. Planis tranſverſis *de*, *fg*, *hi* diſtinguatur conus *APQ* in fruſta; & interea dum conus *ABC*, preſſionem propagando, urget fruſtum conicum ulterius *degf* in ſuperficie *de*, & hoc fruſtum urget fruſtum proximum *fgih* in ſuperficie

cie fg, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motus legem tertiam) quod fruſtum primum $defg$, reactione fruſti ſecundi $fghi$, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie fg, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur $defg$ inter conum Ade & fruſtum $fhig$ comprimitur utrinque, & propterea (per corol. VI, prop. XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eâdem comprimatur undique. Eodem igitur impetu



quo premitur in ſuperficiebus de, fg, conabitur cedere ad latera df, eg; ubique (cum rigidum non ſit, ſed omnimodo fluidum) excurret ac dilatabitur, niſi fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam fluidum ambiens ad latera df, eg quam fruſtum $fghi$ eodem impetu; & propterea preſſio non minus propagabitur à lateribus df, eg in ſpatia NO, KL hinc inde, quam propagatur à ſuperficie fg verſus PQ. *Q. E. D.*

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

Motus omnis per fluidum propagatus divergit à recto tramite in ſpatia immota.

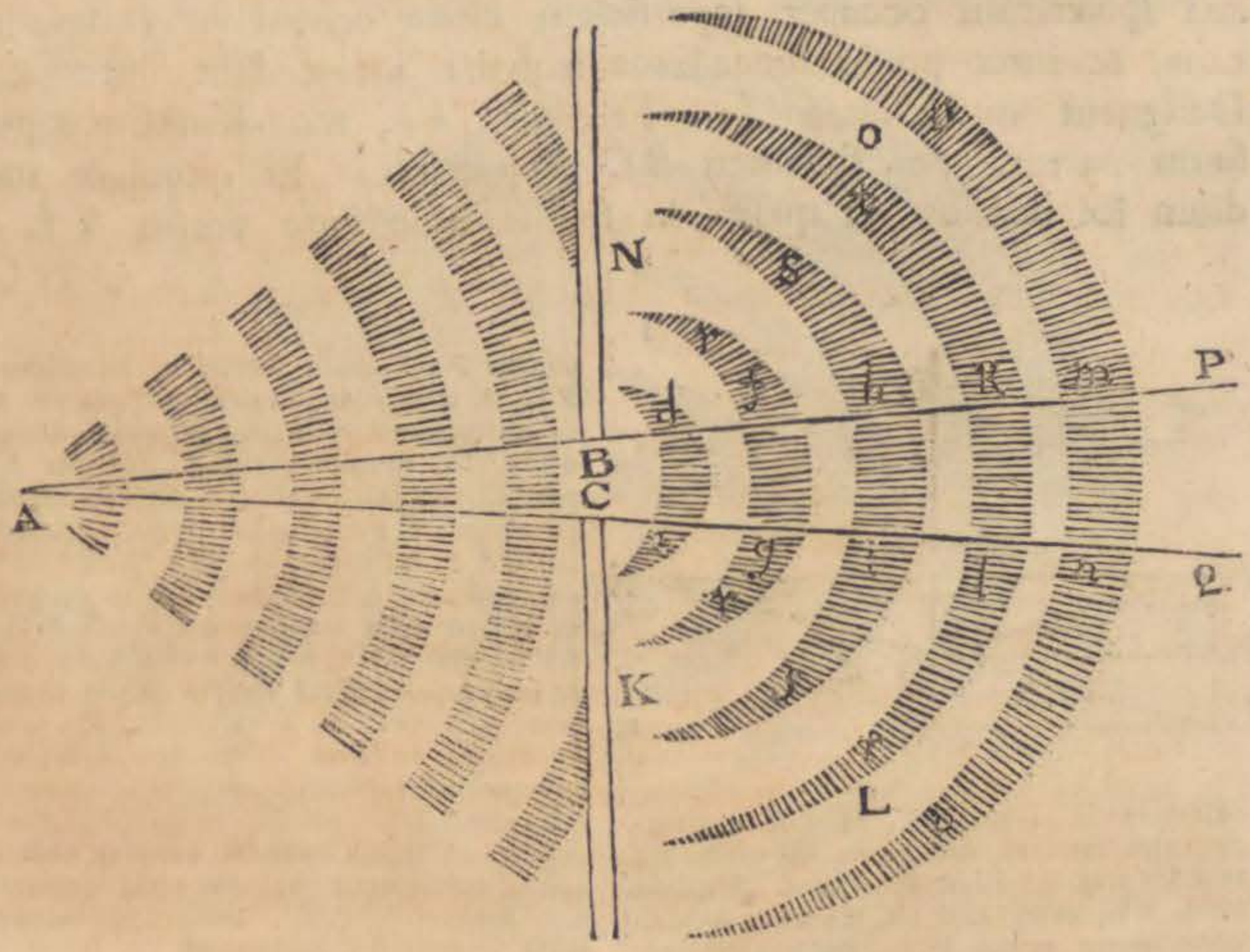
Caſ. 1. Propagetur motus à puncto *A* per foramen *BC*, pergatque, ſi fieri poteſt, in ſpatio conico *BCQP*, ſecundum lineas rectas divergentes à puncto *A*. Et ponamus primo quod (a) motus iſte ſit undarum in ſuperficie ſtagnantis aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum ſingularum partes altiſſimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem diſtinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eſt quam in fluidi partibus immotis *LK*, *NO*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde verſus *KL* & *NO*: & quoniam (b) in undarum vallibus depreſſior eſt quam in fluidi partibus immotis *KL*, *NO*; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, poſteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur verſus *KL* & *NO*. Et quoniam motus undarum ab *A* verſus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideoque (c) celerior non eſt quam pro celeritate deſcenſus; & deſcenſus aquæ hinc inde verſus *KL* & *NO* eâdem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde verſus *KL* & *NO* eâdem velocitate quâ undæ ipſæ ab *A* verſus *PQ* rectà progrediuntur. Proindeque ſpatium totum hinc inde verſus *KL* & *NO* ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita ſe habere quilibet in aquâ ſtagnante experiri poteſt. *Caſ.*

(a) *Motus iſte ſit undarum &c.* Vis quælibet deorſum directa in ſuperficiem ſtagnantis aquæ agat in A, & cavitate factâ, cogat aquam circumquaque aſcendere, aqua elevata vi propriæ gravitatis deſcendendo partim refluet in A, ad cavitatem replendam, partim in plagam oppoſitam feretur, & celeritate cadendo acquiſitâ novam cavitatem formabit, atquè ità deinceps undæ motus per ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum propagabitur in orbem.

(b) * *In undarum vallibus depreſſior eſt &c.* Aqua enim ab altioribus undarum partibus cadendo celeritatem acquirit, quâ infrà quieſcentis aquæ ſuperficiem deſcendit.

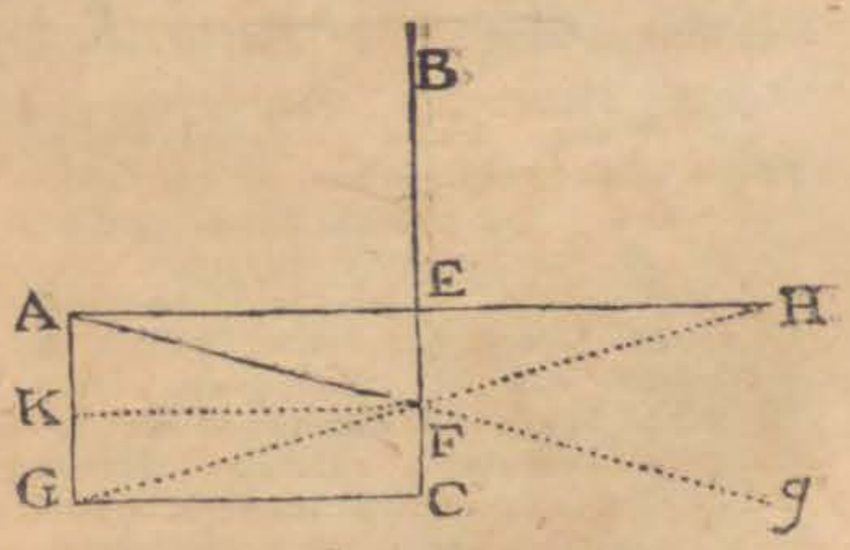
(c) * *Celerior non eſt* quam pro celeritate deſcenſûs ab eâdem undarum altitudine, undè aqua in plagas PQ, KL, NO æquè defluit.

Caſ. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* deſignent pulſus à puncto *A* per medium elaſticum ſucceſſive



pro-

293. Ex demonſtratis in hoc caſu, motus undæ in obſtaculum planum incurrentis definiri poteſt. Undarum motus è loco A quaſi centro propagetur. Incurrat unda in obſtaculi immoti B C punctum F, cum velocitate & directione A F. Ductâ ex A in B C perpendiculari A E, completoque rectangulo A E F K, reſolvatur motus A F, in duos alios motus A E, A K, ſeu factâ F C æquali A K, in motus K F, F C; & quia particulæ aquæ motu F C in obſtaculum non agunt, poſt impactum pergent eâdem quâ antè impactum velocitate ac directione F C moveri. At motu K F, in obſtaculum directè incurrentes motum illum omnem, juxtà leges conflictûs corporum non elaſticorum, amittent. Cum autem aqua in F ab aliâ inſequente urgeatur, & obſtaculum (per hyp.) cedere ne-

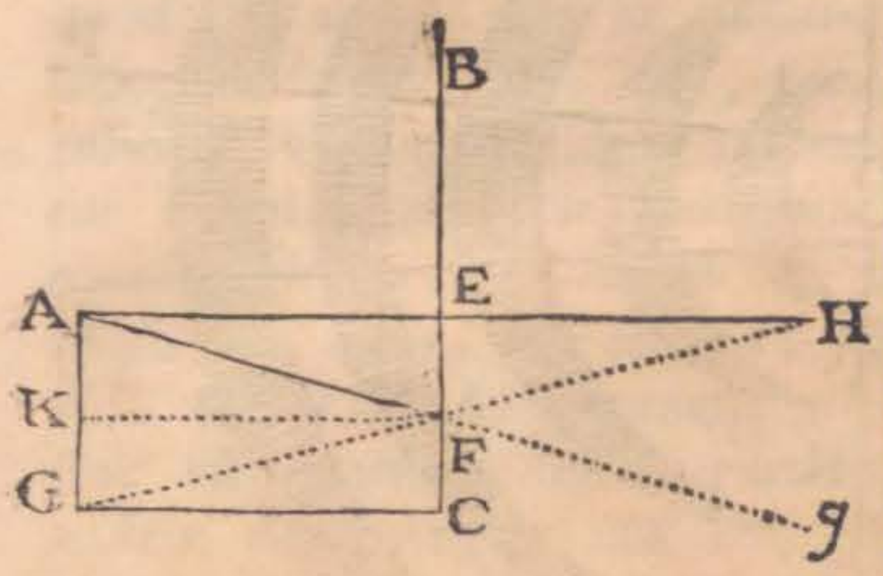


293.

queat, elevabitur illa in F; & deindè vi ponderis ſui, id eſt, vi æquali illi quâ per obſtaculi longitudinem elevata fuit, def-

DE MOTU CORPORUM.

propagatos. (d) Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones medii, ſic ut pulſus cujuſque pars denſiſſima ſphæricam occupet ſuperficiem circa centrum *A* deſcriptam, & inter pulſus ſucceſſivos æqualia intercedant intervalla. Deſignent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. denſiſſimas pulſuum partes, per foramen *BC* propagatas. Et quoniam medium ibi denſius eſt quam in ſpatiis hinc inde verſus *KL* & *NO*,

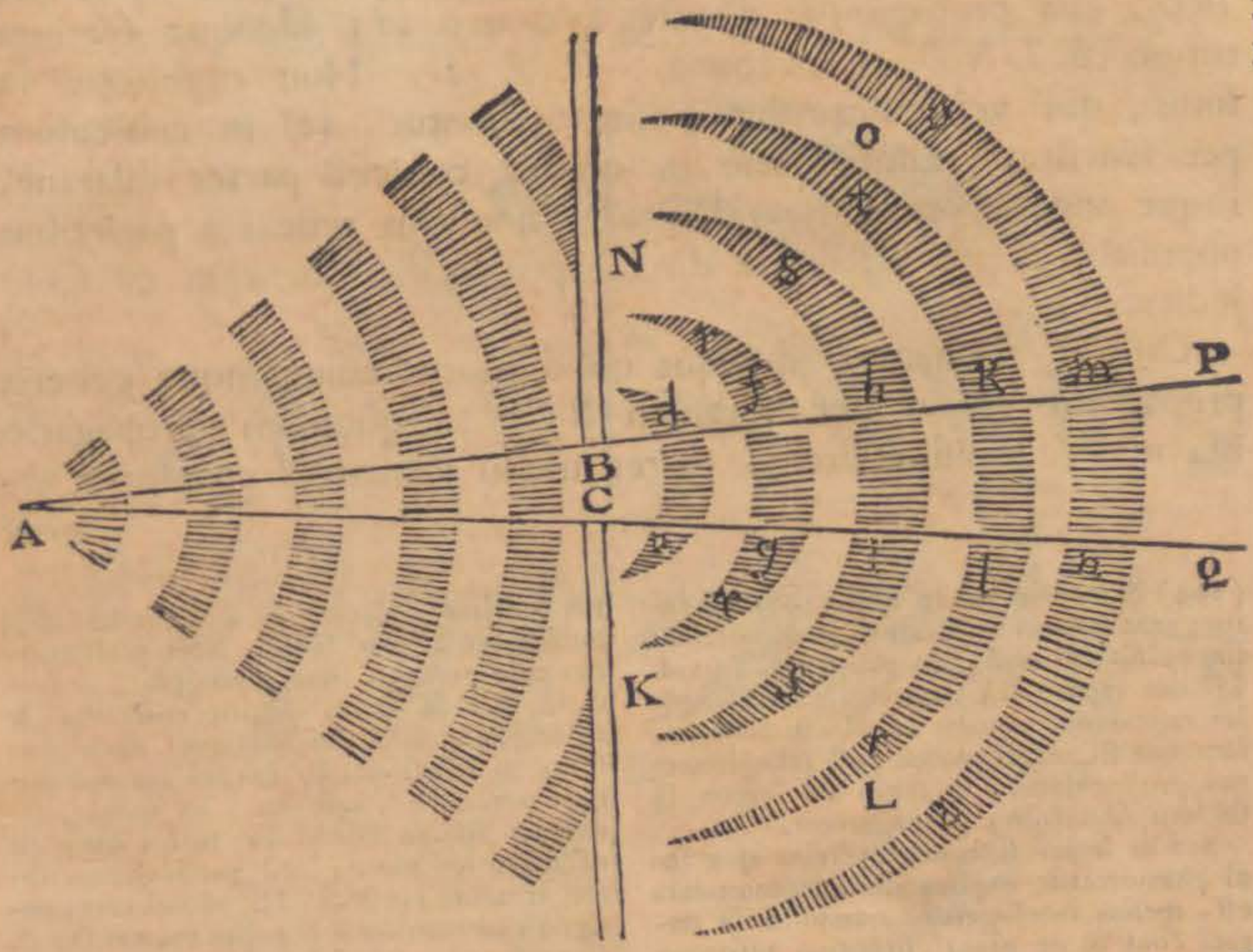


deſcendet in plagam FK, eâdemque proindè velocitate ac directione ab obſtaculo recedet quâ ad illud acceſſerat. Ex hoc motu FK, & ex alio FC in aquâ reſiduo componetur motus FG, per diagonalem parallelogrammi KFCG; unda igitur à puncto F reflectitur ſecundum directionem FG, & cum eâdem velocitate quâ per AF in obſtaculum incurrit, & quâ, ſublato obſtaculo, motum per Fg, ſeu per AF productam continuaſſet, eſtque angulus reflexionis GFC æqualis angulo incidentiæ AFE. Producatur jam linea GF ut perpendiculo AE etiam producto occurrat in H; & quia angulus EFH = CFG = EFA, erit EH = AE & FH = AF = FG, & ideò aqua reflexa eodem modo movebitur per FG, ac ſi ex puncto H, quaſi ex centro undarum motus propagaretur; cumque demonſtratio hæc omnibus obſtaculi plani BC punctis congruat, manifeſtum eſt undas reflexas eandem velocitatem eandemque figuram citrà obſtaculum obtinere, quas, ſublato obſtaculo, ultrà lineam BC habuiſſent.



(d) * 294. *Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones medii*, ità ut primum partes medii è puncto A quaquaverſum propulſæ eant & condenſentur, & ubi ſunt denſiſſimæ ſphæricam ſuperficiem circà centrum A deſcriptam occupare intelligantur, tum vi elaſticâ rarefiant & dilatatione ſuâ partim verſus centrum A redeant, partim à centro illo quaquaverſum recedant & partes vicinas propulſent, ita ut condenſentur, atque ità ſucceſſivis condenſationibus & dilatationibus agitetur totum medium. Quæ ut clarius intelligantur, motum particularum aëris in uno prædictæ ſphæræ radio contemplemur. Sint a, b, c, d &c. puncta phyſica medii quieſcentis in rectâ aq, ad æquales ab invicem diſtantias ſita. Punctum a, vi quâlibet acceleratrice urgeatur, ſecundùm directionem aq, & deindè ceſſante vis illius actione, per celeritatem acquiſitam moveatur. Non poterit ità moveri particula a, quin ſucceſſivè moveantur particulæ aliæ b, c, d, e, &c. & quia medium elaſticum in intervallis bc, cd, de, &c. gradatim condenſatur & vim elaſticam majorem acquirit quâ celeritas particulæ a, ſibi relictæ continuò minuitur ac tandem prorſus extinguitur, tum verò medium condenſatum vi ſuâ elaſticâ utrinquè tam verſus a, quam verſus q dilatatur, & particulas a, b, c, &c.

NO, (e) dilatabit ſeſe tam verſus ſpatia illa *KL*, *NO* utrinque ſita, quam verſus pulſuum rariora intervalla; eoque pacto rarius ſemper evadens è regione intervallorum ac den-



ſius è regione pulſuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur à perpetuâ relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora;

&c. in priſtina loca ſucceſſivè repellit, dum intereà aliæ particulæ ut g, h, &c. verſus q progrediuntur; quo motu medium rurſus condenſatur verſus q, & deindè utrinquè dilatatur, atquè ità deinceps pulſus per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones medii propagantur. * Hæc pulſuum in medio Elaſtico genitorum naturâ, ad Propoſ. XLVII. fuſius expendetur, ſed iſto in loco hæc ſufficere videntur.

(e) * *Dilatabit ſe tam verſus &c.* Per vim elaſticam quæ vi comprimenti quâ partes medii condenſantur, æqualis eſt, & in omnem loci circumferentiam agit. 294

295. Motus pulſuum in medio elaſtico ſpectari poteſt ut analogus cum motu undarum in ſuperficie aquæ ſtagnantis; nam condenſatio partium medii elaſtici locum tenet elevationis aquarum, vis elaſtica medii locum gravitatis aquæ, & pars pulſuum denſiſſima parti undarum altiſſimæ correſpondet. Undè in utroque motu, medii particulæ per brevia ſpatia eunt & redeunt, intereadum pulſus vel unda propagatur

DE MOTU CORPORUM.

ra; & pulſus eâdem ferè celeritate ſeſe in medii partes quieſtes KL, NO hinc inde relaxare debent; pulſus illi eâdem ferè celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota KL, NO, quâ propagantur directè à centro A; ideoque ſpatium totum $KLNO$ occupabunt. $Q.E.D.$ Hoc experimur in ſonis, qui vel monte interpoſito audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi à parietibus oppoſitis, quam à feneſtrâ directè propagati, quantùm ex ſenſu judicare licet.

Caſ. 3. Ponamus denique quod motus cujuſcunque generis propagetur ab A per foramen BC: & quoniam propagatio iſta non fit, niſi quâtenus partes medii centro A propiores urgent

(294) & eodem modo quo (293) undarum reflexionem expoſuimus, demonſtratur pulſus ab obſtaculo plano BC, (vid. fig. not. 293.) ità repercuti ut ſit angulus reflexionis æqualis angulo incidentiæ, idemque ſit medii motus poſt reflexionem qui produceretur, ſi pulſus ex centro H ſublato obſtaculo, propagaretur.

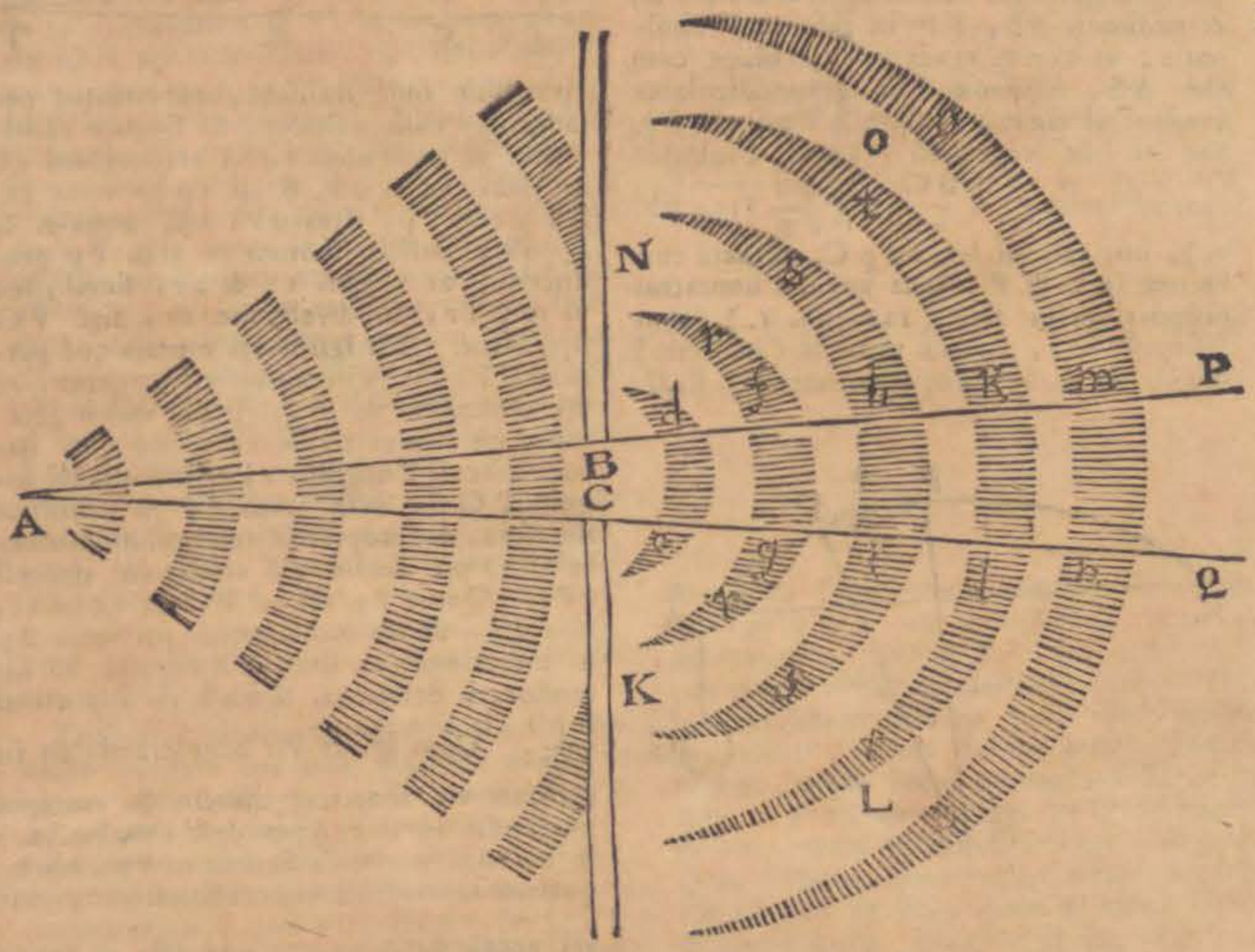
Sed ut hujus ſectionis doctrina quæ ſoni phænomenis explicandis accommodata eſt, melius intelligatur, nonnulla de naturâ ſoni & de motu corporum reſonantium præmittenda ſunt.

296. *Definitio. Sonus directus eſt*, qui à corpore ſonoro ad organum auditûs rectâ lineâ fertur. *Sonus reflexus qui* à corpore ſonoro in alia corpora fertur, & inde ad aurem reflectitur.

297. *Propoſitio. Sonus eſt particularum corporis reſonantis motus tremulus ac vibratorius aeri communicatus & ad aures delatus.* Hæc propoſitio notiſſimis experimentis certa eſt. Nam corpora non reſonant niſi percutiantur, & maximè omnium reſonant corpora dura atque elaſtica quorum partes ictu flectuntur, & deinde vi ſuâ elaſticâ reſiliunt, atque ità tremulo ac vibratorio motu agitantur. Particularum corporis reſonantis ſubſultus viſu & tactu percipitur; chartæ fruſtula corpori reſonanti inſidentia ſubſultare oculis cernuntur, & admotâ manu partium fremitus ſentitur. Verum ſi fides inſtrumenti muſici tenſa non fuerit, licet oſcillationes tota peragat, ſonum non edit; & forcipis focariæ crura digitis conſtricta & extemplò dimiſſa, oſcillationes agunt ſine ſono; at ſi oſcillando corpus aliquod durum percutiunt, reſonant; ex quibus deducitur ſonum non ſolo totius corporis oſcillatorio motu, ſed particularum ipſius tremore produci. Hic motus aeri contiguo communicatur & pulſus excitat (294). Cum propè aquam ſtagnantem tympanum quatitur, ſubſultus obſervantur in aquæ ſuperficie. Dum inſtrumentorum muſicorum pulſantur nervi, pulviſculi qui aëri innatant & radio ſolis fiunt conſpicui, conformiter ad fremitum nervorum ſubſultare videntur. Si ex duabus chordis muſicis, homogeneis, æqualibus & æque tenſis una pulſetur ut ſonum edat, altera prioris vicina concutitur & ſimiliter reſonat. Tandem corpora ſonora ſub campanâ antliæ pneumaticæ poſita atque percuſſa, dum educitur aer, ſonum languidiorem reddunt & exhauſto aëre, nullum qui poſſit percipi. Eſt igitur aër vehiculum ſoni: attamen totius aereæ molis motus qui in vento cernitur, per ſe ad producendum ſonum non valet, ſed vibratorius particularum motus ſatis validus neceſſarius eſt.

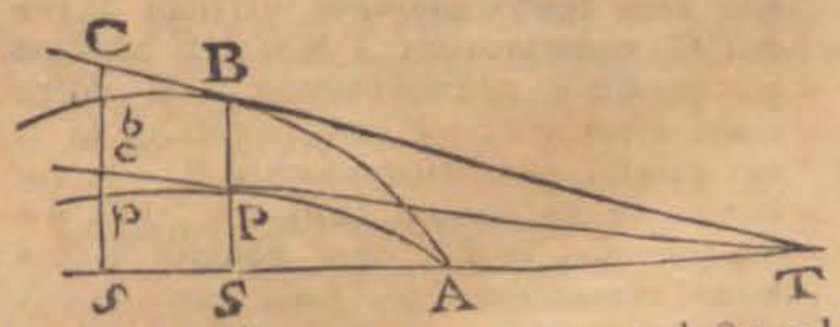
298.

gent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ ſunt, ideoque recedunt quâquâverſum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem verſus medii partes omnes quieſcentes, tam laterales *K L* & *N O*, quam anteriores *P Q*, LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.



eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *B C* tranſiit, dilatari incipiet & inde tanquam à principio & centro, in partes omnes directè propagari. *Q. E. D.*

298. Lemma. *Si curvarum duarum AB, AP abſciſſam communem AS habentium, ordinatæ SB, SP ſint ſemper ad invicem in datâ ratione, imminutis iis in infinitum ut curvæ tandem coincidant cum axe AS, erit ultima ratio curvaturæ eadem quæ ordinatarum.* Duc novam ordinatam s p curvis occurrentem in p & b, & ad puncta B & P duc tangentes occurrentes ordinatæ novæ in C & c. Tum ob datam ordina-

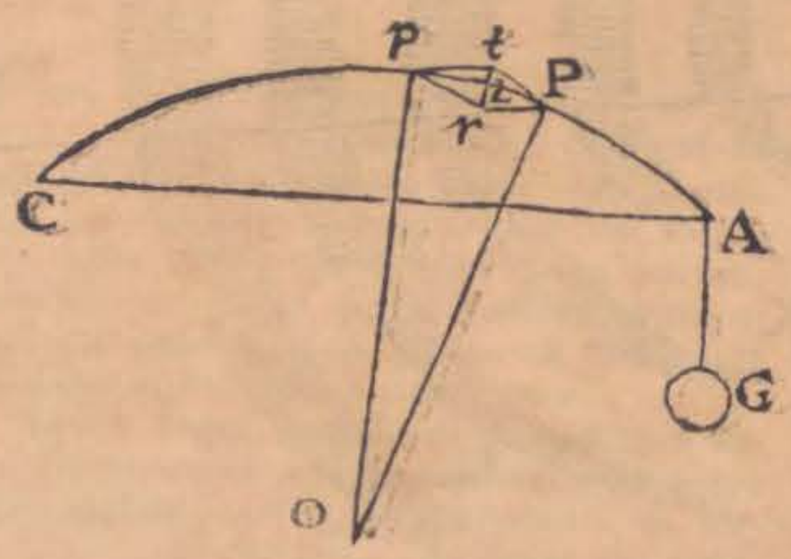


298.

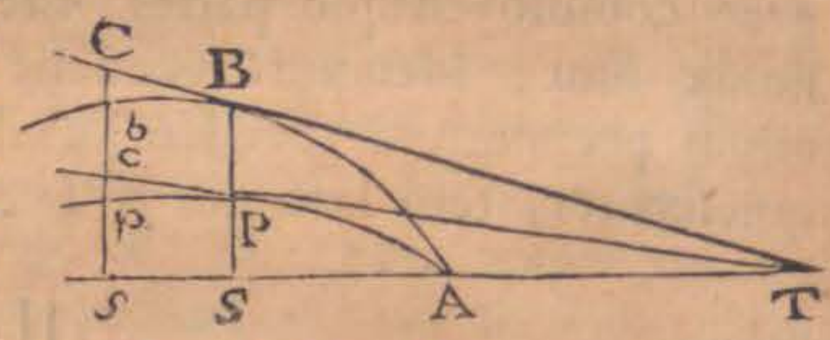
tarum rationem, tangentes productæ ad idem axis punctum T concurrent (256. lib.

DE MOTU CORPORUM.

lib. 1.) & ideò ob parallelas SB, sC, erit sC:sc=SB:SP & (per hyp.) SB:SP=sb:sp; undè sC:sc=sb:sp=sC−sb:sc−sp=bC:pc=SB:SP, coincidant jam ordinatæ sb, SB, & lineolæ evanescentes bC, pc, erunt subtensæ angulorum contactûs bBC, pPc, & ordinatis SB, SP in infinitum diminutis, ut curvæ tandem coincidant cum axe AS, subtensæ illæ perpendiculares evadent ad curvas, fietque Bb æqualis Pp. Sed in hâc hypothesi, anguli contactûs sunt ad invicem ut $\frac{bC}{Bb}$, ad $\frac{pc}{Pp}$ (154. lib. 1.), hoc est, ut bC ad pC. Quarè curvaturæ in B & P, quæ angulis contactûs proportionales sunt (121. lib. 1.) erunt subtensis bC, pc, ac proindè (ex dem.) ordinatis SB, SP proportionales. Q. E. D.



299, Lemma. *Vis acceleratrix quâ punctum quodlibet P nervi tensi & uniformiter crassi urgetur, dum per brevissimum spatium oscillatur, est ut nervi curvatura in eodem loco.* Nervus AC pondere G tensus oscillando pervenerit ad positionem curvæ APC, cum axe AC ferè coincidentis, & quia linea recta CA pondere G tenditur ubique æqualiter, æqualis quoque erit tensio omnium partium curvæ APC quamproxime. Sumatur punctum p, puncto P quamproximum, & ductis tangentibus Pt, pt concurrentibus in t, compleatur parallelogrammum Ptpr, ducanturque ad curvam normales PO, pO concurrentes in O, vires æquales quibus arcus evanescens Pp, (qui sumi potest pro arcu circuli radio PO descripti (121. lib. 1.)) in directionibus tangentium tP,



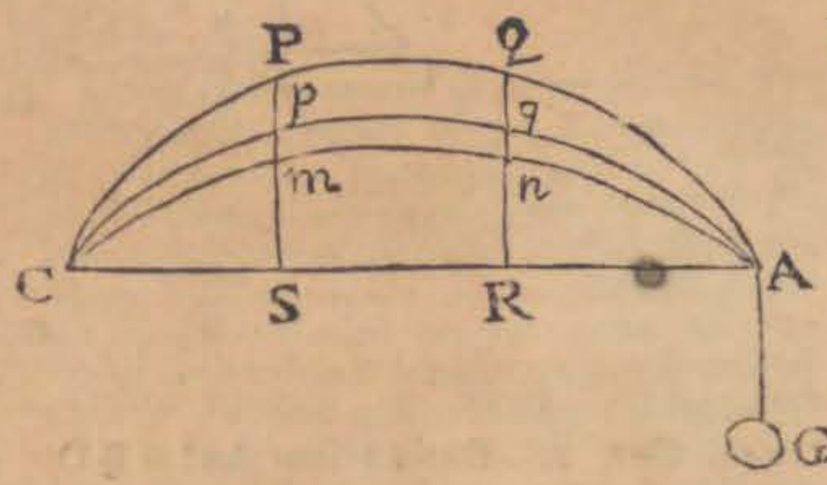
tp, hinc indè trahitur, exponantur per tangentes illas æquales, & singulæ resolvantur in duas alias vires, vis quidem tP in vires tz & zP; & vis tp in vires tz, seu zr & zp, vires zP, zp, æquales & oppositæ nullum motum in arcu Pp producent, at viribus tz & zr, simul, seu vi totâ tr, in directione tr, sivè PO urgebitur. Erit igitur vis motrix quâ particula Pp in directione tr urgetur, ad fili tensionem in P vel p per quam generatur vis illa ut tr ad tP. Sed (ex naturâ circuli) angulus tPr, æqualis est angulo POp, cum arcus Pp sit utriusque mensura, & propterea triangulum isoscele POp, simile est triangulo isosceli tPr. Quarè Pp est ad PO ut tr ad tP, hoc est, ut vis motrix quâ particula Pp in directione tr seu PO urgetur ad fili tensionem datam G, & ideò vis illa est ut $\frac{Pp}{PO}$. Cum igitur vis acceleratrix sit in ratione vis motricis directè & materiæ movendæ inverse (per def. 8am. lib. 1.) & materia movenda sit hic ut Pp, ob æqualem ubique nervi crassitudinem, erit vis acceleratrix ut $\frac{1}{PO}$, id est, in ratione inversâ radii circuli curvam osculantis in P, ideóque in ratione curvaturæ in P (121. lib. 1.). Q. E. D.

300. PROPOSITIO. *Si chorda musica AC uniformiter crassa & pondere G tensa, ità inflectatur dum resonat, ut ejus elongatio maxima ab axe motûs AC sit ferè insensibilis & ideò vis tensionis non mutetur per auctam chordæ longitudinem in majoribus suis ab axe distantiis & inclinatio radiorum curvaturæ ad axem negligi possit, ea erit natura curvæ AQPC in quam chorda oscillando inflectitur, in quovis articulo motûs ejusdem chordæ ut ductis pro libitu ordinatis ad axem normalibus QR, PS sit curvatura in Q, ad curvaturam in P, ut QR, ad PS, ac puncta omnia Q, P simul ad axem pervenientia & simul redeun-*

deuntia oſcillationes ſuas omnes eodem tempore peragant ad inſtar penduli oſcillantis in cycloide.

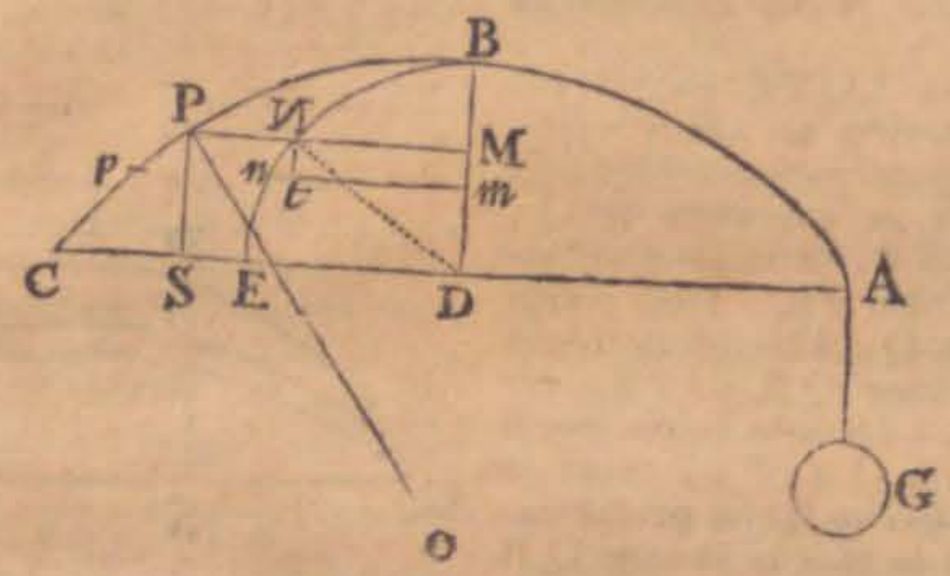
Caſ. 1. Sit curva AQPC chordæ oſcillantis diſtantia maxima ab axe AS punctis omnibus jam quieſcentibus, eaque ſit hujus curvæ natura ut curvatura in Q, ſit ad curvaturam in P, in ratione diſtantiæ QR ad diſtantiam PS. Hoc poſito erit acceleratio in Q ad accelerationem in P in eâdem ratione QR ad PS (per Lem. ſuperius 299) ideóque initio motûs ſpatia ſimul perçurſa Qq, Pp, erunt in eâdem ratione, & diviſim ſpatia percurrenda qR, pS, erunt in eâdem ratione QR ad PS; undè etiam accelerationes novæ in punctis q & p, erunt in eâdem ratione QR ad PS (299, 298.) atque erunt ad acceleraſiones priores in Q & P, ut diſtantiæ qR & pS ad diſtantias QR & PS (299. 298.). Ergò puncti cujuſvis P, vel in eâdem curvâ AQPC vel in diverſis AQPC & Aqpc, ſpectati acceleratio ſemper eſt ut ejuſdem diſtantia ab axe motûs AC. Quare (per prop. 51. lib. 1.) puncta omnia nervi ad axem ſimul perveniunt, ſimul redeunt & oſcillationes ſingulas peragunt dato tempore ad inſtar corporis in cycloide oſcillantis. Q. E. D.

Caſ. 2. Si chorda plectro modò percuſſa nondum induerit formam curvæ in primo caſu deſcriptæ, erit curvatura in P ad curvaturam in Q in majori vel minori ratione quam diſtantiæ PS ad diſtantiam QR. Sit in majori ratione, & erit velocitas in P, ad velocitatem in Q, in ratione majore quam PS ad QR, (299) & ſpatium Pp tempore minimo deſcriptum ad ſpatium Qq, eodem tempore deſcriptum in ratione majore quam PS ad QR, ideóque diviſim erit ps minor reſpectu PS, quam qR, reſpectu QR; & quia curvatura cum diſtantiis ab axe minuitur ac coincidente curvâ cum axe nulla evadit, erit etiam curvatura in p, minor reſpectu curvaturæ in P, quam curvatura in q, reſpectu curvaturæ in Q, & indè (299) acceleratio in p, minor reſpectu accelerationis in P, quam acceleratio in q, reſpectu accelerationis in Q. Majoris igitur velocitatis acceleratione ſemper decreſcente & minoris velocitatis acceleratione è contrà ſemper creſcente, reſpectu diſtantiarum ab axe AC, motus inter ſe tandem ità temperabuntur, ut punctis P & Q pervenientibus in loca quædam m & n, tum velocitates, tum accelerationes futuræ ſint diſtantiis mS, nR proportionales, ideóque curvâ AnmC, jam exiſtente eâdem quam deſcripſimus in caſu 1°, motus dehinc omnes conſpirabunt, atque idem eveniet, ſi ſit curvatura in P ad curvaturam in Q in minore ratione quam diſtantiæ PS ad diſtantiam QR. Quare quocumque modo percutiatur chorda muſica, quam citiſſime induet formam curvæ in caſu primo deſcriptæ, atque perget moveri more ibidem deſcripto. Q. E. D. 300.



Cæterùm inflexiones ſeu diſtantias admodum parvas ab axe motûs tam in chordis muſicis quam in laminis elaſticis ex quibus corpora ſonora compacta eſſe fingi poteſt, viribus acceleratricibus proportionales & proindè oſcillationes eſſe iſochronas experimentis oſtendit Clar. s'Graveſandius in Elem. phyſ. & Merſennus in harmoniâ univerſali longiorum chordarum vibrationes iſochronas oculis obſervavit. Si verò chorda nimiâ vi pulſetur, vis acceleratrix in experimentis creſcit in majori ratione quam diſtantiæ ab axe motûs & oſcillationes breviori tempore abſolvuntur.

DE MOTU CORPORUM



301. Cor. 1. Datis axibus AC & BD curva muſica ſic poteſt deſcribi. Centro D & radio DB deſcribatur circuli quadrans BNE; ducatur ad BD, perpendicularis MN circulo occurrens in N, & producatur ad P, ut ſit MP ad DC, in ratione arcûs BN, ad arcum quadrantalem BNE, dico punctum P eſſe in curvâ muſicâ ABC.

Sit enim P punctum curvæ muſicæ ABC, & dicantur $BD = a$, $AC = L$, $DC = \frac{1}{2}L$, $BM = x$, $PM = y$, arcus $BP = s$, $PS = MD = z = a - x$, radius curvaturæ in $B = r$: & ſi fluxio ds ſive Pp conſtans ſumatur, erit (126. lib. 1.) radius curvaturæ in P, ſeu $PO = \frac{ds\,dz}{ddy} = -\frac{ds\,dx}{ddy}$. Sed (ex dem.) BD eſt ad PS ut curvatura in B ad curvaturam in P, id eſt, ut radius curvaturæ in P ad radium curvaturæ in B, ſeu $a : a - x = -\frac{ds\,dx}{ddy} : r$. Quarè $r\,a\,ddy = x\,dx\,ds - a\,dx\,ds$, & ſumptis fluentibus, additâ conſtante $Q\,ds$, fit $r\,a\,dy = \frac{1}{2}x\,x\,ds - a\,x\,ds + Q\,ds$. Evaneſcente BM ſeu x, fit $dy = ds$, ſeu $BP = PM$ (per cor. 1. Lem. 7. lib. 1.) & æquatio in hanc abit $r\,a\,ds = Q\,ds$, ideóque conſtans $Q = r\,a$. Quare in quovis curvæ puncto P erit $r\,a\,dy\left[ra + \frac{1}{2}xx - ax\right]ds$. Ponatur $ax - \frac{1}{2}xx = bb$, ut fit $r\,a\,dy = [ra - bb]\,ds$, & $rraa\,dy^2 = [ra - bb]^2\,ds^2 = [ra - bb]^2\,dy^2 + [ra - bb]^2\,dx^2$; undè deducitur $[2\,r\,a\,bb - b^4]\,dy^2 = [ra - bb]^2\,dx^2$; & quia curva ABC ferè coincidit cum axe AC (per hyp.) ac ideò quantitas bb minima eſt reſpectu quantitatis ra in quâ radius curvaturæ r maximus eſt, ſi conferatur cum a vel x æquatio in hanc abibit $2\,r\,a\,bb\,dy^2 = rraa\,dx^2$, ex quâ eruitur $dy = \frac{r^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Ducatur in circulo altera ordinata mn priori MN proxima, & ex puncto N demittatur ad mn perpendiculum Nt; evaneſcente Mm, erit (ex naturâ circuli) $NM : ND = Nt : Nn$, ſive $\sqrt{2ax - xx} : a = dx : Nn = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Eſt igitur $dy = Mn \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, & ſumptis fluentibus $y = BN \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, cui æquationi nihil addendum vel ſubducendum eſt, cum arcus BN, evaneſcente PM ſeu y evaneſcat. Verum ubi PM coincidit cum CD, ſeu ubi fit $y = \frac{1}{2}L$, eſt $BN = BNE$, & propterea $\frac{1}{2}L = BNE \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, atque adeò $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}L}{BNE}$. Quarè in quolibet curvæ puncto P, eſt $y = \frac{BN \times \frac{1}{2}L}{BNE}$, & proindè $y : \frac{1}{2}L = BN : BNE$, hoc eſt, PM eſt ad CD ut arcus BN ad quadrantem BNE. Q. E. D.

302.

302. Cor. 2. Quia PS eſt ad BD ſeu ad a, ut radius r ad radium PO, erit $PO \times PS = ar$. Sit diameter circuli ad circumferentiam ut 1 ad c & ideò a ad BNE ut 1 ad $\frac{1}{2}c$, ſeu $BNE = \frac{1}{2}ac$, & cum ſit (301) $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}L}{BNE}$, erit $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{L}{ac}$ & $\frac{r}{a} = \frac{LL}{a^2c^2}$, & $r = \frac{LL}{ac^2}$; atquè $PO \times PS = ar = \frac{LL}{cc}$.

303. PROPOSITIO. *Si diameter circuli ſit ad circumferentiam ut* 1, *ad* c, *& chordæ muſicæ uniformiter craſſæ longitudo ſit* L, *pondus* P, *pondus quo tenditur* G *& penduli in cycloide oſcillantis longitudo* D; *tempus quo chorda illa oſcillationem unam perficit, erit ad tempus unius oſcillationis penduli in ratione ſubduplicatâ* PL *ad* cc DG; *numerus verò oſcillationum chordæ tempore uniùs oſcillationis penduli erit* $c\sqrt{\frac{DG}{LP}}$.

Nam vis quâ particula Pp in loco P, exiſtens urgetur dicatur A, ejuſdem pondus B & (per dem. 299) erit A ad G, ut Pp ad PO, & ob uniformem chordæ craſſitudinem eſt P ad B, ut L, ad Pp, & his rationibus conjunctis, $P \times A$ ad $B \times G$ ut L, ad PO; undè fit A ad B ut $G \times L$ ad $PO \times P$. Jam ſi particula Pp vi motrice ceu pondere A ſollicitata oſcillaretur in cycloide cujus perimeter tota æquaret duplam diſtantiam PS, tempus unius vibrationis in cycloide æquale eſſet tempori vibrationis unius chordæ muſicæ ſeu particulæ Pp; quia vis particulæ Pp, in cycloide oſcillantis ſemper decreſcit in ratione diſtantiæ ejus à puncto infimo ſeu medio cycloidis, quemadmodum vis illa decreſcit in ratione diſtantiæ a puncto S cum particula Pp vibrationes ſuas agit in rectâ PS, & vis motrix particulæ in puncto cycloidis altiſſimo æqualis eſt vi motrici A, (per cor. prop. 51. lib. 1.). Si verò particula Pp pondere ſuo abſoluto B oſcilletur in cycloide cujus perimeter tota ſit $2D$, erit hujus penduli longitudo D (per cor. prop. 50. lib. 1.), & tempus unius vibrationis chordæ muſicæ erit ad tempus unius oſcillationis penduli in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione longitudinis PS ad longitudinem D, & ſubduplicatâ ratione ponderis B ad vim A (cor. 5. prop. 24. lib 2.); id eſt, in ratione ſubduplicatâ quantitatis $PO \times PS \times P$, ad quantitatem GLD, atquè ideò ob $PO \times PS = \frac{LL}{cc}$ (202.) in ratione ſubduplicatâ PL ad $ccGD$. Q. D. E.

Quia verò numerus vibrationum iſochronarum quas chorda vel pendulum tempore quovis dato peragunt ſunt inverse ut oſcillationum tempora, erit numerus vibrationum quas chorda muſica tempore uniùs oſcillationis penduli prædicti peragit ad unitatem ut tempus unius oſcillationis penduli ad tempus unius vibrationis chordæ, ideoque in ratione ſubduplicatâ $ccGD$, ad PL, & proindè numerus vibrationum quas chorda muſica peragit eo tempore quo pendulum cujus longitudo eſt D ſemel oſcillatur eſt $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$. Q. E. D.

304. Cor. 1. Si longitudo chordæ L digitis pedis Pariſienſis exprimatur, numerus vibrationum quas chorda tempore minuti unius ſecundi peragit, erit $19{,}0341\sqrt{\frac{G}{PL}}$ quamproximè. Nam pendulum cujus longitudo D eſt pedum Pariſienſium 3 & linearum $8\frac{1}{2}$, ſeu digit. $\frac{881}{24}$, ſingulas oſcillationes tempore minuti unius ſecundi abſolvit (471. lib. 1.) & præterea ut 113 ad 355, ità diameter 1 ad circuli circumferentiam c, quæ proindè erit $\frac{355}{113}$. Quarè ſi loco D & c ſcribantur ipſorum valores in formulâ, erit $c\sqrt{\frac{GD}{PL}} = \frac{355}{113}\sqrt{\frac{881\,G}{24\,LP}} = 19{,}0341\sqrt{\frac{G}{PL}}$ quamproximè.

305. Cor. 2. Si conferantur variarum chordarum oſcillationes, quia quantitates c & D in formulâ $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$, datæ ſunt, numeri vibrationum dato tempore peractarum erunt ut $\sqrt{\frac{G}{PL}}$, & ideò tempora quibus ſingulæ vibrationes fiunt ut $\sqrt{\frac{PL}{G}}$ (473 lib. 1.).

306. Cor. 3. Iiſdem poſitis, ſi præterea chordæ ſint homogeneæ, æquè craſſæ &

DE MOTU CORPORUM.

& æquè tenſæ, cum in eo caſu pondus G datum ſit & pondus P ſit ut chordæ longitudo L, tempora quibus ſingulæ vibrationes fiunt, erunt ut $\sqrt{LL}$, ſeu ut chordarum longitudines; Quod experimentis confirmavit Clariſſ. s'Graveſande in Elem. Phyſices.

Scholion. Quæ de chordis vibrantibus huc uſque diximus, ea ferè omnia, nonnullis tamen immutatis, mutuati ſumus ex tractatu de methodo incrementorum Clariſſ. Taylor. Formulas noſtris ſimiles dedêre Celeberrimi Viri, Sauveur in monumentis Acad. Pariſ. an. 1713. & Daniel Bernoulli tum in actis Petropol. tum in Diſſertatione de Propagatione Lucis ab Academiâ regiâ Pariſ. præmio condecoratâ an. 1736.

307. PROPOSITIO. *Si numeri vibrationum quas chordæ muſicæ dato tempore peragunt, ſint inter ſe ut numeri* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, chordæ illæ tonos edent qui his notiſſimis vocibus ſignificantur, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, *ut*, initio ſumpto à tono graviori. Hæc propoſitio experimentis demonſtrata eſt; nam nervi muſici homogenei, æquè craſſi eodemque pondere tenſi, quorum longitudines ſunt inverſè ut numeri illi, tonos quos diximus edunt, & horum nervorum longitudines ſunt inverſè ut numeri vibrationum quas dato tempore abſolvunt & directe ut ſingularum vibrationum tempora ideoque ut 180, 160, 144, 135, 120, 108, 96, 90: (306).

308. *Cor.* Sonorum differentia ſecundùm *grave* & *acutum*, à minori vel majori numero vibrationum quas chordæ muſicæ dato tempore peragunt, pendet, & eò graviores ſunt ſoni quò tardiores ſunt ſingulæ chordarum vibrationes & contrà.

309. PROPOSITIO. *Corpora ſonora homogenea & ſimilia quorum latera homologa rationem habent inverſam numerorum* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, *tonos edunt, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, ut.* Hanc propoſitionem probant experimenta quæ in campanis, cylindris & priſmatibus homogeneis & ſimilibus habuerunt Merſennus in harmoniâ univerſali & D. Carré in monum. Acad. Reg. an. 1709.

310. PROPOSITIO. *Dùm corpus ſonorum percutitur, tremulus particularum motus ex ictu & vi elaſticâ creatus, remotis obſtaculis, per ſuperficiem corporis propagatur*: quod quidem leviora chartæ fruſtula ſuperficiei corporis reſonantis impoſita, tremore ſuo indicant.

311. PROPOSITIO. *Campanæ figura ictu clavæ ità mutari oculis cernitur ut cum rotunda eſſet, fiat ovata & quandiù auditur ſonus, alternis mutatur oſcillationibus.*

312. *Cor.* Ex tribus ultimis propoſitionibus concludere licet, ut in chordis ità & in aliis corporibus reſonantibus, tonos pendere à numero vibrationum ſeu undulationum quæ dato tempore peraguntur.

PRO-

LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLIII. THEOR. XXXIV.

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in medio elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in medio verò non elaſtico motum circularem excitabit.

Caſ. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis cundo & redeundo, itu ſuo urgebunt & propellent partes medii ſibi proximas, & urgendo compriment eaſdem & condenſabunt; dein reditu ſuo ſinent partes compreſſas recedere & ſeſe expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad inſtar partium corporis illius tremuli: & quâ ratione partes corporis hujus agitabant haſce medii partes, hæ ſimilibus tremoribus agitatæ agitabunt partes ſibi proximas, eæque ſimiliter agitatæ agitabunt ulteriores, & ſic deinceps in infinitum. Et quemadmodum medii partes primæ eundo condenſantur & redeundo relaxantur, ſic partes reliquæ quoties eunt condenſabuntur, & quoties redeunt ſeſe expandent. Et propterea non omnes ibunt & ſimul redibunt (ſic enim determinatas ab invicem diſtantias ſervando, non rarefierent & condenſarentur per vices) ſed accedendo ad invicem ubi condenſantur, & recedendo ubi rarefiunt, (f) aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condenſatæ, ob motum ſuum progreſſivum, quo feriunt obſtacula, ſunt pulſus; & propterea pulſus ſucceſſivi à corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem diſtantiis, (g) ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus ſuis ſingulis ſingulos pulſus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant ſecundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulſus inde per medium propagati ſeſe dilatabunt ad latera, per propoſitionem præcedentem;

(f) * *Aliquæ earum ibunt* (294).

(g) * *Ob æqualia temporis intervalla.* 312. (300).

DE MOTU CORPORUM.

tem; & à corpore illo tremulo tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodum ſphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in undis, quæ ſi digito tremulo excitentur, non ſolum pergent hinc inde ſecundum plagam motus digiti, ſed, in modum circulorum concentricorum, digitum ſtatim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum ſupplet locum vis elaſticæ.

Caſ. 2. (h) Quod ſi medium non ſit elaſticum: quoniam ejus partes à corporis tremuli partibus vibratis preſſæ condenſari nequeunt, propagabitur motus in inſtanti ad partes ubi medium facillimè cedit, hoc eſt, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas à tergo relinqueret. Idem eſt caſus cum caſu corporis in medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; ſed in circulum eundo, pergit ad ſpatia quæ corpus relinquit à tergo. Igitur quotics corpus tremulum pergit in partem quamcunque, medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur & ad locum ſuum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non ſit firmum, ſed modis omnibus flexile, ſi tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus ſuis nequit medium ubivis urgere, quin alibi eidem ſimul cedat; efficiet ut medium, recedendo à partibus ubi premitur, pergat ſemper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q. E. D.*

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad preſſionem, per medium ambiens, ſecundum lineas rectas propagandum conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſolâ partium flammæ: ſed à totius dilatatione derivari.

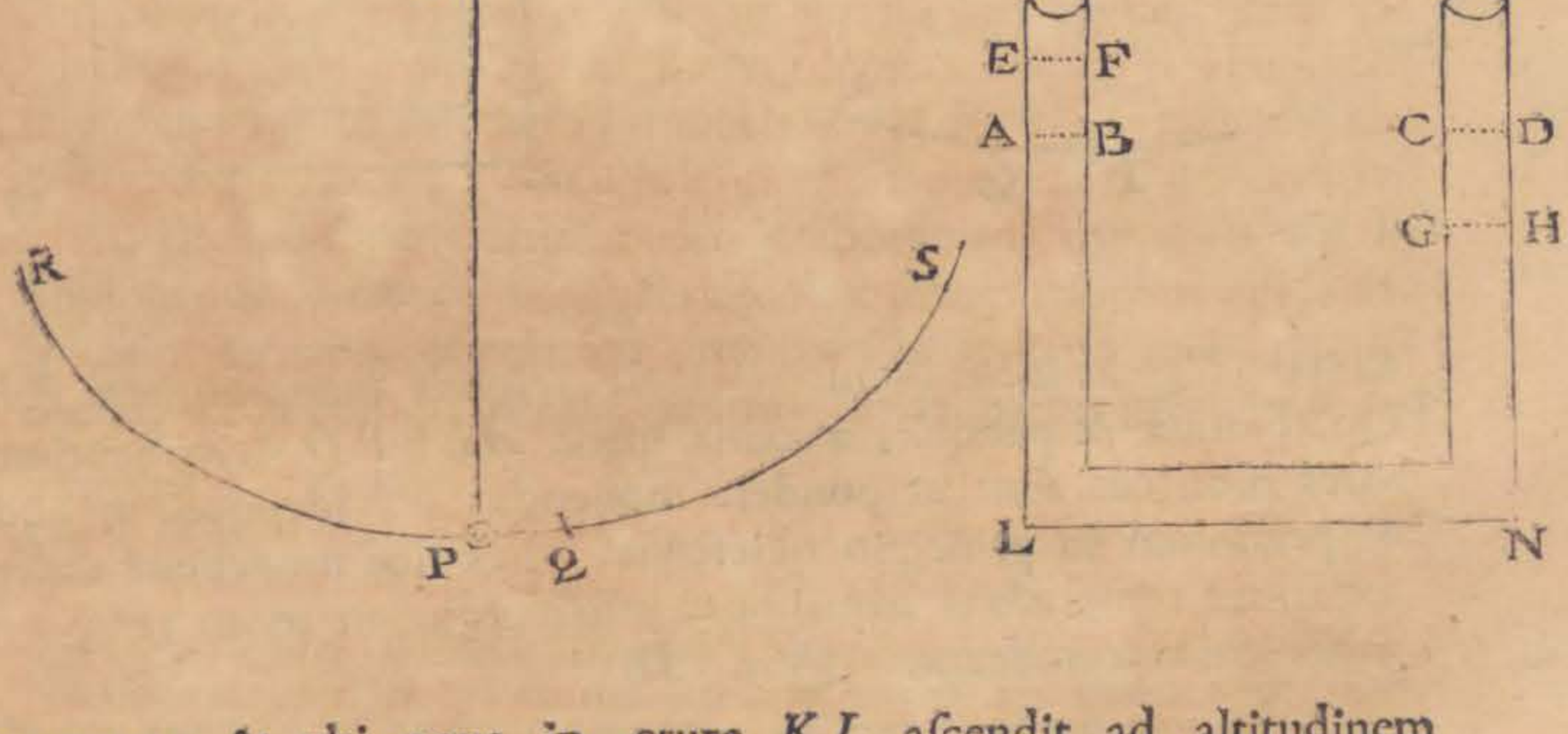
(h) * *Quod ſi medium continuum ſit & non elaſticum, &c.*

PRO-

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

Si aqua in canalis cruribus erectis K L, M N *vicibus alternis aſcendat & deſcendat; conſtruatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua aſcendet & deſcendet iiſdem temporibus quibus pendulum oſcillatur.*

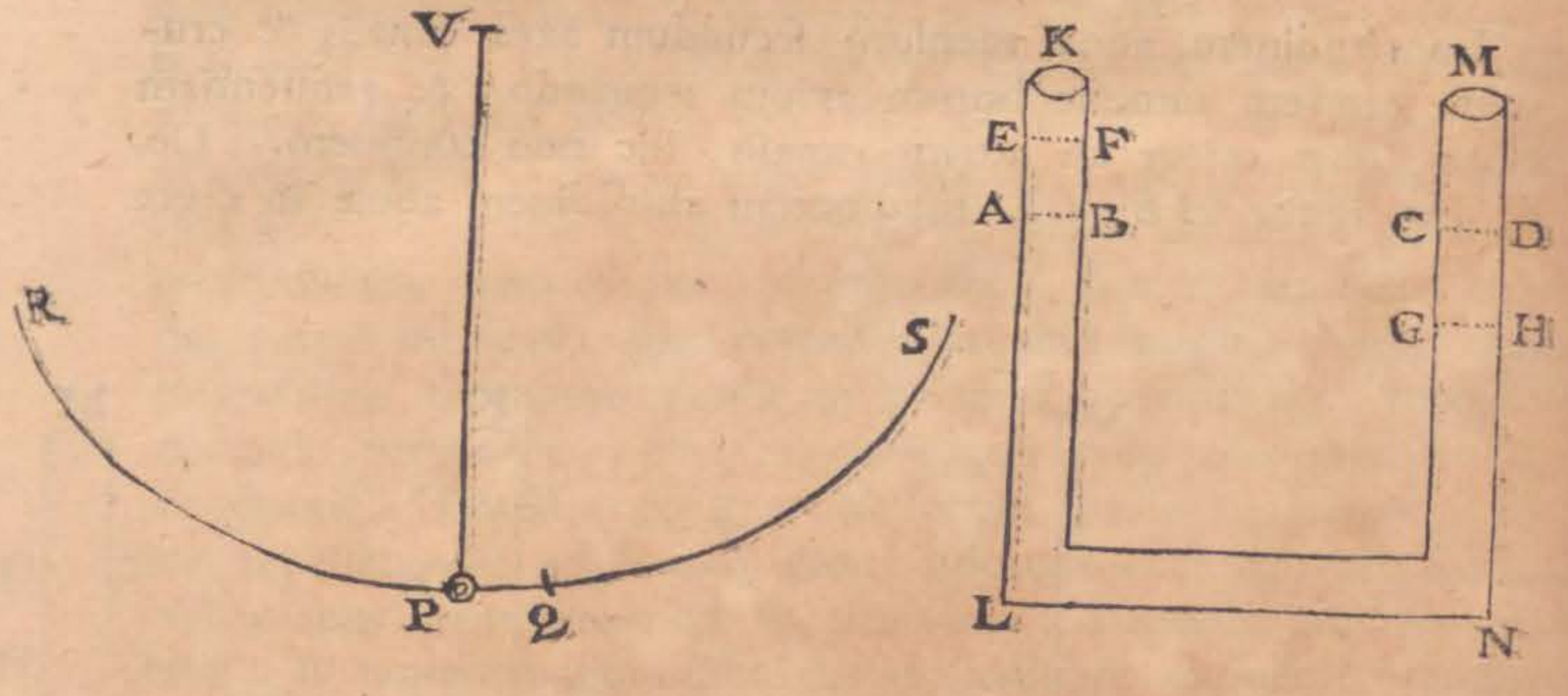
Longitudinem aquæ menſuro ſecundum axes canalis & crurum, eandem ſummæ horum axium æquando; & reſiſtentiam aquæ, quæ oritur ab attritu canalis, hic non conſidero. Deſignent igitur *A B*, *C D* mediocrem altitudinem aquæ in crure



utroque; & ubi aqua in crure *K L* aſcendit ad altitudinem *E F*, deſcenderit aqua in crure *M N* ad altitudinem *G H*. Sit autem *P* corpus pendulum, *V P* filum, *V* punctum ſuſpenſionis, *R P Q S* cyclois quam pendulum deſcribat, *P* ejus punctum infimum, *P Q* arcus altitudini *A E* æqualis. Vis, quâ motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, eſt

DE MOTU CORPORUM.

excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure KL ascendit ad EF, & in crure altero descendit ad GH, (i) vis illa est pondus duplicatum aquæ $EABF$, & propterea est ad pondus aquæ totius ut AE seu PQ ad (k) VP seu PR. Vis etiam, quâ pondus P in loco quovis Q acceleratur & retardatur in cycloide (per corol. prop. LI.) est ad ejus pondus totum, ut ejus di-



stantia PQ à loco infimo P, ad cycloidis longitudinem PR. Quare aquæ & penduli, æqualia spatia AE, PQ describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; (l) ideoque, si aqua & pendulum in principio quiescunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco simul eant & redeant. *Q. E. D.*

Co-

(i) * *Vis illa est pondus duplicatum &c.* Est enim vis illa pondus tam aquæ EABF, quam aquæ æqualis CGHD.

(k) * *Ad VP seu PR.* Semicycloïs PR, æqualis est longitudini penduli, (per cor. prop. 50. lib. 1,).

(l) 313. * *Ideoque si aqua & pendulum &c.* Id evidentissimum fit si pondus P quod, manente oscillationis unius tempore potest ad arbitrium assumi, capiatur æquale ponderi aquæ totius in canali; tùm enim vires motrices, massæ movendæ, & spatia describenda, ideóque & tempora quibus spatia illa describuntur, in canali

Corol. 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt iſochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſum* $6\frac{1}{9}$: aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. (m) Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

Corol. 3. Auctâ autem vel diminutâ longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione ſubduplicatâ.

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas eſt in ſubduplicatâ ratione latitudinum.

Conſequitur ex conſtructione propoſitionis ſequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem undarum.

Conſtituatur pendulum cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur latitudini undarum: & quo tempore pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Un-

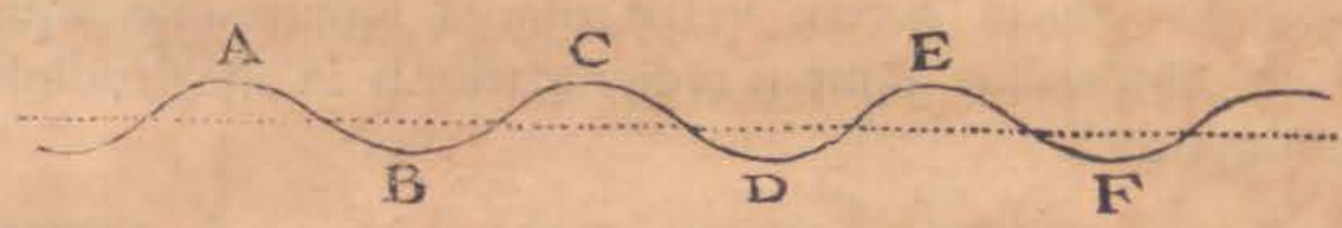
nali & in cycloide æquantur reſpectivè. Sed obſervandum eſt ſuperficiem AB, eſſe locum æquilibrii, ad quem cum aqua pervenit, nullâ amplius vi acceleratrice urgetur, ſed velocitate tantum acquiſitâ ulteriùs deſcendit vel aſcendit; ſicuti corpus pendulum *P* dum pervenit in locum cycloidis infimum *P* ſolâ velocitate acquiſitâ movetur. Undè quo tempore aqua deſcenſum unum abſolvit in crure alterutro canalis, eodem tempore pendulum oſcillationem unam ex deſcenſu & aſcenſu compoſitam perficit, duas verò oſcillationes abſolvit intereadum aqua è loco E deſcendit & ad eundem redit. 313

(m) * *Nam pendulum ped.* $3\frac{1}{18}$, ſeu ped. 3. & lin. 8. quamproximè (471. lib. 1).

Clariſſ. Hermanus tom. 3. comm. Acad. Petrop. motum aquæ in tubis crura quomodolibet ad baſim inclinata habentibus definivit. Rem generaliùs pertractavit Celeb. D. Bernoullius in Hydrodynamicâ. Hos authores, ſi libet, adeat lector.

DE MOTU CORPORUM.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam, quæ vel vallibus imis, vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet *ABCDEF* ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcendentem ac deſcendentem; ſintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc al-



tiſſimæ ſunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, quâ partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (per prop. XLIV.) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima *A*, *C*, *E* & infima *B*, *D*, *F* (n) æquentur duplæ penduli longitudini; partes altiſſimæ *A*, *C*, *E*, tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuo aſcendent. Igitur inter tranſitum undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt, unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore pendulum illud bis oſcillatur; ſed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt, ideoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. *Q. E. I.*

Co-

(n) * *Æquentur duplæ penduli longitudini.* Quoniam, ex dictis, unda percurrit latitudinem ſuam A C vel B D intereadum altitudo A transfertur in C, vel cavitas B in D, quod fieri non poteſt niſi aqua ab altitudine undarum deſcendat, & deinde ad eandem altitudinem aſcendat, & quia cavitas quæ eſt infrà aquæ quieſcentis ſuperficiem quam in figurâ exhibet linea punctis diſtincta, eſt circiter æqualis elevationi aquæ ſuprà eandem ſuperficiem quæ eſt æquilibrii locus, patet (313) totius aquæ movendæ longitudinem æqualem eſſe longitudini cavitatis vel elevationis aquæ infrà vel ſuprà locum illum æquilibrii, ac proinde cum longitudo cavitatis vel elevationis illius æqualis ſit diſtantiæ A B, vel B C, pendulum cujus longitudo eſt $\frac{1}{2}$ A B vel $\frac{1}{2}$ B C,

ſemel

Corol. 1. Igitur undæ, quæ pedes *Parisienses* $3\frac{1}{18}$ latæ sunt, (o) tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient; ideoque tempore (P) minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ spatio pedes 11000 quamproximè.

(q) *Corol.* 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in subduplicatâ ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex hypothesi quod partes aquæ rectà ascendunt vel rectà descendunt; sed ascensus & descensus ille (r) verius fit per circulum, ideoque tempus hâc propositione non nisi quamproximè definitum esse affirmo.

PROP.

semel oscillabitur eo tempore quo aqua ascendit, & iterum oscillabitur, intereadum aqua descendit (313.) atquè ità oscillabitur bis quo tempore unda describit latitudinem suam. Quoniam igitur numeri oscillationum quas pendula eodem tempore peragunt sunt in ratione subduplicatâ longitudinis pendulorum inversè (474. lib. 1.) pendulum cujus longitudo est ABCD, quadrupla longitudinis $\frac{1}{2}$ AB semel oscillabitur quo tempore unda latitudinem suam percurrit. In undis verò latioribus quæ altiùs non elevantur, linea curva ABC, vix differt à rectâ AC, quæ est undæ latitudo, & propterea in eo casu unda latitudinem suam describit, intereadum pendulum cujus longitudo est recta AC, semel oscillatur.

(o) * *Tempore minuti unius secundi* (471. lib. 1.).

(p) * *Tempore minuti unius primi.* Quia undarum datæ latitudinis velocitas æquabilis est (ex dem.) Si undæ latitudo data ped. $3\frac{1}{18}$, ducatur in tempus $60''$, factum $183\frac{1}{3}$ ped. erit spatium quod unda tempore minuti unius primi seu minutorum secundorum 60, describit & ducto rursus hoc numero $183\frac{1}{3}$ in $60'$, producetur spatium 11000 ped. quod unda tempore horæ unius conficit. 313.

(q) * *Cor.* 2. Undarum velocitates sunt ut earumdem latitudines directè & tempora quibus latitudines illas percurrunt inversè (5. lib. 1.) Sed tempora illa sunt in subduplicatâ ratione latitudinum undarum seu longitudinum pendulorum quæ eo tempore quo undæ latitudines suas describunt, semel oscillantur (472. lib. 1.). Undarum igitur velocitates sunt in ratione compositâ ex ratione latitudinum directè & ratione subduplicatâ earumdem latitudinum inverse, ideóque sunt in ratione subduplicatâ latitudinum directè.

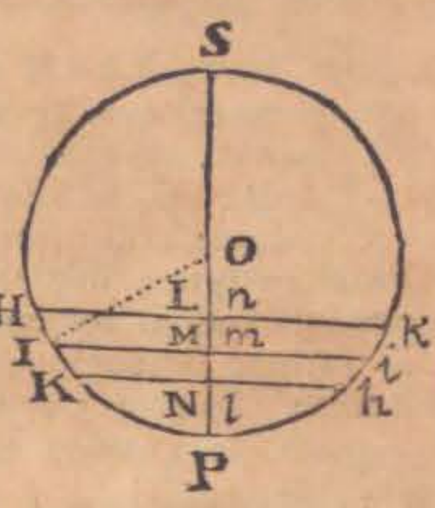
(r) * *Verius fit per circulum*, seu per arcum curvilineum qui magis accedit ad figuram arcûs circularis quam ad figuram canalis rectilinei in quo aqua, rectà ascendit & descendit.

DE MOTU CORPORUM

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

Pulsibus per fluidum propagatis, singulæ fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis penduli.

Designent *AB*, *BC*, *CD*, pulsuum successivorum æquales distantias; *ABC* plagam motus pulsuum ab *A* versus *B* propagati; *E*, *F*, *G* puncta tria physica (f) medii quiescentis in rectâ *AC* ad æquales ab invicem distantias sita; *Ee*, *Ff*, *Gg* spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco (t) singulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *EF*, *FG* lineolas physicas seu medii partes lineares punctis illis interjectas, & successivè translatas in loca εφ, φγ & *ef*, *fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta *PS*. Bisecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *OP* describatur circulus *SIPi*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipsius partibus pro-



por-

(f) * *Medii quiescentis*, id est, nondum agitati vibrationibus corporis tremuli, aut indè productis aëris pulsibus.

(t) 314. * *Singulis vibrationibus eunt & redeunt.* Si corporis tremuli aut chordæ musicæ oscillantis particula incipiat moveri in E, & eundo secum transferat medii punctum E, in locum e, & deindè particula illa chordæ musicæ vi propriâ & punctum e, medii inter e, & C compressi ac condensati dilatatione redeant in locum E, unicus in medio elastico pulsus secundum directionem BC, producetur, & singulis aliis vibrationibus corporis tremuli vel chordæ musicæ ex itu & reditu compositis, singuli excitabuntur pulsus (prop. 43.) atquè adeò pulsus latitudinem suam describit intereadum punctum E, vibrationem unam ex itu & reditu per breviſſimum spatium Ee, compositam, absolvit.

portionalibus; ſic ut completo tempore quovis PH vel $PHSh$, ſi demittatur ad PS perpendiculum HL vel hl, & capiatur $E\varepsilon$ æqualis PL vel Pl, punctum phyſicum E reperiatur in ε. Hâc lege punctum quodvis E, eundo ab E per ε ad e, & inde redeundo per ε ad E, iiſdem accelerationis ac retardationibus gradibus vibrationes ſingulas peraget (u) cum oſcillante pendulo. Probandum eſt quod ſingula medii puncta phyſica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu à causâ quâcunque cieri, & videamus quid inde ſequatur.

In circumferentiâ $PHSh$ capiantur æquales arcus HI, IK vel hi, ik, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulſuum intervallum totum BC. Et demiſſis perpendiculis IM, KN vel im, kn; quoniam puncta E, F, G motibus ſimilibus ſucceſſivè agitantur, & vibrationes ſuas integras ex itu & reditu compoſitas interea peragunt dum pulſus transfertur à B ad C; ſi PH vel $PHSh$ ſit tempus ab initio motus puncti E, (x) erit PI vel $PHSi$ tempus ab initio motus puncti F, & PK vel $PHSk$ tempus ab initio motus puncti G; & propterea $E\varepsilon$, $F\phi$, $G\gamma$ erunt ipſis PL, PM, PN in itu punctorum vel ipſis Pl, Pm, Pn in punctorum reditu, (y) æquales reſpectivè. Unde $\varepsilon\gamma$ ſeu $EG+G\gamma-E\varepsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG-LN$, in reditu autem æqualis $EG+ln$. (z) Sed $\varepsilon\gamma$ latitudo eſt ſeu ex-

(u) * *Cum oſcillante pendulo.* (prop. 52. lib. 1.).

(x) * *Erit PI vel PHSI.* Quoniam puncta E, F, G, & alia deinceps, motibus ſimilibus per medii compreſſionem & dilatationem communicatis ſucceſſivè agitantur, pulſus per æqualia ſpatia EF, FG &c. æqualibus temporibus propagatur, ideóque tempus quo transfertur ab E ad F, vel ab F ad G, eſt ad tempus totum quo transfertur à B ad C, & quo ſingula puncta E, F, G vibrationes ſuas integras ex itu & reditu compoſitas perficiunt, ut ſpatium EF vel FG ad ſpatium BC, in quâ ratione etiam eſt arcus HI, vel IK, ad totam circumferentiam PHSP, (per hyp.) quæ tempus totum quo pulſus à B ad C transfertur, exponit, & differentia inter tempus ſumptum ab initio motûs puncti E & tempus ſumptum ab initio motûs puncti F, eſt tempus illud quod pulſus transfertur ab E ad F. Quare *ſi PH vel PHSk exponat tempus ab initio motûs puncti E, PI vel PHSI, exponet tempus ab initio motûs puncti F*, cum Hl vel hi exponat differentiam inter tempus ab initio motûs puncti E, & tempus ab initio ſimilis motûs puncti F, &c. 314

(y) * *Æquales reſpectivè.* (per prop. 52. vel 38. lib. 1.).

(z) * *Sed $\varepsilon\gamma$ eſt latitudo ſeu expanſio partis medii EG, in loco $\varepsilon\gamma$*, quia punctum E tranſlatum eſt in locum ε, & punctum G in locum γ.

De Motu Corporum.

expanſio partis medii EG in loco $\varepsilon\gamma$; & propterea expanſio partis illius in itu eſt ad ejus expanſionem mediocrem, ut $EG-LN$ (a) ad EG; in reditu autem ut $EG+ln$ ſeu $EG+LN$ ad EG. Quare (b) cum ſit LN ad KH ut IM ad radium OP, & (c) KH ad EG ut circumferentia $PHShP$ ad BC, id eſt, ſi ponatur V pro radio circuli circumferentiam habēntis æqualem intervallo pulſuum BC, (d) ut OP ad V; & ex æquo LN ad EG ut IM ad V: erit expanſio partis EG punctive phyſici F in loco $\varepsilon\gamma$ ad expanſionem mediocrem, quam pars illa habet in loco ſuo primo EG, (e) ut $V-IM$ ad V in itu, utque $V+im$ ad V in reditu. Unde vis elaſtica puncti F in loco $\varepsilon\gamma$ (f) eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{I}{V-IM}$ ad $\frac{I}{V}$ in itu, in reditu verò ut $\frac{I}{V+im}$ ad $\frac{I}{V}$. Et eodem argumento vires elaſticæ punctorum phyſicorum E & G in itu, ſunt ut $\frac{I}{V-HL}$ & $\frac{I}{V-KN}$ ad $\frac{I}{V}$; (g) & virium differentia ad medii vim elaſticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{I}{V}$. Hoc eſt, ut

(a) * *Ad EG.* Nam cùm E, F, G ſint puncta tria medii quieſcentis ſeu motu impreſſo nondum condenſati vel rarefacti, expanſio medii in loco EG, mediocris ſeu quaſi media eſt inter minimam ipſius expanſionem in locis pulſuum denſiſſimis, & maximam in locis rariſſimis.

(b) 315. * *Cum ſit LN ad KH.* Anguli ad centrum IOP menſura eſt arcus IP æqualis dimidio arcui I Pı, ſeu K P k, & anguli ad circumferentiam K H k, menſura eſt etiam dimidius arcus K P k, & ideò anguli I O P & K H L, æquales ſunt. Hinc ſi ex puncto K, demiſſum intelligatur ad H L, perpendiculum æquale L N, hoc perpendiculum cum ordinatarum H L & K N differentiâ & cum arcu minimo K H triangulum conſtituet ſimile triangulo I O M. Eſt igitur L N ad K H, ut I M ad I O ſeu O P.

(c) * *Et KH ad EG.* (per hyp. ſuprà).

(d) * *Ut OP ad V.* Sunt enim circulorum peripheriæ P H S P & B C radiis ſuis O P & V proportionales.

(e) * *Ut V−IM ad V.* Quia enim (ex dem.) $LN=\frac{EG\times IM}{V}$, erit $EG-LN=\frac{V\times EG-IM\times EG}{V}$, & hinc EG−L N ad EG ut V−I M ad V. Et ſimiliter ob L N=ln, & I M=i m, erit E G + l n ad E G ut V + i m ad V.

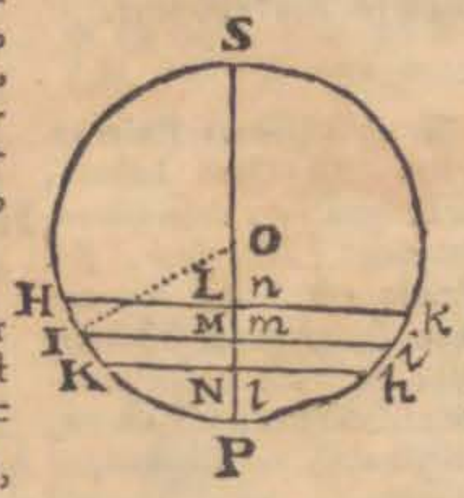
(f) * *Eſt ad vim ejus elaſticam &c.* Hic ſupponit Newtonus vim elaſticam medii denſitati proportionalem, quam quidem hypotheſim in aëre noſtro, cæteris paribus, quamproximè veram eſſe experimentis conſtat. At, datâ medii maſſâ, denſitas eſt ut expanſio ſeu volumen inversè; Quarè cum hic data ſit maſſa medii in volumine E G vel $\varepsilon\gamma$, contenti, vis elaſtica eſt ut expanſio reciprocè & *ideò vis elaſtica puncti F, in loco* $\varepsilon\gamma$, *&c.*

(g) * *Et virium differentia*, id eſt, ex-

$\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{I}{V}$, sive ut $HL-KN$ ad V, si modo (ob (h) angustos limites vibrationum) supponamus HL & KN indefinitè minores esse quantitate V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium est ut $HL-KN$, hoc est (ob (i) proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, datasque HK & OP) ut OM; id est, si Ff bisecetur in Ω, ut $\Omega\varphi$. (k) Et eodem argumento differentia virium elasticarum punctorum physicorum ε & γ, in reditu lineolæ physicæ $\varepsilon\gamma$ est ut $\Omega\varphi$. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ε supra vim elasticam puncti γ)

excessus vis elasticæ puncti E, suprà vim elasticam puncti G erit ad medii vim elasticam mediocrem &c.

(h) * *Ob angustos limites vibrationum.* Quoniam eo tempore quo punctum G vibrationem unam ex itu & reditu per brevissimum spatium Ee compositam absolvit & quo pulsus transfertur à B ad C, innumeræ ferè medii particulæ per medii compressionem & dilatationem successivè agitantur, spatium illud Ee, seu æquale PS, perbreve erit, si conferatur cum pulsuum intervallo BC, aut etiam cum radio *V* circuli qui circumferentiam habet æqualem BC. Rectè igitur supponitur quantitates HL & KN, longè minores esse quantitate *V*.



(i) * *Ob proportionales.* Liquet (per not. 215.) esse HL−KN ad HK, ut est OM ad OI vel OP, undè $HL-KN=\frac{HK\times OM}{OP}$, & ideò ob datum radium OP, datumque arcum HK, qui est ad datam FG ut peripheria data PHSP ad datam BC, erit HL−KN ut variabilis OM. Sed $Ff=PS$, $F\varphi=PM$, & propterea si Ff bisecetur in Ω, ut fit $OP=F\Omega$, erit $OM=\varphi\Omega$. Est igitur HL−KN ut $\varphi\Omega$.

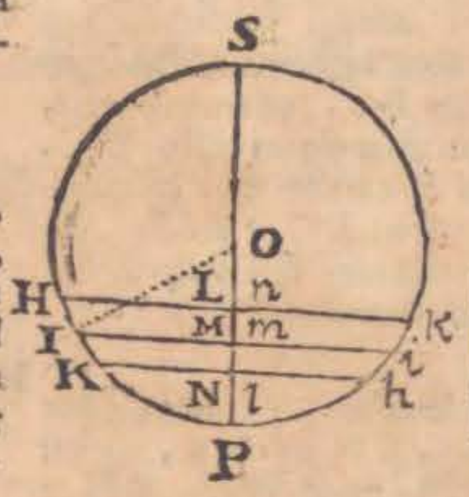
(k) * *Et eodem argumento.* Nam in reditu, vis elastica puncti F in loco $\varepsilon\gamma$ est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{I}{V+im}$, ad $\frac{I}{V}$, & vires elasticæ punctorum physicorum G & E, in loco $\varepsilon\gamma$, sunt ut $\frac{I}{V+hl}$, & $\frac{I}{V+kn}$, ad $\frac{I}{V}$, & virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem ut $\frac{kn-hl}{VV+V\times hl+V\times kn+hl\times kn}$, ad $\frac{I}{V}$, hoc est, ut $\frac{kn-hl}{VV}$ ad $\frac{I}{V}$ sive ut kn−hl ad V, &c.

DE MOTU CORPORUM.

(l) eſt vis quâ interjecta medii lineola phyſica $\varepsilon\gamma$ acceleratur in itu & retardatur in reditu; & propterea vis acceleratrix phyſica $\varepsilon\gamma$, eſt ut ipſius diſtantia à medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per prop. XXXVIII. lib. I.) rectè exponitur per arcum PI; & medii pars linearis $\varepsilon\gamma$ lege (m) præſcriptâ movetur, id eſt, lege oſcillantis penduli: eſtque par ratio partium omnium linearium ex quibus medium totum componitur. *Q. E. D.* (†)

(l) * *Eſt vis quâ interjecta lineola.* Medium in ε & in γ vi ſuâ elaſticâ ſeſe dilatare in plagas oppoſitas C & B nititur, his viribus interjecta lineola phyſica $\varepsilon\gamma$, ſeu punctum phyſicum ϕ, urgetur in utramque plagam, & exceſſu vis elaſticæ in ε, ſupra vim elaſticam in γ, acceleratur in itu & retardatur in reditu.

(m) * *Lege præſcriptâ movetur.* Demonſtratum eſt quod ſi punctum phyſicum E ad legem oſcillantis penduli moveatur, uti ſi vibrationibus partium corporis tremuli aut nervi muſici (quemadmodum in not. 314. expoſuimus) agitetur, tùm ſolâ vi elaſticâ medii punctum phyſicum F, & alia deindè puncta ſecundum eandem legem oſcillantis penduli ſucceſſivè movebuntur.



(†) *Jam pridem Vir Acutiſſimus Eulerus, hanc Newtoni Theoriam ſuſpectam habuit, aliamque formulam dedit quâ ſoni celeritatem determinaret à Newtoniana diverſam, ſed ſuæ formulæ demonſtrationem, aut vitium Newtonianæ, palam non fecit, quod ſciamus; Obſervationes ſuas hanc in rem nobis communicavit Vir Doctiſſimus* GABRIEL CRAMER, *Vir in his rebus expertiſſimus, ſagaciſſimique ingenii, quas ſuâ cum veniâ, publici juris facimus, quaſque Doctorum attentione digniſſimas credimus; Certè planiſſimè oſtendit aliquod ſubreptionis vitium in hac Demonſtrandi formâ quam Newtonus adhibet latere; ſcilicet demonſtrationem ipſam non ex rei naturâ ſed ex Hypotheſi aſſumptâ fluere. Ipſi verò motus aëris ſecundùm methodum Newtonianam aſſequi conabimur, nam ipſam ejus propoſitionem veram eſſe, etſi ejus demonſtratio vitio quodam laboret perſuaſum habemus, ſed eam ex naturâ motûs puncti Elaſtici ſonori eſſe deducendam, potius quam ex motibus aëris, qui variis modis pro ratione agitationis ipſi impreſſæ peragi poſſent. Hæc autem ſunt Viri Illuſtriſſimi verba.*

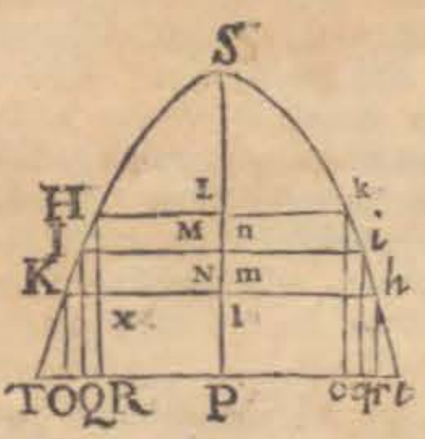
Propoſitio XLVII. Lib. II. Princip. Philoſ. & Newtoni, minus firma demonſtratione nititur, ut ex eo patet, quod ſi diverſæ prorſus concluſioni demonſtrandæ applicetur, eodem ſucceſſu gaudeat. Id ego cum pluribus diverſis tentaſſem modis, lubet unum, exempli gratia, apponere. Sit, verbi cauſa, hoc Theorema à Newtoniano omnino diverſum, eadem tamen Demonſtratione munitum.

Pulſi-

Pulſibus per Fluidum elaſticum propagatis, ſingulæ Fluidi particulæ, motu uniformiter retardato & accelerato euntes & redeuntes, oſcillantur pro lege Gravis aſcendentis & deſcendentis.

Deſignent A B, B C, C D, &c. pulſuum ſucceſſivorum æquales diſtantias, A B C plagam motus pulſuum ab A verſus B propagati, E, F, G, puncta tria Phyſica medii quieſcentis in recta B C ad æquales diſtantias ſita, E e, F f, G g, ſpatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu uniformiter retardato moventur; ε, φ, γ, loca quævis intermedia illorum punctorum, & E F, F G lineolas phyſicas ſeu partes medii lineares punctis illis interjectas & ſucceſſivè tranſlatas in loca εφ, φγ, & e f, f g. Rectæ E e æqualis ducatur recta P S, quâ tanquam axe deſcribatur parabola S H I K. Per baſim T t exprimatur totum tempus unius vibrationis, & per ejus partes, partes temporis proportionales exprimantur, ſic ut completo tempore quovis T R, vel T r, ſi erigatur normalis R H aut r h, & capiatur E ε æqualis R H vel P L, aut r h vel P I, punctum Phyſicum E reperiatur in ε. Hâc lege punctum quodvis E eundo ab E per ε ad e, & inde redeundo per ε ad E, iiſdem retardationis & accelerationis gradibus vibrationem unam peraget cum aſcendente & deſcendente Corpore gravi, Probandum eſt quod ſingula medii puncta phyſica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu à cauſa quâcunque cieri, & videamus quid indeſequatur.

In recta T t, ſumantur æquales partes O Q, Q R, vel o q, q r, eam habentes rationem ad rectam totam T t, quam habent æquales rectæ E F, F G ad pulſuum intervallum B C; Et erectis O K, Q I, R H, vel o k, q i, r h: demiſſis etiam ſi placet K N, I M, H L; R n, i m, h l; quoniam puncta E, F, G, motibus ſimilibus ſucceſſivè agitantur, & vibrationes ſuas integras itu & reditu compoſitas interea peragunt dum pulſus tranſfertur ex B ad C, ſi T R vel T r ſit tempus ab initio motus puncti E, erit T Q vel T q tempus ab initio motus puncti F, & T O vel T o, tempus ab initio motus puncti G: & propterea E ε, F φ, G γ, erunt ipſis R H, vel P L, Q I vel P M, & O K vel P N in itu punctorum, vel ipſis r h aut P l, q i aut P m, & o k vel P n in reditu æquales reſpective: Unde ε γ ſeu E G + G γ − E ε in itu punctorum æqualis erit E G − L N: in reditu autem æqualis E G + l n. Sed ε γ latitudo eſt ſeu expanſio partis medii E G in loco ε γ, & propterea expanſio partis illius in itu, eſt ad ejus expanſionem mediocrem ut E G − L N ad E G; in reditu autem ut E G + l n ſeu E G + L N ad E G. Quare cum ſit L N ſeu H X ad K X ſeu O R, ut L M ad ſemiparametrum Parabolæ, & O R ad E G ut T t ad B C, id eſt (ſi ponatur V ad ſemiparametrum ut B C ad T t, vel ſi ſit T t æqualis ſemiparametro & V æqualis B C) ut ſemiparameter ad V, & ex æquo L N ad E G ut I M ad V; erit expanſio



partis E G punctive Phyſici F in loco ε γ ad expanſionem mediocrem quam pars illa habet in loco ſuo primo E G, ut V − I M ad V in itu, utque V + i m ad V in reditu. Unde vis elaſtica puncti F in loco ε γ eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco E G, ut $\frac{I}{V-IM}$ ad $\frac{I}{V}$ in



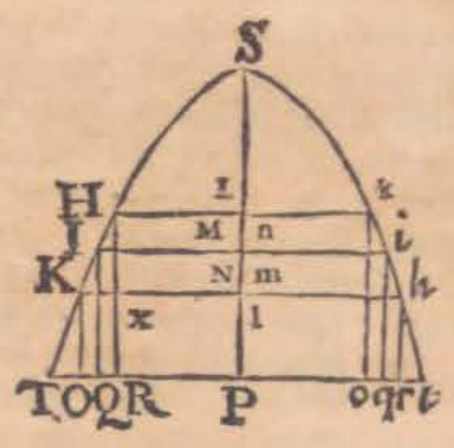
DE MOTU CORPORUM.

itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento itus punctorum physicorum E & G in itu sunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$, & virium differentia ad vim elasticam mediocrem, ut $\frac{KN-HL}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$, hoc est, ut $\frac{KN-HL}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$ sive ut KN−HL ad V, si modo (ob angustos limites Vibrationum) supponamus HL & KN indefinite minores esse quantitate V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium est ut KN−HL seu KX, seu OR, hoc est, ob proportionales OR, EF, & Tt, BC, (datasque EF, Tt & BC) constans. Et eodem argumento, differentia virium punctorum physicorum ε & γ in reditu lineolæ physicæ εγ est etiam constans. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ε supra vim elasticam puncti γ) est vis qua interjecta medii lineola physica acceleratur aut retardatur, & propterea vis acceleratrix lineolæ physicæ εγ est constans. Propterea tempus rectè exponetur per ordinatam IM & medii pars linearis εγ lege præscripta movetur, id est, lege ascendentis descendentisque Gravis, estque par ratio omnium linearum ex quibus medium totum componitur. Q. E. D.

Sed (quod sanemirum) Prop. XLIX. in quâ ex sua hypothesi Newtonus soni velocitatem computat, eandem dabit conclusionem in nostra, &, ut arbitror, in aliâ quâcunque. *Sic.*

Fingamus medium ab incumbente pondere, pro more aëris nostri, comprimi, sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens & cujus densitas eadem sit cum densitate medii compressi in quo pulsus propagatur. Et quo tempore corpus cadet ex altitudine æquali dimidio ipsius A eodem tempore pulsus percurret spatium æquale toti altitudini A. (Id quod congruit cum Corol. 1. dictæ Prop. XLIX.)

Nam stantibus quæ in Propos. XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica singulis vibrationibus describendo spatium *P b* urgeatur in itu & reditu à vi Elasti-ca quæ ipsius ponderi, æquetur peraget semivibrationem quo tempore corpus cadet ex altitudine PS, adeoque vibrationem, quo tempore corpus grave caderet ex altitudine 4PS. Quare, cum tempora descensus sint in subduplicata ratione longitudinum percursarum, fiet tempus vibrationis unius ad tempus descensus ex altitudine $\frac{1}{2}$ A, in subduplicatâ ratione longitunis 4PS ad $\frac{1}{2}$ A, seu 8PS ad A. Sed vis quâ in singulis punctis urgetur particula EG erat ad ejus vim mediocrem elasticam, ut KN−HL seu KX vel OR ad V, & vis illa mediocris hoc est pondus incumbens quo lineola EG comprimitur est ad pondus lineolæ EG, ut A ad EG, adeoque ex æquo, vis quâ lineola EG in singulis punctis urgetur, est ad ejus pondus, ut OR×A ad EG×V, seu ut semiparameter in A, ad VV (est enim OR ad EG ut Tt ad BC, atque ideo ut semiparameter ad V) vel ut 8PS×A ad BC², ob Vq ad BCq ut semiparametri quadratum ad Tt quad. (atque ideo ut 8PS ad semiparametrum). Quare cum tempora quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illa Elastica, ad tempus unius vibrationis urgente





vi ponderis, in ſubduplicata ratione BC^2 ad $8PS \times A$. Atque adeo ad tempus deſcenſus ex altitudine $\frac{1}{2}A$, in ſubduplicata ratione BC^2 ad $8PS \times A$ & ſubduplicata ratione $8PS$ ad A, hoc eſt in ratione integra BC ad A. Sed tempore unius vibrationis pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam BC. Ergo tempus quo pulſus percurrit ſpatium BC eſt ad tempus deſcenſus ex altitudine $\frac{1}{2}A$, ut BC ad A. Tempus autem quo pulſus percurrit ſpatium A eſt ad tempus quo percurrit ſpatium BC, ut A ad BC, adeoque æquale tempori deſcenſus ex altitudine $\frac{1}{2}A$.

Hic notandum, quod abſurda ſit, & facile refutanda hypotheſis hic aſſumpta, quod nempe pulſus propagetur, particulis euntibus & redeuntibus pro lege gravis aſcendentis & deſcendentis. Verum id ipſum eſt quod Demonſtrationem Newtonianam evertit, oſtendendo nimirum eam ipſam abſurdæ hypotheſi probandæ æque inſervire.

Hactenus Vir Doctiſſimus; ſequuntur ea quibus reſtitui poſſe Newtonianam demonſtrationem credimus.

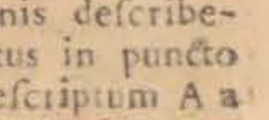
De Motibus in flui o Elaſtico genitis.

1. *Hypotheſis.* Suppono medium Elaſticum conſtare punctis, quantitate exiguâ ſed finitâ à ſe diſſitis, & vi repulſivâ donatis quæ diſtantiæ illorum punctorum ſit reciprocè proportionalis; nec ad alia puncta præter ea quæ immediatè proxima ſunt ſeſe extendit: Hoc enim modo quæcumque ſit partium medii Elaſtici natura, ſatis feliciter repræſentantur effectus qui ex eorum Elaterio pendent.

2. Cor. 1. Medii Elaſtici ſtatus naturalis eſt ut puncta ejus Elaſtica à ſe mutuò æqualiter diſtent.

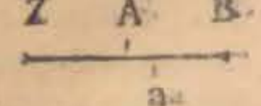
3. Cor. 2. Puncta elaſtica velocitatem finitam ſuſcipere poſſunt vel per immediatum contactum corporis moti, velocitate ſuâ finitâ punctum elaſticum urgentis vel per actionem continuatam vis repulſivæ punctorum elaſticorum ſi ab unâ parte fortior ſit quàm ab aliâ. Reliquas cauſas motus, ut gravitatem, vires centrales &c. hic non conſideramus.

4. Theor. 1. Si velocitas finita quomodocumque excitetur in puncto Elaſtico, diſtantiæ ejus à proximo puncto verſus quod movetur minuetur finitâ quantitate antequam in reliquo medio factus ſit ullus motus ullaque compreſſio: Sint A, B, C, tria puncta medii Elaſtici æquidiſtantia moveatur A verſus B velocitate finitâ, & tempore infinitè parvo deſcribat ſpatium infinitè parvum primi ordinis Aa, Vis motrix puncti B erit differentia virium repulſivarum puncti A & C, eſt autem vis repulſivâ puncti A ubi pervenit in a, ad vim puncti C (ſi immotum ſupponatur) ut BC ad Ba, & dividendo vis motrix puncti B, ad vim repulſivam puncti C, ut $BC - Ba$ ($= Aa$) ad Ba. Sed Aa, eſt infinitè parvum ex Hypotheſi & Ba eſt finita quantitas, ergo vix motrix puncti B, eſt infinite parva vis reſpectu vis repulſivæ puncti C, quæ vis repulſiva pro ipſa vi naturali elaterii aſſumi poteſt; Vis autem Elaſticitatis eſt ex genere preſſionum, tempore infinitè parvo velocitatem infinitè parvam generaret, quæ velocitas infinitè parva durante tempore infinitè parvo, ſpatium infinitè parvum ſecundi ordinis deſcribere faceret: Ergo ſiquidem vis motrix puncti B hujus vis reſpectu eſt infinitè parva, tempore infinite parvo ſpatium infinitè parvum duntaxat tertii ordinis deſcribere faceret; nullus ergo motus in puncto B generabitur niſi ſpatium deſcriptum Aa ſit finita quantitas, nulla ergo erit compreſſio inter puncta B & C. Q. E. D.



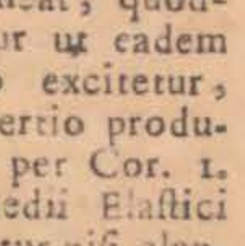
5. Cor. 1. Nullus ergo motus ex puncto medii Elaſtici in punctum proximum transfertur niſi poſt tempus finitum, nam ſpatium finitum Aa, nonniſi tempore finito percurri poteſt per velocitatem finitam.

6. Cor. 2. Et velocitas finita in puncto Elaſtico excitata non mutabitur niſi poſt tempus finitum & poſtquam quantitate finitâ proceſſerit. Sint enim medii particulæ Z, A, B, procedat punctum A velocitate finita utcumque in id punctum



DE MOTU CORPORUM.

ctum producta, & tempore infinitè parvo describat spatium infinitè parvum A a, vis quâ sistetur ea velocitas orietur ex differentia virium Elasticarum puncti Z & puncti B, estque vis puncti B ad vim puncti Z ut A B + A a ad A B − A a, & dividendo Vis sistens punctum A ad vim puncti Z, ut 2 A a ad A B − A a, sed A a est infinitè parvum respectu quantitatis A B − A a, ergo, vis sistens punctum A est infinitè parva, repectu vis puncti Z, quæ est vis elaterii naturalis, ideo (eodem modo ac in Theorematis demonstratum fuit) probabitur, vim illam tempore infinitè parvo spatium infinitè parvum tertii ordinis productura: Quare etiamsi singula puncta à parte B positâ æquali vi agerent eorumque numerus infinitus foret, vires illæ omnes non nisi spatium infinitè parvum secundi ordinis infinitè parvo tempore ex spatio A a eodem tempore descripto detraherent, maneret itaque idem, velocitates ergo puncti A non mutabitur ex actione omnium punctorum medii Elastici, nisi post tempus finitum & postquam finita quantitate processerit.



7. Cor. 3. Si considerentur innumera puncta Elastica ordine in lineâ rectâ posita,

A B C D E &c.

nec attendatur ad alia quæ circumquâque solidum spatium constituunt, si unum velocitate finitâ quâcumque ex causâ urgeatur, quæ constans in eo maneat, quoddam tempus finitum requiretur ut eadem velocitas in proximo puncto excitetur, paulo longius tempus ut in tertio producatur, sicque deinceps, nam per Cor. 1. 2. nullus motus ex puncto medii Elastici in punctum proximum transfertur nisi elapso finito tempore; velocitas ergo primi puncti ad secundum non transit nisi post finitum tempus ab initio motus primi puncti & velocitas secundi puncti ad tertium non transit nisi post finitum tempus ab initio motus secundi ejus puncti. Breviori autem tempore excitari debet data velocitas in secundo puncto per actionem continuatam ab initio motus primi puncti, quam in tertio per actionem continuatam ab initio motus puncti secundi, cum enim velocitas primi puncti sit finita & æquabilis, compressio exinde orta ab initio ejus motus est major quam compressio quæ per motum secundi puncti ab initio ejus motus acquiritur, siquidem ad celeritatem primi puncti nonnisi per gradus pervenit, ergo vis motrix quæ urget secundum punctum ab initio, fortior est quam ea qua urgetur tertium punctum ab initio, ergò tertium punctum datam illam celeritatem tardius acquiret, & pari ratiocinio, cum vis motrix secundi puncti sub initio fortior sit quam vis motrix tertii, compressio inter secundum & tertium punctum major erit sub initio quam inter tertium & quartum; unde vis motrix quæ urget tertium punctum sub initio fortior est quam ea quâ urgetur quartum punctum; Ergo cum punctum sequens aliqualem velocitatem susscipere non possit nisi postquam punctum præcedens spatium finitum descripserit & longiori tempore ab initio motus susscepti datam velocitatem possit susscipere, liquet quod ea data velocitas nonnisi successive ad successiva medii Elastici puncta pertingit.

8. Schol. Hinc patet discrimen inter motum in medio Elastico excitatum & motum qui excitatur in medio non Elastico cujus partes contiguæ sunt, in tali enim medio, Pressio cuidam particulæ applicata ad omnes partes in directum positas, aut divaricantes, puncto temporis extendi debet; Motus verò instanti in circulum propagari debet; At in medio Elastico, Pressio ab uno puncto ad alterum non continuatur nisi per accessum punctorum medii, sive per realem motum, qui antrorsum propagetur, & post tempus finitum à puncto primum moto ad reliquas partes fluidi successivè perveniat.

9. PROB. Si punctum medii Elastici finitâ velocitate moveatur quæ constans maneat, definire motum punctorum sequentium in lineâ rectâ positorum, omissis aliis sphæricè circumquaque positis.

Primus Casus. Sint ordine puncta A, B, C, D, &c. fingatur ea omnia ad æquales distantias in navi posita, & punctum B ita adhærere malo ut ex ejus motu, navis motum susscipiat & reliqua puncta vehat; Recipiat verò punctum A velocitatem finitam quæ

quæ conſtans maneat relatè ad navis punctum in quo verſabatur, & ponatur primo eam verſus B tendere; ex acceſſu puncti

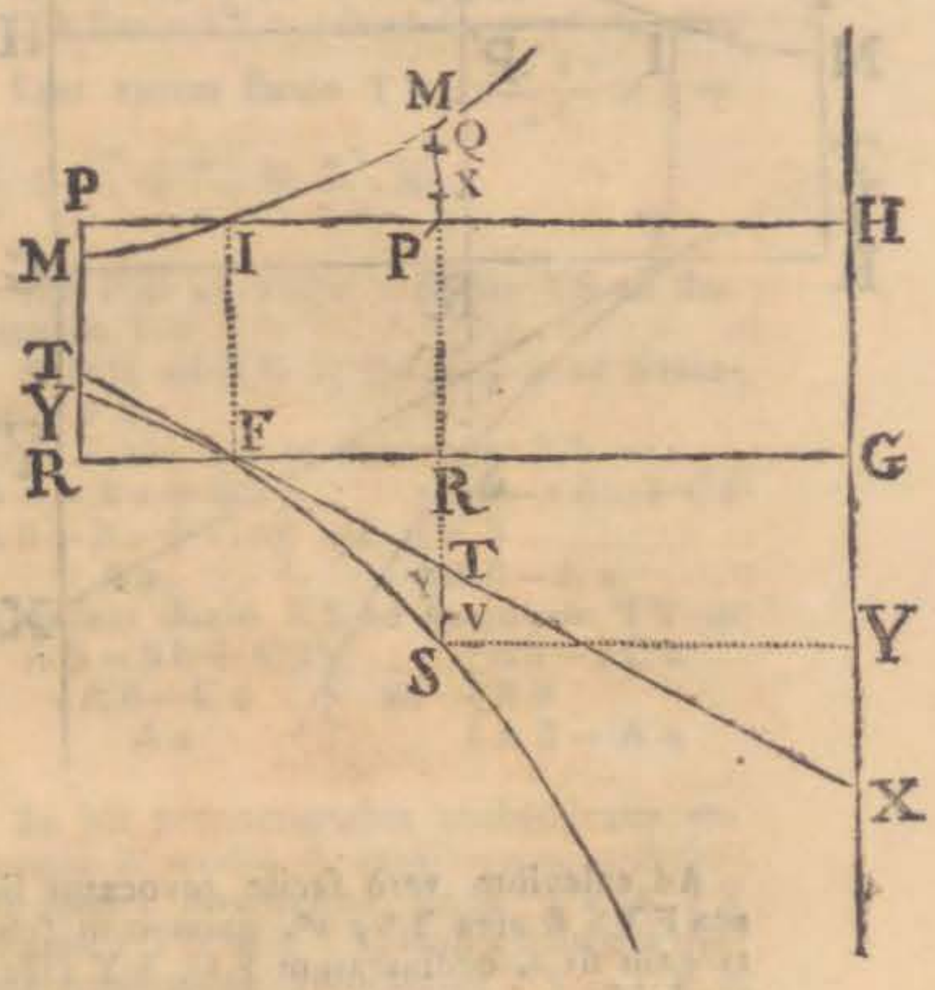


A verſus B vis repulſiva particulæ A fortior fiet vi repulſivâ particulæ C, quare ex differentia virium naſcetur vix motrix particulæ B; Procedat enim A ad B quantitate A a, erit vis particulæ C in B, ad vim particulæ A in B, ut a B ad B C ſive A B (quia particularum intervalla A B, B C initio erant æqualia) & dividendo, vis particulæ C, ad differentiam virium quæ eſt vis motrix puncti B ut a B ad A B — a B ſive A a, ſed vis particulæ C eſt vis ipſa elaterii in ſtatu naturali, ex Hypot. ergo Vis elaterii eſt ad vim moventem punctum B ut a B ad A a. Repræſentet itaque I H tempus quo diſtantia A B punctorum elaſticorum per velocitatem datam puncti A percurritur, dicaturque illud tempus *a*, ducatur deorſum ad angulos rectos linea H G quæ vim elaſticam ſingulæ particulæ medii in ſtatu naturali deſignet, ductaque F G parallela I H, aſymptotis F G & G H & dignitate æquali *a* × H G deſcribatur Hyperbola, tranſibit per punctum I, (ſiquidem I F = H G & F G = I H = *a*, ideoque I F × F G = H G × *a*) & ſi I P repræſentet tempus quo durante A motum eſt, dicaturque *x*, Dico quod P M repræſentabit vim motricem puncti B eo temporis momento. Erit enim ex naturâ Hyperbolæ, G R : G F = F I (H G) : R M & dividendo G R (H P) : F R (I P) = H G : P M; ſpatia verò uniformiter deſcripta ſunt ut tempora; ergo A B : A a = I H : I P & dividendo a B : A a = H P : I P, ſed a B ad A a ut vis elaterii ad vim motricem puncti B; ergo H P : I P = H G : P M = vis elaterii ad vim motricem puncti B, ſed H G repræſentat vim elaterii, ergo P M ubique repræſentat vim motricem puncti B.

Repræſentabit ergo etiam linea P M velocitatem momento P genitam, & area I P M totam velocitatem à puncto B acquiſitam tempore I P ſive tempore quo percurritur A a à puncto A.

Deſcribatur verò ex puncto F Logarithmica cujus axis ſit linea H G producta, ſubtangens linea quævis G X quæ dicatur *s*, ductâque ex puncto P lineâ P T S dico quod linea T S repræſentabit velocitatem tempore I P acquiſitam & area F T S ſpatium à puncto B deſcriptum.

Eſt enim (per nat. Logarith.) area I F R M, ad Rect. I F G H ut R S ad G X, & Rect. I F G H ad Rect. I F R P ut F G ad F R ut G X ad R T, ideoque ex æquo area I F R M ad Rect. I F R P ut R S ad R T, & dividendo, eſt I P M ad I F R P ut T S ad R T; Ergo area I P M eſt ad T S in Ratione datâ, ob datum P R & rationem F R ad R T datam, ut pote æqualem rationi F G ad G X, eſt ergo T S ut I P M, 314

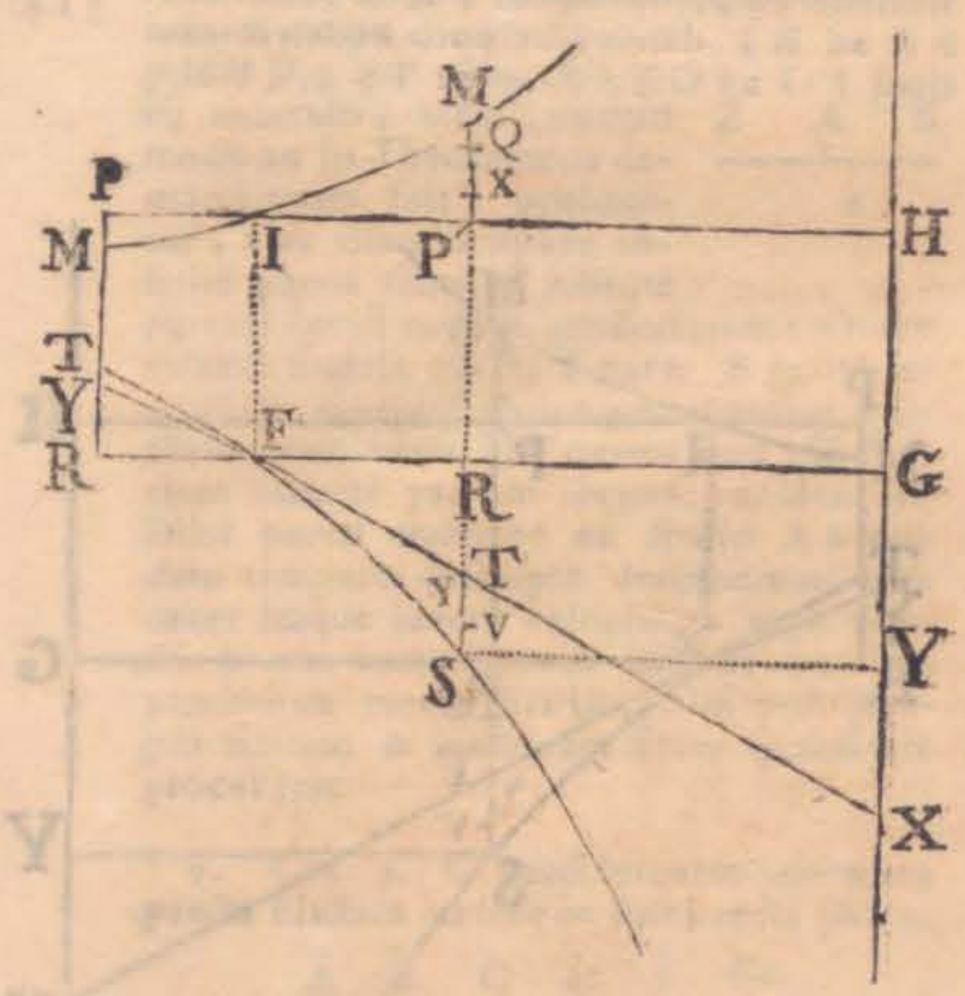


ſive ut velocitas puncti B, & cum perpendicula inter ordinatas T S ſint æqualia momentis temporis in linea I P ſumptis, area F T S erit ut ſpatium à puncto B percurſum.

Eodem modo conſtabit, quod ſi vis elaſtica ageret more gravitatis tempore *a*, velocitas quam eo tempore generaret, deſignaretur per ſubtangentem *s*, & ſpatium deſcriptum foret $\frac{as}{2}$, dicatur vero *m* velocitas data puncti A, data erit ratio *s* ad *m*, intervallum particularum A B erit *ma*, & ſpatium A a velocitate datâ perçurſum eſt *mx*, notandum verò eſt quod ea velo-

DE MOTU CORPORUM.

velocitas s sit plusquam dupla velocitatis globi tormentarii, unde liquet quod in casibus sequentibus ubi velocitas puncti A longe minor velocitate globi tormentarii est intelligenda, quantitas $\frac{m}{s}$ est fractio satis parva.



Ad calculum verò facile revocatur linea F T S & area T S; 1°. enim cum subtangens sit s, ordinatarum F G, S Y differentia sit x, area tota F G S Y (ex nat. Log.) est sx, intervallum R S est $s \times \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}$ &c. Rectang. R G × R S $= \overline{a-x} \times s \times \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}$ &c. & quoniam est F G (a) : G X (s) = F R (x) : R T est R T $= \frac{sx}{a}$ & Triang. F R T $= \frac{sx^2}{2a}$. Detrahantur ergo Rectang. R G × R S & Tr. F R T ex area F G S Y remanet area F T S $= sx - \overline{sa-sx} \times \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}$ &c. $- \frac{sx^2}{2a}$ $= sx \times 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}$ &c. $- sx \times 1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}$ &c. $- \frac{sx^2}{2a} = \frac{sx^2}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3} + $ &c.

erit itaque A a ad B b, ut $m x$, ad $\frac{sx^2}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}$ &c. vel ut m ad $\frac{sx}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2}$ &c.

erit verò recta T S = R S − R T $= \frac{sx}{a} \times 1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}$ &c. $- \frac{sx}{a} = \frac{sx}{a} \times \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}$ &c. ideoque velocitas data puncti A erit ad velocitatem puncti B ut m ad $\frac{sx}{a} \times \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$.

Coroll. Si quæratur in hac Hypothesi quo tempore & spatio descripto punctum B velocitatem puncti A obtineat, fiat $m = \frac{sx}{a} \times \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$ &c. sed cum spatium A a sit ad B b ut m ad $\frac{sx}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2}$ &c. erit A a ad B b ut $\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$ &c. ad $\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}$ &c. cumque primus terminus, primæ seriei sit accuratè triplus primi termini alterius seriei, reliqui verò plusquam tripli; Punctum A totam suam celeritatem puncto B communicat antequam id punctum B tertiam partem ejus spatii descripserit quod descripsit punctum A.

Tempus verò x exprimetur per Radices hujus æquationis $o = \frac{ma}{s} - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3}$ &c. Ubi liquet quod quando $\frac{m}{s}$ est fractio, tunc x est minus quam a, & series est Convergens, ideoque ex primo termino & proximo assumptis erit $x = a\sqrt{\frac{2m}{s}}$; rem accuratius expendere isto in casu, qui merè fictitius est, nihil est necesse.

Casus secundus. Si A moveatur uniformiter & acceleret punctum B quod etiam acceleret punctum C (nulla habitâ ratione motus puncti D) erit in hoc Casu vis

vis repulsiva A ad vim repulsivam C ut AB−Bb+Cc ad AB−Aa+Bb & differentia virium sive vis motrix puncti B ad vim repulsivam puncti C, ut Aa−2Bb+Cc ad AB−Aa+Bb; est præterea vis repulsiva puncti C ad vim Elaterii ut AB ad AB−Bb+Cc; & denique vis Elastica est ad vim moventem punctum B in primo casu ut AB−Aa ad Aa; ideoque ex æquo vis vera motrix puncti B ad ejus vim in primo casu ut

$$\left.\begin{matrix} Aa-2Bb+Cc \\ AB \\ AB-Aa \end{matrix}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{matrix} AB-Aa+Bb \\ AB-Bb+Cc \\ Aa \end{matrix}\right\}$$

In eadem autem Hypothesi vis motrix puncti C, hoc modo determinatur, est vis repulsiva puncti B ad vim repulsivam puncti D ut Dc ad bc sive ut AB−Cc, ad AB−Bb+Cc, ergo vis motrix puncti C ad vim repulsivam puncti D, ut Bb−2Cc ad AB−Bb+Cc.

Hæc vis repulsiva puncti D est ad vim Elasticam ut AB ad AB−Cc, denique vis Elastica ad vim moventem punctum B in primo Casu, ut AB−Aa, ad Aa, ideoque ex æquo vis motrix puncti C, ad vim moventem punctum B in primo Casu ut

$$\left.\begin{matrix} Bb-2Cc \\ AB \\ AB-Aa \end{matrix}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{matrix} AB-Bb+Cc \\ AB-Cc \\ Aa \end{matrix}\right\}$$

Ut verò determinetur motus puncti B in isto casu (qui pro vero haberi potest ob exiguitatem motus puncti D qui negligitur) concipiatur PM ad PQ ut

$$\left.\begin{matrix} AB-Aa+Bb \\ AB-Bb+Cc \\ Aa \end{matrix}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{matrix} Aa-2Bb+Cc \\ AB \\ AB-Aa \end{matrix}\right.$$

& idem PM ad PX ut

$$\left.\begin{matrix} AB-Bb+Cc \\ AB-Cc \\ Aa \end{matrix}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{matrix} Ab-2Cc \\ AB \\ AB-Aa \end{matrix}\right.$$

curvæ quæ transibunt per Q & X erunt loci virium motricium puncti B & puncti C, areæ IPQ, IPX erunt ut velocitates per illas vires dato tempore IP genitæ, & si sumantur ordinatæ TV & TY, tales ut TS, TV, TY sint ut areæ IPM, IPQ, IPX, areæ FTV, FTY erunt ut spatia Bb & Cc: sit ergo

$TV = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5$ &c.
& $TY = Ox^4 + Pa^5 + Ra^6$ &c.
erit $TV\,dx = Ax^2\,dx + Bx^3\,dx + Cx^4\,dx + Dx^5\,dx$ &c.

$TY\,dx = Ox^4\,dx + Px^5\,dx$

Unde integrando, est area $FTV = \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Cx^5}{5} + \frac{Dx^6}{6}$ &c. = Bb

& $FTY = \frac{Ox^5}{5} + \frac{Px^6}{6}$ &c. = Cc

fluxio autem $TV = 2Ax\,dx + 3Bx^2\,dx + 4Cx^3\,dx + 5Dx^4\,dx$ &c.
& fluxio $TY = 4Ox^3\,dx + 5Px^4\,dx$ &c.

Erat autem fluxio $TS = \frac{s\,x\,dx}{a^2} \times 1 + \frac{1x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4}$ &c.

Sed PM ad PQ, ut fluxio TS ad fluxionem TV
& PM ad PX ut fluxio TS ad fluxionem TY
ergo fluxio TS ad fluxionem TV ut

$$\left.\begin{matrix} AB-Aa+Bb \\ AB-Bb+Cc \\ Aa \end{matrix}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{matrix} Aa-2Bb+Cc \\ AB \\ AB-Aa \end{matrix}\right.$$

& eadem fluxio TS ad fluxionem TY ut

$$\left.\begin{matrix} AB-Bb+Cc \\ AB-Cc \\ Aa \end{matrix}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{matrix} Bb-2Cc \\ AB \\ AB-Aa \end{matrix}\right.$$

In his proportionibus multiplicatis extremis & mediis & terminorum collatione factâ, invenientur lineæ TV & TY & areæ FTV & FTY, sicque tempora quibus acquiruntur velocitates TV, TY & spatia descripta dum acquiruntur, obtineri poterunt, Calculum istum prolixissimum in compendio exhibebo, primo invenitur quod fluxio $TS \times AB \times AB - Aa = s\,m^2\,x\,dx$, est præterea $Aa - 2Bb + Cc$ æquale $m\,x + * - \frac{2A}{3}x^3 - \frac{2B}{4}x^4 - \frac{2C-O}{5}x^5 - \frac{2D-P}{6}x^6$ &c. estque $Bb - 2Cc = \frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{4}x^4 + \frac{C-2O}{5}x^5 + \frac{D-2P}{6}x^6$ &c. quæ series multiplicatæ per $s\,m^2\,x\,dx$ dant facta extremorum in utrâque proportione.

De Motu Corporum.

Ut habeantur facta mediorum, in primâ proportione eſt $AB-Bb+Cc\times Aa=$ $mx\times ma+*+*-\frac{Ax^3}{3}-\frac{Bx^4}{4}-\frac{C-O}{5}x^5-\frac{D-P}{6}x^6$; ducatur in $AB-Aa+Bb=$

$$ma-mx+*+\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^4}{4}+\frac{Cx^5}{5}+\frac{Dx^6}{6}$$ fit

$$mx\times m^2a^2-m^2ax+*+*+\frac{mAx^4}{3}+\frac{mBx^5}{4}+\frac{C-O}{5}mx^6 \text{ \&c.}$$
$$-\frac{Omax^5}{5}+\frac{Pmax^6}{6}$$
$$-\frac{A^2x^6}{3\times 3}$$

Quod ducatur in fluxionem $TV=$

$$dx\times 2Ax+3Bx^2+4Cx^3+5Dx^4+6Ex^5+7Fx^6$$ factum erit

$$mxdx\times 2m^2a^2Ax-2m^2aAx^2-3m^2aBx^3+4m^2aCx^4+\frac{2mA^2x^5}{3}+\frac{18mBAx^6}{3\times 4}$$
$$+3m^2a^2Bx^2+4m^2a^2Cx^3+5m^2a^2Dx^4-5m^2aDx^5+\frac{2maAOx^6}{5} \text{ \&c.}$$
$$+6m^2a^2Ex^5-6m^2aEx^6$$
$$+7m^2a^2Fx^6$$

termini omnes hujus ſeriei dividantur per sm, & conferantur cum correſpondentibus terminis ſeriei quam exhibet factum extremorum primæ proportionis & habebitur $m=\frac{2ma^2A}{s}$, ideoque $A=\frac{s}{2a^2}$, tum $\frac{-2maA}{s}+\frac{3ma^2B}{s}=0$, ideoque $B=\frac{s}{3a^3}$, $3^0.\ -\frac{2A}{3}=-\frac{3maB}{s}+\frac{4ma^2C}{s}$, unde invenitur $C=\frac{s}{4a^4}-\frac{s}{3\times 4ma^4}$, $4^0.\ -\frac{2B}{4}=-\frac{4maC}{s}+\frac{5ma^2D}{s}$ eſt ergo $D=\frac{s}{5a^5}-\frac{6s^2}{3\times 4\times 5ma^5}$; $5^0.\ \frac{O-2C}{5}=+\frac{2mA^2}{3s}-\frac{5maD}{s}+\frac{6ma^2E}{s}$ eſt ergo $E=\frac{s}{6a^6}-\frac{46s^2}{3\times 4\times 5\times 6ma6}+\frac{2s^3}{3\times 4\times 5\times 6m^2a^6}+\frac{sO}{5\times 6\times ma^2}$ & denique invenitur $F=\frac{s}{7a^7}-\frac{252s^2}{3.4.5.6.7ma^7}+\frac{24s^3}{3.4.5.6.7m^2a^7}+\frac{sP}{6.7ma^2}$.

In alterâ Proportione reſumatur factum $AB-Bb+Cc\times Aa$ quod eſt $mx\times ma+*+*-\frac{Ax^3}{3}-\frac{Bx^4}{4}-\frac{C-O}{5}x^5-\frac{D-Px^6}{6}$ ducatur in $AB-Cc$ quod eſt

$$ma+*+*+*+*-\frac{Ox^5}{5}-\frac{Px^6}{6} \text{ \&c. fit}$$

$$mx\times m^2a^2+*+*-\frac{maAx^3}{3}-\frac{maBx^4}{3}-\frac{maCx^5}{5}-\frac{maDx^6}{6} \text{ \&c.}$$

Multiplicetur per fluxionem TX quæ eſt $dx\times, 4Ox^3+5Px^4+6Qx^5+7Rx^6$ \&c. habetur $mxdx\times 4m^2a^2Ox^3+5m^2a^2Px^4+6m^2a^2Qx^5+7m^2a^2Rx^6+8m^2a^2Sx^7$

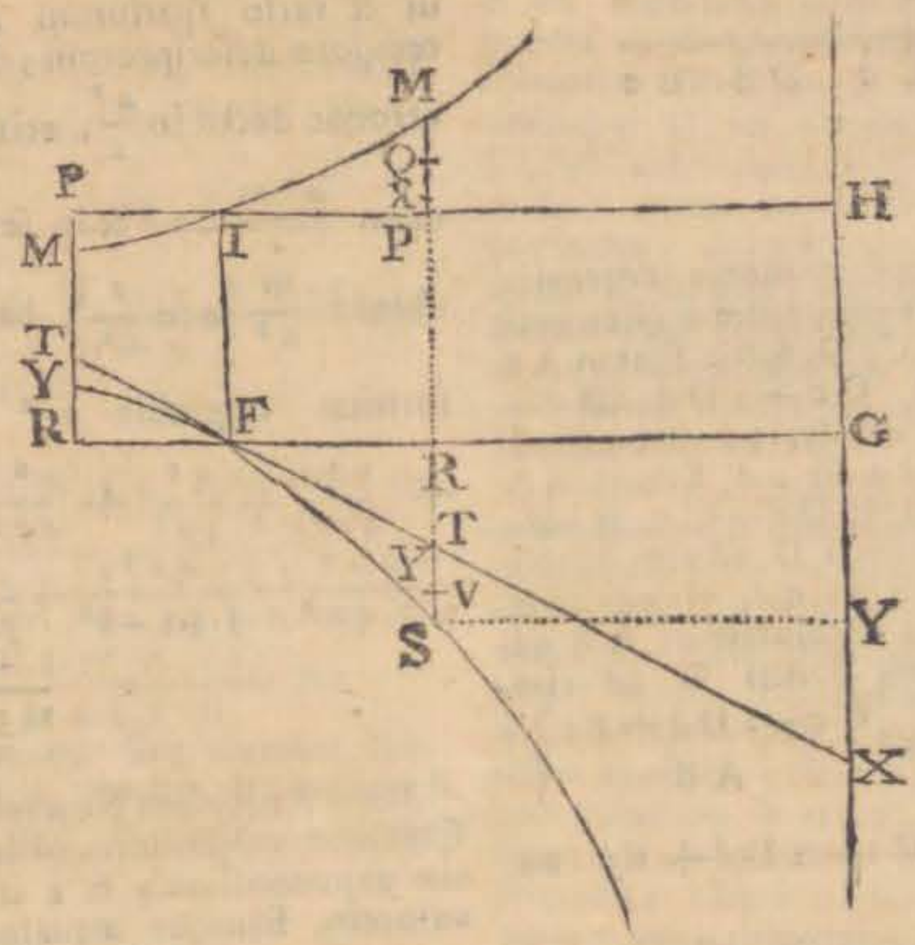
$$-\frac{4maAOx^6}{3}-\frac{4maBOx^7}{4}$$
$$-\frac{5maAOx^7}{3}$$

termini omnes hujus ſeriei dividantur per sm & conferantur cum terminis correſpondentibus ſeriei quam exhibet factum extremorum ſecundæ proportionis & habebitur $\frac{A}{3}=\frac{4ma^2O}{5}$ ideoque $O=\frac{s^2}{2\times 3\times 4ma^4}$: $2^0.\ \frac{B}{4}=\frac{5ma^2P}{s}$ hinc $P=\frac{s^1}{3\times 4\times 5ma^5}$

$3^0.$

LIBER SECUNDUS. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

314.



3°. $\frac{C}{5}-\frac{2O}{5}=\frac{6ma^2Q}{s}$, hinc $Q=\frac{s^2}{4\times5\times6ma^6}\frac{2s^3}{3\times4\times5\times6m^2a^6}$ &c. unde tandem obtinentur hæ ſeries, quibus velocitates & ſpatia deſcripta exprimuntur: exprimitur ergo velocitas puncti B,

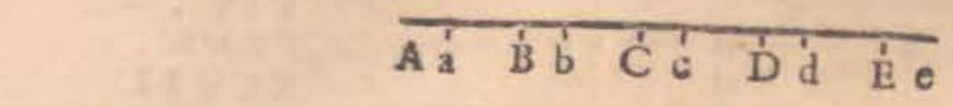
per $TV=\frac{sx^2}{2a^2}+\frac{sx^3}{3a^3}+\frac{sx^4}{4a^4}+\frac{sx^5}{5a^5}+\frac{sx^6}{6a^6}+\frac{sx^7}{7a^7}$ &c.
$-\frac{2s^2x^4}{2.3\times4ma^4}-\frac{6s^2x^5}{3\times4\times5ma^5}-\frac{46s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^6}-\frac{390s^2x^7}{3.4.5.6.7ma^7}$ &c.
$+\frac{5s^3x^6}{2\times3\times4\times5\times6m^2a^6}+\frac{50s^3x^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7m^2a^7}$ &c.

area $FTV=\frac{sx^3}{2\times3a^2}+\frac{sx^4}{3\times4a^3}+\frac{sx^5}{4\times5a^4}+\frac{sx^6}{5\times6a^5}+\frac{sx^7}{6\times7a^6}+\frac{sx^8}{7\times8a^7}$ &c.
$-\frac{s^2x^5}{3\times4\times5ma^4}-\frac{6s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^5}-\frac{46s^2x^7}{3\times4\times5\times6\times7ma^6}-\frac{390s^2x^8}{3.4.5.6.7.8ma^7}$
$+\frac{5s^3x^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7m^2a^6}+\frac{50s^3x^8}{2.3.4.5.6.7.8m^2a^7}$

velocitas puncti C exprimitur per $TX=\frac{s^2x^4}{2\times3\times4ma^4}+\frac{s^2x^5}{3\times4\times5ma^5}+\frac{s^2x^6}{4\times5\times6ma^6}$ &c.
$-\frac{2s^3x^6}{3\times4\times5\times6m^2a^6}$

area denique $FTX=\frac{s^2x^5}{2\times3\times4\times5ma^4}+\frac{s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^5}+\frac{s^2x^7}{4\times5\times6\times7ma^6}$ &c.
$-\frac{2s^3x^7}{3\times4\times5\times6\times7m^2a^6}$

DE MOTU CORPORUM.



Punctorum sequentium motus determinari possent simili ratione; Etenim vires motrices punctorum B, C, D, E &c. sunt ut A a -2 B b, B b -2 C c, C c -2 D d, D d -2 E e, &c. Vis enim cujusvis puncti ut C est ad vim puncti E ut d e ad c d sive ut A B $+$ E e $-$ D d ad A B $+$ D d $-$ C c & dividendo vis motrix puncti D ad vim puncti E ut C c -2 D d $+$ E e ad c d; vis puncti E est ad vim Elasticam naturalem ut A B ad e d, ergo vis motrix puncti D ad vim Elasticam naturalem ut $\left.\begin{matrix} Cc-2Dd+Ee \\ AB \end{matrix}\right\}$ ad $\left\{\begin{matrix} cd \\ ed \end{matrix}\right.$ sive ut $Cc-2Dd+Ee$ ad $\frac{cd \times de}{AB}$, ergo alternando est vis motrix puncti D ad C c -2 D d $+$ E e ut vis Elastica naturalis ad $\frac{cd \times de}{AB}$, ideóque in paulò majori ratione quam vis elastica ad A B quia tam c d quam d e paulò minores sunt quam A B, sed vis motrix puncti D est ad C c -2 D d in majori ratione quam eadem vis motrix ad C c -2 D d $+$ E e, ergo vis motrix puncti D est semper ad C c -2 D d in majori ratione quam vis elastica ad A B, cumque id verum sit in omnibus punctis & hæc ultima ratio sit constans, Ratio vis motricis puncti cujusvis ad spatium à præcedenti puncto descriptum dempto duplo spatii ab ipso hoc puncto descripti, erit semper major ratione constante, non tamen multo, ideo Physicè pro constante assumi potest, hinc alternando vires illæ motrices, punctorum successivorum, sunt in ratione indicatâ.

Sed calculum pro illis punctis instituere necesse non est, per Analogiam enim ex motu duorum priorum punctorum B & C reliquorum motum statuere, sufficiens videtur.

10. Si, missis cæteris casibus, quæratur intervallum temporis quo velocitas data m, in punctis successivis B, C, generetur, ut & ratio spatiorum A a, B b, C c eo tempore descriptorum; Fiat $TV = m$, & utroque ducto in $\frac{a^2}{s}$, erit $\frac{a^2 TV}{s} = \frac{a^2 m}{s}$, dicatur $\frac{a^2 m}{s} = z^2$ & in serie $\frac{a^2 TV}{s}$ ponatur ubique $\frac{m}{z^2}$ loco $\frac{s}{a^2}$, hæc series in hanc formam migrabit $z^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^6}{6a^4}$ &c.
$\frac{-2x^4}{2.3.4z^2} - \frac{6x^5}{3.4.5az^2} - \frac{46x^6}{3.4.5.6a^2z^2}$ &c.
$\frac{+5x^6}{2.3.4.5.6z^4}$ &c.

Juxta Analyseos Newtonianæ Methodum sumantur omnes termini in quibus differentiæ exponentium x & z minimum efficiunt valorem, fiantque æquales z^2 reliqui termini seriei $\frac{a^2 TV}{s}$ negligi possunt, quia per dignitates quantitatis $\frac{x}{a}$ respectu eorum qui assumpti fuerunt multiplicantur; (in Hypothesi quæ velocitatem m alicujus momenti assumeret hi termini negligendi non forent, sed in casu præsenti velocitatem m minimam supponere nobis licet cum de tali tantum in futurum simus acturi) erit ergo $z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{2.3.4z^2} + \frac{5x^6}{2.3.4.5.6z^4}$
$- \frac{14x^8}{2.3.4.5.6.7.8z^6} + \frac{41x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10z^8}$
$- \frac{122x^{12}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12z^{10}}$ &c.
(qui termini continuatâ serie T V inveniuntur) & æquatione per approximationem soluta invenietur $x^2 = 3.57 z^2 = \frac{3.57 a^2 m}{s}$.

Jam verò in area F T V quæ spatium B b exprimit loco $\frac{s}{a^2}$ ponatur ut prius $\frac{m}{z^2}$ & assumantur termini in quibus differentia exponentium quantitatum x & z minima

eva-

evadit, ii sunt $\frac{mx^3}{2\times 3z^2} - \frac{2mx^5}{2.3.4.5z^4} + \frac{5mx^7}{2.3.4.5.6.7z^6} - \frac{14x^8}{2.3.4.5.6.7.8.9z^7}$ in quibus si valor $x^2 = 3.57\,z^2$ substituatur fiet hæc series $mx \times \frac{3.57}{2\times 3} - \frac{2\times 3.57\times 3.57}{2.3.4.5} + \frac{5\times 3.57\times 3.57\times 3.57}{2.3.4.5.6.7} - \frac{14\times 3.57\times 3.57\times 3.57\times 3.57}{2.3.4.5.6.7.8.9}$ &c. sive $Bb = mx \times .428$.

Eodem modo valor Cc invenietur ex hac serie $\frac{mx^5}{2\times 3.4.5z^4} - \frac{2mx^7}{3\times 4.5.6.7z^6}$ sive substituto valore x^2, erit $Cc = mx \times \frac{3.57\times 3.57}{2.3.4.5} - \frac{2\times 3.57\times 3.57}{3.4.5.6.7}$ &c. sive $Cc = mx \times .07$ sive circiter sexta pars intervalli à puncto B descripti eodem tempore quo acquirit celeritatem m.

Et Celeritas à puncto C tunc temporis acquisita erit iisdem substitutionibus factis $m \times \frac{3.57\times 3.57}{2.3.4} - \frac{2\times 3.57\times 3.57\times 3.57}{3.4.5.6}$ &c. $= m \times .279$ &c. circiter $\frac{1}{4}$ celeritatis m.

11. Quod si eventus quæratur in hypothesi velocitatem m non esse quamminimam; supponatur illa æqualis ipsi s; si quæratur spatium descriptum à puncto B, dum ejus velocitas fit m, fiat series $TV = m$, & utroque ducto in x, erit $xTV = mx$, ergo collatâ serie xTV, & FTV habebitur ratio spatiorum percurrorum Aa & Bb, sed illæ series posito $\frac{s}{m} = 1$. sunt $xTV = \frac{sx^3}{2a^2} + \frac{sx^4}{3a^3} + \frac{sx^5}{6a^4} + \frac{sx^6}{10a^5} + \frac{sx^7}{30a^6}$ &c. & $FTV = \frac{sx^3}{6a^2} + \frac{sx^4}{12a^3} + \frac{sx^5}{30a^4} + \frac{sx^6}{60a^5} + \frac{11sx^7}{2160a^6}$ &c.

Ubi liquet quod primus terminus primæ seriei sit triplus primi termini secundæ, reliqui verò termini primæ seriei reliquorum terminorum secundæ seriei plusquam tripli, unde liquet quod Aa est magis quam triplum spatii per punctum B descripti usque dum celeritatem m recipiat; Ex quo consequitur, quod siquidem B eo momento non est in medio inter puncta A & C, sed vicinius puncto A ad minimum sextâ parte spatii à puncto A descripti ab eo ulterius urgetur & acceleratur celeritatemque majorem quam m recipit donec ad medium inter A & C perveniat, ibique cum celeritate majore quam A feratur, versus C magis accedet, sicque vim repulsivam puncti C sentiet, dumque ultra medium inter A & C promovebitur sensim tardabitur, tandem destructo ejus excessu celeritatis supra celeritatem m, cum sit vicinius puncto C quam puncto A diminuetur ulterius ejus celeritas m, ideoque puncto A vicinius gradatim fiet, in medio inter A & C iterum occurret, sed cum velocitate diminutâ, quare perget vicinius fieri puncto A, sicque ab ipso velocitatis incrementum de novo accipiet, sicque perpetuò oscillabitur punctum B circa medium inter punctum A & punctum C ad morem fibræ sonantis; Eâque ratione fit ut Particulæ aeris magnâ velocitate pulsæ sonum edant sponte, ut in tonitru, pulvere fulminante, flagellis, tapetibus aut lodicibus fortiter excussis &c.

314

Sed ubi m minima fit, punctum B eam celeritatem m acquisivit eo tempore quo parùm abest a medio inter puncta A & C, (per hujus n. 10.) una circiter vicesima spatii à puncto A descripti, ideoque agitationes supra dictas exiguas suscipit quas pro nullis habere Physicis licere debet, quamvis Mathematicè non omninò nullæ sint.

12. Supposito ut prius velocitatem datam m esse minimam, ut obtineatur intervallum temporis quo punctum C celeritatem eam datam m acquiret sumpto ut prius $z^2 = \frac{a^2 m}{s}$ fiat $TX = m$ & $\frac{a^4 m^2}{s^2} TX = mz^4$ & ponatur ubique in serie TX, $\frac{m}{z^2}$ pro $\frac{s}{a^2}$ fiet $mz^4 = \frac{mx^4}{2.3.4} + \frac{mx^5}{3.4.5}$ &c. sive sumptis terminis in quibus exponentes quantitatum x & z differentiam minimam habent, erit $mz^4 = \frac{mx^4}{2.3.4} - \frac{4mx^6}{2.3.4.5.6}$ +

De Motu Corporum.

$+\frac{13mx^8}{2.3.4.5.6.7.8z^4}-\frac{40mx^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10z^6}$ &c. & æquatione per approximationem soluta, invenitur $x^2=9\frac{2}{5}z^2$. Et seriem FTX ulterius continuando & calculum instituendo ut pro serie FTV factum est, invenitur quod via à puncto A emensa, dum punctum C velocitatem *m* acquirit est ad viam quam ipsum punctum C emetitur ut 100 ad 32, sive fere ut 3 ad 1. Quod quidem paulo majus est vero, quia omissa est consideratio motus puncti D, quod cum discedat à puncto C efficit ut vis B in ipsum C sit fortior, breviorique tempore motum *m* ipsi impertiatur.

13. Hinc, cum tempus quo punctum B celeritatem datam *m* acquisivit sit $z\sqrt{3.57}$ & tempus quo punctum C eam celeritatem acquisivit sit $z\sqrt{9\frac{2}{5}}$, illa tempora sunt ut $\sqrt{3.57}$ ad $\sqrt{9\frac{2}{5}}$ sive ut 19 ad 30 fere ut 2 ad 3; cum ergo punctum A uniformiter moveatur, spatium quod punctum A describit dum C acquirit velocitatem *m*, est ad spatium quod idem punctum A describserat dum B eamdem velocitatem *m* acquisiverat, sicut 3 ad 2; spatium verò quod C descripsit dum eam celeritatem acquisivit est proximè tertia pars spatii eodem tempore ab A descripti, & spatium quod B describit dum eamdem celeritatem *m* acquirit est fere dimidia pars spatii eo tempore ab A descripti, ergo illa spatia à punctis C & B descripta, donec velocitatem *m* singula acquirant sunt æqualia.

14. Ex analogiâ verò deducetur quod spatium quod punctum quartum D describit, dum velocitatem *m* attingit, erit 4ª. pars spatii ab A descripti, siquidem spatium a 2do. puncto descriptum est dimidia pars spatii ab A descripti, spatium à 3º. puncto descriptum tertia pars spatii descripti ab A &c. Imo eum ordinem accuratius observari in punctis remotioribus statuere licet quod punctum C tertiam partem spatii ab A descripti dum velocitatem *m* acquirit accuratius describat quam B dimidiam partem spatii ab A descripti dum velocitatem *m* suscipit, calculum tentare potest qui hac Analogiâ rem sufficienter demonstrari non censebit, & B. L. ignoscere rogamus quod talem laborem subire piguerit.

Ex eadem Analogiâ (art. 13.) deducetur spatia quæ percurrunt successiva puncta D, E dum velocitatem *m* acquirunt, æqualia esse iis quæ puncta singula B & C descripserunt.

15. Quibus admissis sequitur diminutionem intervalli inter particulas medii, cum motu communi cum puncto A feruntur esse ubicumque eamdem, & æqualem dimidio spatio ab A descripto dum B celeritatem *m* acquirit.

Nam cum A bis id dimidium spatium descripserit & B semel dum B communem cum A motum suscipit, contrahitur spatium inter A & B dimidio illo spatio, A processit ter illo dimidio spatio & C semel dum C communem cum B & A motum suscipit, ergo intervallum inter A & C duplo ejus dimidii spatii diminutum est, sed inter A & C duo sunt particularum intervalla A & B, B & C, & primum intervallum est contractum dimidio illo spatio, ergo intervallum inter B & C eodem dimidio intervallo diminutum esse debet, sicque de cæteris.

16. Ideo si quolibet tempore elapso sumatur via tota puncti *A*, ea via æqualis erit summæ diminutionum intervallorum inter omnes particulas ad quas celeritas *m* communicata fuit; cum ergo motus puncti *A* sit uniformis, uniformiter etiam crescit numerus particularum ad quas celeritas *m* communicatur; & numerus earum particularum æqualis erit viæ à puncto *A* percursæ divisæ per diminutionis intervalli unius quantitatem.

17. Manente autem fluido eodem, sed mutatâ celeritate puncti *A*, tempora quibus puncta successiva medii celeritatem ejus puncti *A* suscipiunt eadem tamen manent: Nam si in formula $x^2=\frac{3.57a^2m}{s}$ quâ determinatur quadratum temporis quo punctum B recipit celeritatem puncti *A* substituantur loco *m* & *s* quantitates ipsis æquipollentes, formula hæc fiet quantitas constans (manente Elaterio medii & intervallo particularum) quæcumque sit velocitas puncti *A*; Etenim dicatur *f* vis elastica medii, quoniam, ex Hypothesi Problematis hujusce, uniformiter agere censetur tempore quod exprimitur per *a* ut celeritatem *s* generet, erit $s=af$; præterea quoniam particularum intervallum

$\frac{3.57a^2m}{s} = 3.57a^2\frac{AB}{a} = \frac{3.57AB}{f}$ quæ quan-

af

titas, conſtantes tantùm continet à celeritate m independenter; Hinc, tempus quo punctum B celeritatem puncti A recipit idem eſt quæcumque ſit velocitas puncti A; Idem demonſtrabitur de tempore quo punctum C eam celeritatem recipit, nam habet (not. 13) rationem conſtantem ad tempus quo punctum B eam celeritatem acquirit, eſt nempe ad id tempus ut 3 ad 2, & ſic de cæteris punctis. Q. E. D.

18. Diminutiones intervallorum inter partes medii Elaſtici (manente eodem fluido) ſunt ut celeritas puncti A; Nam ſpatium A a percurſum à puncto A tempore quo certa quædam particula medii Elaſtici celeritatem m recipit eſt ſemper mx, (x deſignante tempus quo illa particula medii celeritatem m ſuſcipit) ſed illud tempus eſt conſtans (n. 17 hujuſce) quæcumque ſit celeritas puncti A, ergo ſpatium A a eſt ſemper ut velocitas m; ſed illud ſpatium A a eſt ſumma diminutionum intervallorum inter partes ad quas celeritas m pervenit (n. 16.), ſingulæ autem diminutiones ſunt æquales (n. 15.) ergo ſingulæ diminutiones ſunt ut illud ſpatium A a, ſive ut velocitates.

19. Et vice versâ, numerus partium compreſſarum quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt eſt ſemper idem quæcumque ſit puncti A velocitas; Nam ille numerus eſt ut ſpatium A a diviſum per unius partis diminutionem, ſpatium A a dato tempore eſt ut celeritas puncti A, diminutio unius partis eſt etiam ut ea celeritas; ergo numerus partium quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt eſt ut celeritas per celeritatem diviſa, hoc eſt, in ratione conſtanti; Unde, in diverſis temporibus numerus particularum ad quas celeritas m pervenerit, erit directe ut tempus.

20. Quod ſi Particulæ datâ celeritate jam ſint dimotæ, & certum gradum compreſſionis ſuſceperint, poſtea verò nova velocitas addatur (vel detrahatur) puncto A, novus ille celeritatis gradus eodem tempore ab unâ particulâ ad aliam propagabitur quo prima celeritas propagata fuit, (in Hypotheſi quod tam velocitas m quam hæc nova velocitas addititia exiguæ ſunt) idque hoc modo demonſtrari poteſt.

Fingatur omnes particulas primâ celeritate motas & compreſſas in navi poſitas eſſe quæ ipsâ particularum earum celeritate feratur, ita ut illæ particulæ in eâ nave reſpectivè quieſcant, urgeatur verò prima pars per exceſſum novæ celeritatis ſuper primam, communicatio iſtius exceſſus celeritatis ad omnes partes in navi poſitas ut & nova compreſſio particularum determinabitur ut in præcedenti Problemate, mutatis celeritate, intervallo particularum medii, & ejus elaſticitate; Si ergo prima celeritas fuerit ut prius m; a tempus quo intervallum particularum AB eâ celeritate percurrebatur, ideoque ſit $AB = ma$, ſit ut prius s velocitas genita tempore a per vim elaſticam medii in ſtatu naturali conſiderati & uniformiter agentis, inventum eſt quod tempus quo punctum B celeritatem m acquiſiverat erat $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ (n. 10.) quod ſpatium A a intea à puncto A deſcriptum erat $ma\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, & ſpatium B b erat $.428\,ma\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, ita ut compreſſio particularum ſit $A\,a - B\,b = .572\,m\,a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, ideoque novum intervallum inter particulas in nave poſitas erit $ma \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$; Eſt autem Vis Elaſtica prior ad vim Elaſticam novam inverse ut partium intervalla, ſive ut $ma \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ ad ma, ſive ut $1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ ad 1. Et, ſi exceſſus novæ velocitatis ſuper priorem dicatur n, tempus quo novum intervallum inter particulas deſcriberetur per hanc celeritatem n, erit $\frac{am}{n} \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, nam tempus a quo prius intervallum ma deſcribebatur velocitate m debet eſſe ad iſtud tempus directè ut intervalla ma & $ma \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ & inversè ut velocitates m & n. Denique, ſubtangens Logarithmicæ quæ deſignabatur per s in caſu priore eſt in iſto

LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLV. XLVII. THEOR. XXXVII.

§ 14.

DE MOTU CORPORUM.

isto $\frac{ms}{n}$, cum enim designet velocitatem uniformiter genitam ab Elaterio tempore quo intervallum particularum describitur est directè ut vis elastica & ut tempus, habetur ergo hæc proportio, est

$$1-.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}} \text{ ad } \frac{am}{n}\cdot 1-\sqrt{.572\frac{3.57m}{s}}$$

$$a \qquad\qquad 1$$

ut s ad $\frac{ms}{n}$.

In seriebus ergo supra inventis loco m ponatur n; loco a ponatur $\frac{am}{n}\times 1 -.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$; loco s ponatur $\frac{ms}{n}$, & tempus quo punctum B celeritatem n acquirit, invenietur (substituendo hos valores in formula $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$)

$$\frac{am}{n}\times 1-.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\times\sqrt{\frac{3.57n}{\frac{ms}{n}}}=\frac{am}{n}\times 1-.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\times\sqrt{\frac{3.57nnm}{mms}}=a\times 1-.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\times\sqrt{\frac{3.57m}{s}}.$$

Ideoque tempus $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ quo in præcedenti casu punctum B acquirebat celeritatem m, est ad tempus quo in hoc casu acquirit celeritatem n, ut 1 ad $1-.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, sed hæc ratio, existente m quantitate minimâ ut suppositio fert, est ferè æqualitatis. Quare nova celeritas, sive excessus novæ celeritatis supra præcedentem, propagabitur ad punctum proximum medii elastici eodem temporis intervallo quo præcedens celeritatis gradus in eo puncto genitus fuerat, ideoque etiam ad puncta successiva iisdem temporibus perveniet.

21. Si per datum aliquod tempus primum punctum A medii Elastici constanti celeritate m fuerit motum, postea urgeatur majori celeritate $m+n$ durante æquali tempore, omnes particulæ quæ primam celeritatem m susceperant, altero isto tempore celeritatem novam $m+n$ suscipient, & interea totidem particulæ ulteriores priorem celeritatem m accipient; Nam incrementum celeritatis n ad eas omnes particulas à primâ propagari potest dato tempore, ad quas eo ipso tempore celeritas m propagata fuerat (hujusce 20). Interea verò uniformiter propagata fuissent velocitas pristina m ab ultimis particulis quæ eam susceperant ad totidem ulteriores. Si itaque successivè post æqualia tempora velocitas crescat, totidem formabuntur portiones medii Elastici æquali numero partium constantes, quæ successivas illas celeritates habebunt, portio proxima puncto A ultimam celeritatem habebit, secunda penultimam, & sic deinceps.

22. Hinc, si medium Elasticum urgeatur per successivos velocitatis gradus, imprimi potest ejus partibus velocitas satis magna ut sensibiliter in aures agat nec tamen excitetur in medii Elastici partibus sensibilis ea vibratio quæ juxta n. 11. nasceretur si simul & semel tota illa velocitas ipsi imprimeretur; & hinc intelligitur differentia inter aërem sonum generantem, aërem sonum propagantem, & aërem ventum deferentem; si magna velocitas particulæ aëreæ imprimatur, particula ipsi proxima tremores suscipit, fitque punctum sonorum; si velocitas minor excitetur quæ constans maneat nec per gradus augeatur aer uniformiter transfertur & fit ventus; sed si ab exiguâ velocitate ad magnam assurgatur, aëris particulæ successivos illos gradus recipiunt, & quia singula velocitas accepta est exigua tremores sensibiles non excitantur in particulis aëreis, quæ velocitatem illam magnam suscipientes & ad aurem deferentes sensationem soni producunt.

23. Si autem velocitas novâ minor sit velocitate præcedente, eodem modo constabit quod decrementum illud velocitatis eodem tempore ad proximum punctum transibit quo præcedens velocitatis gradus ab eo acquisitus fuerat, & ad successiva puncta iisdem etiam temporibus perveniet quibus priorem celeritatem acquisiverant, imo solutio per constructionem Problematis ipsius productâ Logarithmica ultra punctum F quæri potest, eademque obtinebuntur ac prius.

24. Quibus positis intelligitur effectus vibrationis fibræ flexæ & redeuntis in aërem.

Inde

1us. Caſus. Dividatur tempus ejus reditus in partes æquales quam minimas, & durante ſingulâ temporis parte, fibræ velocitas uniformis manere cenſeatur. Prima velocitas, ad certum numerum partium dato eo tempore communicabitur qui partium numerus dicatur N; altero inſtanti ſecunda velocitas eidem partium numero N communicabitur dum prima velocitas ad totidem particulas ulteriores N perveniet, tertio inſtanti primus partium numerus N tertiam velocitatem habebit, ulterior numerus N ſecundam velocitatem, numerus N adhuc ulterior primam; hinc ergo ſi fibra dimidiam vibrationem abſolverit, hoc eſt ultra ſtatum ſuum naturalem diſceſſerit quantum poteſt, erunt in aëre totidem ſucceſſivæ portiones, quæ particulas numero N continebunt, quot ſucceſſivæ velocitates erunt genitæ, & particulæ remotiſſimæ à fibrâ primum celeritatis gradum habebunt, proximæ fibræ ultimum, mediæ verò medium, qui maximus eſt; diminutiones intervallorum correſpondebunt illis celeritatum gradibus, ut ſint minimæ tam in particulis à fibrâ remotiſſimis, quam in particulis ipſi proximis, maximæ in mediis.

Regrediente fibrâ, eadem omnino Lex obſervabitur niſi quod partes aëris fibræ proximæ retrò movebuntur & compreſſiones in dilatationes mutabuntur, dum in portiones ulteriores medii celeritates primo receptæ propagantur, ideoque tota vibratione abſolutâ numerus particularum agitatarum duplus erit ejus quem in dimidiâ vibratione notaveramus, pars dimidia remotior eſt planè æqualis illi de quâ primo actum eſt & ſimiliter conſtituta, pars citerior verò negativam celeritatem obtinebit & dilatationem; ejus citerioris partis portio remotiſſima à fibrâ primum celeritatis fibræ regredientis gradum habebit, & portio fibræ proxima ultimum (quietem nempe), media portio medium, hoc eſt retrocedet eâ ipsâ celeritate quâ medium ulterioris partis procedit & dilatationes illis celeritatibus negativis correſpondebunt, ideoque in medio illius proximæ portionis maxima erit dilatatio ut & maximus regreſſus.

2^dus. Caſus. Quod ſi ſingula tempuſcula, quibus durantibus velocitas fibræ uniformis fingitur, æqualia non ſint, eâdem ratione intelligentur effectus fibræ in partes medii, niſi quod portiones medii quæ ſingulis ſucceſſivis velocitatis gradibus gaudent non ſint æquales, ſed (per not. 19.) ſint ſicut tempora quibus durantibus ſingulæ illæ velocitates in fibrâ permanſerunt.

3us. Caſus. Quamvis autem fibræ velocitas nullo tempuſculo uniformis maneat ſed continuo acceleretur, eodem tamen modo fibra aget in medium ac ſi reverâ velocitas ejus creſceret per intervalla temporis, & durante tempuſculo quam minimo (ſed finito) uniformis maneret; idque propterea quod Intervalla inter particulas medii ſunt finitæ quantitates non verò infinitè parva; nam per not. 4. & 5. nullus motus ex puncto *A* in punctum *B* tranſire poteſt, niſi punctum *A* proceſſerit finitâ quantulâcumque quantitate, ideoque, niſi fibra quæ urget punctum *A* velocitatem finitam in eo generaverit (ut fert Hypotheſis Problematis not. 9.); Pari ratiocinio punctum *B* non ſentiet incrementa velocitatis puncti A, niſi poſtquam incrementum finitum velocitatis in eo genitum fuerit (not. 5. & 20.). Ergo fibra agit in medium quaſi ſingulo tempuſculo (æquali vel inæquali) ejus velocitas uniformis perſtitiſſet; Intelligitur ergo effectus vibrationis fibræ in aërem per primum & ſecundum caſum hujuſce demonſtrationis. Q. E. I.

25. Totum autem ſpatium cujus particulæ commotæ fuerunt durante integrâ fibræ vibratione à Newtono pulſus vocatur, & ſi vibratione abſolutâ fibra quieſceret, ſemper ulterius propagaretur ille pulſus; Nam totus ille pulſus (momento quo abſolvitur vibratio) diviſus intelligatur in portiones totidem quot temporis intervalla in vibrationis duratione fuerunt aſſumpta, quæ temporis intervalla facilitatis ergo æqualia ſupponantur, ſingula portio medii eam velocitatem habebit quam habuit chorda in momento ipſi reſpondenti, ultima portio ſive remotiſſima à fibra eam habebit celeritatem quam fibra habuerat primo inſtanti, penultima portio eam celeritatem habet quam fibra habuit ſecundo inſtanti &c.; Sequenti verò tempuſculo ultima portio pulſus ad novam portionem ſibi æqualem & ulteriorem ſuam velocitatem propagabit (hujus 21.) dum ipſa ſuſcipiet penultimæ portionis celeritatem, penultima verò portio celeritatem antepenultimæ &c., poſtea altero temporis intervallo ad alteram novam portionem ulteriorem prima celeritas propagabitur, & ſecunda celeritas

DE MOTU CORPORUM.

in primâ portione novi iſtius pulſus generabitur, ſicque deinceps: novus ergo pulſus formabitur plane ſimilis priori æqualiter extenſus, æquali celeritate in ſingulis partibus donatus (ſemotâ ut dixi conſideratione partium circumquâque poſitarum remque conſiderando quaſi de partibus in linea rectâ poſitis unice ageretur).

26. Ipſe autem primus pulſus penitus quieſcit quando in ſecundum totus tranſiit ſi nulla nova chordæ agitatio ſuccedat, nam celeritas portionis pulſus quæ fibræ proxima eſt ſucceſſivè ad ſequentes portiones tranſit dum novus pulſus formatur, ſed celeritas ejus portionis fibræ proximæ eſt ultima fibræ celeritas quæ in hâc Hyp. eſt quies, ſed ubi pulſus ſecundus totus formatus eſt, celeritas portionis pulſus quæ fibræ proxima erat ad initium ſecundi pulſus eſt tranſlata & per omnes partes pulſus primi ſucceſſivè tranſiit, ideoque in quiete eas conſtituit in quâ permanſerunt nullâ ſuccedente novâ agitatione.

27. Quòd ſi chorda novam vibrationem faciat, ut evenit, Reſtituetur primus pulſus æqualis præcedenti qualiſcumque ſit ejus vibrationis velocitas initialis, nam dividatur totius vibrationis hujuſce tempus in totidem partes æquales partibus in quas tempus primæ vibrationis diviſum fuerat, quod fieri poteſt cum vibrationes ſint iſochronæ, iſtæ partes temporis æquales erunt iis quæ in præcedenti vibratione aſſumptæ fuerunt; Dato autem tempore numerus particularum compreſſarum eſt ſemper idem qualiſcumque ſit velocitas (n. 19. hujuſce). Ergo ſiquidem ſingulo inſtanti dato totidem partes comprimuntur, totidemque ſunt inſtantia data in vibrationibus Iſochronis, pulſus ad totidem particulas in quâvis vibratione Iſochronâ extendetur.

28. Si per velocitatem pulsûs intelligatur (cum Newtono) diſtantia ad quam pulſus extenditur diviſa per tempus quo pulſus ad eam diſtantiam pervenit, dico Pulſus in eodem medio eſſe omnes æquiveloces quæcumque ſit fibræ pulſum producentis vibratio: Id jam liquet de vibrationibus Iſochronis in quibus tempore unius vibrationis ad totidem partes pulſus propagatur, ideoque æquale ſpatium æquali tempore percurrit, poſtea verò idem pulſus ſimiliter propagatur, ſed id pariter verum eſt de Vibrationibus Eterochronis; Dividantur enim inæqualia vibrationum tempora in totidem utrinque tempuſcula minima quæ cotis temporibus ſint proportionalia, numerus partium compreſſarum ſingulis tempuſculis diverſis ſunt illis tempuſculis proportionales (n. 19. hujuſce) ideoque totis vibrationum temporibus proportionales, ſed in ſingulâ vibratione totidem tempuſcula aſſumpta ſunt, ergo totus numerus partium quæ ſingulum pulſum conſtituunt eſt proportionalis tempori vibrationis. Sed diſtantia ad quam pervenit pulſus eſt ſemper numero partium proportionalis. Ideoque diſtantia ad quam pervenit pulſus eſt tempori vibrationis proportionalis, ſed velocitas pulſus eſt diſtantia ad quam pervenit diviſa per tempus quo ad eam diſtantiam pervenit, ergo ea velocitas eſt conſtans. Ergo in eodem medio omnes pulſus, ſunt æquiveloces; Quod de ſono per experimenta verum eſſe demonſtravit Derhamus.

29. Quod ſi medium diverſum ſit, velocitates pulſuum erunt inversè in ratione ſubduplicatâ denſitatis & directè in ratione ſubduplicatâ vis Elaſticæ, quippe (n. 17. hujuſce) deprehendimus quadratum temporis quo celeritas puncti *A* tranſit in punctum *B* eſſe $\frac{3.57\,AB}{f}$ deſignante AB particularum intervallo & *f* vi elaſticâ, & uniformiter procedere motum in pulſu ab unâ particulâ ad ſequentem, ſumantur ergo totidem partes in utroque medio, tempora quibus motus pulſus à primâ ad ultimam perveniet erit ut $\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{f}}$ (neglectâ quantitate conſtanti 3.57). Velocitas verò pulſus eſt directè ut ſpatium quod occupant illæ omnes particulæ & inversè ut tempus quibus motus à primâ ad ultimam tranſit, ſpatium verò quod occupant illæ particulæ cum ſint totidem eſt ut intervallum AB ſingulæ particulæ, ideoque eſt velocitas pulſus ut $\frac{AB}{\sqrt{\frac{AB}{f}}} = \sqrt{AB} \times \sqrt{f}$.

Intervallum particularum eſt inversè ut denſitas medii (rem conſiderando ut in n 25 hujuſce) ergo velocitas pulſus eſt inversè in ratione ſubduplicatâ denſitatis medii, & directè in ratione ſubduplicatâ vis Elaſticæ (quod Prop. XLVIII. ſtatuit Newtonus).

30. His de toto pulſu dictis, nunc de motu ſingulæ particulæ pulsûs obſervandum eſt, in ſingulâ particulâ omnes velocitatis ſucceſſivos gradus quos habuit prima particula A produci, & tantùmdem tem-

temporis in eâ particulâ durare, quantùm in ea particula A, hoc cum discrimine quod tardius eos velocitatis gradus suscipiat quam particula A, & quidem eò tardius quò ab ea remotior est; 1us. Casus. Dividatur ut prius vibrationis tempus in tempuscula & durante uno tempusculo æquabilis manere censeatur velocitas impressa particulæ A, fingamus singulo tempusculo velocitatem ad viginti particulas pervenire & spectemus speciatim motum quem 10^a. particula à puncto A suscipiet quæ particula dicatur X, illa particula X motum puncti A non suscipit nisi post novem particulas antecedentes, tum ipsa particula X motum puncti *A* suscipit & uniformiter cum eo movetur durante reliquo tempusculo, tunc ex Hypothesi mutatur celeritas puncti A, interea tamen uniformis manet celeritas puncti X donec nova ea celeritas ad ipsam pervenire potuerit, hoc est postquam successivè pervenit ad particulas novem antecedentes, sed nova hæc celeritas per novem particulas antecedentes particulam X propagatur eodem tempore quo prima celeritas per easdem novem particulas propagata fuerat, ergo prima celeritas tantò diutius permanet in particulâ X quantò tardius eam receperat, ergo ea prima celeritas tamdiù durat in particulâ X quamdiù duraverat in particulâ *A*; cumque idem de singulis successivis motibus puncti A dici possit, hinc quælibet particula X ipsissimum habet motum ac particula A, nisi quod tardius in eâ incipiat & definat. Ideoque etiam manifestum est in hoc casu, spatia à particulis *A* & X descripta æqualia fore & similiter descripta.

2us. Casus. Ponatur nunc quod motus puncti *A* æquabilis non maneat durante singulo tempusculo, velocitates tamen successivæ puncti X erunt illæ quas in fine singuli tempusculi quam minimi punctum *A* acquisiverit, ut liquet ex tertio casu notæ 24, ideoque punctum X suscipiet velocitates correspondentes velocitatibus puncti A sumptis per saltus, sed quoniam cùm primùm punctum A spatium finitum descripsit, agere incipit in punctum proximum, saltus illi quamminimi intelligi debent, ideoque Physicè nulli, hinc Physicè particula X & particula A eosdem motus habebunt.

Pariter describent spatia æqualia & similia; Quippe absciss æ curvæ cujusvis repræsentent tempus quo durante punctum *A* movetur, & ejus ordinatæ repræsentent correspondentes velocitates, & dividatur axis curvæ in partes quamminimas sed finitas, eriganturque ordinatæ, illæ repræsentabunt velocitates æquabiles puncti *X* initio singuli tempusculi, & Parallelogrammata contenta sub ordinata & portione axis respondente repræsentabunt spatia à puncto *X* descripta, areæ verò mixtilineæ inter easdem ordinatas easdem axis portiones & arcus curvæ comprehensæ repræsentabunt spatia correspondentia à puncto *A* descripta, sed quando portiones axis sunt quamminimæ, summæ omnium eorum Parallelogrammatum & arearum mixtilinearum correspondentium pro æqualibus habentur, Ergo spatia à particulis A & X descripta sunt æqualia & similiter descripta saltem quàm proximè.

314.

31. Ideo uniformiter motus fibræ propagatur trans particulas medii; singulæ verò ejus particulæ successivè motum fibræ suscipiunt & ejus ad instar moventur, sed in fibrâ Elasticâ vires sunt semper proportionales distantiæ fibræ à puncto medio motus sui, ut per experimenta constat, & illarum virium actio sensibiliter non turbatur per resistentiam aëris, propter ejus raritatem, nec per ejus elaterium quia hinc inde à fibrâ aer datur qui fere æqualiter premit, ideo fibra elastica ac per consequens particulæ ipsæ medii moventur secundum Legem Prop. XXXVIII. Lib. I. Sed eadem est Lex motus Penduli in Cycloide oscillantis Prop. LI. lib. I. Ergo *Pulsibus per fluidum propagatis singulæ particulæ motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes accelerantur semper & retardantur pro Lege oscillantis Penduli.* Q. E. D.

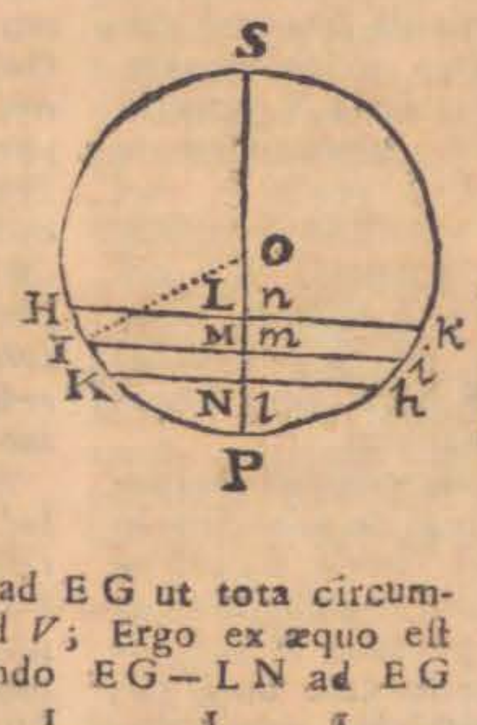
32. Sumatur tempus quodvis, simulque illud intervallum inter particulas pulsus quod tale est ut eo tempore assumpto motus fibræ à primâ particulâ ejus intervalli ad ultimam perveniat. Dico, quod tempus illud erit ad totum vibrationis tempus ut illud intervallum ad totius pulsus longitudinem; Res est evidentissima ex præcedentibus; nam cum motus propagetur in pulsu uniformiter qualiscumque sit celeritas, hoc est, cum ad totidem particulas dato tempore perveniat, manifestum est quod sicut est totum vibrationis tempus, sive totum tempus quo pulsus formatur ad omnes particulas quæ pulsum constituunt, ita portio quævis ejus temporis ad numerum particularum quæ eâ temporis portione motum receperunt.

DE MOTU CORPORUM.

33. Ut melius horum cum Newtonianis nexus pateat, hic adjungere lubet Propoſitionis XLIX. demonſtrationem ex XLVII. deſumptam, quamvis vix diverſa ſit ab iis quæ in ipſo Textu leguntur, & 1°. quidem, ſit PS ſpatium quod fibra unâ vibratione eundo percurrit, ex ejus medio O ut centro deſcribatur circulus PKSk ejus circumferentia repræſentet totum vibrationis ex itu & reditu compoſitæ tempus, partes ejus circumferentiæ ut KH repræſentabunt tempora quibus fibra per ſpatium correſpondens NL movebitur; HL, KN repræſentabunt velocitates fibræ in punctis N & L, & HL−KN velocitatum incrementa vel decrementa, actioni elaterii fibræ proportionalia, hæc omnia patent ex Propoſ. XXXVIII. & LI. Lib. I.

2°. Sit BC longitudo pulſus, & dicatur V radius circuli cujus circumferentiæ illa longitudo BC æqualis foret, dico quod vis naturalis elaterii medii erit ad vim acceleratricem fibræ ut V−KN ad HL−KN.

Sint enim duo puncta E & G in ſuo naturali ſitu in medio elaſtico, quæ poſt aliquod tempus in locis ε & γ occurrant, ſuſcepto nempe motu fibræ ſecundum Leges à nobis expoſitas, ſingula ſeorſim eumdem motum ac fibra habebunt, ideoque ſi ſumptum fuerit $E\varepsilon = PL$ erit PH tempus elapſum à momento quo punctum E motum fibræ ſuſcepit & erit HL ejus velocitas in ε, pariter ſit $G\gamma = PN$ erit PK tempus elapſum à momento quo G motum fibræ ſuſcepit, & erit KN ejus velocitas in γ, ſint verò E & G puncta proxima; compreſſio ſpatii EG ubi in $\varepsilon\gamma$ pervenit oritur ex eo quod plus proceſſit ε quam γ itaque diminutio ejus ſpatii erit æqualis ſpatio LN, ideoque $\varepsilon\gamma$ erit æqualis EG−LN, utque vires quibus urgentur puncta medii, eorum denſitati eſt proportionalis, vis tota quâ urgetur punctum γ eſt ad eam quâ urgebatur punctum G (quæ erat vis naturalis elaterii) inverſè ut ſpatium $\varepsilon\gamma$ ad EG ſeu ut $\frac{1}{EG-LN}$ ad $\frac{1}{EG}$. Sed eſt LN ad KH ut IM ad radium PO, & cum KH deſignet intervallum temporis quo pulſus à puncto E ad punctum G pervenit, eſt (per n. 32.) KH ad EG ut tota circumferentia PKSk ad BC, ſive ut PO ad V; Ergo ex æquo eſt LN ad EG ut IM ad V & convertendo EG−LN ad EG ut V−IM ad V ideoque $\frac{1}{EG-LN} : \frac{1}{EG} = \frac{1}{V-IM} : \frac{1}{V}$, ac per conſequens vis tota quâ urgetur punctum γ eſt ad vim naturalem elaterii ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$.



Vis illa tota quâ urgetur punctum γ eſt vis naturalis Elaterii medii cui ſuperaddita eſt tota vis motrix fibræ quæ ad id punctum pervenit, ergo dividendo & reducendo ad communem denominatorem, Vis motrix fibræ in puncto N, eſt ad vim naturalem elaterii ut IM ad V−IM, ſive invertendo, Vis naturalis elaterii, ad vim totam motricem fibræ in puncto N ut V−IM ad

Corol. Hinc patet quod numerus pulſuum propagatorum idem ſit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progreſſu. Nam lineola phyſica $\varepsilon\gamma$, quamprimum ad locum ſuum primum redierit, (n) quieſcet; neque deinceps movebitur, niſi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulſuum qui à corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quieſcet igitur quamprimum pulſus à corpore tremulo propagari deſinunt.

PRO-

ad IM, vel quia IM & KN pro ſe mutuo ſumi poſſunt ubi puncta N & L ſunt proxima eſt vis naturalis elaterii ad vim totam motricem fibræ ut $V-KN$ ad KN; ſed vis tota motrix fibræ eſt ad vim ejus acceleratricem durante tempuſculo KH ut KN ad $HL-KN$, ergo ex æquo, eſt vis naturalis elaterii ad vim acceleratricem fibræ ut $V-KN$ ad $HL-KN$: Q. E. D.

3°. In ipſo motûs fibræ initio, vis elaterii fluidi in ſtatu ſuo naturali eſt ad vim acceleratricem fibræ ut V ad HK; Nam ipſo motus initio ſi PH ſit infinitè parvum, ac per conſequens etiam $E\varepsilon$ infinitè parvum nullus adhuc motus ad particulam proximam G communicatur (per n. 4.) ergo omninò evaneſcit KN ideoque $V-KN=V$, & $HL-KN=HL$ ſed arcus infinitè parvus & ejus ſinus æquantur ergo $HL=HK$; Ergo vis elaterii fluidi in ſtatu naturali eſt ad vim acceleratricem fibræ ipſo ejus motus initio ut V ad HK.

Ex quibus fluit demonſtratio Propoſitionis XLIX. Q. E. I.

(n) * *Quieſcet, neque deinceps movebitur.* Quamprimùm lineola phyſica $\varepsilon\gamma$ ad locum ſuum primum redierit, ipſius velocitas quam ordinata, m i, ſemper exponit (prop. 38. lib. 1.) extinguetur; & ejuſdem lineolæ denſitas viſque elaſtica eadem erit cum denſitate & vi elaſticâ partis EG medii quieſcentis; ideóque quieſcet &c. * Id liquet ex n. 20. additionis noſtræ de Motibus in fluido Elaſtico genitis.

316. Ex his intelligitur quomodò per vibrationes iſochronas corporis reſonantis producantur in aëre pulſus quibus ad aurem appulſis, fit in nobis perceptio ſoni, & cur ſoni, ceſſante motu tremulo corporis ſonori, ſtatim ceſſent. Liquet etiam tonos à numero pulſuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendere, cum (per cor. prop. hujus) numerus pulſuum æqualis ſit numero vibrationum ex itu & reditu compoſitarum quas chorda muſica peragit, & ab iſto numero tonorum diverſitas oriatur (308). 317.

317. Patet etiam quomodo aëris pulſus ſonum & tremores in aliis corporibus uniſonis aut conſonantibus creare poſſint. Nam cum aëris pulſus in nervum muſicum incurrit qui vibrationem unam ex itu & reditu compoſitam abſolvere aptus ſit, eo tempore quo pulſus ſuam percurrit latitudinem, commovetur nervus & oſcillatur per exiguum licet ſpatium, & recurrentibus novis atque conſpirantibus aëris pulſibus celeriùs agitatur ſonumque reddit. At ſi nervus vibrationes ſuas integras ſeu ex itu & reditu compoſitas perficere nequeat quo tempore pulſus aëris latitudinem ſuam deſcribit, poſſit tamen in partes aliquotas hujuſmodi vibrationibus peragendis aptas dividi; partes illæ, quieſcentibus diviſionum punctis, congruenter ad pulſuum recurſum ſenſim agitabuntur, vibrationeſque ſuas cum pulſibus uniſonas ſingulæ perficient. Si verò nervi duo proximi in eas partes aliquotas dividi poſſint quæ ſint inter ſe ad uniſonum, aut quod idem eſt, quæ vibrationes iſochronas peragant, & horum nervorum unus pulſetur ſonumque edat, nervi duo ſeſe in partes ſuas aliquotas veluti dividendo ut ad uniſonum reducantur. Ut ſi ejuſ-

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulſuum in fluido elaſtico propagatorum velocitates ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè & ſubduplicatâ ratione denſitatis inversè; ſi modo fluidi vis elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.

Caſ. 1. Si media ſint homogenea, & pulſuum diſtantiæ in his mediis æquentur inter ſe, ſed motus in uno medio intenſior ſit: contractiones & dilatationes partium analogarum (°) erunt ut iidem motus. Accurata quidem non eſt hæc proportio. Verumtamen niſi contractiones & dilatationes ſint valde intenſæ, non errabit ſenſibiliter, ideoque pro phyſicè accurata haberi poteſt. (P) Sunt autem vires elaſticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires. Ideoque æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes itus & reditus ſuos per ſpa-

ejuſdem nervi capiantur partes duæ quarum ſit ratio 2 ad 3 & æqualiter tendantur, alteraque pars pulſetur, dividetur minor nervus in partes duas, & major in partes tres æquales quæ ſingulæ ſeorſim oſcillabuntur. Nam brevior nervus duarum nempe partium, ter oſcillando dum nervus longior partium trium, duas oſcillationes abſolvit (306) frequentiores in aëre pulſus excitat quorum recurſu nervus longior citiùs quam par eſt agitatur; & cum utriuſque nervi aëriſque motus congruere non poſſint niſi ſingulæ nervorum partes aliquotæ & æquales ſeorſim oſcillentur, motus ille conſpirans tam in nervis quam in aëre tandem producitur. Et hæc quidem in experimentis muſicis ità contingere obſervarunt Joan. Wallis Operum in fol. tom. 2. pag. 466. Et deindè Acuſticæ inſtaurator D. Sauveur in monum. Acad. Pariſ. an. 1701. ubi alia experimenta refert quæ ex prædictis facilè poſſunt explicari; * & inde ingenioſiſſimi ſyſtematis de tonorum productione & Harmoniâ fundamenta derivavit Ill. De Mayrans omni laude ſuperior, quod ad Praxim feliciſſimè revocavit vir inter eruditos Orpheos Illuſtriſſimus D. Rameau.

(o) * *Erunt ut iidem motus.* Motus enim illi ſunt vel cauſæ vel effectus contractionis & dilatationis partium in pulſibus correſpondentium. Hæc tamen proportio accurata non eſt, ſi contractiones & dilatationes ſint valde intenſæ, quemadmodum ſi chorda muſica nimiâ vi pulſetur, vis motrix particularum ejus non eſt amplius proportionalis ſpatiis per quæ debet moveri, & aëris denſitas vi ipſius elaſticæ proportionalis non manet, ſi nimiâ vi comprimatur vel dilatetur aer. * Singulæ diminutiones intervallorum ſunt ut velocitates (n. 19.) non tamen ex eo ſequitur contractiones eſſe ut velocitates, (hunc verò caſum & reliquos demonſtravimus n. 29. additionis de mot. fluid. el.)

(p) * *Sunt autem vires elaſticæ motrices.* Nam vires elaſticæ motrices ſunt ut partium analogarum denſitates, hoc eſt, datâ materiæ quantitate, ut contractiones; & contractiones ſunt ut dilatationes quæ viribus elaſticis medii contracti producuntur;

ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem ſuam progrediendo conficiunt, & in loca pulſuum proximè præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.

Caſ. 2. Sin pulſuum diſtantiæ ſeu longitudines ſint majores in uno medio quàm in altero; (q) ponamus quod partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia ſingulis vicibus eundo & redeundo deſcribant: & (r) æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elaſticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda eſt ut pulſuum latitudo; & in eâdem ratione eſt ſpatium per quod ſingulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. (ſ) Eſtque tempus itus & reditus unius in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ materiæ & ratione ſubduplicatâ ſpatii, atque ideo ut ſpatium. Pulſus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æqui-veloces. *Caſ.*

tur; *& velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires* (13. lib. 1.), hoc eſt, ut contractiones & dilatationes, *ideóque* cum ſpatia ſimul deſcripta ſint ut velocitates ſimul genitæ, *æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes itus & reditus ſuos*, ſeu motus ſuos *per ſpatia contractionibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia ſimul peragent, & propterea pulſus qui tempore itûs & reditûs latitudinem ſuam progrediendo conficiunt* (314.) *& in loca pulſuum proximè præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum* æqualibus temporibus *deſcriptarum æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.*

(q) *Ponamus quod partes correſpondentes.* Quoniam (per caſ. 1.) in eodem medio homogeneo & datâ pulſuum latitudine ſpatium quod partes medii oſcillando deſcribunt, manente tempore oſcillationis, minui poteſt in datâ ratione; nihil obſtat quominùs in hoc ſecundo caſu ſupponatur quod partes mediorum correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia, iiſdem manentibus oſcillationum in unoquoque medio temporibus, eundo & redeundo percurrant. 317

(r) * *Æquales erunt.* Si media ſint homogenea, uti in hoc 2°. caſu ſupponitur, vires elaſticæ motrices ſunt ut partium correſpondentium contractiones & dilatationes quas producunt, ſed quia quantitates materiæ in partibus correſpondentibus ſunt ut pulſuum latitudines, ſeu ut partium analogarum volumina, & partes illæ analogæ eundo & redeundo dilatantur & contrahuntur per ſpatia quantitatibus materiæ proportionalia (per hyp.) contractiones & dilatationes ideóque vires elaſticæ motrices æquales erunt.

(ſ) * *Eſtque tempus itûs & reditûs.* Nam tempus quo materia viribus æqualibus ad legem oſcillantis penduli agitatur, eſt in ra-

DE MOTU CORPORUM.

Caſ. 3. In mediis igitur denſitate & vi elaſticâ paribus, pulſus omnes ſunt æquiveloces. Quod ſi medii vel denſitas vel vis elaſtica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elaſticæ, & materia movenda in ratione denſitatis augetur; (t) tempus, quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in ſubduplicatâ ratione denſitatis, ac diminuetur in ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ. Et propterea velocitas pulſuum erit in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ denſitatis medii inversè & ratione ſubduplicatâ vis elaſticæ directè. *Q. E. D.*

Hæc propoſitio ulterius patebit ex conſtructione ſequentis.

PRO-

ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione materiæ & ſubduplicatâ ratione ſpatii (per cor. 5. prop. 24. lib. 2.).

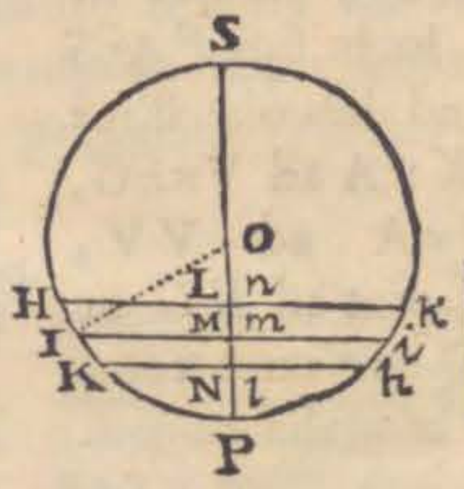
(t) *Tempus quo motus iidem peragantur &c.* Tempus quo motus per æqualia ſpatia peraguntur eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione materiæ movendæ directè & ſubduplicatâ ratione vis motricis inversè (per cor. 5. prop. 24.) ideóque in hoc tertio caſu, tempus, manente ſpatio deſcripto, augebitur in ſubduplicatâ ratione denſitatis, ac diminuetur in ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ, & propterea velocitas quæ eſt ut ſpatium directè & tempus inversè, (ob datum ſpatium per hyp.) erit in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ denſitatis medii inversè, & ratione ſubduplicatâ vis elaſticæ directè; ſed datis medii denſitate & vi elaſticâ, velocitas pulſuum, utcumquè varietur ſpatium, data eſt, (per caſ. 1. & 2.) ergò velocitas pulſuum erit ſemper in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ denſitatis medii inversè & ratione ſubduplicatâ vis elaſticæ directè.

318. Ex hâc propoſitione patet cur ſoni omni generis, gravis & acutus, intenſus & remiſſus, pari velocitate in eodem aëre propagentur. Nam ſonorum diverſitas, quoad *grave* & *acutum*, à numero pulſuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendet (316); (at per hanc prop.) pulſus aëris, ſeu plures ſeu pauciores dato tempore producantur, eâdem ſemper velocitate diffunduntur & dato tempore datum ſpatium conficiunt: Soni verò in eodem aëre producti eo intenſiores ſunt, manente tono, quo majus eſt ſpatium quod aëris particulæ eundo & redeundo deſcribunt dato tempore; ut ſi chorda muſica validius pulſetur, majores vibrationes dato tempore peragit, majoreſque oſcillationes particularum aëris excitat, & ſonus intenſior percipitur, licet tonus idem maneat & proinde pulſuum latitudo ac velocitas non mutentur. Cum ergo tanta ſit velocitas lucis ut per atmoſphæram in inſtanti quoad ſenſum propagetur (per ſchol. ad prop. XCVI. lib. 1.); Si ſonus & lux eodem puncto temporis excitentur, uti in machinis bellicis flamma & fragor producuntur ſimul, & ſpectator ſpatium quo à corpore reſonante diſtat, tempuſque quod inter luminis & ſoni perceptiones intercedit, dimediatur, ſoni velocitas innoteſcet. Atque eo modo in variis regionibus varia obſervata eſt velocitas ſoni, & in Angliâ eâ celeritate ferri Flamſtedio & Halleyo viſus eſt, quâ pedes Londinenſes plus minus 1142, Pariſienſes verò 1070, tempore minuti unius ſecundi percurreret. Quia verò denſitas & vis elaſtica aëris in variis terrarum locis, diverſiſque anni tempeſtatibus in eodem loco mutantur, inde quoque mutari oportet ſoni velocitatem. Diu creditum eſt, obſervantibus Merſenno, Gaſſendo, & Academicis Florentinis, ſonum neque conſpirante vento accelerari, neque adverſo retardari; Sed D. Derham experimentis accuratè inſtitutis, falſum id eſſe aſſerit.

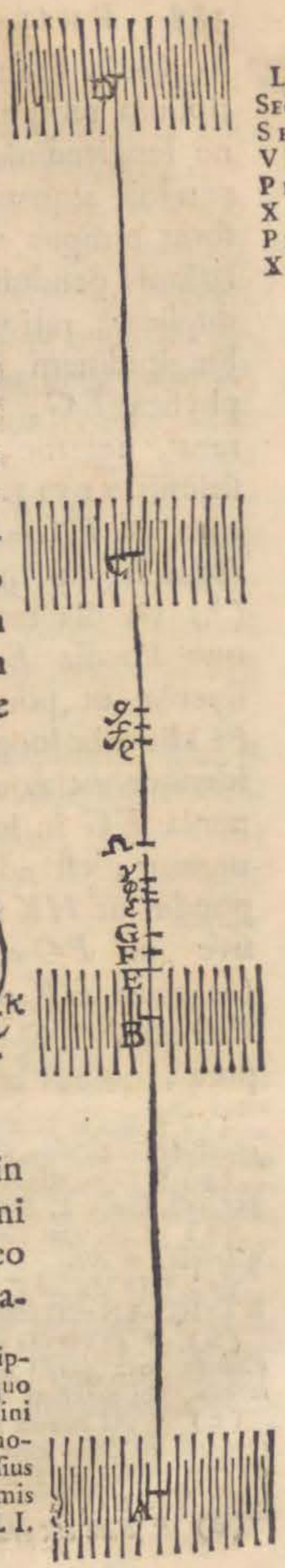
PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis medii denſitate & vi elaſticâ, invenire velocitatem pulſuum.

Fingamus medium ab incumbente pondere pro more aëris noſtri comprimi; ſitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit A: & quo tempore pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio A deſcripti æquale.



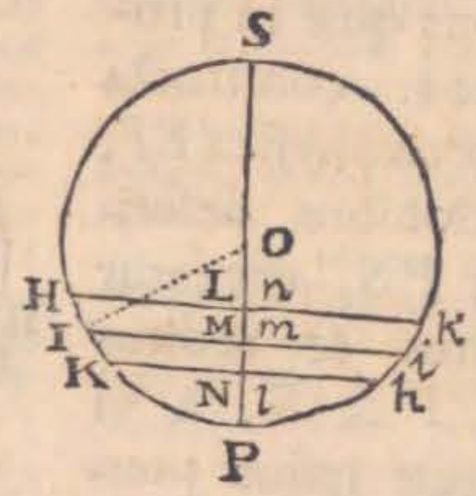
Nam ſtantibus quæ in propoſitione XLVII. conſtructa ſunt, ſi linea quævis phyſica *EF*, ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium *PS*, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis *P* & *S*, à vi elaſticâ (u) quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini *PS* æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqua-

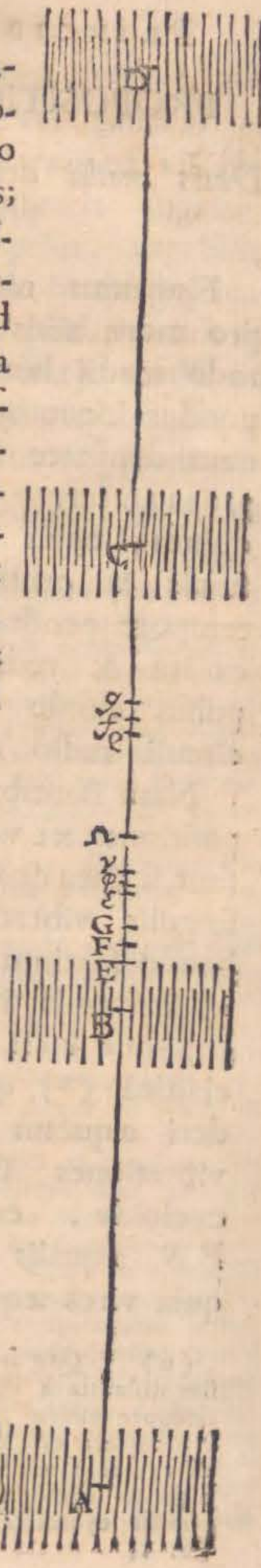


(u) * *Quæ ipſius ponderi æquetur*, & quæ decreſcat ut ipſius diſtantia à centro O; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini PS æqualis eſt, oſcillari poſſet; quia particulæ EF in hujuſmodi cycloide oſcillantis vis motrix eſt ſemper ut diſtantia ipſius à puncto cycloidis infimo ſeu medio, & in altiſſimis ſeu extremis punctis cycloidis ponderi ipſius æquatur, per Cor. Prop. LI. lib. 1.

DE MOTU CORPORUM.

lia ſpatia ſimul impellent. Quare cum oſcillationum tempora (x) ſint in ſubduplicatâ ratione longitudinis pendulorum, (y) & longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis penduli, cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione longitudinis $\frac{1}{2}PS$ ſeu PO ad longitudinem A. Sed vis elaſtica, quâ lineola phyſica EG, in locis ſuis extremis P, S exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione propoſitionis XLVII.) ad (z) ejus vim totam elaſticam ut $HL-KN$ ad V, hoc eſt (cum punctum K jam incidat in P) ut (a) HK ad V: & (b) vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola EG comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad (c) lineolæ longitudinem EG; ideoque ex æquo, vis quâ lineola EG in locis ſuis P & S urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$, ſive ut $PO \times A$ ad VV, (d) nam HK erat ad EG ut PO ad V. Quare cum tempora, quibus æqualia corpo-





(x) * *Sint in ſubduplicata ratione longitudinis pendulorum* (472. lib. 1.).

(y) * *Et longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius*, per cor. Prop. L. & Cor. 2. Prop. LII. lib. 1.

(z) * *Ad ejus vim totam elaſticam* in loco EG ubi medium quieſcit, ut &c.

(a) * *Ut HK ad V.* Cum punctum K incidit in P, evaneſcit KN & fit HL−KN=HL=HK, per cor. 1. lem. VII. lib. 1.

(b) * *Et vis illa tota, hoc eſt, pondus incumbens, quo &c.* Vis elaſtica tota partis EG eſt in æquilibrio cum pondere comprimente, ubi medium quieſcit.

(c) * *Ad lineolæ longitudinem EG.* Cum enim medium homogeneum, cujus altitudo eſt A, ſit (per hyp.) ejuſdem denſitatis cum medii parte EG, pondera ſunt ut volumina, hoc eſt, ut lineæ A & EG.

(d) * *Nam HK erat ad EG ut PO ad V*, in Dem. Prop. XLVII.

ra per æqualia ſpatia impelluntur, ſint (e) reciprocè in ſubduplicatâ ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illâ elaſticâ, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in ſubduplicatâ ratione V V ad $PO \times A$, atque (f) ideo ad tempus oſcillationis penduli cujus longitudo eſt A in ſubduplicatâ ratione V V ad $PO \times A$, & ſubduplicatâ ratione PO ad A conjunctim; id eſt, in ratione integrâ V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam BC. Ergo tempus, quo pulſus percurrit ſpatium BC, (g) eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut V ad A, id (h) eſt, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium BC, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in (k) eâdem ratione; ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas pulſuum ea eſt, quam acquirunt gravia æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſus hujus, cum velocitate cadendo acquiſitâ, pulſus percurret ſpatium (l) quod erit æqua-

(e) * *Sint reciprocè in ſubduplicatâ ratione virium.* Patet per cor. 3. prop. XXIV. libri hujus.

(f) * *Atque ideo ad tempus &c.* Patet per compoſitionem rationum & ex æquo; quia (ex demonſtratis) tempus unius vibrationis particulæ EF, urgente vi ponderis ipſius, eſt ad tempus oſcillationis penduli cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione PO ad A.

(g) * *Eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ*, penduli cujus longitudo eſt A.

(h) * *Id eſt, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A.* Nam (in demonſtr. prop. XLVII.) erat V radius circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo BC; unde eſt V ad A ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A.

(k) * *In eadem ratione.* Quoniam tempus quo pulſus percurrit ſpatium BC, eſt ad tempus datum oſcillationis integræ penduli cujus longitudo A, datis medii denſitate & vi elaſticâ datâ, eſt ut ſpatium BC ad datam peripheriam circuli radio A deſcripti; liquet, quod tempus, quo pulſus percurrit ſpatium BC, aut eadem celeritate percurreret datam peripheriam circuli radio A deſcripti, fore eis ſpatiis proportionalem. Quare tempus quo pulſus percurrit ſpatium BC, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ penduli cujus longitudo eſt A, ut tempus quo pulſus percurrit idem ſpatium BC, ad tempus quo percurrit longitudinem æqualem circumferentiæ circuli cujus radius eſt A; Ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. 318.

(l) * *Quod erit æquale toti altitudini A* (30. lib. 1.)

DE MOTU CORPORUM.

æquale toti altitudini A; ideoque tempore oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ percurret ſpatium æquale circumferentiæ circuli radio A deſcripti: eſt (m) enim tempus caſus ad tempus oſcillationis ut radius circuli ad ejuſdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A ſit ut fluidi vis elaſtica directè & denſitas ejuſdem inversè; (n) velocitas pulſuum erit in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione denſitatis inversè & ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulſuum diſtantias.

Corporis, cujus tremore pulſus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur ſpatium quod pulſus eodem tempore percurrere poſſit, & pars inventa (o) erit pulſus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scho-

(m) * *Eſt enim tempus caſûs*, per dimidiam altitudinem A ad tempus oſcillationis unius ex ſolo itu, vel ſolo reditu conſtantis, ut diameter circuli ad ejus circumferentiam (470. lib. 1.), ideóque ad tempus duplum oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut radius circuli ad ejus circumferentiam. Quare cum velocitates uniformes ſint ut ſpatia eodem tempore deſcripta, pulſus verò propriâ velocitate æquabili peripheriam circuli radio A deſcripti tempore oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ percurrat, & grave cum uniformi velocitate, quam acquirere poteſt cadendo per dimidiam altitudinem A, eodem tempore idem ſpatium deſcribat; patet velocitates illas pulſus & gravis eſſe æquales.

(n) * *Velocitas pulſuum erit &c.* Velocitas pulſuum, ut pote æqualis (per cor. 1.) velocitati quam gravia per dimidiam altitudinem A cadendo acquirunt, eſt in ratione ſubduplicatâ altitudinis illius A (28. lib. 1.); Sed altitudo A medii homogenei cujus denſitas eadem eſt cum denſitate medii E G & pondus in æquilibrio cum ejuſdem medii EG vi elaſticâ, manente denſitate eſt ut pondus ſeu ut vis elaſtica directè, & manente vi elaſticâ ſeu pondere eſt ut denſitas inversè, quia denſitas eſt ſemper ut pondus directè & volumen ſeu altitudo A inversè; & propterea conjunctis his rationibus altitudo A eſt ſemper in ratione compoſitâ ex ratione vis elaſticæ directè & ratione denſitatis inversè. Quare velocitas pulſuum erit in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione denſitatis inverse & ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè.

(o) * *Erit pulſus unius latitudo.* Quoniam pulſus omnes uniformi cum velocitate propagantur (ex dem. Prop. XLVIII. & XLIX.) & tot pulſus æquales producuntur in aëre, quot ſunt corporis tremuli vibrationes iſochronæ ex itu & reditu compoſitæ (per cor. Prop. XLVII.); Si ſpatium quod pulſus ſeu ſonus dato tempore percurrere poſſit, per numerum vibrationum, quas corpus ſonorum eodem tempore perficit, dividatur, quotus erit pulsûs unius latitudo. Sed dato ſono, numerus vibrationum quas corpus ſonorum dato tempo-

re

Scholium.

Spectant propositiones novissimæ ad motum lucis & sonorum. (P) Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas, in actione solâ (per prop. XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni verò propterea quod à corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quam aëris pulsus propagati per prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint & graves, quales sunt soni tympanorum. (9) Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cum pondera specifica aquæ pluvia-

re peragit, invenitur (per formulas 303, 304); si nimirum chorda musica ad unisonum vel ad notam consonantiam cum sono dato reducatur. Cum enim tonorum differentia à numero vibrationum quas corpus resonam dato tempore absolvit, pendeat (308 & 312), iidem toni eodem vibrationum isochronarum numero producuntur. Notum verò est spatium quod sonus dato tempore describit (318).

Exempli causà, si sonus omnium acutissimus, quem possimus distinguere, vibrationibus integris 6400 tempore minuti unius secundi absolutis producatur, & omnium gravissimus vibrationibus 12 $\frac{1}{2}$ excitetur, uti D. Sauveur in Historia Acad. Scient. Paris. an. 1700. arbitratus est; divide spatium 1142. pedum Londinensium, quod sonus tempore minuti unius secundi conficit, per numeros 6400. & 12 $\frac{1}{2}$ successivè, & quoti, videlicet digiti 2, 14, & pedes 91, 36, erunt latitudines pulsuum, quibus soni acutissimus & gravissimus producuntur.

(p) * *Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas*, & interpositis corporibus opacis intercipiatur, in actione solâ, seu pressione, motuve per medium quodlibet fluidum propagato, consistere nequit; quia pressio & motus per medium omne fluidum propagata divergunt à recto tramite in spatia immota & pone obstacula circumquaque diffunduntur, per prop. citatas. Cum igitur lumen sit corpus, ut pote motu progressivo præditum, ab obstaculis reflexum & refractum, motumque in corporibus quæ inflammat excitans, necesse esse videtur ut à corporibus luminosis tenuissima corpuscula incredibili fere velocitate quaquaversum emittantur. Spatia igitur cœlestia, quæ astrorum omnium Lux immensâ illâ celeritate permeat, materiâ quâdam æthereâ densissimâ, quæ radiorum lucis motum interciperet, plena esse non possunt. 319.

(9) 319. * *Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur.* Corpora enim majora & minus elastica majoribus soni gravioris, cum quo consonare possunt, vibrationibus facilius concutiuntur & congruenter ad pulsuum motum agitantur; nam debet esse proportio quædam inter pulsuum aëris latitudinem & corporum circumjectorum magnitudinem, densitatem & vim elasticam, ut sonus iis communicetur; & quo fibræ breviores sunt, tenuiores & magis tensæ, eo facilius acuto sono seu brevioribus aëris pulsibus agitantur & contremunt. Quæ omnia patent per notam 317.

DE MOTU CORPORUM.

vialis & argenti vivi ſint ad invicem ut 1 ad 13 $\frac{2}{3}$ circiter, & ubi mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus ſpecificum aëris & aquæ pluvialis ſint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: (r) erunt pondera ſpecifica aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi ſit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërem noſtrum ſubjectum comprimere poſſet, erit 356700 digitorum, ſeu pedum *Anglicorum* 29725. Eſtque hæc altitudo illa ipſa quam in conſtructione ſuperioris problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum deſcripti (f) circumferentia eſt pedum 186768. Et cum pendulum digitos 39 $\frac{1}{5}$ longum oſcillationem ex itu & reditu compoſitam tempore minutorum duorum ſecundorum, uti notum eſt, (t) abſolvat; pendulum pedes 29725 ſeu digitos 356700 longum (u) oſcillationem conſimilem tempore minutorum ſecundorum 190 $\frac{3}{4}$ abſolvere debebit. Eo igitur tempore ſonus progrediendo (x) conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius ſecundi pedes 979.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio craſſitudinis ſolidarum particularum aëris, per quam ſonus utique (y) propagatur in inſtanti. Cum pondus aëris ſit ad pondus aquæ ut 1 ad

(r) * *Erunt*, ex æquo & per compoſitionem rationum, pondera ſpecifica ſive denſitates aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Sed fluidorum in ſe homogeneorum, eidem baſi incumbentium, & in æquilibrio conſiſtentium altitudines ſunt inverſe ut denſitates (173. lib. 2.): eſt igitur 1 ad 11890 ut 30 digit. ad altitudinem aëris uniformis qui cum 30 digitis argenti vivi æquiponderat; & ideo altitudo hæc eſt digitorum 356700, ſeu, dividendo per 12, pedum Anglicorum 29725.

(f) * *Circumferentia eſt pedum* 186768. Eſt enim radius ad circumferentiam ut 113 ad 710, ſive ut 29725 ad 186768 quam proximè.

(t) * *Abſolvat.* Pendulum cujus longitudo eſt pedum Pariſienſium 3 & linearum 8 $\frac{1}{2}$, oſcillationem unam ex itu & reditu compoſitam tempore minutorum duorum ſecundorum abſolvit (471. lib. 1.); & pes Londinenſis eſt ad pedem Pariſienſem ut 15 ad 16 quam proximè, & ita ſunt pedes 3 cum lineis 8 $\frac{1}{2}$ ad digitos 39 $\frac{1}{6}$, vel 39 $\frac{1}{5}$ quam proximè.

(u) * *Oſcillationem conſimilem tempore &c.* Oſcillationum tempora ſunt in ſubduplicatâ ratione longitudinis pendulorum (472. lib. 1.), & propterea ut 39 $\frac{1}{5}$ ad 356700, ita 4 ad quadratum numeri minutorum ſecundorum, qui quæritur, & peracto calculo invenitur eſſe 190 $\frac{3}{4}$ quam proximè.

(x) * *Conficiet pedes &c.* Per Prop. XLIX.

(y) * *Propagatur in inſtanti.* Nam corpus ſolidum quod condenſari non poteſt, dum movetur, totum ſimul movetur, & ideo motus ab uno corporis illius extremo

ad 870, & sales sint fere duplo densiores quam aqua; si particulæ aëris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, & raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: (z) diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$. seu 109 circiter, ob crassitudinem particularum aëris: & sic sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter. LIBER SECUNDO. SECT. VIII. PROP. XLVIII. THEOR. XXXVIII.

His adde quod vapores in aëre latentes, cum sint alterius elastici ad alterum extremum propagatur in instanti.

(z) * *Diameter particulæ aëris erit &c.* Fingantur cubi duo æquales, quorum alter aëre plenus sit, alter medio continuo ejusdem circiter densitatis cum aquâ vel salibus. Hoc medium continuum divisum sit in particulas æquales, tenuissimas & sese mutuo contingentes; aër verò ex hujusmodi particulis, quæ æqualibus intervallis distinctæ sint, constet. Harum particularum diameter dicatur D, spatium inter illas in aëre interceptum S, & ideo intervallum inter centra particularum aëris $S+D$, numerus particularum aëris in uno cubi latere N, & proinde earum numerus in cubo toto aëreo N^3, & latus cubi $NS+ND$. Sit M numerus particularum alterius medii continui in uno latere cubi, & propterea M^3 earum numerus in cubo toto, ac MD cubi latus. Quia duo cubi æquales supponuntur, erit $NS+ND=MD$. Si densitas aëris sit ad densitatem alterius medii continui ut 1 ad A; quia paribus voluminibus, densitates sunt ut quantitates materiæ, quæ sunt ut numeri particularum magnitudine & densitate æqualium, erit $1:A=N^3:M^3$, & hinc $1:A^{\frac{1}{3}}=N:M$, ideoque $M=NA^{\frac{1}{3}}$. Quare cum sit $NS+ND=MD=NDA^{\frac{1}{3}}$, erit $S+D=DA^{\frac{1}{3}}$, & $S=D\times[A^{\frac{1}{3}}-1]$ ideoque $D:S=1:A^{\frac{1}{3}}-1$ ac $D:S+D=1:A^{\frac{1}{3}}$. Jam si ponatur A fere æqualis numero 870, erit fere $A^{\frac{1}{3}}=9$; si verò ponatur $A=1000$, vel $A=1100$, vel $A=1200$, erit fere $A^{\frac{1}{3}}=10$; unde diameter D solidæ particulæ aëris erit ad intervallum $S+D$ inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum S inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde spatium totum quod particulæ solidæ in lineâ rectâ datâ positæ occupant, erit ad spatium reliquum quod intervalla particularum in eâdem lineâ tenent, ut 1 ad 8 vel 9 circiter, & ad totam lineam ut 1 ad 9 vel 10. Sed si nulla habeatur ratio crassitudinis solidarum particularum aëris, sonus lineam rectam pedes 979 longam tempore minuti unius secundi describit: quare cum sonus per spatium totum quod solidæ particulæ aëris occupant, in instanti propagetur, & sit 9 ad 1 ut linea pedes 979 longa ad ipsius partem quam particula solidæ aëris occupant; partem illam, quæ est $\frac{979}{9}$, seu 109 pedum circiter, addere licet spatio 979 pedum. 310

DE MOTU CORPORUM.

clateris & alterius toni, (a) vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo ſoni propagantur. His autem quieſcentibus, motus ille celerius propagabitur per ſolum aërem verum, idque in ſubduplicatâ ratione minoris materiæ. Ut ſi atmoſphæra conſtet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, motus ſonorum celerior erit in ſubduplicatâ ratione 11 ad 10, vel in integrâ circiter ratione 21 ad 20, quam ſi propagaretur per undecim partes aëris veri: ideoque motus ſonorum ſupra inventus, augendus erit in hâc ratione. Quo pacto ſonus, tempore minuti unius ſecundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita ſe habere debent tempore verno & autumnali, ubi aër per calorem temperatum rareſcit & ejus vis elaſtica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aër per frigus condenſatur, & ejus vis elaſtica remittitur, motus ſonorum tardior eſſe debet in ſubduplicatâ ratione denſitatis; & viciſſim æſtivo tempore debet eſſe velocior.

Conſtat autem per experimenta quod ſoni tempore minuti unius ſecundi eundo conficiunt pedes *Londinenſes* plus minus 1142, *Pariſienſes* vero 1070.

Cognitâ ſonorum velocitate innoteſcunt etiam intervalla pulſuum. (b) Invenit utique *D. Sauveur*, factis à ſe experimentis, quod fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum *Pariſienſium* plus minus quinque, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chordæ

(a) * *Vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo ſoni propagantur.* Nam vibratorius particularum aëris motus, quo ſonus producitur, corporibus ejuſdem toni facile, at corporibus alterius elateris & alterius toni ægrè aut nullo modo communicari poteſt (317). Unde ſi atmoſphæra conſtet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, fitque proinde totum pondus atmoſphæræ ad pondus vaporum ut 11 ad 1, & ad pondus aëris veri, ſubducto pondere vaporum, ut 11 ad 10, minuenda eſt quantitas materiæ movendæ in ratione 11 ad 10. Sed ſi denſitas medii, ſive quantitas materiæ ſub dato volumine contentæ, cæteris paribus, minuatur, velocitas ſoni augetur in eâdem ratione ſubduplicatâ (per prop. XLVIII). Quare (in hyp. Newt.) velocitas ſoni augenda eſt in ratione ſubduplicatâ 10 ad 11, vel in integrâ circiter ratione 20 ad 21; & ideo ſpatium dato tempore minuti unius ſecundi deſcriptum, quod erat 1088 pedum, augendum in ratione 20 ad 21. Eſt autem fere 20 ad 21 ut 1088 ad 1142.

(b) * *Invenit utique* D. Sauveur in Hiſtoria Acad. Scient. Pariſ. an. 1700.

dæ quæ tempore minuti unius ſecundi (c) centies recurrit. Sunt igitur pulſus plus minus centum in ſpatio pedum *Pariſienſium* 1070, quos ſonus tempore minuti unius ſecundi percurrit; ideoque pulſus unus occupat ſpatium pedum *Pariſienſium* quaſi 10 $\frac{7}{10}$, id eſt, duplam circiter longitudinem fiſtulæ. (d) Unde veroſimile eſt quod latitudines pulſuum, in omnium apertarum fiſtularum ſonis, æquentur duplis longitudinibus fiſtularum.

Por-

(c) * *Centies recurrit*, hoc eſt centum oſcillationes ex itu & reditu compoſitas tempore minuti unius ſecundi abſolvit. Idem D. Sauveur in monumentis Acad. Pariſ. an. 1713. oſcillationes 101 vel 102 pro ejuſdem fiſtulæ ſono poſuit.

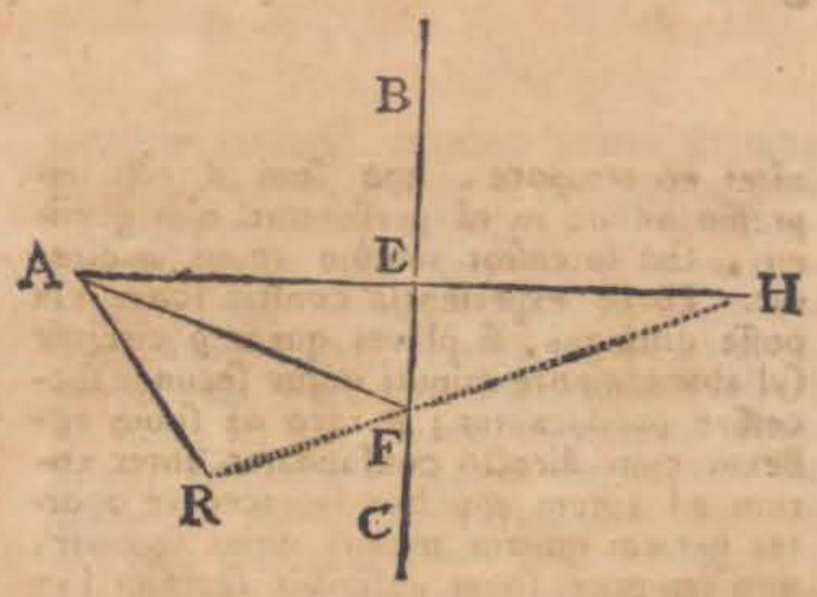
(d) * *Unde veroſimile eſt &c.* Idem confirmatur alio experimento ejuſdem D. Sauveur, qui loco mox citato invenit quod fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum Pariſienſium plus minus 2, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chordæ quæ 243 oſcillationes integras tempore minuti unius ſecundi perficit. Unde ſi dividatur numerus 1070 per 243, prodit pulſus unius latitudo ped. Pariſ. 4 $\frac{2}{5}$ circiter, id eſt, dupla circiter longitudo fiſtulæ. Eſt autem in organis pneumaticis fiſtula aperta, quæ patet in ſuperiori & latiori extremo, alteri quo aër fiſtulam ingreditur, oppoſito. Si occludatur fiſtula, octavâ gravius ſonat.

Huc uſque de ſono directo plura diximus, de reflexo pauca adjungenda ſunt.

320. Prop. Sonus percipitur tanquam ex eo loco procedens ex quo quaſi centro pulſus aëris propagantur. Conſtat experientiâ.

321. Cor 1. Hinc ſi ſonus è centro quovis A directe propagatus in obſtaculum planum ſatis magnum BC incurrat, & ex A ducatur ad BC perpendicularis AE, producaturque ad H ut ſit EH æqualis AE; ſonus reflexus eodem fere modo percipietur ac ſi ex loco H tanquam centro directè propagaretur (194).

322. Cor. 2. Similiter ſi ſonus à centro quovis propagatus in obſtaculum quod-



libet impingat, à quo ita reflectatur ut poſt reflexionem radii ſoni in centrum aliud convergant; ſonus reflexus tanquam ex hoc ſecundo centro propagatus audietur. § 322

323. Cor. 3. Unde ſi radii ſonori ſatis denſi ad aurem appellentes & ſoni unius ſenſationem producentes, ab aure in diverſa centra convergant; locus ex quo ſonus propagatur, non bene diſtinguetur.

324. Si ſonus producatur in A, & deinde ab obſtaculo quovis BC (vide fig. ſup.) reflectatur tanquam ex centro H propagatus; auditor in loco R ſonum directum per AR propagatum percipiet primùm; deinde ſonum reflexum quaſi ex centro H procedentem, poſtquam motu directo ſpatium AF, & motu reflexo ſpatium FR deſcripſit, audiet. Idem igitur ſonus audietur bis, modo tamen diſtantiarum AR & AFR differentia tanta ſit ut ſonus directus & ſonus reflexus eodem ſenſibili momento organum auditus non affi-ciant; nam ſi ſonus reflexus ad aurem perve-

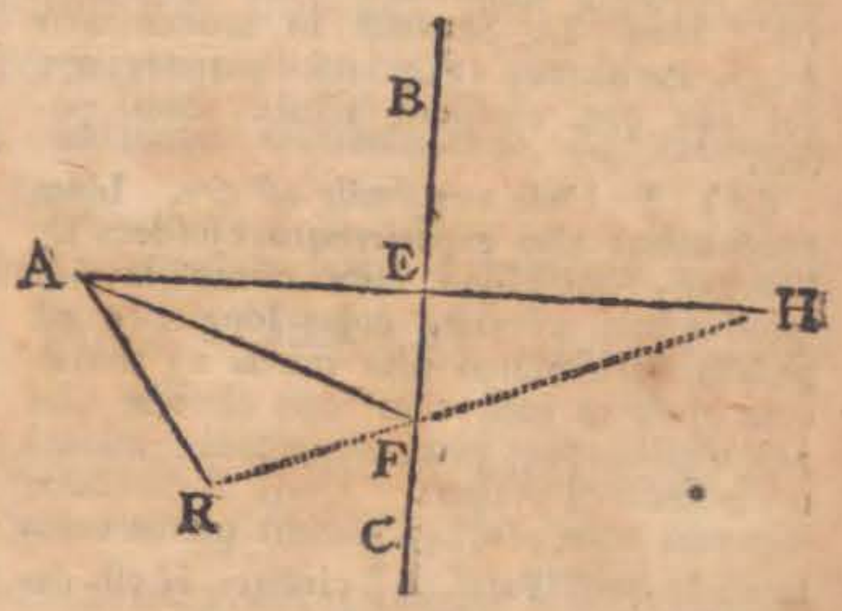
De Motu Corporum.

Porro cur ſoni ceſſante motu corporis ſonori ſtatim ceſſant, neque diutius audiuntur ubi longiſſimè diſtamus à corporibus ſonoris, quam cum proximè abſumus, patet ex corollario propoſitionis XLVII. libri hujus. Sed & cur ſoni in tubis ſtentorophonicis valde augentur ex allatis principiis manifeſtum eſt. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus à causâ generante augeri ſolet. Motus autem in tubis dilatationem ſonorum impedientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea à motu novo ſingulis recurſibus impreſſo magis augetur. Et hæc ſunt præcipua phænomena ſonorum.

SEC-

miret eo tempore, quo ſoni directi impreſſio adhuc in eâ perſeverat, non geminus, ſed intenſior tantùm ſonus audiretur. Porrò experientiâ conſtat ſonos vix poſſe diſtingui; ſi plures quam 9 circiter ſyllabæ tempore minuti unius ſecundi ſucceſſivè producantur; & ideo ne ſonus reflexus cum directo confundatur, inter eorum ad aurem appulſus intercedere oportet partem nonam minuti unius ſecundi, quo tempore ſonus deſcribit ſpatium 127 pedum Londinenſium circiter. Hoc igitur ſpatio minor eſſe non debet diſtantiarum AR & AFR differentia, ut ſonus reflexus diſtincte percipi poſſit in R. Quod ſi auditor in A locetur, ubi ſonus directus producitur, & ſpatium 2 AE quod ſonus deſcribit ut ad centrum A poſt reflexionem in E redeat, ſit 127 pedum Londinenſium, ideoque AE 63 vel 64 pedum circiter, diſtingui poterit ſonus reflexus à directo. Si plura ſint obſtacula juſtis intervallis diſſita, in quæ ſonus directe offendat, is quaſi ex variis locis pluries repetitus audietur; ut cum machinarum bellicarum fragorem vel tonitru boatum circumjecta ædificia vel craſſiores nubes pluries referunt. Sæpe etiam obſtacula ſonum directum mutant, dum vehementiori aëris tremore concuſſa variè contremunt & aerem repercutiendo detonant.

325. Ex iiſdem principiis explicari poteſt tubæ vocalis ſeu ſtentorophonicæ efficacia ad vocem articulatam in loca maximè diſſita propagandam. Sunt hujuſmodi tubæ variarum figurarum, ſed omnes



ſatis auguſtæ, oblongæ & intus perpolitæ, quo ſonus in arctum coactus in latius ſpatium ſeſe diffundere & virium detrimentum pati prohibeatur, ac radii ſonori in determinatam plagam confertiores dirigantur. Fabrefiunt ex materia ad concipiendum motum tremulum, quo ſonus producitur, aptæ, ut ſonus hoc partium tubæ & aëris ab ipſis agitati tremulo motu multiplicatus impetum majorem acquirat & longius progrediendi vim habeat. Optima tubarum vocalium figura, Auctore Clar. Joh. Matthia Haſio, illa cenſetur, quæ fit ex converſione parabolæ circa ipſius axem, orificio exiguo tubæ, quod os loquentis ſuſcipit, in ipſo foco parabolæ conſtituto. Hâc enim tubâ radii ſonori, ſaltem magnam partem, reflectuntur ad axem tubæ paralleli (194. lib. 2. & Theor. 3. de parabola lib. 1.). Idem Haſius,

SECTIO IX.

De motu circulari fluidorum.

HYPOTHESIS.

RE*ſiſtentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, proportionalem eſſe velocitati, quâ partes fluidi ſeparantur* (e) *ab invicem.*

ſius, quo tubam longiorem, non nimium auctâ amplitudine, reddat, tubum ellipticum oblongum parabolico ita jungit, ut elliptici focus unus concidat cum foco parabolici, & os loquentis in altero elliptici foco conſtituatur; quâ ratione fit ut radii ſoni ab ore in tubo elliptico ad focum parabolici partim directi, partim reflexi dirigantur (per theor. 4. de ellipſi), & deinde in tubo parabolico, ut modo dictum eſt, progrediantur. Limbus tubæ, qua parte ampliſſima eſt, quâque ſonus emittitur, ad formam labiorum recurvandus eſt, quo minus effectum tubæ turbare poſſit aëris externi in tubam irruentis motus. Hæc omnia fusè & accuratè expoſita vides, in ipſa laudati Auctoris Diſſertatione Phyſico-Mathematica de tubis ſtentoreis.

* Tubis ſtentoreis annumerandæ ſunt omnes tubæ militares aut venatoriæ ſive rectæ ſive incurvæ, exiguus enim fibilus quem edit tubicen conſtricto aëre inter labium & tubæ oram, in prodigioſum erumpit ſonum, & obſervabile videtur ea inſtrumenta ita à Parabolâ diſcrepare ut axis ſuæ reſpectu convexa potius ſit tuba quam concava, Incrementum itaque ſoni non tam pendere videtur ex eo quod ſonus ſecundum axis tubæ directionem parallelus exeat, quam ex eo ipſo quod indicat Newtonus, nempe ex motus reciprocatione, ita ut forma tubæ ea eſſe debeat ut ſonus ab uno pariete ad alterum repellatur, extrinſecus ſonum derivando, ita tamen ut nonniſi per innumeras reflexiones ſive reciprocationes foras emittatur. 3 * 5

(e) * *Ab invicem.* Reſiſtentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, eſt ſemper eadem in ſpatiis æqualibus, quæcumque fuerit mobilis velocitas; cum in omnibus ſpatiis æqualibus idem defectus lubricitatis ſuperandus ſit. Eſt igitur hæc reſiſtentia, cæteris paribus, ut ſpatium quod mobile deſcribit, hoc eſt, dato tempore, ut velocitas. Quia verò partes contiguæ quæ ſimul pari velocitate moventur, ſeſe mutuo non atterunt; capienda hic eſt velocitas partium relativa, quâ partes ſeparantur ab invicem. Sed de hâc hypotheſi vide Scholium ſequens.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

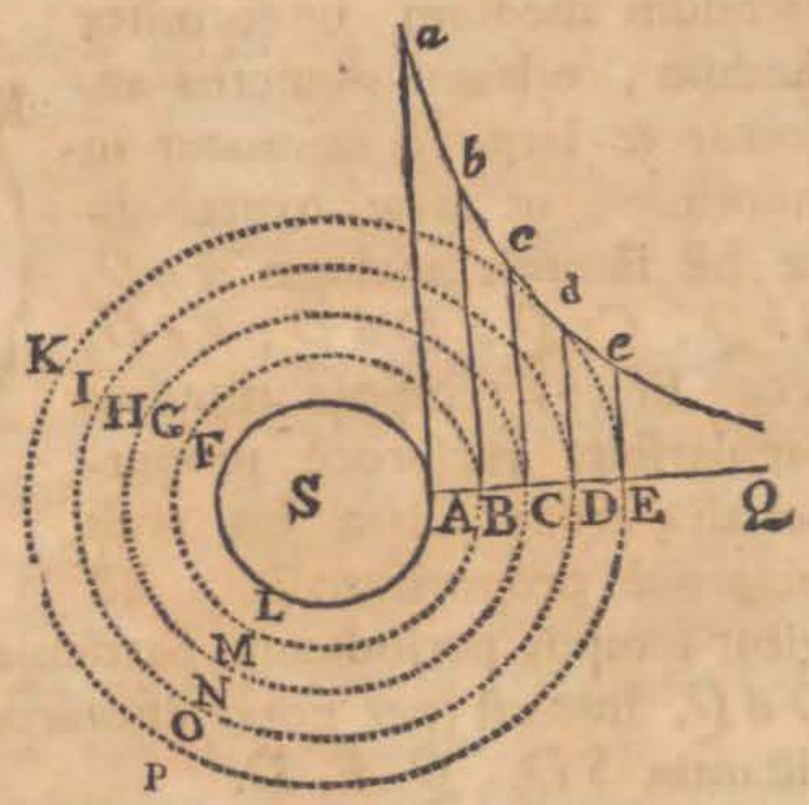
Si cylindrus ſolidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem, perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; dico quod tempora periodica partium fluidi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri.

Sit *AFL* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos ſolidos ejuſdem craſſitudinis. Et quoniam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum orbium in ſe mutuo factæ erunt (per hypotheſin) ut (a) eorum tranſlationes ab invicem, & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concavâ quam ex parte convexâ; prævalebit impreſſio fortior, & motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte utrâque ſibi invicem æquari & fieri in regiones

(a) 326. * *Ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ &c.* Si ſuperficies contiguæ nullâ velocitate relativâ inter ſe moverentur, aut ſi eſſent perfectè lubricæ, nulla foret earum frictio: at ſi ſuperficies ſint aſperæ & alia ſuper aliam incedat, naſcetur ex partium attritu reſiſtentia, quæ, dato tempore & cæteris paribus, velocitati ſuperficierum relativæ proportionalis eſt (per hyp.). Unde ſi ſuperficies contiguæ, homogeneæ & æqualis ubique aſperitatis ſe ſe viribus æqualibus premant, & præterea ſuperficies quæ ſuper alias ſibi contiguas incedunt, æquales ſint; reſiſtentiæ ex attritu dato tempore genitæ proportionales erunt tranſlationibus ſuperficierum contiguarum ab invicem, cum hujuſmodi tranſlationes ſint ſpatia velocitatibus relativis dato tempore deſcripta. Si verò tranſlationes illæ ſeu velocitates relativæ ſuperficierum contiguarum ponantur æquales; reſiſtentiæ, cæteris paribus, erunt ut ſuperficies contiguæ quæ ſeſe mutuo atterunt. Quare ſi nec ſuperficies contiguæ, nec earum velocitates relativæ ſeu tranſlationes ab invicem æquantur; reſiſtentiæ, cæteris paribus, erunt in ratione compoſitâ ex ratione ſuperficierum contiguarum & ratione tranſlationum ab invicem dato tempore factarum. Impreſſiones verò contiguorum orbium in ſe mutuo factæ, ſunt ut reſiſtentiæ quibus producuntur.

giones contrarias. (b) Unde cum impreſſiones ſunt ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem, erunt tranſlationes inversè ut ſuperficies, hoc eſt, inversè ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe. (c) Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directè & diſtantiæ inversè; hoc eſt, conjunctis rationibus, ut quadrata diſtantiarum inversè. Quarè ſi ad infinitæ rectæ *SABCDEQ* partes fingulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipſarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur (d) linea curva hyperbolica; erunt ſummæ differentiarum,

LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LI. THEOR. XXXIX.



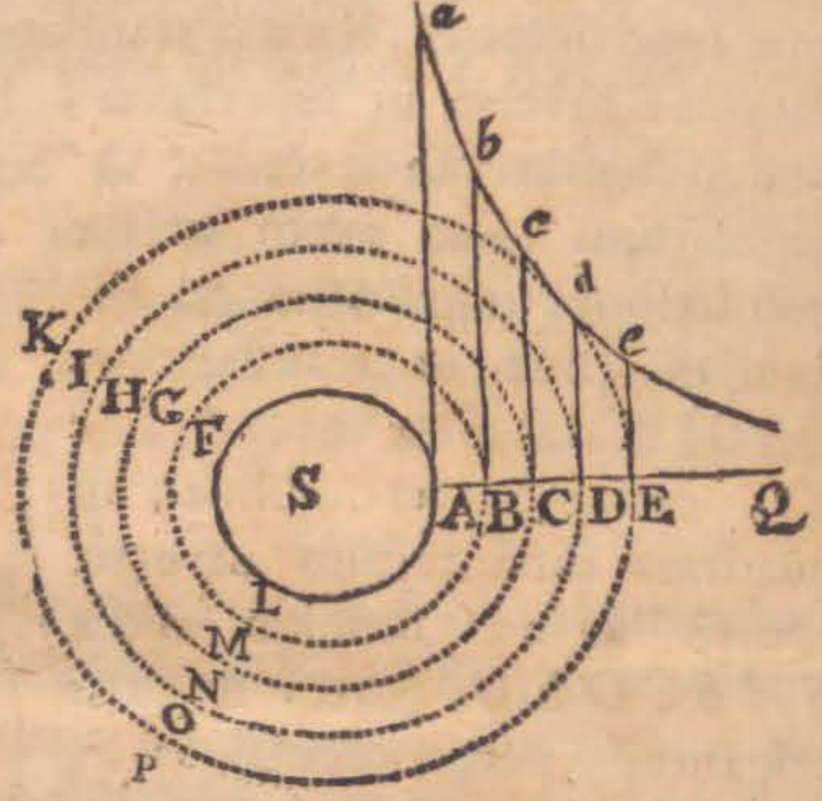
(b) * *Unde* cum (per hyp.) orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, & proinde impreſſiones ex utraque parte cujuſque orbis in plagas contrarias factæ æquales ſint; impreſſiones illæ, dato tempore, datæ ſunt, & ideo ratio compoſita ex rationibus tranſlationum & ſuperficierum contiguarum, quæ eſt ut impreſſio, data eſt. Tranſlationes igitur dato tempore factæ, ſunt inversè ut ſuperficies, hoc eſt, inverse ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe: nam cylindrorum ejuſdem longitudinis ſuperficies ſunt ut diſtantiæ ab axe cylindri, & hic omnes ſuperficies cylindricæ; quæ circa axem infinitum revolvuntur, ſunt ejuſdem longitudinis infinitæ (per hyp.).

(c) * 327. *Sunt autem differentiæ motuum angularium &c.* Motus angulares dicuntur ii, quibus ſingula puncta A, B, C, D, E &c. radiis ad axem cylindri perpendiculariter ductis angulos deſcribunt. Sunt igitur anguli illi quaſi ſpatia uniformi motu deſcripta, & ideo motus angulares ſunt ut anguli deſcripti directe & tempora quibus deſcribuntur inverse, & dato tempore ſunt ut anguli deſcripti. Hinc, dato tempore, motuum angularium differentiæ ſunt ut differentiæ angulorum deſcriptorum, hoc eſt (154. lib. 1.) ut tranſlationes punctorum ſeu ſuperficierum ab invicem directè & diſtantiæ ab axe inverſè: nam tranſlationes illæ ſunt arcus circulares quos ſingula puncta per ſuam velocitatem relativam deſcribunt, & diſtantiæ ab axe ſunt illorum arcuum radii. Sed tranſlationes dato tempore factæ, ſunt (ex demonſtr.) ut diſtantiæ ab axe inverſè. Quare differentiæ motuum angularium, dato tempore, ſunt ut quadrata diſtantiarum inverſè. 326.]

(d) * *Linea curva hyperbolica.* Quoniam ordinatæ A a, B b, &c. ſunt inverſè ut abſciſſarum S A, SB, &c. quadrata; creſcente abſciſsâ ac fine fine productâ, correſpondens ordinata decreſcit & numi-

DE MOTU CORPORUM.

tiarum, (e) hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, id est, si ad constituendum medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ, &c. Et (f) tempora motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis D reciprocè ut area DdQ, hoc est (per notas curvarum quadraturas) (g) directè ut distantia SD. *Q. E. D.*



(h) *Corol.* 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reci-

numquam evanescit, & ideo recta SQ est curvæ asymptotus; & simili ratione patet rectam per S ductam normaliter ad SQ esse alteram curvæ asymptotum.

(e) * *Hoc est, motus toti angulares.* Quoniam solo cylindri AFL impulsu agitur fluidum in orbem (per hyp.), necesse est ut motus angularis partium fluidi, crescente earum distantiâ ab axe cylindri, continuo decrescat, ac tandem ad distantiam infinitam evanescat. Unde motus totus angularis puncti A seu orbis AFL est omnium maximus, & motus totus angularis puncti cujuslibet C æqualis est summæ omnium differentiarum motuum angularium punctorum D, E & sequentium in infinitum (106. lib. 1.); ideoque motus toti angulares sunt ut respondentes summæ linearum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee &c. in infinitum.

(f) * 328. *Tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia.* Motus angulares sunt ut anguli descripti directè & tempora quibus describuntur inversè (326); & propterea si anguli descripti capiantur æquales quatuor rectis, ut totus circulus describatur & tempora fiant temporibus periodicis æqualia, motus angulares erunt ut tempora periodica inversè.

(g) * *Directe ut distantia SD.* Areæ DdQ momentum est Dd × DE; & ideo, ob ordinatam Dd quadrato abscissæ SD reciprocè proportionalem, momentum illud est ut $\frac{DE}{SD^2}$, & (per cas. 4. Lemm. 2. libri hujus) area DdQ est ut $\frac{1}{SD}$ quæ quantitas negativa prodit, quia area DdQ abscissæ DS non adjacet, sed ad partes contrarias vergit in infinitum. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis D reciprocè ut $\frac{1}{SD}$, hoc est, directè ut SD.

(h) * *Cor.* 1. Ex demonstratis motus angulares partium fluidi sunt reciprocè ut tempora periodica, hoc est, reciprocè ut illæ-

reciprocè ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri, & velocitates abſolutæ ſunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vaſe cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, ſintque revolutionum tempora ut ipſorum ſemidiametri, & perſeveret fluidi pars unaquæque in motu ſuo: (i) erunt partium ſingularum tempora periodica ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde ſi toti cylindrorum & fluidi ſyſtemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, (k) habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.

Co-

illarum diſtantiæ ab axe cylindri. Velocitates verò abſolutæ, ut pote uniformes, ſunt ut circumferentiæ deſcriptæ, ſeu ut diſtantiæ ab axe cylindri directe & tempora periodica inverse, hoc eſt, ut diſtantiæ directe & diſtantiæ inverse, ideoque ſunt in ratione æqualitatis. Hinc verò (per cor. 5. prop. 4. lib. 1.) vires centrifugæ particularum æqualium fluidi ſunt reciproce ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri; & propterea vis quâ tota ſuperficies cylindrica nititur ab axe cylindri recedere, eſt ut eadem ſuperficies directè & diſtantia ejus ab axe inverse, & ideo data eſt.

(i) * *Erunt partium ſingularum tempora periodica ut &c.* Patet, quia cylindrus exterior uniformi velocitate motus locum tenet ſuperficiei cylindricæ, quæ in demonſtratione adhibita eſt.

(k) * *Habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.* Sit EKP cylindrus exterior, cujus tempus periodicum in hypo-

theſi Corollarii 2i. dicatur tE; & quoniam in eadem hypotheſi velocitates particularum abſolutæ ſunt æquales (per cor. 1.), ſingulæ illæ particulæ ſpatia æqualia eodem tempore tE deſcribent, hoc eſt, ſpatia æqualia peripheriæ EKP, quam punctum E tempore tE percurrit. Jam ſi toti cylindrorum & fluidi ſyſtemati auferatur motus omnis angularis, Cylindri exterioris; Ex ſpatio EKP, quod ſingulæ particulæ tempore tE deſcribunt, auferenda erit integra circuli peripheria, quam particula quælibet ſeorſim deſcribit, ut habeatur ſpatium quod eadem particula eodem tempore tE percurrit in cylindro quieſcente. Erit igitur EKP—DIO ſpatium quod particula quævis D tempore tE deſcribit, poſt quam motus omnis angularis cylindri exterioris ablatus eſt. Quia verò particulæ ſingulæ revolvuntur æquabiliter (per hyp.), erit ſpatium EKP—DIO ad DIO, ſive SE—SD ad SD, ut tempus tE ad tempus pe-

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 5. Igitur si fluido & cylindro exteriore quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius definet augeri quam fluidi partes singulæ motum corollario quarto definitum (l) acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus (m) quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & nisi cylindrus interior vi aliquâ extrinsecus impressâ motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in aquâ profundâ stagnante experiri licet.

riodicum particulæ D in cylindro quiescente; & ideo si hoc tempus dicatur TD, erit $TD = \frac{SD \times tE}{DE}$; & simili modo tempus periodicum particulæ A in eâdem hypothesi (quod dicatur TA) $= \frac{SA \times tE}{AE}$; unde habetur $tE = \frac{AE \times TA}{SA}$, & ideo $TD = \frac{SD \times AE \times TA}{SA \times DE}$. Dato igitur tempore periodico cylindri interioris, dabitur tempus periodicum particulæ cujusvis fluidi in cylindro quiescente. Quia verò AE, SA & TA datæ sunt, erit TD ut $\frac{SD}{DE}$, hoc est, particularum fluidi tempora periodica sunt ut distantiæ ipsarum ab axe cylindri interioris directe & distantiæ earumdem à superficie cylindri quiescentis inverse.

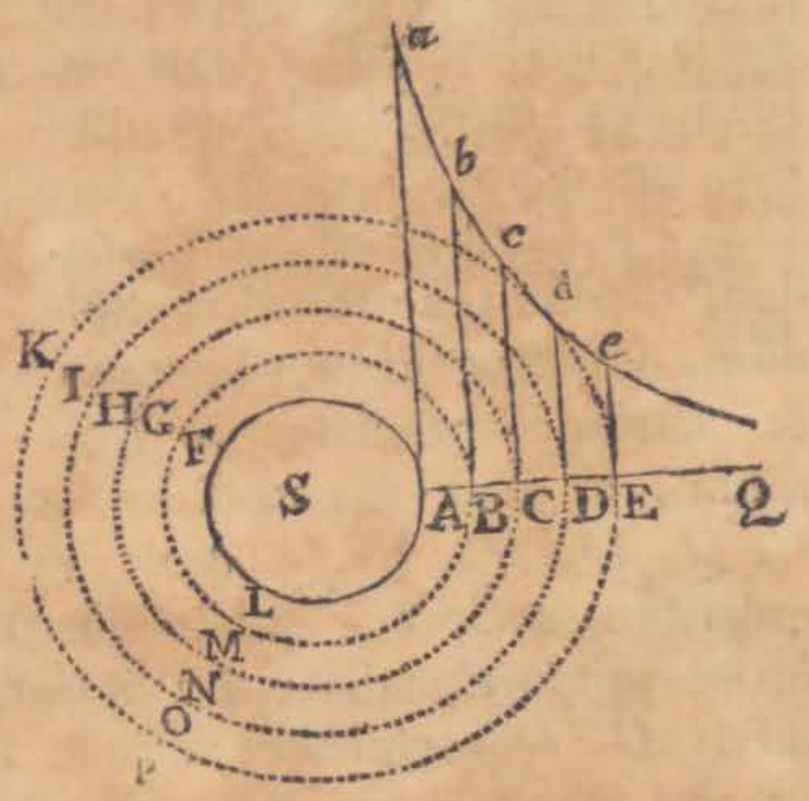
(l) * *Acquirant.* Patet per cor. 3.

(m) * *Quoadusque tempora periodica cylindri utriusque æquentur.* Tamdiu enim cylindrus interior atterit & urget fluidi partes, motumque ipsis eâ actione communicat qui ad cylindrum exteriorem transit, quamdiu omnium partium contiguarum motus angulares inæquales sunt; seu quamdiu tempora periodica non æquantur inter se.

PRO-

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si ſphæra ſolida, in fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem; perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum à centro ſphæræ.

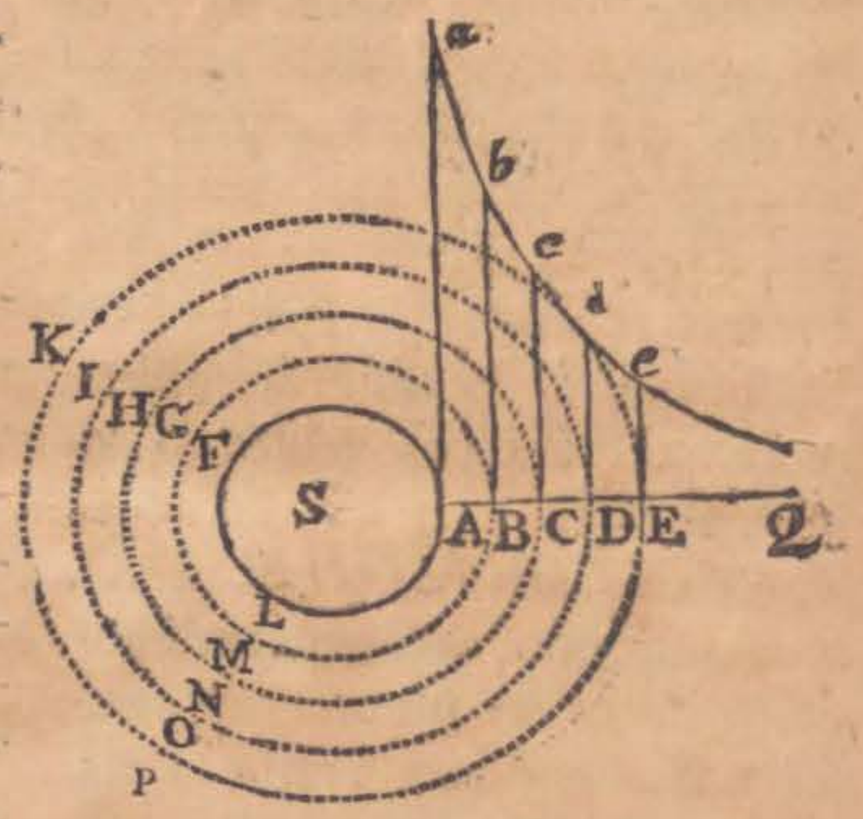


Caſ. 1. Sit *AFL* ſphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *GHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejuſdem craſſitudinis. Finge autem orbes illos eſſe ſolidos; & quoniam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum orbium in ſe mutuo factæ, erunt (per hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impreſſio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo perſeveret uniformiter, debebunt impreſſiones ex parte utrâque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impreſſiones ſint ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem; erunt tranſlationes inversè ut ſuperficies, hoc (n) eſt, inversè ut quadrata diſtantiarum ſuperficierum à centro. Sunt autem diffe-

(n) * *Hoc eſt, inversè ut quadrata diſtantiarum ſuperficierum à centro.* Nam ſuperficies ſphæricæ, ut pote ſimiles, ſunt ut quadrata radiorum ſeu diſtantiarum à centro.

DE MOTU CORPORUM.

rentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantiæ inversè; hoc est, conjunctis rationibus ut cubi distantiarum inverse. Quare si ad rectæ infinitæ $SABCDEQ$ partes singulas erigantur perpendicula Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. ipsarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee: id est (si ad constituendum medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis DIO reciprocè ut area DdQ, hoc est, per notas curvarum quadraturas, (o) directè ut quadratum distantiæ SD. (p) Id quod volui primò demonstrare.



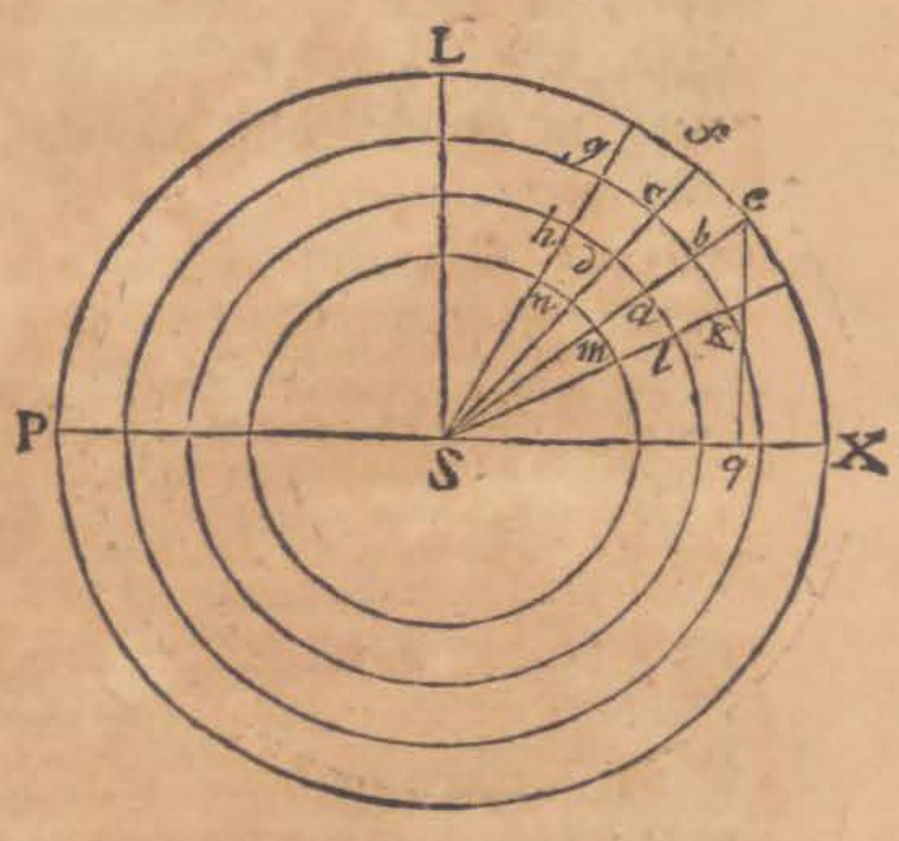
Cas.

(o) * *Directè ut quadratum distantiæ SD.* Areæ DdQ momentum est $Dd \times DE$; ideoque, ob ordinatam Dd cubo abscissæ SD reciprocè proportionalem, momentum illud est ut $\frac{DE}{SD^3}$, & propterea (per cas. 4. Lem. 2. libri hujus) area fluens DdQ est ut $\frac{1}{SD^2}$, quæ negativa prodit, quia non adjacet abscissæ DS, sed in plagam contrariam DQ vergit. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis DIO reciprocè ut $\frac{1}{SD^2}$, hoc est, directè ut quadratum distantiæ SD.

(p) * *Id quod volui primo demonstrare.* Casûs primi demonstratio valet, si medium sphæræ circumfusum ex innumeris orbibus solidis, tenuissimis ac concentricis constare fingatur. In casibus secundo & tertio singuli illi orbes sphærici in innumeros annulos, & annuli singuli in tenuissimas particulas, ad constituendum medium fluidum, dividuntur.

(q) *Caſ.* 2. A centro ſphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis ſe mutuo ſuperantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros ſecari; & annulus unuſquiſque habebit annulos quatuor ſibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non poteſt annulus unuſquiſque, niſi in motu juxta legem caſus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonſtratione caſus primi. Et propterea annulorum ſeries quælibet à globo in infinitum rectà pergens, movebitur pro lege caſus primi, niſi quâtenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hâc lege facto attritus annulorum ad latera nullus eſt; neque ideo motum, quo minus hâc lege fiat, impediet. Si annuli qui à cen-

(q) * *Caſus* 2. A centro ſphæræ S ducantur rectæ quam plurimæ, longitudine infinitæ S k, S b, S c, S g &c., quæ æquales angulos k S b, b S c, c S g &c. complectantur; & his rectis circa axem P X revolutis & ſuperficies conicas deſcribentibus, concipe orbes in annulos innumeros ſecari. Nam cum ſuperficies P f e X circa axem P X revolvitur, finguli arcus k b, b c, c g, e f, a l, &c. portiones ſuperficierum ſphæricarum annulares deſcribunt, & particula quælibet ut b c d a, deſcribit annulum ſolidum. Annulus unuſquiſque, ut ille qui revolutione ſuperficiei a b c d deſcribitur, habebit annulos quatuor ſibi contiguos, unum interiorem ex revolutione figuræ m a d n, alterum exteriorem ex revolutione figuræ b e f c, & duos laterales ex revolutione figurarum k b a l & c g h d. Attritu interioris & exterioris non poteſt annulus unuſquiſque niſi in motu juxta legem Caſus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Alioquin partes fluidi non perſeverarent in motu ſuo uniformiter, ſed intermedius iſte annulus (contra hyp.) in motu ſuo acceleraretur vel retardaretur, ut de orbibus integris oſtenſum eſt in Caſu primo. *Et propterea annullorum ſeries quælibet à globo in infinitum recta pergens* & inter duas proximas ſuperficies conicas comprehenſa, qualis eſt ſeries annulorum quos figuræ m a d n, a b c d, b e f c &c. circa axem P X rotatæ deſcribunt, *movebitur pro lege Caſus primi, niſi* &c. 327



De Motu Corporum.

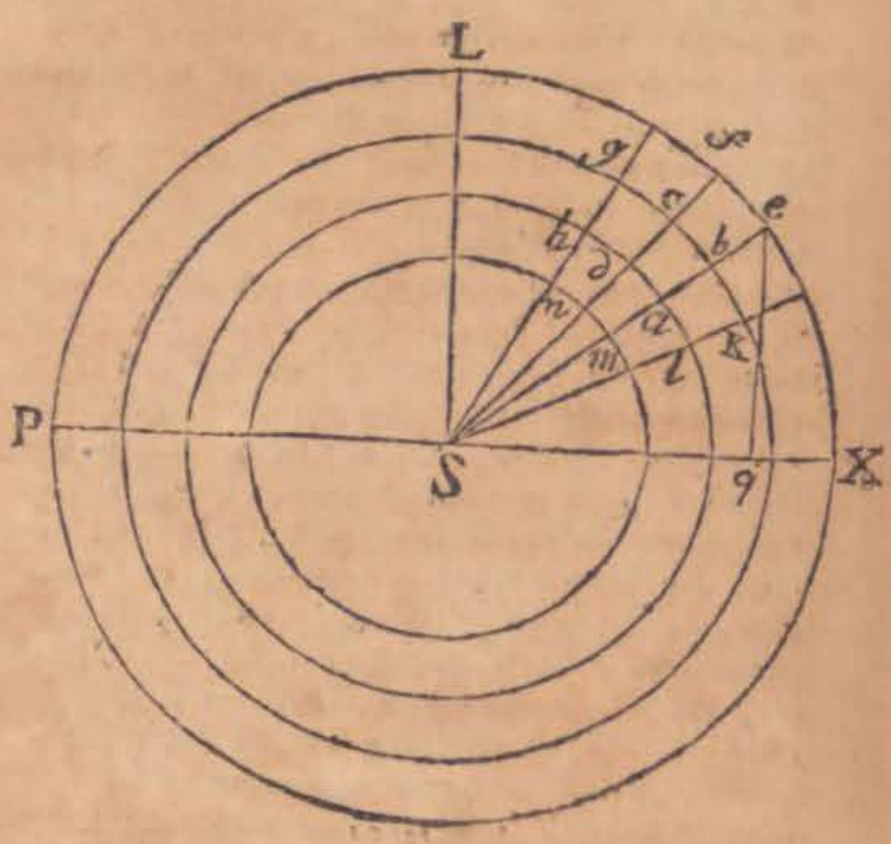
(r) centro æqualiter distant, vel citius revolverentur vel tardius (f) juxta polos quam juxta eclipticam; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum à centro globi. Quod volui secundò demonstrare.

Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motus circularis, sed ad constitutionem fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut prius. His sectionibus annuli omnes quam minimi asperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt, (t) aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportione manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis, & inde orta vis cen-

(r) * *Qui à centro æqualiter distant*, seu qui sunt ex eodem orbe resecti, quales sunt annuli ex figurarum l k b a, a b c d, d c g h & revolutione descripti.

(f) * *Juxta polos* X & P, quam juxta æquatorem, quem recta S E ad axem P X perpendicularis rotata describit.

(t) * *Aut mutabunt æqualiter.* Quoniam enim hæ Sectiones non nisi ad fluiditatem singulis annulis conciliandam factæ sunt, & fluidum homogeneum supponitur; si inde mutetur annulorum asperitas & vis attritus mutui, mutabitur æqualiter seu in data ratione. Et idcirco manente resistentiarum & impressionum, quæ ex mutuo partium attritu oriuntur, proportione, manebit effectuum inde productorum proportio, hoc est, proportio motuum & periodicorum temporum; & propterea partium singularum tempora periodica erunt, ut in superioribus casibus, proportionalia quadratis distantiarum ipsarum à centro globi.



centrifuga, major (u) sit ad eclipticam quam ad polos; debebit causa aliqua adesse quâ particulæ singulæ in circulis suis retineantur; ne materia, quæ ad eclipticam est, recedat semper à centro & per exteriora vorticis migret ad polos, indeque per axem ad eclipticam circulatione perpetuâ revertatur.

(x) *Corol.* 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centro globi, & velocitates absolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente similari & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam vorticis partes interiores ob (y) majorem suam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis eâ actione perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eâque actione (z) servant quantitatem motus sui planè

(u) * *Major sit ad eclipticam quam ad polos.* Quoniam particularum E & e in eodem orbe constitutarum tempora periodica æquantur, ipsarum vires centrifugæ sunt inter se ut radii circulorum quos describunt (per cor. 3. prop. 4. lib. 1.), hoc est, ut perpendiculares ad axem ES & eq. Vis igitur centrifuga eo major est, quo magis particula accedit ad æquatorem seu eclipticam SE, & in æquatore maxima est, in polo nulla.

(x) 328. * *Cor.* 1. Motus angulares sunt reciproce ut tempora periodica (327), ideoque (ex demonstratis) reciprocè ut quadrata distantiarum à centro globi. Velocitates absolutæ particularum sunt ut peripheriæ circulorum quas describunt, seu ut ipsarum distantiæ ab axe directè, & tempora periodica inversè; & propterea sunt ut distantiæ ab axe directè & quadrata distantiarum à centro globi inversè, ac proindè sunt reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe. Unde velocitates absolutæ particularum in æquatore sunt reciproce ut ipsarum distantiæ à centro globi, & earum vires centrifugæ reciprocè ut cubi distantiarum à centro globi (per cor. 1. prop. IV. lib. 1.). 328.

(y) * *Ob majorem suam velocitatem &c.* Velocitates angulares orbium à centro globi minus distantium majores sunt (per cor. 1.) quam velocitates angulares orbium exteriorum & à centro vorticis remotiorum; sed orbes interiores excessu velocitatis angularis, quo relative ad orbes exteriores moventur, hos atterunt & urgent, *motumque ipsis* &c.

(z) * *Servant quantitatem motus sui planè invariatam.* Quia (per hyp.) ea est vorticis conditio, ut unaquæque fluidi pars perseveret in suo motu uniformiter, & in eâdem à centro distantia eodem

DE MOTU CORPORUM.

nè invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur à centro ad circumferentiam vorticis, & per infinitatem circumferentiæ abſorbetur. Materia inter ſphæricas duas quaſvis ſuperficies vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quod motum omnem à materia interiore acceptum transfert ſemper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conſervationem vorticis conſtanter in eodem movendi ſtatu, requiritur principium aliquod activum, à quo globus eandem ſemper quantitatem motus accipiat, quam imprimit in materiam vorticis. Sine tali principio neceſſe eſt ut globus & vorticis partes interiores, propagantes ſemper motum ſuum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardeſcant paulatim & in orbem agi deſinant.

Corol. 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipſius centro diſtantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliquâ conſtanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primo revolveretur hic vortex novus & exiguus unà cum globo circa centrum alterius, & interea latius ſerperet ipſius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eâdem ratione, quâ hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, ſic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, ſeque mutuo ob motum illum circularem fugerent, niſi per vim aliquam cohibiti. Poſtea ſi vires conſtanter impreſſæ, quibus globi in motibus ſuis perſeverant, ceſſarent, & omnia legibus mechanicis permitterentur, languecſceret paulatim motus globorum (ob rationem in corol. 3. & 4. aſſignatam) & vortices tandem conquieſcerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes poſitione

dem ſemper tenore moveatur; & tamen, propter orbium interiorum majorem velocitatem angularem attritumque continuum, orbes exteriores perpetuo urgentur & ad motum accelerandum incitantur; neceſſe eſt ut motus perpetuo tranſferatur à centro ad circumferentiam vorticis & per infinitatem extimæ circumferentiæ abſorbeatur. Quâ ratione fit ut orbium ſingulorum, qui eamdem motus quantitatem in alios exteriores ſimul & ſemper transferunt, idem ſit perpetuo motus.

ne datos certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſinguli eâdem ratione quâ unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in ſe mutuo, perpetuo movebuntur de locis ſuis, uti in corollario ſuperiore expoſitum eſt; neque certam quamvis inter ſe poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis quæ in globos conſtanter impreſſæ conſervant hoſce motus, materia ob rationem in corollario tertio & quarto aſſignatam, paulatim requieſceet & in vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi in centro conſiſtentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eamdem partem circa axem eundem revolvantur, ſintque eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes fluidi non prius perſeverabunt in motibus ſuis ſine acceleratione & retardatione, quam ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum à centro vorticis. Alia (a) nulla vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum incluſum, & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. (b) Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis re-

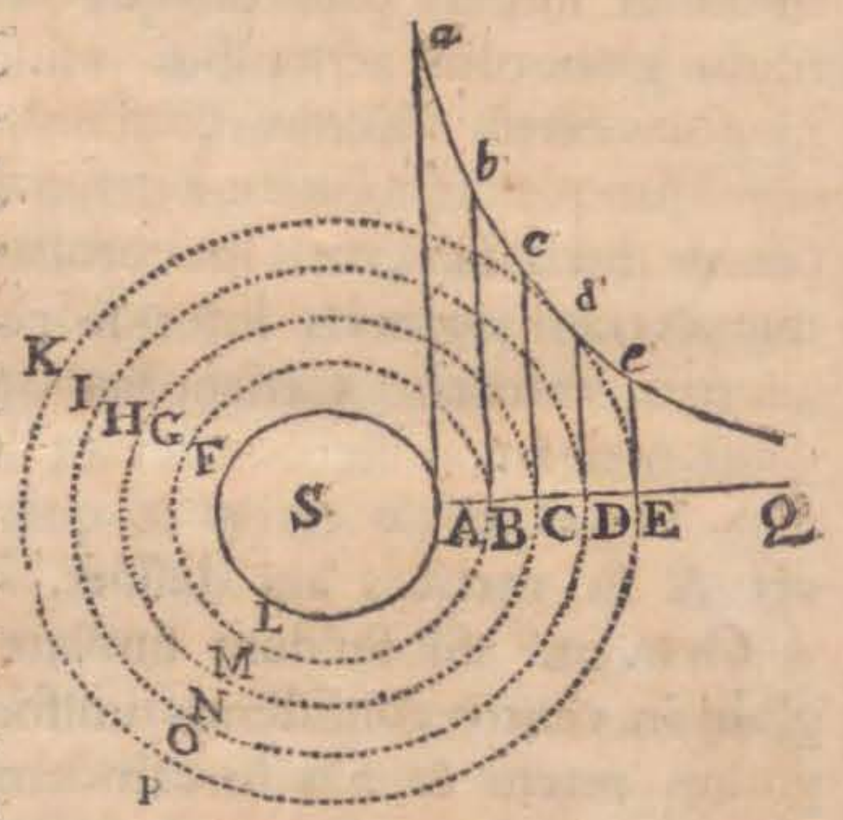
(a) * *Alia nulla vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.* Nam (ex demonſtr.) ea debet eſſe vorticis conſtitutio, ut pars quælibet fluidi poſſit in ſuo motu uniformiter perſeverare, & ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleratur attritu ex altero latere. 382

(b) * *Cor.* 9. Fluidum ſimilare in vaſe ſphærico EKP clauſum ita agatur in vorticem, ut tandem partes fluidi in motibus

DE MOTU CORPORUM.

volutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi respectu plani hujus erunt ut quadrata distantiarum suarum à centro globi.

tibus suis sine acceleratione & retardatione perseverent, quemadmodum in corollario 7. expositum est. In hác hypothesi velocitates particularum in æquatore existentium sunt ut distantiæ à centro S inverse (328), & ideo ut SD ad SE, sive, ut peripheria DIO ad peripheriam EKP ita est peripheria EKP (quam particula E tempore suo periodico tE describit) ad spatium quod alia quævis particula D eodem tempore conficit, quod proinde spatium erit $\frac{EKP^2}{DIO}$. Quiescat jam vas sphæricum, hoc est, toti systemati vorticis auferatur vasis motus angularis, & particula D tempore tE describet spatium $\frac{EKP^2}{DIO} - DIO$. Sed hoc spatium est ad circumferentiam DIO, aut quod idem est, $SE^2 - SD^2$ est ad SD^2, ut tempus tE ad tempus periodicum (TD) particulæ D in vase quiescente, quod proinde tempus erit $\frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2}$. Et simili modo tempus periodicum particulæ A, quod dicatur TA, erit in vase quiescente $\frac{SA \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Si itaque detur motus globi, seu tempus periodicum TA, dabitur tempus $tE = \frac{TA \times [SE^2 - SA^2]}{SA^2}$, & inde dabitur tempus periodicum $TD = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2} = \frac{SD^2 \times TA \times [SE^2 - SA^2]}{SA^2 \times [SE^2 - SD^2]}$. Si igitur vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi ad quamlibet datam à centro distantiam. Concipe nunc planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone summam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi; sive pone SA^2 ad SE^2 ut TA ad quartum, quod erit $\frac{SE^2 \times TA}{SA^2} = \frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$; & tempus periodicum plani erit $\frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} - \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} = tE$, quia $TA = \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Quare planum, quo hic utitur Newtonus, ita movetur ut revolutionem suam absolvat eodem tempore tE, quo vas suam revolutionem perficit in hyp. cor. 7. Sit *X* tempus periodicum particulæ D respectu plani in vase quiescente; & quia planum & vortex in regiones contrarias moventur, erit TD ad *X* ut circumferentia DIO, quam particula D tempore periodico TD describit, ad ejusdem circumferentiæ partem quam eadem particula tempore *X* percurrit; & ideo pars illa erit $\frac{X \times DIO}{TD} = \frac{X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$, & pars residua circumferentiæ DIO, quam planum eodem tempore *X* conficit, erit $DIO - \frac{DIO \times X}{TD} = \frac{SD^2 \times DIO \times tE - X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$. Quia verò planum tempore tE uniformi motu revolutionem suam DIO absolvit, et



Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem datâ cum velocitate quâcunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per corol VIII. Et (c) motus isti per corol. IX. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quiescant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas nisi violenter detentum, neque prius desinent fluidum & vas accelerari, quam sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod

est tE ad X ut DIO ad spatium modo inventum, seu ut $SD^2 \times tE$ ad $SD^2 \times tE - X \times [SE^2 - SD^2]$; unde habetur $SD^2 \times X \times tE = SD^2 \times tE^2 - X \times tE \times [SE^2 - SD^2]$, & ideo $SE^2 \times X = SD^2 \times tE$, ac proinde tempus $X = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2}$. Cum ergo tE & SE sint quantitates datæ, tempus periodicum X particulæ fluidi D respectu plani prædicti est ut SD^2, sive ut quadratum distantiæ à centro globi. Et quia omnium particularum in eodem orbe constitutarum tempora periodica æquantur inter se; earum omnium tempora periodica respectu plani sunt ut quadrata distantiaum suarum à centro globi. Q. E. D.

(c) * *Et motus isti per cor. 9. dabuntur*, proindeque si cum iis motibus datis componatur vasis motus angularis datus, dabitur motus fluidi in vase data cum velocitate moto.

PROBLEMA.

329. Sphæra solida in fluido infinito & in eâdem à centro distantiâ similari, sed in diversis distantiis in datâ quâvis distantiarum ratione inæqualiter denso circà axem positione datum uniformi cum motu revolvatur & à sphæræ impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo, sitque resistentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, in ratione compositâ ex ratione quâlibet densitatis & ratione etiam quâcumque velocitatis relativæ, oportet invenire tempora periodica partium fluidi. 329

Distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis ut in demonstratione prop. 52. factum est; dicanturque A D = x, fluidi densitas in loco D = z, translatio orbium ab invicem tempore dato = v, densitas z sit proportionalis dignitati x^n, & resistentia, cæteris paribus, sit ut $z^m v^P$, seu ut $x^{mn} v^P$. Quia superficies sphærica DIO, est ut x^2, erit impressio orbis DIO, in orbem contiguum, ut $x^{2+mn} v^P$; sed ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari & fieri in regiones contrarias, ac proindè quantitas $x^{2+mn} v^P$, debet esse constans. Quarè erit v^P ut $\frac{1}{x^{2+mn}}$, & v ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{P}}}$. Sunt autem differentiæ motuum angularium circà axem ut translationes orbium applicatæ ad distantias, hoc est, ut $\frac{v}{x}$, sive ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{P}+1}}$. Sit jam DE = dx, & ordinata Dd, ad curvam abde, sit ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{P}+1}}$ erit sum-

DE MOTU CORPORUM.

Quod si vas vi aliquâ detineatur vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet medium paulatim ad statum motus in corollariis VIII. IX. & X. definiti, nec in alio unquam statu quocunque perseverabit. Deinde vero si, viribus illis cessantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur systema totum legibus mechanicis; vas & globus in se invicem agent mediante fluido, neque motus suos in se mutuo per fluidum propagare prius cessabunt, quam eorum tempora periodica æquentur inter se, & systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

Scho-

ma differentiarum, hoc est, motus totus angularis ut area D d Q, quæ est ut $S. \frac{dx}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}} = -\frac{p}{2+mn} \times \frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$; & tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia, sunt ut $x^{\frac{2+mn}{p}}$, neglectâ quantitate constante $\frac{p}{2+mn}$. Q. E. I.

330. Cor. 1. Si resistentia, cæteris paribus, sit ut velocitas, & tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, erit $p = 1$, & $\frac{2+mn}{p} = \frac{3}{2}$, ideóque $n = -\frac{1}{2m}$. Sed cum resistentia proportionalis supponatur densitatis dignitati cujus index est m, & crescente densitate crescat, necesse est ut m sit numerus positivus, ac proindè n numerus negativus. Quarè densitas, ut pote proportionalis dignitati x^n, crescente distantiâ in hypothesi corollarii hujus decrescet. Hoc autem repugnat. Nam materia vorticis eò densior esse debet quò longius distat à centro. Conatur enim materia per motum suum circularem recedere ab axe vorticis & propterea premit materiam omnem ulteriorem, eamque condensat, si condensari possit. Præterea velocitas absoluta partium fluidi in æquatore vorticis est ut earum distantia à centro globi directè & tempus periodicum inversè, hoc est, in hypothesi cor. hujus ut $\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, ideóque vis centrifuga partium (per cor. 1. prop. 4. lib. 1.) cæteris paribus est ut $\frac{1}{xx}$, & proindè decrescit in ratione duplicatâ distantiæ auctæ. Ut igitur vortex ad statum permanentem reducatur, oportet ut partes densiores à centro recedant & rariores ad illud accedant, quo vis centrifuga partium centro propiorum, quæ ob majorem velocitatem & minorem distantiam nimia est per minorem densitatem minuatur.

331. Cor. 2. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, hoc est, si $\frac{2+mn}{p} = \frac{3}{2}$, erit $p = \frac{4+2mn}{3}$, & ideò resistentia, cæteris paribus, ut velocitatis dignitas cujus exponens est $\frac{4+2mn}{3}$. Sed (ex dem. cor. 1.) m & n sunt numeri positivi. Quarè tempora periodica non possunt esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, quin index $\frac{4+2mn}{3}$ sit unitate major, & quin proindè resistentia, cæteris paribus, in majori ratione crescat quam in ratione velocitatis auctæ.

332. Cor. 3. Si spatium quo vortex continetur sit ubique plenum & propterea medii densitas uniformis supponatur, lit-

tera

Scholium.

In his omnibus ſuppono fluidum ex materiâ quoad denſitatem & fluiditatem uniformi conſtare. Tale eſt in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper à ſe diſtantias, ubivis in fluido conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia per motum ſuum circularem recedere ab axe vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hâc preſſione fit attritus partium fortior & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes fluidi ſunt alicubi craſſiores ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt magis cohærebit & ſegnior erit, ideoque motum tardius recipiet & longius (d) propagabit quam pro ratione ſuperius aſſignatâ. Si

tera z quæ denſitatem exponebat, ſignificet jam fluiditatis defectum, ſitque reſiſtentia, cæteris paribus, ut dignitas z^m. His poſitis oſtendetur ut in cor. 1. & 2. factum eſt, quod ſi tempora periodica ſtatuantur in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro, materia vorticis eò fluidior erit quò longius diſtat à centro, vel reſiſtentia augebitur in majori ratione quam ea eſt in quâ velocitas relativa augetur.

333. Cor. 4. Si reſiſtentia, cæteris paribus, augeatur in ratione minore quam in ratione velocitatis, hoc eſt, ſi index p, ſit unitate minor, erit $\frac{2+mn}{p}$ binario major, & proindè tempora periodica partium vorticis erunt in majori ratione quam duplicatâ ratione diſtantiarum à centro. Nam vel eſt $mn = 0$, quod contingit dùm eadem eſt ubique fluidi denſitas ac fluiditas, vel mn, eſt numerus poſitivus, quia defectus fluiditatis vel denſitas, auctis diſtantiis à centro augetur (per cor. 1.). 333.

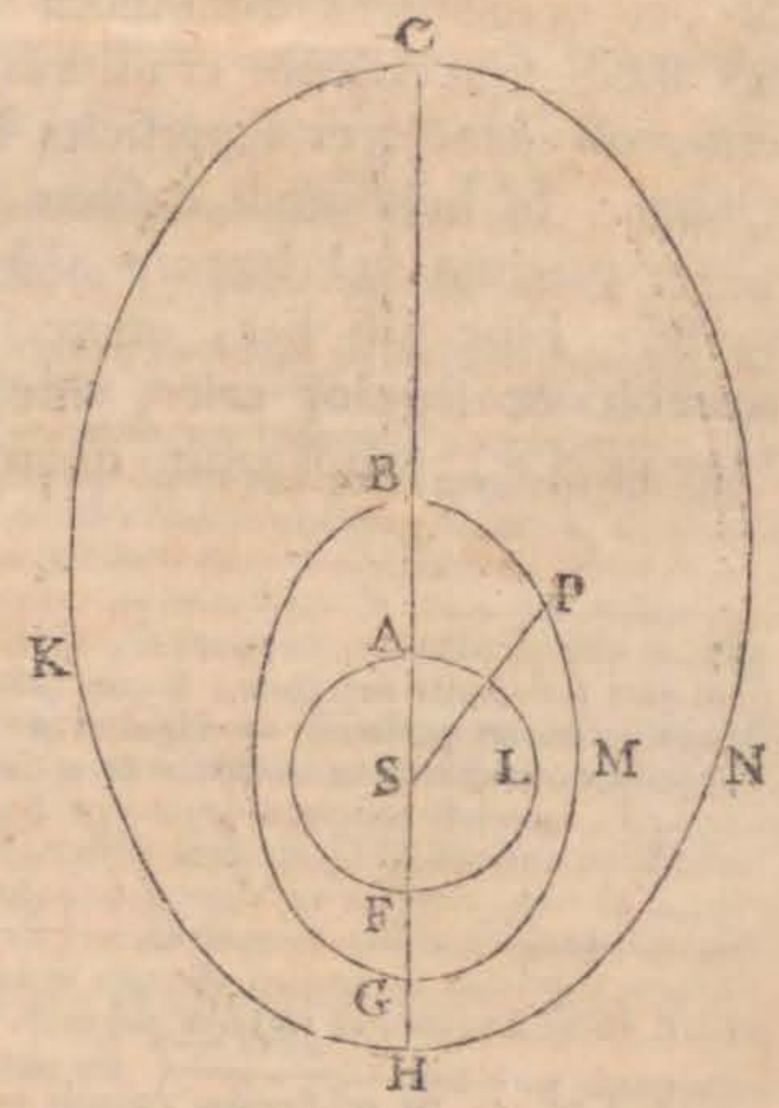
(d) * *Et longius propagabit quam pro ratione ſuperiùs aſſignatâ.* In ſuperioribus demonſtrationibus Newtonus ſuppoſuit fluidum homogeneum eſſe & preſſionem ubique æqualem; ſi verò in diverſis à vorticis centro diſtantiis aliqua ſit partium fluidi aut preſſionis inæqualitas, minorem vel majorem fluiditatem inde ortam, vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione ad æqualitatem reſtitui ſupponit, ut vortex in eodem ſtatu juxtà leges præſcriptas, permaneat. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt, magis cohærebit & ſegnior erit, ideóque motum à globo centrali communicatum difficiliùs ac tardiùs, cæteris paribus, recipiet; ſed illum longiùs propagabit. Nam ſi vorticis partes ità inter ſe & cum globo cohærerent, ut nullâ vi poſſent ſeparari, non poſſet globus centralis circumvolvi, quin materia tota vorticis, tan-

DE MOTU CORPORUM.

Si figura (e) vasis non sit sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum à centro quam proximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores, (f) neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quam augebitur per incrementum velo-

quam vectis rigidus, simul circumvolveretur. Undè quò magis partes illæ cohærent, eò longiùs motum à globo centrali acceptum propagant. Et ideò etiamsi materia vorticis homogenea non sit, & pressio inæqualis supponatur, vim suam obtinent difficultates, quas contrà vorticum in naturâ possibilitatem Newtonus proposuit in cor. 2. 4. 5. & 6. prop. 52.

(e) * *Si figura vasis non sit sphærica.* Sit CNHK, figura vasis in quo fluidum solo sphæræ ALF impulsu agatur in orbem, & particulæ fluidi quæ vasis superficiem CNHK, contingunt, movebuntur in lineis non circularibus, sed conformibus eidem vasis figuræ, particulæ verò quæ sphæræ ALF proximæ sunt, circulos describent. Undè quò magis particulæ fluidi à sphærâ centrali distant, eò magis orbitarum quas describunt, figura à circulari differt & ad vasis figuram accedit. Quia verò particularum circulos describentium tempora periodica erant (prop. 52.) ut quadrata distantiarum à centro S; erunt in hoc vase ut quadrata mediocrium distantiarum quam proximè. Sic particulæ P orbitam BPGB describentis tempus periodicum erit quam proximè ut quadratum distantiæ PS, quæ est media arithmetica inter distantiam maximam BS, & minimam SG, sivè erit ut tempus periodicum particulæ P, circulum describentis, cujus radius PS. Nam tempus periodicum, cæteris paribus, crescit ut velocitas absoluta decrescit; sed cum vortex supponatur esse in statu permanenti, & eadem proindè materiæ quantitas per latiora spatia ut CA, & per angu-



stiora ut FH, simul transeat; oportet ut materiæ velocitas in spatiis latioribus minuatur, & in angustioribus augeatur. Quo fit ut particula P, eodem ferè tempore describat orbitam BPGB, quo velocitate mediocri describeret circulum cujus esset radius PS.

(f) * *Neque tamen particulæ velociores.* Nam vortex non potest esse in statu permanenti quin particula P, in spatiis angustioribus LN, FH, ad centrum S acce-

velocitatis. Pergendo à ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulo longius à centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. (g) Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in fluido infinito conſtitutio vorticum innoteſcit per propoſitionis hujus corollarium ſextum.

Proprietates autem vorticum hâc propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem ſiquâ ratione phænomena cœleſtia per vortices explicari poſſint. Nam phænomenon eſt, quod planetarum circa jovem revolventium tempora periodica ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro jovis; & eadem regula obtinet in planetis qui circa ſolem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in planetis utriſque quam accuratiſſimè, quâtenus obſervationes aſtronomicæ hactenus prodidêre. Ideoque ſi planetæ illi à vorticibus circa jovem & ſolem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi vortices eâdem lege revolvi. Verum tempora periodica partium vorticis prodierunt in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro motus: neque poteſt ratio illa diminui & ad rationem ſeſquiplicatam reduci, (h) niſi vel materia vorticis eo fluidior ſit quo longius diſtat à centro, vel reſiſ-

accedat; & ideò neceſſe eſt ut in iiſdem ſpatiis conatus recedendi à centro minùs augeatur per incrementum velocitatis, quam diminuitur per decrementum curvaturæ. Eſt enim vis quâ particula P, in loco G, nititur à circumferentiâ M G recedere ut quadratum velocitatis particulæ directè & radius circuli curvam oſculantis in G, inverse (cor. 1. prop. 4. & not. 121. lib. 1.).

(g) * *Hæc ità ſe habebunt*, in vaſe rigido aut in ſpatio aliis vorticibus circumdato, quo tanquam vaſe, juxtà Carteſii opinionem materia vorticis continetur. Ex his autem Newtoni obſervationibus ſequitur. 1°. Planetarum qui circà Carteſiani vorticis centrum eâdem lege cum vorticis partibus moventur, orbitas eò magis ad circuli figuram accedere debere quo centro vorticis propiores ſunt, & propterèà excentricitatem orbitæ Mercurii longè minorem eſſe excentricitate orbitæ Saturni & omnium ſuperiorum planetarum, contrà obſervationes aſtronomicas. Sequitur 2°. in Carteſianâ hypotheſi explicari non poſſe cur planetæ ellipſes accuratas, non verò circulos aut irregulares figuras deſcribant. Sequitur 3°. omnium orbitarum aphelia & perihelia à ſole ſpectata in iiſdem inter fixas locis eſſe poſita atque immota manere; cum tamen ex obſervationibus aſtronomicis certum ſit, planetarum aphelia à ſe invicem longè diſtare & lento motu agi. 333

(h) * *Niſi vel materia vorticis eò fluidior ſit.* (Per not. 332.).

DE MOTU CORPORUM.

resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex auctâ velocitate quâ partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majore ratione quam ea est in quâ velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ, nisi graves sint in centrum, (i) circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi demonstrationum gratiâ hypothesin talem initio sectionis hujus proposuerim, ut resistentia velocitati proportionalis esset, tamen (k) resistentia in minori sit ratione quam ea velocitatis est. Quo (l) concesso, tempora periodica partium vorticis erunt in majori quam duplicatâ ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio sesquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. (m) Viderint itaque philosophi quo pacto phænomenon illud rationis sesquiplicatæ per vortices explicari possit.

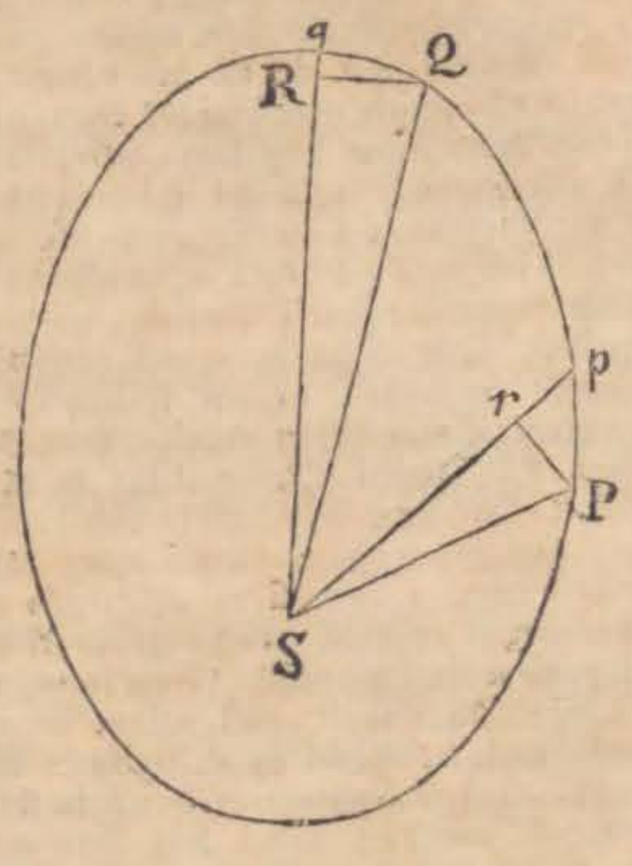
(i) * *Circumferentiam petent.* Id experientiâ constat; nam si aqua in vase contenta in vorticem agatur, paleæ & alia corpuscula minùs fluida petunt circumferentiam.

(k) * *Tamen resistentia in minori sit ratione.* (Vid. ultimam not. in hoc schol.).

(l) * *Quo concesso.* (per not. 333.).

(m) * *Viderint itaque Philosophi.* Difficultas crescit, si tria simul conjungantur quæ primus omnium Keplerus mirâ sagacitate ex observationibus Astronomicis deduxit. Primum est, planetas in ellipsibus, quarum umbilicum sol occupat, revolutiones suas peragere. Secundum est planetas singulos radiis ad solem ductis, & satellites radiis ad suum primarium ductis, areas describere temporibus proportionales. Tertium est, tempora periodica planetarum circà solem & satellitum circà primarium suum esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro sui motûs. Ex hâc proportione colligitur planetarum velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi esse reciprocè in ratione subduplicatâ distantiarum illarum. Sint enim D, & d, mediocres planetarum distantiæ T & t, eorum tempora periodica, & quoniam in singulis planetarum orbitis parva est distantiæ maximæ & minimæ differentia, si conferatur cum differentiâ quæ inter distantias duorum planetarum intercedit, spatia temporibus T & t, descripta erunt quam proxime ut distantiæ D & d; unde velocitates erunt ut $\frac{D}{T}$ & $\frac{d}{t}$, hoc est, ut $\frac{D}{D^{\frac{3}{2}}}$, & $\frac{d}{d^{\frac{3}{2}}}$, sive ut $\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}}$ & $\frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}$, seu in subduplicatâ ratione mediocrium distantiarum inversè, in quâ etiam ratione sunt velocitates partium vorticis circularis in distantiis D & d, à sole (per prop. 53.). Verùm per alteram analogiam, arearum scilicet & temporum, velocitates partium vorticis circularis sunt in ratione simplici distantiarum à sole reciprocè. Nam si planeta P, orbitam ellipticam PQqp describat & radiis ad umbilicum S ductis areas æquales SPp, SQq, tempusculo dato verrat,

tal, centro S & radiis SP, SQ describantur arcus circulares quam minimi cribantur arcus circulares quam minimi Pr, QR, qui radiis SP, Sq, occurrant in r, & R, erit area SPp = SP × Pr = SQq = SQ × QR, & hinc Pr : QR = SQ : SP. Sed Pr & QR sunt ut spatia circularia eodem tempore descripta ideóque ut velocitates circulares partium vorticis in P, & Q; Quare velocitates illæ sunt in ratione inversâ distantiarum. Porrò quam difficile sit ab his aliisque contradictionibus hypothesim vorticum liberare, ex variis hâc de re eruditorum Dissertationibus satis manifestum est. Vid. Leibnitii tentamen de motuum cælestium causis, Villemotii opus de vorticibus; Illustrissimi Marchionis Poleni dialogum de eâdem materiâ; Dissertationes Celeber. Virorum Saurini in Comm. Acad. Reg. Scient. an. 1709., Bulffingeri de causâ gravitatis, Joan. Bernoullii Cogitationes novas de Systemate Cartesii, ejusdem Physicam Cœlestem inter Academiæ Præmia, Domini De Molieres Lectiones Physicas.



Illustrium Authorum qui vorticum hypothesim strenuè vindicarunt, varias hâc de re Dissertationes hic percurrere nimis longum foret, nec tantas componere lites nostrum est. Eam enim Newtonus sibi vel maximè impugnandam assumit vorticum hypothesim quam Cartesius ipse constituerat, natasque post primi autoris mortem hujus systematis emendationes quam plurimas saltem directè non petit. At silentio prætermittere non licet Dissertationem Doctissimi Viri Joan. Bernoullii ab Academiâ Regiâ Paris. præmio condecoratam cui titulus est: Cogitationes novæ de Systemate Cartesii. Existimat Clariss. Autor superiorum propositionum demonstrationes mero sophismate laborare, eò quod Newtonus orbium contiguorum & sese mutuò atterentium impressionem solùm definierit ex superficierum magnitudine & velocitate relativâ quâ ab invicem separantur; earum verò superficierum pressionem minimè consideraverit, vimque vectis neglexerit quæ, cæteris paribus, major est in majoribus rotis & minor in minoribus. Verùm licet in suis demonstrationibus pressionem ubique æqualem supposuerit Newtonus, hujus tamen pressionis inæqualitatem in scholio considerav[illegible] & quid ex illâ sequatur, generatim ostendit. Vim quidem vectis pro-

sùs neglexit, & meritò quidem, quantùm intelligere possumus. Quamvis enim in vecte rigido cujus partes simul eodem motu angulari circà hypomoclion revolvuntur, eò major sit efficacia quo cæteris paribus longior est vectis; quod videlicet vectis partes eò celeriùs moveantur, quò major est earum ab hypomoclio distantia, id tamen ad partes medii fluidi quæ circà centrum aliquod revolvuntur, non vicà centrum aliquod revolvuntur, non videtur transferendum. Et licet Newtonus orbes solidos, demonstrationis gratiâ, primùm fingat, eos tamen divisos supponit ac deindè in particulas innumeras subdividit ut demonstratio ad naturam medii fluidi accommodetur. Quod si ob qualemcumque partium fluidi cohæsionum, aliqua habenda sit ratio vis vectis, certè ea non videtur assumenda distantiæ à vorticis centro proportionalis, quemadmodùm fit in vecte perfectè rigido, seu cujus partes vi quasi infinitâ connexæ supponuntur & eodem motu angulari revolvuntur. 338.

Cæterùm Celeber. Joan. Bernoulli aliam usurpat hypothesim quæ Mechanicis perspecta nondùm est certóque explorata. Supponit enim cum D. Amontons in monum. Paris. an. 1699 resistentiam quæ oritur ex [illegible] superficierum contiguarum [illegible] qualium, parente earumdem

DE MOTU CORPORUM.

dem in ſeſe mutuò preſſione, conſtantem eſſe; verùm hypotheſis illa minùs placuit Clariſſ. Wolfio quî de eâ his verbis loquitur in elementis mechanices num. 965.: Equidem Amontons regulam univerſalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet caſu ſuperandam; ſed cum omnem frictionem à ſolâ appreſſione ex pondere ſuperincedentis derivet, ex antecedentibus ſatis apparet quod propoſito ſatisfacere nequeat: veram frictionis legem accuratiſſimis experimentis tentarunt Celeber. Philoſophi Deſaguillier & Muſchenbroek; At eam haud ſatis conſtantem obſervarunt, ut patet ex iis quas Muſchenbroek tom. 1. Phyſices deſcripſit experimentorum tabulis. Nil ergò certi hâc de re pronuntiari poteſt. Newtonus tamen conjecturam fecit reſiſtentiam in minori eſſe ratione quam ea velocitatis eſt, eo forſan ductus argumento quod in Hiſtoriâ Acad Reg. an. 1709. hoc ferè modo exponitur: ſi concipiantur ſuperficies innumeris eminentiis aſperæ, dum alia ſuper aliam incedit, ſuperficiei ſuperioris eminentiæ intrà cavitates inferioris, dato tempore, preſſionis vi penettant, fitque reſiſtentia major, ſi intrà ſuperficiei inferioris cavitates altiùs ingrediantur ſuperficiei ſuperioris eminentiæ, at verò ſi major ſit velocitas, ſuperior ſuperficies intrà inferiorem eodem dato tempore minùs penetrat. Hinc ſi Clariſſ. Parentii ratio valeat, ſatis patet reſiſtentiam in minori eſſe ratione quam ea velocitatis eſt. Attamen Clariſſ. Muſchembroek, factis experimentis, reſiſtentiam velocitati proportionalem in motibus tardioribus invenit, in celerioribus verò eam in majori quam velocitatis ratione obſervavit.

Aſſumit D. Bernoullius impreſſiones orbium continguorum in ſe mutuò factas, eſſe in ratione compoſitâ ex ratione ſummæ virium centrifugarum orbium omnium inferiorum ad centrum uſquè vorticis, ex ratione velocitatis quâ orbes contigui ab invicem ſeparantur, & ex ratione diſtantiæ orbium illorum à centro; undè per analyſim deducit tempora periodica partium vorticis ſphærici homogenei eſſe in ratione radicum cubicarum dignitatis quintæ diſtantiarum à centro; earum verò celeritatem ſub æquatore eſſe reciprocè in ratione radicis cubicæ quadrati diſtantiarum à centro. Si in hypotheſi Bernoullii negligatur vis vectis, eodem calculo quo uſus eſt, tempora periodica inveniuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis quartæ diſtantiarum à centro; Si verò ſupponamus impreſſiones orbium in ſe mutuò factas, eſſe in ratione compoſitâ ex ratione preſſionum, ratione velocitatum relativarum & ratione ſuperficierum, tempora periodica Bernoulliano calculo inveniuntur quadratis diſtantiarum proportionaliæ, uti Newtonus per ſuam hypotheſim invenerat; & ſi cum his tribus rationibus componatur ratio diſtantiæ à centro ut vis vectis exprimatur, tempora periodica reperiuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis ſeptimæ diſtantiarum à centro. Hæ verò analogiæ omnes à regulâ illâ Keplerianâ, quâ tempora periodica ſtatuuntur eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum, diſſentiunt. Ut ergò vorticis ſphærici leges cum Kepleri Sancitis conciliet Bernoullius, ſupponit denſitatem vorticis eſſe in ratione ſubduplicatâ diſtantiæ centro reciproce, planetas verò non eſſe ejuſdem prorſus denſitatis cum medio fluido in quo primùm collocati ſunt, ideóque ob majorem vel minorem ſuam denſitatem in eo medio ſucceſſivè deſcendere & aſcendere, interea-dùm circulari motu vorticis abripiuntur, ex quibus motibus ſimul compoſitis naſcuntur ellipticæ planetarum trajectoriæ & apheliorum lentiſſimi motus. Sed medium illud in quo planeta, cum denſior eſt, deſcendit & ubi rarior eſt, aſcendit, vel grave eſt in centrum vorticis vel non. Si grave non ſit, planeta in medio rariori poſitus, eodemque cum medio illo gyrationis motu actus, majori vi à centro recedere & ſpiralem trajectoriam deſcribendo in infinitum abire debet; & contrà, planeta in medio denſiori primùm collocatus, ad centrum per ſpiralem lineam perpetuò accederet, quod medii denſioris major eſſe debeat vis centrifuga quam planetæ rarioris. Si medium grave ſit in centrum vorticis, ipſiuſque denſitas, decreſcentibus diſtantiis à centro, creſcat, cæleſtis materiæ denſitas, ob parvam orbitarum quas planetæ deſcribunt, excentricitatem, æqualis aſſumi poteſt denſitati cujuſque planetæ huic materiæ innatantis; atquè adeò denſitas cæleſtis materiæ ad diſtantiam ſaturni æqualis erit denſitati ſaturni, ad diſtantiam Jovis, Mar-

LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LIII. THEOR. XLI.

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora, quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejuſdem ſunt denſitatis cum vortice, & eâdem lege cum ipſius partibus quoad velocitatem & curſus determinationem moventur.

Nam ſi vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ ſeu puncta phyſica datum ſervant ſitum inter ſe, congelari ſupponatur: hæc, quoniam neque quoad denſitatem ſuam, neque quoad vim inſitam aut figuram ſuam mutatur, movebitur eâdem lege ac prius: & contra, ſi vorticis pars congelata & ſolida ejuſdem ſit denſitatis cum reliquo vortice, & reſolvatur in fluidum, movebitur hæc eâdem lege ac prius, niſi quâtenus ipſius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter ſe. Negligatur igitur motus particularum inter ſe, tanquam ad totius motum progreſſivum nil ſpectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum vorticis partium à centro æqualiter diſtantium, propterea quod ſolidum in fluidum reſolutum fit pars vorticis cæteris partibus conſimilis. Ergo ſolidum, ſi ſit ejuſdem denſitatis cum materia vorticis, eodem motu cum ipſius partibus movebitur, in materiâ proximè ambiente relativè quieſcens. Sin denſius ſit, (n) jam magis conabitur recedere à centro vorticis quam prius; ideoque vorticis vim illam, quâ prius in orbitâ ſuâ tanquam in æquilibrio conſtitutum retinebatur, jam ſuperans, recedet à centro & revol-

tis &c. æqualis erit denſitati horum planetarum & omnes illæ denſitates erunt inter ſe in ratione ſubduplicatâ diſtantiarum à ſole reciprocè. Si itaquè telluris denſitas mediocris æqualis ſupponatur denſitati aquæ, materia cæleſtis inter ſolem & tellurem conſtituta aquâ denſior erit & corporum motui maximè reſiſtet. Sed ut ex cometarum motibus, aliiſque obſervationibus conſtat, materia cæleſtis inter ſolem & tellurem motui corporum minimè reſiſtit. Nam cometarum motus ſunt ſummè regulares, & eaſdem leges cum planetarum motibus obſervant, & in omnes cæli plagas liberrimè feruntur, atque ad ſolem uſquè ferè penetrant ſinè reſiſtentiâ. 3337

(n) * *Jam magis conabitur.* Nam vis centrifuga motrix, cæteris paribus, augetur vel minuitur in ratione quantitatis materiæ (per def. 8. lib. 1.) & materiæ quantitas, dato corporis volumine, augetur vel minuitur in ratione denſitatis (2. lib. 1.).

De Motu Corporum.

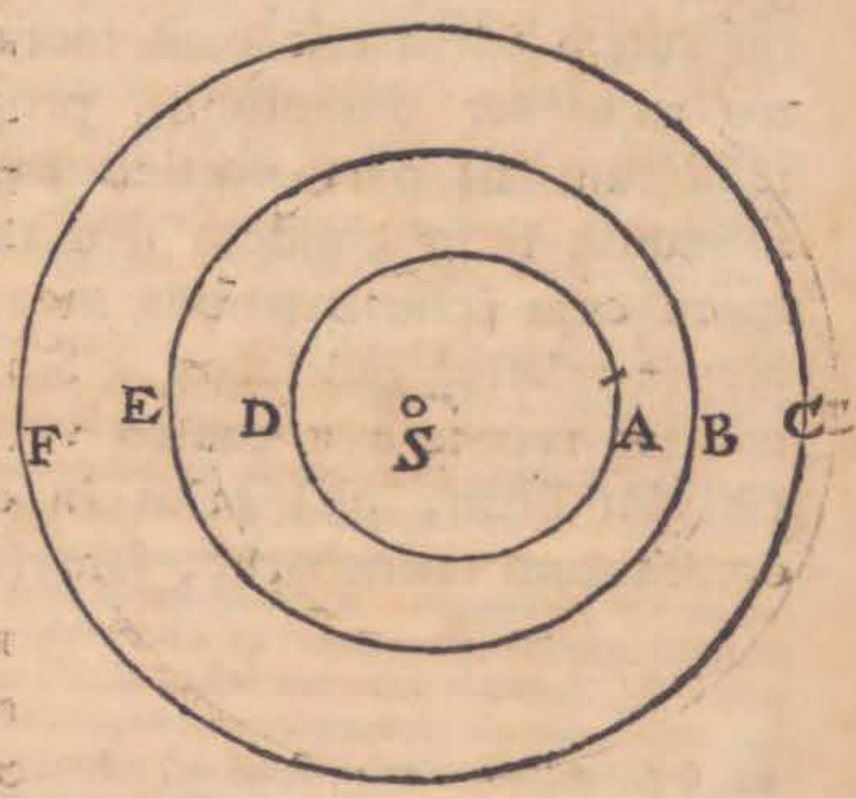
volvendo deſcribet ſpiralem, non amplius in eundem orbem rediens. Et eodem argumento ſi rarius ſit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem niſi ſit ejuſdem denſitatis cum fluido. Eo autem in caſu oſtenſum eſt, quod revolveretur eâdem lege cum partibus fluidi à centro vorticis æqualiter diſtantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo ſolidum quod in vortice revolvitur & in eundem orbem ſemper redit, relativè quieſcit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et ſi vortex ſit quoad denſitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet à centro vorticis diſtantiam revolvi poteſt.

Scholium.

Hinc liquet planetas à vorticibus corporeis non deferri. Nam planetæ ſecundum hypotheſin *Copernicæam* circa ſolem delati revolvuntur in ellipſibus umbilicum habentibus in ſole, & radiis ad ſolem ductis areas deſcribunt temporibus proportionales. At partes vorticis tali motu revolvi nequeunt. Deſignent *AD*, *BE*, *CF*, orbes tres circa ſolem *S* deſcriptos, quorum extimus *CF* circulus ſit ſoli concentricus, & interiorum duorum aphelia ſint *A*, *B* & perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF*, radio ad ſolem ducto areas temporibus proportionales deſcribendo, (o) movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE*, tardius



(o) * *Movebitur uniformi cum motu.* Æqualibus enim temporibus æquales areæ, & proindè æquales arcus, hoc eſt, æqualia ſpatia deſcribuntur.

dius movebitur in Aphelio *B* & velocius in Perihelio *E*, (p) ſecundum leges Aſtronomicas; cum tamen (q) ſecundum leges Mechanicas materia Vorticis in ſpatio anguſtiore inter *A* & *C* velocius moveri debeat quam in ſpatio latiore inter *D* & *F*; id eſt, in Aphelio velocius quam in Perihelio. Quæ duo repugnant inter ſe. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio Signi Piſcium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quam in principio Virginis in (r) ratione trium ad duo. Nam quo anguſtius eſt ſpatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi Terra in hâc Materiâ cœleſti relative quieſcens ab eâ deferretur, & unà circa Solem revolveretur, (ſ) foret hujus velocitas in principio Piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis in ratione ſeſquialterâ. (t) Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quam minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio

(p) * *Secundùm leges Aſtronomicas.* Quoniam axis ellipſeos per aphelium B & perihelium E tranſit eſtque ellipſi normalis, area quam radius vector S B tempore quam minimo deſcribit, erit æqualis rectangulo ex diſtantiâ S B in arcum quam minimum à corpore in B deſcriptum; & ſimiliter area æqualis quam radius vector S E eodem tempore quam minimo deſcribit, æquatur rectangulo ex diſtantiâ S E ductâ in arcum à corpore in E deſcriptum, & ideò prior arcus eſt ad poſteriorem, hoc eſt, velocitas in B, eſt ad velocitatem in E, ut diſtantia S E, ad diſtantiam majorem S B.

(q) * *Secundùm leges mechanicas.* Nam cum vortex ſupponatur eſſe in ſtatu permanenti, æquales materiæ quantitates per ſpatium anguſtius A C, & per ſpatium latius D F, ut fit in fluviis, eodem tempore tranſeunt, & propterea materia vorticis in ſpatio anguſtiore inter A & C, velociùs movetur quam in ſpatio latiore inter D & F. Quantitas autem materiæ, quæ dato tempore tranſit per ſpatium AC. vel D F, eſt ut ſpatium hoc directe & materiæ velocitas mediocris inverse, & ideò mediocris velocitas materiæ inter A & C, eſt ad mediocrem velocitatem materiæ inter D & F, ut F D ad A C. ¶ 333.

(r) * *In ratione trium ad duo.* (per not. præced.).

(ſ) * *Foret hujus velocitas.* Ex obſervationibus Aſtronomicis conſtat terram inter Veneris & Martis orbes poſitam eſſe.

(t) * *Undè ſolis motus diurnus apparens.* Hic motus eſt angulus quem ſol, radiis ad terram ductis, proprio motu ab occidente in orientem unoquoque die deſcribere nobis videtur, quem quidem angulum terra, radiis ad ſolem ductis, in hypotheſi copernicea, conficit. Porrò notiſſimum eſt circulum illum quem ſol inter fixas motu annuo deſcribere videtur,

DE MOTU CORPORUM.

cipio Piſcium minor quam minutorum quadraginta octo: & cum tamen (experientiâ teſte) apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quam in principio Virginis, & propterea Terra velocior in Principio Virginis quam in Principio Piſcium. (u) Itaque Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quam ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo verò motus iſti in ſpatiis liberis abſque Vorticibus peraguntur intelligi poteſt ex Libro primo, & in Mundi Syſtemate plenius docebitur.

a Aſtronomis dividi in partes duodecim æquales, ſeu ſigna quorum hæc duo virgo & piſces ſunt directè oppoſita, ità ut dum terra in hyporheſi Copernici, eſt in principio piſcium, ſol appareat in principio virginis & contrà. Cum igitur angularis velocitas terræ in principio piſcium ſit ad ejus velocitatem angularem in principio virginis ut 3 ad 2, ſolis motus diurnus apparens in principio virginis eſt ad ejus motum apparentem in principio piſcium in eâdem ratione 3 ad 2. Solis motus diurnus apparens medius eſt minutorum primorum 59 & ſecundorum 8, ſeu ſecundorum 3548, qui numerus dicatur M; Quare ſi ſolis motus diurnus apparens in principio virginis, ponatur $= M + X$, & in principio piſcium $= M - X$, erit $M + X : M - X = 3 : 2$, unde invenitur $X = \frac{1}{5} M = 707''$ quam proximè, ac proiudè erit $M + X = 4255'' = 70' + 55''$, & $M - X = 2841'' = 47' + 21''$. Ergò ſolis motus diurnus apparens in principio virginis major eſſet quam minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio piſcium minor quam minutorum quadraginta octo; cum tamen ex obſervationibus Aſtronomicis ſol in principio virginis é tellure viſus motu diurno conficere videatur minuta prima 58 tantùm & in principio piſcium minuta prima 60 ſeu gradum unum.

(u) * *Itaque hypotheſis vorticum.* Quoniam vorticis materia circulos deſcribit æquatori vorticis parallelos, neceſſe eſt (per hanc prop. 53.) ut planetæ omnes ferantur in orbitis æquatori parallelis, ſed obſervatum eſt nullum planetam in orbitâ æquatori parallela revolutiones ſuas abſolvere, & cometas variis directionibus in omnes cœli plagas ferri. Eadem eſt difficultas ſi per vim centrifugam partium vorticis explicetur vis centripeta ſeu gravitas corporum quæ ad axem vorticis perpendiculariter tendere deberent, non verò ad vorticis centrum dirigi. Sed de his vid. acta Erudit. Lipſ. an. 1686. & 1695.; Diaria erudit 1703. 1707. monumenta Acad. Pariſ. 1709. Diſſertationis Clar. Hugenii & Bulffingeri de causâ gravitatis.

FINIS TOMI II.

IN-

INDEX SECTIONUM
DE MOTU CORPORUM.
TOMI II.

SECT. I. *De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.* Pag. 1

SECT. II. *De motu corporum quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatis* 46

SECT. III. *De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ.* 121

SECT. IV. *De corporum circulari motu in mediis resistentibus.* 142

SECT. V. *De densitate & compressione fluidorum, deque hydrostaticâ.* 165

SECT. VI. *De motu & resistentiâ corporum funependulorum.* 189

SECT. VII. *De motu fluidorum & resistentiâ projectilium.* 250

SECT. VIII. *De motu per fluida propagato.* 340

SECT. IX. *De motu circulari fluidorum* 397

ERRATA TOMI II. IN TEXTU.

Pag. 132. *lin.* 13. acendit *lege* aſcendit. *P.* 196. *l.* Quar *leg.* Quare.

ERRATA IN NOTIS.

Pag. 5. *col.* 1. *lin.* 26. r d t = g d t *leg.* r d t − g d t. *P.* 8. *c.* 2. *l.* 14. per uniunt *leg.* perveniunt. *Ibid. l.* 20. prio ratio *leg.* prior ratio. *P.* 13. *c.* 2. *l.* 8. v. gr. cum *deleantur hæc verba.* *P.* 14. *c.* 1. *l.* 1. in tabulas *leg.* in tabulis. *Ibid. l.* 5. quantiſas *leg.* quantitas. *P.* 19. *c.* 1. *l.* 3. ad motum temporis *leg.* ad modum temporis. *P.* 35. *c.* 1. *l.* 8. logarithmicam *leg.* per logarithmicam. *P.* 40. *c.* 2. *l.* 11. jungantur *leg* jungatur. *P.* 57. *c.* 1. *l.* 21. $\frac{1}{1}b$ *leg.* $\frac{1}{2}b$. *Ibid. col.* 2. *l.* 33. naſcenti, ortu *leg.* naſcentis ortu. *P.* 58. *c.* 1. *l.* 11. avelocitates *leg.* velocitates. *P.* 130. *c.* 1. *l.* 35. vel amittere *deleatur* amittere. *P.* 190. *c.* 2. *l.* 1. $\surd$ M O = m o *leg.* $\surd$ M R = $\surd$ m r. *P.* 191. *c.* 2. *l.* 32. arcûs d e *leg.* arcûs d c. *P.* 222. *c.* 2. *l.* 9. Summâ *leg.* Summa. *P.* 223. *uſque ad paginam* 233. *ad marginem notatum eſt* 182. *leg.* 183. *P.* 235. *ad marginem* 183. *leg.* 184. *P.* 295. *col.* 2. *l.* 10. mathematiçâ *leg.* mathematica. *P.* 300. *c.* 1. *l.* 37. aqua per conodem *leg.* aqua quæ per conodem. *Ibid. c.* 2. *l.* 5. aſſecati *leg.* aſſecuti.

*In initio ſingularum notarum quibus numerus præfixus non fuit, ejus loco aſteriſcus * depictus eſt: à pagina verò* 130 *alter aſteriſcus ſubinde reperietur, cujus alius non eſt uſus quàm ut diſtinguat ea quæ inſerta ſunt ab Editore (eo jure ſibi ab Autoribus commentariis conceſſo); idem etiam deſignat ſignum (†) quibuſdam notis præfixum ne ſcilicet turbaretur ordo litterarum ab Autoribus ipſis adhibitus.*