Max Planck Research Group
Epistemes of Modern Acoustics

Sound & Science: Digital Histories

Newton, Isaac. Philosophiae naturalis principia mathematica, Vol. 3.1. Geneva: Barrillot & Filii, 1742.

https://acoustics.mpiwg-berlin.mpg.de/node/626

Scan licensed under: CC BY-SA 3.0 DE | Max Planck Institute for the History of Science

MAX PLANCK INSTITUTE
FOR THE HISTORY OF SCIENCE

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, Eq. Aurato.

Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio

PP. Thomæ Le Seur & Francisci Jacquier

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,

Matheseos Professorum.

TOMI TERTII PARS I.



GENEVÆ,

Typis Barrillot & Filii Bibliop. & Typogr.

MDCCXLII.

Rara N5635p-3,1

Archiv
(534x)

MAX-PLANCK-INSTITUT
FÜR WISSENSCHAFTSGESCHICHTE
Bibliothek

04-663

PP. LE SEUR ET JACQUIER

DECLARATIO.

NEWTONUS in hoc tertio Libro telluris motæ hypotheſim aſſumit. Autoris propoſitiones aliter explicari non poterant, niſi eâdem quoquè factâ hypotheſi. Hinc alienam coacti ſumus gerere perſonam. Cæterum latis à ſummis Pontificibus contrà telluris motum Decretis nos obſequi profitemur.

EDI-

EDITORIS MONITUM.

INtelleximus quosdam malignè interpretari notulas quas adjecimus Commentariis PP. LE SEUR & JACQUIER, *quasi sæpius Newtoni mentem non attigissent; ne autem ipsis vitio vertatur quod concesserunt ob ipsorum absentiam ab urbe in quâ liber edebatur, ut nempe quæcumque viderentur corrigenda ab Editore ipso mutarentur sive levia sive gravia forent, monendum puto me Autorum diligentiam & Doctrinam nusquam desideraſſe, correctiones quas feci levissimi esse momenti, nec esse tales ut propter ipsas quidquam ex debitâ Autoribus gloriâ tollatur quod meæ opellæ tribuatur, & asteriſco notatas fuisse, non quod aliquid laudis exinde speraverim, sed quia si illic aliquid vitii irrepserit æquum est ut in Editorem non in Autores ea culpa transferatur; Ne similibus cavillationibus occasio in posterum detur, tales distinctionis notulæ non adhibebuntur in II^a^ hujus Voluminis parte, in quâ speramus calculos Newtonianos circa Lunam potissimum satis intricatos, in apertam lucem expositum iri.*

IN-

INTRODUCTIO AD TERTIUM LIBRUM.

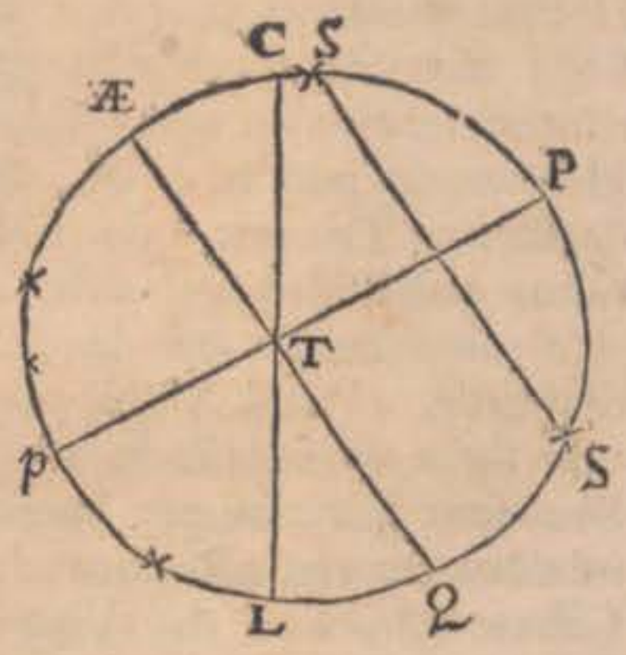
Phil. Natural. JS. NEWTONI.

CAPUT PRIMUM.

Quale oculo nudo appareat mundi ſyſtema paucis exponitur, & prima Aſtronomiæ Elementa breviter revocantur.

1. FIGURA telluris eſt propemodùm ſphærica, & ideò gravium directio (ut pote quæ aquarum ſtagnantium ſuperficiei perpendicularis eſt) ad centrum terræ tendit quam proximè. Patet per Eclipſes Lunares in quibus umbra terreſtris, in quamcumque cœli plagam vergat, eſt ſemper ad ſenſum circularis.

2. Spectatori terreſtri cælum apparet tanquam ſuperficies ſphærica concava, ſtellis plurimis diſtincta, cujus ipſe ſpectator centrum occupat, quæque circà puncta fixa ceù cardines ab ortu ad occaſum æquabiliter convertitur, & 24 circiter horis integram revolutionem abſolvit. Puncta illa oppoſita P & p circà quæ rotari videtur ſphæra, *Poli* mundi dicuntur, quorum is qui nobis conſpicuus eſt, ut P, arcticus vel borealis dicitur, ipſi verò oppoſitus p antarcticus ſeu auſtralis appellatur. Recta linea P p utrumque polum connectens *Axis mundi* vocatur.

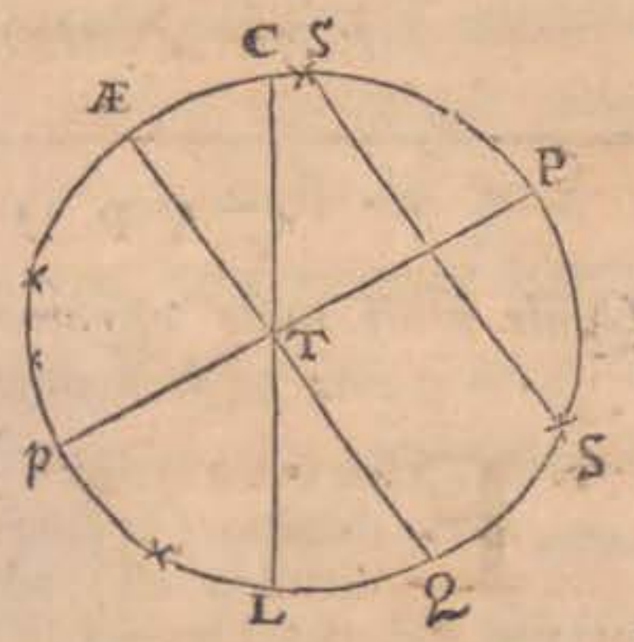


Æquator ſivè *æquinoctialis* eſt circulus ſphæræ cæleſtis maximus cujus poli iidem ſunt cum polis mundi; proindéque ſphæram mundanam dividit in duo hemiſphæria, Boreale Æ P Q, in quo eſt polus borealis P, & auſtrale Æ p Q, in quo eſt polus auſtralis p.

3. Stellæ ſingulæ, ut S, in circulis S s æquatori Æ Q parallelis, communi ſphæræ cæleſtis motu revolvi quotidie videntur. *Fixæ* nominan-

tur quæ eandem inter ſeſe diſtantiam perpetuò ſervant; *Erraticæ* verò ſeu *Planetæ* vocantur quæ diſtantias ſuas à fixis in dies mutant & motu proprio ferri conſpiciuntur. Planetæ ſunt ſeptem ſuis propriis ſignis notati, videlicet Sol ☉, Luna ☽, Mercurius ☿, Venus ♀, Mars ♂, Jupiter ♃ & Saturnus ♄; Terræ verò ſignum eſt hoc ♁.

4. *Ecliptica* eſt circulus ſphæræ maximus quem centrum ſolis motu proprio ab occaſu ad ortum ſingulis annis deſcribere videtur. Hic circulus Æquatorem obliquè interſecat ſub angulo inclinationis Æ T C, graduum 23 ½ circiter. Puncta duo oppoſita in quibus æquator & ecliptica ſeſe mutuò ſecant, *Æquinoctialia* dicuntur quod ſole in iis poſito dies ubique terrarum nocti æqualis ſit, & indè tempus quo Sol punctum alterutrum æquinoctiale attingit, vocatur æquinoctium. Punctum æquinoctiale vernale eſt undè Sol motu proprio versùs polum borealem aſcendit in Eclipticâ, autumnale verò undè Sol versùs polum auſtralem deſcendit, ideóque æquinoctium eſt vernale vel autumnale. Puncta *Solſtitialia* ſunt Eclipticæ puncta duo oppoſita quæ à punctis æquinoctialibus toto circuli quadrante diſtant, quæque proindè maximè recedunt ab æquatore & in quibus aſcenſus Solis ſuprà æquatorem & deſcenſus infrà eundem terminatur. Horum punctorum prius æſtivum appellatur quo nimirum terminatur Solis aſcenſus ſuprà æquatorem; poſterius brumale vel hybernum. Dicuntur ſolſtitialia quod ſole in iis verſante, per aliquot dies ex eodem Horizontis puncto oriri, & é regione, in eodem puncto occidere videatur. Tempus quo Sol puncta ſolſtitialia ingreditur vocatur Solſtitium, quod ideò vel æſtivum vel brumale eſt.



Signum cæleſte eſt duodecima pars eclipticæ & in 30 gradus rurſus dividitur. Primi Signi principium eſt in puncto æquinoctiali vernali à quo ſigna ab occaſu in ortum juxtà motum proprium Solis numerantur. Sex ſunt borealia per borealem eclipticæ partem diſtributa, hiſque nominibus ac characteribus deſignata: Aries ♈, Taurus ♉, Gemini ♊, Cancer ♋, Leo ♌, Virgo ♍. Sex etiam auſtralia videlicet Libra ♎, Scorpius ♏, Sagittarius ♐, Capricornus ♑ vel ♑, Aquarius ♒, Piſces ♓. Aries, Taurus ac Gemini quæ inter punctum æquinoctiale vernum & punctum ſolſtitiale æſtivum continentur dicuntur ſigna vernalia; Cancer, Leo, Virgo à ſolſtitiali æſtivo ad æquinoctiale autumnale numerata appellantur æſtiva; Libra, Scorpius & Sagittarius autumnalia;

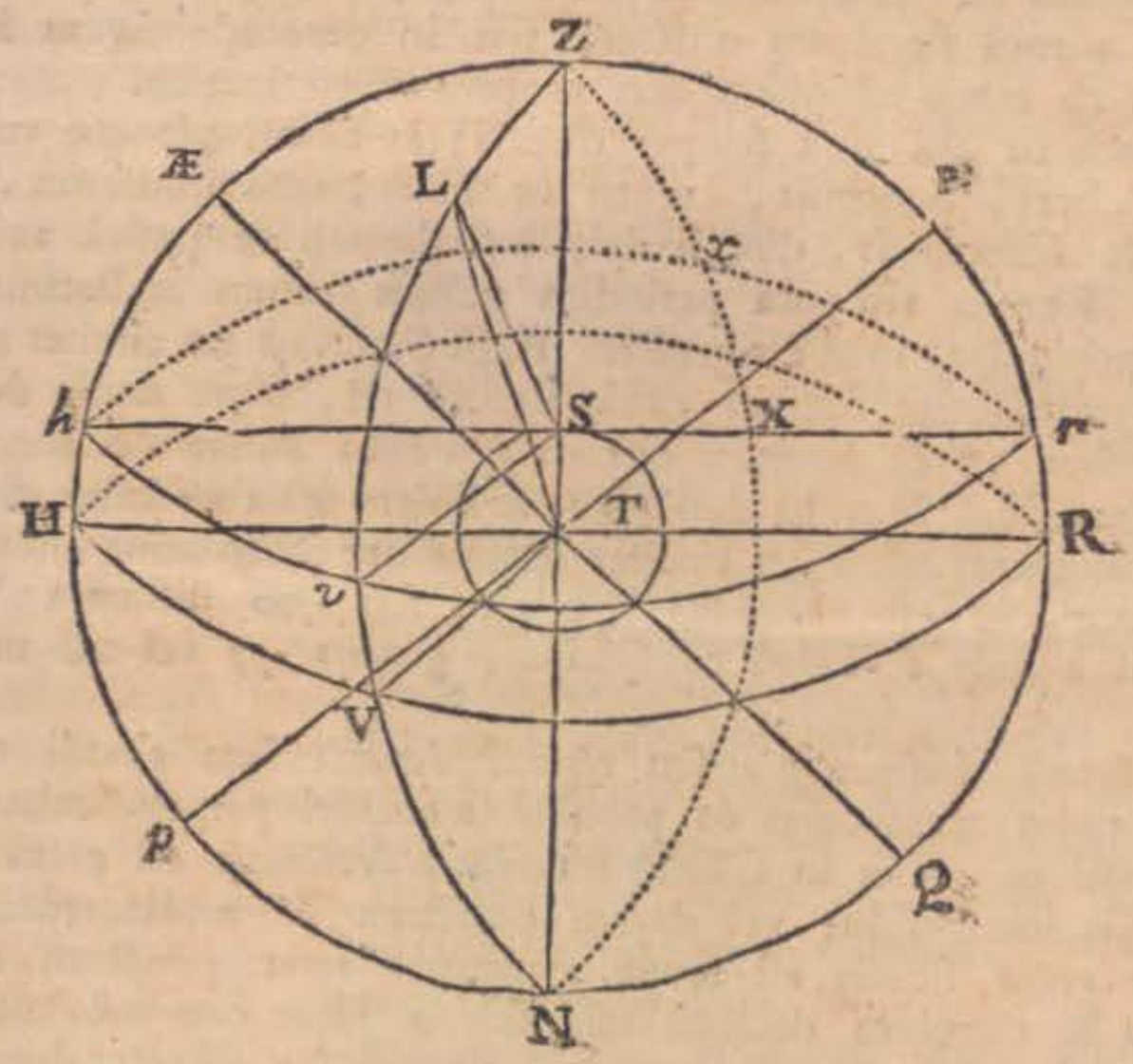
lia; Capricornus, Aquarius & Piſces, hyberna. Signa aſcendentia à puncto ſolſtitiali hyberno ad æſtivum, deſcendentia verò à ſolſtitiali æſtivo ad hybernum computantur.

5. *Zodiacus* eſt ſphæræ cæleſtis portio ſeu zona duobus circulis Ecliptícæ parallelis & gradibus 8 vel 9 hinc indè ab Ecliptícâ diſtantibus terminata, ſub quâ planetæ omnes motus ſuos abſolvunt. Dum planeta ab occaſu in ortum ſeu ſecundum ordinem ſignorum, aut quod idem ſonat, in ſigna conſequentia nimirùm ab ariete ad taurum, à tauro ad geminos &c., motu proprio fertur, ille planeta tunc temporis directus vocatur; cum ipſius motus proprius ceſſare videtur, ſeu dum planeta in eodem cœli puncto morari per aliquot dies cernitur, eumdem ſitum fixarum reſpectu ſervans, ſtationarius dicitur; retrogradus tandem appellatur ubi contrà ſignorum ordinem ſeu in antecedentia ut à tauro ad arietem, ab ariete ad piſces &c. proprio motu incedit.

6. Luna & Sol ſunt ſemper directi; at cæteri planetæ tum ſuperiores, videlicet, Saturnus, Jupiter & Mars, tum inferiores, nimirum, Venus & Mercurius, directi deindè ſtationarii & poſteà retrogradi videntur. Eorum tempora periodica quibus totum zodiacum in conſequentia peragrant, ſunt inæqualia. Nam Saturnus 30 circiter annis periodum ſuam abſolvit; Jupiter annis circiter 12, Mars annis duobus ferè, Luna diebus 27 & horis 7 circiter, Venus autem & Mercurius cum Sole anno uno. Nam hi duo planetæ Solem ità conſtanter comitantur ut Venus nunquam ultrà 47 circiter gradus nec Mercurius ultrà 28 à Sole digrediatur, id eſt, angulus maximus ſub quo diſtantia Veneris aut Mercurii à Sole è Terrâ conſpicitur, gradus 47 vel 28 nunquam ſuperat.

7. *Circuli declinationis* ſeu *circuli horarii* ſunt circuli maximi per mundi polos tranſeuntes & proindè æquatori perpendiculares. Sideris vel puncti cujuſlibet in ſphærâ mundanâ *declinatio* eſt arcus circuli declinationis inter ſidus vel datum punctum & æquatorem interceptus. *Aſcenſio recta* ſideris eſt arcus æquatoris inter punctum æquinoctiale vernum & circulum declinationis ſideris illius comprehenſus ac ſecundum ordinem ſignorum numeratus. *Circuli latitudinis* ſiderum ſunt circuli ſphæræ maximi per polos ecliptícæ & per ſidera tranſeuntes, atquè ideò Ecliptícæ perpendiculares. Hinc *Latitudo* ſideris eſt arcus circuli latitudinis inter ſidus & Ecliptícam interceptus. *Longitudo* ſideris eſt arcus ecliptícæ ab arietis initio versùs ortum ſeu in conſequentia uſquè ad latitudinis circulum numeratus. Punctum interſectionis Ecliptícæ cum circulo latitudinis ſideris dicitur locus ſideris Ecliptícus ſive locus in Ecliptícâ vel locus ad Ecliptícam reductus.

8. Si per locum quemvis S in ſuperficie terræ ducatur per terræ centrum T linea recta ZSN quæ ſphæræ cæleſti occurrat in Z & N, punctum Z dicitur loci S *Zenith* ſeu vertex, & punctum N vocatur ejuſdem loci *Nadir*. *Horizon ſenſibilis* ſeu apparens loci S, eſt ſphæræ circulus h v r x centrum habens in S, & polos in Z & N. *Horizon*



rationalis ſeu verus eſt circulus H V R X, centrum habens in T, & polos in Z & N, ideóque horizonti ſenſibili parallelus.

Circulus verticalis eſt circulus quilibet maximus Z V N X per Zenith atquè Nadir & per aliud quodcumque punctum in ſphærâ mundanâ tranſiens, ideóque horizonti perpendicularis.

Meridia-

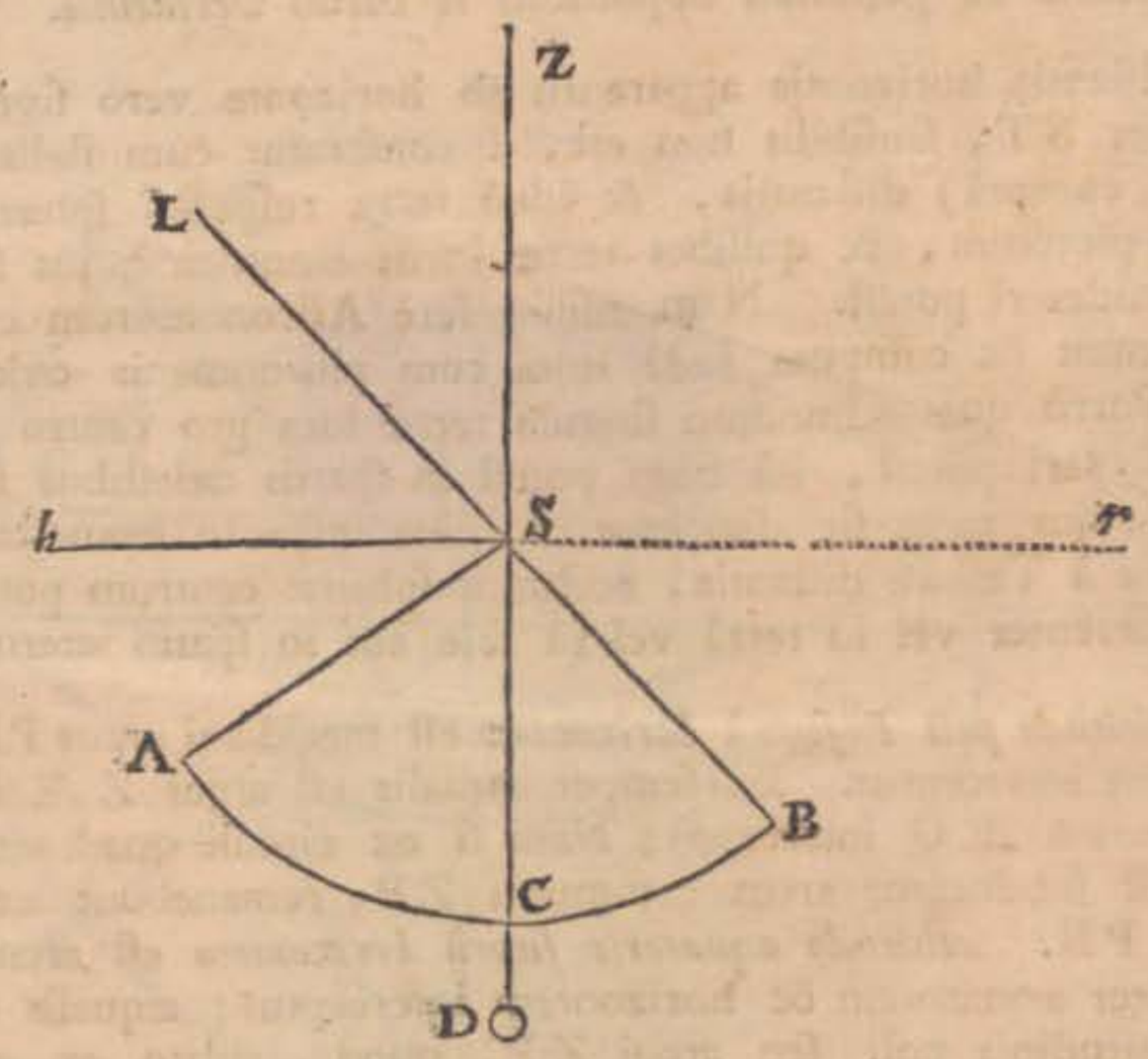
Meridianus eſt circulus verticalis PZNR per polos mundi P & p tranſiens, ac proindè æquatori perpendicularis & circulos omnes æquatori parallelos bifariam dividens. Interſectio plani Meridiani cum plano horizontis HR vel h r dicitur *Linea meridiana.* Circulus *Verticalis primarius* eſt ille verticalis qui per polos meridiani tranſit. Sit ZVNX verticalis primarius horizontem rationalem HVRX interſecans in V & X, quem meridianus etiam ſecat in H & R. Puncta quatuor R, X, H, V, dicuntur *cardines mundi*; punctum quidem R in hemiſpherio boreali cardo *Septentrionis*, H cardo *Meridiei*, V ad partes Orientis cardo *Orientis* & punctum oppoſitum X cardo *Occidentis.*

9. Diſtantia horizontis apparentis ab horizonte vero ſivè telluris ſemidiameter ST, ſenſibilis non eſt, ſi conferatur cum ſtellarum (Lunâ ferè ſolâ exceptâ) diſtantiis, & ideò terra reſpectu ſphæræ ſtellarum tanquam punctum, & quilibet terræ locus tanquam hujus ſphæræ centrum conſiderari poteſt. Nam omnes ferè Aſtronomorum obſervationes id ſupponunt & computa indè inita cum phænomenis cæleſtibus quadrant. Porrò quemadmodum ſingula terræ loca pro centro ſphæræ ſtellarum uſurpari poteſt, ità fingi poteſt in ſpatiis cæleſtibus ſphærica ſuperficies cujus tanta ſit diameter ut illius reſpectu evaneſcat Solis vel ſtellæ datæ à Tellure diſtantia, & hujus ſphæræ centrum poterit collocari indifferenter vel in terrâ vel in ſole aut in ſpatio intermedio.

10. *Altitudo poli P ſuprà horizontem* eſt meridiani arcus PR à polo ad horizontem interceptus. Ea ſemper æqualis eſt arcui ZÆ à vertice Z ad æquatorem ÆQ intercepto; Nam ſi ex circuli quadrantibus ZPR & ÆZP ſubducatur arcus communis ZP, remanebunt arcus æquales ÆZ & PR. *Altitudo æquatoris ſuprà horizontem* eſt arcus meridiani ÆH, inter æquatorem & horizontem interceptus; æqualis eſt complemento altitudinis poli ſeu arcui ZP, quod, ablato ex quadrantibus HÆZ & ÆZP communi arcu ÆZ manifeſtum eſt. *Altitudo apparens* ſideris vel puncti cujuſlibet L in ſphærâ mundanâ, eſt angulus LSv, ſub quo ex centro S horizontis ſenſibilis videtur arcus Lv circuli verticalis per L ducti uſquè ad horizontem ſenſibilem hvrx. Altitudo vera puncti L eſt angulus LTV, ſeu ipſius menſura arcus LV in circulo verticali per L ducto uſquè ad horizontem rationalem HVRX. Undè (9) ſtellarum fixarum & ſolis altitudines apparentes & veræ coincidunt.

11. Jam verò quâ ratione phænomena quæ ſuprà retulimus & alia quæ deinceps referemus obſervari potuerint, paucis exponemus; & quidem ab obſervatione altitudinis apparentis ſiderum quæ præcipuum

totius Aſtronomiæ fundamentum eſt, initium ducemus. Circuli quadrans S A B cujus limbus A C B in gradus & minuta diviſus eſt ità ſtatuitur, ut filum S C D pondere D tenſum ideóque verticale, limbum illius tangat, deindè ità vertitur ut ſidus L cujus altitudo obſervanda eſt, per dioptras aut per teleſcopium lateri S B affixum videatur in eodem latere S B producto. Quo facto, habetur arcus A C, menſura altitudinis apparentis L S h; nam cum filum è quadrantis centro S, pendens ſit ſemper in plano verticali, quadrans A S B erit etiam in eodem plano, (Eucl. 18. XI.) ideóque h r ad S D perpendicularis, erit interſectio

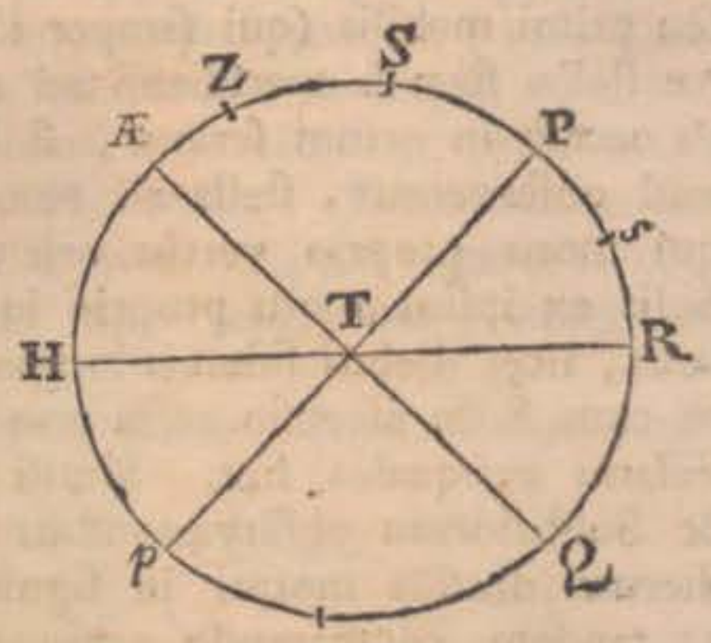


horizontis ſenſibilis & plani verticalis per L ducti, atquè angulus L S h ſideris L altitudo apparens. Sed ſi ab angulis rectis L S A, & h S D, ſubducatur communis h S A, remanent æquales anguli L S h & A S C; hujus verò menſura eſt arcus A C.

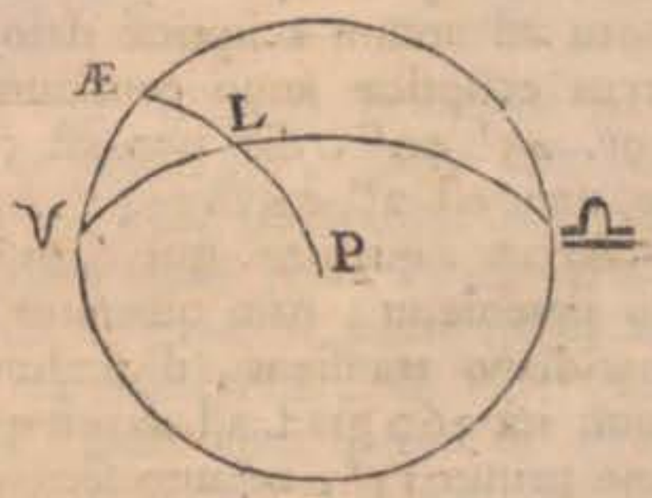
12. Hinc deſcribi poteſt linea meridiana ſuprà quam ſi ſtatuitur perpendiculariter quadrans circuli, obſervari poterit altitudo meridiana ſideris. Nam meridianus portiones illas circulorum æquatori parallelorum, quæ ſuprà horizontem eminent & qui arcus diurni dicuntur, bifariam ſecat (per El. XI. 19. & 4., & El. III. 30.) cum ſit illis circulis & horizonti eos arcus terminanti perpendicularis, & propterea ſi in circulo quolibet diurno ſumantur puncta duo hinc indè orientem & occi-

occidentem versùs à meridiano æquidistantia, ea puncta erunt suprà horizontem sensibilem æquè alta, & contrà si æquè alta sint, à meridiano hinc indè æquidistabunt. Quarè si stellæ fixæ meridiano vicinæ altitudo observetur versùs orientem, & deindè quadrans circà filum verticale immotum ceù circa axem convertatur versùs occidentem & expectetur donec stella eandem altitudinem habeat, recta quæ bifariam dividet angulum inter duas quadrantis cum horizonte intersectiones comprehensum, erit linea meridiana.

13. Datis per observationes duabus ejusdem stellæ nunquam occidentis altitudinibus meridianis SR, sR, dantur poli P & æquatoris ÆQ altitudines PR & ÆH suprà horizontem HR. Nam datis arcubus SR & sR datur eorum differentia Ss; & quia stella S circulum describit æquatori parallelum (3) cujus P est polus, erit SP=sP; undè datur Ps, cui si addatur sR, habebitur arcus PR altitudo poli. Est autem HÆ æqualis arcui ZP seu complemento altitudinis poli ad rectum (10), datur ergò HÆ altitudo æquatoris.



14. Datâ stellæ S altitudine meridianâ SR cum æquatoris vel poli altitudine, datur illius declinatio SÆ; est enim arcus SÆ æqualis differentiæ arcuum ÆPR & SR. Sic observando quotidiè altitudinem meridianam centri Solis & indè eruendo ipsius declinationem, determinatum est planum eclipticæ & ejus ad æquatorem inclinatio seu maxima ab æquatore declinatio quæ inventa est 23 ½ grad. aut verius 23°. 29'. Datâ autem inclinatione eclipticæ ad æquatorem cum solis declinatione, datur ascensio recta Solis ac longitudo. Sit enim P polus mundi, ♈Æ♎ æquator, ♈L♎ ecliptica, & PLÆ, circuli quadrans æquatori perpendicularis in Æ, & datis in triangulo sphærico Æ♈L rectangulo in Æ, latere seu declinatione Solis LÆ, & angulo Æ♈L, 23° 29', dantur latus ♈Æ ascensio recta solis, seu puncti L, & latus ♈L quod est ejusdem longitudo, imò datur etiam angulus ÆL♈, quem circulus declinationis efficit cum Ecliptică; Cum verò præter angulum Æ♈L, data fuerit longitudo ♈L, dabitur tum ♈Æ ascensio recta, tum ÆL, declinatio.



15. Si

15. Si quotidie obſervetur meridiana Solis altitudo, atquè indè eruantur ipſius declinatio, aſcenſio recta & longitudo, dabuntur motus Solis in Ecliptică, motus puncti declinationis in Æquatore & temporis momenta quibus declinatio vel nulla eſt vel maxima, ſeu dabuntur Æquinoctiorum & Solſtitiorum momenta (4). Porrò obſervatum eſt nec longitudinem nec aſcenſionem rectam ſolis uniformiter creſcere & proindè dies ſolares eſſe inæquales. Nam dies ſolaris eſt tempus unius revolutionis diurnæ ſolis à meridiano ad eundem meridianum; dies ſidereus ſeu primi mobilis (qui ſemper idem manet) eſt tempus revolutionis diurnæ ſtellæ fixæ à meridiano ad eumdem. Undè cum Sol motu proprio ab occaſu in ortum feratur, ſi ſtella fixa & Sol in eodem meridiano ſimul obſerventur, ſtella ad eumdem meridianum priùs redibit quam Sol qui motu proprio versùs orientem tendit. Attamen ſi aſcenſio recta Solis ex ipſius motu proprio in Ecliptică uniformiter creſceret, dies Solares, licet diebus ſidereis longiores, eſſent tamen inter ſe æquales; Quarè cum Solis aſcenſio recta non augeatur uniformiter, neceſſe eſt ut dies Solares inæquales ſint. Simili modo collatis inter ſeſe Æquinoctiorum & Solſtitiorum obſervationibus deprehenſum eſt Solem intervallo 8 ferè dierum diutiùs morari in ſignis borealibus quam in ſignis auſtralibus; ac tandem comparando antiquas obſervationes ad determinandum momenta æquinoctiorum vel ſolſtitiorum cum recentioribus, definita eſt quantitas anni æquinoctialis, ſivè tempus quo Sol motu proprio ab uno æquinoctio ad idem æquinoctium, vel ab uno ſolſtitio ad idem ſolſtitium progreditur & ab Authoribus Calendarii Gregoriani Lahirio, Caſſino & Blanchinio inventa eſt $365^{\text{dier.}}\ 5^{\text{hor.}}\ 49'$.

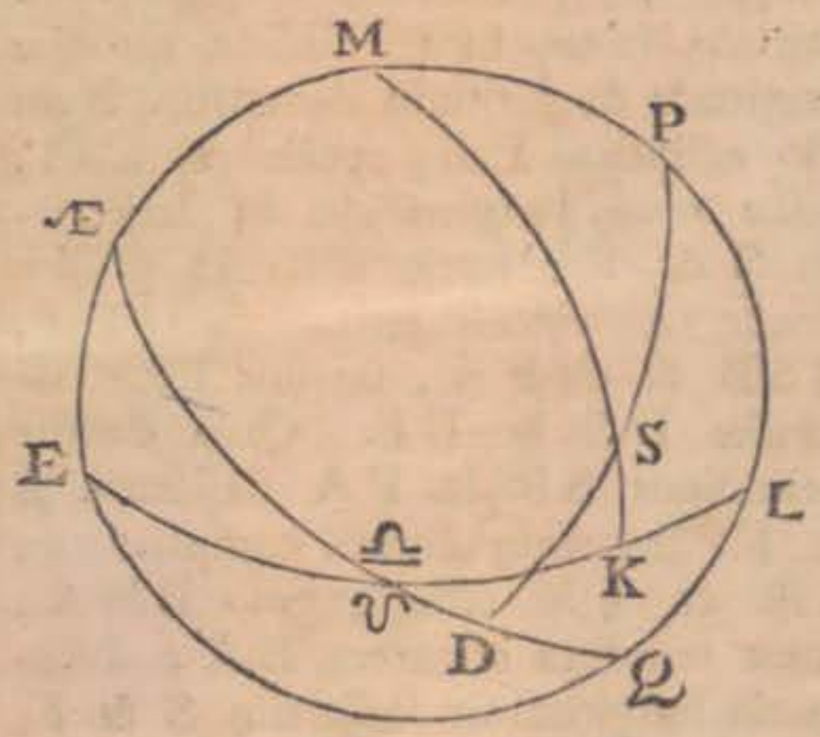
16. Datâ quantitate anni æquinoctialis, datur motus Solis medius pro quolibet dato tempore, hoc eſt motus qui Soli competeret ſi uniformiter in Ecliptică ferretur. Eſt enim ut $365^{\text{d.}}\ 5^{\text{h.}}\ 49'$ ad tempus datum, ità 360° quos Sol anni æquinoctialis tempore deſcribit proprio motu ad arcum eclipticæ dato tempore conficiendum. Hâc proportione arcus eclipticæ anno communi $365^{\text{dier.}}$ deſcribendus eſt XI Signorum 29°. $45'\ 40''$, die uno eſt $59'\ 8''\ 20'''$, horâ unâ eſt $2'\ 28''$, minuto uno eſt $2''\ 28'''$.

Arcus æquatoris qui dato tempore ſub Meridiano tranſit ſimili modo invenietur; nam quæratur arcus æquatoris dato tempore ſidereo ſub meridiano tranſiens, dicendum eſt: ut 24 horæ ſidereæ ad tempus datum, ità 360 grad. ad arcum quæſitum, is ergo horâ unâ erit 15°; minuto uno primo $15'$, minuto ſecundo $15''$. Cum autem Sol die uno deſcribat motu proprio medio ad Æquatorem reluto arcum $59'\ 8''\ 20'''$ ab occaſu ad ortum, ut inveniatur arcus æquatoris dato tempore ſolari medio ſub Meridiano tranſiens, dicatur ut 24 horæ Solares ad datum tempus Solare, ità 360°

59′ 8″ 20‴ ad arcum quæſitum. His igitur proportionibus tempus ſolare medium vel tempus ſidereum convertitur in gradus æquatoris & contrà. Facilè autem patet ex dictis diem ſolarem medium æqualem eſſe 24 horis ſidereis cum 3′ 56″ 32‴.

17. Si obſervetur altitudo meridiana Solis & dato ante vel poſt meridiem tempore obſervetur etiam altitudo meridiana ſtellæ alicujus, ſtellæ hujus dabuntur declinatio & aſcenſio recta. Nam ex datâ altitudine meridianâ Solis datur ejus aſcenſio recta (14) & tempore quod inter duas obſervationes intercedit in arcum æquatoris converſo (16) datur arcus æquatoris qui tempore inter duas obſervationes elapſo per Meridianum tranſit; hic arcus addatur vel ſubducatur aſcenſioni rectæ Solis, & ſumma vel differentia erit aſcenſio recta ſtellæ. Declinatio autem ſtellæ ex ipſâ altitudine ejus meridianâ eruitur (14). Quod ſi centrum Solis & centrum ſtellæ in meridiano ſimul reperiantur, eadem eſt utriuſque aſcenſio recta.

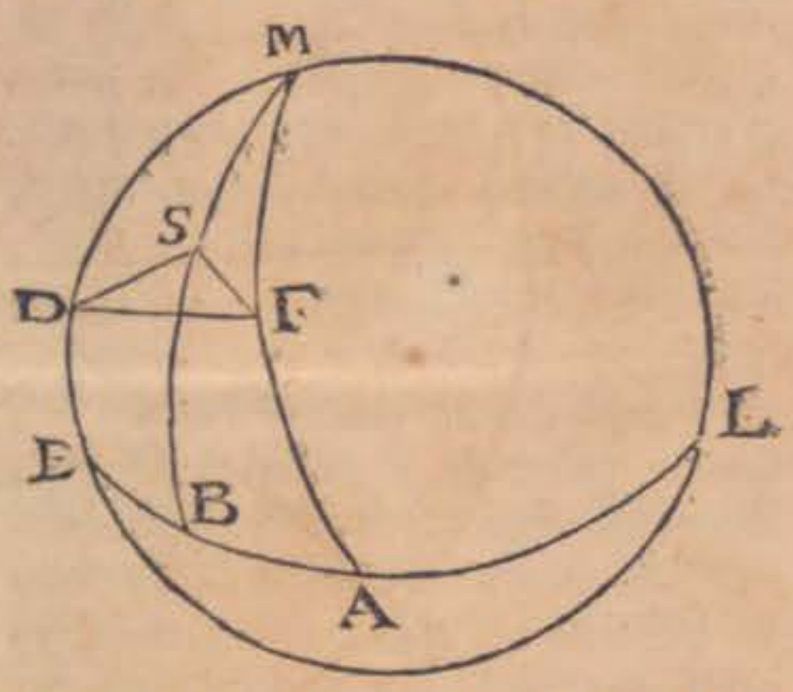
18. Datis declinatione & aſcenſione rectâ ſtellæ, dantur ipſius longitudo & latitudo. Sunto ÆQ æquator, EL ecliptica, P polus mundi, M polus eclipticæ, S ſtella, PSD quadrans circuli declinationis, & MSK, quadrans circuli latitudinis. Quæruntur arcus ♈ vel ♎ K & KS. In triangulo PSM datur latus PM ſeu diſtantia polorum P & M 23° 29′, datur quoque latus PS declinationis SD complementum & angulus MPS ſeu ÆPD, cujus menſura eſt arcus ÆD datus ob datos per aſcenſionem rectam arcum ♈D vel ♎D & quadrantem Æ♈. Quarè (per trig. ſphær.) invenitur latus MS latitudinis SK complementum & angulus M, cujus menſura eſt arcus KL; ex circuli quadrante ♈L vel ♎L ſubducatur KL, & dabitur ♈K longitudo ſtellæ S. Hinc etiam facilè patet quomodò datis longitudine ♈K & latitudine KS ſtellæ S inveniri poſſit ipſius aſcenſio recta & declinatio. Nam dato ♈K datur KL, & indè datur angulus SMP, & dato SK, datur SM, undè cum datum ſit MP, dantur in triangulo SMP latus PS complementum declinationis & angulus ÆPD, cujus eſt menſura ÆD, ex quâ ſi auferatur quadrans Æ♈, dabitur aſcenſio recta ♈D.



19. Ex hujuſmodi obſervationibus & calculis inventum eſt fixa-

rum latitudines immutabiles esse, longitudines verò per singulos annos 50 secundis, & per annos 72 gradu uno quamproximè augeri. Undè manifestum fit stellas fixas motu proprio sed lentissimo in circulis ecliptica parallelis progredi in consequentia, aut si stellæ fixæ omni proprio motu priventur, puncta æquinoctialia singulis annis in antecedentia moveri per arcum 50″, atquè hæc est præcessio æquinoctiorum ex quâ fit ut Sol motu proprio ab æquinoctio ad idem æquinoctium citiùs revertatur quam à stellâ fixâ ad eandem. Annus igitur Solaris æquinoctialis brevior est anno Solari sidereo, hoc est brevior est tempore unius revolutionis Solis à stellâ fixâ ad eandem fixam; differentia est 20′ 17″ quo tempore Sol motu proprio arcum 50″ conficit. Est ergò annus sidereus 365 dier. 6 hor. 9′ 17″.

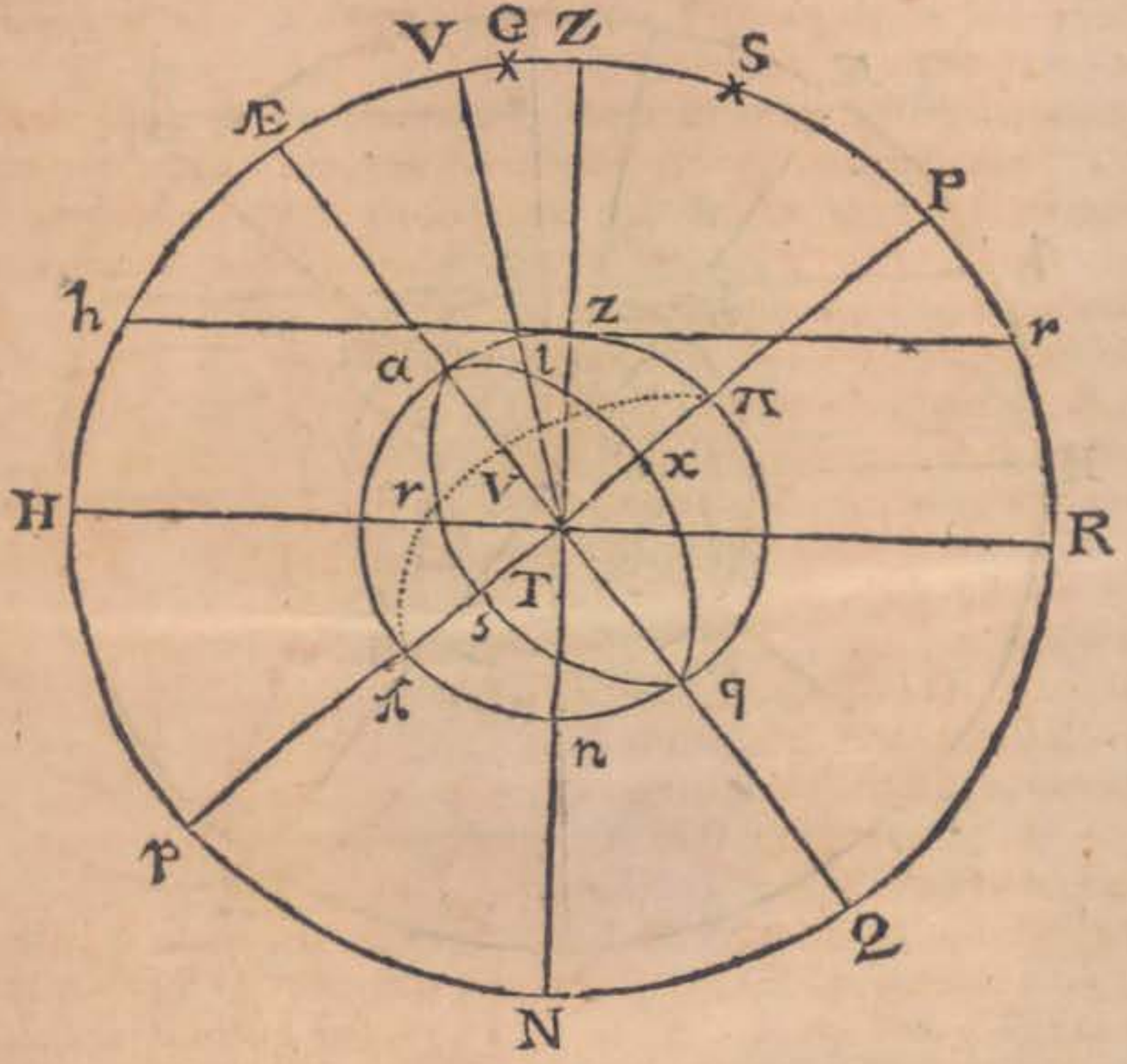
20. Stellarum distantiam dicimus arcum circuli maximi inter stellarum centra comprehensum, aut, quod eodem redit, angulum quem rectæ à centris stellarum ad oculum spectatoris ductæ efficiunt. Si ope semicirculi vel quadrantis observentur distantiæ stellæ alicujus ab aliis duabus stellis quarum longitudo & latitudo notæ sunt, illiùs quoque longitudo & latitudo dabuntur. Nam esto ecliptica EL, polus ejus M, stellæ notæ longitudinis & latitudinis S & F, tertia stella D. Ducantur tres circuli latitudinis MDE, MSB & MFA, sintque datæ distantiæ DS & DF. Quia dantur latitudines SB & FA stellarum S & F, dabuntur earum complementa SM & FM cum angulo BMA, cujus mensura est arcus BA, differentia longitudinis stellarum S & F, & ideò in triangulo SFM, dabitur SF, cum angulo MSF. Datis in triangulo DSF, tribus lateribus dabitur angulus DSF, & si ex 360° seu quatuor angulis rectis subducatur summa angulorum datorum DSF & FSM, dabitur angulus DSM, cum quo & notis lateribus DS & SM, reperientur latus MD complementum quæsitæ latitudinis stellæ D, & angulus EMB cujus mensura est arcus EB. differentia longitudinum stellarum D & S; hæ autem observationes distantiarum Astrorum inter se propter Astrorum continuam conversionem non facile ad summam acribeiam perducuntur.



21. Sit Πzæπq telluris globus per cujus centrum T transit axis mundi Pp. Loci z sit horizon sensibilis hr, horizon rationalis HR,

&

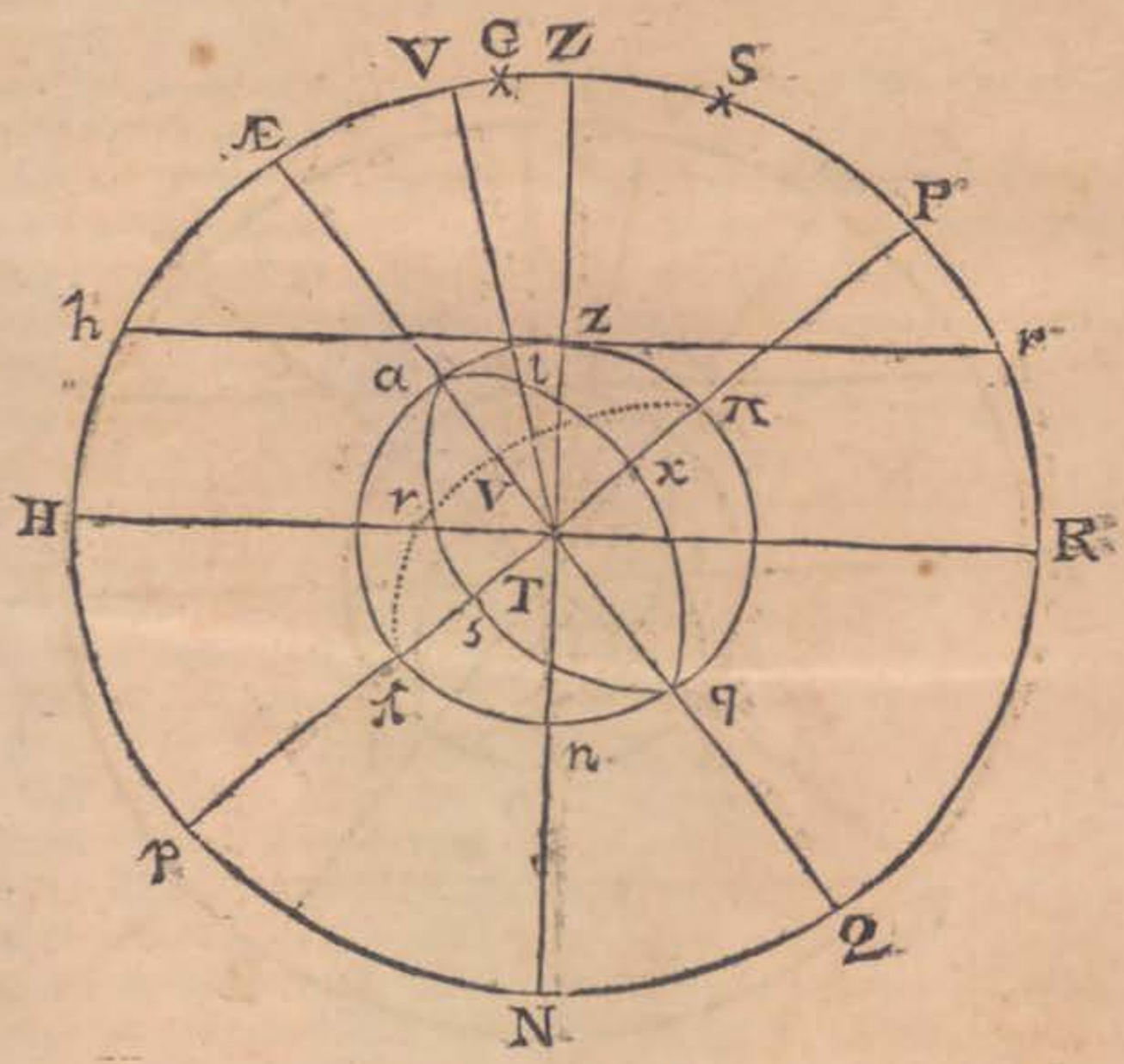
& meridianus PZHN. His ità conſtitutis, axis telluris dicitur pars Ππ, axis mundi Pp telluris ſuperficie terminata in punctis Π & π, quæ poli terræ vocantur. Polus Π polo cœleſti P nobis conſpicuo ſubjectus borealis vel arcticus, alter π auſtralis vel antarcticus appellatur. Interſectio plani æquatoris cœleſtis cujus eſt diameter Æ Q, cum telluris ſuperficie, ſivè circulus maximus æ s q x, cujus poli ſunt Π & π, dicitur æquator terreſtris aut etiam circulus æquinoctialis vel κατ' ἐξοχὴν linea. Latitudo loci cujuſvis z in ſuperficie terræ eſt diſtantia ejus ab æquatore, ſi-



vè eſt meridiani terreſtris arcus zæ inter locum z & æquatorem æzqx interceptus. Undè patet latitudinem loci z in ſuperficie terræ numero graduum æqualem eſſe declinationi cœleſti verticis Z ejuſdem loci, ſeu elevationi poli PR. Nam arcus PR & ZÆ, ſunt æquales (10) & arcus ZÆ ac zæ ſimiles; Per locum in ſuperficie terræ pro arbitrio determinatum ducatur meridianus Π r π æquatorem æ s q x ſecans in r; dicaturque Π r π primus meridianus, & loci cujuſvis alterius z longitudo dicetur æquatoris arcus r æ inter meridianum primum Π r π & me-

ridianum zæπq loci z interceptus atquè ab occasu ad ortum numeratus.

22. Si per trigonometriam mensuretur distantia zl duorum locorum z & l sub eodem meridiano sitorum & ope quadrantis circuli ex iisdem locis observentur distantiæ SZ & SV, stellæ fixæ S à locorum verticibus Z & V, dabitur telluris semidiameter zT. Nam datis arcubus SV & SZ, dabitur eorum differentia vel summa VZ, & hinc



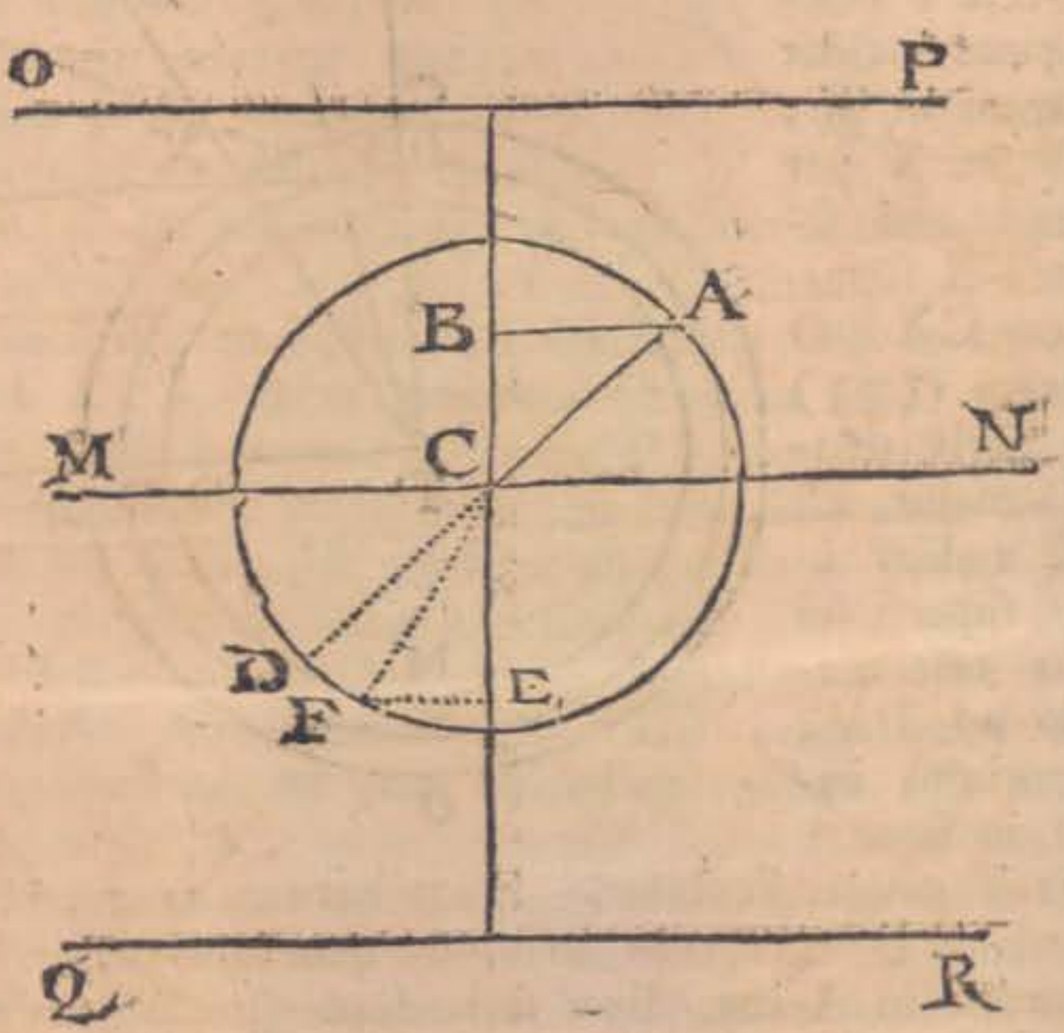
datur arcus lz qui arcui VZ similis est. Quarè per observationes astronomicas notum erit quot gradus vel minuta in arcu lz contineantur & per trigonometricas mensuras ejusdem arcûs longitudo hexapedis vel pedibus aut aliis mensuris notis data erit, & indè inferendo ut numerus minutorum in arcu lz contentorum ad 360° seu ad 21600', ità longitudo lz mensuris notis expressa ad circulum telluris maximum, dabitur hic circulus ex quo invenietur semidiameter zT.

CAPUT

CAPUT II.

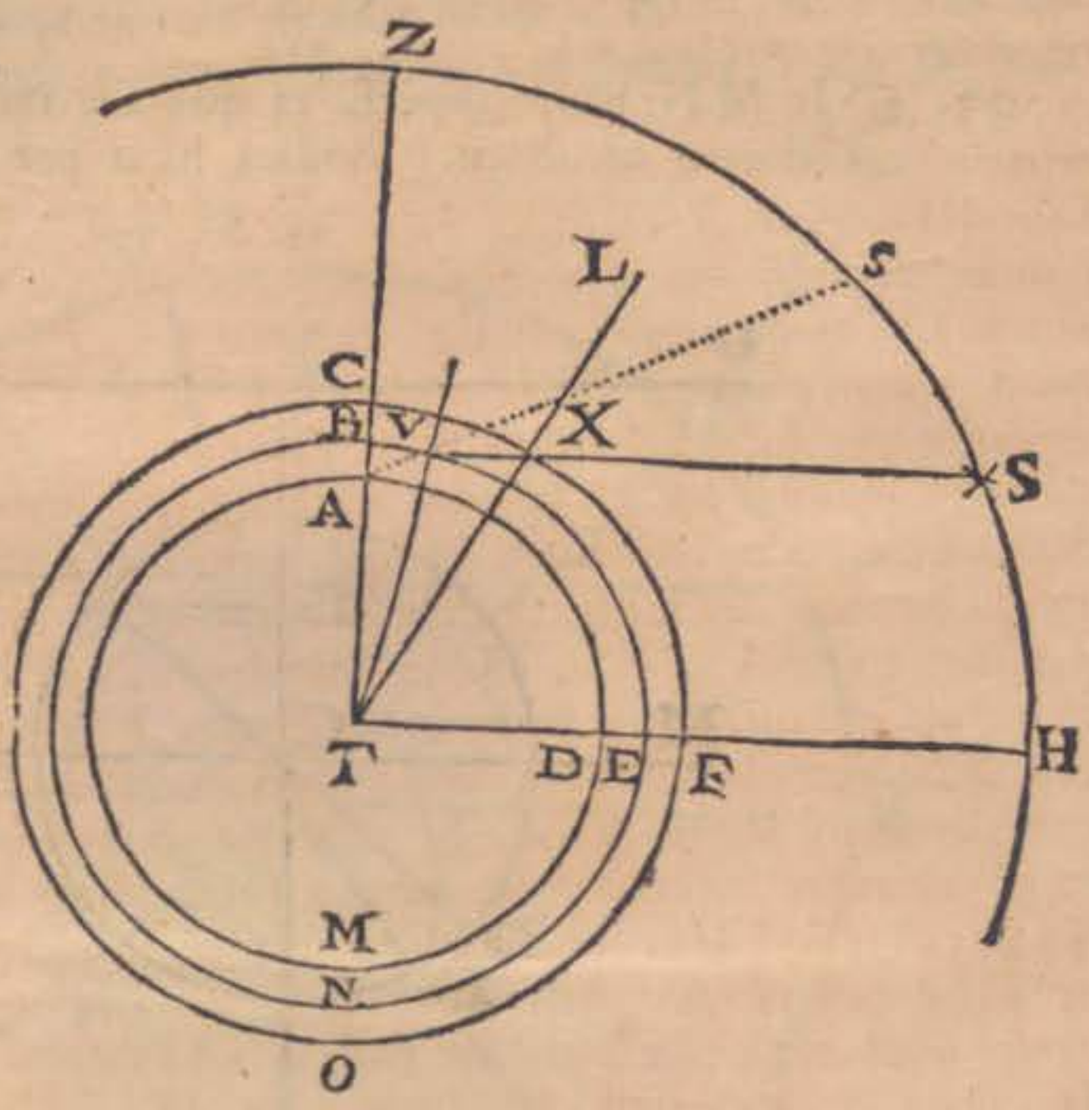
Siderum refractio & parallaxis breviter explicantur.

23. SIt MN plana ſuperficies quâ aer rarior MOPN aerem denſiorem contingit. Radius lucis per rectam AC propagatus



ex aere rariori in denſiorem obliquè tranſeat per punctum C & indè feratur per CE, per C ducatur BF ad MN perpendicularis, experientiâ certum eſt radium AC in aere denſiori non propagari per rectam continuam ACD, ſed in puncto C ità refrangi per CE accedendo ad perpendicularem BCF, ut ſinus anguli cujuſvis ACB ſit ſemper ad ſinum anguli ECF in datâ ratione. AC dicitur radius incidens, C punctum incidentiæ, CE radius refractus, ACB angulus inclinationis, ECF angulus refractus, & DCE angulus refractionis.

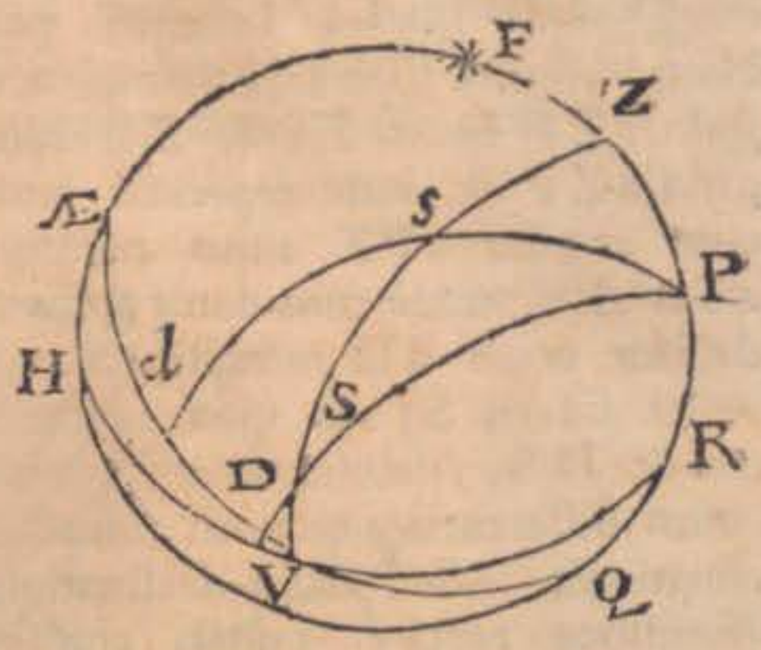
24. Si atmoſphæra CXFOMA terræ ADM circumfuſa, diviſa intelligatur in innumeras ſuperficies ſphæricas telluris ſuperficiei concentricas CXFO, BVEN aer inter duas hujuſmodi ſuperficies contentus & aeris ſuperioris pondere compreſſus eò denſior erit quò minùs à telluris centro T diſtabit. Sit ZSH circulus verticalis ex centro telluris T deſcriptus, arcus SH altitudo ſideris S ſuprà horizontem rationalem TH, & ZS diſtantia ſideris à vertice Z. Si radius lucis SX è ſidere S propagatus incidat in atmoſphæram in X, is refringetur in X per XV accedendo ad ſemidiametrum TX ſuperficiei ſphæricæ CXFO perpendicularem (23) & quoniam aëris denſitas in V major eſt quam in X radius in puncto V, ſuperficiei BVE rursùs refringetur accedendo ad TV, atquè ità continuò incurvabitur & in lineam XVA versùs T cavam flectetur. Hanc curvam tangat in A recta As, circulo verticali ZH occurrens in s, & quoniam radius lucis SXVA oculum ſpectatoris in A ingreditur ſecundum directionem tangentis As, ſidus, quod eſt reverâ in S, videbitur in s, in loco nempe altiore; notum enim eſt ex opticâ objectum videri in eâ rectâ ſecundum quam fit directio radiorum oculos ingredientium.



25. Producatur TX ad L, ut ſit SXL angulus inclinationis radii SX in atmoſphæram incidentis, & VXT angulus refractus, data erit ratio ſinus anguli SXL, ad ſinum anguli VXT (23) ac proindè ſinus angulorum inclinationis erunt ſemper ut ſinus angulorum refractorum. Quarè ſideris in vertice Z conſtituti, ubi nullus eſt angulus inclinationis, nulla erit refractio, & ſiderum in æqualibus à vertice diſtantiis ſitorum, ubi æquales ſunt inclinationum anguli, æquales erunt refractiones. Solis igitur, Lunæ, fixarum ac ſiderum omnium extrà terreſtrem atmoſphæram conſtitutorum, in paribus à vertice diſtantiis refractiones ſunt æquales.

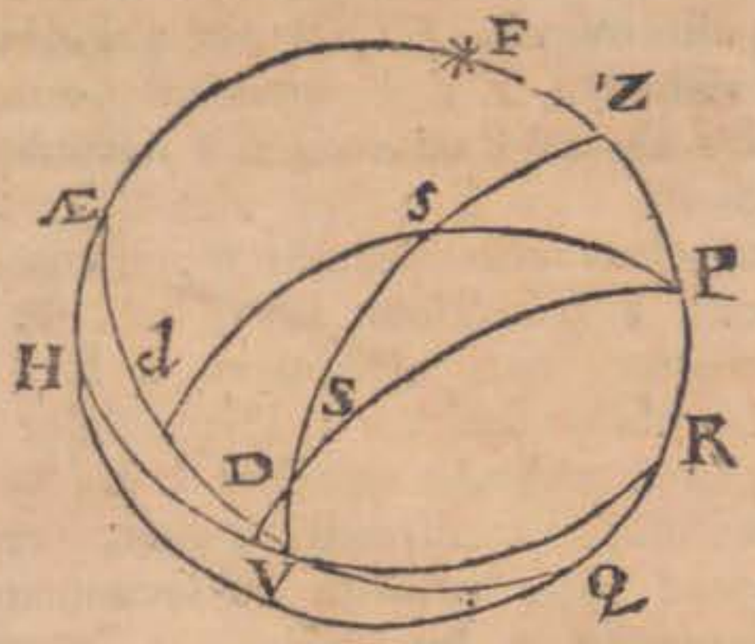
26. Si-

26. Siderum refractio ad ſingulos altitudinis gradus, obſervatione definiri poteſt. Eſto HR horizon, P polus mundi, ÆQ æquator, PZH Meridianus, ZSV circulus verticalis, PSD & Psd, circuli declinationis. Stellæ fixæ F propé Zenith conſtitutæ obſervetur altitudo meridiana HF, quæ à refractione libera eſt, & indè eruatur ejus declinatio FE (14). Deindè obſervetur ejuſdem ſtellæ in S poſitæ altitudo quælibet SV, & ope horologii oſcillatorii notetur tempus quod inter primam & ſecundam obſervationem intercedit, & inveniatur arcus æquatoris ÆD qui eo tempore per meridianum tranſiit (16). Stella quæ ob refractionem in loco altiori s apparet ſit reverâ in S, erit PSD circulus declinationis ſtellæ in S conſtitutæ, & in triangulo PZS, dabitur angulus ZPS, cujus menſura eſt arcus ÆD cum latere PZ quod eſt diſtantiâ poli à vertice & latere PS, quod eſt declinationis DS ſeu ÆF complementum, undè invenitur latus ZS cum altitudine SV, complemento lateris ZS. Si ergò ex altitudine obſervatâ SV, ſubducatur altitudo inventa SV, quæ à refractione libera eſt, dabitur arcus Ss, refractio ſtellæ in quolibet gradu altitudinis. Hoc modo D. De la Hire in tabulis Aſtronomicis obſervavit refractiones ſiderum diverſis anni tempeſtatibus, in pari altitudine eaſdem eſſe exceptis refractionibus circà horizontem quas nonnullis inconſtantiis obnoxias expertus eſt, atquè hinc unicam tabulam refractionum ex ipſis obſervationibus deductam conſtituit, quam poſtea correxit D. Caſſinus & eâ correctâ utuntur Aſtronomi. Quoniam verò radiorum lucis in atmoſphæram incidentium obliquitas cum ſideris à vertice diſtantiâ creſcit, iiſdem obſervationibus invenit refractiones ſiderum à vertice ad horizontem uſquè ubi maximæ ſunt, continuò augeri; at quod ex alienis obſervationibus ſupponebat, videlicet refractiones borealium regionum ipsâ etiam æſtate, longè majores eſſe quam in zonis temperatis, id minimè verum eſſe oſtendunt accuratiores obſervationes ab Academicis Pariſienſibus ad circulum polarem habitæ, quibus refractiones etiam horizontales Pariſienſibus æquales invenerunt. Vide Domini De Maupertuis nobiliſſimum opus de figurâ telluris per obſervationes ad circulum polarem definitâ.



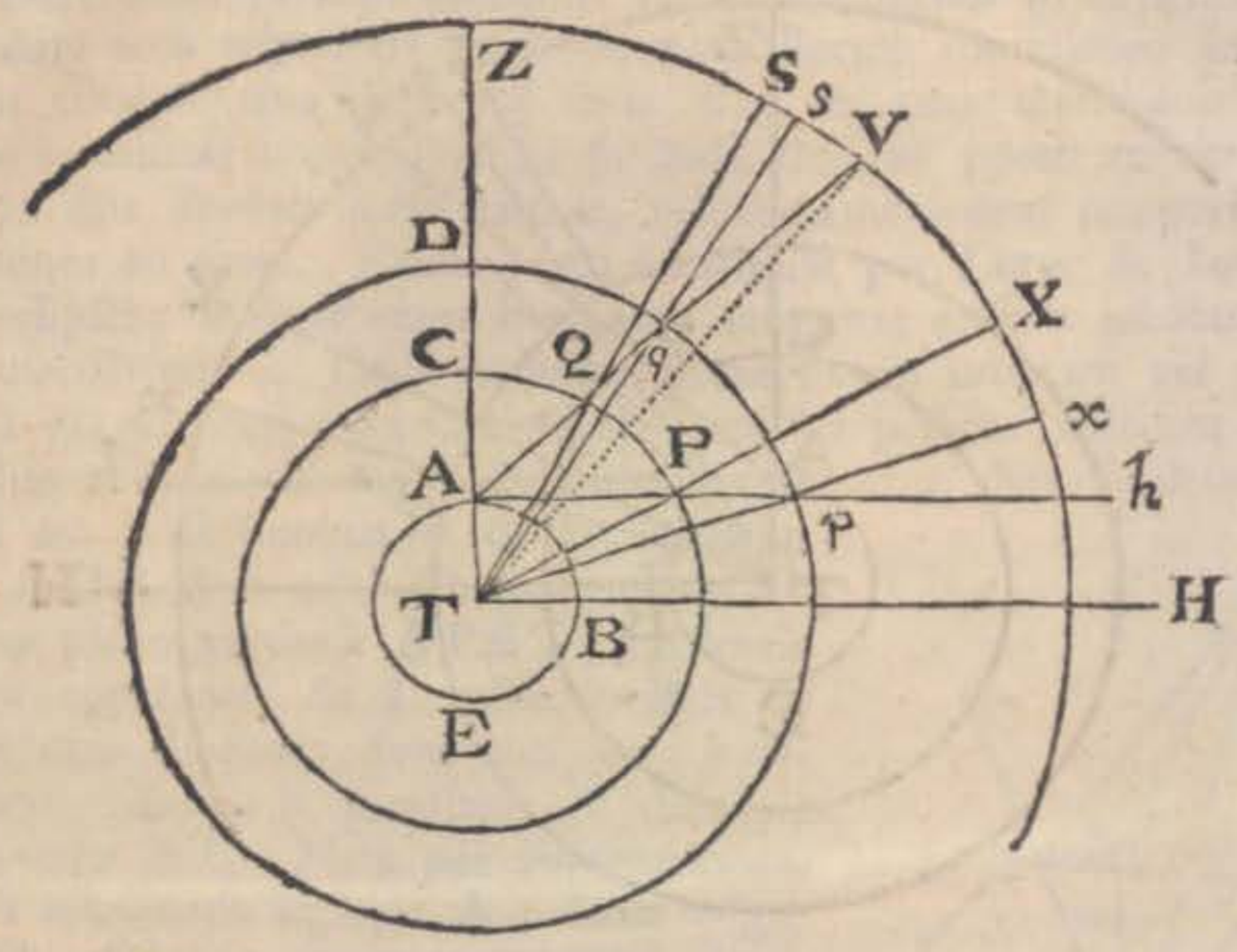
27. Refractio ſideris declinationem, aſcenſionem rectam, longitudinem ae latitudinem afficit & arcus circuli maximi quo ſideris declinatio, aſcenſio recta, longitudo & latitudo minuitur vel augetur per refractio-

ſractionem, dicitur refractio declinationis vel aſcenſionis rectæ &c.; at ex datâ altitudinis refractione aliæ refractionum ſpecies inveniri poſſunt. Nam in figurâ ſuperiori dantur in triangulo sZP latera Zs & ZP cum angulo sZP & indè reperitur latus sP cum angulo sPZ cujus menſura eſt arcus Æd, undè cum detur arcus ÆD, dabitur arcus dD refractio aſcenſionis rectæ ſideris S; & quia dantur arcus ds & DS, dabitur etiam horum arcuum differentia, quæ eſt refractio declinationis. Sed datis declinatione & aſcenſione rectâ: puncti cujuſvis in ſphærâ mundanâ, dantur ipſius latitudo & longitudo (18); patet igitur quomodo latitudinis & longitudinis refractiones poſſint inveniri.



28. Jam de *Parallaxibus* pauca nobis delibanda ſunt. Cætera, ubi opus fuerit, ſuis locis exponemus. Itaque diſtantia locorum in ſphærâ cæleſti ad quæ ſidus vel phænomenon quodvis è ſuperficie telluris & ex ejus centro ſpectatum refertur, ſivè arcus circuli maximi inter illa duo loca interceptus, ipſius ſideris aut phænomeni parallaxis appellatur, quæ proindè nulla eſt niſi terræ ſemidiameter ſenſibilem habeat rationem ad diſtantiam ſideris à terrâ. Sit T centrum telluris ac cœli; A oculus in ſuperficie terræ; Z zenith loci A; Q ſidus vel phænomenon quodvis; CQP verticalis per Q tranſiens; ZSXH verticalis in ſuperficie ſphæræ cæleſtis; ABE verticalis in ſuperficie terræ; TH horizon rationalis & Ah horizon ſenſibilis. His ità conſtitutis, locus phyſicus ſideris Q, eſt punctum illud in quo ſideris centrum hæret. Locus opticus apparens ſeu viſus eſt punctum V in ſuperficie ſphæræ cæleſtis, in quo recta ex oculo A per centrum ſideris Q ducta terminatur. Locus opticus verus eſt punctum S in ſuperficie ſphæræ cæleſtis in quo terminatur recta linea TQS ex terræ centro T per Q ducta. *Parallaxis* eſt arcus SV ſivè differentia duorum locorum opticorum. *Angulus parallacticus* qui plerumque etiam *Parallaxis* vocatur, eſt angulus AQT quem in centro ſideris efficiunt rectæ AQ & TQ ex oculo A & ex centro terræ T ad ſideris centrum Q ductæ. Parallaxis altitudinis quæ & parallaxis ſimpliciter dicitur, eſt differentia inter diſtantiam ZV à zenith Z ex loco A viſam & diſtantiam veram ZS, ſivè eſt arcus SV in circulo verticali ZSVH, undè manifeſtum eſt altitudinem ſideris veram per parallaxim minui & ejus à vertice diſtantiam augeri, æquè ideò parallaxim eſſe refractioni contrariam. Parallaxis horizontalis eſt parallaxis Xh, ſideris P in horizonte ſenſibili Ah apparentis, 29.

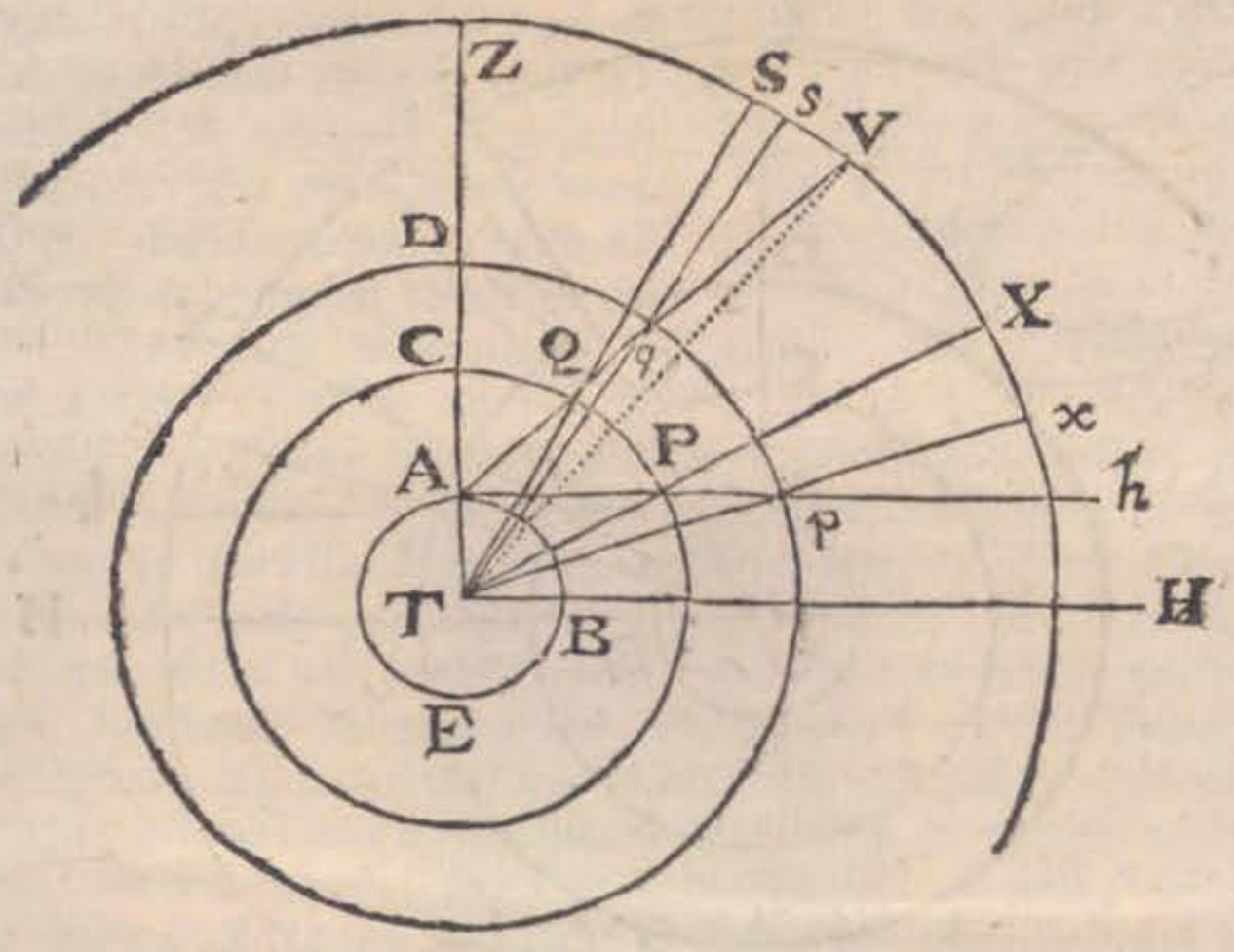
29. Parallaxis SV est mensura anguli parallactici AQT. Jungatur TV, & angulus externus AQT æqualis erit duobus internis oppositis QTV & QVT; sed angulus QVT sivè AVT, evanescente AT respectu TV, nullus est (9), ergò angulus parallacticus AQT, æqualis est angulo QTV, seu STV, cujus mensura est arcus SV.



30. Manente sideris à centro terræ distantiâ; sinus parallaxeos est ad sinum distantiæ visæ sideris à vertice in ratione datâ semidiametri telluris ad distantiam sideris à centro terræ. Nam in triangulo AQT, est AT ad QT, in ratione sinûs anguli parallactici AQT seù sinus parallaxeos ad sinum anguli TAQ sivè ad sinum distantiæ visæ ZV à vertice, & ideò, datis AT & QT, data est ratio sinuum illorum. Hinc verò sequitur sideris in vertice Z, constituti parallaxim esse nullam, eandem crescere cum distantiâ à vertice & in horizonte fieri maximam. Sequitur quoquè sinus parallaxium in paribus sideris à centro terræ distantiis esse ut sinus distantiarum visarum à vertice, & ideò si detur parallaxis sideris in aliquâ à vertice distantiâ, dabitur in aliâ quâvis distantiâ à vertice.

31. Datâ sideris Q, parallaxi AQT, cum angulo ZAV seu distantiâ apparente à vertice, datur in semidiametris terræ tum distantia QT sideris Q à centro terræ, tum distantia ejus AQ à loco A. Dato enim angulo ZAQ datur TAQ complementum illius ad duos re-

ctos, undè, ob datum etiam angulum AQT, dantur tres anguli trianguli QAT, ex quibus datur ratio laterum inter se. Hinc datâ sideris P parallaxi horizontali, si inferatur ut sinus parallexeos ad sinum totum, ità semidiameter telluris AT ad quartum obtinebitur distantia PT sideris à centro terræ ob angulum TAP rectum.



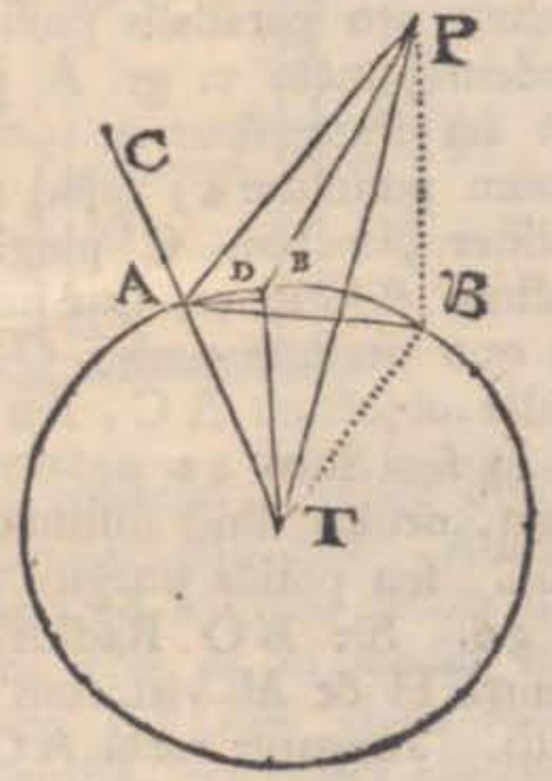
32. Sinus parallaxeon siderum Q & q in æqualibus distantiis apparentibus à vertice, sunt in ratione reciprocâ distantiarum siderum à centro terræ. Etenim ut sinus parallaxeos AQT, ad sinum anguli ZAV, ita est AT ad QT & ut sinus anguli ZAV, ad sinum parallaxeos AqT, itâ qT ad AT, ideòque ex æquo, sinus parallaxeos AQT est ad sinum parallaxeos AqT ut qT ad QT. Ex quo etiam sequitur siderum in eâdem altitudine apparente existentium, hujus majorem esse parallaxim quod minùs distat à centro terræ.

33. Parallaxis altitudinis, uti de refractione dictum est, sideris declinationem, ascensionem rectam, longitudinem & latitudinem mutat; & eodem modo quo ex refractione altitudinis inveniuntur aliæ refractionum species, sic ex datâ parallaxi altitudinis eruuntur parallaxes declinationis, ascensionis rectæ, longitudinis & latitudinis; illud quoque observandum est sideris in meridiano existentis nullam esse ascensionis rectæ refractionem nec parallaxim; cum enim altitudinis refractio sidus attollat, & altitudinis parallaxis illud deprimat, in eodem meridiano

seu

ſeu circulo declinationis (per hyp.) aſcenſio recta indè non mutatur. Similiter ſi circulus verticalis in quo ſidus reperitur ſit ad ecliptican perpendicularis, nulla erit longitudinis refractio nullaque parallaxis; nam in hoc caſu circulus verticalis eſt ſimul circulus latitudinis, & ſiderum in eodem latitudinis circulo exiſtentium longitudo eſt eadem.

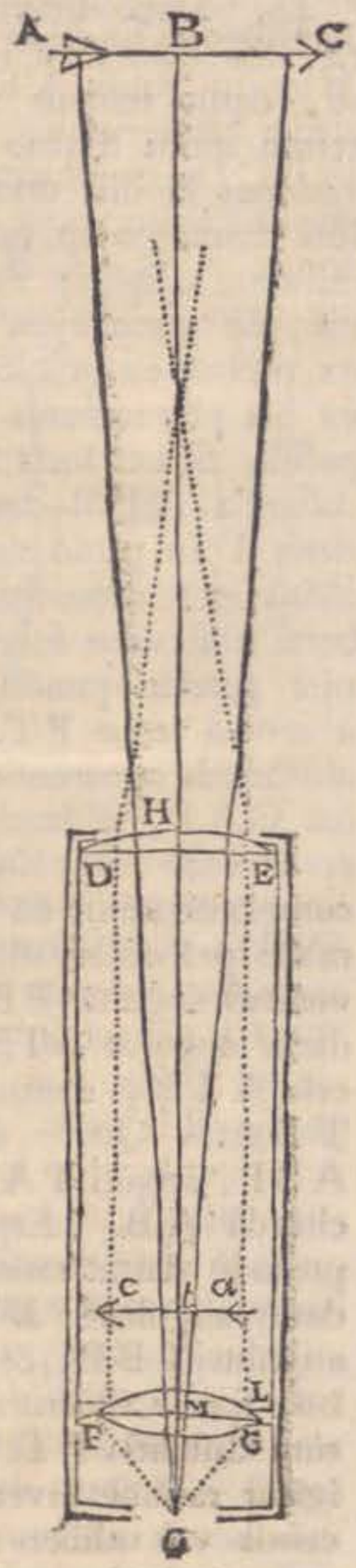
34. Datâ differentiâ longitudinis locorum duorum in ſuperficie terræ, ſeu dato arcu æquatoris inter locorum illorum meridianos intercepto, datur tempus quo Sol vel ſtella fixa ab uno meridiano ad alterum motu diurno tranſit (16); & indè definiri poteſt utrum obſervationes in illis duobus locis habitæ, reſpondeant eidem temporis abſoluti momento an non. Facilè idem innoteſcit per Lunæ & Jovis Satellitum eclipſes; eodem enim momento temporis eclipſis initium ac finis, & macularum in Lunâ notarum immerſio in umbram vel emerſio ex umbrâ ex omnibus terræ locis undè conſpici poſſunt videntur, atquè ex his phænomenis differentia longitudinis locorum determinatur. His poſitis ſi ex locis duobus A & B, quorum diſtantia ADB data eſt, Phænomeni vel ſideris P in plano verticali APBT, exiſtentis altitudines apparentes & à refractionibus liberæ obſervatæ fuerint eodem tempore, inveniri poterit puncti P parallaxis & diſtantia à centro terræ PT. Nam per obſervationem altitudinis apparentis in loco A, datur angulus CAP, diſtantia apparens ſideris à vertice & indè datur angulus PAT, anguli CAP complementum ad duos rectos, eodemque modo per obſervationem in loco B factam invenitur angulus PBT. Sed dato arcu ADB, datur angulus ATB & hinc in triangulo iſoſcele ATB, dantur anguli æquales TAB & TBA. Quarè dantur etiam in triangulo ABP, anguli PAB, & PBA quos latera PA & PB efficiunt cum chordâ AB. Ergò triangula duo ABT & ABP dantur ſpecie ac proindè datur ratio PB ad BT, & quia datis angulis ABT & ABP datur angulus PBT, ductâ rectâ PT, dabuntur in triangulo PTB, angulus TBP, & ratio laterum TB & BP, atquè ideò triangulum hoc ſpecie dabitur. Innoteſcet igitur tum angulus parallacticus BPT, tùm diſtantia PT, ſeu ejus ratio ad telluris notam ſemidiametrum. Hâc igitur ratione inveniri poteſt parallaxis ſideris aut Phænomeni vel quieſcentis vel utlibet moti. Verùm Aſtronomi recentiores plures invenerunt methodos quibus unicus obſervator in eodem loco manens ſiderum



motu diurno ac proprio agitatorum parallaxes poteſt determinare. De his, ubi è re viſum fuerit, dicemus. Vid. Keill. in Introductione ad veram Aſtronomiam.

CAPUT III.

De Teleſcopii ac Micrometri uſu & Phænomenis horum Inſtrumentorum beneficio obſervatis pauca.



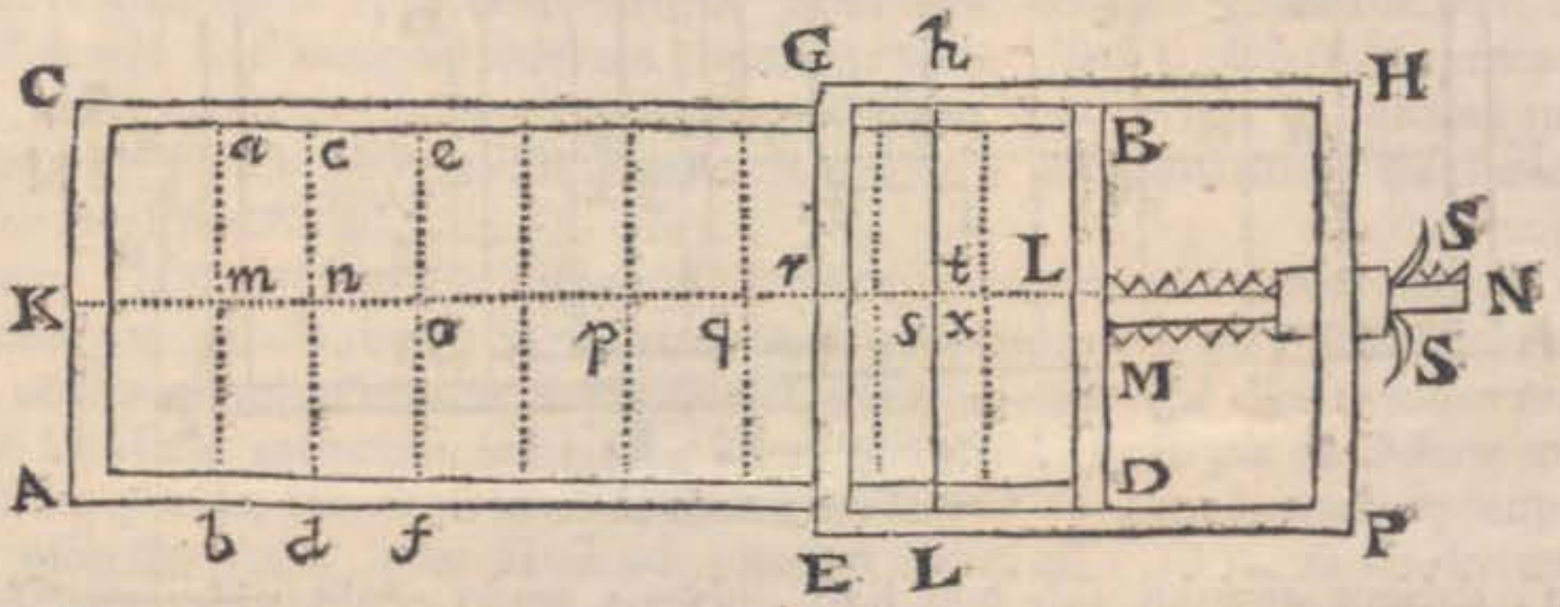
35. SIt Teleſcopium Aſtronomicum DFGE, vitrum objectivum DE, oculare FG; objectum AC; ità remotum ut radii qui ex ſingulo illius puncto in totam vitri objectivi ſuperficiem incidunt pro parallelis poſſint uſurpari. Radii illi ex eodem puncto v. gr. A propagati, à vitro objectivo ità franguntur ut poſt vitrum DE coeant in unum punctum a, quod eſt puncti A imago, & ſimiliter punctum C pingitur in c, totumque objectum AC in ac, ſitu inverſo, eſtque c a foci locus in quo proindè oculus O, trans virtum oculare FG, videt objectum AC, ſeu ipſius imaginem a c. Hinc ſi in foci loco c a poſitum ſit corpus aliquod opacum, oculus illud diſtinctè videbit tanquam objecto AC, ſeu potiùs imagini ejus a c contiguum.

36. Sit BO Radius ad AC normalis & per centra H & M vitrorum tranſiens, ideóque irrefractus. Jungatur recta AO, & objectum AB, oculo nudo videretur ſub angulo AOB, eſtque proindè angulus AOB, magnitudo apparens objecti AB. Quoniam verò radii ex punctis imaginis b & a parallelè propagati colliguntur à vitro oculari FG in ejus foco O ubi oculus verſatur, pars objecti AB, ſeu ejus imago a b, videtur ſub angulo MOL, & (per probl. 31. Element. Dioptr. Clariſſ. Wolf.) diſtantia foci lentis objectivæ Hb, eſt ab diſtantiam foci lentis ocularis b M, ut angulus MOL ad angulum AOB, ſeu ut magnitudo apparens imaginis a b ad magnitudinem apparentem objecti AB nudo oculo viſi, ex quo pa-

ect

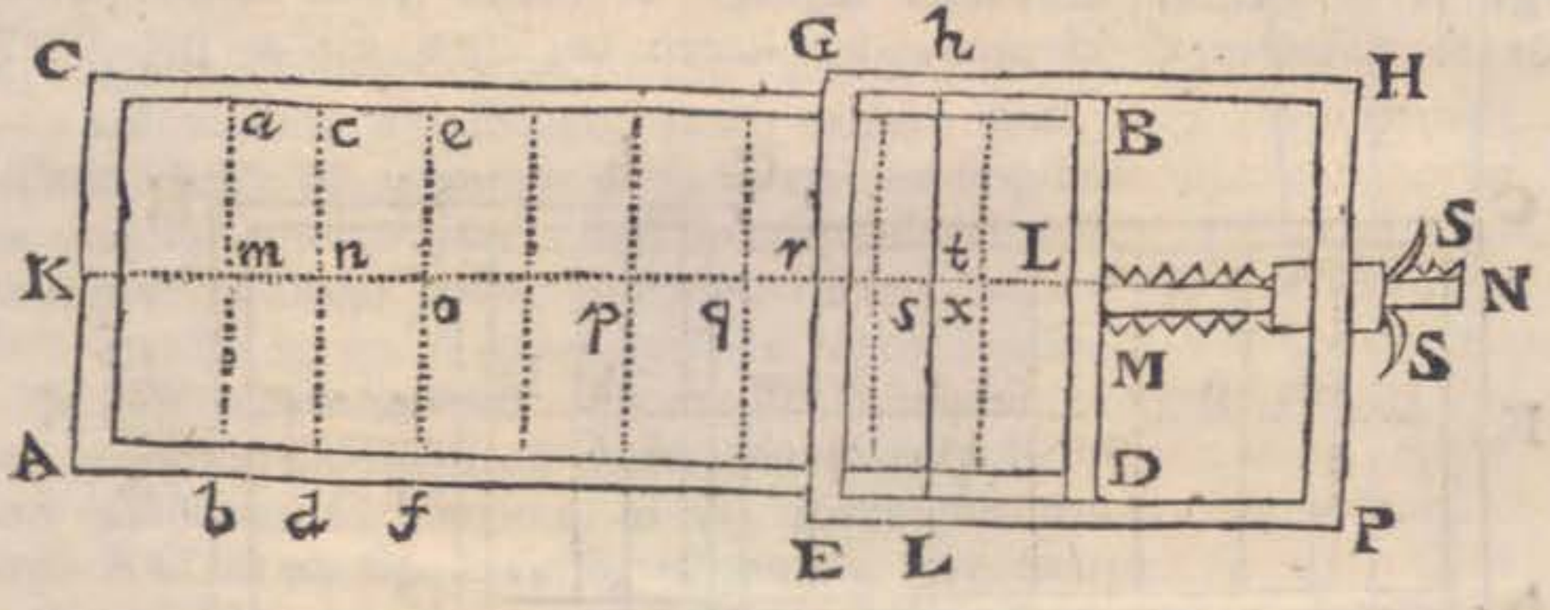
ret quod in eodem Teleſcopio magnitudines apparentes objectorum ſunt proportionales magnitudinibus imaginum in foco poſitarum &, trans vitrum oculare viſarum.

37. His poſitis, facile eſt micrometri uſum intelligere. Eſt autem micrometrum inſtrumentum quod in foco lentis objectivæ teleſcopii aptatur ad magnitudines apparentes quæ gradum unum vel gradum cum ſemiſſe non ſuperant, dimetiendas. Illius conſtructionem quam D. De-la-Hire in tabulis Aſtronomicis veluti uſibus Aſtronomicis accommodatiorem dedit, referemus. Conſtat ex duobus quadris rectangulis quorum alterum ABCD, ut plurimum longitudinem habet duorum pollicum cum ſemiſſe & latitudinem unius pollicis cum ſemiſſe. Hujus quadri, latera longa AD, CB, in partes æquales & tertiâ parte unius pollicis inter ſe diſtantes dividuntur, ità tamen ut lineæ ductæ per ſingu-



las diviſiones ſint ad latera AD, CB, perpendiculares. Hiſce diviſionibus fila ſerica benè tenſa applicantur, glutinanturque cerâ. Additur filum ſericum KL, dictum tranſverſale, quod ad angulos rectos fila parallela modò deſcripta ab, cd, ef, &c. ſecet & in medio laterum AC, BD glutinatur. Alterum quadrum EFGH cujus longitudo EF non ſuperat unum pollicem cum ſemiſſe, ita priori accommodatur ut ejus latera EF, GH, moveantur ſuper latera AD, CB, alterius quadri nec ab ipſo ſeparentur. Facies hujus ſecundi quadri quæ diviſam faciem prioris reſpicit, filo etiam ſerico & tenſo hL, inſtruitur, quod, cum movetur quadrum ubiquè prioris quadri filis parallelum maneat, eaque ſuperlabitur quam proximè, nec tamen eis occurrit. Cochlea deindè MN, lateri BD, longioris quadri affigitur, cujus ſtriatum receptaculum lateri FH alterius adhæret & in foramine rotundo circumvolvitur. Cochlea ejuſque receptaculum auriculis S, S inſtructum ità inter ſe aptari debent ut receptaculum & quadrum EH, ne minimùm quidem moveri poſſit, niſi receptaculi motu converſionis.

Quadrum ABCD, teleſcopii cujuſvis longitudinis tubo in diſtantiâ foci objectivæ lentis ità aptatur ut ipſius quadri planum perpendiculare ſit ad teleſcopii axem. His ità conſtitutis, teleſcopium in cœlum convertatur & ità diſponatur ut duæ ſtellæ fixæ quarum diſtantia apparens in minutis ſecundis aliundè nota ſit, ſint in filo tranſverſali KL, poſitæ verſeturque cochlea donec filum mobile hL, per centrum x, ſtellæ unius tranſeat, alterius ſtellæ centro m, vel n, exiſtente in alio filo ab, vel cd. Hâc obſervatione notum erit cuinam diſtantiæ apparenti reſpondeat longitudo mx, vel nx, in lineis & lineæ partibus data, & indè per proportionis regulam, obſervatâ quâlibet aliâ ſiderum diſtantiâ



nq, dabitur angulus ſub quo hæc diſtantia nudo oculo videretur; inferendo ſic: ut mx vel nx ad nq, ità diſtantia apparens ſtellarum duarum m, vel n, & x ad diſtantiam apparentem punctorum n & q. Moveatur jam quadrum EFGH ope receptaculi ſtriati donec filum ejus ſericum hl, exactè conveniat cuilibet ex filis parallelis alterius quadri, noteturque poſitio auricularum receptaculi & iterum moveatur receptaculum donec idem filum quadri EFGH proximo filo alterius congruat, vel, quod idem eſt, moveatur quadrum EFGH, per ſpatium quatuor linearum, numerenturque revolutiones receptaculi & partes unius revolutionis quæ filorum intervallo linearum quatuor conveniunt. Condatur tandem tabula revolutionum receptaculi & partium ejus quæ ſingulis minutis primis & ſecundis ex noto ſuperiùs toto intervallo debentur.

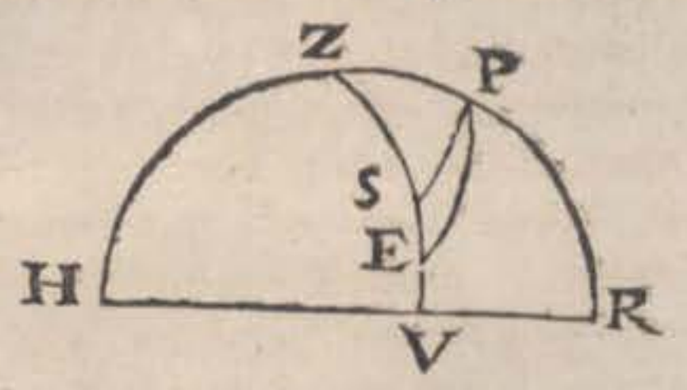
38. Ubi diameter planetarum erit obſervanda, directo teleſcopio cum micrometro ad planetam ità diſponantur fila movendo teleſcopium ut ſideris limbus unum ex filis parallelis immobilibus percurrat; deindè receptaculum convertatur, donec filum mobile limbum alterum Planetæ contingat. Manifeſtum eſt ex diſtantiâ cognitâ inter fila micrometri

quæ

quæ planetam comprehendunt, notam fieri Planetæ diametrum apparentem.

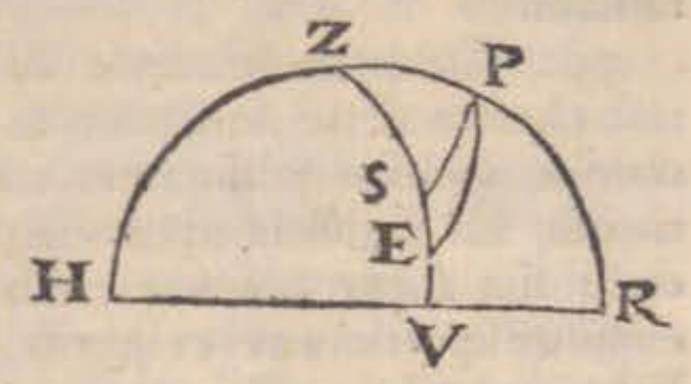
39. Datâ declinatione & aſcenſione rectâ ſtellæ fixæ, inveniri poteſt alterius ſtellæ declinatio & aſcenſio recta, modò tamen duæ illæ ſtellæ tranſire viciſſim poſſint per campum teleſcopii immoti. Ità enim diſponantur fila parallela micrometri ut motus diurnus ſtellæ quæ alteram præcedit fiat ſuper unum ex illis V G. Super a b, in quo ſitu filum c d, exponet portionem exiguam paralleli quem ſtella deſcribit, & filum K L illud ad angulos rectos interſecans, circulum aliquem declinationis. Notetur temporis momentum quo ſtella præcedens filo transverſali occurrit in m. Similiter immoto teleſcopio obſervetur tempus appulsûs alterius ſeu ſequentis ſideris ad idem filum tranſverſale ſeu circulum declinationis, & ſi intereà filum parallelum mobile h L, ſideri huic apletur, immoto manente micrometro ope diſtantiæ m x, filorum a b & h L, diſtantiam apparentem inter parallelos ſiderum duorum quæ eſt differentia declinationis ſiderum, obtinebimus. Sed ſi differentia temporis inter utriuſque ſideris tranſitum per filum tranſverſale in minuta tam prima quam ſecunda gradûs convertatur (16) differentiam aſcenſionalem ſiderum habebimus.

40. Hæc obſervatio ſupponit nullum eſſe ſideris motum proprium nullamque parallaxim. Si ſidus motum proprium habeat, illum oportet ex obſervationibus determinare quoad declinationem & aſcenſionem rectam illiúſque rationem habere. Quo peracto, ſi aliqua ſit ſideris parallaxis poterit ità reperiri. Obſervetur ſideris ad meridianum appellentis aſcenſio recta quæ parallaxi obnoxia non eſt (33), & differentia inter hanc aſcenſionem rectam ſideris in meridiano exiſtentis & aſcenſionem rectam ejuſdem ſideris alibi exiſtentis obſervatam, erit parallaxis aſcenſionis rectæ ex qua parallaxis altitudinis inveniri poterit. Sit enim H R hotizon, H Z R meridianus, Z zenith, P polus mundi, Z S E V circulus verticalis, S ſidus obſervatum in loco S & deindè in meridiano, E locus ſideris viſus, S locus verus, & ideò S E parallaxis altitudinis; S P & P E circuli declinationis. Datur, (per hyp.) angulus S P E, cujus menſura eſt parallaxis aſcenſionis rectæ ſideris obſervata. Datur etiam punctum illud quod eſt interſectio æquatoris & meridiani tempore obſervationis ſideris in E, apparentis, undè habetur arcus æquatoris inter meridianum R Z H & circulum declinationis P E interceptus qui eſt menſura anguli Z P E. Quarè in triangulo Z P E, dantur latus Z P diſtantia poli à vertice, & latus Z E diſtantia viſa



ſideris

ſideris à vertice cum angulo ZPE. Innoteſcet igitur angulus PZE. ab angulo ZPE, ſubducatur datus SPE, & dabitur angulus ZPS. Denique in triangulo ZPS, ex datis angulis PZS & ZPS, cum latere ZP, dabitur latus ZS, vera ſideris à vertice diſtantia quæ ex visâ ZE, ablata relinquet SE parallaxim altitudinis.



41. Teleſcopium maculas quamplurimas variabiles quæ ſuper corpus Solis incedere videntur oſtendit, ex earum motu ſolem circà proprium axem 25 ½ diebus revolvi infertur. In Venere pro variâ ejus ad Solem & Terram poſitione phaſes diverſæ conſpiciuntur phaſibus Lunaribus ſimiles ità ut partem illuminatam Soli conſtanter obvertat. Prætereà Mercurius & Venus tanquam maculæ nigræ & rotundæ diſcum Solis trajicere viſi ſunt. Undè notum factum eſt Planetas illos eſſe corpora opaca à Sole illuſtrata. In Jove, Marte ac Venere maculæ obſervatæ fuerunt quarum motus rotationem illorum planetarum circà proprium axem probat. Circà Jovem quatuor revolvi videntur lunulæ Jovis corpus perpetuò comitantes. Sunt omnes ut & Jupiter ipſe corpora opaca lumen ſuum à Sole mutuantia; nam Jove inter ipſas & Solem diametraliter interpoſito, lumine privantur & cælo ſereno evaneſcunt; ubi verò aliqua Jovialis Lunula inter Solem & Jovem tranſit, ejus umbra inſtar maculæ nigræ ac rotundæ obſervatur in ipſo Jovis diſco. Quinque pariter Lunulæ Saturnum comitantur & circà eum revolutiones ſuas agunt lumineque privantur dum radii Solares à Saturni corpore opaco intercipiuntur. Hugenius ex propriis obſervationibus intulit Saturnum cingi annulo tenui, plano, nuſquam cohærente cum corpore Saturni & ad Eclipticam inclinato; quæ hypotheſis, ſi ità nunc poteſt appellari, non ſolùm Phænomenis ab Hugenio obſervatis, ſed & aliis plurimis quæ magnâ diligentiâ à Caſſino & Maraldo obſervata fuere ſatisfacit. Tandem per teleſcopium ſtellæ longè plures quam oculo nudo cernuntur; Stellæ illæ quas nebuloſas dicunt & integra via lactea nihil aliud ſunt quam plurimarum ſtellarum quæ oculo non diſtinguuntur congeries. Novæ quoque in cælis ſtellæ apparent & quæ antè videbantur, nonnunquam inconſpicuæ fiunt, illarum quædam apparitionis & diſparitionis periodos habent quæ quámdam regularitatem obtinere videntur, earumque magnitudo ſub initio apparitionis creſcit & ſub finem decreſcit.

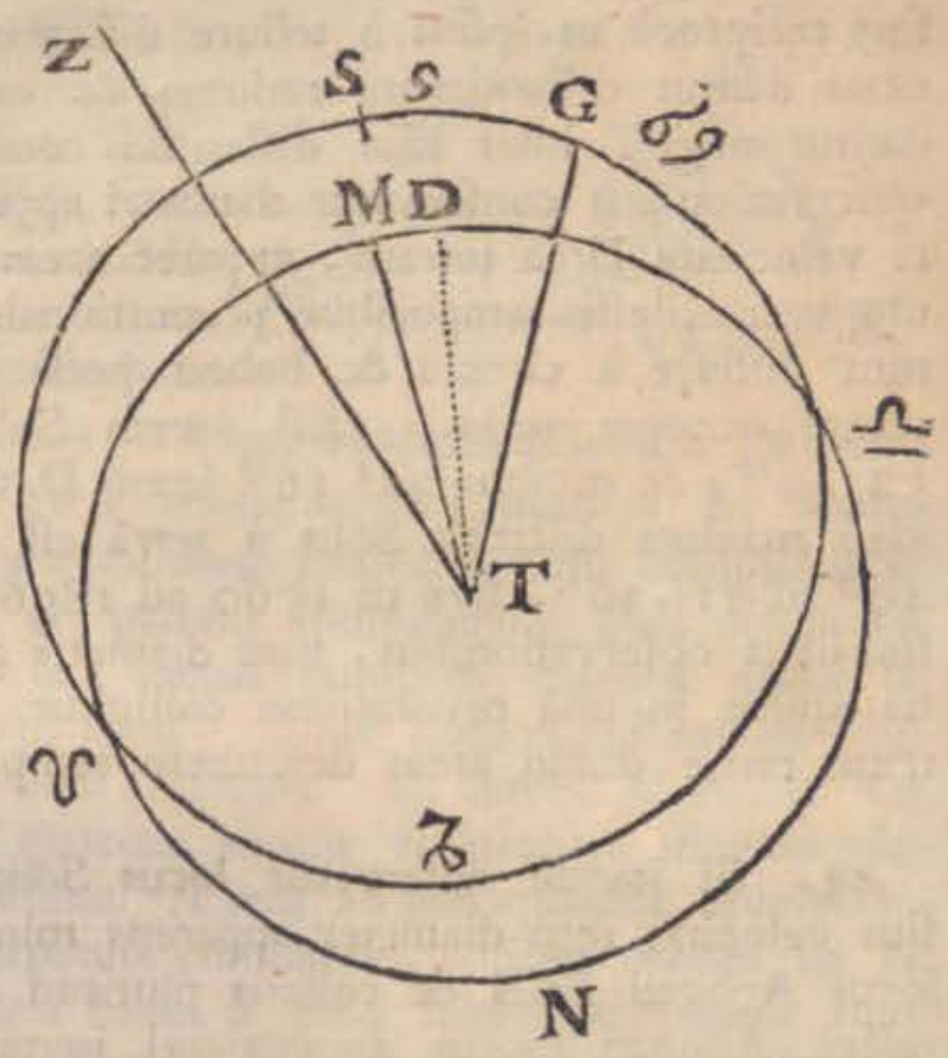
42. Si ſæpius obſervetur tum motus Solis in Ecliptică (15) tum ipſius diameter apparens (39) quam fieri poteſt accuratiſſimè, circà datum punctum in plano deſcribi poterit curva ſimilis orbitæ quam Sol circà terram percurrere videtur. Nam cum diametri Solis apparentes

ſint

ſint reciprocè ut ipſius à tellure diſtantiæ, ex datis diametris apparentibus dantur diſtantiarum rationes & ex dato Solis motu in Ecliptică, dantur anguli inter illas diſtantias contenti. Si verò ex hujuſmodi obſervationibus conferantur diametri apparentes Solis cum ipſius angulari velocitate circà terram, apparet areas quas Sol radio ad terram ducto verrit, eſſe temporibus proportionales, Soliſque orbitam non multum differre à circulo & haberi poſſe pro ellipſi cujus umbilicum alterum occupat terra. Eſt autem Solis diameter apparens maxima $32'\ 40''$, & minima $31'\ 36''$ juxtà D. Caſſini in tabulis Aſtronomicis & ideò maxima diſtantia Solis à terrâ eſt ad diſtantiam minimam ut $32'\ 40''$ ad $31'\ 36''$, ſivè ut 1960 ad 1896 circiter, ſive 245 ad 237. Ex ſimilibus obſervationibus, tum diametri apparentis Lunæ, tum velocitatis ipſius in unâ revolutione colligitur hunc planetam radio ad centrum terræ ducto areas deſcribere temporibus circiter proportionales.

43. Si itaquè obſervetur locus Solis in Ecliptică quandò tum ipſius velocitas tum diameter apparens minima eſt, dabitur tempore dato locus Apogæi Solis & collatis plurium annorum obſervationibus innoteſcet Apogæi motus annuus qui juxtà D. Caſſini eſt $1'\ 2''$ & indè per proportionis regulam habetur motus Apogæi pro quolibet dato tempore. Hinc ſi tempore quovis obſervetur Solis longitudo vera, dabitur eodem tempore locus Apogæi Solis & ipſius anomalia vera ex quâ eruetur ejuſdem anomalia media (per ſchol. ad prop. 31. lib. 1.) ac proindè longitudo media habebitur tempore obſervationis. Hæc longitudo media aſſumatur tanquam radix ſeu principium motuum mediorum Solis & tempus obſervationis tanquam epocha temporum mediorum computandorum & dato quolibet alio tempore medio inveniri poterit medius Solis motus huic tempori proportionalis, & indè habebitur ipſius longitudo media & diſtantia ejus media ab Apogæo ſeu anomalia media dabitur ex quâ deindè eruetur anomalia coæquata, ac proindè longitudo vera Solis habebitur.

44. Quia verò dies Solares ſunt inæquales (15), neceſſe eſt ut tempus apparens quod diebus ſolaribus conſtat, fluat etiam inæquabiliter. Differentia quæ eſt inter tempus apparens ſeu verum & tempus æquabile ſeu medium dicitur æquatio temporis quâ indigemus ut tempus medium convertatur in tempus apparens & viceversâ, ideóque ut invento loco Solis pro tempore medio, inveniatur etiam pro tempore vero & contrà.



45. Sit T, Cœli & Terræ centrum T Z, planum immobile circuli alicujus horarii, ♈ M ♎ N æquator, ♈ S ♋ ♎ ♑ Ecliptica, S Sol, ♈ S Solis longitudo vera, ♈ S ejuſdem longitudo media, cui æqualis capiatur arcus æquatoris ♈ M, & ♈ D ſit Solis aſcenſio recta vera. Ducantur ad puncta mobilia M & D radii æquatoris T M & T D qui ſemper moveantur cum punctis M & D, in conſequentia. Quoniam æquator per circulum horarium T Z, motu æquabili diurno nempè qui fit ab oriente in occidentem, tranſit; ſi punctum D aſcenſionis rectæ Solis etiam æquabiliter progrederetur in æquatore ab occidente in orientem, dies Solares ſeu revolutiones ſingulæ puncti D à circulo horario T Z ad eundem, eſſent æquales & tempus apparens à medio non differret. Sed cum motus aſcenſionis rectæ D, inæquabilis ſit, dies & horæ Solares ſunt quoquè inæquales. At punctum M, æquabiliter progreditur in æquatore ab occaſu ad ortum, & ideò motus illius conſtitui poteſt pro menſurâ temporis medii. Itaque longitudo Solis media ♈ S vel æqualis eſt aſcenſioni rectæ ♈ D vel eâ major eſt aut minor. In primo caſu punctum M coincidit cum puncto D, in ſecundo caſu eſt ultrà D, versùs orientem & in tertio caſu eſt citrà D, versùs occidentem. Temporis abſoluti momentum quo punctum M, coincidit cum puncto D, ſumatur tanquam principium à quo tempus apparens & tempus medium incipiunt computari & quo ſimul coincidunt; & in aliis caſibus tempus apparens à medio differet pro quantitate arcûs M D in tempus ſolare converſi (16); Nam dum punctum D, eſt ſub meridiano T Z, horâ 12ª computatur in loco cujus meridianus eſt T Z, & ubi punctum M diſtat à puncto D, arcus M D, in tempus ſolare converſus, dabit differentiam inter meridiem apparentem & meridiem medium qui contingit quandò punctum M eſt in meridiano T Z.

46. Itaquè tempus medium in apparens ſic convertitur. Quæritur longitudo Solis tum media, tum vera tempori dato reſpondens (44) indè eruitur longitudinis veræ aſcenſio recta (14), ſi hæc major eſt mediâ Solis longitudine, differentia in tempus ſolare converſa ſubtrahitur ex tempore medio ut fiat apparens, additur ſi minor eſt. At tempus apparens in medium ità mutatur. Tempus apparens tanquam medium conſideratur, & inquiritur pro dato tempore longitudo Solis tùm media, tum vera, & indè eruitur longitudinis veræ aſcenſio recta; ſi hæc mediam Solis longitudinem ſuperat, differentia in tempus ſolare converſa additur tempori apparenti ut fiat medium. Si verò longitudinis veræ aſcenſio recta minor eſt mediâ Solis longitudine, differentia in tempus ſolare converſa à tempore apparente ſubducitur. Quod ſi media Solis longitudo æqualis ſit aſcenſioni rectæ longitudinis veræ, tempus apparens congruit cum medio nullâque eget æquatione. Hæc omnia ex modò dictis (46) manifeſta ſunt; ſi enim punctum D eſt orientalius puncto M, hoc citiùs ad meridianum T Z, pervenit quam illud, ac proindè hora 12ª temporis medii computatur, cum nondùm eſt meridies temporis apparentis, & contrarium contingit, ſi punctum D puncto M fuerit occidentalius. Ubi tempus apparens in medium oportet converti, tempore apparente utimur tanquam medio ad locum Solis inveniendum; cum enim tempus apparens non multum differat à tempore medio, differentia inter aſcenſionem rectam & longitudinem mediam Solis eſt quam proximè eadem, ſivè per tempus medium, ſivè per tempus apparens inquiratur.

47. Jam verò ſi tempore quovis apparente obſervetur Solis aſcenſio & longitudo vera, indèque eruatur ipſius longitudo media (44) ac tempus apparens convertatur in tempus medium (47) habebimus locum Solis medium pro dato temporis medii momento, & hic locus erit radix motuum Solis, momentum verò temporis medii datum epocha temporum computandorum; quibus ſemel conſtitutis ad quodlibet aliud datum tempus medium vel apparens inveniri poterit locus Solis verus vel medius in Eclipticâ & contrà. Expoſuimus jam (44) quomodò locus Solis dato tempore medio inquiratur. Si datum ſit tempus apparens, hoc tanquam tempus medium uſurpetur & quæratur locus Solis verus huic correſpondens (44); Deindè longitudini Solis ſic inventæ tantum longitudinis addatur vel dematur quantum temporis æquationi debetur & ità prodibit locus Solis tempori apparenti reſpondens. Facile eſt ex dictis problema inverſum ſolvere, ſeu ex dato loco Solis medio aut vero tempus medium aut apparens huic Solis loco reſpondens invenire.

48. Nec opus eſt ut moneamus eaſdem eſſe motuum cæleſtium apparentias, ſive cœlum omne cum ſtellis circà tellurem motu diurno revolvatur ab oriente in occidentem, ſive terra circà proprium axem eodem tempore ab occidente in orientem converti ſupponatur immoto cœlo; ſive etiam terra immota maneat & Sol proprio motu ab occaſu ad ortum feratur, ſeu circa Solem immotum terra motu annuo circumvolvatur in Ecliptică. Nam in utrâque ſuppoſitione diametri apparentes & velocitates relativæ ſunt eædem.

DE MUNDI SYSTEMATE.

LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus Principia Philoſophiæ tradidi, non tamen Philoſophica ſed Mathematica tantùm, ex quibus videlicet in rebus Philoſophicis diſputari poſſit. Hæc ſunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philoſophiam maximè ſpectant. Eadem tamen, ne ſterilia videantur, illuſtravi ſcholiis quibuſdam philoſophicis, ea tractans quæ generalia ſunt, & in quibus Philoſophia maximè fundari videtur, uti corporum denſitatem & reſiſtentiam, ſpatia corporibus vacua, motumque lucis & ſonorum. Superest ut ex iiſdem principiis doceamus conſtitutionem ſyſtematis mundani. De hoc argumento compoſueram librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus principia poſita ſatis intellecta non fuerint, ii vim conſequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent, quibus à multis retro annis inſueverunt: & propterea ne res in diſputationes trahatur, ſummam libri illius tranſtuli in propoſitiones, more mathematico, ut ab iis ſolis legantur qui principia prius evolverint. Verumtamen quoniam propoſitiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematicè doctis moram nimiam injicere poſſint, auctor eſſe nolo ut quiſquam eas omnes evolvat; ſufficerit ſiquis definitiones, leges motuum & ſectiones tres priores libri primi ſedulo legat, dein tranſeat ad hunc librum de mundi ſyſtemate, & reliquas librorum priorum propoſitiones hic citatas pro lubitu conſulat.

DE MUNDI SYSTEMATE

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I. (a).

Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ sint & earum phænomenis explicandis sufficiant.

DIcunt utique philosophi: Natura nihil agit frustra, & frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideóque effectuum naturalium ejusdem generis eædem assignandæ sunt causæ, quâtenus fieri potest.

Uti respirationis in homine & in bestiâ; descensus lapidum in *Europâ* & in *Americâ*; lucis in igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in terrâ & in planetis.

RE-

(a) 49. * *Regula prima.* Hæc regula duas habet partes; prima est, ne Philosophia in vana abeat opinionum commenta, causæ rerum naturalium non aliæ admitti debent quam quæ reverâ existunt & quæ phenomenis explicandis sufficiunt; unde si velimus cum evidentiâ ac certitudine philosophari, omnes hypotheses negligendæ nobis sunt; hypothesis enim si legitima est, causæ quidem possibilitatem, minimè verò existentiam adstruit, cum effectus idem pluribus modis produci possit. Verumtamen ubi certitudinis obtinendæ ab Experimentis & indè Mathematicâ via procedendo spes non affulget hypothesibus quibusdam particularibus uti licet ad veritatem novis experimentis indagandam, quemadmodum Astronomi varias adhibuerunt hypotheses ut phænomena cælestia prædicere & accuratius observare, atquè ità veras eorum causas conjectando investigare possent. Altera pars regulæ ea scilicet quæ præscribit non plures admittendas esse rerum naturalium causas quam quæ eorum phænomenis explicandis sufficiunt, manifesta est; nam cum vera effectûs causa per experientiam semel inventa est, & matheseos ope præsertim demonstratum est causæ illius eam esse vim quæ ad effectum producendum sufficiat, liquet aliam quamlibet causam esse inutilem.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta inſtituere licet, pro qualitatibus corporum univerſorum habendæ ſunt.

Nam qualitates corporum non niſi per experimenta innoteſcunt, ideoque generales ſtatuendæ ſunt quotquot cum experimentis generaliter quadrant; & quæ minui non poſſunt, non poſſunt auferri. Certè contra experimentorum tenorem ſomnia temerè confingenda non ſunt, nec à naturæ analogiâ recedendum eſt, cum ea ſimplex eſſe ſoleat & ſibi ſemper conſona. Extenſio corporum non niſi per ſenſus innoteſcit, nec in omnibus ſentitur: ſed quia ſenſibilibus omnibus competit, de univerſis affirmatur. Corpora plura dura eſſe experimur. Oritur autem durities totius à duritie partium, & inde non horum tantùm corporum quæ ſentiuntur, ſed aliorum etiam omnium particulas indiviſas eſſe duras meritò concludimus. Corpora omnia impenetrabilia eſſe non ratione ſed ſenſu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem eſſe proprietatem corporum univerſorum. Corpora omnia mobilia eſſe, & viribus quibuſdam (quas vires inertiæ vocamus) perſeverare in motu vel quiete, ex hiſce corporum viſorum proprietatibus colligimus. Extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius oritur ab extenſione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras eſſe & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiæ præditas. Et hoc eſt fundamentum philoſophiæ totius. Porro corporum partes diviſas & ſibi mutuò contiguas ab invicem ſeparari poſſe, ex phænomenis novimus, & partes indiviſas in partes minores ratione diſtingui poſſe (b) ex mathematicâ certum eſt. Utrum verò partes illæ diſtinctæ

(b) 50. * *Ex mathematicâ certum eſt.* Demonſtrationes paſſim reperiuntur apud eos autores qui de materiæ diviſibilitate tractant, ut ex incommenſurabilitate lateris quadrati & ejus Diagonalis &c.

DE MUNDI SYSTEMATE.

tinctæ & nondum diviſæ per vires naturæ dividi & ab invicem ſeparari poſſint, incertum eſt. At ſi vel unico conſtaret experimento quod particula aliqua indiviſa, frangendo corpus durum & ſolidum, diviſionem pateretur: (c) concluderemus vi hujus regulæ, quod non ſolum partes diviſæ ſeparabiles eſſent, ſed etiam quod indiviſæ in infinitum dividi poſſent.

Denique ſi corpora omnia in circuitu terræ gravia eſſe in terram, idque pro quantitate materiæ in ſingulis, & lunam gravem eſſe in terram pro quantitate materiæ ſuæ, & viciſſim mare noſtrum grave eſſe in lunam, & planetas omnes graves eſſe in ſe mutuo, & cometarum ſimilem eſſe gravitatem in Solem, per experimenta & obſervationes aſtronomicas univerſaliter conſtet: dicendum erit per hanc regulam quod corpora omnia in ſe mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex phænomenis de gravitate univerſali, quam de corporum impenetrabilitate: de quâ utique in corporibus cœleſtibus nullum experimentum, nullam prorſus obſervationem habemus. Attamen gravitatem corporibus eſſentialem eſſe minimè affirmo. Per vim inſitam intelligo ſolam vim inertiæ. Hæc immutabilis eſt. (d) Gravitas recedendo à terrâ, diminuitur.

R E-

(c) * *Concluderemus vi hujus regulæ*, ſeu ex analogiâ naturæ quæ ſimplex eſſe ſolet & ſibi ſemper conſona. * Hinc patet differentia Newtonianiſmi & hypotheſeos Atomorum; Atomiſtæ neceſſariò & Metaphyſicè atomos eſſe indiviſibiles volunt, ut ſint corporum Unitates; Metaphyſicam hanc quæſtionem miſſam facit Newtonus, & huc redit ejus ſententia, ſi illæ partes quas Deus condidit indiviſas, quæque ideo ſunt corporum Phyſica Elementa ſeu Phyſicæ Monades, frangendo dividerentur, tunc exinde edocti, ſtatueremus eas poſſe dividi, ideoque ulterius ulteriuſque ſine fine diviſibiles eſſe diceremus, omnem hâc de re Theoriam Metaphyſicam experimentis facile poſtponentes. Hæc etiam fluunt ex Lockii, de ratione quâ agnoſcimus qualitates eſſentiales, Doctrinâ; Ignoramus planè, inquit ille, quænam qualitates cum ſubjecti natura ſint conjunctæ ſi rem Metaphyſicè ſpectemus; ſed fit ut experientiâ Magiſtrâ, has aliaſve qualitates ad univerſa ſubjecta quæ ad eamdem Claſſem referimus pertinere deprehendamus, aut ſaltem ad omnia in quæ experimenta inſtituere licuit & eas eſſentiales dicere lubuit. Hinc infert Newtonus, eadem iſtâ regulâ quâ utimur vulgo ad agnoſcendas eas qualitates, eâdem etiam regulâ in rebus Philoſophicis uti debemus ubi experientiâ quidem, ſed minus obviâ ac vulgari, ſimilem Inductionem inſtituere dabitur. Adjungit quidem præter eam Inductionem, caracterem hunc Metaphyſicum, ut illæ qualitates intendi ac remitti nequeant, etenim qualitates quæ remitterentur, gradatim eâdem ratione quâ remittuntur, aboleri poſſent, ſicque Univerſorum corporum qualitates non amplius forent.

(d) * *Gravitas recedendo a terrâ diminuitur*, ut infrà demonſtrabitur.

REGULA IV.

In Philosophiâ experimentali, propositiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obstantibus contrariis hypothesibus, pro veris aut accuratè aut quamproximè haberi debent, donec alia occurrerint phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiæ.

(e) Hoc fieri debet ne argumentum inductionis tollatur per hypotheses.

(e) * *Hoc fieri debet.* Hanc regulam in quæstionibus opticis hoc ferè modo exponit Newtonus. In Physicis non secus ac in Mathematicis Scientiis, ad res difficiles inquirendas methodus analytica priùs est usurpanda quam synthetica methodus in auxilium vocetur. Hæc prima methodus in eo posita est ut adhibeantur experimenta atquè observationes ex quibus deindè per inductionem conclusiones generales deducantur, non obstantibus contrariis hypothesibus, nisi eas aliquo experimento aut certâ aliquâ veritate nixas esse contigerit. Nam quod hypotheses spectat, ex in Philosophiâ experimentali locum habere non debent. Quamvis ratiocinia ab experimentis & observationibus per inductionem deducta ad stabilien- 5*.
das modo demonstrativo conclusiones generales satis non sint, hic tamen ratiocinandi modus est omnium quos rerum naturâ admittere possit optimus, isque eò tutior reputari debet quo generalior est inductio; Si autem nulla repugnaverint phænomena, generalem conclusionem deducere licebit. Sin verò deinceps contraria occurrant phænomena, exceptionibus necessariis limitanda erit atquè restringenda conclusio. Hujus analyseos auxilio à compositis ad simplicia, à motibus ad vires producentes, & generatim ab effectibus ad eorum causas perveniri potest. Quod ad synthesim pertinet, hæc causas cognitas atquè probatas tanquam principia assumit quorum ope phænomena inde nota explicantur.

DE MUNDI SYSTEMATE.

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

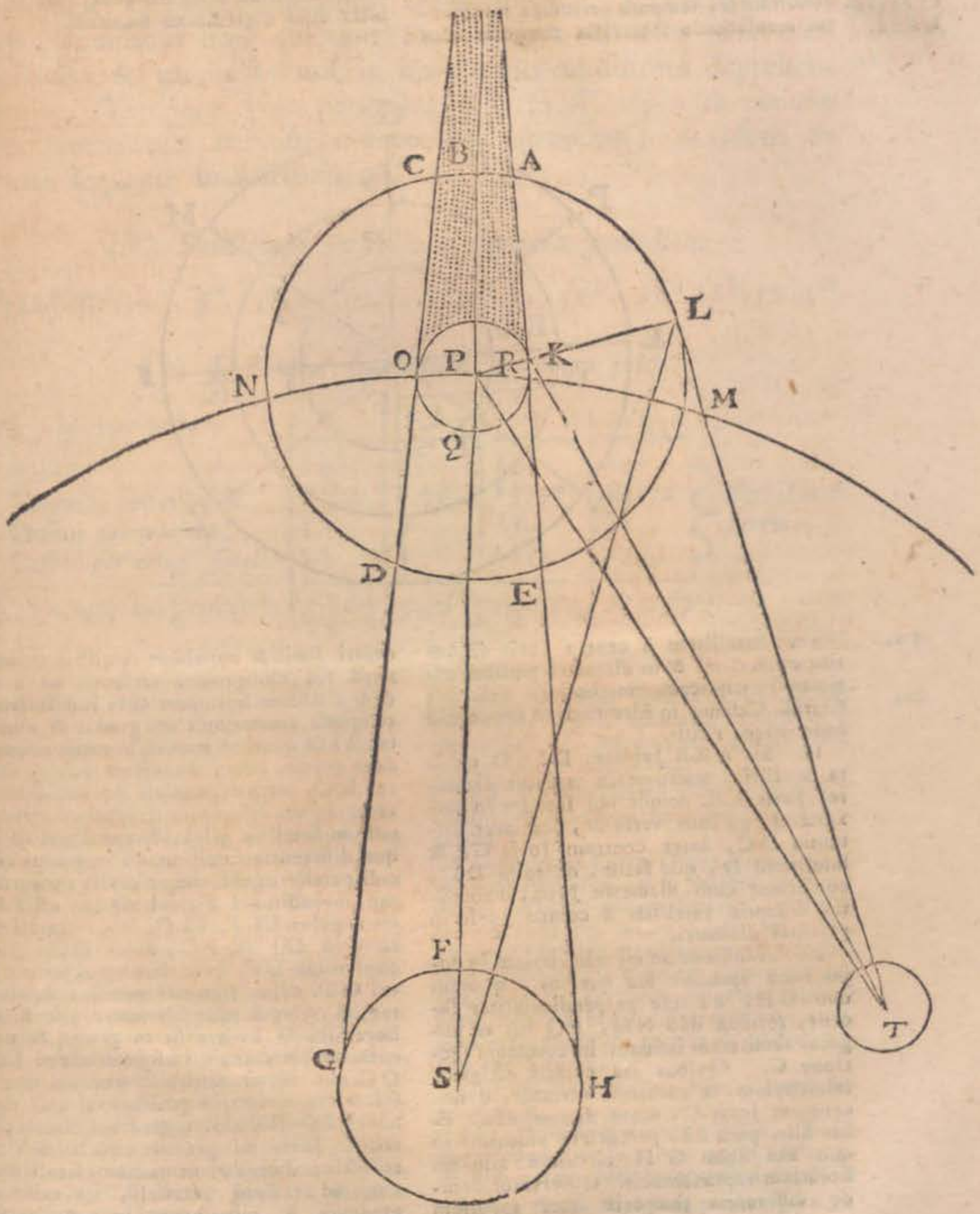
(f) *Planetas circumjoviales, radiis ad centrum jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum ab ipsius centro.*

(f) 51. * *Planetæ circumjoviales.* Lemma ..... Satellitum Jovis & Saturni orbes ac motus determinare.

Sit HFGH Sol, cujus centrum S, T Terra; KOQ Jupiter vel Saturnus circà Solem S describens orbitam MPN, ACDEL orbita satellitis; radii Solis extremi GO, HR paulo plusquam dimidium planetæ P illustrant, & producti umbram conicam RACO terminant, cujus axis est recta SPB per Solis & Planetæ centra transiens. Dum satelles in orbitâ suâ LCDE girans, conum umbrosum attingit in A, in umbram immergitur & cessat videri; deindè ex umbrâ emergens in C rursus apparet. Attamen satellitum Saturni, ob nimiam illorum à Sole & Tellure distantiam, eclipses observari huc usquè non potuerunt, sed omnium satellitum Jovis eclipses è terrâ conspici possunt, cum hoc tamen discrimine quod immersiones & emersiones quarti & tertii & nonnunquam secundi in eâdem eclipsi cernantur, primi verò immersio tantum vel emersio observari possit. Sit jam satelles in L, & ductis è terrâ T rectis TP, TL, angulus PTL, dicitur elongatio seu digressio geocentrica satellitis L à Planetâ primario P. Ducatur etiam recta TK discum primarii Planetæ tangens in K, & angulus PTK erit semidiameter primarii è tellure visâ seu apparens, ideóque elongatio geocentrica erit ad semidiametrum apparentem ut angulus PTL ad angulum PTK. Observatis pluribus hujusmodi elongationibus geocentricis & semidiametris apparentibus, iisque inter se collatis, inveniuntur elongationes maximæ ubi ratio anguli PTL ad angulum PTK maxima est, & hoc modo observatum est elongationes maximas geocentricas ejusdem satellitis in variis orbitæ suæ locis æquales esse inter se quam proximè, ideóque satellites describunt circulos Planetæ primario concentricos. Quia ergò, ubi elongatio maxima est, PK est quamproximè ad PL, ut angulus PTK ad angulum PTL, ob datam rationem horum angulorum & datam quoquè semidiametrum PK, datur & PL, seu distantia satellitis à centro primarii. Angulus PSL sub quo è centro Solis S videretur distantia satellitis à centro primarii P, dicitur ejus elongatio heliocentrica quæ maxima est, cum angulus SPL rectus est. Quia verò PL data est, elongationes maximæ heliocentrica & geocentrica æquales sunt, ubi planeta P à Sole & terrâ æquè distat.

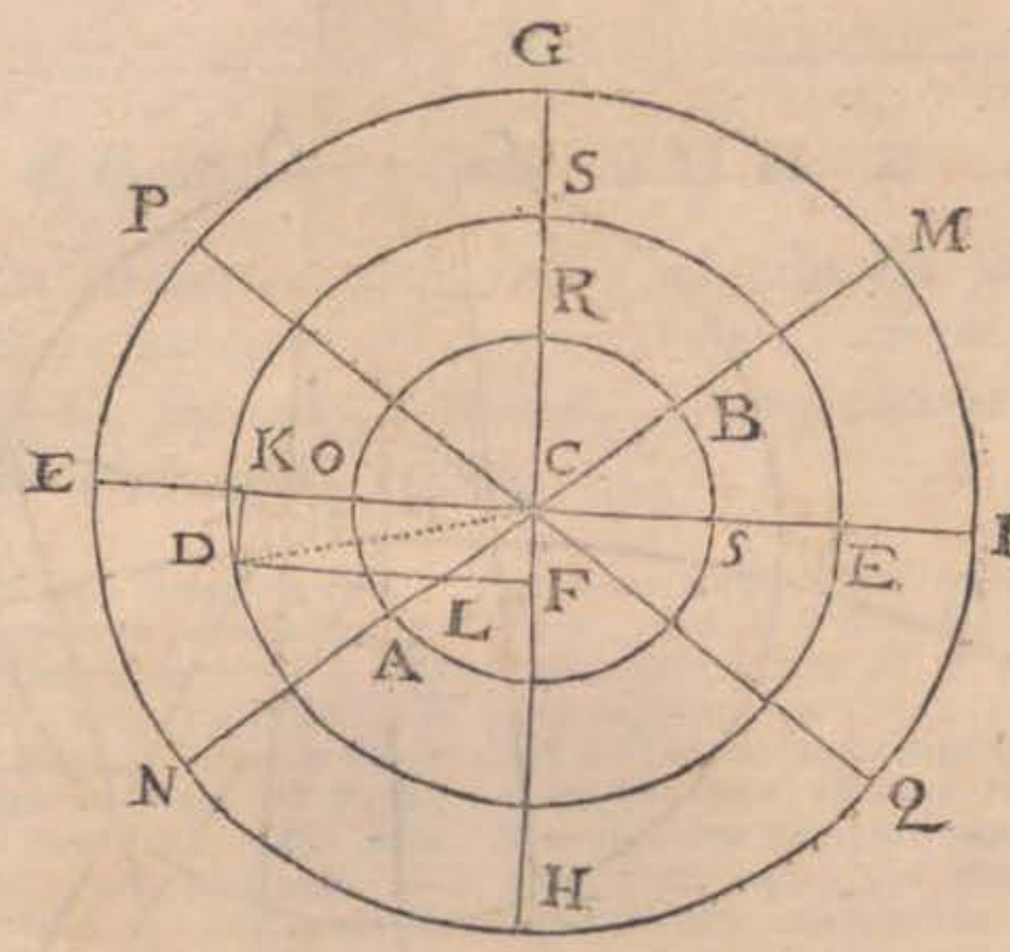
Cognitis orbitarum diametris, tempora periodica satellitum inveniri possunt per eorum eclipses maximæ durationis, atquè etiam per transitum satellitis aut umbræ illius per medium discum Planetæ primarii. Nam cum radius circuli sit æqualis arcui grad. 57.29578, (lib. 1. not. 372.) & data sit ratio radii PL ad diametrum Planetæ primarii OR, erit quamproximè ut PL ad OR, ità gradus 57.29578 ad numerum graduum arcûs exigui CA, qui ferè æqualis est diametro OR, ob parallelas OC, RA. Fiat deindè ut numerus graduum aut partium gradûs CA vel OR ad gradus 360, ità tempus quo describitur CA vel OR ad tempus periodicum satellitis, quod ità dabitur. Suppositâ

Theo-


C
B
A
L
O
P
R
K
N
M
Q
D
E
F
G
S
H
T

DE MUNDI SYSTEMATE.

Theoriâ primarii Planetæ per obſervationes determinatâ, tempora periodica inveniuntur menſurando intervalla temporis inter duas ſatellitum conjunctiones, vel etiam inter duas digreſſiones maximas.



52. Satellitum à centro Jovis diſtantias obſervandi & in diametri partibus æſtimandi triplicem methodum deſcribit Clariſſ. Caſſinus in Elementis Aſtronomiæ anno 1740. editis.

1°. Sit A R B Jupiter, D S E D orbita ſatellitis, micrometro capiatur diameter Jovis A B, deindè ubi ſatelles in maximâ elongatione verſatur, capiatur diſtantia D C, inter centrum Jovis C, & ſatellitem D, quo facto, diſtantia D C, conferatur cum diametro Jovis, habebitur diſtantia ſatellitis à centro Jovis in partibus diametri.

2°. Adhibendum eſt teleſcopium in cujus foco aptantur fila quatuor, quorum duo G H, E I ſeſe perpendiculariter ſecent, reliqua duo N M, P Q his ad angulos ſemirectos inſiſtant in communi ſectione C. Quibus ità paratis dirigatur teleſcopium & continuò vertatur, donec centrum Jovis C, motu diurno unum ex his filis, putà E I, percurrere videatur, in quo ſitu filum G H circulum aliquem horarium repræſentabit. Obſervetur deindè differentia temporis inter appulſum centri Jovis & appulſum ſatellitis in maximâ ſuâ elongatione verſantis ad eundem circulum horarium G H, differentia temporis convertatur in gradus & minuta, ità ut quatuor minutis horariis reſpondeat gradus unus, habebitur portio D F vel K C, circuli paralleli Jovis. Obſervetur etiam differentia temporis inter appulſum ſatellitis ad L, & appulſum ad F, quæ differentia ſimili modo in gradus circuli paralleli graduumque partes convertatur, habebitur L F, cui æqualis eſt F C, ob angulos L C F, F L C, ſemirectos. Datis verò D F & F C, datur D C. Jam conferatur D C, cum diametro Jovis A B vel O S, cujus diametri menſura habebitur, ſi tempus quo diameter per filum horarium G H, tranſit in gradus & minuta convertatur, utriuſque diametri D C, O C obtinebitur ratio, & eorumdem abſoluta magnitudo in gradibus circuli maximi ſphæræ habebitur, gradibus circuli paralleli Jovis ad gradus circuli maximi reductis, dicendo, ut radius circuli maximi ad radium paralleli, ità numerus graduum & minutorum in arcu circuli paral-

52.

Conſtat ex obſervationibus aſtronomicis. (g) Orbes horum planetarum non differunt ſenſibiliter à circulis jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica eſſe in ſeſquiplicatâ ratione ſemidiametrorum orbium conſentiunt aſtronomi; & idem ex tabulâ ſequente manifeſtum eſt.

(h) *Satellitum jovialium tempora periodica.*

$1^{d}.18^{h}.27'.34''$ $3^{d}.13^{h}.13'.42''$. $7^{d}.3^{h}.42'.36''$. $16^{d}.16^{h}.32'.9''$.

(i) *Diſtantiæ ſatellitum à centro jovis.*

Ex obſervationibus.	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis
Townlei *per microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Caſſini *per teleſcop.*	5	8	13	23	
Caſſini *per eclipſ. ſatell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{1}{10}$	
(k) *Ex temporibus periodicis.*	5,667	9,017	14,384	25,299	

Elon-

paralleli ad numerum graduum & minutorum in arcu circuli maximi. Nam in circulis inæqualibus, gradus qui æqualibus arcubus continentur eſſe reciproce ut circulorum radios ex elementis patet.

3°. In Eclipſibus Satellitum centralibus, dum nempe duratio eſt omnium maxima, obſervetur tempus quod ab ingreſſu centri ſatellitis in diſcum Jovis uſquè ad illius egreſſum interfluxit. Deindè fiat, ut tempus periodicum ſatellitis ad tempus moræ in diſco Jovis, ità 360° ad quartum proportionalem, hoc eſt, ad gradus quos continet arcus æqualis diſco Jovis ſatellitis orbitæ applicato. Iterum (ex trigon.) inferatur, ut ſinus ſemiſſis ejuſdem arcûs ad ſinum totum, ità ſemidiameter Jovis ad ſemidiametrum orbitæ ſatellitis, ideóque comparari poterit ſemidiameter Jovis cum ſemidiametro orbitæ ſatellitis, hoc eſt, cum diſtantiâ ſatellitis à centro ac proindè habebitur diſtantia ſatellitis à centro Jovis in partibus ſemidiametri Jovis.

Quod Saturnum ſpectat, ſolis oculis Teleſcopio adjutis diſtantias ſatellitum à centro Saturni cum diametro annuli comparare ſolent Aſtronomi.

(g) * *Orbes horum planetarum* (51).

(h) * *Satellitum Jovialium tempora periodica* (ibid.).

* In noviſſimo Caſſini Opere ſuprà laudato tempora Periodica paulo majora conſtituuntur, ſcilicet, primus Satelles, 62", 2ⁱᵘˢ. Sat., 4' 12"; 3ⁱᵘˢ. Sat., 17'; 4ⁱᵘˢ. Sat., 1ʰ, 32', 58", tardius revolutiones ſuas abſolvere ſtatuuntur; illæ autem differentiæ totius temporis Periodici reſpectu minimæ ſunt, maximæ enim differentiæ non excedunt trecenteſimam partem durationis totius revolutionis.

(i) * *Diſtantiæ ſatellitum à centro Jovis* (52).

(l) * *Ex temporibus periodicis.* Newtonus computum iniit hoc modo. Aſſumpſit diſtantiam obſervatam primi Satellitis $5\frac{2}{3}$, ſeu 5,667, & deindè per tempora periodi-

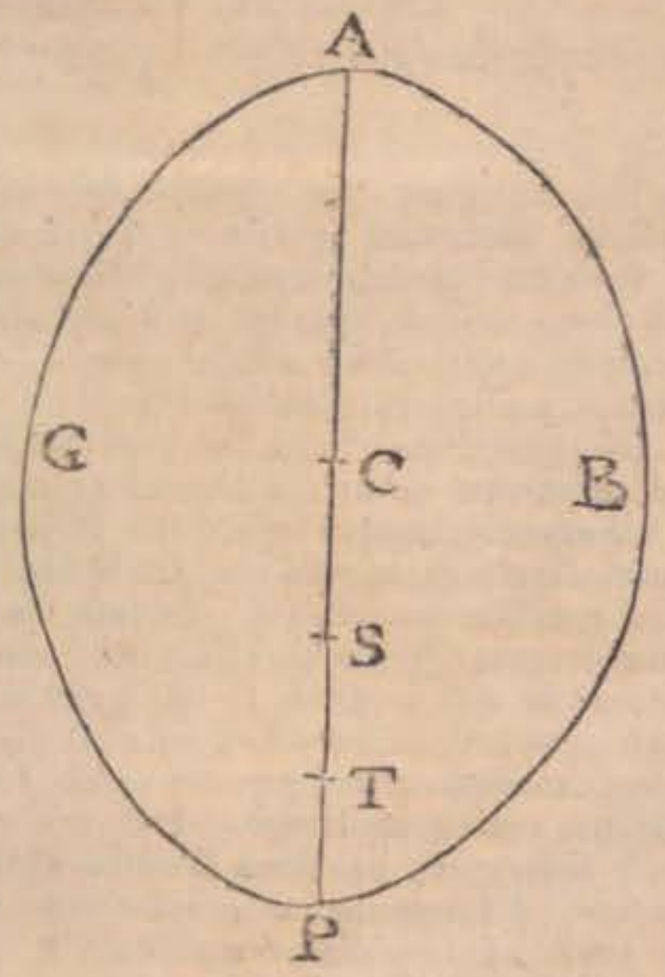
DE MUNDI SYSTEMATE.

Elongationes ſatellitum jovis & diametrum ejus D. *Pound* micrometris optimis determinavit ut ſequitur. (m) Elongatio maxima heliocentrica ſatellitis quarti à centro jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit, & prodiit in mediocri jovis à terrâ diſtantiâ $8'.\ 16''$ circiter. Ea ſatellitis tertii micrometro in teleſcopio pedes 123 longo capta fuit, & prodiit in eadem jovis à terrâ diſtantiâ $4'.\ 42''$. Elongationes maximæ reliquorum ſatellitum in eâdem jovis à terrâ diſtantiâ ex temporibus periodicis prodeunt $2'.\ 56''.\ 47'''$, & $1'.\ 51''.\ 6'''$.

Diameter jovis micrometto in teleſcopio pedes 123 longo ſæpius capta fuit, & (n) ad mediocrem jovis à ſole vel terrâ

52. riodica etiam obſervata quæſivit aliorum Satellitum diſtantias, ſupponendo quadrata temporum periodicorum cubis diſtantiarum proportionalia. Nam ſi Logarithmi temporum periodicorum primi & ſecundi Satellitis dicantur l, L, & Logarithmi diſtantiarum d, D, erit $2l$ ad $2L$, arithmeticè ut $3d$ ad $3D$, ideóque $2l + 3D = 2L + 3d$, undè invenitur $D = d + \frac{2L}{3} - \frac{2}{3}l$. Eſt autem $d = 0{,}7533532$, $\frac{2}{3}L = 2{,}324591$, & $\frac{2}{3}l = 2{,}1228512$, quarè habetur $D = 0{,}955093$, cui reſpondet numerus 9,07, uti Newtonus invenit; & ità inveniuntur cæterorum Satellitum diſtantiæ per eorum tempora periodica.

(m) 53. * *Elongatio maxima heliocentrica* ſatellitis in mediocri Jovis à Sole diſtantiâ æqualis eſt ipſius elongationi maximæ geocentricæ in mediocri diſtantiâ ejuſdem Jovis à Terrâ. Sit enim A B P G orbita Jovis, Sol in S, A aphelium Jovis; P perihelium, T Terra, erit A S maxima diſtantia Jovis à Sole, S P minima; A T verò maxima diſtantia Jovis à Terrâ, P T minima, & ideò mediocris diſtantia Jovis à Sole ſeu $\frac{1}{2}$ A P $= \frac{1}{2}$ A S $+ \frac{1}{2}$ S P, & mediocris diſtantia Jovis à Terrâ erit $\frac{1}{2}$ A T $+ \frac{1}{2}$ T P $= \frac{1}{2}$ A P. Quarè duæ illæ mediocres diſtantiæ ſunt æquales, ideóque elongationes maximæ heliocentricæ & geocentricæ in mediocribus illis diſtantiis ſunt etiam æquales.



(n) 54. * *Et ad mediocrem Jovis à Sole.* Datur poſitio lineæ ducta ab oculo ſpectatoris ad Jovem tempore obſervationis,

râ distantiam reducta, semper minor prodiit quam $40''$, nunquam minor quam $38''$, sæpius $39''$. In telescopiis brevioribus hæc diameter est $40''$ vel $41''$. (o) Nam lux jovis per inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, & hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum jovis in longioribus & perfectioribus telescopiis quam in brevioribus & minus perfectis. Tempora

nis, & per theoriam Solis, datur etiam positio lineæ ductæ ab oculo ad Solem (47) eodem tempore; undè datur angulus his duabus lineis interceptus, seu elongatio Jovis à Sole. Insuper datur, per theoriam Jovis, locus ejus in propriâ orbitâ, & ideò notus est angulus quem comprehendunt duæ lineæ à centro Solis ductæ ad Jovem & ad Terram seu oculum observatoris. In triangulo igitur ex tribus illis lineis facto cujus angulus unus est in oculo spectatoris seu in Terrâ, alter in Sole & tertius in Jove, dantur anguli omnes & exindè datur ratio laterum seu ratio distantiæ Jovis à Sole ad distantiam Jovis à Terrâ tempore observationis. Datur verò, per theoriam Jovis ex observationibus constitutam, ratio distantiæ Jovis à Sole tempore observationis ad ipsius distantiam mediocrem à Sole vel à Terrâ. Quare datur ratio distantiæ Jovis à Terrâ tempore observationis ad distantiam ejus mediocrem à Sole vel à Terrâ. Sed diametri apparentes Jovis è Terrâ visi sunt inter se inversè ut distantiæ Jovis à Terrâ, dabitur itaque ratio diametri apparentis tempore observationis ad diametrum apparentem in mediocri distantiâ Jovis à Terrâ vel Sole.

(o) 55. * *Nam Lux Jovis.* Newtonus prop. 7. lib. 1. optices experimentis & calculo invenit quod, si ex puncto lucido in axem telescopii posito ad ingentem distantiam, radii in vitrum objectivum incidant axi paralleli, distincta & minima hujus puncti imago in vitri foco depicta, est circulus, non verò punctum ut esse deberet, obstante nimirum non tantum vitri sphæricitate, sed præcipuè radiorum inæquali refrangibilitate quâ Lux ea dilatatur. Nam in vitro plano convexo cujus convexitas puncto lucido obvertitur, cujusque sphæricitas diametrum habet 100 ped. seu 1200 digit. apertura verò 4 digit. diameter circelli qui ex vitri sphæricitate oritur erit ad diametrum ejusdem circelli maxime distincti qui ex inæquali refrangibilitate provenit ut $\frac{961}{72000000}$ ad $\frac{4}{250}$, seu ut 1 ad 1200; distincta siquidem ejus puncti lucidi imago & maxime splendida continet partem 250^{am}. aperturæ vitri objectivi optimè elaborati, neglectâ luce debili & subobscurâ quæ imaginem illam circumdat. Undè in Telescopio cujus apertura est 4 digit. & longitudo 100 ped. hujus imaginis diameter trans vitrum oculare visa occupat $2''\ 45'''$ vel $3''$, & in Telescopio cujus apertura est duorum digitorum & longitudo 20 aut 30 ped. occupabit imago $5''$ vel $6''$. Itaque in Telescopio optimo Hugeniano 123 ped. error erit circiter $2''$ in minoribus major. 55

* In Telescopiis autem rectè constitutis sive secundum Theoriam Prop. 56. Dioptrices Hughenii, id curatur ut aberratio lucis circa imaginem puncti lucidi æquale occupet spatium super retinâ, sed imago ipsius objecti in Telescopiis majoribus majus occupat spatium in retina idque secundum rationem Radicum quadratarum longitudinis Telescopiorum, Ergo lux erratica quæ dilatat objecti imaginem ab utraque ejus extremitate, minorem habet rationem ad illius objecti apparentiam in majoribus Telescopiis quam in minoribus, in ratione nempe inversâ Radicum quadratarum longitudinis Telescopiorum.

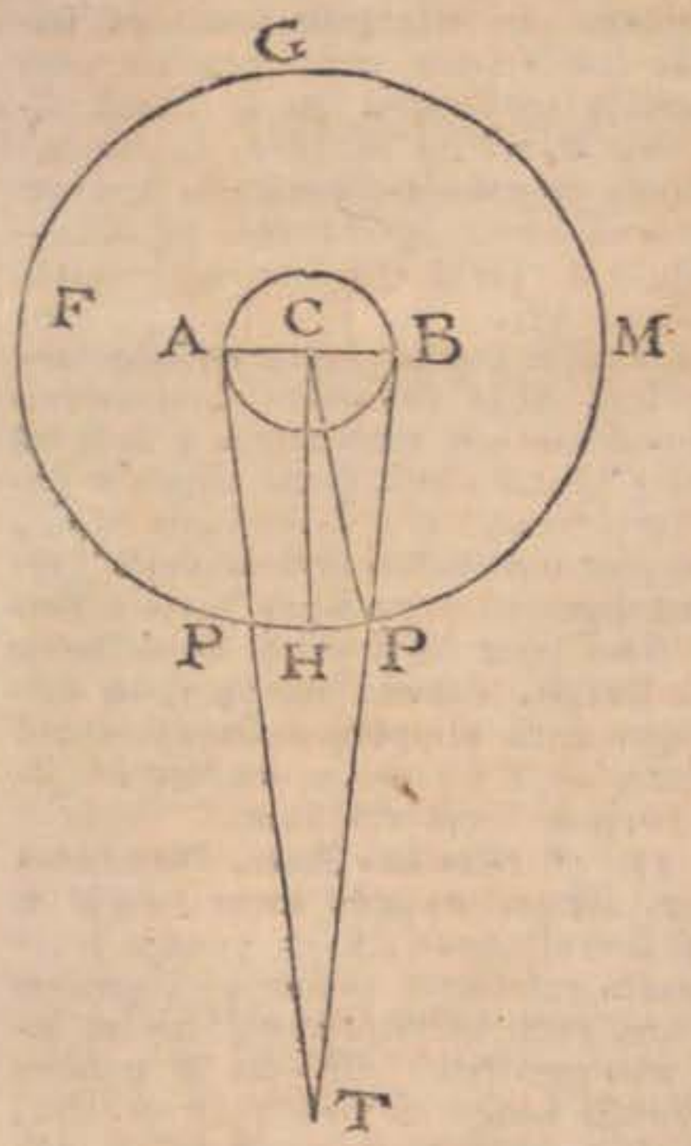
Hæc omnia ex Doctrina Newtoniarâ circa colores ita jam sunt cognita ut ea fusius & accuratius demonstrare necessarium non judicemus. 56

DE MUNDI SYSTEMATE.

pora quibus ſatellites duo, primus ac tertius, tranſibant per corpus jovis, ab initio ingreſſus ad initium exitus, & ab ingreſſu completo ad exitum completum, obſervata ſunt ope teleſcopii ejuſdem longioris. Et (P) diameter jovis in mediocri ejus à terrâ diſtantiâ prodiit per tranſitum primi ſatellitis $37\frac{1}{8}''$, & per tranſitum tertii $37\frac{1}{8}''$. Tempus etiam quo umbra primi ſatellitis tranſiit per corpus jovis obſervatum fuit, & inde diameter jovis in mediocri ejus à terrâ diſtantiâ prodiit $37''$ circiter. Aſſumamus diametrum ejus eſſe $37\frac{1}{4}''$ quamproximè; & elongationes maximæ ſatellitis primi, ſecundi, tertii, & quarti æquales erunt ſemidiametris jovis 5,965, 9,494, 15,141, & 26,63 reſpectivè.

PHÆ-

§ 6. 56. Hugenſus planetarum lucem obſtaculo quodam intercipiens majores invenit planetarum diametros quam ab aliis micrometro definitum eſt; nam lux erratica, ubi tegitur planeta, vividioribus radiis minus extenuatur, ideóque latius propagari videtur. Contrariam ob cauſam fit quod planetæ in Sole viſi, dilatatâ luce non parum attenuentur. Mercurius in Sole Hevelio, Galletio & Halleio obſervantibus, non ſuperavit 12″ vel 15″, & Venus Crabtrio ſolum 1′ 3″, Horroxio 1′ 12″ occupare viſa eſt, quæ tamen juxtà menſuras Hevelii & Hugenii extrà diſcum Solis captas implere debuiſſet 84″ ad minimum. Sic & Lunæ diameter apparens quæ anno 1684, paucis diebus ante & poſt Eclipſim Solis menſurata fuit in obſervatorio Pariſienſi 31′ 30″, in ipſâ Eclipſi non ſuperabat 30′ vel 30′ 5″. Quare patet diametros planetarum extrà Solem minuendas eſſe & intrà Solem augendas minutis aliquot ſecundis.



(p) 57. * *Et diameter Jovis in mediocri &c.* Sit T tellus, A B diameter Jovis, P F G M orbita ſatellitis, ductis è terrâ radiis T A, T B ferè parallelis, dum ſatelles deſcribit arcum P p, videbitur è terrâ deſcribere diametrum Jovis A B cui æqualis eſt arcus P p quamproximè, propter diſtantiæ T P magnitudinem. Datis autem tempore periodico & tempore quo deſcribitur P p, datur ratio P p ad totum circulum, ſeu datur arcus P p, in gradibus vel partibus gradûs, & inde datur dimidius arcus P H, hincque habetur angulus P C H ſeu A P C. Jam verò datur P C ob datas per obſervationem elongatio-

PHÆNOMENON II.

Planetas circumſaturnios, radiis ad ſaturnum ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum ab ipſius centro.

(†) *Caſſinus* utique ex obſervationibus ſuis diſtantias eorum à centro Saturni & periodica tempora hujuſmodi eſſe ſtatuit.

Satellitum ſaturniorum tempora periodica.

$1^d. 21^h. 18'. 27''.$	$2^d. 17^h. 41'. 22''.$	$4^d. 12^h. 25'. 12''.$
$15^d. 22^h. 41' 14''.$	$79^d. 7^h. 48'. 00''.$	

Diſtantiæ ſatellitum à centro Saturni in ſemidiametris annuli

Ex obſervationibus	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis.	1,93	2,47.	3,45.	8.	23,35.

Quarti ſatellitis elongatio maxima à centro Saturni ex obſervationibus colligi ſolet eſſe ſemidiametrorum octo quamproximè.

gationes maximas ſatellitum à centro Jovis in mediocri Jovis à Tellure diſtantiâ; quare ſi fiat AB ad PC ut duplus ſinus anguli dati PCH, ad ſinum totum, dabitur (ex trig.) diameter apparens Jovis ſeu angulus ATB, ſub quo videtur in mediocri ejus à Tellure diſtantiâ. Eodem modo patet determinari diametrum Jovis per tranſitum umbræ hanc diametrum percurrentis.

(†) *Caſſinus utique &c.* Hæc ex Philoſophicis Tranſactionibus n. 187. ſunt deprompta: Exigua quædam eſt horum differentia à numeris quos in Elementis Aſtronomiæ aſſignat Caſſinus filius, ille ita determinat ſatellitum Sat. Tempora Periodica, & diſtantias.

Primi	$1^d. 21^h. 18'. 27''.$	1. 933. &c.
Secundi	$2^d. 17^h. 44'. 22''.$	2. 5.
Tertii	$4^d. 12^h. 25'. 12''.$	3. 5.
Quarti	$15^d. 22^h. 34'. 38''.$	8.
Quinti	$79^d. 7^h. 47'. 0''.$	23. paulo plus.

57.

Obſervat autem primi & ſecundi ſatellitis diſtantias à Saturno æſtimatione ſolummodo potuiſſe determinari; motibus verò eorum ſatis accuratè nunc cognitis ex unius nempe quarti cognitâ diſtantiâ 8 ſemi-Diametrorum annuli per Regulam Kepleri reliquorum diſtantias poſſe exquiri, atque ita inveniri.

Diſtantia primi	1.	93.
Secundi	2.	47.
Tertii	3.	45.
Quarti (ex obſervat.)	8.	
Quinti	23.	23.

Quæ quidem, inquit, adeò congruunt cum obſervationibus immediatis ut ſine errore ſenſibili adhiberi poſſint. *Elem. Aſt. Tom. I. pag. 640. & ſeq.*

DE MUNDI SYSTEMATE.

mè. At elongatio maxima ſatellitis hujus à centro ſaturni, micrometro optimo in teleſcopio Hugeniano pedes 123 longo capta, prodiit ſemidiametrorum octo cum ſeptem decimis partibus ſemidiametri. Et ex hâc obſervatione & temporibus periodicis, diſtantiæ ſatellitum à centro ſaturni in ſemidiametris annuli ſunt 2,1. 2,69. 3,75. 8,7. & 25,35. Saturni diameter in eodem teleſcopio erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7, & diameter annuli diebus Maii 28 & 29 anni 1719. prodiit $43''$. Et (q) inde diameter annuli in mediocri ſaturni à terrâ diſtantiâ eſt $42''$, & diameter ſaturni $18''$. (r) Hæc ita ſunt in teleſcopiis longiſſimis & optimis, propterea quod magnitudines apparentes corporum cœleſtium in longioribus teleſcopiis majorem habeant proportionem ad dilatationem lucis in terminis illorum corporum quam in brevioribus. Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter ſaturni haud major quam $16''$.

PHÆ-

57. (q) * *Et indè diameter annuli.* Quia diametri apparentes ſunt in diſtantiarum ratione reciprocâ, datis diametro annuli diebus Maii 28 & 29 anno 1719, & diſtantiâ Saturni à terrâ iiſdem diebus datâ (per theoriam planetæ) dabitur quoque diameter annuli in datâ mediocri diſtantiâ Saturni à terrâ, hæc autem diameter prodiit $42''$; ſed Saturni diameter erat ad diametrum annuli ut 3. ad 7 (per obſ.) quare diameter Saturni in mediocri à terrâ diſtantiâ eſt $18''$.

(r) * *Hæc ità ſunt* (55). * Si in hoc Teleſcopio Lux erratica ſubtendat angulum duorum ſecundorum, fiet diameter annuli $40''$ & Saturni $16''$ ut revera ſint in ratione 5 ad 2. hinc autem ut id obiter notemus cum Parallaxis Solis in diſtantiâ terræ mediocri à Sole ſit $10''$ ſive diameter Telluris à Sole tunc viſa ſit $20''$, diſtantia verò mediocris terræ à Sole ſit ad mediocrem diſtantiam Saturni à Terrâ vel à Sole, quod idem eſt (n. 53.) ut 100 ad 954, hinc Diameter terræ erit ad Diametrum annuli ut 100 ad 1908, ſive ut 1 ad 19 & ad Diametrum ipſius Saturni ut 1 ad $7\frac{3}{5}$.

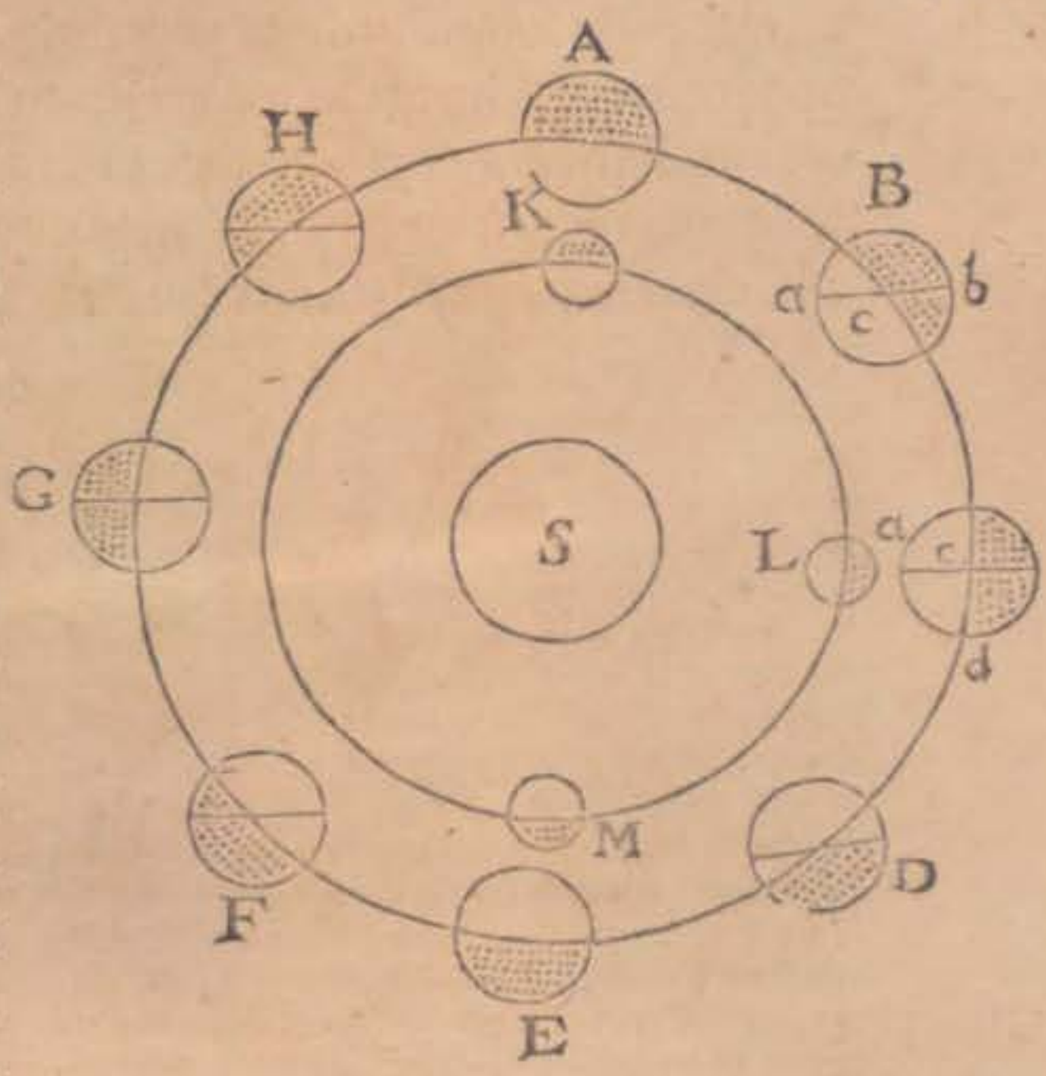
Pariter, cum Diameter Jovis in mediocri ejus à Sole diſtantiâ ſit $37\frac{1}{4}''$ ſitque mediocris diſtantia terræ ad mediocrem diſtantiam Jovis à Sole ut 10 ad 52; erit Diameter terræ, ad Diametrum Jovis ut 1 ad $\frac{52\times 37\frac{1}{4}}{100}$. Sive ut 1 ad 9. 685; ſicque Diameter Jovis eſt circiter dimidia Diametri annuli Saturni & eſt ad ipſius Saturni Diametrum ut 5 ad 4. Solis autem Diameter vera eſt circiter Decupla Diametri Jovis.

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios mercurium, venerem, martem, jovem & saturnum orbibus suis solem cingere.

Mercurium & venerem circa solem revolvi ex (f) eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plenâ facie lucentes ultra solem siti sunt; dimidiatâ è regione solis; falcatâ cis solem, per discum

57.

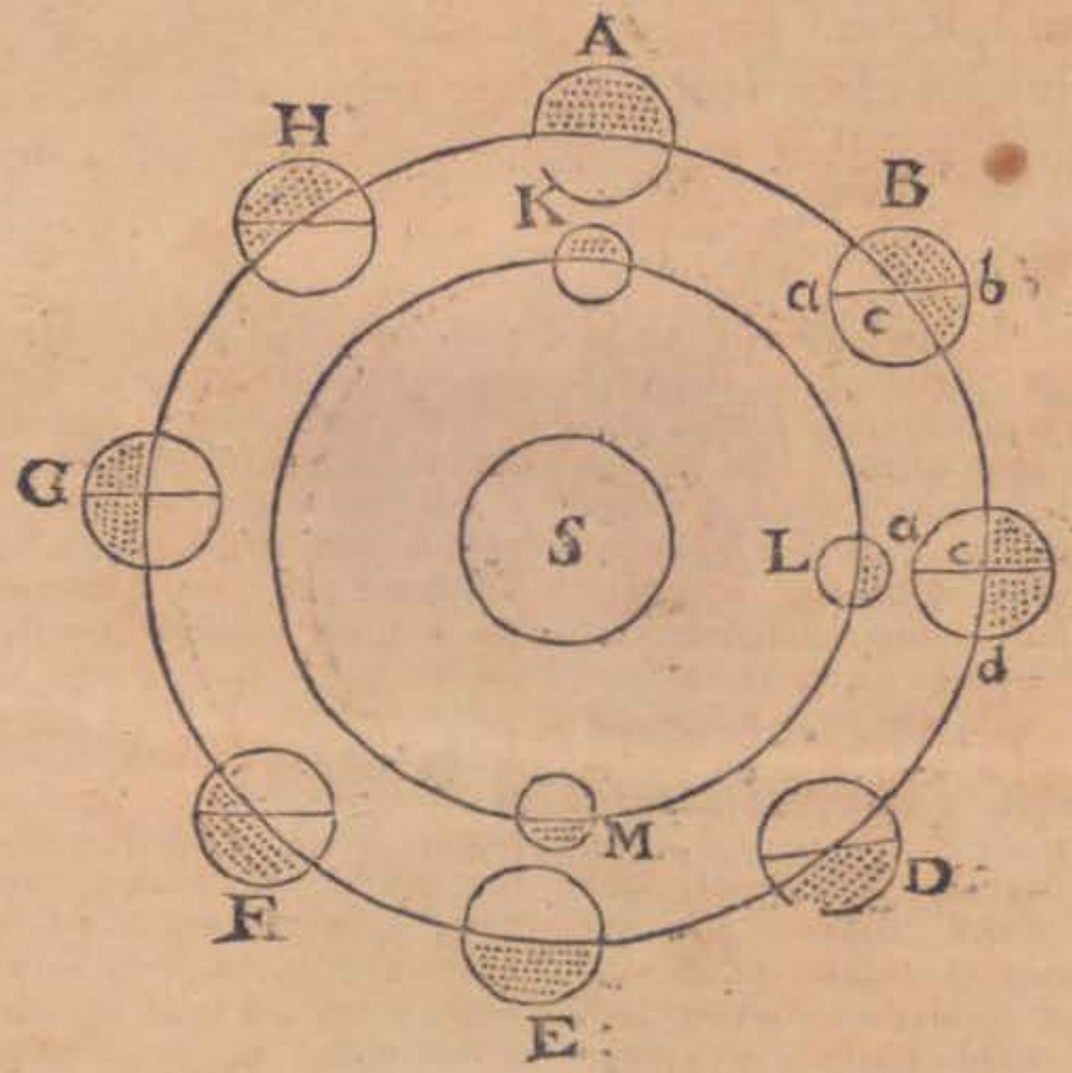


(f) * *Ex eorum phasibus Lunaribus.* Si Veneris faciem telescopio contemplemur, in unâ ejus conjunctione cum Sole plenâ facie fulgere cernitur, deinde phases habere phasibus Lunaribus simillimas partemque illuminatam Soli constanter obvertere videtur. Dum verò ad alteram conjunctionem cum Sole pervenit, tenebris obvolvitur & nonnunquam per discum Solis ad modum maculæ nigræ & rotundæ transit, nunquam verò Soli opponitur neque ab eo digreditur ultrà gradus 47. Eadem fere de Mercurio observantur quantum licet per ejus exiguitatem cum hoc tamen discrimine quod ejus elongationes maximæ à Sole 28 gradus nunquam superent. Sunt igitur Venus & Mercurius corpora opaca & rotunda quorum pars circiter dimidia Soli obversa illustratur & pars altera à Sole aversa lumine privatur. Undè cum Venus & Mercurius in unâ conjunctione in E vel M hemisphærium obscurum telluri T obvertant, hemisphærium verò illustratum Soli S, necesse est ut in illâ conjunctione inter solem & tellurem constituantur; è contrà ubi in alterâ proximè sequenti conjunctione in A vel K versantur, totam faciem illustratam & Soli obversam è tellure T, observamus, hinc necesse est ut tunc temporis Sol S, inter ipsos atquè tellurem T positus sit. Ubi verò Venus aut Mercurius à Sole digreditur, primum gibbosa apparet, tum dimidiatâ facie lucet, posteà falcata fit & denique tota obscuratur ut in locis B, C, D, E, & contrariâ ratione splendescere in locis, F, G, H, videtur. Si verò ex tellure T, ad Veneris centrum ducatur linea recta ad quam ducatur planum perpendiculare a b, per centrum Veneris transiens, ea pars tantum apparet quæ est inter planum a c, & planum c d, unde cum projectio plani C c d, sit ellipsis hinc gibbosa apparet planetæ pars visa in B, in C dimidiata & in D, falcata &c., quia à puncto A,

DE MUNDI SYSTEMATE.

discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex martis quoque plenâ facie prope solis conjunctionem, & gibbosâ in quadraturis, certum est, quod is solem ambit. De jove etiam & saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur: hos enim luce à sole mutuatâ splendere ex umbris satellitum in ipsos projectis manifestum est.

P. H Æ-



TO

57. conjunctionis superioris cum Sole, elongatio seu angulus ATB, crescit usque ad situm C è regione Solis, ubi digressio maxima est & deindè decrescit in D, atque evanescit in E, ac posteà rursùs crescit usque ad G, ac deindè decrescit & denique rursùs evanescit in A. Evidens ergò est quod Venus & Mercurius circà Solem revolvantur in orbitis quæ tellurem excludunt. Jam cum maximæ elongationes Veneris à Sole majores sint elongationibus maximis Mercurii, necesse est ut orbita Veneris orbitam Mercurii complectatur.

Mars, Jupiter & Saturnus Soli S oppositi, è tellure M in E plenâ facie lucentes conspiciuntur, ideóque tellus tunc temporis inter solem & planetas illos collocа-

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & vel solis circa terram vel terræ circa solem tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicatâ mediocrium distantiarum à sole.

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confesso est apud omnes. (t) Eadem utique sunt tempora periodica, eædemque orbium dimensiones, sive sol circa terram, sive terra circa solem revolvatur. Ac de mensurâ quidem temporum periodicorum convenit inter astro-

locatur. At verò in conjunctione ut in A, iidem planetæ pleno orbe fulgent, proindeque partem illustratam soli ac terræ obvertentes, sunt ultrà solem posiri; deindè verò digrediuntur à Sole & Mars quidem in quadrato cum Sole aspectu ut in C, aliquantulum gibbosus apparet, quod hemisphærium ipsius illustratum & soli obversum non possit totum terræ sensibiliter obverti, quia non satis magna est ejus à tellure distantia. At Jupiter & Saturnus cum longiùs à Sole & tellure distent, hemisphærium illuminatum Soli ac telluri semper obvertunt sensibiliter; nam cum (ex obs.) Mars Jovem & Jupiter Saturnum nonnunquam tegant, necesse est ut orbita Saturni orbitam Jovis & hæc orbitam Martis complectatur, tres verò orbitæ illæ terram & solem ambiant. Quia verò diametri apparentes planetarum superiorum multò minores videntur in oppositionibus quam in conjunctionibus planetarum; & distantiæ à terrâ sunt ut diametri apparentes inversè, necesse est ut orbitæ Martis, Jovis & Saturni sint telluri admodum excentricæ.

(t) 58. * *Eadem utique sunt tempora periodica.* Tempora periodica planetarum circà solem hoc modo possunt inveniri. Observentur planetarum oppositiones & conjunctiones cum Sole, tunc enim planeta è Sole videtur in loco qui oppositus est loco Solis è terrâ visi, undè dato Solis loco datur planetæ locus in cœlo. Jam verò observatis pluribus oppositionibus cum temporum intervallis inter singulas oppositiones interceptis, datur tempus quo planeta circà solem motu vero describit angulos ad solem inter oppositiones contentos & per regulam proportionis habetur tempus quo planeta 360 gradus seu revolutionem unam absolvit. Tempore periodico ità crassè determinato, habetur numerus revolutionum planetæ tempore satis longo peractarum. Si autem capiantur duæ oppositiones valdè distitæ iisque addatur arcus necessarius ut planeta ad idem orbitæ suæ punctum redeat, totumque tempus dividatur per numerum revolutionum, habebitur tempus periodicum accuratiùs, supponendo quod aphelia planetæ non aliter moveantur quam fixæ. Sufficit verò in his Newtoni Phænomenis ut hæc tempora, neglectis minutiis, definiantur. 58.

Potest etiam tempus periodicum determinari per observationes latitudinum planetæ. Nam dum latitudo nulla est, planeta versatur in plano Ecliptiæ, seu in nodo orbitæ suæ; invenitur autem tempus, ubi latitudo nulla est, observando illam antequam nulla fit & ubi decrescit, aut postquam nulla fuit & ubi crescit, atquè per regulam proportionis ex incrementis vel decrementis, determinatur tempus, quandò nulla fuit. Si itaque observetur hoc modo tempus elapsum inter appulsum planetæ ad nodum & reditum ejusdem ad eundem nodum, hoc erit tempus periodicum planetæ; constat enim planetarum nodos vix in unâ revolutione planetæ moveri.

59. Longitudo ac latitudo planetæ ob-

DE MUNDI SYSTEMATE.

aſtronomos univerſos. Magnitudines autem orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentiſſimè ex obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent, non differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in tabulâ ſequente videre licet.

Planetarum ac telluris tempora periodica circa ſolem reſpectu fixarum, in diebus & partibus decimalibus diei.

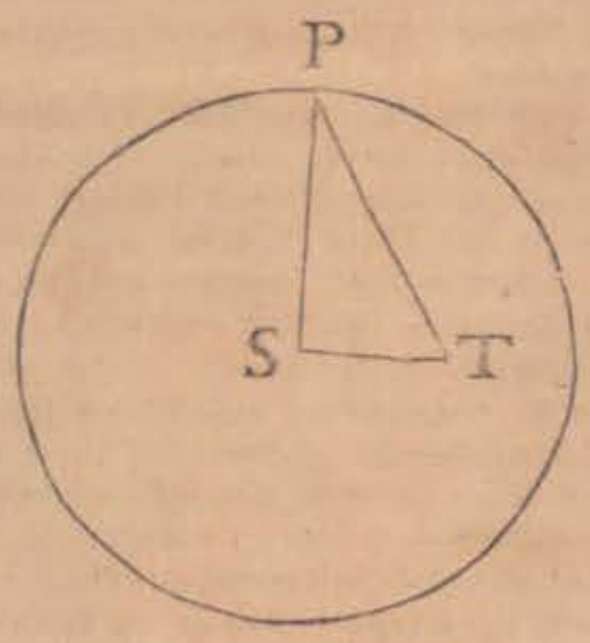
♄	♃	♂	☿	♀	☉
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

Planetarum ac telluris diſtantiæ (u) mediocres à ſole.

	♄	♃	♂	☿	♀	☉
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710.

De

§ 9. ſervari poſſunt (per not. 17. 18. 20.) & inde determinatur tempus Syzigiarum, cum videlicet longitudo planetæ non differt à longitudine ſolis quo tempore fit conjunctio, vel differt ſemicirculo ut in oppoſitione. Quod Mercurium ſpectat, determinatur ipſius conjunctio inferior cum ſole per ipſius tranſitum in diſco ſolis qui vicibus octo obſervatus fuit, dum tranſitus Veneris ſemel tantum viſus eſt, in his verò non ſupponitur telluris motus nec quies. Determinato tempore periodico planetæ, habetur motus ejus medius in orbitâ & ex obſervatis pluribus locis planetæ e Sole viſis per oppoſitiones vel conjunctiones aut per digreſſiones, dantur etiam ipſius motus veri, ac proindè dantur differentiæ inter motus veros & motus medios. Indè verò determinantur aphelia & perihelia planetarum cum iplorum excentricitate, atquè conſtrui poſſunt tabulæ per quas tempore quolibet inveniri poteſt eorum locus in propriâ orbitâ. Quæ omnia quomodò ex obſervationibus determinari poſſint independenter ab hypotheſibus tom. 1. Element. Aſtronom. expoſuit celeberrimus Caſſinus.



Planetarum diſtantiæ à Sole per obſervationes poſſunt definiri. Hic autem non quæruntur abſolutæ diſtantiæ planetarum à Sole, ſed ſolummodò rationes illarum diſtantiarum ad diſtantias ſolis à tellure. Itaque ſit Sol in S, terra quieſcens vel mota in T, planeta in P; obſervetur locus planetæ in cœlo, & per theoriam ſolis, dabitur locus ſolis tempore obſervationis ſeu poſitio lineæ TS, undè datur angulus STP. Quæratur etiam locus plane-

(u) 60. * *Diſtantiæ mediocres à Sole.*

tæ

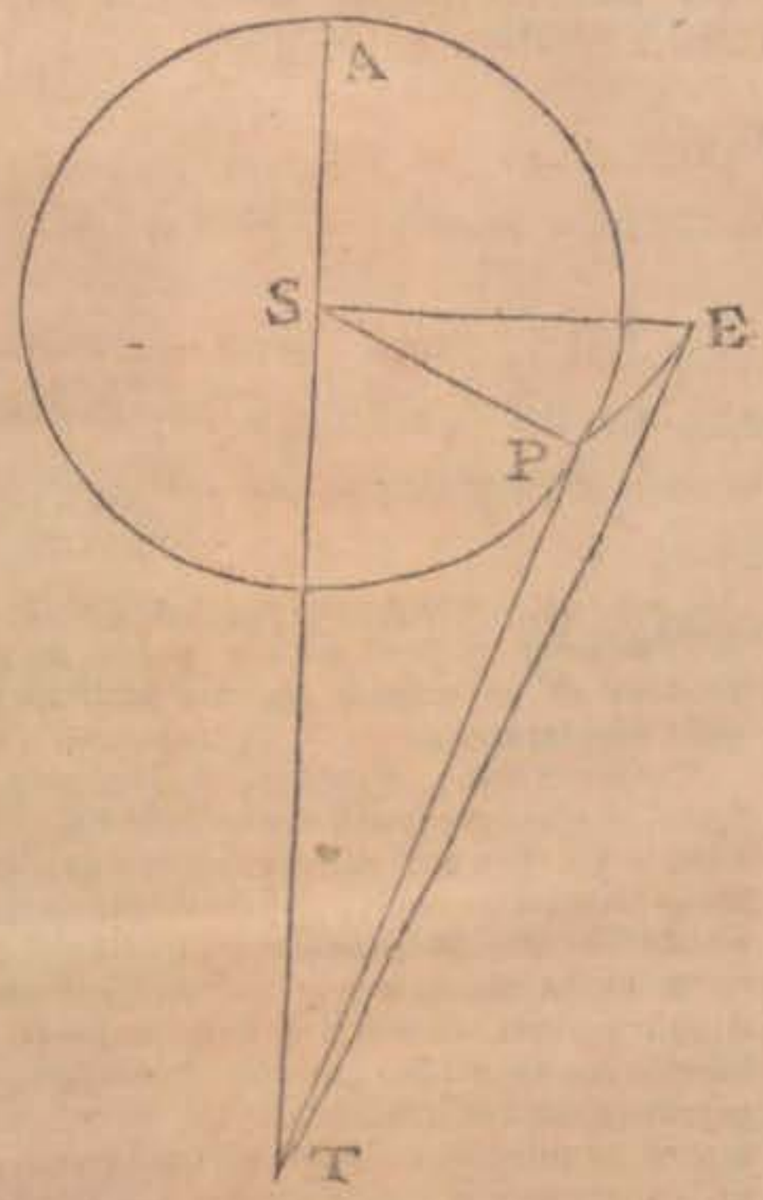
(x) De distantiis mercurii & veneris à sole disputandi non est locus, cum hæ per eorum elongationes à sole determinentur. De distantiis etiam superiorum planetarum à sole tollitur

LIBER TERTIUS. PHÆNOMENA.

61.

tæ P, in propriâ orbitâ per theoriam planetæ, & quia datur locus terræ T e Sole visus atque locus planetæ P, dabitur angulus PST. In triangulo igitur PST, dantur tres anguli ac proinde datur etiam ratio laterum PS & ST, sed, per theoriam solis, datur ratio ST ad mediocrem distantiam Solis à terrâ, & per theoriam planetæ P, datur ratio distantiæ SP, ad mediocrem distantiam planetæ à Sole, ergò dabitur ratio distantiæ mediocris planetæ à Sole ad distantiam mediocrem solis à terrâ. Negligimus autem minutias quæ ex inclinatione orbium planetarum ad eclipticam oriri possunt, & præterea observationes possunt fieri dum planeta est propè nodos, ubi ferè in plano Ecliptice versatur.

(x) 61. * *De distantiis Mercurii & Veneris.* Sit ABP orbita Veneris, S Sol, Terra T, Venus P in maximâ suâ elongatione. Quia orbita Veneris est ferè circularis, linea TP tanget orbitam in P, ideóque angulus SPT, rectus. Unde est ut finis totus ad sinum elongationis maximæ seu anguli observati STP, ità distantia Solis à Terrâ ST ad distantiam SP, Veneris à Sole. Supponitur autem orbita circularis, quia Venus nunquam digreditur à Sole ultrà 47° 30′ & ejus elongationes maximæ nunquam minores sunt gradibus 45° 30′. Quare angulus SPT est fere rectus. Si verò considerare velimus inclinationem orbitæ Veneris, sit latitudo Veneris ex tellure observatâ PTE, è Sole visa PSE, E punctum in Eclipticâ, erit ut PT ad PT, ità tangens latitudinis PTE, ad tangentem latitudinis PSE. Nam ob angulos EPT & EPS rectos, est PT ad PE ut sinus totus ad tangentem anguli PTE; & similiter PS ad PE ut sinus totus ad tangentem anguli PSE, ideóque ut PS ad PT, ità tangens anguli PTE ad tangentem anguli PSE, quarè dabitur angulus iste cum recto EPS, & ideò erit SP ad SE ut sinus anguli SEP, complementi PSE ad rectum ad sinum anguli PSE, dabitur ergò SE, seu ratio ejus ad ST, ficque observatis variis distantiis SP, dabitur mediocris; quia verò datur ratio ST ad mediocrem distantiam Solis à terrâ tempore observationis, dabitur ratio distantiæ mediocris Veneris ad distantiam mediocrem Solis à terrâ. Mercurii distantiæ à terrâ determinantur etiam per elongationes ejus maximas à Sole, sed quia orbita Mercurii est admodum excentrica, si Mercurius sit in P, in maximâ digressione, per observationem notus sit oportet angulus STP & per Theoriam motuum Mercurii angulus PST unde deduceretur angulus TPS, quia angulus ille rectus non est, unde tandem cætera determinentur ut in Venere neglectis minutiis.



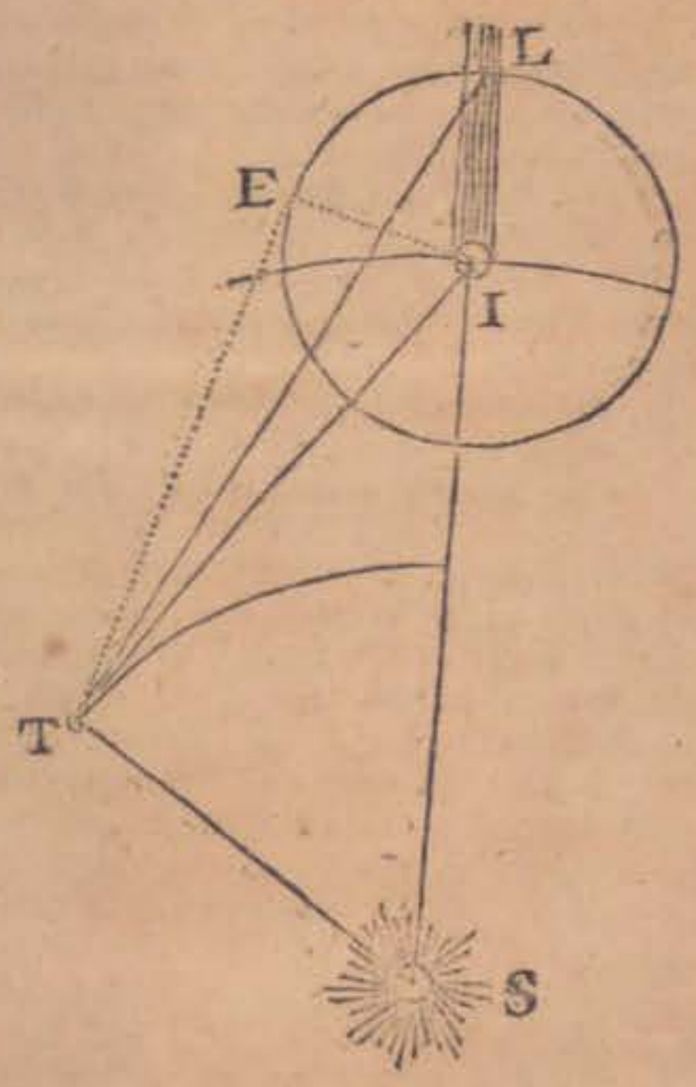
DE MUNDI SYSTEMATE.

tur omnis disputatio per eclipses satellitum jovis. (y) Etenim per eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentricâ & geocentricâ inter se collatis determinatur distantia jovis.

PHÆ.

62. (y) 62. * *Etenim per Eclipses Jovis determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentricâ.*

* Sit S Sol; T terra; I Jupiter; L Satelles ejus per medium umbræ I L transiens: Ex Terrâ T observetur in partibus semi-Diametri Jovis, distantia centri Jovis à Satellite in umbram sese immergente & ex eâ emergente, medium inter eas distantias erit distantia à centro Jovis ad Satellitem in medio umbræ immersum in partibus semi-Diametri Jovis, eadem distantia in minutis & secundis observari poterit, eritque mensura anguli I T L; Ducatur T E tangens ad orbitam satellitis, & I E quæ erit in E T perpendicularis, quia cognoscitur ratio maximæ elongationis hujus satellitis ad semi-Diametrum Jovis, & hic habetur in secundis semi Diameter Jovis habebitur in secundis angulus I T E sub quo apparere deberet lineâ I E, si Satelles foret in maximâ suâ elongatione eo temporis momento; sed ex Trigonometricis, est sinus anguli I T E, ad sinum totum sive sinum anguli E, ut est I E ad T I, rursus in Triangulo T I L est I L (sive I E ipsi æqualis) ad T I ut sinus anguli observati I T L ad sinum anguli T L I; Itaque ut sinus anguli I T E ad sinum totum, ita sinus anguli I T L ad sinum anguli T L I sive T L S; unde in Triangulo T L S, cognito per observationem angulo S T L & invento ut



indicatum est angulo T L S, habetur angulus T S L, qui additus vel detractus è longitudine Heliocentricâ terræ dat Jovis Heliocentricam longitudinem. Q. E. I.

PHÆNOMENON V.

PHÆNOMENA.

Planetas primarios, radiis ad terram ductis, areas describere temporibus minimè proportionales; at radiis ad solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam respectu terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in perihelliis ac tardius in apheliis, sic ut arcarum æquabilis sit descriptio. Propositio est astronomis notissima, & (z) in jove apprimè demonstratur per eclipses satellitum, quibus eclipsibus heliocentricas planetæ hujus longitudines & distantias à sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.

Patet ex lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum à vi solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce phænomenis negligo.

(z) *Et in Jove apprimè demonstratur.* Nam per eclipses satellitum determinatur locus Jovis e Sole visus ejusque à Sole distantia, & ideò collatis plurium eclipsium observationibus, habetur motus verus Jovis in propriâ orbitâ circà Solem & orbita ipsa describi potest; undè quemadmodum de Sole diximus (43) patet Jovem describere areas temporibus proportionales circà Solem. 62.

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum jovis, & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.

PAtet pars prior propoſitionis per phænomenon primum, & propoſitionem ſecundam vel tertiam libri primi: & pars poſterior per phænomenon primum, & corollarium ſextum propoſitionis quartæ ejuſdem libri.

Idem intellige de planetis qui Saturnum comitantur, per phænomenon ſecundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere ſolem, & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.

Patet pars prior propoſitionis per phænomenon quintum, & propoſitionem ſecundam libri primi: & pars poſterior per phænomenon quartum, & propoſitionem quartam ejuſdem libri. Accuratiſſimè autem demonſtratur hæc pars propoſitionis per (a) quietem apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicatâ (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) motum apſidum

42. (a) * *Per quietem apheliorum.* * Aſtronomi motus cœleſtes calculant referendo Aſtra ad Eclipticam, cujus initium per interſectionem æquatoris & Ecliptiæ determinatur; ſed illud initium fixum non eſt, & propter axis terræ nutationem interſectio illa in antecedentia fertur 51 circiter ſecundis ſingulo anno, hinc fixæ totidem ſecundis progredi videntur, Aphelia Planetarum etiam progredi videntur reſpectu ejus initii Ecliptiæ, progreditur ergo ſingulo anno = - =

LIBER TERTIUS. PROP. III. THEOR. III.

ſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Vim, quâ luna retinetur in orbe ſuo, reſpicere terram, & eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Patet aſſertionis pars prior per phænomenon ſextum, & propoſitionem ſecundam vel tertiam libri primi: & pars poſterior per motum tardiſſimum lunaris apogæi. Nam motus ille, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum tantum trium & minutorum trium in conſequentia, contemni poteſt. Patet enim (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) quod ſi diſtantia lunæ à centro terræ ſit ad ſemidiametrum terræ ut D ad 1; vis à quâ motus talis oriatur ſit reciprocè ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id eſt, reciprocè ut ea

Aphelium terræ - - - 62″.
Saturni - - - 78″.
Jovis - - - 57″.
Martis - - - 72″.
Veneris - - - 86″.
Mercurii - - - 80″.

Sed multum abeſt quam ut ille Apheliorum motus, certiſſime determinetur, & uniformis eſſe deprehendatur; ex obſervationibus motûs Aphelii terræ nunc plus procedere quam 50″ nunc minus deprehenditur, unde quidam Aſtronomi non alium eſſe ejus motum præter motum ipſius initii Eclipticæ cenſent. Pariter ex obſervationibus Aphelii Saturni, ejus motus irregularis videretur, aliquando accelerari aliquando retrocedere, ex. gratia, ab anno 1694 ad finem anni 1708, minutis ferè 33 retroceſſiſſe teſtatur Caſſinus. Aphelium Jovis ad motum fixarum proximè accedere videtur, &c. Unde conſtat, Aphelia quamproximè quieſcere, & eam quantitatem exiguam motus ipſis aſſignati quæ excedit motum fixarum, forte obſervationum erroribus deberi, forte actioni mutuæ vicinorum Planetarum inter ſe; ſic cum anno 1703 Saturnus & Jupiter conjuncti fuerint, & cum nonniſi quinque annis nonaginta gradibus à ſe mutuo diſcedant patet quod ab anno 1698 ad annum 1708 Jupiter inter Solem & Saturnum erat verſatus, ejuſque actio in Saturnum adjuncta fuerat actioni Solis in Saturnum; Poſito autem quod reverâ vis Solis in Saturnum decreſcat ſecundum quadrata diſtantiarum, & Jovis interpoſitione vim qualemcumque illi addi quæ X dicatur, ex Propoſitione XLV. primi Libri habebitur angulum Apſidis imæ cum ſumma eſſe 180ˢʳ. $\sqrt{\frac{1+X.}{1+3X}}$ ſed $\frac{1+X}{1+X}$ eſt fractio ideóque ille angulus eſt minor 180ˢʳ. regreditur itaque Apſis ex his hypotheſibus planè ut obſervatione conſtat: Unde non obſcurè colligitur Aphelionum fixarum reſpectu quies (ſemotis his accidentalibus cauſis) ac per conſequens quod vires quibus Planetæ ad Solem retrahuntur ſunt in duplicatâ diſtantiarum ratione accuratè, ſiquidem ſi vel unâ ſexageſimâ parte, accederet ratio à duplicata ad triplicatam, Apſides tribus ad minimum gradibus progrederentur ut demonſtratum fuit in fine 1ⁱ. Coroll. Prop. 45ᵉ. Lib. I.

6 2

De Mundi Systemate

ea ipsius D dignitas cujus index est $2\frac{4}{243}$, hoc est, in ratione distantiæ paulo majore quam duplicatâ inversè, sed quæ partibus $59\frac{1}{4}$ proprius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione solis (uti posthac dicetur) & propterea hic negligendus est. (b) Actio solis quâtenus lunam distrahit à terrâ, est (c) ut distantia lunæ à terrâ quamproximè; (d) ideoque (per ea quæ dicuntur in corol. 2. prop. XLV. lib. 1.) est ad lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglectâ solis vi tantillâ, vis reliqua quâ lunâ

63. (b) * *Actio Solis quâtenus Lunam distrahit à terrâ.* * Motus Apogæi Lunaris uniformis non est, sed aliquando procedit, aliquando recedit, aliquando quiescit, sed ita ut omnibus compensatis progrediatur, & octo aut novem annis 360. gr. percurrerit; Pariter & actio Solis quâ Lunam distrahit à terrâ non est continua, actio Solis Lunam à terrâ distrahit dum Luna à Syzygiâ non plus quam 55. gradibus hinc inde discessit, circa quadraturas verò actio Solis cum terræ attractione consentit, Lunamque ad terram attrahit, sed tunc & debilior est & per pauciores gradus agit, quam circa Syzygias, hinc effectus qui resultat pendet ex actione Solis quâ Luna distrahitur. (Lib. I. Prop. LXVI. Cor. 6. 7. 8. cum notis).

(c) * *Est ut distantia Lunæ à Terrâ quam proximè.* * Propter motum Telluris cum Lunâ circa Solem, omnia puncta Lunaris Orbitæ successivè obvertuntur Soli, & versantur in Syzygiâ, postea verò in quadraturâ, & cum ea orbita non sit circulus cujus terra sit centrum, patet puncta Syzygiarum & quadraturarum, nunc viciniora nunc remotiora fore terræ; Jam verò vis quâ Sol distrahit Lunam à terrâ, in Syzygiis, sicut & vis quâ Sol Lunam attrahit terram versus in Quadraturis crescit secundum distantias Lunæ à terrâ, in iis autem punctis præcipua est Solis actio ad Apogæum Lunæ movendum, unde effectus resultans pendebit à differentiâ earum actionum quæ erit sicut distantia Lunæ à terrâ: Vel ut melius res concipiatur, fingatur Orbitam Lunæ cingi undique Solibus æqualiter à terrâ distantibus, ita ut singulum punctum Orbitæ Lunaris sit simul in Syzygiâ & quadraturâ; cum actio Solis in Syzygia sicut & actio Solis in quadratura sit ut distantiæ Lunæ à terrâ, differentia earum actionum erit etiam ut distantia Lunæ à terra, sed effectus differentiæ earum actionum erit idem ac id quod resultabit ex translatione dicti puncti per Syzygiam & postea per Quadraturam, hinc si motus Apogæi medius assumatur is pendebit ab actione quæ erit ut distantia Terræ à Lunâ; addit autem Newtonus quam proximè propter actionem in punctis inter Syzygias & quadraturas, sed quæ parum hanc rationem turbant nam in punctis intermediis ubi actio quâ Luna distrahitur à Terra magis recederet ab hac ratione actiones compositæ sese mutuò destruunt & in punctis à Syzygiis aut à quadraturis non remotis actio Solis sequitur proxime easdem rationes ac in ipsis Syzygiis ac quadraturis; hinc actio Solis quâtenus Lunam distrahit à terra est proximè ut distantia terræ à Lunâ.

(d) * *Ideoque per ea quæ dicuntur in Cor. 2. Prop. XLV. Lib. I.* * Dicitur in eo Corollario, quod si ex vi decrescente secundum quadrata distantiarum auferatur vis quæ crescat secundum ipsas distantias, quæ sit ad priorem ut 1 ad 357.45, motus progressivus Apogæi erit 1d. 31'. 28'' in singulâ revolutione; motus autem progressivus Apogæi Lunaris est circiter duplo velocior, hinc vis illa ablatitiâ debet esse ad vim Lunæ centripetam ut 2 ad 357.45 sive ut 1, ad 178.725.

lunâ retinetur in orbe erit reciprocè ut D^2. Id quod etiam plenius conſtabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in propoſitione ſequente. LIBER TERTIUS. PROP. IV. THEOR. IV.

Corol. Si (e) vis centripeta mediocris quâ lunâ retinetur in orbe augeatur primo in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicatâ ſemidiametri terræ ad mediocrem diſtantiam centri lunæ à centro terræ: habebitur vis centripeta lunaris ad ſuperficiem terræ, poſito quod vis illa deſcendendo ad ſuperficiem terræ perpetuo augeatur in reciprocâ altitudinis ratione duplicatâ.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi ſemper à motu rectilineo, & in orbe ſuo retineri.

Lunæ diſtantia mediocris à terrâ in ſyzygiis eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum *Ptolemæum* & pleroſque aſtronomorum 59, ſecundum *Vendelinum* & *Hugenium* 60, ſecundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, ſecundum *Streetum* $60\frac{2}{5}$, & ſecundum *Tychonem* $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones ſolis & lunæ (omnino (f) contra naturam lucis) majores quam fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, (g) auxerunt parallaxin lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt, quaſi duodecimâ vel decimâ quintâ parte

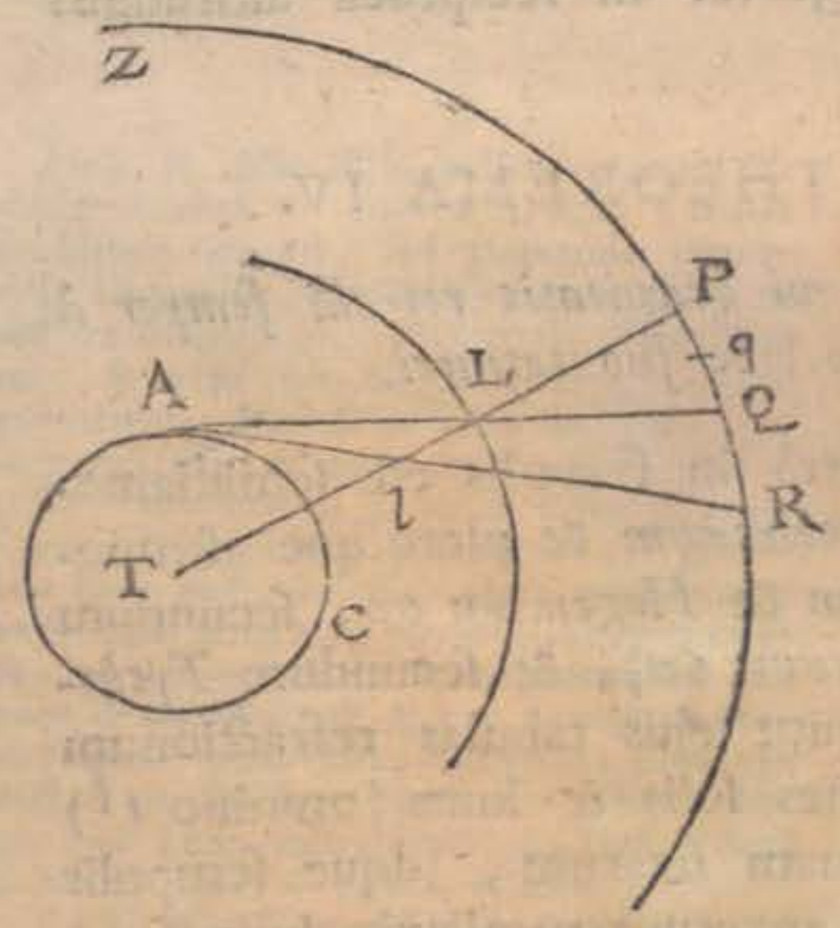
(e) * *Si vis centripeta mediocris.* Quoniam vis ablatitia Solis eſt ad vim centripetam Lunæ ut 1 ad $178\frac{29}{40}$, ſi vis ablatitia Solis ſit 1, erit vis centripeta Lunæ $178\frac{29}{40}$, ideóque detractâ vi ablatitiâ Solis, erit vis Lunæ quâ reverâ retinetur in orbitâ ſuâ per vim terræ minutam actione Solis $177\frac{29}{40}$. Quare ſi vis mediocris quâ Luna retinetur in orbe, augeatur in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, obtinebitur vera vis Lunæ centripeta, qualis foret ſi nulla eſſet actio Solis. Hinc poſito quod vis illa deſcendendo ad ſuperficiem terræ perpetuò augeatur in reciprocâ altitudinis ſeu diſtantiæ à centro terræ ratione duplicatâ, ut habeatur vis centripeta in ſuperficie terræ, dicendum eſt ut quadratum ſemidiametri terræ ad quadratum diſtantiæ mediocris centri Lunæ à centro terræ, ità vis centripeta ad quartum quod erit vis in ſuperficie terræ. 6 22

(f) * *Omninò contrà naturam lucis* (25).

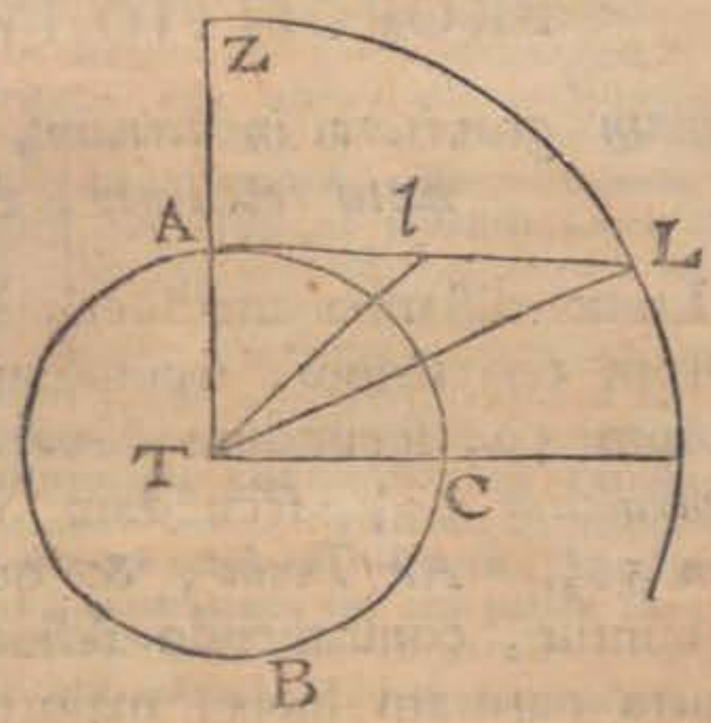
(g) * *Auxerunt parallaxim Lunæ.* Tantùm augeri parallaxim Lunæ quantùm augetur refractio, patet ſi determinetur pa-

DE MUNDI SYSTEMATE.

te totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & (h) diſtantia evadet quaſi $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, ferè ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum in ſyzygiis; & lunarem periodum reſpectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti (i) à *Gallis* menſurantibus definitum eſt: &



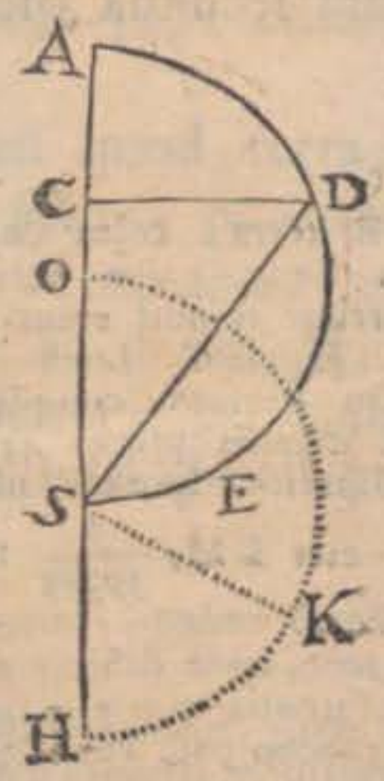
62. rallaxis Lunæ, quod ità præſtari poteſt. Sit A C T, tellus cujus centrum T, obſervetur altitudo meridiana centri Lunæ L ex loco A in Q à refractionibus libera, & ex tabulis eruatur pro tempore obſervationis longitudo & latitudo Lunæ; deindè (per trigon.) quæratur ipſius declinatio, habebitur ejus diſtantia à vertice Z ſeu locus P è terræ centro T viſus, differentia P Q ſeu angulus P L Q aut æqualis A L T eſt parallaxis Lunæ. Porrò ut habeatur locus Q è loco A viſus à refractione liber, quoniam refractio auget altitudinem, ſit locus viſus q, Q q metietur refractionem, unde arcus Q q, addendus eſt arcui P q ut habeatur parallaxis tota P Q; ſi verò refractio major aſſumatur ut q R, parallaxis erit major nempè P R, quaſi Luna eſſet in l; unde tantum augetur parallaxis quantum refractio ipſa.



(h) * *Diſtantia evadet.* Sit T centrum terræ & angulus A L T parallaxis horizontalis mediocris. Ob angulum L A T rectum, erit ſemidiameter terræ A T ad diſtantiam mediocrem Lunæ à terrâ T L, ut ſinus parallaxeos mediocris ad ſinum totum. Eſt autem parallaxis iſta 58′ circiter. Jam ducatur T l, ſitque angulus A l T 63′ vel 62′, ob refractionem malè conſtitutam, erit T l ad T l ferè ut 58 ad 62 vel 63, ideoquè cum ſit juxtà Tychonem T l = $56\frac{1}{2}$ ſemid. terræ, erit ut 58 ad 62 vel 63 ità $56\frac{1}{2}$ ad $60\frac{21}{58}$ vel $61\frac{41}{116}$. Quarè ſi corrigatur error qui ex refractione malè conſtitutâ oritur, diſtantia mediocris Lunæ à terrâ evadet quaſi $60\frac{1}{2}$ ſemid. terreſtr.

(i) * *A menſurantibus Gallis*, à Picar-

& si luna motu omni privari fingatur ac dimitti, ut urgente vi illâ omni, quâ (per corol. prop. 111.) in orbe suo retinetur, descendat in terram; hæc spatio minuti unius primi cadendo describet pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$. (k) Colligitur hoc ex calculo vel per propositionem XXXVI. libri primi, vel (quod eodem recidit) per corollarium nonum propositionis quartæ ejusdem libri, confecto. Nam arcus illius quem luna tempore minuti



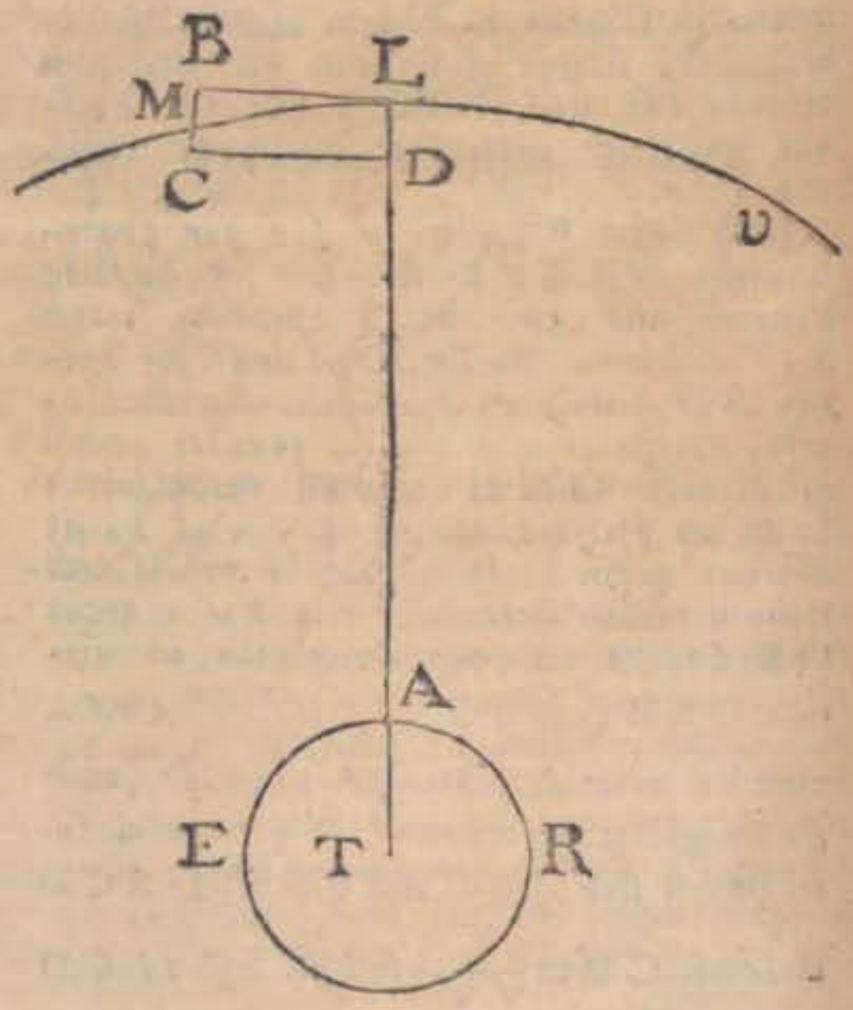
carto nimirum inventum est gradui circuli maximi terrestris respondere hexapedas 57060 seu ped. Paris. 342360. Quare inferatur (22) ut numerus graduum arcus distantiæ duorum locorum ad 360°. seu peripheriam integram, ità idem arcus in milliaribus aut pedibus expressus ad ambitum telluris in eâdem mensurâ inveniendum, sicque definitum est ambitum telluris esse ped. Paris. 123249600 ejusque proinde diameter est ped. Paris. 39231506.

(k) 63. * *Colligitur hoc per propositionem XXXVI. lib. I.* * In hâc Propositione 36. sit S centrum terræ S A distantia mediocris Lunæ à Terra, S O dimidium ejus distantiæ mediocris, velocitas quâ corpus revolvi potest in circulo O K H erit ad velocitatem Lunæ in propriâ orbitâ ut $\sqrt{2}$ ad 1, sit X arcus quem Luna in propriâ orbita uno minuto primo describit, erit $X\sqrt{2}$ arcus O K eodem tempore descriptus in circulo O K H & area O K S erit $\frac{1}{2}$ S O × $X\sqrt{2}$, æqualis areæ A S D = $\frac{1}{2}$ A S × C D (nam ob exiguitatem arcus A D pro rectâ sumi potest sive $\frac{1}{2}$ S O × $X\sqrt{2}$ = S O × C D unde est $CD = \frac{X}{\sqrt{2}}$, sed est S C ad C D ut C D ad A C ergo $AC = \frac{CD^2}{SC} = \frac{X^2}{2SC}$ sed S C est proximè æqualis S A ergo A C = $\frac{X^2}{2SA}$; rursus sit 1 ad p ut radius ad circumferentiam, orbitæ Lunaris Peripheria erit p S A, & quoniam tota a Luna describitur tempore $27^d.\ 7^h.\ 43'.$ sive minutis 39343; erit arcus $X = \frac{p\,SA}{39343}$ & A C = $\frac{p^2\overline{SA}^2.}{2\times 39343^2\times SA} = \frac{p^2 SA}{3095743298}$, est verò $\frac{p\,SA}{60}$ ambitus terræ qui pedum 123249600 ex Picarto adsumptus fuit; ideoque p S A = 7 94976000; unde divisione factâ est A C = 2.388756p; sed Radius est ad Peripheriam ut 1 ad 6.283185 &c. unde tandem habetur A C = 15.00878 &c. Alter autem calculus ex Cor. 9. Prop. IV. deductus ita se habet. 63.

DE MUNDI SYSTEMATE.

minuti unius primi, medio ſuo motu, ad diſtantiam ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium deſcribat, ſinus verſus eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$ circiter, vel magis accuratè pedum 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicatâ diſtantiæ ratione inversâ, ideoque ad ſuperficiem terræ major ſit partibus 60×60 quam ad lunam; corpus vi illâ in regionibus noſtris cadendo, deſcribere deberet ſpatio minuti unius primi pedes Pariſienſes $60\times60\times15\frac{1}{12}$, & ſpatio minuti unius ſecundi pedes $15\frac{1}{12}$, vel magis accuratè pedes 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Et eâdem vi gravia reverâ deſcendunt in terram. Nam penduli, in latitudine Luteriæ Pariſiorum ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis, longitudo eſt pedum trium Pariſien-

63. Sit R A E terra, cujus centrum T, V L orbita Lunæ cujus pars L M à Lunâ percurritur minuti unius primi intervallo. Quoniam Luna periodum ſuam reſpectu fixarum complet diebus 27, hor. 7. minutis primis 43, ut ab aſtronomis ſtatuitur, hoc eſt, minutis primis 39343, erit L M, $\frac{1}{39343}$ totius peripheriæ. Porrò ambitus terræ eſt ped. Pariſ. 123249600, unde dabitur orbitæ Lunaris circumferentia quæ ejus eſt ſexagecupla 7394976000 ped. Pariſ. quæ ſi dividatur per 39343, quotus dabit longitudinem arcûs à Lunâ minuto primo deſcripti pedibus Pariſienſibus expreſſam ſcilicet 187964. ped. circiter cujus quadrato 35330465296 per diametrum diviſo, quæ eſt pedum 2353893976 habebitur ſinus verſus L D ped. Pariſ. 15.0093 &c. proxime ut priori calculo.



* Sed ex Corollario propoſitionis præcedentis, vis quâ Luna retinetur in orbe ſuo augeri debet in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$ ut corrigatur vis ejus per Solis actionem diminutionem, & ſpatia per diverſas vires iiſdem temporibus percurſa ſunt ut illæ vires, ergo linea A C inventa 15ped.009 eſt ad ſpatium quod Luna dempta vi Solis deſcriberet ut $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$ illud ergo ſpatium eſt 15ped.0934 quæ $\frac{934}{10000}$ pedis efficiunt accuratè pollices 1. lin. $1\frac{4}{9}$.

risiensium & linearum $8\frac{1}{2}$, ut obſervavit *Hugenius*. Et (l) altitudo, quam grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit, eſt ad dimidiam longitudinem penduli hujus in duplicatâ ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam *Hugenius*) (m) ideoque eſt pedum Pariſienſium 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$. Et propterea vis quâ luna in orbe ſuo retinetur, ſi deſcendatur in ſuperficiem terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos, ideoque (per reg. 1. & 11.) eſt illa ipſa vis quam nos gravitatem dicere ſolemus. Nam ſi gravitas ab eâ diverſa eſſet, corpora viribus utriſque conjunctis terram petendo duplo velocius deſcenderent, & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcriberent pedes Pariſienſes $30\frac{1}{8}$: omninò contra experientiam.

(n) Calculus hic fundatur in hypotheſi quod terra quieſcit. Nam ſi terra & luna moveantur circum ſolem, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: manente lege gravitatis diſtantia centrorum lunæ ac terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium circiter; uti computationem incunti patebit. Computatio autem iniri poteſt per prop. LX. lib. 1.

Scho-

(l) * *Et altitudo.* (471. lib. 1.).

(m) * *Ideóque eſt ped. Pariſ.* (ibid.).

(n) 64. * *Calculus hic fundatur in hypotheſi quod terra quieſcit.* * Undecima Sectione Libri I. quæſivit Newtonus qualis oriretur differentia inter motus corporum attractorum, quando tota vis uni immoto tribuitur, aut quando (ſicut res ſe habet) attractione mutuâ in ſe agunt, & demonſtravit Propoſitione 58 & 59. Quod ſi è duobus corporibus ſe mutuo attrahentibus & circa commune gravitatis centrum Ellipſes ſimiles deſcribentibus, alterutrum ſit noſtra ſedes, ita ut motum totum alteri tribuamus quod circa nos Ellipſim deſcribere videretur; illud eâdem vi centripetâ eamdem Ellipſim circa nos ſi immoti reverâ foremus nonniſi longiori tempore deſcriberet, ita ut tempus quo mutuâ actione gravitatis circa nos *motos* revolvi videretur, foret ad tempus quo circa nos *immotos* revolveretur in ratione ſubduplicatâ corporis Centralis immoti ad ſummam duorum Corporum revolventium; Unde, manente eâdem gravitatis Lege, Ellipſis quæ deſcriberetur circa nos *immotos* eodem tempore quo deſcribitur Ellipſis relativa circa nos *motos*, minor foret quam ea Ellipſis relativa, & ratio axium invenietur dicendo, quadratum temporis quo hæc Ellipſis deſcribitur ſive (ex hyp.) quadratum temporis quo deſcribitur Ellipſis relativa circa nos, eſt ad quadratum temporis quo Ellipſis relativæ ellipſi æqualis circa nos verè immotos deſcribitur, ut Cubus ſemi Axis Ellipſeos minoris deſcriptæ circa corpus immotum ad Cubum ſemi Axis Ellipſis majoris deſcriptæ circa corpus etiam immotum & quæ Ellipſi relativæ eſt æqualis, ſed illa tempora erant in ſubduplicatâ ratione maſſæ corporis immoti 64.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Scholium.

Demonſtratio propoſitionis ſic fuſius explicari poteſt. Si lunæ plures circum terram revolverentur, perinde ut fit in ſyſtemate ſaturni vel jovis: harum tempora periodica (per argumentum inductionis) obſervarent legem planetarum à *Keplero* detectam, & propterea harum vires centripetæ forent reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro terræ, per prop. 1. hujus. Et ſi earum infima eſſet parva, & vertices altiſſimorum montium prope tangeret: hujus vis centripeta quâ retineretur in orbe, gravitates corporum in verticibus illorum montium (per computationem præcedentem) æquaret quamproximè, efficeretque ut eadem lunula, ſi motu omni quo pergit in orbe ſuo privaretur, defectu vis centrifugæ quâ in orbe permanſerat, deſcenderet in terram, idque eâdem cum velocitate quâ gravia cadunt in illorum montium verticibus, propter æqualitatem virium quibus deſcendunt. Et ſi vis illa quâ lunula illa infima deſcendit, diverſa eſſet à gravitate, & lunula illa etiam gravis eſſet in terram more corporum in verticibus montium: eadem lunula vi utrâque conjunctâ duplo velocius deſcenderet. Qua-

65. moti ad ſummam maſſarum duorum Corporum, ergo, ut maſſa corporis immoti ad ſummam maſſarum duorum Corporum, ſic Cubus ſemi-Axis Ellipſeos minoris deſcriptæ circa corpus immotum ad cubum ſemi-axis Ellipſis majoris reverâ deſcriptæ; Hinc cum hactenus immotam terram ſuppoſuerimus Lunamque revolventem tempore quo reverâ revolvitur & ſemiaxem orbitæ Lunaris 60 ſemi Diametrorum terræ aſſumſerimus, ſitque maſſa terræ ad maſſam Lunæ ut 42. ad 1. erit 42. ad 43. ut Cubus 60. ad Cubum ſemi axeos ejus Ellipſeos quam (manente eadem gravitatis Lege eodemque tempore Periodico) Lunâ relativè deſcribet circa terram dum ipsâ terrâ mutuâ Lunæ attractione circa centrum gravitatis commune reverâ revolvetur; ille ergo ſemi Axis erit $\frac{43 \times 216000}{42}$ cujus Radix Cubica eſt 60.47 ferè $60\frac{1}{2}$ ut habet Newtonus.

65. Eodem modo quo Luna in orbitâ ſuâ revolvitur circâ tellurem ità aliud quodvis grave ex puncto extrà telluris ſuperficiem ſecundum rectam horizontalem ſatis validè projectum orbitam deſcriberet & planetæ inſtar periodum ſuam compleret (10. lib. 1.). Sed quò altius eſt ſuprà terram punctum illud ex quo grave projicitur, eò minori opus eſt vi projectili ut projectum in planetam mutetur, & quò humilius eſt eò majori (ibid.) hoc eſt, celeritas per vim projectilem impreſſa erit inversè ut diſtantia, v. gr. Si Luna eâdem celeri-

Quare cum vires utræque, & hæ corporum gravium, & illæ lunarum, centrum terræ reſpiciant, & ſint inter ſe ſimiles & æquales, eædem (per reg. I. & II.) eandem habebunt cauſam. Et propterea vis illa, quâ luna retinetur in orbe ſuo, ea ipſa erit quam nos gravitatem dicere ſolemus: idque maximè ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplò velocius cadat quam corpora gravia ſolent cadere.

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Planetas circumjoviales gravitare in jovem, circumſaturnios in ſaturnum, & circumſolares in ſolem, & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones planetarum circumjovialium circa jovem, circumſaturniorum circa ſaturnum, & mercurii ac veneris reliquorumque circumſolarium circa ſolem ſunt phænomena ejuſdem generis cum revolutione lunæ circa terram; & propterea (per reg. II.) à cauſis ejuſdem generis dependent: præſertim cum demonſtratum ſit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra jovis, ſaturni ac ſolis, & recedendo à jove, ſaturno & ſole decreſcant eâdem ratione ac lege, quâ vis gravitatis decreſcit in receſſu à terrâ.

Corol. I. (°) Gravitas igitur datur in planetas univerſos. Nam venerem, mercurium, cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis

leritate quâ nunc in orbitâ ſuâ revolvitur juxta terram projiceretur ſecundùm directionem horizontalem, circà tellurem non giraret, ſed terreſtrium projectilium more in terram caderet, antequam * per tertiam partem minuti eſſet mota. Nam arcus quem Luna 20 ſcrupulis ſecundis horariis in ſuo circulo percurrit eſt 11″ ſi juxta tellurem accedat & eadem celeritate moveatur ille arcus erit 11′; ſinus verſus Arcus 11′ eſt $\frac{51}{10.000.000}$ Radii qui Radius cum ſit pedum 19615783 erit ſinus ille verſus pedum centum circiter, ſed grave prope terram viginti iſtis ſcrupulis ſecundis cadendo percurrit 20 × 20 × 15 $\frac{1}{12}$, ſive 6033 ped. Unde Luna in circulo ſuo non manebit ſed longè prius in terram impegerit quam 20 ſecunda elapſa fuiſſent.

66.

(o) 66. * *Gravitas igitur datur in planetas univerſos*; * Datur gravitas in terram & eâ gravitate Luna circa eam revolvitur per Prop. IV; datur gravitas in Jovem & Saturnum, nam revolutiones Planetarum circumjovialium circa Jovem, &

DE MUNDI SYSTEMATE

generis cum jove & ſaturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis per motus legem tertiam mutua ſit, jupiter in ſatellites ſuos omnes, ſaturnus in ſuos, terraque in lunam, & ſol in planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. (P) Gravitatem, quæ planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Corol. 3. Graves ſunt planetæ omnes in ſe mutuò per corol. 1. & 2. Et (Q) hinc jupiter & ſaturnus prope conjunctionem ſe invicem attrahendo, ſenſibiliter perturbant motus mutuos, ſol perturbat motus lunares, ſol & luna perturbant mare noſtrum, ut in ſequentibus explicabitur.

Scholium.

Hactenus vim illam quâ corpora cœleſtia in orbibus ſuis retinentur centripetam appellavimus. Eandem jam gravitatem eſſe conſtat, & propterea gravitatem in poſterum vocabimus. Nam cauſa vis illius centripetæ, quâ lunâ retinetur in orbe, extendi debet ad omnes planetas per reg. I. II. & IV.

PRO-

66. circumſaturniorum circa Saturnum ſunt ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa terram, pendent ergo (per reg. 2.) ex gravitate eorum Satellitum in eos Planetas; Quamvis autem non ſint aut non obſervati ſint Satellites circa Martem, Venerem & Mercurium, attamen Jovi, Saturno, Terræ in cæteris ita ſunt ſimiles ut dubitandi locus non relinquatur quod ſi Satellites juxta ipſos collocarentur idem eveniret illis ac Lunæ & circumſaturniis aut circumjovialibus, unde ſequitur Gravitatem etiam dari in illos Planetas; Poſtea propter mutuam attractionem, terram eſſe gravem in Lunam, &c. conſtabit.

(P) * *Coroll.* 2. Patet (ex reg. 1. & prop. 1.).

(Q) * *Et hinc Jupiter.* Hæc mutua planetarum perturbatio ut potè cum ſequentibus propoſitionibus conjuncta deinceps convenientius explicabitur, * ſufficiant in præſentiarum quæ de eâ ſuperius dictum eſt, occaſione quietis Apheliorum, vide notam a ad Prop. 2.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Corpora omnia in planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis planetam, paribus diſtantiis à centro planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

(r) Deſcenſus gravium omnium in terram (demptâ ſaltem inæquali retardatione quæ ex aëris perexigua reſiſtentia oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum obſervarunt alii; & accuratiſſimè quidem notare licet æqualitatem temporum in pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arenâ, ſale communi, ligno, aquâ, tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus ſuſpendebam (quam potui exactè) in alterius centro oſcillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, conſtituebant pendula, quoad pondus, figuram, & aëris reſiſtentiam omnino paria: & paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant unà & redibant diutiſſimè. (f) Proinde copia materiæ in auro (per corol. 1. & 6. prop. XXIV. lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quam pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſtò deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in planetas eandem eſſe atque in terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terreſtria ad uſque orbem lunæ, & unà cum lunâ motu omni privata demitti, ut in terram ſimul cadant; &

per

(r) * *Deſcenſus gravium omnium* (3. lib. 1.).

(f) * *Proindè copia materiæ.* Quantitas materiæ in medio non reſiſtente eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo penduli inverſè (per cor. 6. prop. 24. lib. 2.) ideóque datis tempore & longitudine penduli, ut pondus comparativum directè. Sed pondus comparativum eſt actio vis motricis (per cor. 6. prop. 20. lib. 2.). Ergò copia materiæ in auro erat ad copiam materiæ in ligno ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in lignum, hoc eſt, (per cor. 1. prop. 24. lib. 2.) ut pondus ad pondus. 662

DE MUNDI SYSTEMATE.

(t) per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum lunâ, ideoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in lunâ, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam ſatellites jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro jovis, (u) erunt eorum gravitates acceleratrices in jovem reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro jovis; & propterea in æqualibus à jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde ut fit in gravibus in hâc terrâ noſtrâ. Et (x) eodem argumento planetæ circumſolares, ab æqualibus à ſole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in ſolem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. (y) Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in planetis. Porro jovis & ejus ſatellitum pondera in ſolem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum patet ex motu ſatellitum quam maximè regulari; per corol. 3. prop. LXV. lib. 1. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in ſolem, pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri: motus ſatellitum (per corol. 2. prop. LXV. lib. 1.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus à ſole diſtantiis, ſatelles aliquis gravior eſſet in ſolem pro quantitate materiæ ſuæ, quam jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quâcunque datâ, puta *d* ad *e*: diſtantia inter centrum ſolis & centrum orbis ſatellitis, major ſemper foret quam diſtantia inter centrum ſolis & centrum jovis in ratione ſubduplicatâ quam

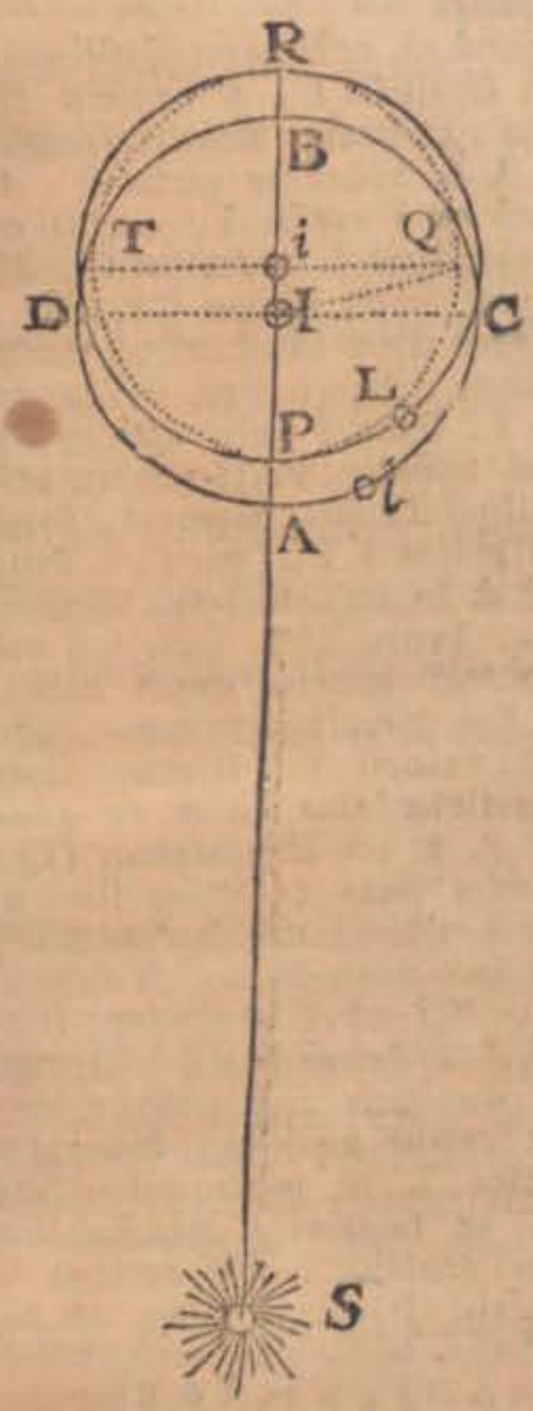
66. (t) * *Per jam antè oſtenſa* (prop. 4. lib. hujus).

(u) * *Erunt eorum gravitates acceleratrices.* (Per cor. 2. prop. 5.).

(x) * *Et eodem argumento.* Gravitates acceleratrices planetarum in Solem ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum à centro Solis (cor. 2. prop. 5.) & propterea in æqualibus à Sole diſtantiis eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales, proindéque temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo deſcriberent ſpatia æqualia. Quanto autem tempore planeta quilibet circumſolaris omni motu revolutionis privatus ſolâ vi centripetâ deſcenderet & ad ſolem uſquè perveniret ex datâ ejus à Sole diſtantiâ innoteſcit per not. 401. lib. 1. dimidio ſcilicet temporis periodici quo planeta ad diſtantiam duplò minorem revolvi poſſet, ſivè tempore quod eſt ad tempus periodicum planetæ ut 1 ad $4\sqrt{2}$, idem planeta cadendo ſolem attingeret.

(y) * *Vires autem quibus corpora inæqualia.* (Def. 7. & not. 15. lib. 1.).

quam proximè; (z) uti calculo quodam inito inveni. Et si satelles minus gravis esset in solem in ratione illa *d* ad *e*, distantia centri orbis satellitis à sole minor foret quam distantia centri jovis à sole in ratione illâ subduplicatâ. Idcoque si in æquali-



66.

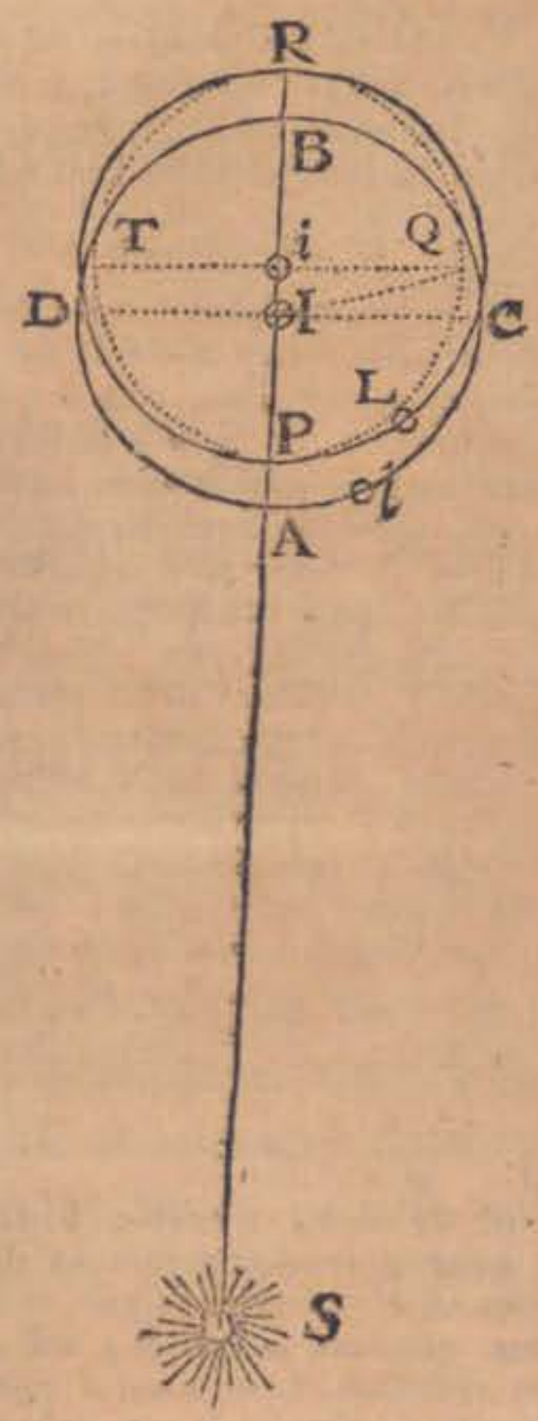
(z) * *Uti calculo quodam inito inveni.* * Sit S Sol, I Jupiter, L Satelles gravior in Solem quam Jupiter paribus in distantiis in ratione *d* ad *e*, Fiat SI ad Si sicut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ & quoniam gravitas est inversè ut quadrata distantiarum, gravitas in Solem ad distantiam SI erit ad gravitatem in Solem ad distantiam S i ut *d* ad *e*; unde si gravitas Jovis in I positi sit ut *e*, & gravitas satellitis gravioris in I etiam positi sit ut *d*, ejusdem satellitis gravitas in i positi erit ut *e*, quare erit æqualis gravitati Jovis in I positi: Fingatur satelles *l* qui Jove nec gravior nec levior sit, qui circa Jovem I circulum describat ACBD; & fingatur in i corpus centrale Jovi simile circa quod, semotâ Solis actione, satelles gravior L describere poterit orbitam P Q R T priori A C B D æqualem; Restituatur Solis actio, actio ejus in utrumque satellitem erit æqualis, in similibus orbitarum punctis nam propter ingentem puncti S distantiam erit SA ad SP, & SB ad SR ut SI ad Si, ideoque ut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ gravitates in eis punctis forent ut *d* ad *e*, ideóque si satellites forent æque graves, paribus in distantiis gravitates in eis punctis forent ut *d* ad *e*, sed quia gravitas satellitis *l* est ad gravitatem satellitis L ut *e* ad *d* compensatur discrimen gravitatis ex distantiâ ortum per discrimen gravitatis ex Hypothesi constitutum: mutatio autem quæ ex actione Solis oritur in orbitam satellitis relatè ad ejus primarium pendet ex discrimine actionis Solis in satellitem & in primarium, hoc est in oppositione pendet ex residuo actionis Solis in primarium demptâ actione Solis in satellitem; & in conjunctione ea mutatio pendet ex residuo actionis Solis in satellitem demptâ Solis actione im primarium: Cum ergo actio Solis in satellites L & *l*, sit eadem; sed actio Solis in primarium i sit minor quam in primarium I, in oppositione minus est residuum quod mutationem pariet in orbita satellitis L, quam residuum quod mutationem satellitis *l* parit in orbitâ & majus è contra est residuum in conjunctione respectu orbitæ satellitis L quam respectu orbitæ satellitis *l*; sed illa Residuatam in oppositione quam in conjunctione vim centripetam minuunt; Ergo vis centripeta major manet in R quam in B, & minor è contra in P quam in A, unde patet

DE MUNDI SYSTEMATE.

æqualibus à ſole diſtantiis, gravitas acceleratrix ſatellitis cujuſ. vis in ſolem major eſſet vel minor quam gravitas acceleratrix jovis in ſolem, parte tantum milleſimâ gravitatis totius; foret diſtantia centri orbis ſatellitis à ſole major vel minor quam diſ. tantia

E.6. patet quod ut reſtituatur ſimilitudo inter orbitam ſatellitis L, & orbitam ſatellitis *l* corpus centrale debeat removeri à puncto R & accedere verſus P, hoc eſt transferri ex i verſus I; ita ut centrum orbitæ ſatellitis L remotius eſſe debeat à Sole quam ipſius corpus Centrale.

Jam verò dico illud corpus centrale ad I transferri debere, nam ſit corpus centrale in I, ſemotâ Solis actione, ſatelles L eodem tempore Periodico ac prius deſcribet Ellipſim cujus centrum i, focus verò I & axis major R P, (per Cor. Prop. XV. Lib. I.) & in mediocri ſuâ diſtantia I Q (Cor. 4. Prop. XVI. Lib. I.) velocitatem eamdem habebit quam habet ſatelles *l* in ſuo circulo, qualem v. gr. habet in C ubi velocitatum illarum directiones ſunt Parallelæ tam inter ſe quam diametro R P, & ob diſtantiarum I Q & I C æqualitatem vires centrales ſunt æquales directionis obliquitate paulum differentes; Addatur jam actio Solis, & cum ſit S Q ad S C ut S *i* ad S I actiones illæ Solis (ex Hyp. & demonſtratis) in ſatellites diverſæ gravitatis ſed poſitos in Q & C erunt etiam æquales; Movebitur ergo ſatelles L in mediocribus diſtantiis Q & T ut ſatelles *l* movetur in C & D quam proximè, tam ratione corporis centralis I quam etiam ex adjuncta actione Solis, mutationes verò ex Sole pendentes in A & P, & in R & B æquales ſunt, quia ſunt differentia ejuſdem vis Solis in in I & virium Solis in A & P, ut & virium Solis in R & P, vires autem in A & P ſunt æquales ex Hyp. & dem. ut & in R & P. Unde cum vis Primarii magna cenſenda ſit reſpectu vis S; rationes virium Centripetarum reſiduarum in P & A, B & R manent inter ſe in eadem ratione ac ſi nulla foret actio Solis, & ut ſemotâ actione Solis curvas ſuas iiſdem temporibus deſcribere faciebant, celeritate quidem majori in P, minori in R, media



verò in A & B, itaque eadem proximè iis in punctis manebit ratio deſcriptionis curvarum; cum ergo demonſtratum ſit quod in punctis P Q R T, A C B D actio Solis non turbet relationem quæ intercedit inter modum quo curvæ illæ P Q R T, A C B D deſcribuntur cùm virium rationes eædem maneant ac prius quamproximè, idem etiam de punctis intermediis erit intelligendum. Unde ſequitur quod ſatelles L in orbita P Q R T revolvi poterit eodem tempore iiſdemque proxime Legibus ac Satelles

tantia jovis à ſole (a) parte $\frac{1}{1000}$ diſtantiæ totius, id eſt, parte quintâ diſtantiæ ſatellitis extimi à centro jovis: quæ quidem orbis eccentricitas foret valde ſenſibilis. Sed orbes ſatellitum ſunt jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices jovis & ſatellitum in ſolem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera ſaturni & comitum ejus in ſolem, in æqualibus à ſole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: & pondera lunæ ac terræ in ſolem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accuratè proportionalia. Aliqua autem ſunt per corol. 1. & 3. prop. v.

LIBER TERTIUS. PROP. VI. THEOR. VI.

Quinetiam pondera partium ſingularum planetæ cujuſque in alium quemcunque ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minùs quam pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratia corpora terreſtria, quæ apud nos ſunt, in orbem lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore

telles L in orbitâ ſuâ A C B D, ſi gravior ſit Jove paribus in diſtantiis in ratione duplicatâ diſtantiæ Solis à centro ſuæ orbitæ ad diſtantiam Solis ab ipſo Jove. Q. E. D.

Eamdem demonſtrationem applicari poſſe ad caſum ubi ſatelles ſupponeretur levior Jove paribus in diſtantiis, illumque tunc deſcripturum Ellipſim cujus centrum Sole vicinius erit quam Jupiter ita ut ſit gravitas ſatellitis ad gravitatem Jovis in duplicatâ ratione diſtantiæ Solis à centro Orbitæ ad diſtantiam Solis à Jove. Q. alterum E. D.

Hâc ratione ſatis conſtare aſſertum Newtoni credimus, idem tamen aliter *inito calculo* magis ad mentem Newtoni demonſtrari poſſe non negamus; ſed ratio eum calculum ineundi ex iis quæ poſtea de motibus Lunaribus dicentur, erit deducenda.

(a) * *Parte* $\frac{1}{2000}$ *diſtantiæ totius.* Gravitas acceleratrix Jovis ſit 1, erit (per hyp.) gravitas acceleratrix ſatellitis $1 + \frac{1}{1000}$, ſed (ex dem.) diſtantia inter centrum Solis & centrum orbis ſatellitis major eſt quam diſtantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione illâ ſubduplicatâ quamproximè, hoc eſt, ut 1, ad $\sqrt{1 + \frac{1}{1000}}$. Quarè utriuſque diſtantiæ differentia eſt $\sqrt{1 + \frac{1}{1000}} - 1$ ſeu $\sqrt{\frac{1001}{1000}} - 1 = \sqrt{1.001} - 1 = 1.0004998$ &c. $- 1 = .0004998$ &c. ſive $= \frac{5}{10000} = \frac{1}{2000}$, ideóque diſtantia centri orbis ſatellitis à Sole major erit quam diſtantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius,

66.

DE MUNDI SYSTEMATE.

pore lunæ: ſi horum pondera eſſent ad pondera partium externarum lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam ſupra oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materiâ: omnino contra experientiam.

Corol. 2. Corpora univerſa, quæ circa terram ſunt, gravia ſunt in terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro terræ diſtant, ſunt ut quantitates materiæ in iiſdem. Hæc eſt qualitas omnium in quibus experimenta inſtituere licet, & propterea per reg. III. de univerſis affirmanda eſt. Si æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omninò deſtitueretur, vel pro quantitate materiæ ſuæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Ariſtotelis*, *Carteſii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus niſi in formâ materiæ, poſſet idem per mutationem formæ gradatim tranſmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiæ quam maximè gravitant, & viciſſim corpora maximè gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem ſuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quam probatum eſt in corollario ſuperiore.

Corol.

---

66. tius, id eſt parte quintâ diſtantiæ Satellitis extimi à centro Jovis.

* Nam eſt Diameter Jovis circiter decima pars Diametri Solis ut ſupra indicavimus ſive ut 997 ad 10.000, diſtantiâ extimi ſatellitis eſt 26.63 ſemi Diametrorum Jovis, ergo ea diſtantiæ ſemi Diametros Solis continebit 2.663 aut accuratiùs 2.655.

Solis ſemi Diameter mediocris è terrâ viſus ſecundum Caſſini tabulas eſt 16′. 3″ vel 16′ 4″. Jam verò in Triangulo Rectangulo cujus angulus verticis eſt 16′. 4″ altitudo continet Baſim 213.96 vicibus; ergo inter ſolem & terram intervallum eſt quod Solis ſemi Diametros 213.96 contineret, ſive proximè, Solis Diametros 107.

Jovis autem diſtantia mediocris à Sole eſt ad diſtantiam mediocrem terræ à Sole, ut 52 ad 10, ergo ea continebit ſemi Diametros Solis 1112.592, ejus numeri bis milleſima pars eſt .556296 quæ eſt excentricitas Jovis ſi ſatelles ſit Jove 1000^{a}. parte gravior vel levior paribus in diſtantiis, ille verò numerus .556296 eſt quinta pars numeri 2.78148 paulò majoris quam 2.655 ſed diſtantia extimi ſatellitis a Jove continebat Solis ſemi Diametros 2.655; Ergo excentricitas Jovis ſi ſatelles ſit Jove 1000^{a}. parte gravior vel levior paribus in diſtantiis eſt ad minimum quintâ pars diſtantiæ ſatellitis extimi à Jove. Q. E. D.

Corol. 3. Spatia omnia non ſunt æqualiter plena. Nam ſi ſpatia omnia æqualiter plena eſſent, gravitas ſpecifica fluidi quo regio aëris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aëre deſcendere poſſet. Nam corpora in fluidis, niſi ſpecificè graviora ſint, minimè deſcendunt. Quod ſi quantitas materiæ in ſpatio dato per rarefactionem quamcunque diminui poſſit, quidni diminui poſſit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ ſolidæ ſint ejuſdem denſitatis, neque ſine poris rarefieri poſſint, (z) vacuum datur. Ejuſdem denſitatis eſſe dico, (a) quarum vires inertiæ ſunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis (b) gravitatis diverſi eſt generis à vi magneticâ. Nam attractio magnetica non eſt ut materia attracta. Corpora

(z) * *Vacuum datur.* Quibus reſponſionibus hoc Newtoni ratiocinium effugiant Carteſiani jam diximus (lib. 2. num. 187.).

(a) * *Quarum vires inertiæ.* Cum enim vis inertiæ ſit quantitati materiæ proportionalis, ſi vires inertiæ ſunt ut magnitudines, magnitudines ſunt ut quantitates materiæ, hoc eſt, ſunt ejuſdem denſitatis.

(b) * *Vis gravitatis diverſi eſt generis.* Clariſſ. Muſkenbroek in Diſſertatione de Magnete plurima atque accuratiſſima de hujuſce lapidis actione refert experimenta. Ex deſcriptâ à diligentiſſimo viro experimentorum ſerie palam quidem fit æqualem non eſſe magnetis in varia corpora actionem, eamque tempeſtatum viciſſitudinibus obnoxiam & modò remitti modò intendi. At vim magneticam in ratione multò minori quam triplicatâ diſtantiarum decreſcere eadem oſtendunt experimenta. Hinc poſt tranſcriptum hoc ipſum Corollarium V., ſubdit Muſkenbroek: «utinam memoriæ prodita fuiſſent «experimenta ex quibus Newtonus hæc «collegit; forſitan enim vir ſtupendæ ſub«tilitatis in Mathematicis diſciplinis me«thodum invenit ſeparandi attractiones à «repulſionibus quarum proportionem in di«ſtantiæ ratione triplicatâ decreſcere de«prehendit, ſed quia nihil de hâc re ulte«rius determinavit nec amplecti ejus ſen«tentiam poſſumus:». Ut intelligantur hæc Clariſſ. Muſkenbroekii verba, ſciendum eſt virum doctiſſimum ſuis experimentis in eam inductum fuiſſe ſuſpicionem, quod ſcilicet magnes conſtaret partibus valdè heterogeneis, quarum quædam attraherent quædam repellerent ità ut duæ illæ vires oppoſitæ vel ſimplicis repulſionis vel attractionis proportionem turbent. Idque non caret veriſimilitudine, cum experimentis notiſſimum ſit magnetes non ſolùm ſeſe mutuò attrahere, ſed etiam alterutro magnete in contrariam partem converſo, unum ab altero repelli. Uterque magnetis polus vim repellentem atque attrahentem æquè oſtendit & idcircò ex eodem polo vis attrahens & repellens emanat. Si amici magnetum poli ſibi obvertantur, attractio præpollet repulſioni, ſi e contrà inimici poli ſeſe invicem reſpiciant, prævalet repulſio. Quamobrem qui ſolam attractionem vult cognoſcere, perſpectam habere debet eorundem polorum vim repulſivam eamque addere vi attrahenti experimento cognitæ, ſumma in-

DE MUNDI SYSTEMATE.

pora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi potest & remitti, estque nonnunquam longè major pro quantitate materiæ

60. dicabit vim totam attrahentem. Hinc forsan fieri posset ut separatis ab invicem attractionis repulsionisque viribus, constans quam Newtonus deprehendit inter attractiones & distantias proportio obtineret. At verò cum ex crassis observationibus duntaxat id se animadvertisse fateatur Newtonus, non ità longè quærenda videtur mens nostri autoris.

* Vim magneticam decrescere in ratione triplicatâ distantiarum ab experimentis statuit Wisthonus in egregio opusculo, De Acus magneticæ inclinatione: ipse autem Muyschenbroekius in Tomo primo Physices suæ, Rationem diminutionis vis magneticæ esse ferè quadruplicatam distantiarum deducit ingeniosissimis experimentis, scilicet magnetem unum alteri lanci bilancis appendit, ponderibus in alterâ lance ad æquilibrium instituendum impositis, tum admovet magnetem sub eo qui suspensus est, sic vis attractionis magnetum æquilibrium tollit, quod adjectis ponderibus restituitur, & pondera illa addenda varia sunt pro varia distantia magnetum inter se, ita ut videantur sequi rationem quadruplicatam inversam spatii vacui inter magnetes intercepti, quod spatium vacuum non est Cylindricum aut Prismaticum, quia magnetes quibus utebatur Cl. Muyschenbroekius erant Sphærici unde hæc ratio non est accurate ratio quadruplicata inversa distantiarum.

Aliâ ratione hæc experimenta possunt instituì, nempe considerando actionem magnetis in acum magneticam, quantum nempe pro variâ magnetis distantiâ à magnetico meridiano acum detorqueat, atque hâc ratione, experimenta à Wisthono institura fuisse (nisi memoria fallit) puto, quæ forte Methodus ea est etiam quâ Newtonus usus fuerat, & sane omnibus probè notatis quæ ad æstimationem virium requiruntur, vis magneticæ diminutionem secundum triplicatam rationem procedere experimentis quam accuratissimè potui institutis deprehendi, quæ quidem experimenta (cum non sint ad manum ea quæ Wisthonus hâc de re tradidit) referre nostri puto esse instituti.

Sit ergo A C B, meridianus magneticus, N C S acus magnetica actione magnetis M, extra meridianum magneticum tracta, sitque linea C m à centro acus ad centrum magnetis ducta meridiano magnetico perpendicularis & statim supponatur distantiam C m à centro acus ad centrum magnetis esse Physicè infinitam.

Vis magnetica terræ retrahit acum a situ S C N ad B C A, sed quia illi situi est obliqua, resolvenda est in duas vires unam lineæ S C N perpendicularem alteram ipsi Parallelam; hæc frustra agit obnitente centro C, illa verò gyrationem acus efficit, itaque si in puncto quovis c, a c repræsentet vim magneticam totam, a n repræsentabit vim quâ convertitur acus quæ ideo est ad vim magneticam totam in eo puncto ut sinus anguli a c n (declinationis acus à meridiano magnetico) ad Radium; In omnibus punctis C N vim æqualem exerceri supponi potest, sed in parte C S vis ea repulsivè agit, ideoque consentit cum vi quæ convertit partem C N, & ejus efficaciam geminat: Notum est verò quod si vires æquales in omnibus punctis C N agant æqualiter & perpendiculariter ut eam lineam convertant earum omnium efficacia eadem erit ac si summa omnium virium perpendiculariter ageret in puncto P duabus tertiis partibus acus C N à centro C remoto, hic ergo collecta censeri potest tota vis magnetica convertens partem C N, & eodem ratiocinio vis repulsiva convertens partem C S, in puncto p, duabus tertiis arcus C S à centro C remoto, collecta censeri potest; & propter æqualitatem linearum C N, C S, ideoque partium C P ac C p, tota vis magnetica tam attractiva quam repulsiva acum convertens puncto P applicata censeri potest.

Si magnes M ab acu infinitè distaret, pari ratiocinio ostenderetur vim totam quâ con-

teriæ quam vis gravitatis, & in receſſu à magnete decreſcit in ratione diſtantiæ non duplicatâ, ſed ferè triplicatâ, quantum ex craſſis quibuſdam obſervationibus animadvertere potui.

LIBER TERTIUS. PROP. VI. THEOR. VI.

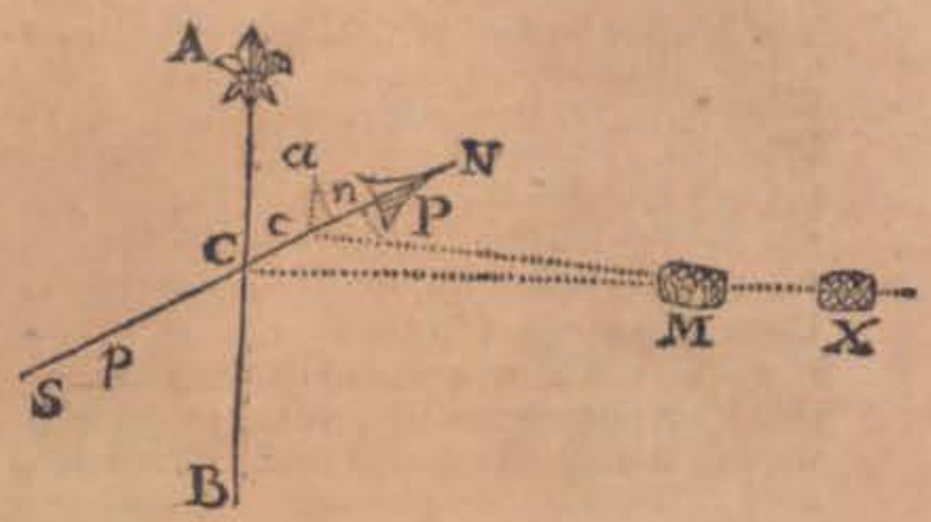
PRO-

convertit acum in puncto P eſſe collectam & per reſolutionem virium, vim quâ convertit acum, eſſe ad vim totam ejus magnetis M ut ſinus anguli NCM (deviationis nempe acus à magnete) ad Radium.

Hinc in caſu, in quo acus quieſcit, vis magnetica terræ convertens acum eſt æqualis vi magnetis convertenti acum, ſiquidem manet acus in æquilibrio in ſitu NSC, cum ergo ſit vis magnetica terræ tota, ad vim magneticam terræ convertentem acum ut Radius ad ſinum declinationis acus à meridiano magnetico; & ſit vis magnetis convertens acum (æqualis illi vi magneticæ terræ convertenti acum) ad vim totam magnetis ut ſinus deviationis acus à magnete ad Radium; ex æquo & per compoſitionem rationum habebitur vis tota magnetica terræ ad vim totam magnetis M ut ſinus deviationis acus à magnete, ad ſinum declinationis acus à meridiano magnetico, quod etiam per compoſitionem virium demonſtrari potuiſſet.

Itaque ſi idem magnes ad aliam diſtantiam ponatur, ut in X, ita ut in alio ſitu acum conſtituat, habebitur etiam vis magnetis in X, ad vim totam magneticam terræ, ut ſinus declinationis acus à meridiano magnetico ad ſinum deviationis acus à magnete. Quare per compoſitionem rationum erit vis magnetis in X, ad vim magnetis in M, ut ſinus declinationis acûs à meridiano magnetico cum magnes eſt in X diviſus per ſinum deviationis ab eo magnete in X poſito, ad ſinum declinationis acus à meridiano magnetico cum magnes eſt in M diviſum per ſinum deviationis à magnete, in M poſito, hoc eſt, vis magnetis in diverſis diſtantiis, (infinitis, reſpectu magnitudinis acus) eſt ut ſinus declinationis acus à magnetico meridiano diviſus per ſinum deviationis ejus à magnete.

Equidem quando magnes ſatis eſt vicinus ab acu ut diverſa cenſeri poſſit ejus diſtantia à diverſis punctis acus, & fortior ſit ejus vis in puncta viciniora quam in



remotiora, ſimulque actio magnetis ad diverſa puncta acus diverſa cum obliquitate applicetur, centrum actionis vis magnetis fiet vicinius extremitati N, attamen ob figuram vulgarem acus magneticæ quæ ſpiculi inſtar formata circa punctum P latior eſt, centrum rotationis acus in puncto P manere cenſeri poteſt niſi nimia ſit magnetis vicinia. 6 6.

Ideoque diſtantia magnetis ab acu & angulus deviationis acus à magnete determinabuntur ducendo lineam à centro magnetis ad id punctum P atque his Principiis per experimenta mox recenſenda vires magnetum in diverſis diſtantiis poſitorum fuerunt æſtimatæ.

In his experimentis adhibita fuit acus magnetica trium pollicum; quæ ut ſolet, attingebat utrâque extremitate circulum diviſum in ſuos gradus, ductaque linea perpendiculari in centrum acus cùm ſponte in meridiano magnetico jacebat, applicabatur magnes Parallelepipedon ſuper eam lineam ita ut ejus facies Polares perpendiculares eſſent ei lineæ, Poluſque ejus meridionalis acum ſpectaret, Borealemque ejus extremum ad ſe traheret, menſurabantur diſtantiæ à centro acus ad centrum magnetis in Pollicibus lineiſque Pariſienſibus, & obſervabatur quantùm in ſingulis magnetis diſtantiis diſcederet acus à meridiano magnetico, tum, primò graphicè, poſtea calculo Trigonometrico, diſtantia centri magnetis, à centro Rota-

DE MUNDI SYSTEMATE.

tionis acus, ut & angulus ejus lineæ cum acu, determinabantur; diviso itaque sinu declinationis acus per sinum istius anguli Quotiens exprimit Rationem vis magneticæ in distantia singula inventa, sive Logarithmis utendo, Differentia Logarithmorum Sinuum angulorum deviationis à meridiano magnetico & à magnete erit Logarithmus vis magneticæ, in distantia in quâ anguli illi habentur, & tertia pars ejus differentiæ erit Logarithmus Radicis cubicæ vis magneticæ, & assumptis iis Radicibus cubicis in numeris, si per eas dividatur numerus aliquis constans (qui hic est $57\frac{3}{4}$) Quotientes erunt ipsæ distantiæ; Unde liquet quod Radices cubicæ virium magnetis sunt inverse ut distantiæ sive quod vis magnetica sit inverse in ratione triplicatâ distantiarum: sequenti verò tabellâ exhibentur hæc experimenta magnâ curâ instituta, cum calculo inde deducto; Prima columna designat distantias à Centro acus ad Centrum magnetis; Secunda columna designat distantiam à Centro rotationis acus ad centrum magnetis; Tertia declinationem acus à meridiano magnetico cum suo Logarithmo & tertiâ ejus parte; Quarta, declinationem acus à lineâ ductâ à centro rotationis acus ad centrum magnetis cum suo Logarithmo & tertiâ parte; Quinta, differentias earum tertiarum partium, cum suis numeris qui rationem exprimunt Radicum cubicarum virium magnetis in diversis distantiis; Sexta denique Quotientes numeri $57\frac{3}{4}$ per istos numeros divisi, qui Quotientes ipsas distantias quamproxime æquant.

66.

Distantia à Centr. magn. ad Centrum acus.	Distantia à Centr. magn. ad Cent. rotat. acus.	Declin. à merid. magnetico cum Logar. & ejus tertiâ parte observata.	Declin. à magnete cum Logarith. & ejus tert. parte.	Differentia tertiar. part. Logar. cum suis numeris.	Quotientes numeri $57\frac{3}{4}$ per numer. qui Radic. Cubic. virium magneticarum exhibent divisi.
51.46	40	75d.	19d. 27		
		9.9849438	9.5224235	0.1541734	
		3.3283146	3.1741412	n. 1.426	40.4
60.16	50	61	35. 41		
		9.9418193	9.7658957	0.2586412	
		3.3139398	3.2552986	n. 1.144	50.4
67.49	60	44d. 30′	53d. 42′		
		9.8456618	9.9062964	—1.9797885	
		3.2818873	3.3020988	n. 0.9545	60.5
83	80	21	77°. 6′		
		9.5543292	9.9888982	—1.8541437	
		3.1837764	3.3296327	n. 0.7147	80.8
101	100	11d.	85d. 46′		
		9.2805988	9.9988135	—1.7605951	
		3.0935329	3.3329378	n. 0.5762	100.2
120.7	120	6. 20′	89′ 22′		
		9.0426249	9.9999735	—1.6809838	
		3.0143083	3.3333245	n. 0.4797	120.3
150.2	150	3. 20	91. 15		
		8.7645111	9.9998966	—1.5882049	
		2.9215037	3.3332988	n. 0.3874	149.
180.1	160	2d. 40′	91d. 38′		
		8.6676893	9.9998235	—1.5559553	
		2.8892298	3.3332745	n. 0.3597	160.5

Eodem

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.

Planetas omnes in se mutuò graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à centro planetæ. Et inde consequens est (per prop. LXIX. lib. 1. & ejus corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porro cum planetæ cujusvis *A* partes omnes graves sint in planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius; & actioni omni reactio (per motûs legem tertiam) æqualis sit; planeta *B* in partes omnes planetæ *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus (c) in attractionibus magneticis & electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas.

Res

Eodem modo experimenta instituta sunt linea à centro magnetis ad centrum acus angulum 45 graduum cum meridiano magnetico constituente.

Repetita fuere ea experimenta cum duobus diversis magnetibus, & vires quidem diversæ sunt repertæ sed decrescere secundum eamdem distantiarum rationem deprehensæ sunt.

Repetita fuere cum magnetibus iisdem & armatis & armatura spoliatis & quod omninò observabile est, idem magnes eamdem declinationem acus magneticæ produxit sive armatus foret sive non armatus, in eadem nempe centri magnetis à centro acus distantia ac directione; Quod quidem Paradoxon videbitur cum vis quâ magnes armatus ferrum sustinet, multum differat à vi quâ idem magnes non armatus ferrum trahit. Idem tamen Phænomenon in utroque magnete deprehendi in quâlibet distantiâ ac directione ita ut cum tutius mensurarentur distantiæ centri acus & centri magnetis, magnete non armato sum usus in experimentis præcedentibus, ex quibus satis probari credo; *In recessu à magnete vim magneticam decrescere in ratione ferè triplicatâ quantum saltem crassis illis observationibus animadverti potest.*

(c) * *In attractionibus magneticis & electricis*, ubi ut plurimùm quò majùs est attrahens, eò cæteris paribus, major est attractio.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Res (d) intelligetur in gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire & planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. (e) Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos ſunt, hâc lege gravitare deberent in ſe mutuò, cum tamen ejuſmodi gravitas neutiquam ſentiatur: reſpondeo quod gravitas in hæc corpora, cum ſit ad gravitatem in terram totam ut ſunt hæc corpora ad terram totam, longè minor eſt quàm quæ ſentiri poſſit.

Corol. 2. Gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à particulis. Patet per corol. 3. prop. LXXIV. lib.

PRO-

66.

(d) * *Res intelligetur in gravitate.* Vires quæ ſunt ut materia in omnium formarum corporibus atque ideò non mutantur cum formis, reperiri debent in corporibus univerſis ſinguliſque corporum partibus & eſſe proportionales quantitati materiæ, hinc vis corporis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Si itaque concipiamus Jovem & Satellites ejus ad ſe invicem accedere ut globum unicum componant, pergent ſinguli ſeſe mutuò trahere, & viceverſâ ſi corpus Jovis reſolveretur in globos plures, hi quoque globi ſatellitum inſtar ſeſe mutuò traherent.

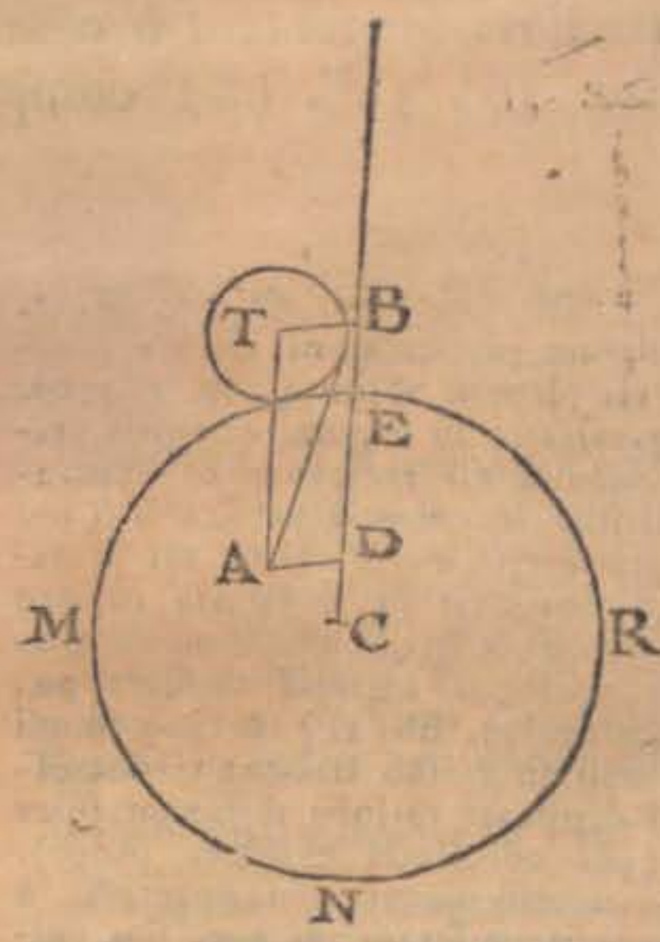
67. Globi cujuſque vis abſoluta eſt ut quantitas materiæ in eodem globo; vis autem motrix quâ globus unuſquiſque trahitur in alterum & quæ ponderis nomine vulgò deſignatur, eſt ut contentum ſub quantitatibus materiæ in globis duobus applicatum ad quadratum diſtantiæ inter centra (per cor. 4. prop. 76. lib. 1.) & huic vi proportionalis eſt quantitas motûs quâ globus uterque dato tempore movebitur in alterum (def. 8. lib. 1.) vis autem acceleratrix quâ globus unuſquiſque pro ratione materiæ ſuæ attrahitur in alterum eſt ut quantitas materiæ in globo altero applicata ad quadratum diſtantiæ inter centra (per cor. 2. prop. 76. lib. 1.) & huic vi proportionalis eſt velocitas quâ globus attractus dato tempore movebitur in alterum (def. 7. lib. 1.). Hinc coporum cæleſtium motus inter ſe poſſunt facile determinari. Quia verò reſpectu terræ totius exigua admodum ſunt corpora terreſtria, patet minimam quoque eſſe mutuam horum corporum attractionem reſpectu attractionis in terram totam. Sic ſphæra terræ homogenea diametroque pedis unius deſcripta minus trahet corpuſculum juxtà ſuperficiem ſuam quam terra juxtà ſuam in ratione diametri ſphæræ ad diametrum terræ (prop. 72. lib. 1.) hoc eſt in ratione 1 ad 39231565 ſive 1 ad 40000000 circiter, quæ tantilla vis ſentiri non poteſt.

(e) * *Si quis objiciat* &c. Majora etiam quæ in terrâ concipi poſſunt corpora haud magnos effectus producent. Sit enim EMNR, tellus cujus centrum C, eaque ponatur ſphærica & homogenea. Sit corpus ubicumque putà in loco B, ſublato omni impedimento, ad telluris ſuperficiem perpendiculariter dirigeretur per rectam BEC; in ipsâ telluris ſuperficie addatur ſphæra T, telluri homogenea triumque milliarium ſive Leucæ unius marinæ diametro deſcripta quam tangat recta BEC; deſignet EC vim gravitatis in ipſa ſuperficie terræ & deſignabit TB gravitatem in ipſa ſuperficie ſphæræ T (prop. 72. lib. 1.) gravitas in E, in tellurem erit ad gravitatem in B in eandem, ut BC^2 ad EC^2 (prop. 74. lib. 1.). Quare ponendo

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

Si globorum duorum in se mutuò gravitantium materia undique in regionibus, quæ à centris æqualiter distant, homogenea sit: erit pondus globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum distantiæ inter centra.

Postquam inveniissem gravitatem in planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & esse in partes singulas reciprocè proportionalem quadratis distantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi totâ ex viribus pluribus compositâ, an verò quam proximè. Nam fieri posset ut proportio, quæ in majoribus distantiis accuratè obtineret, prope superficiem planetæ ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles, notabiliter erraret.



do BC^2 ad EC^2 ut EC ad BD, recta BD exibebit gravitatem in terram in loco B, ac proinde completo rectangulo TBAD, gravitatis directio erit per diagonalem BA (41. lib. 1.). Jam in triangulo rectangulo BAD, est BD ad AD ut radius ad tangentem anguli DBA. Quia verò telluris semidiameter mediocris est fere 1145 Leucarum Marinarum (quarum nempe viginti gradum complent, uno marino milliari singulo gradus minuto respondenti) poni etiam potest recta BD æqualis EC, ideoque erit ad TB, sive BD ad AD ut 2290 ad 1, unde prodit angulus ABD, minuti primi cum dimidio. Si itaque loco sphæræ T, intelligatur mons aliquis cujuscumque figuræ cujus attractio æquipolleat attractioni ipsiusmet sphæræ, pendulum ad radicem hujusce montis constitutum vi montis attractum deviabit à perpendiculo magis quam minuti unius primi intervallo. Hæc autem aberratio minor fiet, si pendulum in partes contrarias ab aliis montibus circumpositis trahitur, si densitas partium internarum terræ, major sit quam densitas partium montis, denique ex Piramidali montium figurâ, aliisque forte causis, hinc admodum difficile ut perturbationes illæ sensibiles fiant nisi in maximis montibus; ut etiam D. Bouguer attractionem montis Chimborazo in Peruvio sensibilem deprehendit.

DE MUNDI SYSTEMATE.

raret. Tandem verò, (f) per prop. LXXV. & LXXVI. libri primi & ipsarum corollaria, intellexi veritatem propositionis de quâ hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter se comparari possunt pondera corporum in diversos planetas. Nam pondera corporum æqualium circum planetas in circulis revolventium sunt (per corol. 2. prop. IV. lib. 1.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inversè; & pondera ad superficies planetarum, aliasve quasvis à centro distantias, majora sunt vel minora (per hanc propositionem) in duplicatâ ratione distantiarum inversâ. Sic ex temporibus periodicis veneris circum solem dierum 224 & horarum $16\frac{3}{4}$, satellitis extimi circumjovialis circum jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{11}$, satellitis Hugeniani circum saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & lunæ circum terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum distantiâ mediocri veneris à sole & cum elongationibus maximis heliocentricis satellitis extimi circumjovialis à centro jovis $8'. 16''$. satellitis Hugeniani à centro saturni $3'. 4''$. & lunæ à centro terræ $10'. 33''$. (g) computum ineundo inveni quod corporum

68. (f) * *Per prop. 75. & 76. lib.* 1. Ex singularum particularum viribus componitur vis planetæ totius (cor. 1. prop. 7.) & gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciproce ut quadratum distantiæ locorum à particulis (per cor. 2. prop. ejusdem). Hinc vis planetæ totius decrescit in duplicatâ ratione distantiarum à centro, modò tamen planetæ ex uniformi materiâ constare ponantur (prop. 75. lib. 1.) & hujusmodi planetæ duo se mutuò trahent vi decrescente in duplicatâ ratione distantiæ inter centra (per corollaria ejusdem prop.). Quamvis autem planetæ in progressu à centro ad circumferentiam non sint uniformes, obtinebit idem decrementum in ratione duplicatâ distantiæ (prop. 76. lib. 1.) si secundùm quamcumque Legem crescat vel decrescat densitas in progressu à centro ad circumferentiam, & similiter hujusmodi planetæ duo sese invicem trahent viribus in ratione duplicatâ distantiarum inter centra decrescentibus.

(g) 68. * *Computum ineundo*, * ut hæc omnia ad Algebrica signa revocentur; sit S centrum Solis, V centrum Veneris, P centrum alterius Planetæ Primarii, L satelles in maximâ suâ elongatione heliocentricâ: quam metitur angulus L S P, unde angulus S L P est rectus.
Dicatur tempus Periodicum Veneris t;
tempus Periodicum satellitis L circa primarium P dicatur b.
Distantia S P qualiscumque sit dicatur z;
Ratio S P ad S V quæ datur per Phænom. IV. exprimatur per rationem a ad b, inde erit $SV = \frac{bz}{a}$;
& Radio existente 1 sinus elongationis maximæ heliocentricæ satellitis L, sive sinus anguli L S P dicatur e;
Hinc in Triangulo S L P Rectangulo, erit sinus

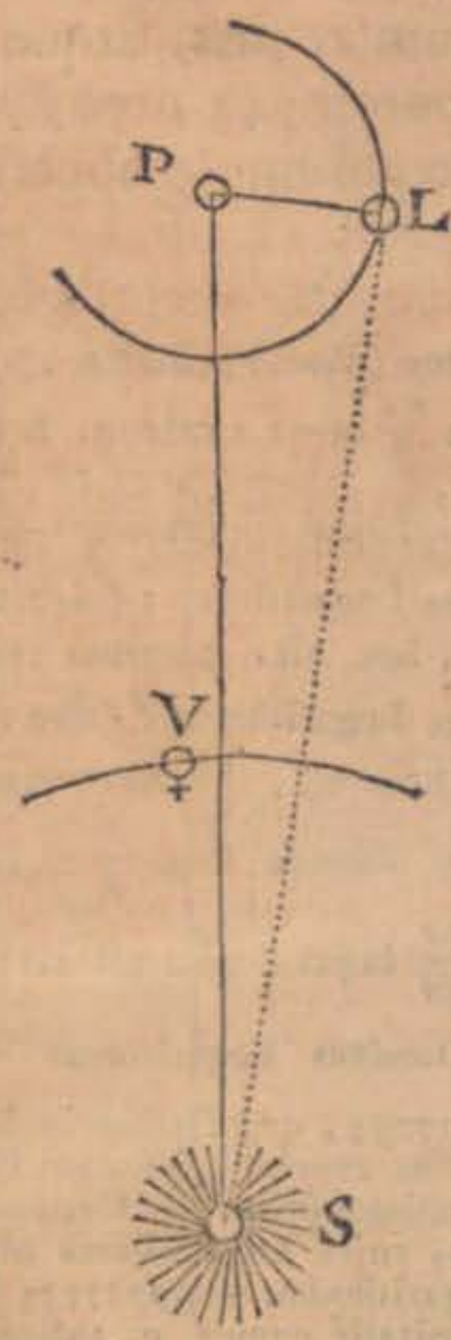
porum æqualium & à centro ſolis, jovis, ſaturni ac terræ æqualiter diſtantium pondera ſint in ſolem, jovem, ſaturnum ac terram

LIBER TERTIUS. PROP. VIII. THEOR. VIII.

ſinus totus anguli SLP (1) ad ſinum anguli LSP (*e*) ut latus SP (*z*) ad latus PL quod erit ergo *ez*;
Quoniam vis Solis in venerem & vis Primarii in ſatellitem, ſunt per Cor. 2. Prop. IV. Lib. 1. ut Diſtantiæ Veneris & Satellitis à Centro Solis & Primarii diviſæ per quadrata temporum Periodicorum, ſive ut $\frac{bz}{att}$ ad $\frac{ez}{\theta\theta}$, ſive, ſi vis Solis dicatur 1, erit vis Primarii $\frac{aett}{b\theta\theta}$.

Sed vis Primarii in ſatellitem in diſtantia PL, eſt ad vim quâ in ipſum ageret ſi tantumdem diſtaret quantùm diſtat Venus à Sole, inverſè ut quadrata diſtantiarum, fiat ergo $\frac{1}{e^2z^2}$ ad $\frac{a^2}{b^2z^2}$ ut $\frac{aett}{b\theta\theta}$ ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ & habebitur tandem quod vis Solis in venerem eſt ad vim Primarii P in ſatellitem, ſi tantumdem diſtaret ab ipſo quantum diſtat Venus à Sole ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$.

Jam verò transferantur Venus & Satelles in alia quâcumque diſtantiâ ſed ita ut ambo iterum æqualiter diſtent à Corpore ſuo Centrali; Vires quidem Centralium corporum in ipſos mutabuntur, ſed eodem modo utrinque mutabuntur; unde manebunt in eâdem ratione ac priùs, nam erit ut quadratum novæ diſtantiæ ad quadratum prioris diſtantiæ, ut vis prior Solis in Venerem ad vim novam; & in eadem ratione erit vis prior Primarii in ſatellitem ad ejuſdem vim novam unde alternando, vis Prior Solis in Venerem eſt ad vim Ptiorem Primarii in ſatellitem, ut vis nova Solis in venerem ad vim novam primarii in Satellitem, ergo in qualicumque diſtantia, ſi modo æqualiter diſtent Venus & Satelles à ſuo Corpore Centrali vis Solis erit ad vim Primarii ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$.



Denique, cum pondera Corporum ſint ut Vires Centrales & quantitates materiæ quæ per eas Vires urgentur conjunctim, & in hoc Corollario Newtonus ſupponat *Corpora æqualia & æqualiter à Corporibus centralibus diſtantia* Pondera talium Corporum erunt ut Vires Centrales ideoque Pondus in Solem erit ad Pondus in Primarium qualemcumque ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta}$. 68

Computus per Logarithmos commodè initur, exempli gratia ſit P centrum Jovis, & L hujus extimus ſatelles, eſt *b* ad *a* ut 72333 ad 520096 quorum Logarithmi ſunt 4.8593365 & 5.7160855; eſt *e* ſinus anguli 8′ 16″ cujus Logarithmus eſt

DE MUNDI SYSTEMATE.

terram ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, $\frac{1}{169282}$ (h) respectivè, & auctis vel diminutis distantiis, pondera diminuuntur vel augentur in duplicatâ ratione: pondera æqualium corporum in solem, jovem, saturnum ac terram in distantiis 10000, 997, 791, & 109 ab eorum centris, atque ideò in eorum superficiebus, (i) erunt ut 10000, 943, 529, & 435 respectivè. Quanta sint pondera corporum in superficie lunæ dicetur in sequentibus.

Corol.

68. —3.3810609 (Radio existente 1) hinc Logarithmus $\frac{ae}{b}$ = —2.2378099, & Logarithmus $\frac{a^3e^3}{b^3}$ hujus triplus est —6.7134297.

Præterea Logarithmus t (sive 224^d. horar. $16\frac{3}{4}$, hoc est, horarum $5392\frac{3}{4}$) est 3.7318103, Logarithmus θ (sive 16^d. $16\frac{8}{15}$ horar., hoc est, horarum $400\frac{8}{15}$ est 2.6026384 ideoque Log. $\frac{t}{\theta}$ est 1.1291719 & Log. $\frac{tt}{\theta\theta}$ hujus duplus est 2.2583438.

Unde tandem Logarithmus $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ est —4.9717735, quæ fractio in Decimalibus potuisset exprimi, sed eam Newtonus exprimit unitate divisâ per Denominatorem quemdam, cujus Logarithmus obtinebitur hunc Logarithmum —4.9717735 ex Logarithmo unitatis nempe 0. tollendo, erit ideo 3.0282265 cujus Logarithmi numerus est 1067 ut eum Newtonus invenit.

(h) * *Respectivè &c.* * In præcedentibus Editionibus (ante Londinensem) indicabat Newtonus hic loci elementa ex quibus rationes verarum Diametrorum Jovis, Saturni & Terræ determinaverit, quæ quidem elementa, ex novis observationibus, quibusdam minutiis immutavit, illa hæc esse nobis videntur.

Primò, Diametrum Solis ex mediocri Terræ distantiâ visam, $32'\ 8''$ assumit, qualem etiam Cassinus in novissimis Astronomicis Tabulis eam constituit, cum prius 32. 12″ statueretur; tum Diametrum Jovis in mediocri ejus à Tellure distantia 37″ facit qualem eam prodiisse sub finem primi Phænomeni dicit, cum prius fieret 40″: Ex his, cùm distantia mediocris Solis (sive Telluris n. 53.) à Jove sit ad mediocrem distantiam Solis à Terrâ ut 520096 ad 100000 (per Phænom. IV.) & Diametri veræ Sphærarum sub parvis angulis visarum sint directè ut anguli sub quibus videntur & ut Distantiæ ex quibus spectantur erit Diameter vera Solis ad veram Diametrum Jovis ut 1928″×100000 ad 37″×520096 sive 10.000 ad 997. ut calculo invenitur.

Secundò, Diametrum Saturni in mediocri ejus à Sole sive Tellure distantia assumit 16″, quem 22″ in prioribus Edit. faciebat, inde cum distantia ejus mediocris à Sole sive Tellure, sit ad mediocrem distantiam Solis à terrâ ut 954006 (Phæn. IV.) ad 100000 erit Diameter vera Solis ad veram Diametrum Saturni ut 1928″×100000 ad 16″×954006, sive 10000 ad 791.

Denique Parallaxim Solis, in distantia ejus mediocri 10″ 30‴ constituit, Parallaxis verò Solis est ipsa semi-Diameter Terræ è Sole visa, ergo Diametri veræ Solis & Terræ, sunt ut Diameter Solis apparens ad duplum Parallaxeos Solis, hoc est, 1928, ad 21, sive ut 10000 ad 109 proximè.

(i) * *Erunt ut*; * Ut insistere pergamus ei Analysi quâ Newtonus usus esse videtur, assumptis omnibus ut in Nota 68.

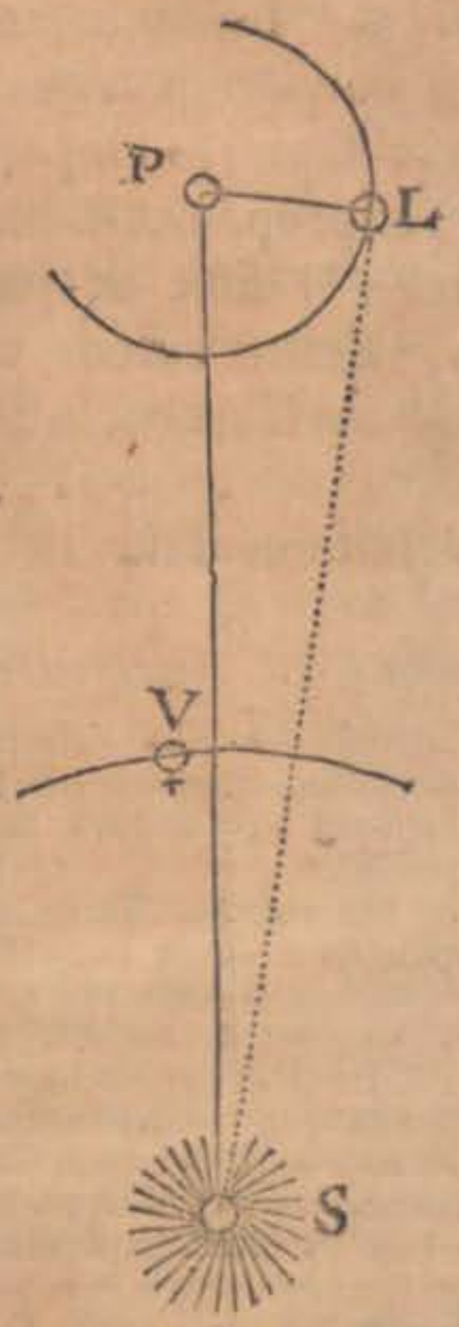
Tangens semi-Diametri apparentis Solis dicatur s, Radio existente 1.

Sinus Parallaxeos Solis (quæ est semi-Diameter primarii P è Sole visi) dicatur p.

Vera semi-Diameter Primarii dicatur d.

Erit ex natura Parallaxeωn p ad 1 sicut d ad

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in planetis singulis. Nam quantitates materiæ in planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantiis ab eorum centris, id est, in sole, jove,



68.

d ad PS quæ dicebatur z quæque ideo dicenda erit $\frac{d}{p}$.

Pariter sicut 1 ad s, distantia z sive $\frac{d}{p}$ ad semidiametrum veram Solis quæ erit $\frac{s\,d}{p}$.

Rursus Parallaxis satellitis L dicatur q. Ex naturâ Parallaxeωn erit q ad 1 ut d ad PL, quæ ideo erit $\frac{d}{q}$ & numerus semi-Diametrorum Primarii P in ea linea PL contentus erit $\frac{1}{q}$, & cum singula semi-Diameter è Sole spectata, videatur sub angulo cujus sinus est p, propter istorum sinuum parvitatem, anguli erunt ut sinus, & sinus elongationis heliocentricæ qui dicebatur e continebit sinum p numero vicium qui dici poterit $\frac{1}{q}$ ideoque erit $e = \frac{p}{q}$.

Si autem fingatur Corpus in Solis superficie positum, quod itaque ab ejus Centro distet quantitate æquali ejus veræ semi-Diametro $\frac{s\,d}{p}$, vis Solis in id Corpus, erit ad vim P in corpus æquale ad eamdem distantiam à Centro ejus Primarii positi ut 1 ad $\frac{a^3 e^3}{b^3} \times \frac{t\,t}{\theta\theta}$ per not. 68, sive substitutione factâ $\frac{p^3}{q^3}$ loco e^3, ut $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{t\,t}{\theta\theta}$.

Sed hæc vis Primarii in id corpus, erit ad vim ejusdem corporis in superficie Primarii positi inversè ut Quadrata distantiarum sive inversè ut Quadrata Diametrorum verarum Solis & Primarii sive erit $\frac{p^2}{s^2 d^2}$ ad $\frac{1}{d^2}$ sicut $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{t\,t}{\theta\theta}$ ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^3} \times \frac{t\,t}{\theta\theta}$ quæ quantitas exprimet vim Primarii in corpus in suâ superficie positum, dum vis Solis in Corpus æquale in suâ superficie etiam positum erit 1: Quæ quantitas $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^3} \times \frac{t\,t}{\theta\theta}$ est æqualis quantitati $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{t\,t}{\theta\theta}$ (quæ vim in æqualibus distantiis exprimit) divisæ per $\frac{p^2}{s^2}$. Sed ob æqualitatem corporum vires in Corpora sunt ut Pondera Corporum; hinc ergo habetur ratio Ponderis Corporum æqualium in superficiebus Solis, Jovis, Saturni ac Terræ.

Quare si Logarithmis utamur; Ex Logarithmo p tollatur Logarithmus s, & residui duplum tollatur ex Logarithmo numeri

DE MUNDI SYSTEMATE.

jove, ſaturno ac terrâ ſunt ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ reſpectivè. Si parallaxis ſolis ſtatuatur major vel minor quam $10''.30'''$, (k) debebit quantitas materiæ in terrâ augeri vel diminui in triplicatâ ratione.

Corol. 3. Innoteſcunt etiam denſitates planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri, per prop. LXXII. lib. 1. ideoque ſphærarum heterogenearum denſitates (l) ſunt ut pondera illa applicata ad ſphærarum diametros. Erant autem veræ ſolis, jovis, ſaturni ac terræ diametri ad invicem ut 10000, 997, 791, & 109, & pondera in eoſdem ut 10000, 943, 529 & 435 reſpectivè, & propterea denſitates ſunt ut 100, $94\frac{1}{2}$, 67 & 400. (m) Denſitas terræ

68. meri qui exprimebat vim Primarii in æqualibus diſtantiis, reſiduum erit Logarithmus vis Primarii in Corpora in ejus ſuperficie poſita.

Calculus iſte reſpectu Terræ commodè fieri poteſt, quia datur ex obſervatione Parallaxis Solis p, & apparens Solis ſemidiameter: In Jove & Saturno Parallaxis ipſorum eſt æqualis eorum ſemidiametro apparenti in mediocri ipſorum diſtantiâ, & ſemidiameter apparens Solis in ipſis eſt ad ſemidiametrum Solis apparentem in terrâ, inverse ut diſtantiæ eorum & Terræ à Sole.

(k) *Debebit quantitas materiæ in terrâ augeri vel diminui in triplicatâ* Parallaxeωn *ratione.* * Nam cum quantitates materiæ in Planetis ſingulis, ſint ut eorum vires in æqualibus diſtantiis; Quantitas materiæ in Sole eſt ad quantitatem materiæ in terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, manente ergo ratione a ad b diſtantiarum nempe Terræ & Veneris à Sole, manentibus temporibus Periodicis Veneris & Lunæ t & θ, & ſinu Parallaxeos Lunæ q, liquet quod ſi varietur ſinus Parallaxeos Solis p & ex novis obſervationibus, putà ex obſervatione tranſitus Veneris ſuper diſcum Solis, alia Parallaxis cujus ſinus ſit π deprehendatur, eo caſu invenietur quantitas materiæ in Sole ad quantitatem materiæ in terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 \pi^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, itaque quantitas materiæ terræ in præcedenti Hypotheſi Parallaxeos p reperta, erit ad eam quæ tunc invenietur ut p^3 ad π^3 ſive (ob exiguitatem angulorum Parallacticorum) ut cubi Parallaxeωn.

(l) * *Sunt ut pondera illa.* Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas & inæquales ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri (loco cit.), & pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras heterogeneas & æquales in ſuperficiebus ſphærarum ſunt ut quantitates materiæ in ſphæris, hoc eſt, ut denſitates ſphærarum (2. lib. 1.). Undè pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras heterogeneas & inæquales in ſuperficiebus ſphærarum ſunt in ratione compoſitâ ex ratione denſitatum & diametrorum ſphærarum, conſequenter denſitates ſphærarum ſunt pondera illa directe & ſphærarum diametri inverse.

(m) * *Denſitas terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet à parallaxi Solis* &c. * Ratio Ponderum in ipſis ſuperficiebus Solis & Terræ exprimebatur numeris 1 ad $\frac{a^3 p s^2}{D^5 q^2} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ (denominationibus iiſdem

terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet à parallaxi ſolis, ſed determinatur per parallaxin lunæ, & propterea hic rectè definitur. Eſt igitur ſol paulò denſior quam jupiter, & jupiter quam ſaturnus, & terra quadruplo denſior quam ſol. Nam per ingentem ſuum calorem ſol rareſcit. Luna vero denſior eſt quam terra, ut in ſequentibus patebit. LIBER TERTIUS. PROP. VIII. THEOR. VIII.

Corol. 4. Denſiores igitur ſunt planetæ qui ſunt minores, cæteris paribus. Sic (n) enim vis gravitatis in eorum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & denſiores ſunt planetæ, cæteris paribus, qui ſunt ſoli propiores; ut jupiter ſaturno, & terra jove. In diverſis utique diſtantiis à ſole collocandi erant planetæ ut quilibet pro gradu denſitatis calore ſolis majore vel minore frueretur. Aqua noſtra, ſi terra locaretur in orbe ſaturni, rigeſceret, ſi in orbe mercurii in vapores ſtatim abiret. Nam lux ſolis, cui calor proportionalis eſt, (o) ſeptuplo denſior eſt in orbe mercurii quam apud nos: & thermometro

dem adhibitis quæ in Notis (g) & (i) aſſignantur. Denſitates verò ſunt ut illa pondera applicata ad ſphærarum Diametros vel ſemi-Diametros; ſemi-Diameter vera Solis erat $\frac{sd}{p}$, & ſemi-Diameter vera terræ erat d; Quare denſitates Solis & terræ erant ut $\frac{1}{\frac{sd}{p}}$ ad $\frac{a^3 p r^2}{b^3 q^2 d} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ ſive ut 1 ad $\frac{a^3 s^3}{b^3 q^2} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, in quâ quantitate Parallaxis Solis quæ dubia eſt non amplius adhibetur, ſed tantum quantitates de quibus conſtat apud Aſtronomos, Parallaxis nempe Lunæ, ſemi-diameter apparens mediocris Solis, Ratio diſtantiarum terræ & Veneris à Sole, & ratio temporum Periodicorum Veneris & Lunæ, quare ea *Denſitas terræ hic rectè definitur.*

(n) * *Sic enim vis gravitatis.* Quoniam ſphærarum heterogenearum denſitates ſunt ut pondera in earum ſuperficiebus ad ſphærarum diametros applicata, ideóque pondera ut denſitates & ſphærarum diametri conjunctim, ſi denſiores ſint planetæ qui ſunt minores, minor diameter in variis planetis per majorem denſitatem quâdam ex parte compenſabitur ac proinde vis gravitatis in variorum planetarum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedet quam ſi planetæ omnes vel denſitate æquales forent, vel planetæ majores forent minoribus denſiores. 68.

(o) * *Septuplo denſior eſt.* Nam (14. lib. 1.) denſitas lucis decreſcit in ratione duplicatâ diſtantiarum à Sole, ſed (phæn. 4.) diſtantia terræ eſt ad diſtantiam Mercurii ut 1000 ad 387 proximè. Eſt igitur denſitas lucis in Mercurii ad denſitatem lucis in terrâ ut 1000000 ad 149769 ſeu ut 6,68 ad 1, hoc eſt ferè ut 7 ad 1.

* Addit Newtonus *Thermometro expertus ſum quod ſeptuplo Solis æſtivi calore aqua ebullit*, hæc videntur referri ad n. 270 Tranſactionum Philoſophicarum qui continet ſcalam de caloris gradibus, ingeniosè ſane conſtructam, cujus author non indicatur: «Conſtructa fuit hæc Ta«bula ope Thermometri & ferri candenscentis; Per Thermometrum ex oleo lini «conſtructum inveni (inquit author) quod «ſi oleum ubi Thermometer in nive liqueſ-

«cente

DE MUNDI SYSTEMATE.

metro expertus ſum quod ſeptuplo ſolis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium vero non eſt quin materia mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hâc noſtrâ; cum materia omnis denſior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

PRO-

58. «cente locabatur (computus enim in hæc «Tabula inchoatur à calore quo aqua in«cipit rigeſcere tanquam ab infimo calo«ris gradu ſeu communi termino caloris «& frigoris) occupabat ſpatium partium «10000 idem oleum calore corporis hu«mani rarefactum occupabat ſpatium «10256 & calore aquæ jamjam ebullire in«cipientis ſpatium 10705 & calore aquæ «vehementer ebullientis 10725, & calore «ſtanni liquefacti ubi incipit rigeſcere «11516 &c. Rareſactio aëris æquali calo«re fuit decuplo major quam rarefa«ctio olei quaſi quindecim vicibus major «quam rarefactio ſpiritus vini. Et ex his «inventis ponendo calores olei ipſius ra«refactioni proportionales & pro calore «corporis humani ſcribendo partes 12 pro«cedit calor aquæ ubi vehementer ebullit «partium 34 ». In eâdem autem Tabulâ ponendo calorem corporis humani 12, ponit calorem aeris æſtivi 4, 5, vel 6 Quare medium aſſumendo, eſt ut quinque ad 34 ſive proxime ut 1 ad 7, ita calor aeris æſtivi ad calorem aquæ ebullientis: qui ergo ſeptuplus eſt caloris aeris æſtivi ſecundum aſſertum Newtonianum.

Diſputari autem poſſet, quod calor rarefactioni olei proportionalis ſupponatur abſque ſufficienti ratione, & quod terminus à quo rarefactio ea numerari incipit (is nempe gradus frigoris quo aqua incipit rigeſcere) ſit ad arbitrium aſſumptus; cum ea rarefactio numerari debuiſſet ab abſoluto frigore eo nempe frigoris gradu quo partes olei nullam ulteriorem compreſſionem per vim frigoris pati poſſent, qui gradus eſt ignotus; At hujus Tabellæ conſtructio, ingeniose demonſtratur ab eodem Autore per ferri candentis refrigerationem; Locavit enim ferrum candens in vento uniformiter ſpirante, ut aer à ferro calefactus ſemper abriperetur à vento, & aër frigidus in locum ejus uniformi cum motu ſuccederet, ſic enim aëris partes æquales æqualibus temporibus calefactæ ſunt & concipiebant calorem calori ferri proportionatum; Hinc ſi dividatur tempus refrigerii ferri in inſtantia æqualia, erit, ut totus calor ferri initio primi inſtantis, ad calorem durante eo inſtanti amiſſum, ſic calor ferri initio ſecundi inſtantis ad calorem durante eo ſecundo inſtanti amiſſum, &c. ideóque fingatur linea recta duci cujus abſciſſæ deſignent tempora; ordinatæ in extremis abſciſſis erigantur, quæ calores ferri ſingulis momentis deſignent; differentiæ earum ordinatarum erunt iis ipſis ordinatis proportionales Geometricè, ideóque curva per earum ordinatarum vertices tranſiens erit Logarithmica, creſcentibus ergo temporibus Arithmeticè, calor ferri Geometricè decreſcit & propterea calorum eorum Geometrica ratio per Logarithmorum tabulam haberi poterit.

Quo ſuppoſito, imponebat Autor candenti ferro particulas diverſorum metallorum, & aliorum corporum liquabilium, & notavit tempora refrigerii donec particulæ omnes amiſsâ fluiditate rigeſcerent & tandem calor ferri æquaretur calori corporis humani; hinc calores omnes quibus cera, biſmuthum, ſtannum, plumbum, Regulus ſtibii, eorumque variæ miſceſæ liqueſcunt innotuere, ſive eorum Geometricæ rationes, cumque calores ita inventi eandem habuerint inter ſe rationem cum caloribus per Thermometrum inventis, propterea rectè aſſumptum fuit, rarefactiones olei ipſis caloribus eſſe proportionales.

LIBER TERTIUS. PROP. IX. THEOR. IX.

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo à ſuperficiebus planetarum deorſum decreſcere in ratione diſtantiarum à centro quam proximè.

Si materia planetæ quoad denſitatem uniformis eſſet, obtineret hæc propoſitio accuratè: per prop. LXXIII. lib. I. Error igitur tantus eſt, quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

PROPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus planetarumè in cœlis diutiſſimè conſervari poſſe.

In ſcholio propoſitionis XL. lib. II. oſtenſum eſt quod globus aquæ congelatæ, in aëre noſtro liberè movendo & longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribendo, ex reſiſtentiâ aëris amitteret motus ſui partem $\frac{1}{4\cdot 85}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò globum terræ noſtræ denſiorem eſſe, quàm ſi totus ex aquâ conſtaret, ſic colligo. Si globus hicce totus eſſet aqueus, quæcunque rariora eſſent quam aqua, ob minorem ſpecificam gravitatem emergerent & ſupernatarent. Eaque de causâ globus terreus aquis undique coopertus, ſi rarior eſſet quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppoſitâ. Et par eſt ratio terræ noſtræ maribus magnâ ex parte circumdatæ. Hæc ſi denſior non eſſet, emergeret ex maribus, & parte ſui pro gradu levitatis extaret ex aquâ, maribus omnibus in regionem oppoſitam confluentibus.

Eodem argumento (P) maculæ ſolares leviores ſunt quàm materia lucida ſolaris cui ſupernatant. Et in formatione qualicunque planetarum ex aquâ, materiâ omnis gravior, quo tempore

(P) 69. *Maculæ Solares.* Si radii Solares teleſcopio duobus vitris inſtructo excipiantur, locuſque circumpoſitus obſcuretur, inverſa Solis imago ſuprà chartam ad axem teleſcopii normalem pingitur & maculæ conſpiciuntur quæ nunc emergere nunc evaneſcere obſervantur. Maculas illas in materiâ Solari ſupernatare vel ſaltem Soli quam proximas eſſe certum eſt. 69.

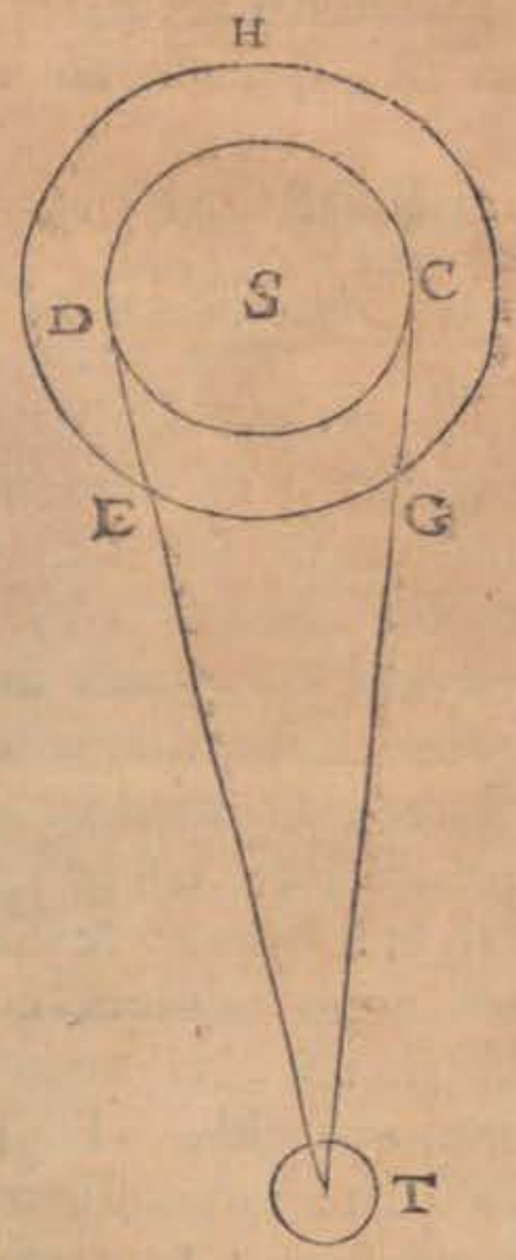
DE MUNDI SYSTEMATE.

pore massa fluida erat, centrum petebat. Unde cum terra communis suprema quasi duplo gravior sit quam aqua, & paulò inferiùs in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quod copia materiæ totius

69. Sit enim Sol in S, ex Tellure T visus sub angulo D T C 32'. Si macula orbitam aliquam H E G H extrà Solis superficiem describeret, non videretur Solis discum ingredi antequam ad E perveniisset ubi recta T E D ex terrâ ducta discumque Solis tangens maculæ orbitam secat, & ductâ T G C Solem quoque tangente, per Solis superficiem tantummodò progredi videretur, quandiù describeret arcum E G qui semiperipheriâ minor est, ideóque arcus ille tempore quod semiperiodo minus est percurreretur. Sed ex observationibus notum est quamplures maculas, duas aut tres integras periodos absolvisse 27 dierum spatio atquè 13 $\frac{1}{2}$ dies impendisse ut à limbo occidentali Solis ad limbum orientalem pervenirent; illarum ergò macularum orbitæ vel in ipsâ superficie Solari extiterunt, vel Soli fuerunt proximè.

* Newtonus hic loci receptam opinionem sequitur maculas Solares ipsi Solari superficiei inhærere; quæ opinio his tribus argumentis nititur; 1°. Quod illæ maculæ in medio Solis disco latiores videantur quam juxta ejus limbum ubi angustissimæ apparent; & quidem hoc demonstrat maculas eas non esse Planetas rotundos, ut quidam volebant, sed esse corpora lata, non verò spissa, & à Sole non multum distare, nullomodotamen exinde probatur eas esse in ipsâ superficie Solis: 2um. Argumentum est, Quod spatium quod maculæ emetiuntur in medio disco Solis diurno spatio, sit proportionatum revolutioni ipsarum, quod majus esse debuisset si forent cis Solem, sed rursus hoc argumentum proximitatem macularum superficiei Solis, non verò earum ipsi superficiei Solis adhærentiam probat.

Denique, asserit Keillius (Lection. Ast. V.) observationibus constare maculas quæ integram revolutionem 27 dierum absolvunt tredecim cum semisse dies impendere ut à limbo Occidentali Solis ad Orientalem perveniant, unde meritò concludit quod cum dimidium tempus Periodi suæ in transcurrendo Solis disco impendant, ipsarum orbita in ipsâ superficie Solari extet; At Wolfius (Ast. nº. 413.). Quoniam, inquit, maculæ Solares tribus circiter diebus diutius post Solem latent quam Hemisphærium nobis conspicuum peragrantes consumunt, Soli quidem proximæ sunt, non ipsi tamen superficiei Solari inhærent, sed aliquam ab eâ distantiam habent.



Et quidem in Astronomorum fastis quæ in

tius in terrâ quasi quintuplo vel sextuplo major sit quàm si tota ex aquâ constaret; præsertim cùm terram quasi quadruplo densiorem esse quam jovem jam ante ostensum sit. Quare si Jupiter

LIBER TERTIUS. PROP. X. THEOR. X.

in manibus venerunt, numquam deprehendi maculam per tredecim super discum Solis actu visam fuisse, nullam reducem ante decimum quintum diem observatam & quidem cum anno 1739 plurimæ maculæ Solis discum percurrerent, multasque ab ingressu ad egressum usque persequerer, nulla integros tredecim dies in disco perstare mihi visa est; Cum autem quæstio hæc tota, sit de facto, referam observationes duas quæ accuratissimè institutæ videntur, desumetur altera e Transactionibus Philosophicis Anglicanis n. 294, altera è Diario eruditorum ad annos 1676. 1677.

«15. Maii anni 1703 Septempedali Telescopio] circa Centrum Solis maculam detexit Dnus. Stannyan, eamdem observavit diebus sequentibus, & 22. Maii mane jam admodum vicinam limbo Solis eam vidit; 23a. Maii horâ sextâ matutina appulerat ad ipsum limbum Solis, angusta & tenuis, similis aristæ, & ejus distantia à limbo Solis non excedebat ipsius maculæ parvam Diametrum, Octava, Decima, Duodecimaque hora illam adhuc videbat; secunda hora ipsi circumferentiæ applicata erat nec visibilis ipsi fuisset nisi totâ die oculos in ipsam intentos habuisset; Quarta denique hora nullum ejus vestigium telescopio decem & octo pedum optimo apparebat, unde statuendum illam omninò e Sole exivisse hora 3a. post Meridiem 23m. diei Maii.

Tertia Junii & sequentibus diebus ad observationes rediit noster, usus Telescopio decem & octo pedum, tandem die septima Junii, hora tertia pomeridiana, eamdem maculam (ut postea certior ejus factus est) Solis discum subeuntem vidit, hora quarta decem & octo pedum Telescopio Sole luccidissimo eam distinctè vidit, sed tenuem admodum & Elliptica atmosphæra cinctam, sequentibus verò diebus ex via cui insitit, eamdem esse quam prius viderat agnovit, & eam est persecutus sequentibus diebus, donec tandem 18. Junii tenuis apparere incepit, die verò decima nona ab hora 5ta. matutina eam observare cæpit Telescopio decem & octo pedum fere singulis semihoris, hora duodecima Atmosphæra & sensibili latitudine spoliatam vidit & adeo vicinam Solis limbo, ut vix inter ipsam & limbum Solis lucis radius perciperetur; hora secunda evanescebat, ita ut hora secunda cum semisse evanuisse censenda sit. 69.

Ergo à 23. Maii horâ tertiâ pomeridianâ ad septimam Junii eâdem horâ latuit macula, per integros scilicet quindecim dies, ab eo tempore ad 19 Discum pertransivit, per duodecim nempe dies.

Altera observatio IIImi. Cassini huic omninò congrua exstat in primo Eruditorum diario anni 1677., illic exhibet Cassinus figuram maculæ quæ 30. Octobris 1676. observari cæpit, evanuit Novembris 3a. Iterum conspicua facta est quindecim post dies nempe 18a. Novembris; evanuit verò post duodecim dies, nempe horâ quartâ diei 30æ. Novembris, observationibus magnâ curâ institutis ad singulas fere horas, postea verò 15a. Decembris hora meridiana cum semisse Telescopio 35. pedum in limbo orientali Solis visa est, ut instar lineæ obscuræ nec aliis Telescopiis observari poterat, sequentibus verò diebus facile videri potuit; hinc per quindecim dies maculas latere per duodecim dies Solis discum transcurrere liquet.

Ex quibus sequitur æqualitatem temporum occultationis & apparentiæ macularum observationibus non constare; quinimò rectius inæqualitatem eorum temporum exinde deduci. Ut quâdam quantitate à Solis disco distare maculas deducatur, & quidem cum differentia temporum eorum sit circiter dierum trium, in singulo quadrante erit horarum decem & octo, quo tempore decem gradus circa Solis centrum maculæ percurrunt; sed sinus versus decem graduum sunt 15. Centesimæ Radii, hinc tandem deducetur quod semi-Diameter Solis sit ad semi-Diame-

DE MUNDI SYSTEMATE.

Jupiter paulo denſior ſit quàm aqua, hic (q) ſpatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 ſemidiametrorum ſuarum deſcribit, (r) amitteret in medio ejuſdem denſitatis cum aëre noſtro motus ſui partem fere decimam. Verùm cum reſiſtentia mediorum minuatur in ratione ponderis ac denſitatis, ſic ut aqua, quæ partibus $13\frac{1}{7}$ levior eſt quàm argentum vivum, minus reſiſtat in eâdem ratione; & aer, qui partibus 860 levior eſt quàm aqua, minus reſiſtat in eâdem ratione: ſi aſcendatur in cœlos ubi pondus medii, in quo planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſiſtentia prope ceſſabit. Oſtendimus utique in ſcholio ad prop. XXII. lib. II. quod ſi aſcenderetur ad altitudinem milliarium ducentorum ſupra terram, (f) aër ibi rarior foret quam ad ſuperficiem terræ in ratione 30 ad 0,00000000000003998, ſeu 75000000000000 ad 1 circiter. Et

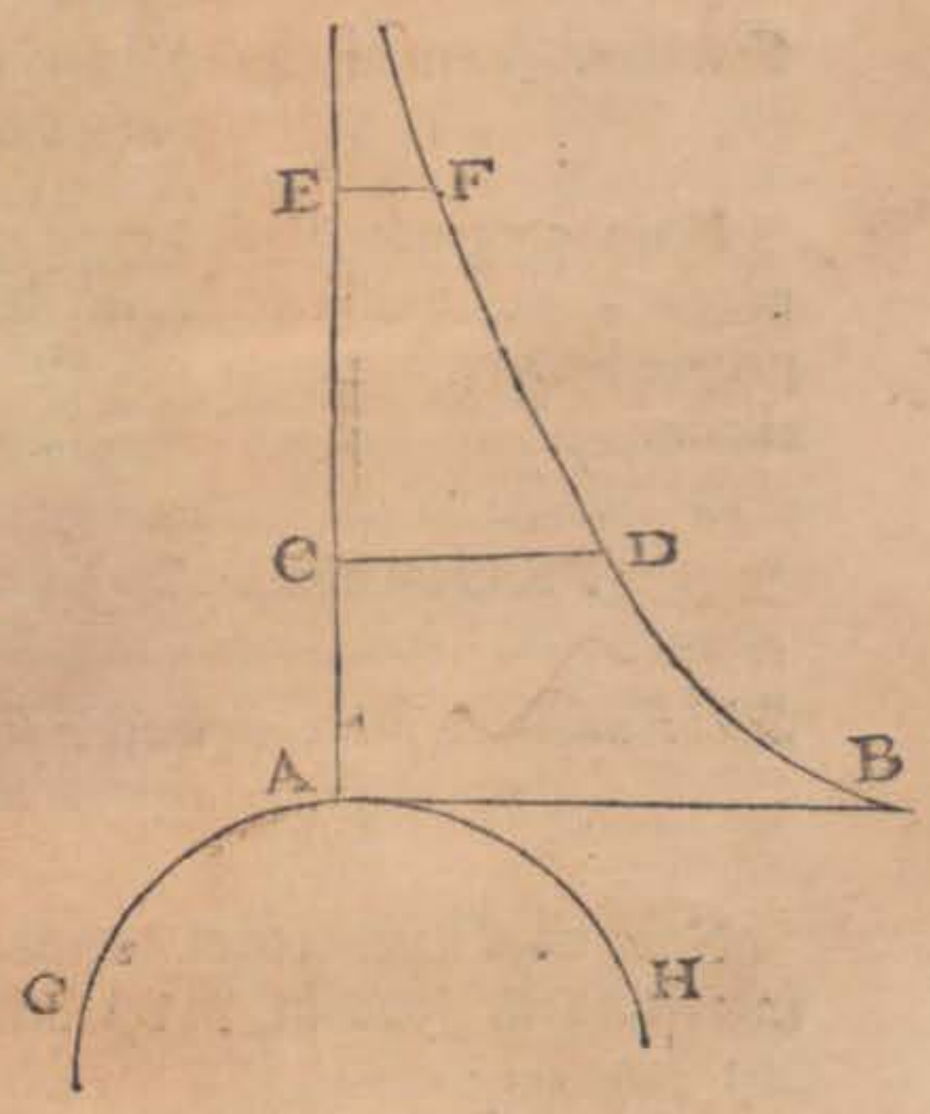
trum circuli quem deſcribunt maculæ ut 85 ad 100 ſive ut 17 ad 20, & maculæ quindecim circiter ſemi-Diametris terræ ſupra Solis ſuperficiem emineant: Hinc idem Wolfius eas eſſe Nubes in Solis Atmoſphærâ elatas, conjectatur quæ quidem fuerat Kepleri ſententia.

(q) * *Spatio dierum triginta.* Si arcus quem Jupiter motu diurno medio circà Solem deſcribit multiplicetur per 30 & factum dividatur per ſemidiametrum apparentem Jovis in mediocri ejus diſtantiâ à terrâ, quotus erit numerus ſemidiametrorum Jovis quas intervallo 30 dierum deſcribit. Poteſt etiam idem inveniri dicendo ut tempus periodicum Jovis ad 360 gradus ità 30 dies ad arcum hoc tempore deſcriptum, hic arcus dividatur per ſemidiametrum apparentem Jovis & quotus erit numerus ſemidiametrorum quas Jupiter 30 diebus deſcribit.

(r) * *Amitteret in medio ejuſdem denſitatis.* (per ſchol. prop. 40. lib. 2. circà finem). Si diameter jovis dicatur D, V velocitas ejus ſub initio motûs, & T tempus quo velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium S quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}D$ ut denſitas jovis ad denſitatem aëris noſtri, hoc eſt, ut 860 ad 1 circiter. jupiter in aëre noſtro projectus cum velocitate V tempore quovis alio t amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$. Quoniam igitur Jupiter intervallo 30 dier. longitudine $459\frac{D}{2}$ deſcribit, & denſitas Jovis eſt ad denſitatem aëris noſtri ut 860 ad 1 ciciter, erit $1 : 860 = \frac{8}{3}D : S = \frac{6880}{3}D$, & $459\frac{D}{2} : 30$ dier. $= \frac{6880}{3}D : T = \frac{137600}{459}$. Undè ſi ponatur $t = 30$. dieb. erit $T + t = \frac{151370}{459}$, & $\frac{t}{T+t} = \frac{1377}{15137} = 0{,}09096 = \frac{1}{10}$ ferè. Cum autem Jupiter ſupponatur paulò denſior quam aqua, minorem adhuc velocitatis ſuæ partem amitteret in aëre noſtro.

(f) 70. * *Aër ibi rarior foret.* Si gravitas particularum aëris in omnibus à terrâ diſtantiis eadem ſit, ſintque diſtantiæ in progreſſione arithmeticâ, demonſtratum eſt (in ſchol. prop. 22. lib. 2.) denſitates fore in progreſſione geometricâ. Hinc patet in variis à terrâ diſtantiis per Logarithmicam exhiberi poſſe varias aëris denſitates. Sit enim F D B Logarithmica, ſumptis abſciſſis A C, A E, in progreſſione arithmeticâ, ordinatæ A B, C D, E F

Et (t) hinc ſtella jovis in medio ejuſdem denſitatis cum aere illo ſuperiore revolvendo, tempore annorum 1000000, ex reſiſtentiâ medii non amitteret motus ſui partem decimam centeſimam milleſimam. In ſpatiis utique terræ proximis, nihil invenitur quod reſiſtentiam creet præter aërem, exhalationes & vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentiſſimè exhauſtis gravia intra vitrum liberrimè & ſine omni reſiſtentia ſenſibili cadunt; ipſum aurum & pluma tenuiſſima ſimul demiſſa æquali cum velocitate cadunt, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem pedum quatuor ſex vel octo ſimul incidunt in fundum, ut experien- LIBER TERTIUS. PROP. X. THEOR. X.



E F denſitates aëris in locis A, C, E, repræſentabunt (53. lib. 2.). Quare datis altitudinibus A C, A E, & ratione $\frac{AB}{CD}$, innoteſcet ratio $\frac{AB}{EF}$. Nam (ex naturâ Logarithmicæ, per cor. 2. theor. 2. de Logarithmicâ) $AC : AE = L.\frac{AB}{CD} : L.\frac{AB}{EF}$, ideóque $\frac{AE}{AC} L.\frac{AB}{CD} = L.\frac{AB}{EF}$.

Jam quia altitudines mercurii in barometro ſunt ut preſſiones atmoſphæræ in diverſis ab horizonte diſtantiis (prop. 20. lib. 2.). Si aëris denſitas compreſſioni ponatur proportionalis, datis altitudinibus mercurii in barometro in locis A, C, datáque altitudine A E, dabitur altitudo mercurii in barometro in loco E, ideóque nota erit denſitas aëris in E. Ut autem hæc omnia ad præſentem caſum transferamus, ſit G A H pars ſuperficiei terreſtris, altitudo mercurii in barometro in A = 30 poll. diſtantia A C = 2280 ped. Anglicis & altitudo mercurii in barometro in C = 28 poll. quemadmodum Newtonus experimento cognitum ſupponit. Sit altitudo A E = 200 milliaribus hoc eſt = 1056000 ped. Anglicis, ſi milliare ſit menſura ped. 5280, erit $\frac{AE}{AC} L.\frac{AB}{CD} = \frac{1056000}{2280} L.\frac{30}{28}$ = 13.8750613 circiter cui Logarithmo in tabulis reſpondet numerus 7500000000000 erit ergò denſitas aëris in A, hoc eſt, in ſuperficie terræ ad ejuſdem denſitatem in diſtantia 200 milliarum ſeu ped. 1056000 ut 7500000000000 ad 1, circiter.

(t) * *Hinc ſtella Jovis.* Denſitas Jovis eſt ad denſitatem aëris illius ſuperioris ut 860 × 7500000000000 ad 1. Hinc

DE MUNDI SYSTEMATE.

perientiâ compertum eſt. Et propterea ſi in cœlos aſcendatur aëre & exhalationibus vacuos, planetæ & cometæ ſine omni reſiſtentiâ ſenſibili per ſpatia illa diutiſſimè movebuntur.

HYPOTHESIS I.

Centrum ſyſtematis mundani quieſcere.

Hoc ab omnibus conceſſum eſt, dum aliqui terram, alii ſolem in centro ſyſtematis quieſcere contendant. Videamus quid inde ſequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis terræ, ſolis & planetarum omnium quieſcere.

Nam centrum illud (per legum corol. IV.) vel quieſcet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo ſemper progrediente, centrum mundi quoque movebitur contra hypotheſin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, ſed nunquam longè recedere à communi gravitatis centro planetarum omnium.

Nam cum (per corol. 2. prop. VIII.) materia in ſole ſit ad materiam in Jove ut 1067 ad 1, & diſtantia jovis à ſole ſit ad ſemi-

70. $1 : 860 \times 750000000000000 = \frac{8}{5} D : S = 1720000000000000000 : D$, & $459\frac{D}{2}$ eſt ad 1720000000000000000, ut anni pars duodecima ſeu $\frac{1}{12}$ ad $1 = \frac{86000000000000000}{1367}$, annis $= 63000000000000$ ferè. Ponatur $t =$ 1000000 annis & erit pars motûs amiſſa tempore $t = \frac{t}{1+t} = \frac{1000000}{63000000000000+1000000}$ $= \frac{1}{6300000+1} = \frac{1}{6300000}$ ferè.

ſemidiametrum ſolis in ratione paulò majore (†); incidet commune centrum gravitatis jovis & ſolis in punctum (u) paulo ſupra ſuperficiem ſolis. Eodem argumento cùm materia in ſole ſit ad materiam in ſaturno ut 3021 ad 1, & diſtantia ſaturni à ſole ſit ad ſemidiametrum ſolis in ratione paulò minore: incidet commune centrum gravitatis ſaturni & ſolis in punctum (x) paulò infra ſuperficiem ſolis. (y) Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo ſi terra & planetæ omnes ex unâ ſolis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integrâ ſolis diametro à centro ſolis diſtaret. (z) Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuò quieſcit, ſol pro vario planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed à centro illo nunquam longè recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum terræ, ſolis & planetarum omnium pro centro mundi habendum eſt. Nam cum terra, ſol & planetæ omnes gravitent in ſe mutuò, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motus perpetuò agitentur: perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet ſoli. Cùm autem ſol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, à quo centrum ſolis quam minimè diſcedit, & à quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modo ſol denſior eſſet & major, ut minus moveretur.

(†) * *Et diſtantia Jovis à Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo majore*, * cum ſemi-Diameter Solis è tellure viſa ſit 16′ 4″ & diſtantia Terræ à Sole ſit ad diſtantiam Jovis à Sole ut 10 ad 52 circiter, ſintque anguli ſub quo idem objectum videtur è diverſis diſtantiis reciprocè ut illæ diſtantiæ fere, erit 52 : 10 = 16′ 4″ : ad ſemi-Diametrum Solis è Jove viſam, quæ itaque erit 3′. 5″ circiter, fingatur ergo Triangulum Rectangulum cujus vertex ſit in Jove & baſis ſit Solis ſemi-Diameter, angulus verticis erit 3′ 5″. Ideóque (per Tabulas Tangentium,) baſis ejus continebitur in ejus altitudine 1115 vicibus ; hinc diſtantia Jovis à Sole eſt ad ſemi-Diametrum Solis, ut 1115 ad 1, ideóque in ratione paulò majore quam ratio 1067 ad 1, hoc eſt, quam ratio materiæ in Sole ad materiam in Jove. 70.

(u) * *Paulò ſuprà ſuperficiem Solis* (60. lib. 1.).

(x) * *Paulò infrà ſuperficiem Solis* (ibid.).

(y) * *Et ejuſdem calculi veſtigiis* (61. lib. 1.).

(z) * *Aliis in caſibus.* Si nempè ad diverſas Solis partes planetæ conſiſtant, centrum gravitatis modò versùs unam partem, modò versùs alteram incidit, hinc centrum gravitatis quaſi medio loco iis in caſibus poni debet, minor itaque ſit centrorum diſtantia. 71.

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in ellipſibus umbilicum habentibus in centro ſolis, & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales.

Diſputavimus ſupra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes à priori. Quoniam pondera planetarum in ſolem ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro ſolis; ſi ſol quieſceret & planetæ reliqui non agerent in ſe mutuò, forent orbes eorum elliptici, ſolem in umbilico communi habentes, & areæ deſcriberentur temporibus proportionales (per prop. 1. & XI. & corol. 1. prop. XIII. lib. 1.) actiones autem planetarum in ſe mutuo perexiguæ ſunt (ut poſſint contemni) & motus planetarum in ellipſibus circa ſolem mobilem minùs perturbant (per prop. LXVI. lib. 1.) quam ſi motus iſti circa ſolem quieſcentem peragerentur.

Actio quidem jovis in ſaturnum non eſt omnino contemnenda. Nam gravitas in jovem eſt ad gravitatem in ſolem (paribus diſtantiis) ut (a) 1 ad 1067; ideoque in conjunctione jovis & ſaturni, quoniam diſtantia ſaturni à jove eſt ad diſtantiam ſaturni à ſole fere ut 4 ad 9, (b) erit gravitas ſaturni in jovem ad gravitatem ſaturni in ſolem ut 81 ad 16×1067 ſeu 1 ad 211 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis ſaturni in ſingulis planetæ hujus cum jove conjunctionibus adeo ſenſibilis ut ad eandem aſtronomi hæreant. Pro (c) vario ſitu planetæ in his conjunctionibus, eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminui-

71. Quoniam Sol pro diverſo planetarum ſitu diverſimodè agitatur, motu quodam libratorio lentè ſemper errabit, nunquam tamen integrâ, ſui diametro à centro quieſcente ſyſtematis totius recederet. Quia verò Solis & planetarum ponderibus (per cor. 1. prop. 8.) inventis, datoque ſitu omnium ad invicem, datur commune gravitatis centrum (61. lib. 1.) patet quoque dato communi gravitatis centro haberi locum Solis ad tempus propoſitum.

(a) * *Ut* 1 *ad* 1067 (cor. 2. prop. 8.).

(b) * *Erit gravitas Saturni in Jovem* (prop. 8.)

(c) * *Pro vario ſitu planetæ.* Saturnum his perturbationibus obnoxium eſſe patet (per cor. 6. 7. 8. 9. prop. 66. lib. 1.).

minuitur, aphelium nunc promovetur nunc fortè retrahitur, & medius motus per vices acceleratur & retardatur. (d) Error tamen omnis in motu ejus circùm solem à tantâ vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere potest constituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis jovis & solis (per prop. LXVII. lib. 1.) & propterea ubi maximus est, vix superat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix superat minuta duo prima annuatim. In (e) conjunctione autem jovis & saturni gravitates acceleratrices solis in saturnum, jovis in saturnum & jovis in solem sunt fere ut 16, 81 & $\frac{16\times81\times3021}{25}$ seu 156609, ideoque differentia gravitatum solis in saturnum & jovis in saturnum est ad gravitatem jovis in solem ut 65 ad 156609 seu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis est maxima saturni efficacia ad perturbandum motum jovis, & propterea perturbatio orbis jovialis longe minor est quam ea saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longè minores (f) præterquam quod orbis terræ sensibiliter perturbatur à lunâ. (g) Commune centrum gravitatis terræ & lunæ, ellipsin circum solem in umbilico positum percurrit, & radio ad solem ducto areas in eâdem temporibus proportionales describit, terra vero circum hoc centrum commune motu menstruo revolvitur.

PRO-

(d) * *Error tamen omnis.* Si ad evitandum omnem fere errorem, orbis Saturni umbilicus (per prop. 67. lib. 1.) locetur in communi centro gravitatis Jovis & Solis, Theoria Saturni juxtà hanc hypothesim constituta satis accuratè congruit cum phænomenis, ità ut error qui ex hâc hypothesi oritur, ubi maximus est, vix superet minuta duo prima, & error maximus in motu medio vix minutis duobus primis annuatim major observetur. Hinc non parum confirmantur ea quæ de mutuâ planetarum perturbatione hactenus dicta sunt.

(e) * *In conjunctione autem Jovis.* Quoniam in conjunctione Jovis & Saturni, distantia Saturni à Sole, Saturni à Jove, & Jovis à Sole sunt inter se ut 9, 4 & 5, circiter, gravitatis acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem erunt ut $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{16}$ & $\frac{3021}{25}$ (per cor. 1. prop. 8.) hoc est, ut 16, 81 & $\frac{16\times81\times3021}{25}$. 73

(f) * *Præterquam quod orbis terræ.* Orbem terræ sensibiliter perturbari à lunâ ostendetur deinceps ubi vis lunæ definietur.

(g) * *Commune centrum gravitatis terræ & lunæ.* (prop. 65. lib. 1.).

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

Orbium aphelia & nodi quiescunt.

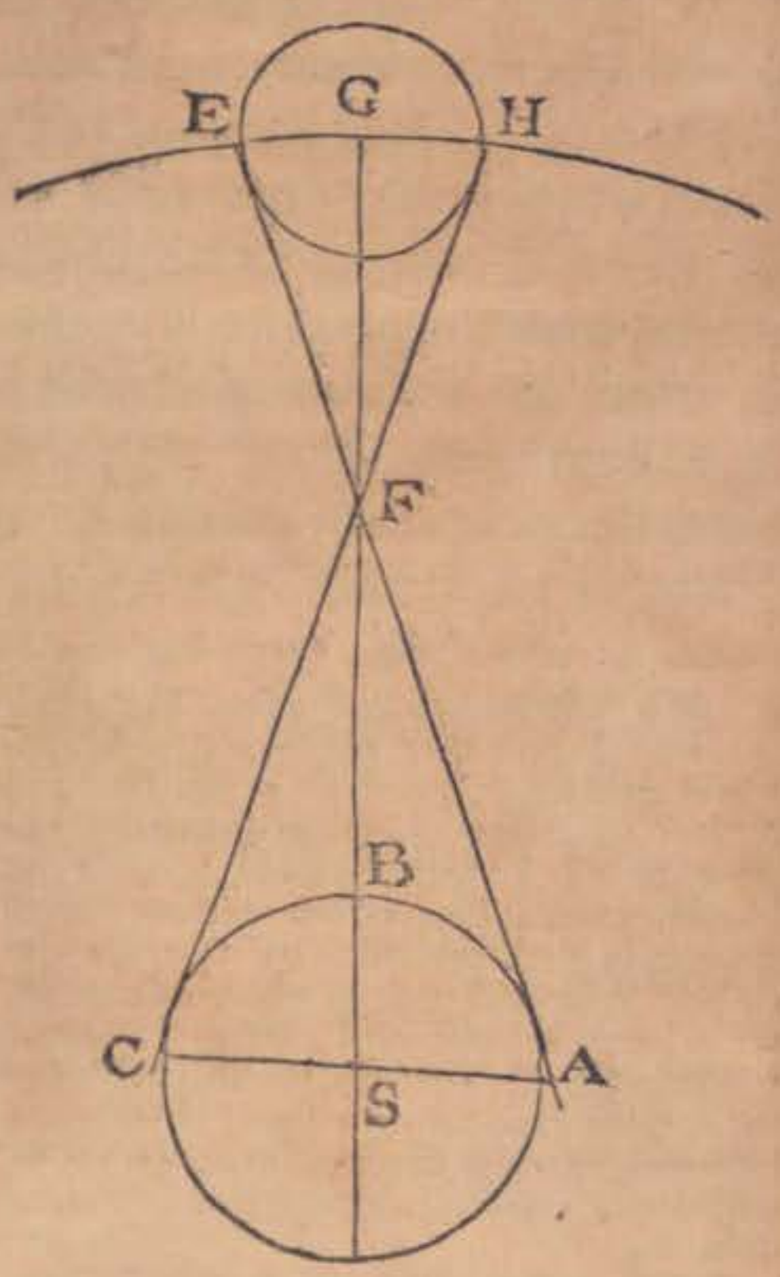
Aphelia quiescunt, per prop. XI. lib. I. ut & orbium plana, per ejusdem libri prop. I. & quiescentibus planis quiescunt nodi. Attamen à planetarum revolventium & (h) cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem hic contemni possunt.

Corol 1. Quiescunt etiam stellæ fixæ, propterea quod datas ad aphelia nodosque positiones servant.

Corol. 2. Ideoque (i) cum nulla sit earum parallaxis sensibilis ex terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam cor-

(h) * *Et cometarum actionibus.* Eodem prorsus modo quo planetæ in se invicem agunt; patet quoque cometas in alios planetas agere similesque effectus producere, sed cum observationes Astronomicæ ostendant apheliorum nodorumque motum esse tardissimum, ob parvitatem contemni possunt inæqualitates quæ ex planetarum & cometarum actionibus in se invicem oriuntur.

(i) * 72. *Cum nulla sit earum parallaxis.* In hypothesi terræ motæ, quiescentibus Sole & stellis, tellus integram revolutionem absolvit spatio 23. hor. 56'. 4". circiter & circà solem revolvitur unius anni intervallo circulumque describit qui ecliptica vel orbis annuus appellatur. Referat S solem, sit F stella fixa in Ecliptica planò ad distantiam quamlibet constituta; Sit ABCD orbis annuus, ponaturque tellus primum in loco A deindè post sex menses perveniat ad locum C in quo distet à loco A totâ diametro orbis annui, hoc est, 20000 terræ diametris circiter, ità ut anguli FSA, FSC sint recti, stella F ex tellure A visa respondebit puncto E, quod ad distantiam infinitam à terrâ removeri supponitur. Deindè eadem stella ob motum terræ ab A versùs B, progredi videbitur ab E versùs G, donec tellure perveniente ad C stella videatur in H, distans scilicet à loco in



quo

corporum distantiam nullos edent sensibiles effectus in regione systematis nostri. Quinimo fixæ in omnes cœli partes æqualiter dispersæ contrariis attractionibus vires mutuas destruunt, per prop. LXX. lib. 1.

quo ante sex menses vertabatur; toto arcu EH, cujus mensura est angulus EFH vel AFC. Hujus anguli semissis AFG, est parallaxis orbis annui ex terræ motu annuo oriunda. Dato autem angulo AFS, facilè invenitur distantia stellæ fixæ à terrâ AF, si fiat, ut sinus anguli AFS, ad sinum totum, ità AS Semidiameter orbis annui quæ est 10000 diametrorum terræ circiter ad AF. Jam verò patet ex telluris annuo motu oriri debere translationem fixarum inter se parallaxi duplicatæ circiter æqualem. At stellæ majores & propiores respectu remotiorum quæ telescopiorum ope duntaxat conspici possunt, moveri non observantur. Nulla est itaque fixarum parallaxis sensibilis ex terræ motu annuo oriunda, ideóque immensa est fixarum à tellure distantia. Sivè autem terra moveatur, sivè quiescat, stellas fixas immensis intervallis à terrâ distare certissimum est, nam parallaxim annuam minuto primo longè minorem esse consentiunt omnes Astronomi. Fingamus verò annuam fixæ alicujus proximioris parallaxim esse uniùs minuti primi, à tellure distabit stella illa 3437 semi-Diametris orbitæ quam describit terra siquidem sinus unius minuti est ad Radium ut 1 ad 3437, & si semi-Diameter orbitæ sit 10000 semi-Diametrorum terræ, ad minimum 68740000 terræ ipsius semi-Diametris distabit fixa à Tellure.

73. Christianus Hugenius in Cosmotheoro lib. 2. aliam excogitavit methodum quâ rationem distantiæ fixarum ad distantiam Solis conjectando investigaret. Supponit itaque sirium quæ stella est inter alias fulgentissima, Soli circiter æqualem esse. Deindè tentavit quâ ratione Solis diametrum ità imminuere posset ut non major aut splendidior sirio appareret. Quod ut assequeretur, tubi vacui duodecim circiter pedes longi aperturam alteram occlusit lamellâ tenuissimâ in cujus medio tam exiguum erat foramen ut lineæ partem duodecimam non excederet; oculoque alteri aperturæ admoto, ea videretur Solis particula cujus diameter erat ad diametrum totiùs ut 1 ad 182. Cum verò particula illa sirio splendidior adhuc appareret, foramini globulum vitreum ejusdem cum foramine diametri objecit, talisque foci globulum selegit ut lux Solis ad oculum transmissa non major aut splendidior videretur eâ quam à sirio emissam nudis oculis intuemur. Quo facto, hujus particulæ Solis diametrum invenit partem $\frac{1}{27664}$ diametri totiùs. Quarè Sol instar sirii appareret, si conspicua foret pars diametri totiùs Solaris tantùm $\frac{1}{27664}$, distantia autem Solis à terrâ in quâ tantillus videretur foret ad distantiam in quâ ejus diametrum apparentem intuemur ut 27664 ad 1, divisâque apparente Solis diametro mediocri per 27664, foret diameter Solis 4‴ circiter. Hinc sirii quoque distantia à terrâ est ad distantiam Solis ab eâdem ut 27664 a 1 & diameter apparens Sirii 4‴. Jam distantia Solis à terrâ si Parallaxis Solis ponatur 10″ 30‴ est ferè 20000 semid. terrestrium, erit ergo distantia Sirii 553280000 semid. terrestr. Si verò distantiam mediam Saturni à terra constituamus 190800 semid. terrestr. prodit distantia inter Saturnum & Sirium 553089200 semid. terrestr.

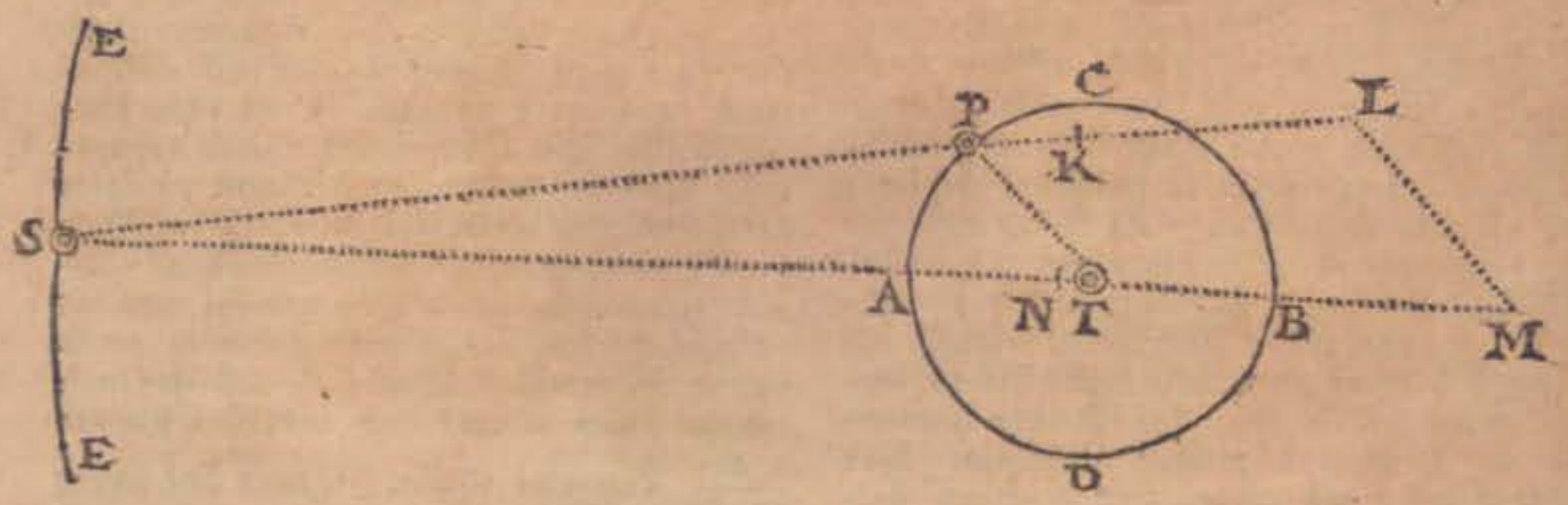
73.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Scholium.

Cum planetæ ſoli propiores (nempe mercurius, venus, terra, & mars) ob corporum parvitatem parum agant in ſe invicem: horum aphelia & nodi quieſcent, niſi quâtenus à viribus jovis, ſaturni & corporum ſuperiorum turbentur. Et (a) inde colligi poteſt per theoriam gravitatis, quod horum aphelia moventur aliquantulum in conſequentia reſpectu fixarum, idque in pro-

por-



74. (a) 74. * *Et indè colligi poteſt.* Deſignet S Planetam aliquem ſuperiorem puta Jovem cujus Orbita ESE; ſit T Sol, P Planeta aliquis inferior, ponaturque corporum S, P, aliorumve plurium ſyſtema revolvi circà corpus T manentibus orbium E S E & P A B formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem mutentur verò utcumque magnitudines & per theoriam gravitatis colligitur (cor. 15. & 16. prop. 66. & not. in eadem corollaria) errores angulares corporis P in quâvis revolutione genitos, ideóque & motus aphelii in quâlibet revolutione corporis P eſſe ut quadratum temporis periodici quam proximè. Si itaque numerentur illi errores, in variis Planetis P durante eodem determinato tempore, per centum v. gr. annos ut hic aſſumit Newtonus, errores integri eo tempore deſcripti erunt ut errores ſingulâ revolutione commiſſi & ut numerus revolutionum ſæculo integro peractarum, ille numerus revolutionum eſt inversè ut tempus periodicum & errores (qui ſunt, ut dictum eſt, directè ut quadratum temporis Periodici) ergo errores Apheliorum durantibus centum annis erunt in ſimplici temporum periodicorum ratione. Sed tempora periodica Planetarum P ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro T (per phæn. 4.). Sunt ergò errores Planetarum inferiorum in hâc ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro Solis. Quare ſi ponatur eum eſſe aphelii Martis progreſſum ut in annis centum conficiat 33′ 20″ in conſequentia reſpectu fixarum, invenietur motus aphelii aliorum planetarum qualis à Newtono definitur, dicendo ut Radix quadrata cubi diſtantiæ martis ad Radicem quadratam cubi diſtantiæ terræ à Sole, ita 33′ 20″ ad motum Aphelii terræ annis centum. Quamvis autem ex ipsâ gravitatis theoriâ colligatur planetarum inferiorum aphelia nunc promoveri nunc retrahi, medios tamen apheliorum motus notabili aliquo tempore in conſequentia fieri, patet ratiocinio ſimili illi quod de Lunâ factum eſt in nota c p. 24. hujuſce, unde facile conſtabit reverâ medium motum reſultantem poſt centum annos eſſe

ut

portione ſeſquiplicatâ diſtantiarum horum planetarum à ſole. Ut ſi aphelium martis in annis centum conficiat 33′. 20″ in conſequentia reſpectu fixarum; aphelia terræ, veneris, & mercurii in annis centum conficient 17′. 40″, 10′. 53″, & 4′. 16″ reſpectivè. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hâc propoſitione. LIBER TERTIUS. PROP. XIV. THEOR. XIV.

PRO-

ut ipſa tempora periodica, ideóque in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à Sole. Secundùm ea quæ dicuntur in cor. 16. prop. 66. lib. 1., &c. De præſenti ſcholio hæc dicta ſint. Sed prætermittenda non ſunt verba doctiſſimi Viri Joannis Bernoullii cujus authoritatem maxime veneramur. Sic ferè habet Clariſſ. Autor in Diſſertatione de Syſtemate Carteſiano quæ anno 1730. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio condecorata fuit, Paragrapho XLI. «((Newtonus ſupponit motum aphelii Martis in conſequentia eum «eſſe ut centum annorum ſpatio 33′ 20″ «conficiat. Hinc colligit per theoriam «gravitatis quod aliorum planetarum in«feriorum aphelia moventur in conſequen«tia reſpectu fixarum, idque in propor«tione ſeſquiplicatâ diſtantiarum horum «planetarum à Sole. Nullo fundamento «meràque apparentiâ nixus videtur New«tonus in conſtituendâ hâc ratione ſeſ«quiplicatâ. Neque enim intelligo, ne«que ut arbitror, plures alii me ipſo perſ«picaciores intelligunt quare mutua pla«netarum gravitatio, etiamſi concederetur, hanc proportionem poſtulet. Et «certè hæc eadem gravitatio plane irre«gularem effectum & ſuæ regulæ contra«rium producit reſpectu aphelii Saturni, «cum Newtonus ipſe ſtatuat in conjun«ctione Jovis & Saturni aphelium illud «nunc promoveri nunc retrahi. Numquid «de ſingulis planetis inferioribus idem quo«que ſtatuendum videretur. Nam ſi talis «admittenda foret attractio, tellus v. gr. «ubi in aphelio verſatur Jovemque reſ«pectu zodiaci præcedit, retraheretur, & «contra promoveretur ubi Jupiter telluſ«rem præcederet. Unde hæc gravitatio «contrarios omninò effectus antè & poſt «conjunctionem telluris & Jovis produ«ceret. Sed nil tale obſervatur, idque ex «aliâ hypotheſi Newtonus minimè colli«git, ſicut facere deberet.)).

74.

* Ex prædictis autem facile reſponderi poſſe videtur Viri Doctiſſimi quæſitis.

1°. Enim conceſſa Planetarum gravitatione motum Apheliorum Planetarum inferiorum ſecundum proportionem ſeſquiplicatam diſtantiarum fieri debere, Mathematicè ſequitur ex Coroll. 16. Prop. LXVI. Lib. I. ut ſupra oſtenſum eſt, illud autem Corollarium 16. tam ex Sectione nona Lib. I. quam ex ipſa Prop. LXVI. legitimè deduci, ex ipſo Newtono notiſque illis locis adjectis probatum credimus.

2°. Quod queritur V. D. eamdem gravitationem contrarium effectum regulæ ſuæ producere reſpectu Aphelii Saturni, id vitio vertendum non eſt Syſtemati Newtoniano, quin e contra egregia procul dubio eſt ejus confirmatio. Quippe eo ipſo quod Saturnus cæteris Planetis ſit exterior, ex Syſtemate Newtoniano fluit vim Solis in Saturnum agentem augeri per vim Planetarum interiorum in conjunctione, unde Aphelium ejus debet regredi per Prop. XLV. (quod in Saturno obſervari, ex ipſo Caſſino didicimus, ut ſuperius notâ c pag. 23. retulimus) dum è contra Aphelia Planetarum interiorum per vim exteriorum in conjunctione poſitorum progredi debeant.

3°. Queritur denique quod Aphelia Planetarum inferiorum nunc retrahi nunc promoveri debeant, quod tamen non obſervatur; ſcilicet Newtonus ſtatuit quidem Aphelia Planetarum inferiorum in ſyzygiis promoveri, in Quadraturis retardari, plus promoveri verò quam retardari unde in totum progredi videntur; Aphelii autem ea veluti libratio obſervabilis non

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

Invenire orbium principales diametros.

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſubſeſquiplicatâ temporum periodicorum, per prop. xv. lib. 1. (b) Deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum ſolis & planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter ſummam illam & ſolem, per prop. LX. lib. 1.

PRO-

74. eſt; etenim qui praxi Aſtronomicæ operam dant facile ſentiunt loca Apheliorum ita non determinari, ut nutatio Aphelii in ſingulis orbitæ partibus obſervatione obtineatur, imo poſt plures duntaxat revolutiones ſatis tutò Aphelii progreſſum inveniri, ipſæ Methodi ad eas obſervationes adhibitæ docent, hinc, ad obſervationes provocare non licet ut illam nutationem vel veram vel fictitiam eſſe probetur, ſiquidem obſervationes hâc de re nihil docere nos poſſunt.

Addit verò, *tellus ubi in Aphelio verſatur Jovemque reſpectu Zodiaci præcedit retraheretur, & contra promoveretur ubi Jupiter tellurem præcederet, unde gravitas contrarios effectus produceret ante & poſt conjunctionem Telluris & Jovis*; ſi in hoc exemplo agatur de motu Telluris in longum hæc revera fluunt ex gravitationis ſyſtemate, & reverâ in Lunâ inde producitur ea inæqualitas quæ *Variatio* dicitur Aſtronomis notiſſima; ſimilem inæqualitatem in terra non quidem obſervarunt Aſtronomi quia minima eſſe debet per ipſam gravitationis naturam, & cum ſeſe utrinque compenſet nullum ſui relinquit Veſtigium; Quod ſi in hoc exemplo de motu Aphelii Terræ agatur ut ex ſermonis ſerie, quis forte ſuſpicaretur, res fieri non debet ut hic indicatur, nam in tota ſyzygia Aphelium telluris progredi debere, & in quadraturâ duntaxat regredi, liquet per XLV. & LXVI. primi Libri.

Quas quidem adnotationes eâ mente non adjungimus ut quidquam derogetur ſummæ Viri Illuſtriſſimi, apud omnes φιλομαθηματίκως authoritati. Sed cum Newtonus brevitate ſuâ occaſionem dederit V. Ill. dicendi, eum nullo fundamento meràque apparentiâ proportionem motus Apheliorum ſtatuiſſe, hâc notâ ipſi inuſtâ eum purgare & veritas & Commentatoris officium poſtubabant.

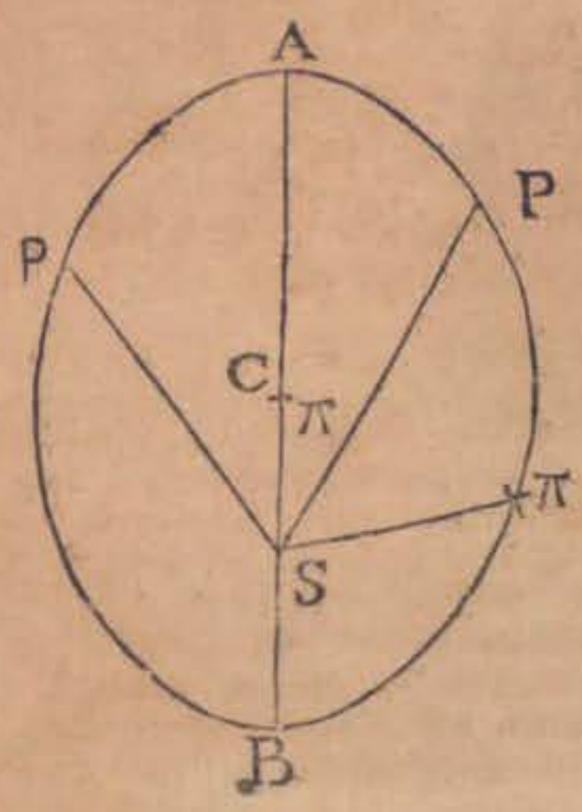
(b) *Deindè ſigillatim* Jam capti ſunt orbium axes majores in ratione ſubſeſquiplicatâ temporum periodicorum, nempè nullâ habitâ ratione maſſarum, planetæ ſpectati ſunt tanquam totidem puncta in ellipſibus circà immotum in umbilico Solis centrum revolventia. Quoniam verò fit ut propter Solis & planetæ actiones mutuas, planeta ellipſim deſcribat cujus focus eſt commune gravitatis centrum planetæ & Solis, major axis ellipſeos quam planeta deſcribit circà Solem qui ipſe ſimul revolvitur circà commune centrum gravitatis, eſt ad axem majorem ellipſeos quam idem planeta circà Solem quieſcentem eodem tempore periodico deſcribere poſſet in ratione ſummæ maſſarum Solis & planetæ ad primam duarum mediè proportionalium inter ſummam illam & Solem (prop. 60. lib. 1.) ideóque ut axis major orbitæ corrigatur, augendus eſt in dictâ ratione. Datur autem ratio inter maſſas Solis & planetarum, ac proindè datur ratio in quâ orbitarum axes majores ſunt augendi. Vide de his not. 64. hujus libri.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

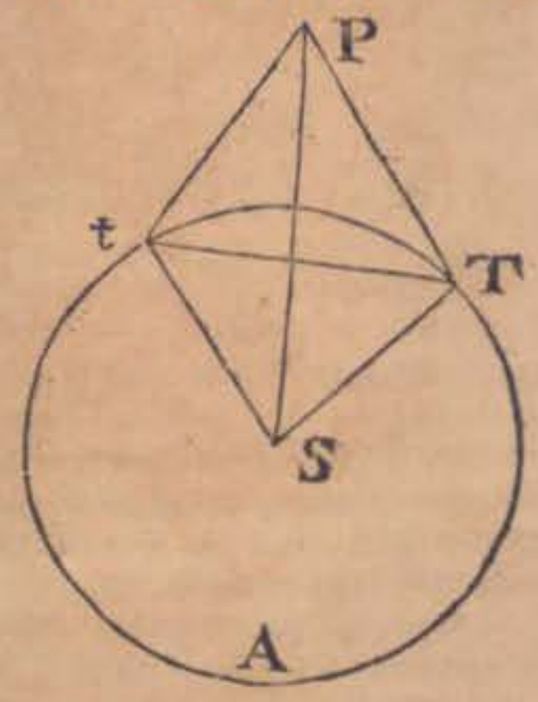
Invenire orbium eccentricitates & aphelia.

(c) Problema confit per prop. XVIII. lib. I.

PRO-



que P planeta seu potiùs locus Planetæ ad Eclipticam reductus sivè punctum ubi perpendicularis ex planetâ in planum Eclipticæ demissa incidit. Ponatur tellus in T, observeturque planetæ longitudo 75.



geocentrica, ex datâ theoriâ Telluris, dabitur longitudo apparens Solis, ideóque dabitur angulus PTS. Post integram planetæ revolutionem, planeta rursùs erit in P, quo tempore tellus sit in t, ex eo puncto iterum observetur planeta, inveniaturque angulus P t S elongatio planetæ à Sole. Ex datis observationum momentis, dantur loca Telluris in Ecliptica è Sole visa ejusque à Sole distantiæ, ac proindè in triangulo tST, dantur latera tS, ST & angulus tST, quarè inveni-entur anguli StT, STt & latus tT. Si itaque ab angulis datis PTS & PtS, auferantur anguli noti tTS, TtS dabuntur anguli PTt & PtT; undè in triangulo PtT ex datis angulis unà cum latere Tt, innotescet PT. Deindè in triangulo PTS, dantur latera PT, TS cum angulo intercepto PTS, ideóque dabitur SP, quæ distantia planetæ à Sole curtata appellatur & notus fiet angulus TSP, ex quo dabitur

(c) 75. * *Problema confit.* Sit S Sol, sintque planetæ loca tria P, p, π è Sole visa & data sit recta BA axis major ellipseos, describatur (per prop. 18. lib. 1.) ellipsis cujus umbilicus est S & axis major AB, quod fit, si ex axe BA demantur longitudines SP, Sp, Sπ & cum residuis arcus ex punctis P, p, π describantur, intersectio horum trium arcuum erit alter focus Ellipseos quo invento orbita planetæ determinabitur, simulque dabitur distantia Solis à centro ellipseos, hoc est, excentricitas, notumque erit ellipseos punctum à Sole remotissimum, id est, aphelium.

Quia verò problema illud supponit data esse tria planetæ loca centrica, hoc est, ex Sole visa, datasque eorum à Sole distantias, hic adjungemus methodum quâ Clariss. Halleius ex dato tempore periodico, planetæ locum centricum ejusque à Sole distantias invenire docuit. Referat TtA orbitam Telluris, S Solem, sit-

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

Planetarum motus diurnos uniformes esse, & librationem lunæ ex ipsius motu diurno oriri.

Patet per motus legem 1. & corol. 22. prop. LXVI. lib. 1. Jupiter utique respectu fixarum revolvitur horis 9. 56′, mars horis 24. 39′. venus horis 23. circiter, terra horis 23. 56′, sol diebus $25\frac{1}{2}$ & luna diebus 27. 7 hor. 43′. Hæc ita se habere ex phænomenis manifestum est. (d) Maculæ in corpore solis ad eundem situm in disco solis redeunt diebus $27\frac{1}{2}$ circiter, respectu terræ; ideoque respectu fixarum sol revolvitur diebus $25\frac{1}{2}$ circiter. Quoniam vero lunæ circa axem suum uniformiter revolventis dies menstruus est: hujus facies eadem ulteriorem

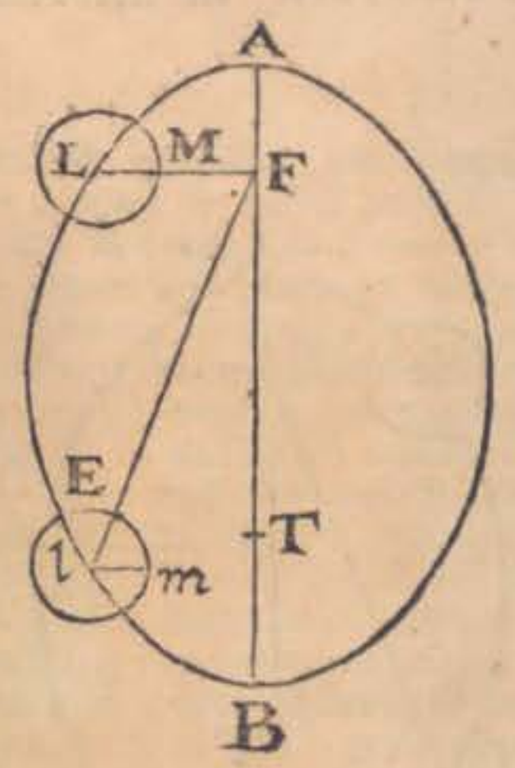
75. bitur locus planetæ heliocentricus. Est autem (ex trigon.) tangens latitudinis geocentricæ planetæ ad tangentem latitudinis heliocentricæ ut distantia planetæ à Sole curtata ad distantiam ejusdem à tellure curtatam, sed per observationem, nota est latitudo geocentrica planetæ, quare innotescet planetæ latitudo heliocentrica ex quâ simul & distantiâ à Sole curtatâ elicietur planetæ à Sole vera distantia & simili modo vera distantia Planetæ à terra, unde tandem in Triangulo cujus tria puncta sunt Sol, terra & Planeta omnia latera sunt cognita. Hâc ratione obtineri possunt varia loca centrica planetæ variæque à Sole distantiæ.

Cæterum hæc fusè variisque adhibitis methodis, explicata reperiuntur in introductione ad veram Physicam Joannis Keill, in Astronomiâ Physicâ Davidis Gregorii, & potissimum in elementis Astronomicis à Clariss. Cassino nuper editis.

(d) * *Maculæ in corpore Solis.* Cum revolutio macularum circà Solem sit admodum regularis & maculæ ipsæ vel Soli supernatent vel à Sole parum distent (69) non maculæ circà solem sed Sol ipse $25\frac{1}{2}$ dierum spatio circiter, circà proprium axem motu vertiginis movetur. Jovem, Venerem & Martem circà axem suum gyrare ex maculis quoque in horumce planetarum corporibus per vices in conspectum redeuntibus colligitur. In Mercurio autem qui Soli proximus est, ob nimium Lucis splendorem, & in Saturno ob maximam ejus à terrâ distantiam maculæ nullæ hactenus deprehendi potuerunt quibus determinaretur eorum vertigo. Attamen nil obstat quominus ex analogiæ lege colligamus Mercurium quoque & Saturnum circà axem suum gyrare. Macularum solarium theoriam elegantissimè exposuerunt Clariss. D. De-Lisle in Libro cui titulus, monumenta quæ ad Astronomiæ Physicæ & Geographiæ progressum conducunt, sæpeque laudatus D. Cassinus in Elementis Astronomicis. De maculis Veneris ejusque circà axem revolutione quædam inter Astronomos est lis; à Cassino patre 23 horis & 20′ absolvi, ex maculâ sive potius splendore quodam in disco Veneris notabili annis 1666, 1667 compertum fuerat, non ita tamen tuto, ipse enim scribebat de motu Veneris referente ipsius filio, *debiles adeò & confusas esse Veneris maculas ut earum terminos accuratè notare non liceat, unde utrum aliquis sit Veneris motus per eas determinare frustra quæritur.* Anno vero 1726. Dnus. Bianchinus maculas Veneris Lunaribus similes diu est persecutus, earumque revo-

rem umbilicum orbis ejus (e) ſemper reſpiciet quamproximè, & propterea pro ſitu umbilici illius deviabit hinc inde à terrâ. Hæc

LIBER TERTIUS. PROP. XVII. THEOR. XV.



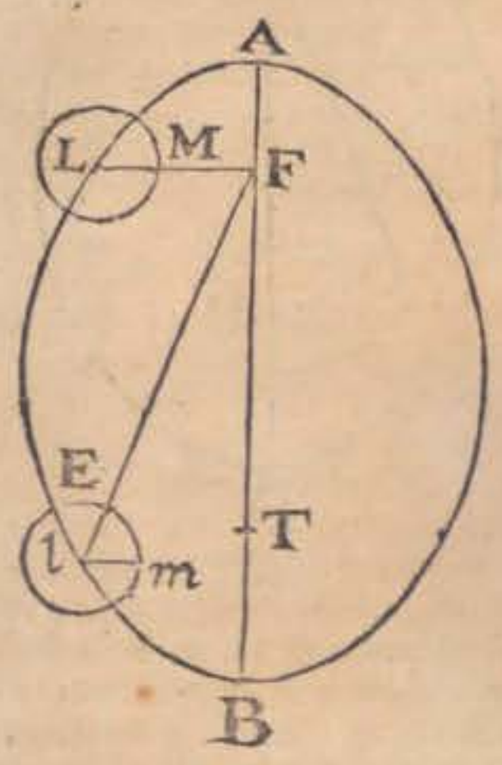
revolutionem 24 diebus 8. horis abſolvi deduxit, circa axem admodum obliquum Ecliptiçæ; in ſuam autem ſententiam D^num. Caſſinum filium non adduxit, quia apparentiæ à D^no. Bianchino obſervatæ per motum 23 horarum explicari poterant, dum Parentis obſervationes, cum hypotheſi revolutionis 24 dierum & 8. horarum conſentire non poſſent, hinc quæſtio in medio remanſit non facile ſolvenda, maculæ enim Veneris nonniſi Cœlo puriſſimo obſervari poſſunt & Lutetiæ nequidem cum maximis Teleſcopiis videri potuiſſe narrat idem Ill. Caſſinus filius.

(e) 76. *Semper reſpiciet quamproximè.* Sit orbita lunæ ellipſis A L B A, in cujus umbilico T locatur terra, ductus ex umbilico radius vector areas ellipticas temporibus proportionales deſcribit (prop. 1. lib. 1.); demiſſis autem à duobus quibuſvis in ellipſeos peripheriâ punctis ad alterum umbilicum F rectis L F, l F, angulus L F l erit quamproximè ad quatuor rectos ſicut tempus quo arcus L l à Lunâ deſcribitur ad integrum tempus periodicum Lunæ, ſi ellipſis ſit parum excentrica. Jam referat L M meridiani Lunaris, hoc eſt, circuli per axem converſionis Lunæ planum, quod productum tranſeat per F, idem planum in quocumque orbitæ ellipticæ puncto locetur Luna, productum quoque per F tranſibit. Quoniam enim Luna circà axem ſuum uniformiter revolvit eodem tempore quo circà tellurem periodum ſuam abſolvit, patet meridiani planum quod Lunâ exiſtente in L ſitum L M obtinebat, dum Lunæ centrum aliud quodvis punctum l attigit, ad talem ſitum l E perveniſſe, ut poſitâ l m parallelâ ad L M, angulus m l E ſit ad quatuor rectos ſicut tempus quo Luna arcum L l, percurrit ad integrum tempus periodicum Lunæ, ideóque (prop. 11. lib. 5. elem.) angulus m l E eſt ad quatuor rectos ſicut L F l ad quatuor rectos, ac proindè angulus m l E æqualis eſt angulo L F l, & ob rectas L F, l m parallelas jacebit l E in directum ipſi l F, hoc eſt, ubi Luna in l verſatur, ejuſdem meridiani planum quod in priori ſitu L productum etiamnum tranſit per F. Quarè in quocumque Lunaris orbitæ puncto centrum Lunæ occurat, productum ejuſdem meridiani planum tranſit per F. 76.

His præmiſſis patet eandem ferè Lunæ faciem ſemper ad terram converti eaſdemque ferè Lunares maculas obſervatori terreſtri apparere. Cum enim productum ejuſdem meridiani planum per alterum orbitæ Lunaris focum F tranſeat, ſitque Lunaris orbita parum excentrica, hoc eſt, non multum diſtent umbilici F & T, eadem quamproximè Lunæ facies terræ obvertitur. Si verò accuratè obſervatis Lunaribus maculis, Lunæ facies ad terram converſa diligentiùs conſideretur, non eadem præcisè facies à nobis videbitur. Quoniam enim ejuſdem meridiani planum L M non ad terram T, ſed ad alterum focum F dirigitur, patet Lunæ in L exiſtentis hemiſphærium è tellure T viſum aliquantulum eſſe diverſum ab illo quod videtur, dum Luna reperitur in l; nam pars hemiſphærii Lunaris verſus plagam B quæ anteà occultabatur fit conſpicua, & contrà pars hemiſphærii alterius versùs R quæ anteà apparebat oculis evaneſcit, motus hic Lunæ è terrâ apparens quo fit ut quædam

DE MUNDI SYSTEMATE.

Hæc eſt libratio lunæ in longitudinem: Nam (f) libratio in latitudinem orta eſt ex latitudine lunæ & inclinatione axis ejus ad planum eclipticæ. Hanc librationis lunaris theoriam D. (g) *N. Mercator* in aſtronomiâ ſuâ initio anni 1676 edita, ex literis



Luna versùs auſtrum ab ecliptică maximè recedit, hoc eſt, dum in limite auſtrali verſatur, Lunæ polus borealis & aliquæ ultrà polum Lunaris globi partes à Sole illuſtrentur, intereadum polus auſtralis & aliquæ citrà hunc polum regiones Lunares in tenebris immerguntur; Si ergò in hoc ſitu contingat Solem in eâdem plagâ cum limite auſtrali verſari, Luna à conjunctione cum Sole ad nodum aſcendentem, hoc eſt, versùs Boream progrediens, has regiones maculaſque polo Boreali vicinas oculis ſubducet, dum interim ab oppoſitâ plagâ aliæ cum polo auſtrali regiones è tenebris emergunt, contrariumque accidet deſcendente Lunâ novâ à limite boreali, borealiores nempè Lunæ partes paulatim in lucem è tenebris prorepent, dum auſtraliores evaneſcunt.

76. maculæ in partem à terrâ averſam ſe recipiant, dum aliæ ex parte aversâ in conſpectum prodeunt, libratio Lunæ in longitudinem appellatur. Librationem hanc bis in quolibet menſe periodico reſtitui manifeſtum eſt, quandò nempè Luna in apogæo A aut perigæo B verſatur; in utroque enim ſitu ejuſdem meridiani planum quod protenſum in F incidit, tranſit etiam per T. Cæterum hæc libratio omnibus inæqualitatibus obnoxia eſt quibus afficitur motus in longitudinem. (Vid. corollaria prop. 66. lib. 1.).

(f) 77. * *Libratio in latitudinem.* Quoniam axis circà quem Luna revolvitur, non eſt ad Lunarem orbitam normalis, ſed ad illam inclinatus, manifeſtum eſt Lunæ polos per vices ad terram vergere, ideóque Lunæ maculas nunc huic nunc illi polo vicinas è terrâ ſpectari. Quia verò axis Lunæ eſt ferè ad planum Eclipticæ normalis, patet hanc librationem pendere à ſitu Lunæ reſpectu nodorum orbitæ Lunaris cum eclipticâ, ſeu ab ipsâ latitudine Lunæ. Ex illâ libratione oritur ut dum

(g) 78. * *D. N. Mercator.* Hic tranſcribemus N. Mercatoris verba. «Harum «tamen variarum atque implicitarum li«brationum (Lunæ ſcilicet) cauſas, hy»potheſi elegantiſſimâ explicavit nobis Vir «Cl. Iſaac. Newton cujus humanitati «hoc & aliis nominibus plurimum debere «me lubens profiteor. Hanc igitur hypo«theſim Lectori gratificaturus, exponam «verbis, ut potero, nam delineationes in «plano vix ſufficiunt huic negotio. Ita«que reverſus ad globum, cogita nunc «illum repræſentare ſphæram in quâ mo«vetur Luna cujus centrum occupet tellus; «ipſum verò Lunæ globum credito polis «& axe ſuo inſtructum circà quem re«volvatur motu æquabili ſemel menſe ſy«dereo, dum à fixâ aliquâ digreſſa ad «eandem revertitur, & æquator Lunaris «ad firmamentum continuatus intelligatur «congruere plano horizontis lignei, & po«lus æquatoris Lunaris in firmamento im«mineat polo Boreo globi ad zenith ele«vato. Orbitam verò Lunæ concipito «partim ſuprà horizontem ligneum attol«li, partim verò infrà eundem deprimi, «quemadmodum in hoc ſitu globi conſ«pici-

literis meis plenius expoſuit. Simili motu (h) extimus ſaturni ſatelles circa axem ſuum revolvi videtur, eâdem ſui facie ſaturnum perpetuò reſpiciens. Nam circum ſaturnum revolvendo, LIBER TERTIUS. PROP. XVII. THEOR. XV.

«picitur ecliptica, licet angulus æquato-«ris Lunaris & ejus orbitæ non ſit fortè «æquè magnus atque hic quem globus exhi-«bet. Deindè fingè tibi globulos duos «æquales quorum uterque polis, æquato-«re & meridiano unico primario inſignia-«tur & uterque filo ſuſpendatur alterutri «polorum alligato. Horum alter referat «Lunam fictitiam motu æquabili ſecun-«dum horizontis lignei circumlatam, atque «eodem tempore circà axem ſuum re-«volutam reſpectu firmamenti, ità ut pla-«num meridiani primarii Lunaris perpe-«tuò tranſeat per centrum terræ. Alter «verò globulus veram Lunam imitatus in «orbitâ ſuâ feratur motu inæquali, nunc «ſuprà horizontem ligneum emergens, «nunc infrà eundem deſcendens, ità ut «planum æquatoris hujus Lunæ veræ ſem-«per parallelum maneat plano horizontis «lignei, & planum meridiani primarii «ejuſdem Lunæ veræ ſemper parallelum «plano meridiani primarii Lunæ fictæ. Ità «fit ut Luna ficta eandem nobis faciem ob-«vertens ſemper nulli prorsùs librationi «ſit obnoxia. At Luna vera dum à peri-«gæo pergit ad apogæon præcedens Lunam «fictam, meridianum ſuum primarium oſ-«tendit in medietate ſiniſtrâ ſui diſci tot «gradibus abeuntem à medio quot ſunt «inter longitudinem Lunæ veræ & fictæ. «Ab apogæo verò ad perigæon deſcendens «Luna vera ſequitur fictam atquè tum me-«ridianus primus veræ Lunæ recedit ab «ejus medio ad dextram, hoc eſt, macu-«læ omnes verguat in occaſum, & cum «differentia inter mediam & veram Lunæ «longitudinem in quadraturis evadat ma-«jor, propter evectionem ſyſtematis Lu-«naris à centro telluris, hinc eſt quod in «quadraturis librationes in longum cer-«nuntur majores. Similiter intelligitur «cauſa librationis in latum, quando Lu-«na ſuperato nodo aſcendente, ſivè ſectio-«ne horizonti lignei & orbitæ ſuæ, ten-«dit ad limitem boreum, tum enim nobis «in centro ſphæræ poſitis, polus Lunæ «boreus & quæ ſunt circà eum maculæ «abſconduntur & polus auſtralis cum ſuis «maculis in conſpectum venit, undè ma-«culæ omnes conſpicuæ in boream tende-«re videntur; contrarium accidit, Lunâ «ad limitem auſtralem accedente. Ab iiſ-«dem cauſis procedit macularum ex par-«te lucidâ in obſcuram tranſitus & viciſ-«ſim. Nam in limite auſtrali polus Lunæ «boreus à Sole illuſtratur & quidquid eſt «zonæ frigidæ arctico Lunari incluſum, «dum frigida auſtralis in tenebris verſatur. «Quod ſi igitur Solem concipias in eâdem «plagâ cum limite auſtrali & lunam poſt «conjunctionem indè procedere ad no-«dum aſcendentem, tum maculæ ſuperio-«res apud polum boreum ſitæ, paulatim «cum ſuo polo à Luce in Tenebras con-«cedunt, dum inferiores maculæ cum po-«lo auſtrali ex Tenebris in Lucem prore-«punt. Contrarium evenit ſemeſtri poſt, «cum Sol acceſſit ad limitem Lunæ bo-«reum». Hactenus N. Mercator ſed plenior librationum Lunarium expoſitio habetur in elementis Aſtronomicis Clariſſ. Caſſini, ubi Vir Doctiſſ. varias harumce librationum apparentias reſpectu fixarum & Solis determinat, docetque methodum quâ ad quodlibet tempus datum poſſit definiri apparens macularum Lunarium ſitus. 78.

(h) * *Extimus Saturni ſatelles*, tertio ſatellite ſæpè major apparet, poſteàque decreſcit ac tandem juxtà periodum nondum probè notam evaneſcit, id tamen ut plurimum contingit dum ſatelles in orbitæ ſuæ orientali parte reſpectu Saturni verſatur, rursùs deindè in conſpectum redit. Cauſa hæc eſſe videtur quod ſcilicet hemiſphærii ſatellitis pars quæ ad nos converſa eſt, maculis obſcurata præ luminis tenuitate cerni non poſſit, revolvente autem circà axem ſatellite, ad hemiſphærium oppoſitum tranſeunt maculæ, iterumque ſatelles fit conſpicuus. Cumque in eâ orbis ſui parte quæ orientem ſpectat obſcuratus ſatelles ſemper obſervetur, in alterâ verò parte nunquam, valdè proba-

DE MUNDI SYSTEMATE.

do, quoties ad orbis ſui partem orientalem accedit, ægerrimè videtur, & plerumque videri ceſſat: id quod evenire poteſt per maculas quaſdam in eâ corporis parte quæ terræ tunc obvertitur, ut *Caſſinus* notavit. Simili etiam motu ſatelles extimus jovialis circa axem ſuum revolvi videtur, propterea quod in parte corporis jovi aversâ maculam habeat quæ tanquam in corpore jovis cernitur ubicunque ſatelles inter jovem & oculos noſtros tranſit.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes planetarum diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores eſſe.

(i) Planetæ ſublato omni motu circulari diurno figuram ſphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. (k) Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia ſi fluida ſit aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò deſcenſu ſuo ad polos diminuet. Sic jovis diameter (conſentientibus aſtronomorum obſervationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem

78. bile eſt eandem hujus ſatellitis faciem planetæ primario ſemper obverti. Idem quoque ſimili argumento patet in extimo jovis ſatellite, niſi dicatur illas ſatellitum maculas fuliginum inſtar modò naſci, modò diſſipari, ſed ubi apparentiæ aliquæ ex duplici causâ ortum habere poſſunt, anteponendæ ſunt explicationes quæ à motu locali repetuntur. Alios Saturni Joviſque Satellites, Lunæ inſtar, Planetis primariis invariatam manifeſtarem facie ex analogiæ lege colligunt multi. Rem aliter ſe habere cenſet Clariſſ. Daniel Bernoullius in diſquiſitionibus Phyſico-Aſtronomicis an. 1734. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio condecoratis. Has conſulat Lector.

(i) * *Planetæ ſublato omni motu circulari.* Patet (per not. 172. lib. 2.), Si planetarum materia ponatur fluida, viſque gravitatis ad unum centrum dirigatur.

(k) * *Per motum illum circularem.* Quoniam planetæ circà axem ſuum revolvuntur, planetarum partes à centris circulorum in quibus moventur, recedere conantur eóque major eſt vis illa centrifuga quo majores ſunt circulorum quas deſcribunt peripheriæ (cor. 3. prop. 4. lib. 1.). Sed æquator eſt circulus maximus, circuli autem versùs polos continuò decreſcunt, quare planetarum partes magis à centro æquatoris quam à centris paralellorum recedere conantur, ideóque ſi fluida ſit planetarum materia aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò deſcenſu ſuo ad polos diminuet.

dem argumento, nisi terra nostra paulo altior esset sub æquatore quam ad polos, maria ad polos subsiderent, & juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Norwoodus noster circa annum 1635 mensurando distantiam pedum Londinensium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, ac observando differentiam latitudinem 2 *gr.* 28′ collegit mensuram gradus unius esse pedum Londinensium 367196, id est hexapedarum Parisiensium 57300.

(†) *Picartus* mensurando arcum gradus unius & 22′. 55″. in

(†) * *Picartus mensurando arcum .... invenit arcum gradus unius esse Hexap.* 57060. * Circa hanc Picarti mensuram observandum Ill. Cassinum juniorem distantiam terrestrem inter Parallelos Malvoisinæ & Ambiani 42 hex. imminuendam statuisse, ipsum verò arcum cælestem propter refractiones $1\frac{1}{2}''$ esse augendum, unde arcus gradus unius evadit hexap. 57010. Novissimè verò D. de Maupertuis arcum cælestem inter Lutetias & Ambianum metitus, multo minorem eum deprehendit quam esse debuisset secundum observationes Picarti, quare servatis mensuris terrestribus Picarti arcum unius gradus 57183 hex. determinavit: Hæc paulo fusiùs sunt diducenda.

I. Cum mensura Picarti à Malvoisina ad Sourdonem procedat, & hinc ad Ambianum; Picartus distantiam à Malvoisina ad Sourdonem per duas Triangulorum series determinat, unam præcipuam vocat quoniam ea ipsa erat quâ uti primùm constituerat, sed cum aliquid dubii in eâ observasset alteram instituit, quam priori antepositi quia observationum in eâ factarum certior sibi videbatur, & accurate consentiebat cum basi proximâ actu mensuratâ: Ill. verò Cassinus distantiam inter Parallelos, Malvoisinæ & Sourdonis ex priori serie determinat $68325\frac{2}{3}$ hex. dum eamdem distantiam Picartus, cui Ill. de Maupertuis suffragatur, facit hex. 68347.

Differunt iterum Picartus & Illustrissimus Cassinus in distantiâ inter Sourdonem & Ambianum, eam enim distantiam Picartus ex suis mensuris hex. $11161\frac{2}{3}$ invenit, Cassinus verò hex. $11155\frac{1}{2}$: discriminis autem hujus ratio duplex est, nam cum uterque Triangulos formare incipiat in lineâ quæ intercipitur inter Sourdonem & Montemdesiderium, Ill. Cassinus eam lineam assumit hex. $7116\frac{1}{2}$ juxta priorem seriem Triangulorum Picarti, & Picartus alteram seriem verificatam per Basim proximam actu mensuratam antepones eam lineam $7122\frac{1}{2}$ Hex. facit: Cum verò diversis Triangulis inde ad Ambianum usi sint, in iis Triangulis occurrit sensibilis differentia quæ sese prodit in Angulo Sourdoni facto inter lineas inde ad Ambianum & Montemdesiderium protensas, nam is Picarto est 137°. 56′. 10″ angulus autem idem à Cassino determinatur 137°. 53′. 30″, ex quâ differentiâ 2′. 40″. & ex Baseos inter Sourdonem & Montemdesiderium diversitate, oriri potuit discrimen

DE MUNDI SYSTEMATE.

in meridiano inter *Ambianum* & *Malvoisinam*, invenit arcum gradus

78. illud in distantiâ inter Sourdonem & Ambianum.

In arcu autem Cælesti à Picarto mensurato refractionis correctionem adhibet Cassinus quam neglexerat Picartus; cum ergo inveniſſet distantiam genu Cassiopeæ à Zenith loci in quo observabat & qui erat 18 Hex. Malvoisinâ meridionalior 9° 59′ 5″ versus septentrionem, & cum ejus stellæ distantiam à Zenith loci 75 hex. meridionaliori quam ædes Ambiani 8° 36′ 10″ inveniſſet, arcum inter Zenith eorum locorum juxta Malvoisinam & Ambianum interceptum fecit Picartus 1°. 22′ 55″ ut refert Newtonus.

Verum propter refractionem augendas esse has distantias à Zenith statuit Cassinus ita ut prima distantia 10″, altera $8\frac{3}{5}$″ fiat, cum ergo prior fiat 9° - 59 - 15

Altera - - - 8 - 36 - $18\frac{3}{5}$

Arcus interceptus inter Zenith locorum observationis fit - - - - 1 - 22 - $56\frac{2}{5}$

Ex his ergo correctionibus tam in arcu Cælesti quam in mensuris terrestribus, à Picarto observatis deducit Ill. Cassinus arcum unius gradus esse 57010 hex.

II. Ill. de Maupertuis mensuras terrestres quas Picartus adoptavit admittens arcum cælestem mensuravit Instrumento, à solertissimo Graham accuratissimè constructo, cum autem priores sectores circa axem immotum ex quo filum verticale pendet revolverentur, & divisiones subtiliores in sectoris limbo per lineas transversas signarentur, in hoc Instrumento Telescopium in sua summitate duos cylindros adjunctos habet circa quos cum sectore inferius adfixo revolvitur & ex quorum centro pendet filum verticale quo notentur gradus in limbo sectoris; Divisiones in eo limbo gradus & eorum partes octavas tenuissimis punctis indicant nihilque præterea, & ad observationem faciendam ita constituitur instrumentum, ut filum pendulum alicui è divisionibus accuratè applicetur, idque Microscopio cum lumine juxta limbum collocato agnoscitur, tum cochleâ pellitur instrumentum donec objectum in axe Telescopii cernatur & numerus gyrorum cochleæ, partesque singuli gyri numerantur in limbo circuli horologii instar cochleæ adnexi, ita ut minimi cochleæ progressus maximè sensibiles fiant. Tali itaque instrumento cujus radius est octo pedum una unciâ demptâ observationes instituit Ill. de Maupertuis Lutetiæ in loco 1105 Hex. magis septentrionali quam ædes B. Virginis, & Ambiani in loco $98\frac{1}{2}$ meridionaliori æde ejus urbis. Inde ex stellis & Persei, & Draconis, arcum cælestem inter Zenith eorum locorum interceptum 1° 1′ 12″ determinavit, correctionibus præcessionis Æquinoxiorum & aberrationis lucis adhibitis. Hinc cum juxta Picartum inter Parallelos Malvoisinæ & Ambiani sint 78907. hex. inter Malvoisinam & ædes B. Virginis Lutetiis sint $19376\frac{1}{2}$ hex. manent inter utramque ædem $59530\frac{1}{2}$ hex. ex quibus detractis $1203\frac{1}{2}$ hex. propter observationum loca. Invenitur arcum 1°. 1′. 12″ respondere mensuræ 58327. hex. ideóque arcum unius gradus Hexapedas 57183. in eâ latitudine continere.

Verum hic non dissimulandum qualis quantusque error observationi Picarti adscribatur, ex hac novissimâ Ill. de Maupertuis observatione, & ut ille error rectè æstimetur corrigendæ sunt ejus observationes cælestes non tantùm per refractionem sed etiam per Æquinoctiorum præcessionem & aberrationem lucis, etenim cum eodem tempore factæ non fuerint observationes à Picarto Malvoisinæ & Ambiano, sed inter eas mensis intervallum efluxerit, interea per præcessionem Æquinoctiorum augebatur stellæ genu Cassiopeæ declinatio $1\frac{1}{2}$″ ut ipse Picartus observat, simulque propter aberrationem lucis 8″ circiter augeri eam declinationem nunc constat, quare stella quæ Ambiani observabatur non erat in eodem cæli puncto quo fuerat cum Malvoisinæ observaretur, sed erat 10 se-

gradus unius esse hexapedarum Parisiensium 57060. (‡) *Cassinus* senior mensuravit distantiam in meridiano à villâ *Collioure* in *Roussillon* ad observatorium Parisiense; & filius ejus addidit distan- LIBER TERTIUS. PROP. XII. THEOR. XII.

re secundis ad septentrionem provectior, dum ergo observabatur eam stellam distare à Zenith Ambiani 8°. 36'. $18\frac{3}{5}$ (adhibita refractionis correctione) Punctum fixum quod fuerat Malvoisinæ observatum 8°. 36' $8\frac{3}{5}$ à Zenith duntaxat distabat, & cum id Punctum Malvoisinæ 9° 59' 15" à Zenith distaret arcus inter duo Zenith interceptus erat 1°. 23' $6\frac{2}{5}$ (non 1°. 23' $56\frac{2}{5}$) qui respondet 78850. hex. unde gradus unius mensura fiet duntaxat $56926\frac{1}{6}$ hexapedarum; sive ut conferatur hæc observatione cum observat. Il. de Maupert. fiatque si $58315\frac{1}{6}$ hex. respondeant 1° 1' 12" Quot gradibus respondebunt 78850. Invenietur 1°. 22' $45\frac{1}{3}$". loco 1°. 23' $6\frac{2}{5}$" ita ut error in observatione Cælesti Picarti, sit 20".

Singulare quid occurrit in ipsa Picarti narratione; Postquam enim differentias inter Zenith Malvoisinæ & Sourdonis, Malvoisinæ & Ambiani dedit, addit; «Differ«rentia temporis quod effluxit inter obser«vationes requireret ut ex priori differen«tia 1" *demeretur* ex posteriori $1''\frac{1}{2}$ (prop«ter æquinoctiorum præcessionem) sed «hanc correctionem ne minutias sectari, «videamur omisimus» si mutatio declinationis per præcessionem æquinoctiorum orta ex iis differentiis *demenda* foret, mutatio declinationis propter aberrationem pariter foret demenda siquidem fit in eamdem partem, itaque cum arcus inter Malvoisinam & Ambianum adhibitâ correctione refractionis, sit 1°. 22. $56\frac{2}{5}$ dempta præcessionis & aberrationis variatione 10" circiter, maneret is arcus 1°. 22. $46\frac{2}{5}$ ad unam secundam qualis secundum Dni. De Maupertuis observationem inveniri debuisset.

Verum ut correctio præcessionis & aberrationis *demenda* foret, ut vult Picartus, oporteret ut observationes primum Ambiano postea Malvoisinæ fuissent factæ, sed ita notantur illæ observationes, *Septembri Malvoisinæ* & *Octobri Ambiano*, si itaque recte ratiocinatus sit sed male tempora notaverit elegantissime consentient ejus observationes cum accuratissimis postea factis; sin bene tempora notaverit, sed male fuerit ratiocinatus, fatendum erit errorem circiter 20" inter duas ejus observationes esse distribuendum, stantibus observationibus Il. De Maupertuis: 6" aut 7" secundis propius accederent ad has observationes illæ quas instituit Picartus à Malvoisinâ ad Sourdonem, ita ut error 12" duntaxat, inter duas observationes distribuendus supereset. 78.

(‡) * *Cassinus senior mensuravit distantiam in meridiano à villâ Collioure ad observatorium Parisiense & filius addidit distantiam ab observatorio ad turrim Urbis Dunkirk.*

* Has duas mensuras in unam summam conjicit Newtonus, quia cum Cassinus senior gradum majorem quam Picartus inveneriti; Cassinus filius minorem, conjunctis mensuris obtinetur gradus mediocris proximè æqualis mensuræ gradus à Picarto assignatæ, quem ut gradum telluris ut sphæricæ consideratæ assumit Newtonus; verum hic duo sunt notanda, 1°. utitur Newtonus isto gradu mediocri quasi foret Æquatoris gradus, qui quidem isto major est, sed inde parum mutatur sequens calculus ut liquebit si eumdem instituamus assumpto gradu æquatoris isto majore, v. gr. 57226 hex. ut deduceretur ex Theoriâ ipsius Newtoni, & gradum in 45. gradu faciendo 57100. hex.

2°. Distinguendæ sunt observationes Cassini senioris & filii, hæc enim propter aberrationem lucis correctione indiget, mensura vero Il. Cassini Patris à villâ Collioure ad observatorium arcum Cælestem 6°. 18' 57". continet & respondet hexapedis 360614. (ad maris libellam reductis mensuris) unde gradus fit 57097 hex.

DE MUNDI SYSTEMATE.

distantiam ab observatorio ad turrem urbis *Dunkirk*. Distantia tota erat hexapedarum 486156½ & differentia latitudinum villæ *Collioure* & urbis *Dunkirk* erat graduum octo & 31′. 12″5/6. Unde arcus gradus unius prodit hexapedarum Parisiensium 57061.

78. hex. verificatæ sunt mensuræ in utroque extremo, nec in iis gravis error est metuendus cum aptè consenserint Triangulorum calculi cum ultimis lineis seu Basibus actu mensuratis; Error verò qui in observatione Cælesti occurrere potest singuli gradûs mensuram parùm immutat quia in sex gradûs & ultra distribuitur, cum verò iisdem anni temporibus tàm Lutetiæ quàm in villâ Collioure observationes institutæ fuerint aberratio lucis calculum arcûs Cælestis non immutavit; Hinc in numeris proximis rotundis gradus in latitudine graduum 45. 57100. Hexapedarum assumi potest satis tutò.

3°. Quoad observationes Ill. Cassini filii, cum inter 15. Julii & 4. Sept. factæ fuerint observationes Cælestes quibus determinaretur arcus inter Zenith urbis Dunkirk & Observatorii interceptus, aberrationis correctio illis est adhibenda quæ tunc temporis nondum erat cognita; verum illam correctionem necessariam esse tantò minus dubium est, quod cum is arcus per observationes stellæ γ Draconis fuerit determinatus, ejus ipsius stellæ aberratio ab Ill. Bradleio fuerit observata (vid. Transf. Phil. Vol. XXXV. pag. 637.) & nuperrimè à D. Le Monnier; immediatis ergo experimentis constat ejus stellæ δ declinationem augeri à mense Julio ad Septembrem, ita ut cum Lutetiæ serius observata sit, 11½ secundis Polo tunc vicinior esse potuit quam cum in urbe Dunkirk observata fuerat, ideoque totidem secundis Zenith remotior apparebat, quam punctum fixum quod in urbe Dunkirk fuerat observatum; unde cum ex distantiâ à Zenith Lutetiæ detrahatur distantia ejusdem stellæ à Zenith urbis Dunkirk, arcus residuus illis 11½ sec. est multandus, & cum residuum invenerit Ill. Cassinus 2°. 12′. 9½″ est reducendus ad 2°. 11′. 58″, & cum is arcus 125454 Hexapedis respondere ab Ill. Autore statuatur, arcus unius gradus fiet Hex. 57038. 5ped.

Verum minor dissensus inter observationes Ill. Cassini filii & Dni. de Mauper-tuis apparebit si attendatur, partem illius dissensus oriri ex eo quod, dum mensuris Picarti uterentur diversas ejus Triangulorum series adoptaverint, quare ut conferantur eorum inventa, reducendæ sunt eorum supputationes quasi eâdem serie Triangulorum Picarti uterentur ambo: v. gr. supponatur utrumque assumpsisse eam seriem Triangulorum quam ipse Picartus admisit, sed ad Sourdonem usque, & inde (quia Ill. Cassinus propriis suis Triangulis distantiam à Sourdone ad Ambianum determinavit) assumatur ea distantia qualis ex Triangulis Ill. Cassini deduceretur si modo priori serie usus fuisset, & reliqua ejus Triangula usque ad urbem Dunkirk in eadem proportione augeantur; hinc iste emerget calculus.

Primo tota distantia inter Parallelos Observatorii & Sourdonis erit ex Picarto - - - 49926hex. 3ped.

Secundo; Distantia inter Parallelos Sourdonis & Ambiani est ex Cassino 10539½ hex. assumpta Basi 7116½; sed in alterâ serie Triangulorum eadem Basis erat 7122 1/3 hinc assumptâ hac mensura, distantia Parall. inter Sourdonem & Ambianum ex Triangulis Ill. Cassini erit - 10547hex. 4ped.

Tota ergo distantia inter Parallelos Sourdonis & Ambiani erit = = 60474 = 1

Ter-

57061. Et ex his menſuris colligitur ambitus terræ pedum Pariſienſium 123249600, & ſemidiameter ejus pedum 19615800, ex hypotheſi quod terra ſit ſphærica.

In latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit pedes Pariſienſes 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$ ut ſupra, id eſt, (††) lineas $2173\frac{7}{9}$. Pondus corporis

Tertio diſtantia inter Parallelos Ambiani & urbis Dunkirk eſt ex Caſſino $65109^{hex.}$ $1^{ped.}$, ſuppoſitâ Baſi $7116\frac{1}{2}$, ſi ergo ſupponatur ea linea $7122\frac{1}{3}$ fiet diſtantia inter Parallelos Ambiani & urbis Dunkirk ex Triangulis III. Caſſini. - - - $65162^{hex.}$ $3^{ped.}$

Tota ergo diſtantia inter obſervatorium & Parallel. urbis Dunkirk fiet 125636 - 4 & detractis 98. hex. pro locis obſervationum Cæleſtium & $2\frac{1}{2}^{hex.}$ pro libellâ ſuperſunt $125536^{hex.}\frac{1}{5}$, quæ reſpondent 2°. 11'. 58", unde arcus unius gradus invenitur 57076 : 2.

Pariter in Obſervatione D^ni. de Maupertuis cum ſint inter Parallelum Obſervatorii & ædis Ambiani 60474 : 1. & propter obſervationum Cæleſtium loca $2159^{hex.}$ ſint detrahendæ, arcus inter obſervationes D^ni. de Maupertuis obſervatus, qui eſt 1°. 1'. 12". reſpondebit hex. 58315:1. Unde gradus erit $57171\frac{2}{3}$.

Ut itaque verus diſſenſus inter obſervationem III. Caſſini & D^ni. de Maupertuis habeatur, fiat ſicut $57171\frac{2}{3}$ ad $125536\frac{1}{8}$ ita unus gradus ad quartum, invenietur arcus 2°. 11". 45", qui 13" duntaxat differt ab arcu 2°. 11" 58" quem III. Caſſinus obſervavit; Quæ differentia inter quatuor obſervationes Cæleſtes & menſuras terreſtres diſtributa, efficeret concluſiones uniformes: Ergo illæ obſervationes nedum inter ſe pugnent, iis differentiolis tantùm diſcrepant, quæ inevitabilibus accidentibus debentur.

Interea ſatis liquet quod ſi in unam ſummam conjicerentur menſuræ III. Caſſini Patris & Filii, diminuendus eſſet arcus totalis 12" propter correctionem aberrationis Lucis, cui obnoxia eſt obſervatio III. Caſſini filii, & menſuræ terreſtres forent augendæ, quia ex obſervatione D^ni. de Maupertuis additur pondus rationibus quibus inter duas ſeries Triangulorum D^ni. Picarti ea præponenda cenſeatur quam Picartus prætulerat & quam III. Caſſinus neglexerat, imo & probabile ſit errores minimos inevitabiles, eam in partem conſpiraſſe ut arcus Cæleſtis major vero videretur III. Caſſino & menſuræ terreſtres vero minores; Quibus omnibus perpenſis, magnitudinem unius gradus in 45°. lat. gradu, circa medium menſuræ à Caſſino Patre inſtitutæ rotundis numeris ſatis tuto 27100. hex. aſſumi poſſe liquet. 78.

(††) *Id eſt, lineas* $2173\frac{7}{9}$. Ex accuratiſſimis obſervationibus D^ni. de Mayrans (cap. 6. lib. 3. fig. terræ deter. à D. de Maupertuis) longitudo penduli ad ſingulas ſecundas vibrans eſt linearum 440.57. hinc, cum juxta Prop. 26. Horol. Oſcill. Hugh. ſit circuli circumferentia ad Diametrum ut 1". ad tempus deſcenſus per dimidiam altitudinem penduli, ſive per lineas 220. $28\frac{1}{2}$, ſint verò quadrata temporum ut ſpatia deſcenſu verticali iis temporibus deſcripta erit 9.8696 ad 1. (Quadratum circumferentiæ ad quadratum Diametri 1.) ſicut ſpatium uno ſecundo deſcriptum ad $220.28\frac{1}{2}$ lin. Ergo corpus grave in latitudine Lutetiæ tempore minuti unius ſecundi deſcribit lineas 2173. 631356. paulò minus quam Newtonus aſſignat, ejus undecima milleſima pars foret .197602. Quare id grave in vacuo cadendo deſcriberet altitudinem 2173. 828958.

DE MUNDI SYSTEMATE.

poris diminuitur per pondus aëris ambientis. (l) Ponamus pondus amissum esse partem undecimam millesimam ponderis totius, & corpus illud grave cadendo in vacuo describet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius secundi.

Corpus in circulo ad distantiam pedum 19615800 à centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56′. 4″ uniformiter revolvens tempore minuti unius secundi (m) describet arcum pedum 1433,46, cujus sinus versus est pedum 0,0523656, seu linearum 7,54064. (n) Ideoque vis, quâ gravia descendunt in latitudine *Lutetiæ*, est ad vim centrifugam corporum in æquatore à terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064.

Vis centrifuga corporum in æquatore terræ est ad vim centrifugam, quâ corpora directè tendunt à terrâ in latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50′. 10″, in (o) duplicatâ ratione radii ad sinum

78. (l) * *Ponamus pondus amissum.* Quoniam corpus quodlibet ponderis sui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris, & plumbum est ad aquæ gravitatem specificam ut 11,345 ad 1000, aqua verò ad aërem paulo minus quam 1000 ad 1, hinc gravitas plumbi est ad gravitatem aëris fere ut 11000 ad 1, hinc ergo plumbum amittit in aëre ponderis sui partem undecimam millesimam, itaque in vacuo augetur pondus plumbi parte undecimâ millesimâ ponderis totius, hoc est spatia eodem tempore descripta undecimâ millesimâ totius spatii descripti parte augeri debent, fiat ergo 11000 ad 11001 ut $2173\frac{7}{9}$ ad quartum, illud quartum erit 2173.966 ergo pooi potest quam proximè spatium tempore minuti unius secundi descriptum in vacuo à plumbo, ideoque à quovis alio corpore gravi (nam omnia gravia æquali celeritate in vacuo cadunt) linearum 2174.

(m) * *Describet arcum ped.* Computum initur eodem planè modo ac not. 63.

(n) * *Ideóque vis.* Vires uniformes sunt ut spatia dato tempore descripta, sed est spatium vi gravitatis tempore unius minuti secundi descriptum 2174 lin. spatium autem vi centrifugâ descriptum ut sinus versus, hoc est, lin. 7, 54064.

* Si gradus Æquatoris sit major 57061 hex., v. gr. si 57226 hex. sumatur, erit iste sinus versus linearum 7. 56244; ideoque vis quâ gravia descendunt in latitudine Lutetiæ est ad vim centrifugam corporum in Æquatore ut 2173. 828958 ad 7. 56244.

(o) 81. * *In duplicatâ ratione radii.* Quadrans circuli A E D revolvatur circà radium A C, ducatur radius C D ad A C normalis, ipsique parallela agatur ordinata E F, erit vis centrifuga in D secundum directionem D C sive E F, ad vim centrifugam in E secundum directionem C E, in ratione duplicatâ radii C D ad ordinatam E F quæ est sinus complementi arcûs seu altitudinem E D. Exprimat enim D v vim centrifugam in D secundum directionem D C, & recta E y, exprimat vim centrifugam in E secundum directionem E F, ductâ perpendiculari y x ad rectam E C, exprimet E x, vim centrifugam in E, secundum directionem E x; sed est D v : E y = D C : E F (cor. 3. prop. 4. lib. 1.) & ob triangula rectangula E xy E F C similia, E y : E x = E C

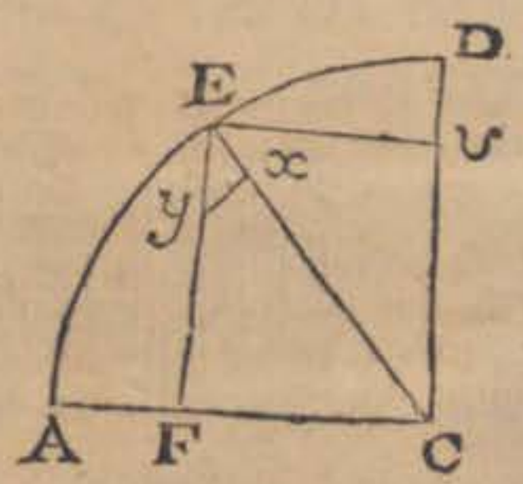
vel

finum complementi latitudinis illius, id eſt, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim quâ gravia deſcendunt in latitudine illa *Lutetiæ*, & corpus in latitudine illâ vi totâ gravitatis cadendo, tempore minuti unius ſecundi deſcribet lineas 2177,267, ſeu pedes Pariſienſes 15 dig. 1 & lin. 5.267. Et vis tota gravitatis in latitudine illâ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore terræ ut 2177,267 ad 7,54064 ſeu 289 ad 1.

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

Unde

vel DC:EF. Quarè, componendo $Dv:Ex = DC^2:EF^2$. Q. E. D.

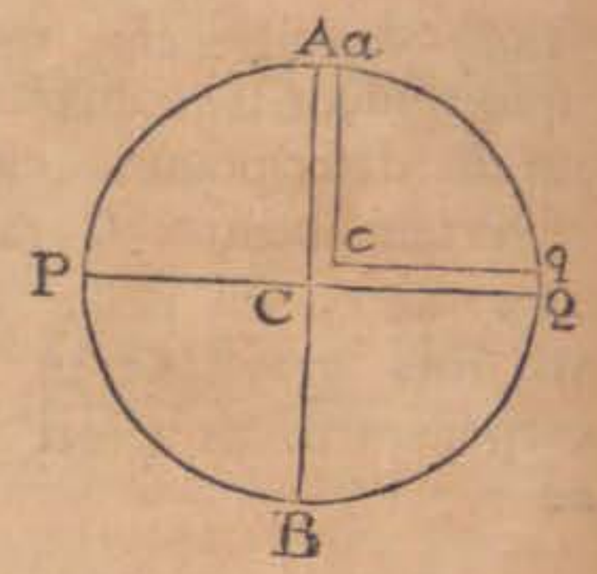


* Verum ſi Meridianus terræ ſit alia curva quam circulus v. gr. ſit Ellipſis, vis centrifuga corporum in æquatore terræ eſt ad vim centrifugam qua corpora perpendiculariter à terra recedunt in latitudine datâ, in ratione compoſitâ ex ratione radii ad ſinum complementi latitudinis illius, & ex ratione radii Æquatoris, ad ordinatam ejus Ellipſeos in eâ latitudine datâ; hinc pro Ellipſi ratio vis centrifugæ in Æquatore ad vim centrifugam in latitudine data exprimetur hoc modo, ſit *m* axis major, *n* axis minor, *r* Radius, *c* ſinus complementi latitudinis quæſitæ, erit vis in Æquatore ad vim in eâ latitudine, ut $mr\sqrt{m^2 \times r^2 - c^2} + n^2c^2$ ad n^2c^2.

78. Ut facile deducetur ex Ellipſeos naturâ; Quare ſi fingatur $m = 230$ & $n = 229$ juxta Newtonum invenietur calculo eas vires eſſe inter ſe ut 7.56244 ad 3.09660, addatur hæc vis ad vim quâ gravia deſcendunt in latitudine Lutetiæ, & vis tota gravitatis (in hyp. aſſumptis) efficeret ut gravia cadendo deſcriberent lineas 2176. 92558. Unde vis tota gravitatis in latitudine lutetiæ erit ad vim Centrifugam corporum Æquatore terræ ut 2176. 92558 ad 7.56244 ſive ut 287. 86 ad 1.

Hæc autem vis gravitatis in latitudine Lutetiæ non eſt vis ipſa gravitatis in Æquatore, de quâ agitur in reliquâ hîc propoſitione, ſed parum ab ea differt, ita ut calculo quodam inito inveniatur quod hæc vis gravitatis in latitudine Lutetiæ ſit ad vim gravitatis in Æquatore (terrâ uniformiter denſa ſuppoſitâ), ut 1532 ad 1531 ideóque ſit vis gravitatis in Æquatore ad vim ejus Centrifugam ut 287.67 ad 1. Quas quidem varias correctiones, Newtonianis numeris adplicamus, ut inde liqueat, quod quamvis numeris ut ita dicam mediocribus ſit uſus Newtonus & ſæpe ex Hypotheſi terræ ſphæricæ ductis, parùm mutationis tamen adfuturum ſit, etſi aſſumantur alii numeri qui ex veriori terræ figurâ deducerentur.

DE MUNDI SYSTEMATE.



Unde si $APBQ$ figuram terræ designet (P) jam non amplius sphæricam sed revolutione ellipseos circum axem minorem PQ genitam, sitque $ACQqca$ canalis aquæ plena, à polo Qq ad centrum Cc, & inde ad æquatorem Aa pergens : (q) debebit pondus aquæ in canalis crure $ACca$, esse ad pondus aquæ in crure altero $QCcq$ ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 289 sustinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure sustinebit reliquas. Porro (ex propositionis XCI. corol. 2. lib. 1.) computationem ineundo, invenio quod si terra constaret ex uniformi materiâ, motuque omni privaretur, (r) & esset ejus axis PQ ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in eodem loco Q in sphæram centro C radio PC vel QC descriptam, ut

78.

(p) * *Jam non amplius sphæricam sed revolutione Ellipseos circum axem minorem PQ genitam.* * Terram non multum à figurâ sphæricâ discedere ex Eclipsibus Lunæ patet, magis adhuc ad formam ejus Ellipseos accedere cujus axes forent æquales Diametro Æquatoris, & distantiæ Polorum terræ respective, satis liquet; utrum verò curva illa quæ singulum Meridianum terræ constituit & quæ convolutione arcus PAQ circa axem minorem PQ generatur sit Ellipsis Apolloniana, utrum tantùm curva ad eam accedens non determinat Newtonus; Paulò fusius de hujus curvæ Naturâ inferius disseremus, hic enim ad calculum Newtonianum intelligendum, sufficit assumere eam curvam ad Ellipsim satis accedere, ut Ellipsis pro eâ assumi possit.

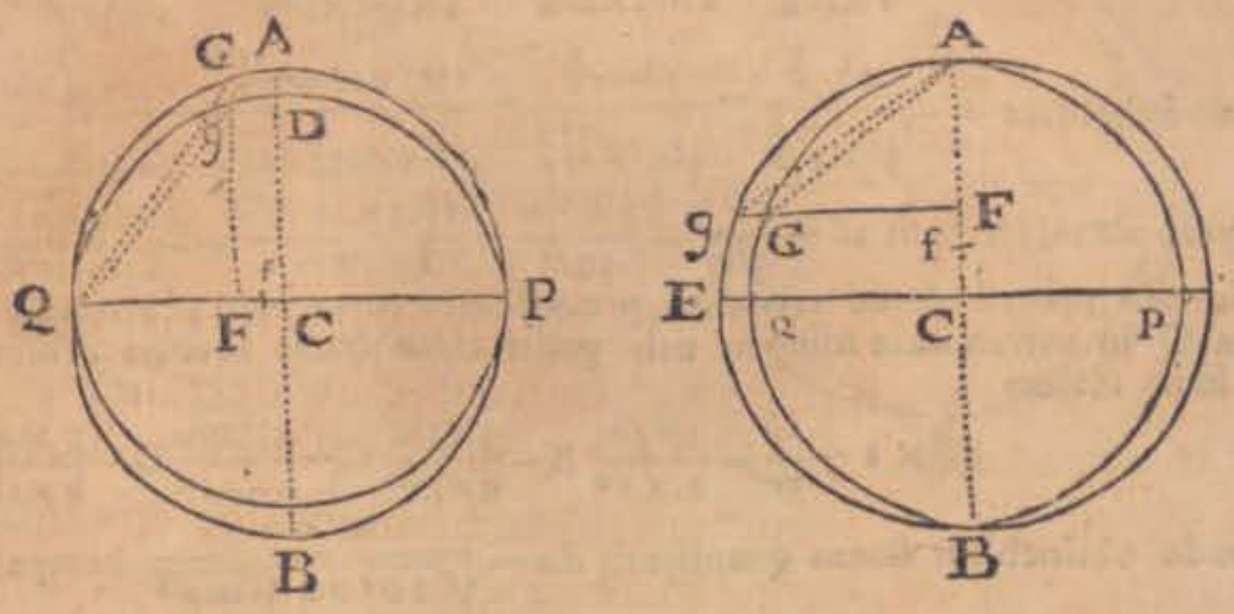
(q) * *Debebit pondus aquæ.* Si fluidum in canale contentum quiescere supponatur, fluidi partes in canalis crure AC debent esse in æquilibrio cum partibus fluidi in ejusdem canalis crure QC. Cum itaque vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam ponderis detrahat e ponderis partibus 289, oportet ut pondus in altero crure sit 288 (sive ex inventis ut 288.67 ad 287.67), sic enim pondera in utroque canalis crure erunt æqualia.

(r) * *Et esset ejus axis PQ ad Diametrum AB ut 100 ad 101, gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in Sphæram centro C radio QC descriptam, ut 126 ad 125 & eodem argumento gravitas in loco A in sphæroidem circa axem AB descriptam est ad gravitatem in sphæram centro C radio AC descriptam, ut 125 ad 126.*

* Utrumque simul probari potest: Sit PAQB, in utráque figurâ, terræ Meridianus; in primâ figurâ sit QDPQ sphæra Centro C radio QC descripta & in secundâ figura PAQB repræsentat sphæroidem quam revolutione meridiani terræ circa Æquatorem describi fingit Newtonus & AED sphæram radio AC descriptam. Constat Corollario 2. Prop. XC. lib. 1. quod si ducantur circuli ad axes revolutionum perpendiculares quorum radii sunt FG, fg (in utráque figurâ) attractio punctorum Q & A ab illis circulis erit $1-\frac{QF}{QG}$, $1-\frac{QF}{Qg}$, $1-\frac{AF}{AG}$, $1-\frac{AF}{Ag}$ respective:

Qua-

126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco A in sphæroidem, convolutione ellipseos $APBQ$ circa axem AB descriptam, est ad gravitatem in eodem loco A in sphæram centro C radio AC descriptam, ut 125 ad 126. LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.



Quare si dicatur CQ sive CD, b, & AC sive CE, r, dicaturque abscissa QF, AF, in utrâque figurâ, x, erit in primâ figurâ $\overline{FG}^2 = \frac{r^2}{b^2} \times 2bx - xx$; $\overline{Fg}^2 = 2bx - xx$, & in secundâ figurâ est $\overline{FG}^2 = \frac{b^2}{r^2} \times 2rx - xx$ & $\overline{Fg}^2 = 2rx - xx$, quibus quadratis si addatur quadratum $\overline{QF}^2$ vel $\overline{AF}^2$ sive xx, habebuntur quadrata linearum $\overline{QG}^2$, $\overline{Qg}^2$, $\overline{AG}^2$, $\overline{Ag}^2$, respectivè, quæ erunt $\frac{r^2}{b^2} \times 2bx - \frac{r^2-b^2}{b^2} x^2$; $2bx$; $\frac{b^2}{r^2} \times 2rx + \frac{r^2-b^2}{r^2} x^2$; & $2rx$; Unde (si compendii gratia loco $r^2 - b^2$ scribatur m) attractiones istorum circulorum evadent

$$1 - \frac{bx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}; \; 1 - \frac{x}{\sqrt{2bx}}; \; 1 - \frac{rx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}}, \; 1 - \frac{x}{\sqrt{2rx}}.$$

Sit verò $Ff = dx$ & multiplicetur attractio singuli circuli per dx habebuntur elementa attractionis sphæroideum & sphærarum, quæ elementa erunt

$$dx - \frac{bx\,dx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}; \; dx - \frac{x\,dx}{\sqrt{2bx}}; \; dx - \frac{rx\,dx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}}; \; dx - \frac{x\,dx}{\sqrt{2rx}}.$$

Facile revocabuntur ad fluentes suas ea elementa attractionis sphærarum quippe fluentes quantitatum $dx - \frac{x\,dx}{\sqrt{2bx}}$ & $dx - \frac{x\,dx}{\sqrt{2rx}}$ sunt $x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2b}}$ & $x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{3}\sqrt{2r}}$ & ubi QF vel AF diametros QP vel AB æquant, ideòque x fit æqualis $2b$, vel $2r$, evadunt illæ fluentes $2b - \frac{2b\sqrt{2b}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ & $2r - \frac{2r\sqrt{2r}}{\frac{1}{2}\sqrt{2r}}$ sive $\frac{2}{3}b$ & $\frac{2}{3}r$. 281

Ut obtineatur fluens quantitatis $dx - \frac{bx\,dx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}$, quantitas $\frac{bx\,dx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}$ resolvatur in seriem (eam considerando ut $bx\,dx \times \overline{2r^2bx - mx^2}^{-\frac{1}{2}}$) sumatur juxta formu-

DE MUNDI SYSTEMATE.

formulam Newtonianam quotiens ſecundi termini $-mx^2$ per primum $2r^2bx$ diviſi, qui quotiens erit $-\frac{mx}{2b\times r^2}$; Primi termini $2r^2bx$ ſumatur dignitas $-\frac{1}{2}$, quæ eſt $\frac{1}{r\times\frac{1}{2}\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}$; tum adhibitis coefficientibus ſecundum formulam, tota quantitas evadet

78.

$$dx-\frac{bx^{\frac{1}{2}}dx}{r\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}-\frac{1\times bmx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times r^3\times\overline{2b}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times3bm^2x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times4r^5\times\overline{2b}^{\frac{5}{2}}}-\frac{1\times3\times5bm^3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times4\times6r^7\times\overline{2b}^{\frac{7}{2}}}\ \&c.$$

& Integrando habebitur $x-\frac{2bx^{\frac{3}{2}}}{3r\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}-\frac{2bmx^{\frac{5}{2}}}{10r^3\times\overline{2b}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times3\times2bm^2x^{\frac{7}{2}}}{2\times4\times7r^5\times\overline{2b}^{\frac{5}{2}}}-\frac{1.3.5.2bm^3x^{\frac{3}{2}}}{2.4.6.9r^7.\overline{2b}^{\frac{7}{2}}}$ &c.

Quando vero $x=2b$, ſeries fit $2b-\frac{2b^2}{3r}-\frac{2b^2m}{10r^3}-\frac{1\times3\times2b^2m^2}{2\times4\times7r^5}-\frac{1\times3\times5\times2b^2m^3}{2\times4\times6\times9r^7}$.

Sive dividendo per $2b$ & ad terminos præcedentes revocando; attractio terræ, in corpuſculum Q in extremitate minoris axis poſiti circa quem revolvi cenſetur, exprimitur per hanc ſeriem

$$2b\times1-\frac{2b}{3r}-\frac{1\times3m}{2.5r^2}B-\frac{3\times5m}{4\times7r^2}C-\frac{5\times7m}{6\times9r^2}D-\frac{7\times9m}{8\times11r^2}E\ \&c.$$

Simili modo obtinebitur fluens quantitatis $dx-\frac{rxdx}{\sqrt{2b^2rx+mx^2}}$ nempe ſecundam partem conſiderando ut $rxdx\times\overline{2b^2rx+mx^2}^{-\frac{1}{2}}$, quæ in ſerie reſolvatur, quotiens ſecundi termini per primum diviſi erit $+\frac{mx}{2rb^2}$; Primi termini dignitas $-\frac{1}{2}$ erit $\frac{1}{b\times\frac{1}{2}\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}$ & calculando ſecundum formulam tota quantitas

evadet $dx-\frac{rx^{\frac{1}{2}}dx}{b\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}+\frac{1\times rmx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times b^3\times\overline{2r}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times3rm^2x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times4b^5\times\overline{2r}^{\frac{5}{2}}}+\frac{1\times3\times5rm^3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times4\times6b^7\times\overline{2r}^{\frac{7}{2}}}$ &c.

Integrando habetur $x-\frac{2rx^{\frac{3}{2}}}{3b\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}+\frac{1\times2rmx^{\frac{5}{2}}}{2\times5b^3\times\overline{2r}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times3\times2rm^2x^{\frac{7}{2}}}{2\times4\times7b^5\times\overline{2r}^{\frac{5}{2}}}+\frac{1\times3\times5\times2rm^3x^{\frac{9}{2}}}{2\times4\times6\times9b^7\times\overline{2r}^{\frac{7}{2}}}$ &c.

Quando $x=2r$ ſeries fit, $2r-\frac{\overline{2r^2}}{3b}+\frac{\overline{2r^2}\times m}{2\times5b^3}-\frac{1\times3\times\overline{2r^2}\times m^2}{2\times4\times7b^5}+\frac{1\times3\times5\times\overline{2r^2}m^3}{2\times4\times6\times9b^7}$ &c.

Sive $2r\times1-\frac{2r}{3b}+\frac{3m}{2\times5b^2}B-\frac{3\times5m}{4\times7b^2}C+\frac{5\times7m}{6\times9b^2}D-\frac{7\times9m}{8\times11b^2}E\ \&c.$

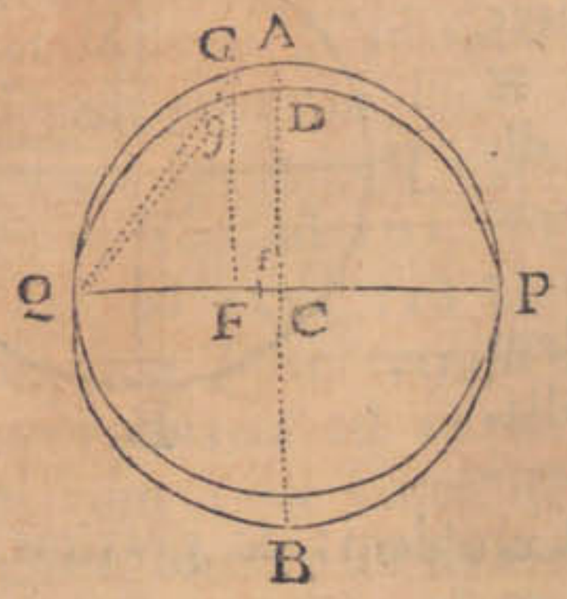
Cum ergo ſit $r=101$, & $b=100$ eſt $r^2-b^2=r+b\times r-b=201=m$, eſt $r^2=10201$. Hinc ſubſtitutionibus factis prima ſeries evadit

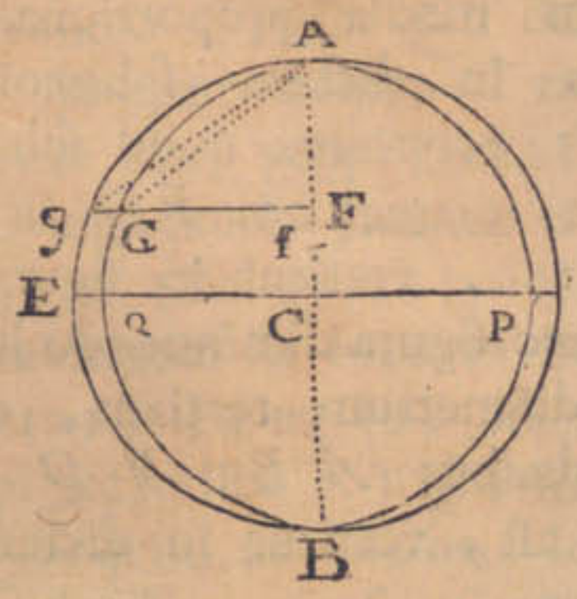
$$\begin{array}{r}2b\times1-.66006600\\-.00390177\\-.00004118\\-.00000052\\-.00000001.\end{array}$$

Hoc eſt, $2b\times1-.66400948$, ſive $2b\times.33599052$; Sed ſphæræ attractio erat $\frac{2b}{3}$; Ergo gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in ſphæram centro C radio QC deſcriptam ut 1.00797156 ad 1 (multiplicando utrumque terminum per 3 & dividendo per $2b$) ſive ut 1008 ferè ad 1000, qui numeri ſunt accuratè ut 126 ad 125, ut liquet utrumque per 8. dividendo. Q. E. 1°. D.

Paris

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.



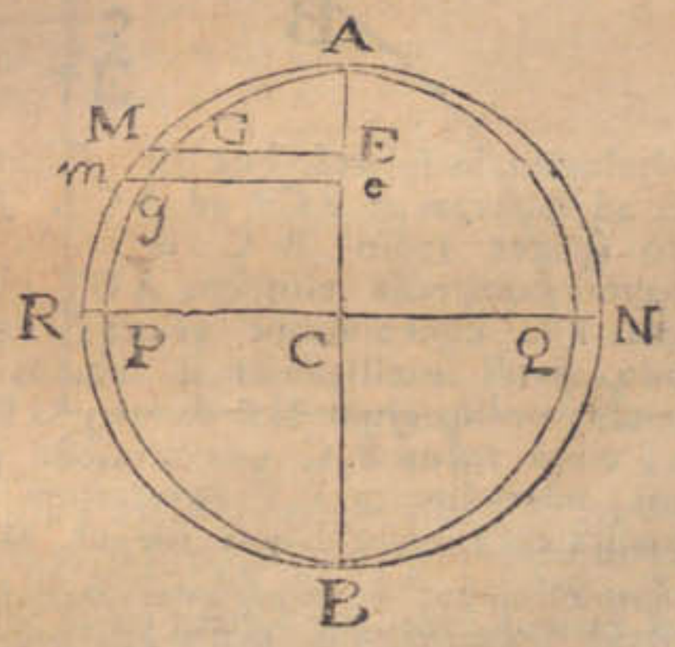


Pariter ſubſtitutionibus factis in ſerie ſecundâ, evadit

$$\begin{array}{l} 2r \times 1 - .67333333 + .00406020 \\ \quad - .00004372 + .00000057 \\ \quad - .00000001. \end{array}$$

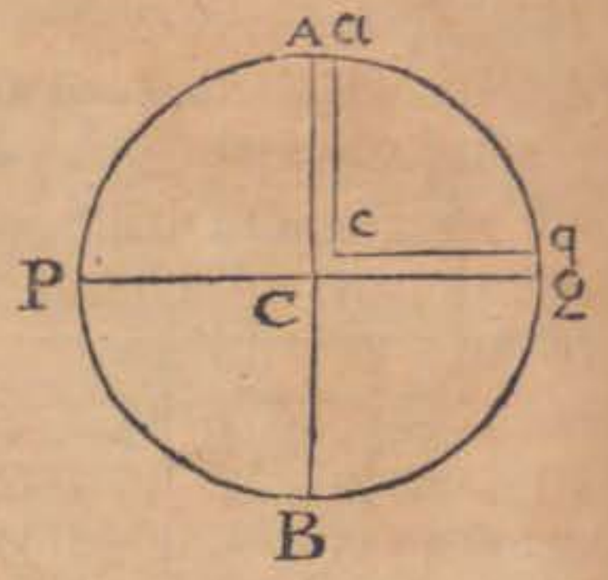
Sive $2r \times 1 - .67337706 + .00406077$ hoc eſt $2r \times 33068371$, ſed ſphæræ attractio erat $\frac{2r}{3}$, ergo utrumque terminum multiplicando per 3 & dividendo per $2r$, gravitas in loco A in Ellipſoidem, convolutione circa majorem axem genitum, erit ad gravitatem in ſphæram radio AC deſcriptam ut 99205113 ad 1; Multiplicetur uterque terminus per 1008, & evadent 999.987589 & 1008; proximè 1000 & 1008 qui numeri ſunt ut 125 ad 126. Q. E. 2°. D.

79. Lemma. Sphærois compreſſa convolutione Ellipſeos APBQ circà axem minorem PC genita, eſt media proportionalis inter ſphæram circumſcriptam cujus radius eſt AC, & ſphæroidem oblongatam convolutione ellipſeos circà axem AC genitam. Nam ductis ordinatis ME, me, infinitè propinquis, tum ſphæra circumſcripta tum ſphærois oblongata dividi intelligantur in cylindrulos ordinatarum ME & me, GE & ge convolutione deſcriptos, erit cylindrulus EGge in ſphæroide ad cylindrulum EMme in ſphærâ, ut altitudo Ee ducta in circulum radio GE rotando deſcriptum, ad altitudinem Ee, ductam in circulum cujus eſt radius ME, ſivè quia circuli ſunt ut quadrata radiorum & utriuſque cylindruli communis eſt altitudo, erit cylindrulus EGge, ad cylindrulum EMme, ut GE^2 ad ME^2. Sed GE^2 ad ME^2 ſemper eſt ut PC^2



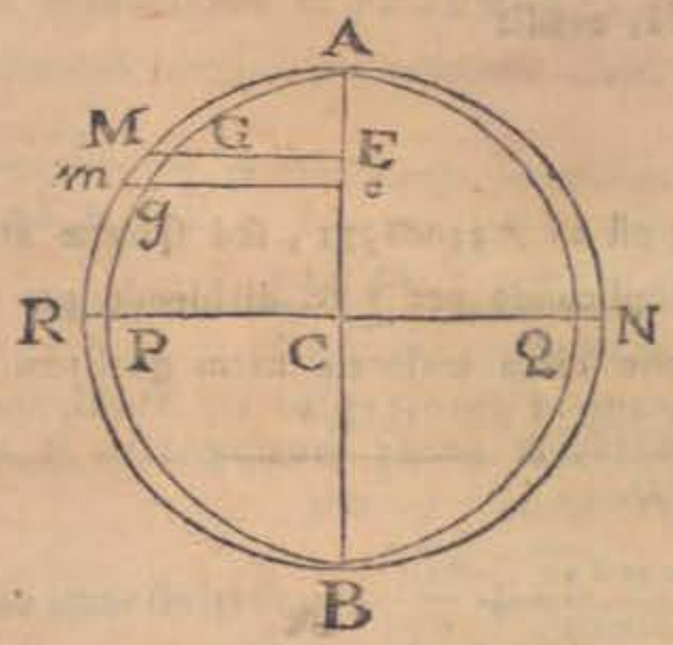
ad RC^2 vel AC^2, ideóque in datâ ratione, erit itaque ſumma tota cylindrulorum in ſphæroide ad ſummam totam cylin-

DE MUNDI SYSTEMATE.



(f) Eſt autem gravitas in loco *A* in terram media proportionalis inter gravitates in dictam ſphæroidem & ſphæram: propterea quod ſphæra, diminuendo diametrum *PQ* in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram terræ; & hæc figura diminuendo in eâdem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus *AB*, *PQ* perpendicularis eſt, vertitur in dictam ſphæroidem; & gravitas in *A*, in

79.



cindrulorum in ſphærâ, hoc eſt, ſphærois ipſa ad ſphæram ut PC^2 ad AC^2. Jam verò ſphæra radio RC deſcripta & ſphærois compreſſa ellipſeos AGP circà axem PC convolutione genita, ſimili modo dividi intelligantur in tubulos innumeros ordinatarum ME & me, GE & ge, circà axem PC convolutione genitos, ob radiorum CE & rectarum Ee æqualitatem, erunt tubuli illi ut ME, GE, ſivè ut AC ad PC, hoc eſt, in datâ ratione, ideóque ſphæra eſt ad ſphæroidem compreſſam ut AC ad PC. Quarè ſi ſphæra dicatur *S* ſphærois compreſſa *s*, & ſphærois oblongata σ, ſitque $AC = b$, $PC = a$ erit $S^2 : s^2 = b^2 : a^2$, ac proindè $S : \sigma = s^2 : s$ undè $s = \sqrt{S \times \sigma}$. Q. E. D.

(f) 80. *Eſt autem gravitas.* Diameter PQ, in figurâ Newtoni reſpondeat diametro RN minuatur diameter illa RN in ratione 101 ad 100 ut fiat PQ = 100, tunc ſphæra quæ centro C radio AC deſcripta erat vertetur in figuram terræ. Jam verò concipiatur tertia diameter quæ in revolutione ſpheræ duabus diametris AB, PQ, ſit perpendicularis, hæcque diameter diminuatur in eâdem ratione 101 ad 100, patet figuram terræ verti in ſphæroidem oblongatam. Quia verò utraque ſphærois ſivè compreſſa ſivè oblongata ad ſphæram quam proximè accedit, ſphæroides illæ pro ſphæris quæ eandem reſpectivè contineant materiæ quantitatem quam proximè haberi poſſunt. Sunt autem attractiones ſphærarum in diſtantiis æqualibus ut quantitates materiæ (cor. 1. prop. 74. lib. 1.) ideóque gravitas in utroque caſu prædicto diminuitur in eâdem ratione materiæ detractæ quam proximè, ac proindè attractiones ſphæræ ſphæroidis compreſſæ & ſphæroidis oblongatæ ſunt reſpectivè ut quantitates materiæ in illis corporibus contentæ quàm proximè. Sed ſphærois compreſſa convolutione ellipſeos ABPQ, circà axem PCQ genita eſt media proportionalis inter ſphæram circumſcriptam cujus radius eſt AC, & ſphæroidem oblongatam convolutione ellipſeos circà axem ACQ genitæ

in caſu utroque, diminuitur in eâdem ratione quam proximè. (t) Eſt igitur gravitas in A in ſphæram centro C radio AC deſcriptam, ad gravitatem in A in terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco Q in ſphæram centro C radio QC deſcriptam, eſt ad gravitatem in loco A in ſphæram centro C radio AC deſcriptam, in ratione diametrorum (per prop. LXXII. lib. I.) id eſt, ut 100 ad 101. (u) Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco Q in terram ad gravitatem in loco A in terram, ut $126\times126\times100$ ad $125\times125\frac{1}{2}\times101$, ſeu ut 501 ad 500.

Jam cum (per corol. 3. prop. XCI. lib. I.) gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ ſit ut diſtantia locorum à centro terræ; ſi crura illa ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus diſtinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium ſingularum in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, (x) ut magnitudines & gravitates accelera-

genitam (81). Quarè gravitas in loco A, in terram eſt media proportionalis inter gravitates in dictam ſphæroidem, oblongatam ſcilicet, & ſphæram.

(t) * *Eſt igitur gravitas.* Gravitas in loco A in terram dicatur G, gravitas in loco Q, in terram ſit g, gravitas in loco Q, in ſphæram radio PC, deſcriptam dicatur γ, gravitas in loco A, in ſphæroidem convolutione ellipſeos ABPQ, circà axem AB genitam dicatur V, ac tandem gravitas in loco A in ſphæram radio AC deſcriptam ſit Γ, erit (ex dem.).

g : γ = 126 : 125

V : Γ = 125 : 126 præterea

V : G = G : Γ, ideóque inter V & Γ, hoc eſt, inter 125 & 126 ſumpto medio termino proportionali erit

$V : G = G : \Gamma = 125 : 125\frac{1}{2} = 125\frac{1}{2} : 126.$

(u) * *Conjungantur jam hæ tres rationes*, ſcilicet

g : γ = 126 : 125

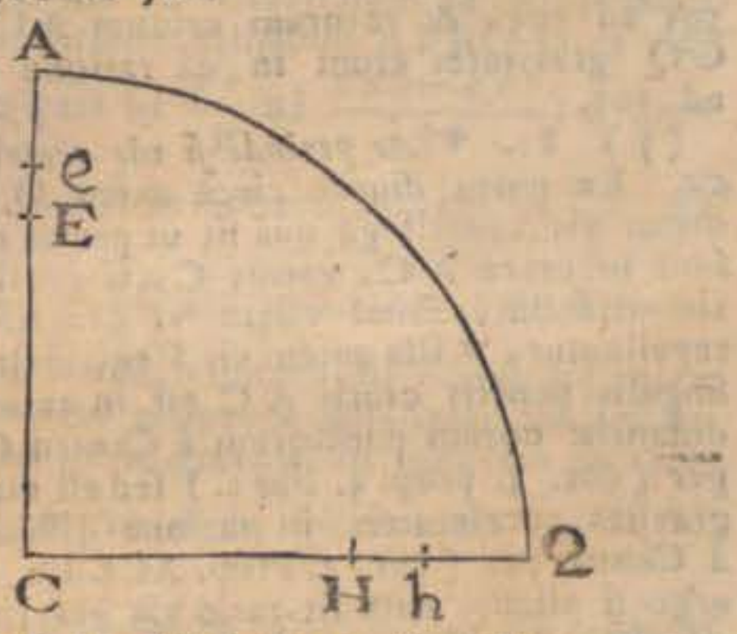
Γ : G = 126 : $125\frac{1}{2}$

γ : Γ = 100 : 101 erit per compoſitionem rationum & ex æquo.

g : G = $126\times126\times100 : 125\times125\frac{1}{2}\times101$ 81.

vel g : G = 1587600 : $1584437\frac{1}{2}$ = 501 : 500

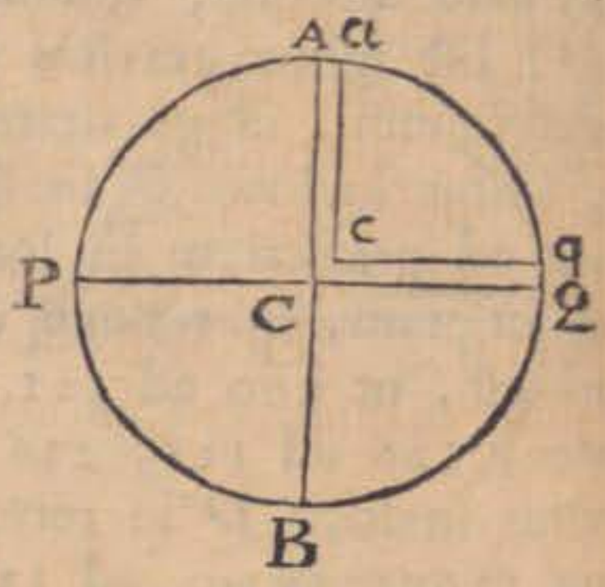
ideóque gravitas in loco Q, in terram fiet ad gravitatem in loco A, in terram ut 501 ad 500.



(x) 81. * *Ut magnitudines & gravitates.* Crura AC, QC ità diſtinguantur ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus ut crura illa æqualem contineant particularum Ee, Hh numerum, ſintque ſingulæ particulæ in crure AC ad ſingulas particulas in crure CQ ut crus AC ad crus alte-

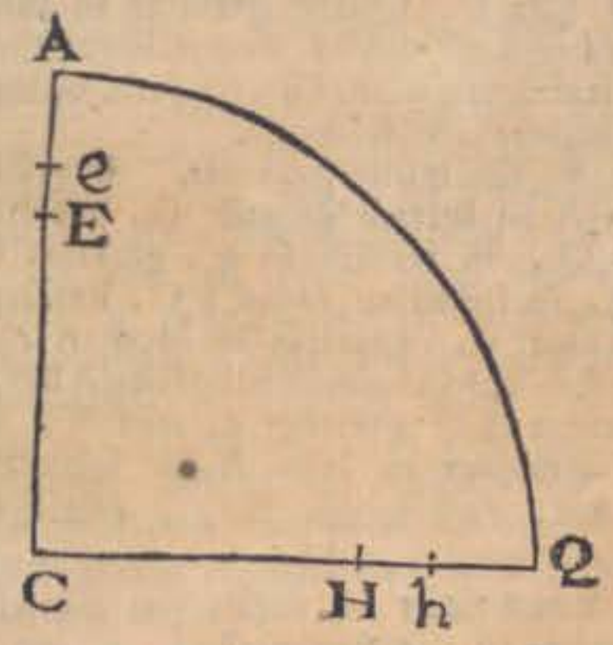
DE MUNDI SYSTEMATE.

celeratrices conjunctim; id eſt, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc eſt, ut 505 ad 501. (y) Ac proinde ſi vis centrifuga partis cujuſque in crure *ACca* ex motu diurno oriunda, fuiſſet ad pondus partis ejuſdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujuſque, in partes 505 diviſo, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum conſiſteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujuſque eſt ad pondus ejuſdem ut 1 ad 289, hoc eſt, vis centrifuga quæ deberet eſſe ponderis pars $\frac{4}{505}$ eſt tantum pars $\frac{1}{289}$.



82. alterum CQ, ſive ut 101 ad 100; Quoniam gravitas in loco A eſt 500 & gravitas in loco Q, eſt 501 propter figuram ſphæroidis & omnium particularum in cruribus AC & CQ ſimilium & ſimiliter poſitarum, gravitates acceleratrices erunt in eadem ratione, earum itaque Pondera, (ſive facta gravitatis acceleratricis per Quantitatem materiæ erunt in ratione compoſita 101 ad 100 & 500 ad 501 ſive 505 ad 501, & totorum crurum AC & CQ gravitates erunt in eâ ratione 505 ad 501.

(y) 82. * *Ac proindè ſi vis centrifuga.* Ex motu diurno circà axem QC, oritur vis centrifuga quâ fit ut partes quæ ſunt in crure AC, versùs C, vi gravitatis attractæ, ſimul etiam vi centrifugâ repellantur, * illa autem vis Centrifuga in ſingulis punctis cruris AC eſt in ratione diſtantiæ eorum punctorum à Centro CE per (cor. 3. prop. 4. lib. 1.) ſed eſt etiam gravitas acceleratrix in ratione diſtantiæ à Centro per (cor. 3. Prop. XCI. lib. 1.) ergo ſi alicubi data ſit ratio vis gravitatis ad vim centrifugam eadem erit in omnibus punctis, ſit ergo alicubi ut 505 ad 4 gravitas acceleratrix tota ſingularum & omnium partium cruris AC erit ad gravitatem reſiduam in ſingulis & omnibus partibus ejuſdem cruris ut 505 ad 501, ſed in eâdem ratione erat tota gravitas cruris AC (abſque detractione vis centrifugæ ad gravitatem cruris CQ quod cum ſit axis vim centrifugam nullam habet) ergo reſiduum vis gravitatis in crure AC ſublatâ vi Centrifugâ in æquilibrio eſt cum gravitate cruris CQ.



$\frac{1}{289}$. (z) Et propterea dico, ſecundum regulam auream, quod ſi vis centrifuga $\frac{4}{565}$ faciat ut altitudo aquæ in crure $ACca$ ſuperet altitudinem aquæ in crure $QCcq$ parte centeſimâ totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut exceſſus altitudinis in crure $ACca$ ſit altitudinis in crure altero $QCcq$ pars tantum $\frac{1}{229}$. Eſt igitur diameter terræ ſecundum æquatorem ad ipſius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum terræ

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

(z) * *Et propterea dico ſecundum regulam auream* * Vix crediderim Newtonum ad applicandam regulam auream hic loci, alio nixum non fuiſſe fundamento quam iſtâ confusâ notione, quod cum exceſſus ponderum in longioribus cruribus ſphæroideæn pendeant ex inæqualitate crurum, ſive ab exceſſu unius cruris ſupra alterum, ideo rationes exceſſuum crurum majorum ad minora crura eædem eſſe debeant ac rationes exceſſuum ponderum ad pondera minorum crurum quæ quidem ultimæ rationes (ſive ipſis proximæ rationes exceſſuum ponderum ad pondera majorum crurum) æquantur rationibus virium centrifugarum ad gravitatem totam, quia illæ vires centrifugæ ex gravitate detractæ eos exceſſus ponderum accurate compenſant. Sed mihi videtur ipſum deduxiſſe hanc proportionem ex ipſâ ſerie ab ipſo adhibitâ, & quam aſſequi ſumus conati in Notâ (r) proximâ; quod ut concipiatur reſumantur quæ in ea Notâ dicta ſunt & ad ratiocinium Newtonianum applicentur, ſupponendo Quæſtionem eſſe de duobus ſphæroidibus, quorum unus ſit aſſumptitius ille cujus Axes ſunt ut 101 ad 100 alterum verò ipſa terra, ita ut ſemi Diameter Æquatoris quæ in Sphæroide fictitio in Notâ prædictâ per r deſignabatur, terræ reſpectu deſignetur per ϱ, ſemiaxis verò PQ qui in ſerie aſſumptâ dictus fuerat b & applicatus fictitio ſphæroidi, ubi verò ipſum ſemi-axem terræ deſignat dicatur B. Aſſumptis ergo duobus primis terminis ſerierum ſed mutatis r in ϱ & b in B, ubi agetur de terrâ, 1°. Gravitas in loco Q in ſphæroidem erit ad Gravitatem in eodem loco in ſphæram radio b deſcriptam erit ut $\frac{6br-4b^2}{3r}$ ad $\frac{2b}{3}$ & ſi agatur de terrâ, Gravitas in loco Q in terram erit ad Gravitatem in eodem loco in Sphæram quæ radio B deſcribetur ut $\frac{6B\varrho-4B^2}{3\varrho}$ ad $\frac{2B}{3}$; ideóque Rationes gravitatis in loco Q in Sphæroidem vel terram ad gravitatem in Sphæras radiis b & B deſcriptas erunt ut $\frac{3r-2b}{r}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho}$.

2°. Gravitas in Sphæras quarum ſunt radii b & B eſt ad gravitatem in Sphæras radiis AC deſcriptas ut radius b ad r, & B ad ϱ, ideóque rationes gravitatis in ſphæras radiis PQ deſcriptas ad gravitates in ſphæras radiis AC deſcriptas erunt ut $\frac{b}{r}$ ad $\frac{B}{\varrho}$.

3°. Gravitas in ſphæras radiis AC deſcriptas eſt ad Gravitatem in Ellipſoides convolutione Ellipſium APBQ circa AC deſcriptas ut $\frac{2r}{3}$ ad $\frac{6rb-4rr}{3b}$, ſi agatur de fictitio Sphæroide, aut ut $\frac{2\varrho}{3}$ ad $\frac{6\varrho B-4\varrho\varrho}{3B}$ ubi agitur de terrâ; Et quoniam attractio ſphæroidis fictitii aut terræ eſt media proportionalis inter has attractiones, erit gravitas in ſphæram ad Gravitatem in A in ſphæroidem, ut $\frac{\sqrt{2r}}{3}$ ad $\sqrt{\frac{6rb-4}{3b}}$ & gravitas in ſphæram ad Gravitatem quæ eſt in A in terram ipſam ut $\sqrt{\frac{2\varrho}{3}}$ ad $\sqrt{\frac{6\varrho B-4\varrho\varrho}{3B}}$, ideóque rationes gravitatum in ſphæras ad gravitates in ſphæroidem & in terram erunt ut

DE MUNDI SYSTEMATE.

ræ ſemidiameter mediocris, juxta menſuram *Picarti*, ſit pedum Pariſienſium 19615800, ſeu milliarium 3923,16 (poſito quod milliare ſit menſura pedum 5000) terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu pedum 85472, ſeu milliarum $17\frac{1}{10}$. Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, & ad polos 19573000 pedum.

Sii

82. $\sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\sqrt{\frac{B}{3B-2\varrho}}$ reductis fractionibus ad minimos terminos.

Hinc tandem compoſitis omnibus rationibus, Rationes gravitatum in punctis Q tam ſphæroideos fictitii quam terræ, ad gravitates in punctis A eorum erunt ut $\frac{3r-2b}{\varrho} \times \frac{b}{r} \times \sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho} \times \frac{B}{\varrho}\sqrt{\frac{B}{3B-2\varrho}}$.

Rurſus in fictitio ſphæroide ratio magnitudinis crurum exprimitur per $\frac{b}{r}$ & in terrâ per $\frac{B}{\varrho}$; per quas quantitates ducantur rationes gravitatis & habebuntur rationes ponderum quæ ideo erunt ut $\frac{3r-2b}{r} \times \frac{b^2}{r^2}\sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho} \times \frac{B^2}{\varrho^2}\sqrt{\frac{B}{3B-2\varrho}}$; Inde cum differentia quantitatum r & b, ϱ & B non ſit magna, numeratores $3r-2b$ aut $3\varrho-2B$ ſi pro r ac ϱ ſumi poſſunt & denominatores $3b-2r$, $3B-2\varrho$ pro b & B, idéoque rationes ponderum ſunt ut $\frac{r}{r} \times \frac{b^2}{r^2} \times \sqrt{\frac{b}{b}}$ ad $\frac{\varrho}{\varrho} \times \frac{B^2}{\varrho^2} \times \sqrt{\frac{B}{B}}$ ſive ut $\frac{b^2}{r^2}$ ad $\frac{B^2}{\varrho^2}$. Vel, invertendo, rationes ponderum in crure CA ad pondus in crure CQ ſunt in ſphæroide fictitio & in terrâ ut $\frac{r^2}{b^2}$ ad $\frac{\varrho^2}{B^2}$ quod ſi differentia Diametri r & axis fictitii b dicatur f; differentia Diametri ϱ & axis terræ B dicatur g hoc modo exprimentur rationes ponderum crurum CA & CQ. $\frac{b^2+2bf+ff}{bb}$ & $\frac{B^2+2Bg+gg}{B^2}$ erunt ergo rationes exceſſus ponderis in crure AC ad pondus totum cruris CQ ut $\frac{+2bf+ff}{bb}$ ad $\frac{+2Bg+gg}{B^2}$ ſive deletis ff & gg quæ evaneſcunt reſpectu $2rf$ & $2\varrho g$, cùm differentiæ inter diametros & axes minimæ ſupponantur reſpectu earum diametrorum; erunt illæ rationes ut $\frac{2bf}{b^2}$ ad $\frac{2Bg}{B^2}$, ſive ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$, ſed rationes exceſſus ponderum ad pondus cruris CQ ſive ad pondus cruris AC (quod perinde eſt ob magnitudinem crurum & parvitatem exceſſus) æquales eſſe debent (ut jam dictum eſt) rationibus virium Centrifugarum ad gravitatem ipſam, quare, rationes illæ virium Centrifugarum ad gravitatem debent eſſe ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$, ſive ut rationes exceſſuum diametri Æquatoris ſupra Axes ad Axes, quæ quidem eſt proportio quam Newtonus aſſumit, cujus fundamentum ita deprehenſum eſt: hinc Vis Centrifuga quæ eſt $\frac{4}{505}$ ponderis totius eſt ad Vim Centrifugam quæ eſt $\frac{1}{289}$ ponderis totius ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$ ſivè ut $\frac{f}{b}$ ad $\frac{g}{B}$, ſed dum b eſt 100 eſt $f=1$, ergo eſt $\frac{g}{B} = \frac{\frac{1}{100} \times \frac{1}{289}}{\frac{4}{505}}$ ſive $\frac{505}{115600} = \frac{1}{229}$.

LIBER TERTIUS. PROP. XIX PROBL. III.

(a) Si planeta major sit vel minor quam terra manente ejus densitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quâcunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicatâ illâ ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eâdem duplicatâ ratione quamproximè. Et si densitas planetæ augeatur vel minuatur in ratione quâvis, gravitas etiam in ipsum tendens augebitur vel minuetur in eâdem ratione, & differentia diametrorum vicissim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cum terra respectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, jupiter autem horis 9 56′, sintque temporum quadrata

(a) 86. *Si planeta major sit vel minor quam terrâ manente ejus densitate ac tempore Periodico revolutionis diurnæ, manet proportio vis Centrifugæ ad gravitatem.* * Manere Rationem vis Centrifugæ ad gravitatem liquet ex nota 85. sive ex Cor. 3. Prop. IV. Lib. I.; nam manente tempore Periodico crescit Vis Centrifuga in ratione distantiarum, sed crescit etiam gravitas acceleratrix in ratione distantiarum (Cor. 3. Prop. XCI. lib. 1.) ergo in eadem ratione crescunt vis Centrifuga & gravitas ideóque in eâdem ratione manent ac prius.

Propterea manebit proportio diametri inter Polos ad diametrum secundum Æquatorem, quippe, per notam præcedentem z, Ratio vis Centrifugæ ad gravitatem est ut ratio excessus Diametri Æquatoris super longitudinem Axeos; manente ergo priori ratione per hypothesim manebit & ista.

Si acceleretur vel retardetur motus diurnus ut tempus Periodicum fit majus vel minus, vis centrifuga crescit reciprocè ut quadrata temporum Periodicorum manentibus radiis (Cor. 2. Prop. IV. lib. 1.) inde manentibus gravitatibus & Diametris majoribus vel minoribus, liquet (ex notâ illâ z.) numeratores, fractionum $\frac{f}{b}$ & $\frac{g}{B}$, 83.

nempe excessus Diametrorum, crescere secundum rationem virium centrifugarum, hoc est, ut quadrata temporum Periodicorum inversè, aut ut quadrata Celeritatum directè, hinc ait Newtonus *differentia diametrorum* (quæ differentiæ exprimuntur per f & g) *augebitur vel minuetur in ea ratione duplicatâ celeritatum quamproximè.*

Et si densitas planetæ augeatur, gravitas augebitur in eâdem ratione hinc ratio vis Centrifugæ manente radio & celeritate manentis, ad gravitatem minuetur, ideóque minueter ratio differentiæ Diametrorum ad ipsas Diametros.

Et in genere dicatur Radius terræ R, ejus densitas D, tempus Periodicum T, in altero Planeta litteris iisdem sed minoribus eadem exprimantur erit $\frac{R}{TT}$ ad $\frac{r}{tt}$ ficut $\frac{1}{229}$ ad differentiam inter Diametros Æquatoris & Axis Planetæ quæ itaque erit $\frac{1}{229} \times \frac{D \times TT}{d \times tt}$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

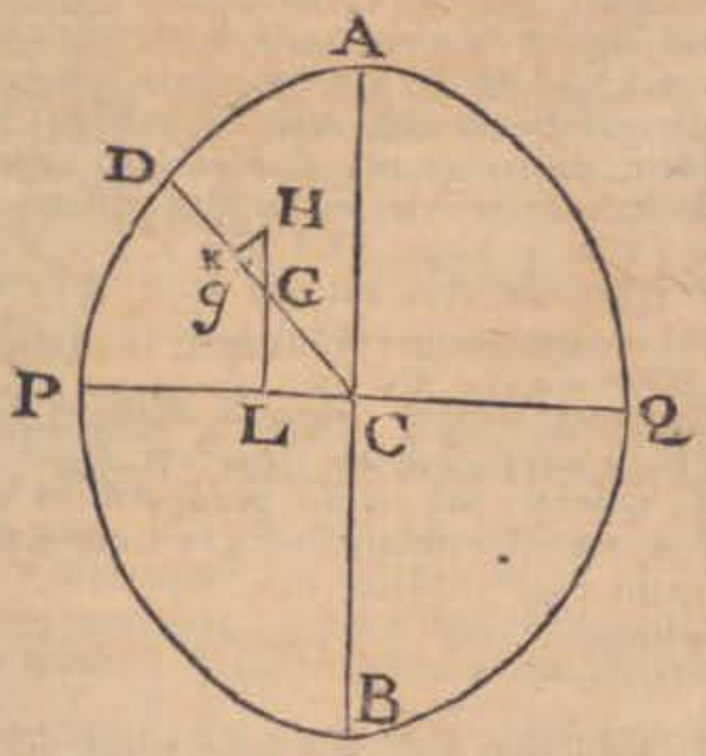
drata ut 29 ad 5, & (b) revolventium denſitates ut 400 ad $94\frac{1}{2}$: differentia diametrorum jovis erit ad ipſius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, ſeu 1 ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Eſt igitur diameter jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut $10\frac{1}{3}$ ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Unde cum ejus diameter major ſit $37''$, ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit $33''.\ 25'''$. (c) Pro luce erraticâ addantur $3''$ circiter, & hujus planetæ diametri apparentes evadent $40''$ & $36''.\ 25'''$: quæ ſunt ad invicem ut $11\frac{1}{6}$ ad $10\frac{1}{6}$ quamproximè. Hoc ita ſe habet ex hypotheſi quod corpus jovis ſit uniformiter denſum. (d) At ſi corpus ejus ſit denſius verſus planum æquatoris quam verſus polos, diametri ejus poſſunt

831 (b) * *Et revolventium denſitates.* (prop. 8. lib. hujus.).

(c) * *Pro luce erraticâ.* (53).

(d) * *At ſi corpus ejus.* Ille enim exceſſus denſitatis in plano æquatoris facit ut ibi major ſit gravitas ac proindè ibi minor requiratur altitudo ad compenſandam vim Centrifugam unde minuitur diametrorum differentia (ut patet ex notis præced.).

84. Lubet hic referre formulam quâ, in hypotheſi graviratis proportionalis cuilibet dignitati diſtantiarum à centro, ſimulque quod ejus actio ad id centrum dirigatur, diametrorum proportio inveniri poteſt: Sit ſemidiameter ſecundum æquatorem $AC = a$, radius variabilis $CD = r$ ſinus anguli $DCP = h$, poſito ſinu toto $= 1$. Sit gravitas in loco $A = p$ vis centrifuga in eodem loco $= f$, ponaturque gravitas versùs centrum C tendens dignitati cuilibet n diſtantiarum à centro proportionalis, erit gravitas in A ad gravitatem in D ut a^n ad r^n, ideóque gravitas in $D = \frac{pr^n}{a^n}$. Quoniam vires centrifugæ in locis A & G, ſunt in ratione diſtantiarum CA, LG, erit vis centrifuga in $G = \frac{f \times LG}{CA}$; ſed $LG : CG = h : 1$ ideóque $LG = CG \times h$, undè vis centrifuga in G, fit $= \frac{fh \times CG}{CA}$; ſit autem vis illa $= GH$. Quoniam vis centrifuga quæ agit ſecundum directionem GH, non minuit gravitatem versùs centrum C, niſi in quantùm agit ſecundum directionem DC, reſolvatur vis centrifuga GH in vires laterales KH, GH; eſt



sunt esse ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel forte 14 ad 13. Et *Cassinus* quidem anno 1691 observavit, quod jovis diameter ab oriente in occidentem porrecta diametrum alteram superaret parte sui circiter decimâ quintâ: *Poundus* autem noster telescopio pedum 123 longitudinis & optimo micrometro, diametros jovis anno 1719, mensuravit ut sequitur. *Tem-*

est autem GH : GK vel $1 : h = \frac{fh \times CG}{CA} : GK$, quarè $GK = \frac{fhh \times r}{a}$, ideóque pondus cylindruli $Gg = \frac{p r^n dr}{a^n} - \frac{fhh r dr}{a}$. Sumptisque fluentibus, pondus totum fluidi in crure $DC = \frac{p r^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhh \times rr}{2a}$. Simili argumento, quia gravitas in $A = p$, erit gravitas in alio quolibet loco cruris CA $= \frac{p x^n}{a^n}$, si nempè distantia à centro dicatur x; vis autem centrifuga $= \frac{fx}{a}$, & pondus Cylindruli manebit $\frac{p x^n dx}{a^n} - \frac{fx dx}{a}$ cujus fluens $\frac{p x^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fx^2}{2a}$ undè pondus totum fluidi in crure CA, est $\frac{p a^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fa^2}{2a}$ jam verò quia fluidum in utroque crure CA, CD consistere debet in æquilibrio, oportet ut pondera sint æqualia ac proindè, $\frac{p a^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fa}{2} = \frac{p r^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhh r r}{2a}$, undè eruitur $2 p r^{n+1} - (n+1) fhh a^{n-1} r r = (2p - nf - f) a^{n+1}$. Ope hujus æquationis facilè invenitur diametrorum proportio, si enim fiat $h = 0$, radius r abit in CP, habeturque $2 p r^{n+1} = (2p - nf - f) a^{n+1}$, hoc est, $CA : CP = (2p)^{\frac{1}{n+1}} : (2p - nf - f)^{\frac{1}{n+1}}$.

In hypothesi gravitatis uniformis, fit $n = 0$, ideóque $CA : CP = 2p : 2p - f$. Quoniam verò in terrâ gravitas est ad vim centrifugam ut 289 ad 1, erit $CA : CP = 578 : 577$, prout Hugenius invenit. At in hypothesi gravitatis in ratione duplicatâ distantiarum à centro decrescentis, erit $n = -2$, ideóque $CA : CP = 2p + f : 2p = 579 : 578$. 85.

* 85. Verum duæ Hypotheses in hâc formulâ invenienda assumptæ cum rei natura & Newtoniano systemate neutiquam quadrant, ideóque locum habere nequeunt: Primùm enim Gravitatem ad Centrum terræ dirigi verum non est si terra sit sphærois qualiscumque, quippe ex ipso facto constat gravitatis directionem esse perpendicularem superficiei aquarum, sive esse perpendicularem curvæ quam meridianus quilibet affectat; sed perpendiculares ad curvam à circulo diversam ad ejus curvæ centrum neutiquam tendunt nisi in solâ axium extremitate.

2°. Gravitatis quantitas in variis punctis superficiei solidi ratione curvæ alicujus geniti non sequitur rationem ullius dignitatis distantiarum à centro, sed aliam omnino Legem juxta formam solidi, hoc est, juxta naturam curvæ illius quam meridianus affectat & locum in quo corpusculum attrahendum locatur, ut satis liquet ex eo artificio quo Newtonus usus est ad determinandam rationem gravitatis in puncto A ad gravitatem in puncto Q, unde gravitatis in variis locis proportio non per dignitatem aliquam distantiarum, sed per rationes serierum quales eas in Nota (r) invenimus sunt exhibendæ; quamvis ergo verum sit in systemate Newtoniano gravitatem decrescere ut quadrata distantiarum à quocumque corpore collecto in centro suæ gravitatis quasi in uno puncto, idem verum non erit si id corpus figurâ sphærica non donetur, & corpusculum attrahendum juxta diversas partes ejus solidi collocetur, hinc ubi in formandâ generali formulâ assumitur quod gravitas in A sit ad gravitatem in D ut a^n ad r^n ideóque gravitatem in D esse

$p r^n$

DE MUNDI SYSTEMATE.

Tempora.	*Diam. max.*	*Diam. min.*	*Diametri ad invicem.*
dies hor.	*part.*	*part.*	
Jan 28 6	13,40	12,28	*ut* 12 *ad* 11
Mar. 6 7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$ $12\frac{3}{4}$
Mar. 9 7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$ $11\frac{2}{3}$
Apr. 9 0	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$ $13\frac{1}{2}$

Congruit igitur theoria cum phænomenis. Nam planetæ magis incalescunt ad lucem solis versus æquatores suos, & propterea paulo magis ibi decoquuntur quam versus polos.

Quin-

86. $\frac{p r^n}{a^n}$, id omninò adversus Theoriam gravitatis Newtonianam deducitur; quod autem hæc formula non multum à vero aberret, oritur ex eo quod reverâ figura terræ à sphærâ per parùm discrepet.

86. Vis centripeta vel centrifuga corporis circulum describentis est in ratione directâ radii & duplicatâ inversâ temporis periodici (cor. 2. prop. 4. lib. 1.). Quare si distantia planetæ à centro Solis vel distantia satellitis à centro planetæ primarii dicatur D tempus periodicum T radius ipsius Planetæ circà quem motu diurno revolvitur R, gravitas versùs centrum revolutionis erit $\frac{D}{TT}$; Si autem hæc gravitas crescat in ratione duplicatâ inversâ distantiarum, erit gravitas planetæ in eo in quo nunc versari supponitur loco, ad illius gravitatem, si positus fingeretur in superficie corporis centralis circà quod revolvitur ut RR ad DD, ideóque foret gravitas planetæ in superficie hujus corporis ut $\frac{D^3}{RRTT}$. Jam verò cum vis centrifuga planetæ positi in æquatore corporis circà quod revolvitur sit in ratione directâ radii hujus planetæ & inversâ duplicatâ temporis revolutionis circà axem, si tempus periodicum circà axem dicatur t vis centrifuga F, erit $F = \frac{R}{tt}$ undè si vis gravitatis in superficie corporis centralis dicatur P, erit $P : F = \frac{D^3}{RRTT} : \frac{R}{tt} = D^3 \times tt : R^3 \times TT$.

90. Distantia D, quarti satellitis jovialis à centro planetæ primarii sit 26.63 semid. jovis, prout à Newtono in fine Phænomeni 11 determinantur & tempus periodicum $T = 16$ dieb. 18^h. $5' 7''$ prout à Cassino in novis Elementis Astron. traduntur. Semidiameter jovis $R = 1$, tempus periodicum jovis circà axem $t = 9^h$. $55' 52''$ posito in formulâ generali (87) $n = -2$, habetur $CA : CP = 2p + f : 2p$, vel $CA - CP : CP = f : 2p$, aut $CA - CP : CP = R^3 TT : 2D^3 tt$, erit itaque in hâc hypothesi gravitatis pro jove $CA - CP : CP = 1 : \frac{2D^3 \times tt}{TT} = 1 : 11\frac{1}{2}$, quæ differentia inter semidiametrum secundum æquatorem jovis & semidiametrum inter polos quamproxime æqualis est differentiæ quam Newtonus ex suâ methodo derivavit.

Sit mediocris distantia Lunæ à terrâ $D = 60$ semid. terrestr. tempus periodicum Lunæ $= 27$ dieb. 7^{hor}. $43'$, semid. terræ $= 1$, tempus revolutionis terræ circà axem $= 23^{hor}$. $56' 4''$. erit gravitas ad vim centrifugam ut 288 ad 1. Unde pro terrâ foret $CA - CP : CP = 1 : 576$: terra itaque minùs compressa foret quam à New-

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam terræ noſtræ minui ſub æquatore, atque ideo terram ibi altius ſurgere quam ad polos (ſi materia ejus uniformiter denſa ſit) patebit per experimenta pendulorum quæ recenſentur in propoſitione ſequente. LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

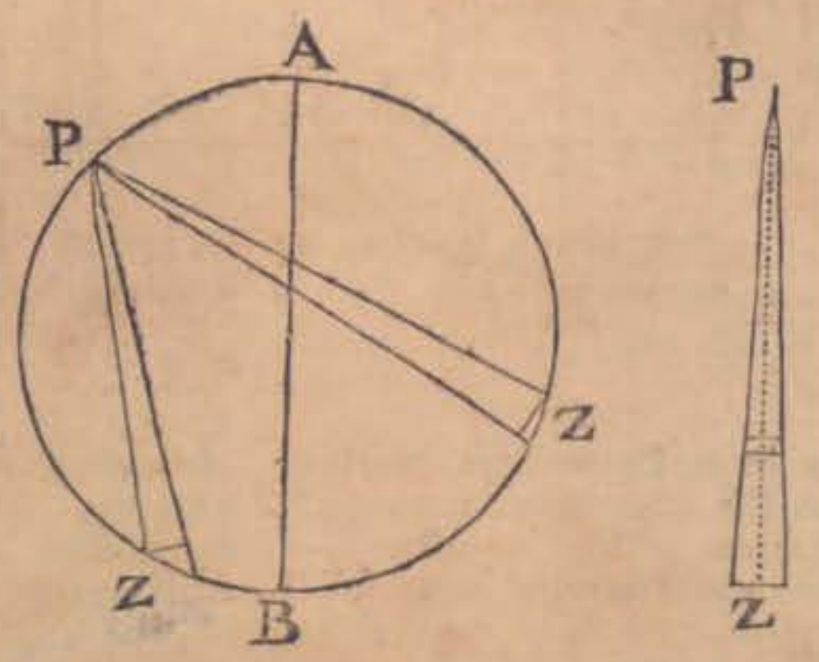
Newtono definitum eſt, magis tamen quam determinatum eſt ab Hugenio, verum ob actionem Solis in Lunam, tempus ejus Periodicum non reſpondet accurate vi centrifugæ terræ; alias correctiones hujus calculi invenies Tranſ. Philoſ. N°. 438 quibus ad Newtonianam proportionem magis accurate revocatur. De hâc Quæſtione nobiliſſimâ procul dubio legantur quæ de telluris figurâ dederunt Clariſſimi Viri D. De Mairan in monumentis Pariſ. an. 1720. D. De Maupertuis ibidem an. 1733. 1734. 1735. 1736. & in duobus opuſculis quorum unum de figuris corporum cæleſtium, alterum de figurâ telluris inſcribitur. Præclara quoque de eodem argumento ediderunt D. Clairaut in monumentis Pariſienſibus an. 1735. & in Tranſactionibus Philoſophicis num. 445. & 449. D. Bouguer ibid. an. 1736. D. Euſtachius Manfredius ibid. an. 1734. & D. Stirling in tranſactionibus Anglicis an. 1735.

* Viam ſternet ad determinandam figuram terræ ortam ex neceſſitate æquilibrii vis centrifugæ & vis gravitatis ſingularum ejus partium, ſi generaliſſime ſolvatur Probl. XLV. (Prop. XCI. Lib. I.) Newtoni, nempe, ſi inveniatur attractio corpuſculi non ſolùm *ſiti in axe* ſolidi rotundi, ſed ſiti ubivis in ejus ſuperficie, cujus Problematis Analyſim hic in compendium trademus.

PROBLEMA.

Datâ Æquatione curvæ cujuſcumque quæ circa axim revolvendo ſolidum deſcribat invenire attractionem corpuſculi ſiti in quocumque puncto ſuperficiei ejus ſolidi.

Conſtructio. Fingatur Planum tangens id ſolidum in P, & ſuper eo plano, e puncto P ut centro deſcripta intelligatur ſphæra radio infinite parvo, dividatur tota ſuperficies hemiſphærii verſus ſolidum converſa in portiunculas æquales, & concipiantur Pyramides (quarum vertices ſint in centro ſphæræ) illis portiunculis inſiſ-



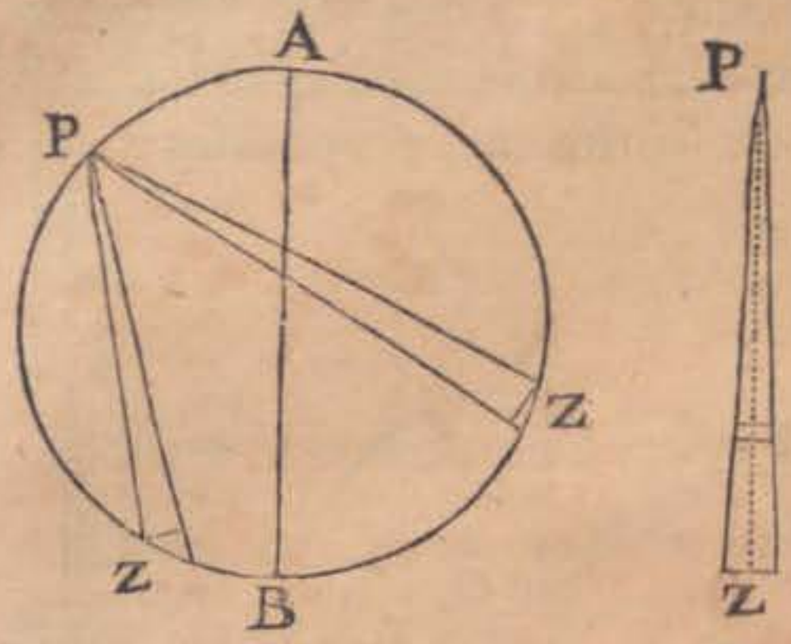
90.

tentes & inde ad ſolidi ipſius oppoſitam ſuperficiem continuatæ, puta in Z, Z, terminentur illæ Pyramides in eo ſolido per Baſes parallelas Baſibus ipſarum ſphæræ circumſcriptis; Corpuſculi in puncto P ſiti attractio ab omnibus illis Pyramidibus, concipi poterit ut attractio à toto ſolido, exiguæ enim ejus ſolidi portiones quæ in extremitate unius cujuſque Pyramidis negliguntur ſunt ubique totius Pyramidis reſpectu infinitè parvæ.

Attractio autem corpuſculi P à ſingulâ Pyramide erit ubique ut axis PZ ejus Pyramidis; Nam ducantur ubivis in axe, duo puncta infinitè proxima, ducanturque per ea ſuperficies duæ, parallelæ Baſi Pyramidis, ſive, quod idem eſt, parallelæ ſuperficiei ſphæræ circa P deſcriptæ, exiguum ſolidum inter eas ſuperficies contentum creſcet ut illæ ſuperficies ſive ut quadratum portionis axeos abſciſſæ, ſed cum attractio ſingulæ particulæ decreſcat ut quadratum diſtantiæ à puncto P, ſive decreſcat ut quadratum abſciſſæ; ideóque creſcat particularum quantitas ut decreſcit ſingulæ particulæ vis, evenit ut attractio ejus ſolidi ubivis in axe PZ ſumpti eadem ſemper ſit; æqualis, erit v. gr. attractioni ſolidi, cujus baſis foret portio ſuperficiei ſphæ-

De Mundi Systemate.

90.

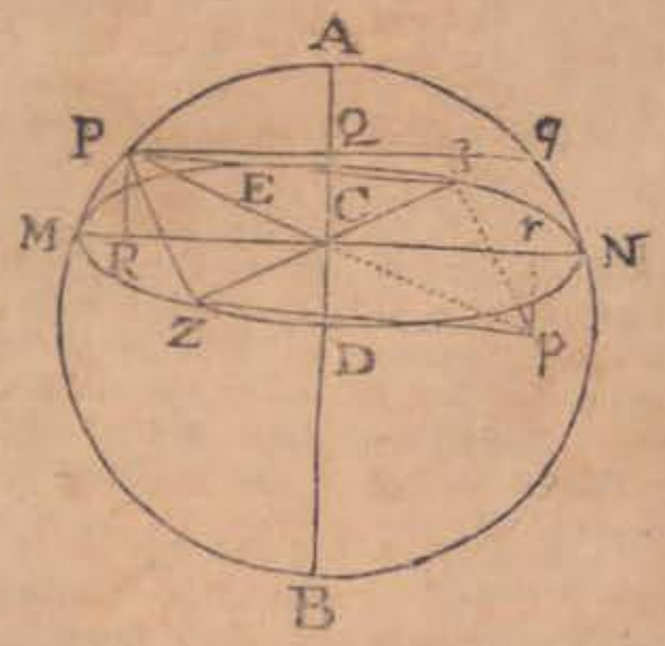


ræ intra Pyramidem contentæ, & altitudo illa quam minima axeos P Z portio assumpta. Hinc attractio totius Pyramidis erit attractio ejus parvi solidi, toties repetita quot sunt axeos P Z portiunculæ; Cum itaque portio superficiei sphæræ intra Pyramides contenta, sit ubivis eadem, ex Const., attractiones singularum Pyramidum erunt ut numerus particularum æqualium in singulo axe P Z assumendarum, sive quod idem est, ut singuli axes P Z.

His positis: sit M D N E unus è circulis genitis in solido propositio per revolutionem ordinatæ C M circa axim A B. Dico quod attractio puncti P ab omnibus Pyramidibus quarum axes in circumferentia circuli M D N E terminantur, (quæ est ut summa omnium axium P Z ad eam circumferentiam terminatorum) est ut linea P C à puncto P ad centrum ejus circuli C ductæ, multiplicata per numerum axium P Z ad circumferentiam M D N E pervenientium: (missis nempe singularum P Z longitudinibus).

Assumatur enim in circumferentia M D N E punctum quodlibet Z, & ducta per centrum C linea Z C ϛ, ducatur P ϛ, ex demonstratis attractiones Pyramidum ad Z & ϛ pervenientium erunt ut P Z ad P ϛ; Ducatur ex P in circulum M D N E perpendiculum P R & per R & centrum C ducatur Diameter M R N, sumptaque N r = M R demittatur perpendiculum r p, sitque r p = R P, linea M N, P R & r p sunt in eodem plano (per 6. XI. Elem.) ideoque linea P p secabit lineam M N, & cum Triangula P R C, p r C sint æqualia propter r p = R P, angulos rectos, & angulos per verticem oppositos, sitque N r = M R linea P p transibit per centrum C; erit etiam linea P p in plano Trianguli Z P ϛ cum habeat puncta P & C in eo plano; inde si jungantur lineæ Z p, ϛ p, tota figura P Z p ϛ erit in eodem Plano, & propter æquales P C, p C, Z C, C ϛ & angulos interceptos per verticem oppositos lineæ P Z, p ϛ erunt æquales, ut & lineæ P ϛ, p Z, hinc figura P Z p ϛ est Parallelogramma cujus P p sive 2 P C est Diagonalis; Quare cum Pyramides trahant secundum directiones P Z, P ϛ, viribus quæ sunt ut P Z ad P ϛ, vis inde resultans, dirigetur secundum Diagonalem P p, sive 2 P C, eique erit proportionalis.

Quod cum ita sit de omnibus punctis Z in circumferentiâ M D N E sumendis, attractio puncti P ab omnibus paribus Pyramidum in circumferentiâ ejus circuli terminatarum, erit ut 2 P C multiplicata per numerum parium earum Pyramidum;

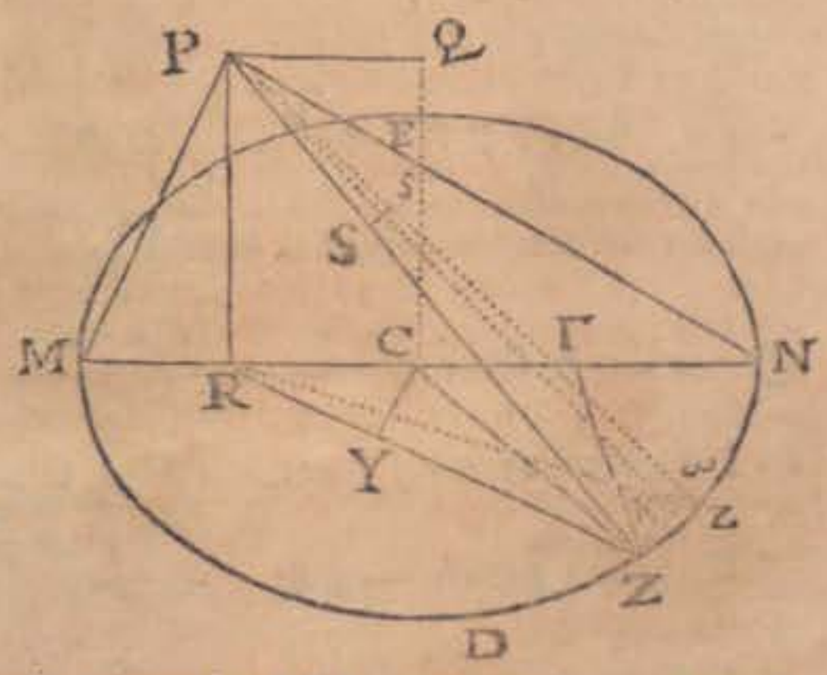


sive erit ut P C ipsa multiplicata per numerum omnium P Z ad circumferentiam M D N E terminatarum.

Denique ut obtineatur numerus earum linearum P Z ad circumferentiam quamlibet M D N E terminatarum, observandum est, eas lineas egredientes ab Hemisphærio circa P descripto, in ejus superficie figurare lineam curvam (duplicis quidem curvaturæ quando P non imminet perpendicula-

diculariter centro C, isto enim in casu signarent circulum) & propter æqualitatem distantiæ concursus eorum axium cum superficie Hemisphærii (ex constructione) numerus earum linearum erit ut longitudo ejus lineæ curvæ in superficie Hemisphærii signatæ; huc ergo redit tota quæstio, ut, Dato puncto P ejusque ordinata PQ ad axem solidi rotundi, sumptâque ut libet abscissâ AC, ejus ordinata CM, & circulo MDNE ejus ordinatæ convolutione descripto, inveniatur longitudo curvæ descriptæ in superficie sphæræ (cujus radius PS ad lubitum assumitur) per intersectionem Coni inclinati cujus vertex est P, basis vero MDNE.

Ut longitudo seu rectificatio ejus curvæ obtineatur, Ducantur à puncto P ad duo puncta proxima peripheriæ MDNE, lineæ PZ, Pz; Abscissa circuli secundum Diametrum à puncto N remotiori à puncto P sumatur, sintque NΓ & ΓZ abscissa & ordinata circuli respondentes puncto Z, dicatur NΓ, x, ΓZ, y; Zz, dv; tota Diameter MN, f, duplum ordinatæ PQ sit g, denique si centro P Radio PS describatur arcus Ss ille arcus Ss erit elementum curvæ quæsitæ respondens Elemento circuli dv. Ex P, ut prius, demittatur in circulum MDNE perpendiculum PR, erit $RC = PQ = \frac{g}{2}$, ex R ducantur lineæ RZ & Rz, & centro C radio RZ describatur arcus ZK ut sit RK = RZ, ex centro C ducatur ad Z Radius CZ, & perpendiculum CY in lineam RZ, Dico 1°. quod Triangulus RCY est similis Triangulo RZΓ, ob angulum in R communem, & rectos Γ & Y, unde est RZ ad ZΓ (y) sicut RC ($\frac{g}{2}$) ad CY ($\frac{gy}{2RZ}$) sicut Zz (dv) ad KZ quod erit ergo $\frac{gy}{RZ \times f} dv$.



quod erit ergo $\frac{gy}{2RZ}$; 2°. Triangulus CZY est similis Triangulo ZKz; Nam angulus RZK est rectus per Constr. quoniam Triangulus RZK est Isosceles, Angulus vero CZz est etiam rectus per naturam circuli, unde dempto communi CZK manent æquales anguli CZY & KZz, præterea anguli in Y & K sunt recti: erit ergo Radius CZ ($\frac{f}{2}$) ad CY ($\frac{gy}{2RZ}$) sicut Zz (dv) ad KZ quod erit ergo $\frac{gy}{RZ \times f} dv$.

3°. Ducatur ex P linea PK ea erit æqualis lineæ PZ nam Trianguli PRZ, PRK erunt æquales ob communem PR, æquales per Constr. RZ & RK, & angulos in R rectos (per 4. XI. Elem.); hinc si radio PK, centro P describatur arcus Kω, erit Pω = PZ & arcus Zω similis erit elemento quæsito Ss, & Triangulus Zzω Rectangulus erit in ω.

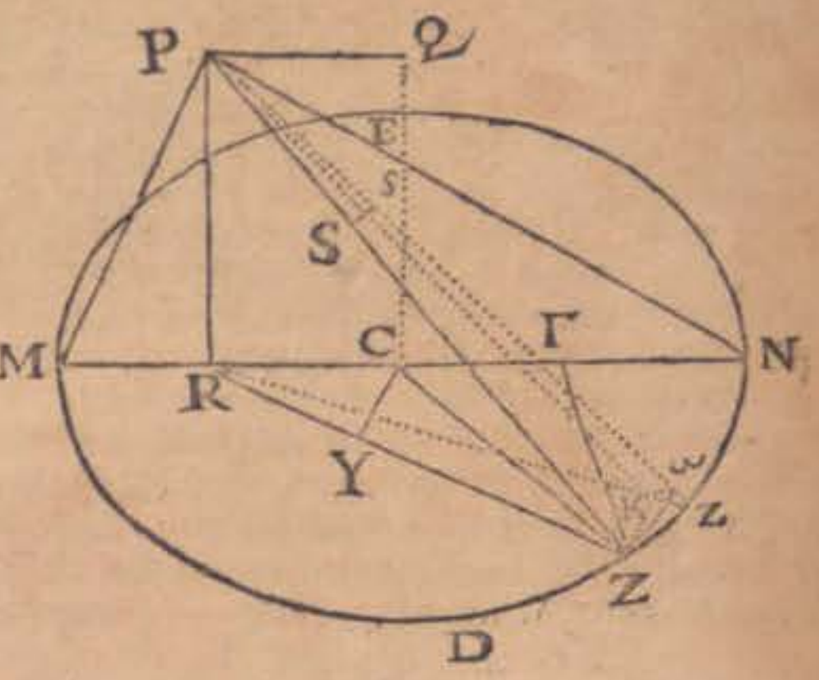
Porro, Triangulus Kωz erit similis triangulo PRz ob angulum communem in z, & Rectos in R & ω, sive similis erit triangulo PRZ, ideoque fiat ut PZ ad RZ ita KZ sive $\frac{gy}{RZ \times f} dv$ ad ωz quod erit itaque $\frac{gy}{PZ \times f} dv$.

4°. In Triangulo Zzω, Rectangulo in ω cum Zz sit dv & ωZ sit $\frac{gy}{PZ \times f} dv$ erit quadratum Zω sive $\overline{Z\omega}^2 = dv^2 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2} dv^2$ & cum sit PZ ad PS sicut Zω ad Ss erit PZ² ad PS² sicut $\overline{Z\omega}^2$ sive $1 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2} dv^2$ ad Ss² ergo quadratum Elementi curvæ quæsitæ est $\frac{PS^2}{PZ^2} \times \overline{1 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2} dv^2}$: Quod erat Inveniendum.

DE MUNDI SYSTEMATE.

90.

Ut autem Integretur, primò notandum quod ex Natura circuli Elementum dv fit æquale Elemento $dx \times \frac{f}{2y}$, ideoque quadratum Elementi inventum evadet $\frac{PS^2}{PZ^2} \times \overline{\frac{f^2}{4y^2} - \frac{g^2}{4PZ^2}} \times dx^2$: Præterea est $PZ^2 = PR^2 + RZ^2$, & est $RZ^2 = R\Gamma^2 + \Gamma Z^2$ est autem, ex constructione, $R\Gamma = RN - N\Gamma = \frac{g+f}{2} - x$ ideoque $R\Gamma^2 = \overline{\frac{g+f}{2}}^2 - gx - fx + xx$ estque $\Gamma Z^2 = fx - xx$, ideo $(RZ^2 = R\Gamma^2 + \Gamma Z^2) = \overline{\frac{g+f}{2}}^2 - gx$ & $PZ^2 = PR^2 + \overline{\frac{g+f}{2}}^2 - gx$; sed est $PR^2 + \overline{\frac{g+f}{2}}^2 = PR^2 + RN^2 = PN^2$, ergo $PZ^2 = PN^2 - gx$, & si ad compendium tertia proportionalis ad 2 PQ (sive g) & PN dicatur l ut sit $PN^2 = gl$ fiet $PZ^2 = gl - gx$ sicque quadratum elementi quæsiti evadet $\frac{PS^2}{gl-gx} \times \overline{\frac{f^2}{4y^2} - \frac{g}{4 \times l-x}} \times dx^2$, sive cum y^2 sit $fx - xx$ erit illud quadratum $\frac{PS^2}{4g \times l-x} dx^2 \times \overline{\frac{f^2}{x \times f-x} - \frac{g}{l-x}}$:



Dividatur autem f^2 per $x \times f-x$ fit $\frac{f}{x} + 1 + \frac{x}{f} + \frac{x^2}{f^2} + \frac{x^3}{f^3}$ &c.

Dividatur g per $l-x$ fit - - - $\frac{g}{l} + \frac{gx}{l^2} + \frac{gx^2}{l^3} + \frac{gx^3}{l^4}$ &c.

Differentia serierum fiet $\frac{f}{x} + \frac{l-g}{l} + \frac{l^2-fg}{l^2 f}x + \frac{l^3-f^2g}{l^3 f^2}x^2 + \frac{l^4-f^3g}{l^4 f^3}x^3$ &c.

Divid. ea differ. per $l-x$ fit $\frac{f}{lx} + \frac{l+f-g}{l^2} + \frac{l^2+lf+f^2-2fg}{l^3 f}x + \frac{l^3+l^2f+lf^2+f^3-3fg}{l^4 f^2}x^2$ &c.

Unde quadratum elementi Ss

est $dx^2 \times \frac{PS^2 \times f}{4gl} \times \frac{1}{x} + \frac{l+f-g}{lf} + \frac{l^2+lf+f^2-2fg}{l^2 f^2}x + \frac{l^3+l^2f+lf^2+f^3-3fg}{l^3 f^3}x^2$ &c.

quæ series ad lubitum continuari potest.

Exprimatur autem curvæ quæsitæ longitudo per hanc seriem cujus coefficientes sunt indeterminati $Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{5}{2}} + Dx^{\frac{7}{2}} + Ex^{\frac{9}{2}} +$ &c.

ejus fluxio erit $dx \times \frac{1}{2}Ax^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}Bx^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}Cx^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}Dx^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{2}Ex^{\frac{7}{2}} +$ &c. cujus quadratum erit $dx^2 \times \frac{1}{4}A^2x^{-1} + \frac{3}{2}AB + \frac{5}{2}ACx + \frac{7}{2}ADx^2 + \frac{9}{2}AEx^3 + \frac{11}{12}AFx^4$
$+ \frac{9}{4}B^2x + \frac{15}{2}BCx^2 + \frac{21}{2}BDx^3 + \frac{27}{2}BEx^4$ &c.
$+ \frac{25}{4}CCx^3 + \frac{35}{3}CDx^4$

Col-

Collatis verò terminis seriei inventæ cum terminis correspondentibus hujus seriei Rectiliæ invenietur $A = \frac{PS\sqrt{f}}{\sqrt{gl}}$

$$B = A \times \frac{l+f-g}{6lf}$$

$$C = A \times \frac{3l^2+2lf+3f^2+2lg-6fg-g^2}{2.4.5\,l^2f^2.}$$

$$D = A \times \frac{10l^3+6fl^2+6f^2l+10f^3+2gl^2+12fgl-30f^2g+6g^2l-10fg^2-2g^3}{2.4.4.7\,l^3f^3}$$

$$E = A \times \frac{35l^4+20fl^3+18f^2l^2+20f^3l+35f^4+4gl^3+12fgl^2+60f^2gl-140f^3g-6g^2l^2+60fg^2l-70f^2g^2+20g^3l-28fg^3-5g^4}{2.4.4.4.9\,l^4f^4.}$$ &c.

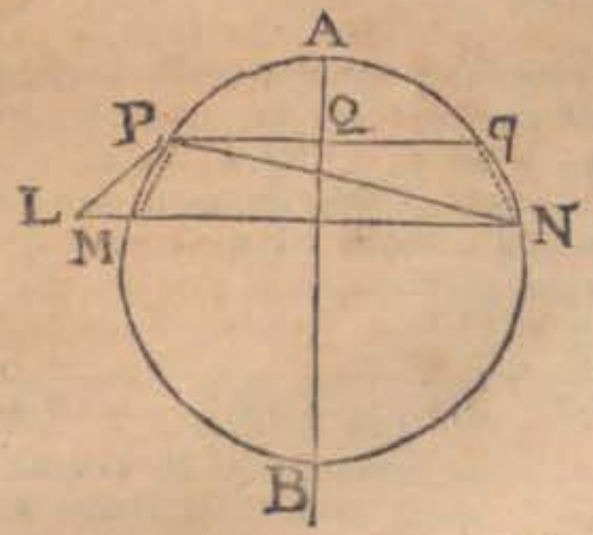
Hinc series quæ exprimit longitudinem curvæ quæsitæ fit

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}}\sqrt{f}\times x^{\frac{1}{2}}+\frac{l+f-g}{2.3lf}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3l^2+2lf+3f^2+2lg-6fg-gg}{2.4.5\,l^2f^2}x^{\frac{5}{2}}+\text{ &c.}$$

Si autem talis sit curva; ut PN sit ubique major quam g scribatur loco x longitudo f, sive Diameter circuli, & habebitur valor dimidii curvæ quæsitæ, quod respondet semicirculo M D N: est ergo ea semi-curva,

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}}\times f\times 1+\frac{l+f-g}{2.3l}+\frac{3l^2+2lf+3f^2+2lg-6fg-gg}{2.4.5\,l^2}\text{ &c.}$$

In hoc autem casu quantitas l sive $\frac{PN^2}{g}$ est major quam f, majorem esse quam g ex hypothesi; majorem autem esse l quam PN fiat in P super PN à parte lineæ PM angulus NPL æqualis angulo q, ita ut occurrat PL lineæ NM, dico lineam NL esse longiorem quam NM, nam anguli MPq & q sunt æquales, sed angulus NPL est æqualis angulo q ergo angulus NPL cum angulo NPq major est angulo qPM, cadit ergo L ultrà M; sive NL est major NM; est autem NL æquale l nam Trianguli PqN & PNL sunt similes ob angulos q & NPL æquales per const., angulosque NPq & PNL æquales ob parallelas Pq, MN, hinc ergo est Pq ad PN ut PN ad NL, sed est Pq sive g ad PN ut PN ad l, ergo est NL æqualis l & major quam f.



Hinc

DE MUNDI SYSTEMATE.

Hinc, ut iſta ſeries convergat debent ita diſponi terminі hujus ſeriei ut remotiores à primo ponantur ii in quibus creſcunt in Numeratore dimenſiones quantitatum f aut g, & in Denominatore dimenſiones quantitatis l, ideóque hanc habet formam.

90. $$\frac{PSf}{PN} \times 1$$

$$+ \frac{1}{2.3\,l} \times 1 + \overline{f - g}$$

$$+ \frac{1}{2.4.5\,l^2} \times 3l^2 + \overline{2fl + 2gl} + \overline{3f^2 - 6fg - g^2}$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.7\,l^3} \times 10l^3 + \overline{6fl^2 + 2gl^2} + \overline{6f^2l + 12fgl + 6g^2l} + \overline{10f^3 - 30f^2g - 10fg^2 - 2g^3}$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.4.9.4} \times 35l^4 + \overline{20fl^3 + 4gl^3} + \overline{18f^2l^2 + 12fgl^2 - 6g^2l^2} + \overline{20f^3l + 60f^2gl + 60fg^2l + 20g^3l} + \&c.$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.4.4.11\,l^5} \times 126l^5 + \overline{70fl^4 + 10gl^4} + \overline{60f^2l^3 + 24fgl^3 - 4g^2l^3} \;\&c.$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.4.4.4.13\,l^6} \times 462l^6 + \overline{252fl^5 + 28gl^5} \;\&c.$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.4.4\;4.4.15\,l^7} \times 1716l^7 + \&c.$$

&c.

Ut autem hæc forma ad ſimpliciorem revocetur, notandum quod ubi eſt $g=0$ tunc $l=\infty$, ideóque omnes termini hujus ſeriei præter primam columnam evaneſcunt, quoniam continet altiſſimam dignitatem quantitatis l; ſed ubi $g=0$ tunc Conus PMDNE fit rectus, & curva inſcripta ſphæræ cujus radius eſt PS, eſt circulus cujus Diameter eſt ad f ſicut PS ad PN, unde is Diameter eſt $\frac{PS \times f}{PN}$; ideóque prima columna ſeriei quæ eo in caſu dimidium curvæ exprimit, continet rationem ſemi-circuli ad Diametrum 1. Ideo ſumma tota ejus columnæ $1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{10}{2.4.4.7}$ &c. eſt 1.57079 &c. idque in quocumque valore quantitatis g, ſiquidem ea quantitas in eâ columnâ eliminatur.

Ad inveniendam ſummam ſecundæ columnæ, ea in duas dividatur partes quarum prior multiplicet $\frac{f}{l}$, altera $\frac{g}{l}$ ut habeatur ſummæ columnæ multiplicatæ per $\frac{f}{l}$ obſervandum quod ſinguli coefficientes primæ columnæ (primo termino 1 ſecluſo) ſunt ad coefficientes ſingulos ſecundæ columnæ ut numeri 1 ad 1, 3 ad 2, 5 ad 3, 7 ad 4, 9 ad 5, 11 ad 6, 13 ad 7 &c. quæ ratio tandem abit in rationem duplam, itaque hi coefficientes ſecundæ columnæ ſimul ſumpti dimidium efficiunt quantitatis .57079 additâ inſuper eâ quantitate quâ primi coefficientes ſecundæ columnæ excedunt dimidium coefficientium primæ, qui exceſſus celerrimè convergunt ſuntque

$$\frac{\frac{1}{2}}{2.3} + \frac{\frac{1}{2}}{2.4.5} + \frac{1}{2.4.4.7} + \frac{\frac{5}{2}}{2.4.4.4.9} + \frac{7}{2.4.4.4.4.11} + \frac{21}{2.4.4.4.4.4.13} + \frac{66}{2.4.4.4.4.4.4.15} \;\&c.$$

qui

qui termini sunt .08333
.01250
.00446
.00217
.00124
.00078
.00053

.10613
summa reliquorum .00112
dimidium .57079 .28539

.39152

Ut termini reliqui habeantur, fingi potest sequentes terminos decrescere in ratione duorum ultimò inventorum, unde summa omnium terminorum adjiciendorum erit .00112 proximè, hinc ea pars secundæ columnæ est $.39152\frac{f}{l}$ proximè.

Hujus autem primæ partis secundæ columnæ coefficientes sunt ad coefficientes alterius partis ut −1 ad 1, +1 ad 1, 3 ad 1, 5 ad 1, 7 ad 1, 9 ad 1 &c., singuli autem erant ad suos excessus supra dimidium termini columnæ primæ ut 2 ad 1, 4 ad 1, 6 ad 1, 8 ad 1, 10 ad 1, 12 ad 1 &c., ergo coefficientes alterius partes istius columnæ sunt ad eos excessus ut 2 ad −1, 4 ad 1, 6 ad 3, 8 ad 5, 10 ad 7, quæ ratio randem ad æqualitatem definit; Ergo summa istius columnæ sumatur æqualis differentiolis supra inventis .10613, & insuper quantitatibus quibus inventi termini hujus columnæ excedunt eas differentiolas, quæ sunt

$$\frac{-1\frac{1}{2}}{2.3}+\frac{1\frac{1}{2}}{2.4.5}+\frac{1}{2.4.4.7}+\frac{\frac{3}{2}}{2.4.4.4.9}+\frac{3}{2.4.4.4.4.11}+\frac{7}{2.4.4.4.4.4.13}+\frac{15}{2.4.4.4.4.4.4.15}$$

sive
− .25
+ .07750
+ .00446
+ .00130
+ .00053
+ .00026
+ .00014

− .20581
sum. reliq. 16
sum. differ. + .10613

$-.09952\frac{g}{l}$

Unde summâ terminorum ejus columnæ est $-.09952\frac{g}{l}$ proximè

Termini tertiæ columnæ summati evadunt $+0.1379\frac{f^2}{l^2}-0.0621\frac{fg}{l^2}+0.0057\frac{g^2}{l^2}$

Termini quartæ sunt $+0.07265\frac{f^3}{l^3}-0.07119\frac{f^2g}{l^3}-0.0032\frac{fg^2}{l^3}+0.03353\frac{g^3}{l^3}$

Term. quintæ sunt $+0.04965\frac{f^4}{l^4}-0.00444\frac{f^3g}{l^4}-0.05586\frac{f^2g^2}{l^4}+0.06380\frac{fg^3}{l^4}+0.015\frac{g^4}{l^4}$

T. sextæ sunt $+0.07469\frac{f^5}{l^5}-0.14589\frac{f^4g}{l^5}-0.11563\frac{f^3g^2}{l^5}-0.06938\frac{f^2g^3}{l^5}-0.01376\frac{fg^4}{l^5}-0.00385\frac{g^5}{l^5}$

In hoc casu ubi l est major quam g aut f, ex istis terminis sufficiens convergentia obtinetur, ut pro vero valore curvæ, hi termini imo & pauciores assumi possint reliquis omissis; Quoniam ergo invenimus attractionem puncti P à circulo M D N E esse ut P C ductum in numerum linearum P Z in circumferentia M D N E terminatarum, sive ut P C ductum in curvam quæ in superficie sphæræ intercipitur inter lineas P Z, si in singulo puncto C, axeos A B erigatur ordinata quæ sit ut

PC

DE MUNDI SYSTEMATE.

$$\frac{PC}{PN}\times MN\times 1.54079+0.39125\frac{f}{l}+0.1379\frac{f^2}{l^2}+0.0726\frac{f^3}{l^3}$$
$$-0.09952\frac{g}{l}-0.0621\frac{fg}{l^2}-0.0722\frac{f^2g}{l^3}\ \&c.$$
$$+0.0057-\frac{g^2}{l^3}-0.0032\frac{fg^2}{l^3}$$
$$+0.03353\frac{g^3}{l^3}$$

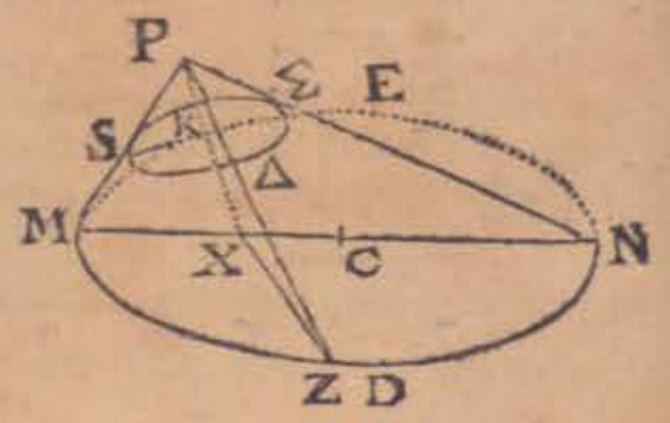
90.

& per vertices earum ordinatarum curva ducta intelligatur, exprimet ejus area attractionem puncti P, si modo in hoc valore inserantur quantitates ad curvam revolventem pertinentes; abscissa constans AQ dicatur a, ejus ordinata $PQ=\frac{g}{2}$ sit e, abscissa AC sit x, ordinata CM sit y, erit $PN^2=\overline{x-a}^2+\overline{y+c}^2$, ideóque $l=\frac{\overline{x-a}^2+\overline{y+c}^2}{2c}$, & $PC=\sqrt{\overline{x-a}^2+c^2}$.

Ex his & æquatione curvæ, determinari poterit punctum axeos in quo transibit circulus talis ut attractio cis eum circulum æqualis sit attractioni ultra eum circulum, sive punctum axeos ad quod tendit media directio gravitatis hinc ejus obliquitas ad perpendiculum in curvam obtinebitur.

Sed cum hæc duntaxat valeant cum g sive PQq numquam major est quam PN, generalior alia est solutio, sed cujus calculus paulo prolixior videbitur.

2dus. Casus, si talis sit curva ut incertum sit utrum PN numquam sit minor quam PQq sive g.



Ducatur per punctum P linea quæ angulum NPM in duos angulos æquales dividat, & occurrat lineæ MN in puncto X, erit (per 3. VI. Elem.) PN + PM ad NM ut PN ad NX quod erit ergo $\frac{PN\times f}{PN+PM}$; scribatur is valor loco x in serie quæ exprimit longitudinem curvæ propositæ ea evadet

$$\frac{PS\times f}{\sqrt{PN\times PN+PM}}\times 1+\frac{l+f-g}{2.3.l\times PN+PM}PN+\frac{\begin{matrix}3l^2+2lf+3f^2\\+2lg-6fg\\-gg\end{matrix}}{2.4.5l^2\times\overline{PN+PM}^2}PN^2\ \&c.$$

quæ series in omni casu convergit propter quantitatis PN + PM dignitates in denominatore positas quæ quantitas semper major est quam PN, f & g in numeratore positas (per 20. 1i. Elem.), imo si loco l ponatur ejus valor $\frac{PN^2}{g}$ fiatque reductio series evadet

$$\frac{PS\times f}{\sqrt{PN\times PN+PM}}\times 1+\frac{PN^2+fg-g^2}{2.3.PN\times PN+PM}+\frac{\begin{matrix}3PN^4+2PN^2gf+3f^2g^2\\+2PN^2gg-6fg^3\\-g^4\end{matrix}\ \&c.}{2.4.5.PN^2\times\overline{PN+PM}^2}$$

Cum

Cum autem in Triangulo PNq, vel in Triangulo PMN, PN+MN ſit ſumma laterum & PN nunquam ſit minimum latus, demonſtrabitur facile quod Rectangulum PN per PM + PN, eſt majus Rectangulis aut quadratis factis ex reliquis lateribus PN, Pq vel MN, unde in quocunque caſu hæc ſeries tam reſpectu litteralium quantitatum quàm reſpectu numerorum coefficientium erit convergens, idque ſatis prompte, ſiquidem duobus gradibus creſcunt dimenſiones ab uno termino ad alterum.

Portio autem curvæ quæſitæ reſpondens tali abſciſſæ, eſt accurate quarta pars totius curvæ quæſitæ, ſumptis enim a puncto P ſecundum lineas PM, PN longitudinibus PS, PZ æqualibus radio ſphæræ, ductâque SΣ; & recto Cono PMDNE ſecundum lineam SΣ per planum perpendiculare Plano PNM ſectio erit Ellipſis & SΣ unus ejus Ellipſeos axibus; quia verò Triangulus PSΣ eſt Iſoceles & linea PX angulum SPΣ bifariam dividit, ea linea PX ſecabit axem Ellipſeos SΣ in ipſo centro K Ellipſeos, quoniam autem alter axis KΔ eſt perpendicularis in axem SΣ, & eſt in plano ad Planum PNM perpendiculari, erit axis ΔK perpendicularis in lineam PKX ideoque erit Parallelus ordinatæ XZ, & linea PZ tranſibit per punctum Δ; Ergo unus Ellipſeos quadrans intercipietur inter lineas PN, PZ, hoc eſt reſpondebit portioni NDZ ſemicirculi NZDN, alter verò quadrans Ellipſeos reſpondebit reliquæ portioni MZ ſemi-circuli ejuſdem; Jam verò evidens eſt quod ſi habeatur Conus rectus cujus baſis ſit Ellipſis quævis, & ab ejus Vertice ut Centro, radio quovis deſcribatur curva in ejus Coni ſuperficie, portiones ejus curvæ ſingulis quadrantibus Ellipſeos reſpondentes erunt inter ſe æquales; Ergo portio curvæ reſpondens abſciſſæ $x = \frac{PN}{PN+PM} f$ eſt accuratè quarta pars totius curvæ quæſitæ. 90.

Ergo ex prius inventis, cum attractio Puncti P à Pyramidibus in peripheriam MDNE deſinentibus, exprimi debeat per PC ductum in numerum linearum PZ, quæ à puncto P æqualibus angulis procedentes ad peripheriam MDNE deſinunt, is verò numerus linearum PZ ſit ut curva quæ intercipitur in ſuperficie ſphæræ deſcriptæ radio quocunque PS inter eas lineas PZ, eaque curva in quatuor æquales quadrantes dividatur, erit etiam is numerus linearum PZ ut unus ex ei quadrantibus, exprimitur verò is quadrans per ſeriem ſuprà inventam ergo (poſito PS=1) attractio Puncti P à ſolido

$$\text{eſt ut } \frac{PC \times f}{\sqrt{PN \times PN+PM}} \times 1 + \frac{PN^2+ff-gg}{2.3.PN \times PN+PM} + \frac{3PN^4+2PN^2gf+3f^2g^2+2PN^2gg-6fg^3\&c}{2.4.5.PN^2 \times \overline{PN+PM}^2 - g^4}$$

Hæc ſeries tunc minimùm convergit cum ex ſolis coefficientibus numericis convergit cum nempe punctum M coincidit cum puncto P, tunc enim quantitates omnes NM, ſive f; Pq ſive g, PN & PN+PM ſunt inter ſe æquales & $PC = \frac{g}{2}$ tunc ergo ſeries redit ad $PC \times 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{10}{2.4.4.7} + \frac{35}{2.4.4.4.9}$ &c.

Eo autem in caſu, ex ipsâ conſtructione liquet, portionem curvæ ſphæræ inſcriptæ eſſe quadrantem circuli cujus radius eſt 1, eumque quadrantem exprimi iſtâ ſerie; hinc totam hanc ſeriem æquipollere quantitati 1.57079 × PC.

Facilior paulo evadet calculus, ſi loco ſummæ laterum PM+PN, adhibeatur quantitas $\frac{fg}{PN-PM}$ ipſi æquipollens, Prolixior tamen eſt, quàm ut illum applicare ſuſtinuerimus ad ulteriores conſequentias.

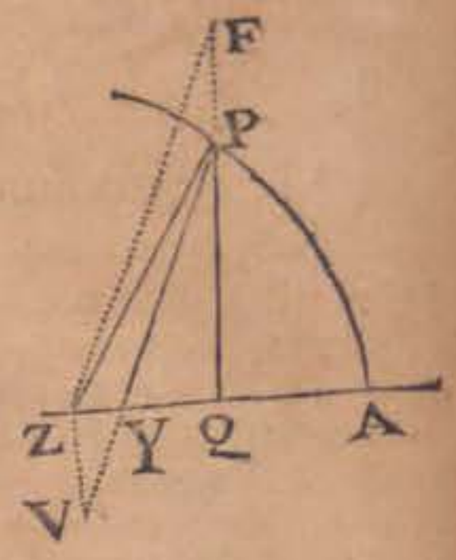
Dixi ex his viam ſterni ad determinationem curvæ quam affectat Meridianus Telluris nam ſi ex Æquatione generali $y = Ax^n + Bx^{2n} + Cx^{3n}$ &c. & ex ſerie inventâ determinetur attractio puncti P à quovis circulo, & erigatur in puncto axis quod ejus circuli eſt centrum ordinata quæ ejus circuli attractionem repræſentet, &

 intelli-

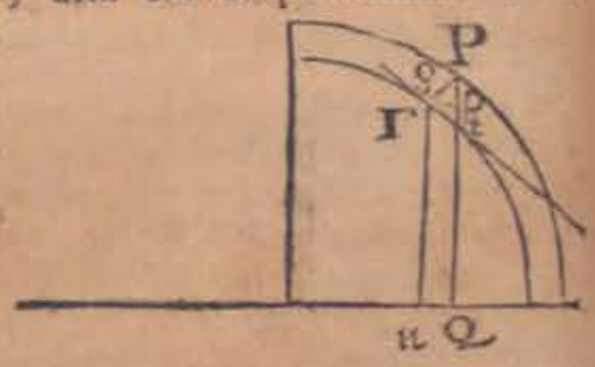
DE MUNDI SYSTEMATE.

intelligatur curva per earum ordinatarum vertices transiens, quæratur ejus curvæ area per vulgatas methodos, habebiturque gravitas puncti P in solidum; quæratur præterea punctum axeos Y in quo si erigeretur ordinata illi curvæ quæ gravitatem puncti P exprimit, ejus curvæ area bifariam divideretur, erit Y punctum axeos ad quod attractio puncti P dirigetur.

90. Pariter ex Æquatione generali curvæ habebitur punctum axeos Z ad quod pertinget perpendiculum in curvæ punctum P, habebuntur ergo intervalla ZY & YQ, ex Z ducatur ZV Parallela PQ quæ concurrat cum PY productâ in V, producatur PQ in F ut fiat PF = ZV, ducaturque FZ, quoniam curva circa axem revolvitur, PF erit directio vis centifugæ agentis in puncto P, PV directio gravitatis, PZ verò curvæ perpendicularis erit directio media nata ex utriusque vis compositione (ut constat facto cum agatur de tellure ipsâ); sed quia habentur ZY, YQ, PQ & PY habebuntur ZV & VY, ideóque habebitur VP, ergo habebuntur latera & Diagonalis Parallelogrammi FPVZ sive habebuntur rationes vis centrifugæ puncti P, vis ejus gravitatis & vis mediæ PZ ex utrâque resultantis, fiat ergo ut PV ad PZ ita gravitas puncti P ex attractione solidi nata & per aream curvæ inventa ad residuum ejus gravitatis demptâ vi Centrifugâ.



Tandem inscripta intelligatur in curva quæ quæritur, alia curva ipsi omninò similis ita ut earum sit idem centrum, & axes supra se mutuò jaceant, Æquatoris prioris curvæ semi-Diameter dicatur m, & differentia ejus à semi-Diametro alterius, quæ quamminima assumi potest, dicatur dm, abscissa CQ prioris curvæ sit z, erit ejus differentia ab abscissâ correspondenti alterius curvæ $\frac{z\,dm}{m} = Q\,u = \Gamma\,p$; ordinata PQ sit y ejus differentia ab ordinatâ correspondenti erit $\frac{y\,dm}{m} = P\,p$; quoniam $\Gamma\,t$ potest sumi ut portio tangentis curvæ, triangulum $\Gamma\,p\,t$ erit simile Triangulo fluxionali in puncto Γ sive etiam in Puncto P ob similitudinem curvarum & abscissarum erit ergo: $dz : dy = \Gamma\,P \left(\frac{z\,dm}{m}\right) : p\,t = \frac{z\,dy}{dz} \times \frac{dm}{m}$ ergo $P\,t = P\,p + p\,t = y + \frac{z\,dy}{dz} \times \frac{dm}{m}$ sed si ducatur $P\,\varrho$ perpendicularis ad curvam in P erit etiam Triang. $P\,\varrho\,t$ simile Triang. $\Gamma\,p\,t$ ideoque Triang. fluxionali; nam ob similitudinem curvarum, tangens $\Gamma\,t$ est parallela curvæ in P, ideóque angulus ϱ est rectus, est ergo dv ad dz ut $P\,t$ sive $y + \frac{z\,dy}{dz} \times \frac{dm}{m}$ ad $P\,\varrho$ quod erit ergo $\frac{y\,dz + z\,dy}{dv} \times \frac{dm}{m}$ sive deletâ ratione $\frac{dm}{m}$ quæ data est, perpendiculi portio inter dûas curvas similes intercepti erit ut $\frac{y\,dz + z\,dy}{dv}$, multiplicetur id perpendiculum per $y\,dv$, factum erit ut annulus solidus inter curvas interceptus tandem ergo multiplicetur $y^2\,dz + z\,y\,dy$ per valorem gravitatis acceleratricis secundum FZ quæ prius inventa fuit, factum erit ut Pondus fluidi inter curvas similes intercepti in puncto P, sumantur ejus facti fluxiones facta dz constanti, & nihilo æquentur illæ fluxiones, sic pondera omnium partium inter duas curvas contentarum fient æqualia, & habebitur æquatio fluxionalis curvæ quam Meridianus terræ affectat.



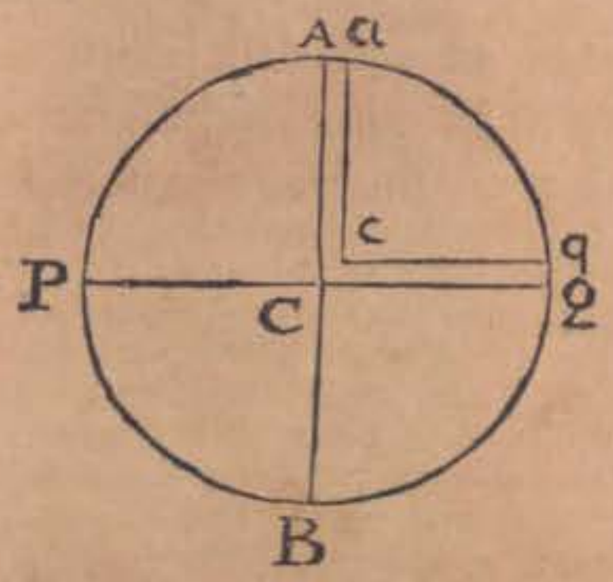
Alia etiam est in hoc Problemate conditio quæ brevius æquationem suppeditare posset, nem-

LIBER TERTIUS. PROP. XX. PROB. IV.

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

Invenire & inter se comparare pondera corporum in terræ hujus regionibus diversis.

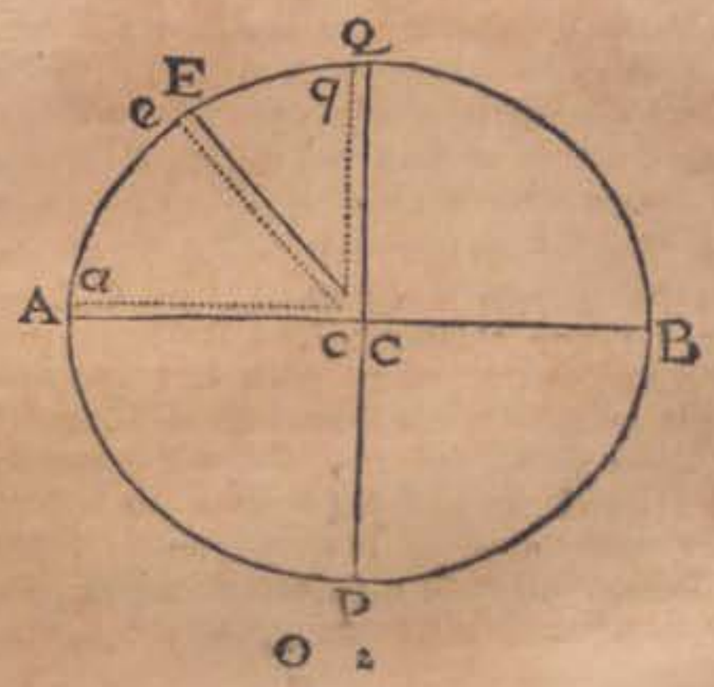
(a) Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ



ACQqca æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem

nempe (fig. præced.) cum sit P Q ad Z V ut Z Y ad Y Q, & Z V sit ubique ut vis centrifuga puncti P quæ est semper proportionalis ordinatæ P Q, ratio Z Y ad Y Q constans esse debet. Bene ergo res se habet si utroque modo eadem obtineatur curva, sin minus, oportet ut inter has hypotheses aliqua sit repugnantia, nempe dari solidum, uniformiter densum, rotans circa axim & in æquilibrio constitutum, in quo media actio inter gravitatem & vim Centrifugam sit perpendicularis ad curvam; Quæ quidem dicta non putentur ut præripiam palmam & laudem illi qui majori patientiâ aut industriâ, determinabit generalissimè Meridiani figuram ex genuinis Newtonianis principiis, nullâ præsuppositâ ad circulum, Ellipsim, aliamve curvam affinitate, sive his calculis ipsis felicius tractatis sive aliis. 90.

(a) * *Quoniam pondera.* Concipiatur (ut suprà prop. 19.) canalis aquæ plena a polo Q q ad centrum C c & inde ad æquatorem A a pergens. Quia oportet fluidum quiescere (ex hyp.) erit fluidum in canalis crure A C in æquilibrio cum fluido in ejusdem canalis crure Q C, & portio quælibet fluidi in crure C A consistet in æquilibrio cum simili & similiter posità fluidi portione in crure C Q (ex demonstratis (in prop. præc.) idem quoque simili argumento colligitur de corporibus quibusvis homogeneis etiamsi fluida non sint. Quare corpora homogenea quæ



O 2 sunt

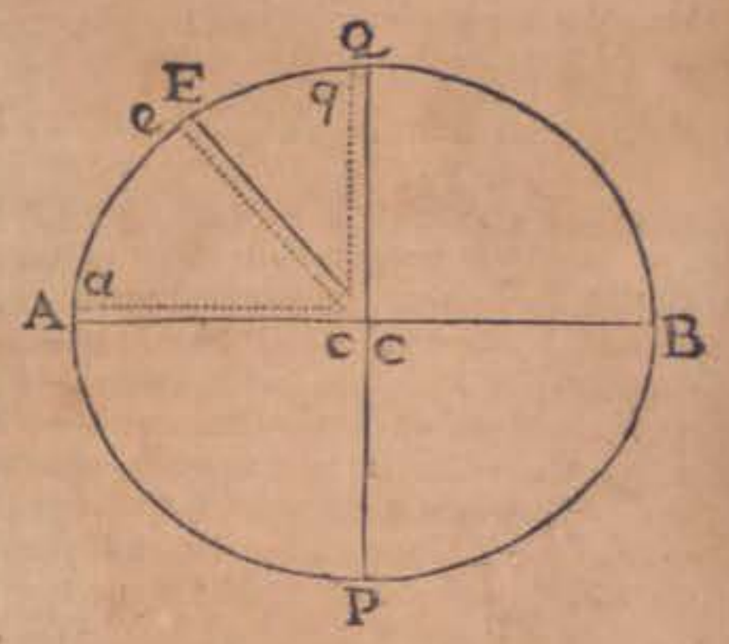
DE MUNDI SYSTEMATE.

ut pondera totorum, ideóque etiam æquantur inter ſe; erunt pondera æqualium & in cruribus ſimiliter ſitarum partium reciprocè ut crura, id eſt, reciprocè ut 230 ad 229. Et par eſt ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus ſimiliter ſitorum corporum. Horum pondera ſunt reciprocè ut crura, id eſt, reciprocè ut diſtantiæ corporum à centro terræ. Proindè ſi corpora in ſupremis canalium partibus, ſive in ſuperficie terræ conſiſtant; erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut diſtantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuſcunque per totam terræ ſuperficiem regionibus, ſunt reciprocè ut diſtantiæ locorum à centro: & (b) propterea, ex hypotheſi quod terra ſphærois ſit, dantur proportione.

Unrùm ob figuram terræ prope ſphæricam id ſubtilius ſectari videtur ſuperfluum, tanto magis quod calculorum conſequentiæ, cum experimentis ſint conferendæ in quibus ſemper deficiet Mathematica *ἀκρίβεια*.

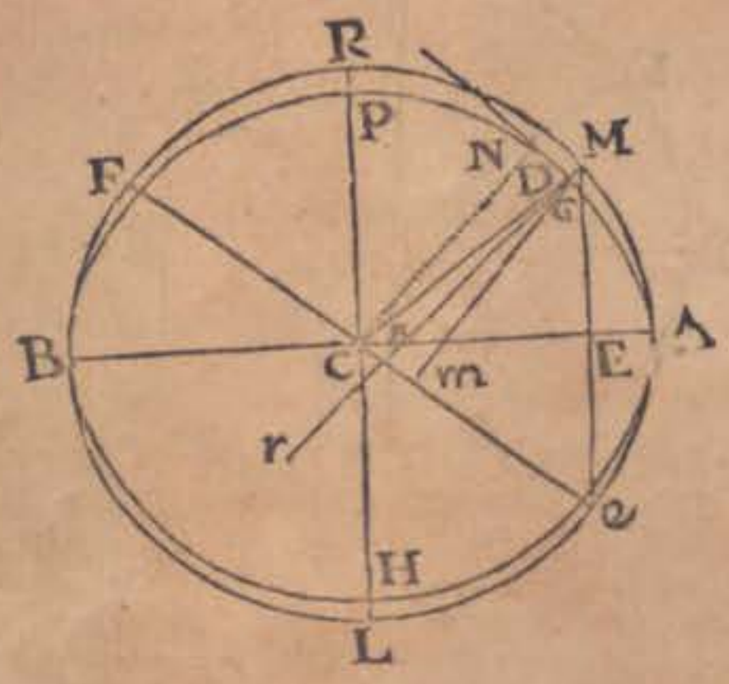
91. (b) * *Et propterea.* Ex hypotheſi enim quod terra ſit ſphærois qualem vult Newtonus, hoc conſit theorema; quod ſcilicet *incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos ſit quamproximè ut ſinus verſus latitudinis duplicatæ, vel quod perindè eſt, ut quadratum ſinûs recti latitu-*

90. ſunt ut A C, Q C in locis A & Q conſtituta æquè gravia ſunt verſùs centrum C. Sed gravitas corporis in A poſiti quod eſt ut Q C eſt ad gravitatem alteriùs corporis homogenei ibidem conſtituti quod eſt ut A C ſicut Q C ad A C. Sunt enim corporum homogeneorum in eodem loco conſiſtentium pondera ut ipſamet corpora, ergò corporum homogeneorum in A & Q poſitorum gravitates ſunt ut Q C ad A C. Eodem modo oſtendetur gravitatem corporis in loco E, in altera quâcumque canali C E, eſſe ad gravitatem corporis æqualis & homogenei in loco Q, ut C Q ad C E; fluidum enim in canali A C E quieſcere debet ſicut in priori canali A C Q (per hyp.) undè, ex æquo, æqualium & homogeneorum corporum) in telluris ſuperficie ubivis conſiſtentium gravitates abſolutæ ſunt ut diſtantiæ à centro reciprocè.



* Gravitatem corporis in E eſſe ad gravitatem corporis in Q ut C Q ad C E verum eſt non Mathematicè, ſed quam proximè; directio enim gravitatis corporis poſiti in E non eſt ſecundùm E C, ita ut ad centrum C tendat, ſed eſt perpendicularis ſuperficiei Q T A (ut ex facto liquet) hinc gravitates in ſingulis punctis forent reciprocè ut radii oſculatrices curvæ, ve-

Unde tale confit theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos, ſit quam proximè ut ſinus verſus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde eſt, ut quadratum ſinus recti latitudinis. Et (c) in eâdem circiter ratione augen-



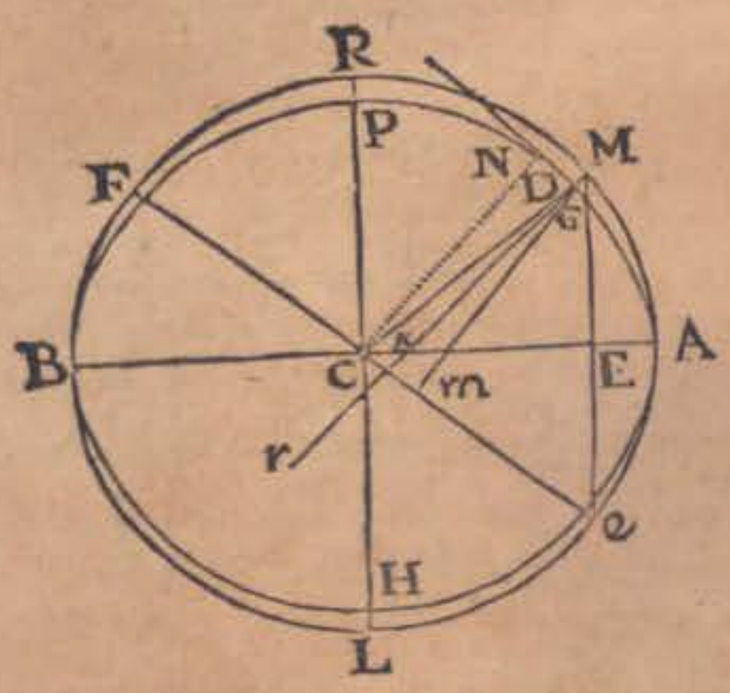
latitudinis. Sit enim APBA, ellipſis quæ referat meridianum terræ & ARBLA, circulus radio CA, deſcriptus ad quem Ellipſis APBA proximè accedit, ſitque radius CA ſemidiameter æquatoris terreſtris, erit (ex naturâ ellipſis 247 lib. 1.) $RP:MG=CR:EM$, ideóque $MG=\frac{RP\times EM}{CR}$. Sed propter triangula DMG, EMC, ſimilia, ubi ellipſis ad circulum proximè accedit (tunc enim DG, ſumi poteſt pro rectâ tangente Ellipſim in puncto D, & ea tangens eſt quam proximè perpendicularis radio DC) eſt $MG:MD=MC:ME$ ac proindè $MG=\frac{MD\times MC}{ME}$, erit ergò $\frac{RP\times ME}{CR}=\frac{MD\times MC}{ME}$, undè ſit $MD=\frac{RP\times ME^2}{CR^2}$. Jam verò ex puncto M, ducatur perpendicularis Mm ad rectam Fe, erit em ſinus verſus arcûs duplicati AM, hoc eſt, arcûs Me, ſivè quia AM exhibet latitudinem (10) erit em, ſinus verſus latitudinis duplicatæ; ſed eſt $em\times eF=M^2$ (ex proprietate circuli) Quarè ob datam eF, eſt em ut eM^2, vel etiam ut ME^2 ideóque MD, eſt ut $\frac{RP\times em}{CR^2}$, vel ob datas $\frac{RP}{CR^2}$, fit MD, ut em, ſivè ut ME^2. Quia verò pondera in locis A & D ſunt ut diſtantiæ locorum à centro reciprocè (ex dem.) erit incrementum ponderis in D, ut $\frac{1}{CD}-\frac{1}{CA}$, hoc eſt, ut CA−CD, vel ut CM−CD ideóque ut MD. Quarè *incrementum ponderis* &c.

(c) 92. * *Et in eâdem circiter ratione.* Minimus arcus circuli curvam aliquam in dato puncto oſculantis pro arcu infinitesimo curvæ in hoc puncto uſurpari poteſt (121. lib 1.). Sed integri gradus ſunt ut minimi arcus ſimiles, arcus autem illi ſunt ut radii circulorum curvam oſculantium; quarè gradus integri erunt ut iidem radii. Erit itaque gradus in loco D, ut radius circuli ellipſim ibidem oſculantis, & gradus in loco A, itidem ut radius circuli ellipſim oſculantis in eodem puncto A. Jam verò ductâ perpendiculari CN, ad tangentem DN, ſumptoque Dr, pro radio oſculatore in D, erit Dr ut Dk^3, ſive quia eſt $CP^2=CN\times DK$ (ibid.) ob datam CP^2 erit Dk ut $\frac{1}{CN}$, ideóque radius circuli qui eſt ut Dk^3, erit ut $\frac{1}{CN^3}$, hoc eſt, radius circuli ellipſim oſculantis eſt

DE MUNDI SYSTEMATE.

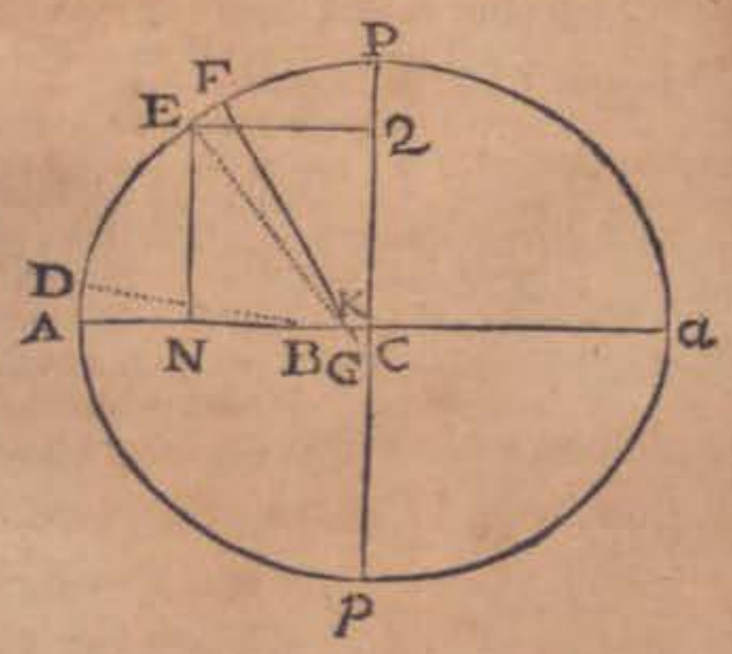
augentur arcus graduum latitudinis in meridiano. Ideóque cum latitudo *Lutetiæ Parisiorum* sit 48gr. 50′, ea locorum sub æquatore 00 gr. 00′, & ea locorum ad polos 90 gr. & duplorum

torc



reciprocè ut cubus perpendiculi ex centro C in tangentem D N demissi. Quarè incrementa graduum in D, pergendo ab æquatore ad polos erunt ut $\frac{1}{CN^3} - \frac{1}{CA^3}$ hoc est, ut $CA^3 - CN^3$, sive ut $CM^3 - CN^3$, vel etiam ut $CM^3 - CD^3$ quoniam differentia rectarum CN, CD admodùm exigua est. Sed est $CM^3 = (CD + DM)^3 = CD^3 + 3CD^2 \times DM + DM^2 \times CD + DM^3$, ideóque $CM^3 - CD^3 = 3CD^2 \times DM + 3DM^2 \times CD + DM^3 = 3CD^2 \times DM$, ob quantitates DM^2, DM^3, fere evanescentes respectu $3CD^2 \times DM$, sint igitur incrementa graduum ut $3CD^2 \times DM$, sive ut DM, ob rectam CD proximè constantem. Quarè incrementa graduum sunt ut pondorum incrementa.

93. Idem analyticè præstari potest quemadmodum elegantissime, pro more suo, fecit Clariss. D. D. Maupertuis in monumentis Paris. an. 1734. & in libro de figurâ terræ. Semiellipsis P A p, referat meridianum sphæroidis cujus est axis P p, diameter verò secundum æquatorem A a. Ponatur $CA = 1$, $CP = m$, $CN = x$, $EN = y$ erit (ex naturâ ellipseos per lem.



4. de Conicis) $EN^2 : CP^2 = AN \times Na : AC^2$, ideóque $y^2 = m^2 \times (1 - xx)$ & $y = m\sqrt{1 - xx}$. Sit CE, radius circuli ellipsim osculantis in E, is erit (214. lib. 1.) $= \frac{1}{m}(1 - xx + mmxx)^{\frac{3}{2}}$. Quia verò $EK^3 = \frac{EG \times PC^4}{AC^2}$ (239. lib. 1.) erit $EK = m\sqrt{1 - x^2 + m^2x^2}$. Jam sinus anguli latitudinis AKE, dicatur s, posito sino toto $= 1$, erit $1 : s = m\sqrt{1 - x^2 + m^2x^2} : m\sqrt{1 - xx}$, ac proindè $xx = \frac{1 - ss}{1 - ss + mmss}$ quo valore substituto, loco xx in expressione radii osculatoris, fiet $EG = \left(\frac{mm}{1 - ss + mmss}\right)^{\frac{3}{2}}$. Nunc conferantur simul duo gradus meridiani AD, EF, quorum unus incipiat ab æquatore, alter

verè

sinus versi sint 1134, 00000 & 20000, existente radio 10000, & gravitas ad polum sit ad gravitatem sub æquatore ut 230 ad 229. & excessus gravitatis ad polum ad gravitatem sub æsinus

verò sumatur ubivis in arcu A P, sumpto A B, pro radio circuli ellipsim osculantis in A, erit (92) A D : E F = A B : E G, sed est $AB = \frac{PC^2}{AC}$ (241. lib. 1.) $= mm$, quarè si gradus A D dicatur A & gradus E F, dicatur E fiet $A:E = mm : \frac{mm}{(1-ss+mmss)^{\frac{3}{2}}}$ ac proindè $E = A \times (1 - ss + mmss)^{-\frac{3}{2}}$. Hæc formula exprimit relationem inter primum gradum latitudinis & alium quemlibet gradum, atque inter diametrum & axem.

94. Si quantitas $1 + mm - ss$, evehatur ad dignitatem cujus exponens est $-\frac{3}{2}$ (550. lib. 1.) erit $E = A \times (1 - \frac{3}{2}(mm-1)ss + \frac{15}{8} \times (mm-1)s^2 - \&c.)$ vel $A - E = \frac{3}{2}(mm-1)AS^2 - \frac{15}{8}(mm-1)^2 AS^4 + \&c$. Quia verò sphærois terræ ad sphæram proximè accedit, erit fere $m = 1$, ideóque in superiori formulâ negligi poterunt termini in quibus quantitas $mm-1$, ad altiorem potestatem evecta occurrit, undè fit pro tellure $2A - 2E = 3(mm-1) \times ASS$. Si terra ponatur versùs polos compressa erit $1 > m$ & $E > A$, hincque prodit $E - A : ASS = 3 \times (1 - mm) : 2$. Quarè iterum patet id quod jam demonstravimus (92) arcus scilicet gradum latitudinis in meridiano augeri in duplicatâ ratione sinûs recti latitudinis.

95. Si gradus A D, non computetur ab ipso æquatore, sed ubivis inter A & E sumatur, sitque S sinus anguli latitudinis, patet (94) fore $BD = \frac{mm}{(1-SS+mmSS)^{\frac{3}{2}}}$ ideóque $A : E = \frac{mm}{(1-SS+mmSS)^{\frac{3}{2}}} : \frac{mm}{(1-ss+mmss)^{\frac{3}{2}}}$, ac proindè $E \times (1-ss+mmss)^{\frac{3}{2}} = A \times (1-SS+mmSS)^{\frac{3}{2}}$. 96. Jam verò evectis terminis ut suprà ad dignitatem cujus exponens $\frac{3}{2}$, neglectisque quantitatibus evanescentibus (95), fiet $1 - mm = \frac{2(E-A)}{3E \times (ss-SS)}$.

Si gradus unus ab æquatore, alter à polo numeretur, erit $s = 1$, & $S = 0$, ideóque formula præcedens abit in hanc $1 - mm = \frac{2(E-A)}{3E}$.

96. Si loco semidiametrorum C A, C P, & sinus latitudinis ss, in æquatione $xx = \frac{1-ss}{1-ss+mmss}$, (93) substituantur expressiones quælibet indeterminatæ, æquatio præcedens quatuor continebit variabiles, quarum tribus cognitis quarta innotescet. Quare datis semidiametro æquatoris C A, semidiametro paralleli N C vel E Q, x, aut quod idem est, datis gradu æquatoris & gradu paralleli (sunt enim gradus illi ut ipsimet circuli, ideóque ut radii) & simul cognitâ latitudine, cujus sinus s, dabitur axis ellipsoidis. Simili prorsus modo ductâ quâlibet aliâ ordinatâ E Q, quæ sit alterius paralleli Semidiameter & mutatâ utcunque latitudine, institui poterit alia æquatio quatuor variabiles continens ac proindè duplex obtinebitur æquatio. Jam verò quia hæc utraque æquatio duas continet indeterminatas communes, nempè semidiametros ellipsis, patet datis duorum parallelorum gradibus, datisque latitudinibus, per vulgares algebræ regulas collatâ simul utrâque æquatione, determinari posse semidiametrorum rationem. Cæterum hæc omnia constructionibus geometricis facilè absolvi possunt, verùm in præsenti materiâ præstat calculum adhibere.

DE MUNDI SYSTEMATE.

quatore ut 1 ad 229: (d) erit exceſſus gravitatis in latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem ſub æquatore, ut $1\frac{1134}{20000}$ ad 229, ſeu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. (e) Quare cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oſcillantium ſint ut gravitates, & in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* longitudo penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis ſit pedum trium Pariſienſium & linearum $8\frac{1}{2}$, vel potius (f) ob pondus aëris $8\frac{1}{9}$: longitudo penduli ſub æquatore ſuperabitur à longitudine ſynchroni penduli Pariſienſis, (g) exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ. Et ſimili computo conſit tabula ſequens.

§ 6.

(d) * *Erit exceſſus gravitatis.* Exceſſus gravitatis ad polum dicatur E, exceſſus gravitatis in latitudine Lutetiæ dicatur e, ſitque G, gravitas ſub æquatore, erit,

$E : G = 1 : 229$

$e : E = 11334 : 20000$, ideóque per compoſitionem rationum & ex æquo

$e : G = 1 \times 11334 : 229 \times 20000 = \frac{1 \times 11334}{20000} : 229$, hoc eſt, exceſſus gravitatis in latitudine Lutetiæ eſt ad gravitatem ſub æquatore $= \frac{1 \times 11334}{20000} : 229 = 5667 : 2290000$, & propterea addendo 5667 numero 2290000, gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000.

(e) * *Quarè cum longitudines pendulorum.* (Cor. 4. Prop. 24. Lib. 2.).

(f) * *Ob pondus aeris.* Corpus oſcillans in aere ponderis ſui partem amittit æqualem ponderis paris voluminis aeris, quare ſi idem corpus ponatur moveri in vacuo, paululum augeri debet illius pondus ideoque celeriùs vibrabit & ut ad iſochroneitatem reducatur augeri debebit longitudo penduli eâdem ratione quâ augetur gravitas hinc cum $\frac{1}{11000}$ parte plumbi pondus in vacuo augeatur tantumdem augeri debet penduli longitudo quæ erit ergo ad $440\frac{1}{2}$ l. ut 11001 ad 11000 invenieturque $440\frac{5}{9}$ (289. lib. 2.). Hinc in latitudine Lutetiæ Pariſiorum longitudo penduli ad minuta ſecunda oſcillantis in vacuo hic ponitur pedum trium Pariſ. & lin. $8\frac{5}{9}$ proximè.

(g) * *Exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum.* Cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oſcillantium ſint ut gravitates, erit 2295667 ad 2290000 ut longitudo penduli in latitudine Lutetiæ, hoc eſt, ut 3 ped. $8\frac{5}{9}$ lin. vel ut $\frac{3965}{9}$ lin. ad quartum proportionalem $\frac{20798500}{2066100}$ $= 439.468$, qui eſt penduli longitudo ſub æquatore. Hâc autem demptâ ex longitudine penduli in latitudine Lutetiæ ped. 3. & $8\frac{5}{9}$ lin., ſeu lin. 440.555, remanet exceſſus lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ.

Lati-

Latitudo loci.	*Longitudo penduli.*		*Mensura gradus unius in meridiano.*
grad.	*ped.*	*lin.*	*hexapedæ.*
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
1	3	8,294	56958
2	3	8,327	56971
3	3	8,361	56984
4	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
6	3	8,461	57022
7	3	8,494	57035
8	3	8,528	57048
9	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9 044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	59382

Constat autem per hanc tabulam quod graduum inæqualitas tam parva sit, ut in rebus geographicis figura terræ pro sphæ-

DE MUNDI SYSTEMATE.

rica haberi possit: (h) præsertim si terra paulo densior sit versus planum æquatoris quam versus polos.

Jam vero astronomi aliqui in longinquas regiones ad observationes astronomicas faciendas missi, observarunt quod horologia oscillatoria tardius moverentur prope æquatorem quam in regionibus nostris. Et primo quidem D. *Richer* hoc observavit anno 1672. in insulâ *Cayennæ*. Nam dum observaret transitum fixarum per meridianum mense *Augusto*, reperit horologium suum tardius moveri quam pro medio motu solis, existente differentiâ 2′. 28″ singulis diebus. Deinde faciendo ut pendulum simplex ad minuta singula secunda per horologium optimum mensurata oscillaret, notavit longitudinem penduli simplicis, & hoc fecit sæpius singulis septimanis per menses decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus penduli cum longitudine penduli Parisiensis (quæ erat trium pedum Parisiensium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem esse, existente differentiâ lineæ unius cum quadrante.

Postea *Halleius* noster circa annum 1677 ad insulam *Sanctæ Helenæ* navigans, reperit horologium suum oscillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, sed differentiam non notavit. Pendulum verò brevius reddidit plusquam octavâ parte digiti, seu lineâ unâ cum semisse. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in imâ parte penduli non sufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interposuit.

Deinde anno 1682. D. *Varin* & D. *Des Hayes* invenerunt longitudinem penduli singulis minutis secundis oscillantis in observatorio regio Parisiensi esse ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in insulâ *Goreâ* eâdem methodo longitudinem penduli synchroni invenerunt esse ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, existente longitudinum differentiâ lin. 2. Et eodem anno ad insulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem penduli synchroni in his insulis esse ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Posthac

(h) * *Præsertim si terra.* In eo siquidem casu minui diametrorum differentiam ostendimus (in prop. præc.).

Posthac D. *Couplet* filius anno 1697 mense *Julio*, horologium suum oscillatorium ad motum solis medium in observatorio regio Parisiensi sic aptavit, ut tempore satis longo horologium cum motu solis congrueret. Deinde *Ulyssipponem* navigans invenit quod mense *Novembri* proximo horologium tardius iret quàm prius, existente differentiâ $2'.\ 13''$ in horis 24. Et mense *Martio* sequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium suum tardiùs ire quam *Parisiis*, existente differentiâ $4'.\ 12''$ in horis 24. Et affirmat pendulum ad minuta secunda oscillans brevius fuisse *Ulyssiponi* lineis $2\frac{1}{2}$ & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quam *Parisiis*. (i) Rectius posuisset differentias esse $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum $2'.\ 13''$, & $4'.\ 12''$ respondent. Crassioribus hujus observationibus minus fidendum est.

Annis proximis (1699 & 1700) D. *Des Hayes* ad *Americam* denuò navigans determinavit quod in insulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo penduli ad minuta secunda oscillantis, esset paulo minor quam ped. 3. lin $6\frac{1}{2}$, quodque in insula *S. Christophori* longitudo illa esset ped. 3. lin. $6\frac{3}{4}$, & quod in insula *S. Dominici* eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuilleus* invenit in *Porto-belo* in *Americâ* longitudinem penduli ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium Parisiensium & linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id est, tribus ferè

(i) * *Rectius posuisset.* Horologium tardiùs ibat Ulyssiponi quam Parisiis, existente differentiâ $2'\ 13''$, seu $133''$, ideóque horologium illud Parisiis conficiens 24. hor. spatio $86400''$, Ulyssiponi conficiebat tantum $86400'' - 133''$, hoc est, $86267''$. Sed est longitudo penduli Parisiis ad minuta secunda oscillantis lin. $\frac{3965}{9}$. Quarè si longitudo penduli ad minuta secunda Ulyssipone oscillantis dicatur L, erit (cor. 4 prop. 24. lib. 2.) $(86400)^2 : (86267)^2 = \frac{3965}{9} : L$, seu $67184640000 : 2950749131 2885 = 3965 : L$ ac proindè $L = \frac{2950749131 2885}{67184640000} = 439\frac{1343435 2885}{67184640000} = 439\frac{5}{6}$ lin. circiter. Est autem longitudo penduli Parisiis ad minuta secunda oscillantis lin. $\frac{3965}{9}$ seu 440.555, vel $440\frac{1}{2}$, quarè differentia pendulorum Parisiis & Ulyssipone ad minuta secunda oscillantium debet esse $440\frac{1}{2} - 439\frac{1}{6} = 1\frac{1}{3}$. Rectius itaque posuisset D. Couplet differentiam esse $1\frac{1}{3}$. Simili computo patet differentiam pendulorum Parisiis & Paraibæ esse $2\frac{5}{9}$. 96.

DE MUNDI SYSTEMATE.

rè lineis breviorem quàm *Lutetiæ Parisiorum*, sed (k) errante observatione. Nam deinde ad insulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem penduli isochroni esse pedum tantum trium Parisiensium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* est 6gr. 38′ ad austrum, & ea *Porto-beli* 9gr. 33′ ad boream, & latitudines insularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *Sancti Christophori*, & *Sancti Dominici* sunt respectivè 4gr. 55′, 14gr. 40′, 14gr. 00′, 14gr. 44′, 12gr. 6′, 17gr. 19′, & 19gr. 48′ ad boream. Et excessus longitudinis penduli Parisiensis supra longitudines pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas sunt paulò majores quam pro tabulâ longitudinum penduli superius computatâ. Et propterea (l) terra aliquanto altior est sub æquatore quam pro superiore calculo, & densior ad centrum quam in fodinis prope superficiem, nisi forte calores in zonâ torridâ longitudinem pendulorum aliquantulum auxerint.

Ob-

(k) * *Sed errante observatione.* Latitudo Portobeli est 9°. 33′ ad boream, & latitudo Martinicæ est 14°. 44′. Hinc differentia latitudinum est 5°. 11′. Est autem latitudo Lutetiæ 48°. 50′, quare differentia latitudinum Lutetiæ & Portobeli est 39°. 17′. Sed præterquam quod observationes Feuillæi à tabulâ Newtonianâ maximè discrepant, secum invicem non satis consentire videntur. Cum enim differentia latitudinum 39°. 17′, ex iisdem observationibus, præbuerit longitudinem penduli minorem Portobeli quam Parisiis tribus fere lineis, differentia latitudinum Martinicæ & Portobeli quæ est 5°. 11′ majorem in hisce latitudinibus præbere debuisset penduli differentiam quam $\frac{3}{12}$ lin. qualem invenit Feuillæus. Hunc cæteroquin diligentissimum observatorem non satis hâc in re accuratum fuisse confirmant observationes an. 1735. Portobeli habitæ à Clariss. Viris DD Godin & Bouguer, quorum prior penduli longitudinem Portobeli invenit 36 poll. 7 lin. $\frac{7}{89}$, posterior verò eandem longitudinem summo consensu determinavit 36. poll. 7 lin. $\frac{7}{98}$.

9 6.

(l) 97. *Terra aliquantò altior est.* Materia ad centrum redundans quâ densitas ibi major fit, seorsim à reliquâ tellure uniformiter densâ spectetur, gravitas in terram uniformiter densam erit reciprocè ut distantia à centro (ex demonstratis in prop. 19.). Gravitas autem in materiam redundantem erit reciprocè ut quadratum distantiæ à materiâ illâ quam proximè (prop. 76. lib. 1.) cum igitur in casu terræ uniformiter densæ, illius superficies versùs æquatorem elevetur, versùs polum verò deprimatur, gravitasque ad æquatorem minor sit quam ad polum in ratione distantiæ poli à centro ad æquatoris semidiametrum, ad prædictam autem materiam redundantem circà centrum gravitas ad æquatorem minor sit quam ad polum in ratione duplicatâ distantiæ poli à centro ad æquatoris semidiametrum, quæ ratio priori ratione simplici minor est, patet in casu telluris versùs centrum densioris ex utrâque simul causâ fieri ut gravitas ad æquatorem ex binis prioribus composita minor sit gravitate ad polum in ratione minore quam est ratio distantiæ poli à

centro

Obſervavit utique D. *Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evaſit pedis unius cum quartâ parte lineæ. (m) Deinde D. *De la Hire* obſervavit quod virga ferrea quæ tempore conſimili hyberno ſex erat pedum longitudinis, ubi ſoli æſtivo exponebatur evaſit ſex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore caſu calor major fuit quam in poſteriore, in hoc verò major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad ſolem æſtivum valde incaleſcunt. At virga penduli in horologio oſcillatorio nunquam exponi ſolet calori ſolis æſtivi, nunquam calorem concipit calori externæ ſuperficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æſtivo quam hyberno, ſed exceſſu quartam partem lineæ unius vix ſuperante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diverſis regionibus iſochrona ſunt diverſo calori attribui non poteſt. Sed neque erroribus aſtronomorum è *Galliâ* miſſorum tribuenda eſt hæc differentia. Nam quamvis eorum obſervationes non perfectè congruant inter ſe, tamen errores ſunt adeo parvi ut contemni poſſint.

centro ad æquatoris ſemidiametrum, & ideò ob minorem hanc gravitatem in æquatore reſpectu gravitatis ad polos, tellus magis ad æquatorem elevabitur quam pro ſuperiori calculo, ac proinde longitudo pendulorum quæ gravitati acceleratrici proportionalis eſt (cor. 4. prop. 24. lib. 2.) paulò major eſſe debet quam pro tabulâ longitudinum computatâ in caſu terræ uniformiter denſæ.

(m) 9. * *Deindè D. Delahire.* Hiſce obſervationibus adjungi debent inſtituta à Clariſſ. Viro D. De Mairan experimenta quæ in monum. Pariſ. an. 1735. leguntur. Ut caloris Solaris vim exploraret, laminas ferri & cupri à loco clauſo ac temperato vel etiam frigeſcente, ad locum Solaribus radiis apertum transferebat, ibique plurium horarum ſpatio relinquebat. Deindè laminarum dilatationem circino accuratè capiebat, menſurato priùs caloris Solaris incremento ope thermometri Reaumuriani. Obſervavit ob majorem Solis calorem reſpectu loci clauſi in quo anteà ſuſpenſum erat thermometrum, ad 15 vel 20 gradus liquorem perveniſſe & ferri laminam 3. ped. $8\frac{1}{2}$ lin. longam dilatari invenit $\frac{1}{30}$ vel $\frac{1}{22}$ lin. cuprum flavi coloris majorem quam ferrum à radiis Solaribus patiebatur dilatationem. Experimentum quoquè tentavit in aquâ ebulliente; immerſit nempè in eâ cuprum flavi coloris & ferrum, eandem planè in utroque metallo dilatationem fieri obſervavit; cæterum lamina cuprea tres pedes 8. lin. $\frac{1}{2}$ longa, menſe Julio, aſcendente thermometro ad altitudinem 22. grad. ſuprà congelationem, ob aquæ ebullientis calorem dilatabatur $\frac{1}{3}$ lin. circiter.

98.

DE MUNDI SYSTEMATE.

poſſint. Et in hoc concordant omnes, quod iſochrona pendula ſunt breviora ſub æquatore quam in obſervatorio regio Pariſienſi, exiſtente differentiâ non minore quam lineæ unius cum quadrante, non majore quam linearum $2\frac{3}{5}$. Per obſervationes D. *Richeri* in *Cayenna* factas differentia fuit lineæ unius cum quadrante. Per eas D. *Des Hayes* differentia illa correcta prodiit lineæ unius cum ſemiſſe vel unius cum tribus quartis partibus lineæ. Per eas aliorum minus accuratas prodiit eâdem quaſi duarum linearum. Et hæc diſcrepantia partim ab erroribus obſervationum, (n) partim à diſſimilitudine partium internarum terræ & altitudine montium, & partim à diverſis aëris caloribus, oriri potuit.

Virga ferrea pedes tres longa, tempore hyberno in *Angliâ*, brevior eſt quam tempore æſtivo, ſextâ parte lineæ unius, quantum ſentio. Ob calores ſub æquatore auferatur hæc quantitas de differentiâ lineæ unius cum quadrante à *Richero* obſervatâ, & manebit linea $1\frac{1}{12}$: quæ cum linea $1\frac{87}{1000}$ per theoriam jam ante collecta probe congruit. *Richerus* autem obſervationes in *Cayennâ* factas, ſingulis ſeptimanis per menſes decem iteravit, & longitudines penduli in virgâ ferreâ ibi notatas cum longitudinibus ejus in *Gallia* ſimiliter notatis contulit. Quæ diligentia & cautela in aliis obſervatoribus defuiſſe videtur. Si hujus obſervationibus fidendum eſt, (o) terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu milliarium ſeptendecim circiter, ut ſupra per theoriam prodiit.

98. (n) * *Partim à diſſimilitudine.* Quæ de pendulorum longitudinibus dicta ſunt in hâc propoſitione, ſupponunt homogeneam eſſe telluris materiam; ſi verò homogenea non ſit ubique, ſed aliqua ſit in partibus internis terræ diſſimilitudo patet (96) hinc quaſdam oriri poſſe in pendulorum longitudinibus irregularitates. Similem ob cauſam, ex montium altitudine, vallium cavitate inæqualitates aliquæ naſci poterunt, pro exceſſu enim vel defectu materiæ augebitur vel minuetur gravitas. Obſervationum diſcrepantiam repeti etiam poſſe à diverſis aëris caloribus manifeſtum eſt ex obſervationibus Picardi, La Hirii & ex notâ præcedenti.

(o) * *Terra altior erit.* Si hujus obſervationibus fidendum eſt, longitudo penduli ſub æquatore ſuperabitur à longitudine penduli ſynchroni Pariſienſis exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ, ideóque longitudo penduli ſub æquatore erit 3. ped. 7. $\frac{4217}{9000}$ lin. ſeu 3. ped. 7. 468. lin. proximè, eſt enim longitudo pen-

penduli Pariſ. 3. ped. $8\frac{5}{9}$ lin. ſed eſt incrementum ponderis ſivè incrementum longitudinis penduli pergendo ab æquatore ad polos ut ſinus verſus latitudinis duplicatæ, ac proindè $\frac{1087}{1000}$ ſeu 1 lin. $\frac{87}{1000}$ erit ad incrementum longitudinis ſub polo ut 11334 ad 20000. Quare incrementum illud eſt $1\frac{10406}{11334}$, ſeu $1\frac{919}{1000}$ proximè. Erunt ergò pondera ſeu pendulorum longitudines ſub æquatore & ſub polo reſpective 3. ped. 7.468 lin. & 3. ped. 9.387 lin. hoc eſt proximè ut in tabulâ Newtonianâ. Sed pondera ſunt reciprocè ut diſtantiæ à centro (ex demonſtratis in Prop. 19.) ideóque 439468 eſt ad 441387 ut diameter versùs polos eſt ad diametrum ſecundum æquatorem, ſive ut 229 ad 230 proximè, ideóque poſitâ ſemidiametro terræ (ut in Prop. præced.) patet (per notas in eandem Prop.) terram aliorſum eſſe ad æquatorem quam ad polos exceſſu milliarium ſeptemdecim circiter.

99. Clariſſ. D. Campbell Londini in latitudine 51° $\frac{10}{2}$ & in Jamaicâ in latitudine 18°. accuratiſſimis obſervationibus inſtituris, invenit longitudinem penduli ſimplicis ad minuta ſecundæ Londini oſcillantis eſſe 39.129. poll. angl. idemque pendulum tardius ire in Jamaicâ quam Londini deprehendit, exiſtente differentiâ 2′ 58″ ſpatio 24. hor. Ex his obſervationibus, eodem quo hactenus uſi ſumus computo determinavit longitudinem penduli ſub æquatore eſſe ad longitudinem penduli ſub polis ut 39000 ad 39206, unde prodit diameter æquatoris ad diametrum versùs polos in ratione 39206 ad 39000 ſivè ut 190 ad 189 ferè; ideóque poſitâ ſemidiametro terræ ut in prop. præced. terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu milliarium 41 circiter. Doctiſſimi Viri DD. Godin, Bouguer, De la Condamine ſummâ diligentiâ in latitudine 15° 27′ obſervationes habuerunt quæ cum obſervationibus D. Campbell probè congruunt. In id quoque conſpirant obſervationes versùs polum inſtitutæ à Celeberrimo D. De Maupertuis Clariſſimiſque Sociis ut terram versùs æquatorem magis elatam conſtituant quam pro theoriâ Newtoni. Idem confirmat accurata graduum terreſtrium menſura. Longitudo gradus meridiani qui circulum polarem ſecat à D. De Maupertuis inventa eſt 57437,9 hexaped. & longitudinem gradûs in galliâ in 45°. 57100. hexaped. probabiliter aſſumi poſſe oſtendimus. Hinc gradûs utriuſque differentia eſt 337 hexaped. aut ad minimum 300 hex. ſed ex tabulâ Newtonianâ differentia inter 45 gr. & 65. eſt 230. hexapedarum, creſcunt itaque gradus latitudinis pergendo ab æquatore ad polos magis quam juxtà tabulam Newtonianam ac proindè non ſolum terra eſt elata ſub æquatore (94), ſed etiam diametrorum differentia ex obſervationibus major quam ex ipsâ theoriâ colligitur. Conſulatur obſervationum ſeries quam tranſactionibus Anglicanis an. 1734. inſeruit Autor verſionis gallicæ.

100. Scholium. Penduli longitudinem Romæ determinare pluribus experimentis tentavimus cum Doctiſſimis & in obſervando verſatiſſimis PP. Boſcovik & Maire S. J. Mathematicis. Uſi ſumus methodo illâ accuratiſſimâ quam ſagaciſſimus naturæ indagator ſummuſque Geometra D. De Mairan tradit in Monum. Acad. Reg. Pariſ. ad an. 1735., ubi experimenta recenſet quæ cum incredibili curâ adversùs omne errorum genus peregit. Paravimus itaquè horologium oſcillatorium à Celeber. Graham Londini conſtructum, nobiſque ab Illuſtriſſimo D. Leprotti humaniſſimè commodatum, quod per appulſum fixæ ad teleſcopium immotum ſingulis obſervationum diebus dirigebamus ut tempus Solis medium indicaret. In machinâ quâdam immotâ conſtituimus plana duo horizontalia, è quorum altero filum pendebat laminis metallicis aptè inter ſe congruentibus compreſſum cochlearum ope, alterum ità ſenſim elevabatur per cochleas ut horizontalem ſitum ſervaret, & globum è filo ſuſpenſum inferius contingeret. Diſtantiam puncti ſuſpenſionis à puncto illo infimo globi, quo planum horizontale ſubjectum contingebat, inveſtigabamus ope menſuræ Londinenſis bipedalis accuratiſſimæ, quam cum pluribus aliis conſentientem P. Abbas Revillas Clariſſ. Vir, publicus Profeſſ. Math. & Acad. Londic. Socius exhibuit nobis. Huic menſuræ inſerta eſt altera regula mobilis quam pro arbitrio educere ad altitudinem 4. pedum conficiendam. Hanc igitur inter punctum ſuſ-

99.

DE MUNDI SYSTEMATE.

100.

ſuſpenſionis & punctum globi infimum interponebamus perpendiculariter ad plana horizontalia, maxime que cavebamus ne in hâc menſurâ error aliqualis irreperet. Plura idcirco negleximus experimenta in quibus filum extendebatur obſervationis tempore, aliaque rejecimus facta cum filo ſerico vel cum globo eburneo qui nimiam in aëre reſiſtentiam patiebatur. Sex igitur tantum quæ nobis tutiſſima viſa ſunt deſcribemus, facta ſunt cum globo cupreo cujus quælibet ſemidiameter inventa eſt partium digiti Londinenſis milleſimarum 603, pondus verò unciarum $4\frac{3}{8}$ ſeu granorum 2520. Illum ſuſpendebamus è filo ex foliis aloës parato quod gallice dicitur: *fil de pite*, hujuſmodi filum $21\frac{1}{2}$ ped. Londin. longum, æquiponderabat granis 5, & propterea pondus fili 44 digit. erat ad pondus globi ut 1 ad 2955, pondus verò 35. digit. ad pondus ejuſdem globi ut 1 ad 3715. Hinc per ea quæ D. De Mairan loco citato demonſtravit, ſi diſtantia puncti ſuſpenſionis à centro globi ſit 44 digit. Lond. circiter, ex longitudine obſervatâ ſeu interceptâ inter punctum ſuſpenſionis & punctum infimum globi ſubtrahenda erit longitudo 0,6023 digit. ut habeatur vera longitudo penduli ſimplicis pendulo obſervationis iſochroni. Si verò diſtantia puncti ſuſpenſionis à centro globi ſit 35 digit. circiter, auferenda erit longitudo 0,6004 digit.

1. Experimentum 13ª. Julii manè.	
Longitudo obſervata	45.145 dig. Lond.
Longit. ſubtrahenda.	0.6023
Longitudo vera	44.5427.

Numeravimus oſcillationes globi 3261 eo tempore quo horologium oſcillatorium 3479 abſolvit, hoc eſt, interuallo 3480.69 ſecundorum temporis medii Horologium enim tardius movebatur quam pro medio motu Solis & differentia erat $\frac{42}{24}$ ſecundorum pro horis 24. eſt igitur 3480.69^2 ad 3261^2 ut 44.5427 ad 39.09736 digit. Lond. quæ eſt longitudo penduli ſimplicis ad ſingula minuta temporis medii oſcillantis.

2. Experimentum eâdem die veſpere. Longitudo obſervata 45. 18. digit. Lond. longitudo vera 44.5777. Numerus oſcillationum globi 13387 tempore medio 3616.75. ſecund. undè habetur longitudo penduli ſimplicis ad ſinguia minuta ſecunda oſcillantis 39.0941 digit. Lond.

3. Experimentum 14ª. Julii. Longitudo obſervata 36.26. longitudo vera 35.6596 digit. Lond. numerus oſcillationum globi 3740 tempore medio 3571.75 ſecund. longitudo penduli quæſita 39.09827. digit. Lond.

4. Experimentum 16ª. Julii. Longitudo obſervata 36 97. longitudo vera 36.3696. numerus oſcillationum globi 3832 tempore medio 3695.88 ſecund. longitudo penduli quæſita 39.09703 digit. Lond.

5. Experimentum 19ª. Julii. Longitudo obſervata 35.185. longitudo vera 34.5846. digit. numerus oſcillationum globi 3870 tempore medio 3639.85. ſecund. penduli quæſita 39.096485.

6. Experimentum 5ª. Auguſti. Longitudo obſervata 45. 427. longitudo vera 44.8247 digit Lond. numerus oſcillationum globi 3563 tempore medio 3815.03 ſecund. longitudo quæſita 39.097872.

Ex his omnibus experimentis invenitur media longitudo penduli 39.09686 digit. Lond. verum ſi rejiciatur ſecundum experimentum quod ab aliis quinque inter ſe probè conſentientibus nimis diſſert; media longitudo prodit 39.0974 digit. Lond. Hoc autem experimentum ſecundum rejici debere inde etiam concludimus quod ſextum maximè accuratum nobis viſum ſit, nam omninò invariata fuit fili longitudo toto obſervationis tempore & omnes concurſus diligentiſſimè notati inter ſe congruebant.

Pes Londinenſis vulgò ſupponitur eſſe ad ped. Pariſ. ut 135 ad 144 vel etiam ut 1000 ad 1068, quâ ratione cum primum uſi eſſemus, longè minorem, quam par eſt, penduli longitudinem inveniebamus. Sed ratio illa in re adeò ſubtili ſatis accurata non eſt. Nam D. Godin. monum. Acad. Reg. Scientiarum ad an. 1735 pag. 508, ſcribit ſe cum D. Bouguer obſervaſſe pedem Lond. ſe habere ad ped. Pariſ. ut $1351\frac{1}{3}$ ad 1440. ſi hanc adhibeamus rationem, longitudo penduli Romæ erit 3. ped. Pariſ. 8. lin. $\frac{28}{100}$. Tandem ſi ratio illa ſit numeri 1351 ad 1440 ut quibuſdam Mathematicis menſurarum peritiſſimis videtur, major prodit penduli longitudo nimirum ped. Pariſ. 3. lin. 8. 3888.

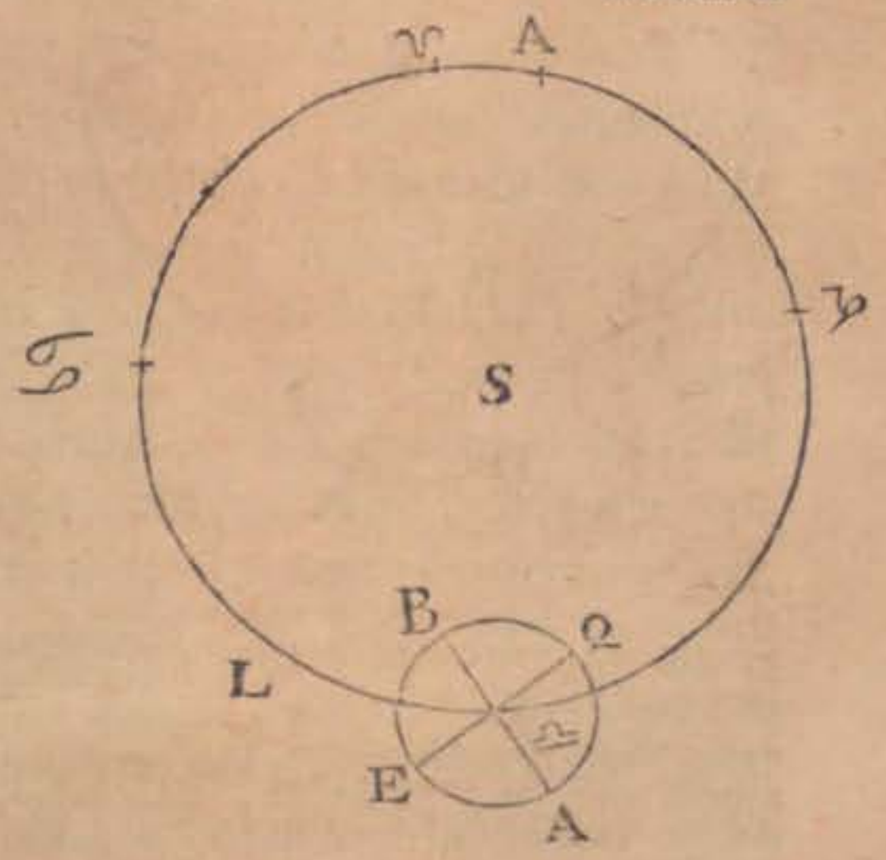
Hæc

LIBER TERTIUS. PROP. XXI. THEOR. XVIII.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

(P) *Puncta æquinoctialia regredi, & axem terræ ſingulis revolutionibus annuis nutando bis* (9) *inclinari in eclipticam & bis redire ad poſitionem priorem.*

Patet per corol. 20 prop. LXVI. lib. 1. Motus tamen iſte nutandi



num productum, per ſolem priùs tranſibit quam telluris centrum ad ♎ pervenerit, ſed tunc contingit æquinoctium dum nempè ſol in plano æquatoris terreſtris verſatur (4) illaque puncta pro æquinoctialibus habentur in quibus ſol videtur tempore æquinoctiorum. Quarè patet, ſtellis fixis quieſcentibus, puncta æquinoctialia omniaque Ecliptiæ puncta quæ à punctis æquinoctialibus numerantur regredi ſeu in antecedentia moveri. Hic punctorum æquinoctialium regreſſus pendet ab actione Solis in materiam ad partes æquatoris redundantem, ſed & Lunæ etiam non leves vires eſſe poſſunt; cum enim Luna in Ecliptiæ plano aut non procul ab eo jaceat, ad eundem cum Sole effectum concurret. Sed infrà computabitur motus æquinoctiorum ab utrâque vi, Solis ſcilicet & Lunæ oriundus. 101.

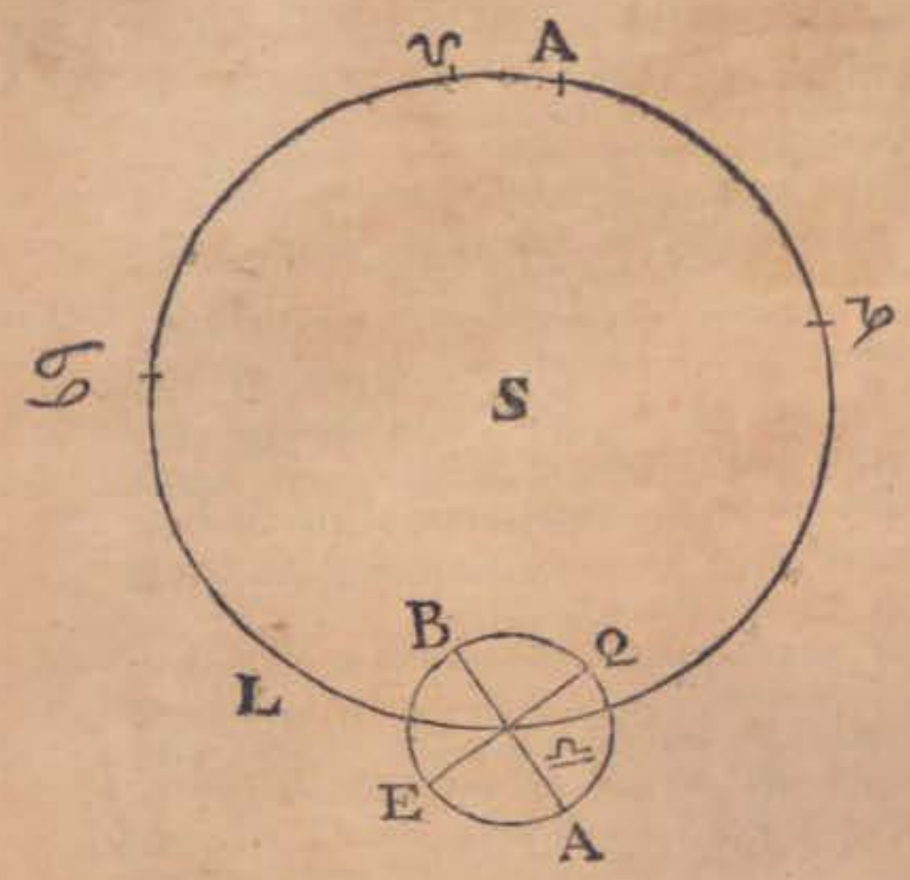
(9) 102. *Bis inclinari in eclipticam.* In ſemirevolutione telluris circà ſolem à

Hæc ſunt quæ ad telluris figuram ſpectant. Hâc de re nova quamplurima an. 1740. & 1741. duplici Diſſertatione edidit P. Boſcowick S. J. inſignis matheſeos Profeſſor: maximè autem exoptandum ut ad hujuſce quæſtionis totiuſque matheſeos utilitatem ſalvi & incolumes redeant Clariſſ. Academici qui ad definiendam telluris figuram nobili ardore laboriosum iter verſus æquatorem ſuſceperunt. Simul enim collatis versùs polum & versùs æquatorem inſtitutis obſervationibus, à Doctiſſimis Viris pro bono Scientiarum in unum conſpirantibus certiſſima de telluris magnitudine & figurâ, gravitatis decremento, aliiſque ad Aſtronomiam, Geographiam & Phyſicam maximè momentoſis ſperanda ſunt.

(p) 101. *Puncta æquinoctialia.* Si terra nullo alio motu præter motum progreſſivum in ſuâ orbitâ motumque vertiginis circa axem agitaretur axem ſuum ſibi ſemper parallelum retineret (cor. 22. prop. 66. lib. 1.) ſed ob telluris figuram verſus polos depreſſam & versùs æquatorem oblongatam fit ut axis ſitus perturbetur. Referat ♈ ♋ ♎ ♑, orbitam telluris circà ſolem S, ſitque A E B Q, ipſa tellus cujus poli A & B æquator E Q. Quoniam (ex prop. præc.) terra eſt ſphæroïs ad polos A & B, depreſſa & versùs æquatorem E Q, elata, inſtar globi annulo inhærentis ſpectari poterit, annulo enim æquivalet materia redundans in regionibus æquatoris. Quarè (per cor. 20. prop. 66.) annuli hujus nodi regredientur, hoc eſt, tellus digreſſa à libra ♎, ubi communis ſectio Ecliptiæ & æquatoris versùs Solem S, dirigitur, & per ♑ versùs ♈ pergens, ad nodum *A* priùs pertinget quam ad ♈ pervenerit, & tellus ab ♈ per ♋ versùs ♎ progrediens priùs alterum nodum *L* attinget quam ♎ ubi in priori revolutione erat nodus, id eſt, æquatoris pla-

DE MUNDI SYSTEMATE.

nutandi perexiguus esse debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.



102. ♎ per ♃ ad ♈, actio solis inclinationem æquatoris in ecliipticam minuere conatur cum illa actio eam inclinationem augere conetur à ♋ ad ♎, hinc maxima fit inclinatio inter ♎ & ♃ postea minuitur ex Solis actione oriunda (cor. 10. & 18. prop. 66. lib. 1.) fitque inclinatio illa minima, cum terra est inter ♃ & ♈, cum verò tellus inter ♈ & ♋ pervenit, rursus restituitur præcedens inclinatio (ibid.) sicque deinceps simulque cum æquatore telluris axis oscillatur. Axis igitur terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinatur in eclipticam & bis redit ad positionem priorem: Hæc omnia facilè intelliget qui in mentem revocaverit prop. 66. lib. 1. ultimaque ejusdem corollaria.

103. In singulis octantibus inter æquinoctia & solstitia sequentia, inclinatio axis terræ ad eclipticam redit ad priorem magnitudinem plurimumque annorum decursu sensibilior non evadit, at regressus punctorum Ecliptiæ continuo fit in antecedentia, nec ad pristinum locum redeunt puncta æquinoctialia, nisi post integrum circulum. Hinc mutatio quæ unius anni spatio insensibilis est, post plurium annorum intervalla notabilis evadit.

104. Cum stellæ fixæ quiescant & retrocedat communis sectio æquatoris & Ecliptiæ, necesse est ut mutabilis sit fixarum à punctis æquinoctialibus distantia & stellæ ab iisdem punctis versus orientem quotidiè progredi videantur, undè ipsarum longitudines quæ in ecliptică ab initio arietis sivè intersectione vernali ecliptiæ & æquatoris computari solent, continuò crescunt & fixæ omnes videntur moveri in consequentia signorum. Hinc fit quod constellationes omnes antiquam sedem mutaverint. Sic constellatio arietis quæ tempore Hipparchi propè intersectionem vernalem Ecliptiæ & æquatoris visa fuit, nunc ab eâdem digressa in signo Tauri moratur, sicut & Tauri constellatio in geminorum locum transivit geminique in cancrum promoti sunt ità ut unaquæque constellatio è suo in proximum locum successerit. * Cum autem hic, dum de inclinatione egimus, nec ad motum ipsum nodorum, nec ad Excentricitatem orbitarum quas terra aut Luna describunt nec ad Apsidum motus, nec ad irregularitatem molis terræ attenderimus nec denique ad aliorum Planetarum actiones, quædam etiam Ecliptiæ inclinationi mutatio afferri potest, quæ forte per severabit satis ut sensibilis evadat, inclinationis angulum 1′ centum annis decrescere volebat Louvillæus, cui non repugnant quæ Cassinus in Astronomiæ Elementis, ex variâ Astronomorum æstimatione inclinationis Ecliptiæ retulit. Sed de iis plura in posterum erunt dicenda.

PRO-

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes planetas deferre, & minores illos in ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per prop LXV. lib. 1. Actione autem solis perturbabuntur eorum motus multimodè, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in lunâ nostrâ notantur. Hæc utique (per corol. 2, 3, 4, & 5. prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideo propius accedit ad terram, in syzygiis quam in quadraturis, nisi quâtenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (per corol. 9. prop. LXVI.) ubi apogæum lunæ in syzygiis versatur, & minima ubi idem in quadraturis consistit; & inde luna in perigæo velocior est & nobis propior, in apogæo autem tardior, & remotior in syzygiis quam in quadraturis. Progreditur insuper apogæum, & regrediuntur nodi, sed motu inæquabili. Et apogæum quidem (per corol. 7. & 8. prop. LXVI.) velocius progreditur in syzygiis suis, tardius regreditur in quadraturis, & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per corol. 2. prop. LXVI.) quiescunt in syzygiis suis & velocissimè regrediuntur in quadraturis. Sed & major est lunæ latitudo maxima in ipsius quadraturis (per corol. 10. prop LXVI.) quam in syzygiis: & motus medius tardior in perihelio terræ (per corol. 6. prop. LXVI.) quam in ipsius aphelio. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab astronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam à (a) prioribus astronomis non observatæ

(a) * *A prioribus Astronomis non observatæ.* Inæqualitates illæ quas hic per transennam enumerat Newtonus, æquationesque omnes seu correctiones deinceps

DE MUNDI SYSTEMATE.

servatæ inæqualitates, quibus motus lunares adeo perturbantur, ut nullâ hactenus lege ad regulam aliquam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii apogæi & nodorum lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter eccentricitatem maximam in syzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per corol. 14. prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis solaris. Et variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicatâ ratione temporis inter quadraturas quam proximè (per corol. 1, & 2. lem. x. & corol. 16. prop. LXVI. lib. 1.) sed hæc inæqualitas in calculo astronomico ad prosthaphæresin lunæ referri solet, & cum eâ confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales satellitum jovis & saturni à motibus lunaribus derivare.

Ex motibus lunæ nostræ motus analogi lunarum seu satellitum jovis sic derivantur. Motus medius nodorum satellitis extimi jovialis, est ad motum medium nodorum lunæ nostræ, in ratione compositâ ex ratione duplicatâ temporis periodici terræ circa solem ad tempus periodicum jovis circa solem, & ratione simplici temporis periodici satellitis circa jovem ad tempus periodicum lunæ circa terram (per corol. 16. prop. LXVI. lib. 1.) ideoque (b) annis centum conficit nodus iste 8 gr. 24′. in antecedentia. Motus medii nodorum satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem corollarium) & inde dantur. Motus au-

104. commodius explicabuntur, & quomodò variatio Lunæ ad prosthaphæresim in calculo Astronomico referri soleat exponetur. Variatio autem dicitur inæqualitas illa quâ fit ut motus Lunæ in primo mensis quadrante, sive pergente Lunâ à conjunctione ad quadraturam proximam retardetur, in secundo accelereture dum tendit à quadraturâ ad oppositionem, in tertio retardetur rursus & in quarto iterum accelereture.

(b) * *Ideóque annis centum.* Tempus periodicum terræ circà solem est dierum 365.2565; tempus periodicum jovis circà solem est dierum 4332.514 (per phæn. 4.) tempus periodicum satellitis circà jovem est

autem augis ſatellitis cujuſque in conſequentia eſt ad motum nodorum ipſius in antecedentia, ut motus apogæi lunæ noſtræ ad hujus motum nodorum, (per idem corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus augis ſic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob (c) cauſam quam hic exponere non vacat.

eſt dierum 16.6880 (per phæn. 2.) & tempus periodicum Lunæ circà terram dierum 27.321. (prop. 17.). Sumptiſque Logarithmis, erit

L. $(365.2565)^2$ = 5.1251956
L. 16.6880 = 1.2224043

utriuſque ſumma = 6.3475999

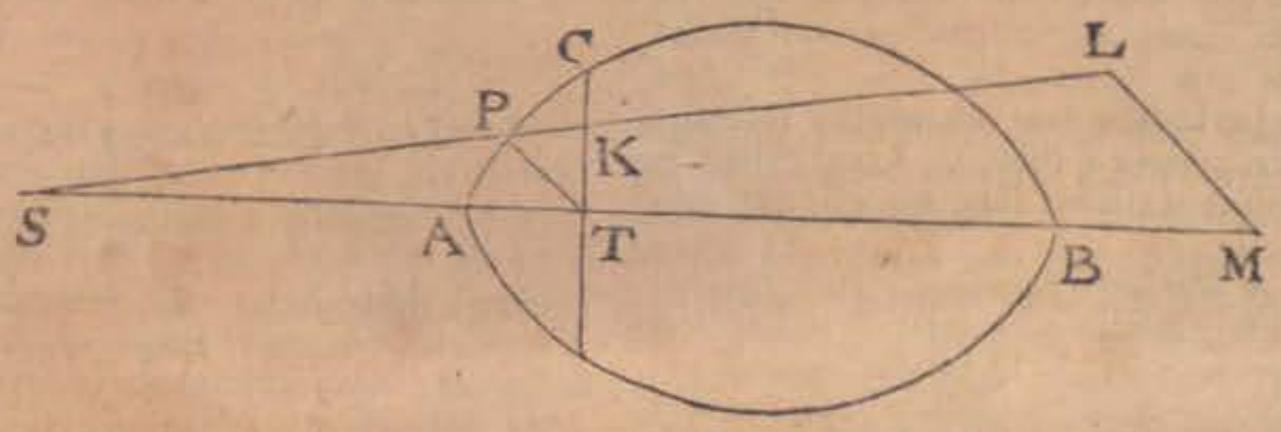
Deindè L. $(4332.514)^2$ = 7.2734600
L. 27.321 = 1.4364966

utriuſque ſumma = 8.7099566

Ab hâc ultimâ ſubtrahatur
ſumma ſuperior - - 6.3475999

reſiduum erit L. 2.3623567

Cui reſpondet numerus 230.38. Quarè ex hoc calculo & Analogiâ Newtoni patet motum nodorum ſatellitis extimi jovis eſſe partem circiter $230^{a\text{m}}$. motûs nodorum Lunæ, ſed eſt motus annuus nodorum Lunæ 19°. 21′ 21″, ut dicetur poſtea. Hiſce ſi multiplicetur motus ille annuus per 100 factumque dividatur per 230, prodibit motus nodorum ſatellitis intervallo annorum centum 8°. 24′. Ab hujus ſæculi initio nullum in nodis ſatellitum jovialium ſenſibilem motum fuiſſe obſervatum teſtatur Clariſſ. Caſſinus in elem. Aſtr. 105.



(c) 105. *Ob cauſam quam hic exponere non vacat.* Referat S Solem, ſitque P ſatelles, putà Luna revolvens circà Planetam primarium T ſcilicet terram, in ellipſeos umbilico poſitum; erit B apſis ſumma, A apſis ima, eritque T B, diſtantia maxima & A T diſtantia minima. Jam verò quò minor eſt diſtantia A T, reſpectu diſtantiæ T B, eò celerius apſides progrediuntur, (per not in cor. 8. prop. 66. lib 1). Ea eſt correctionis cauſa quam Autor noſter non exponit. Cum enim ſatellites Jovis & Saturni circà ſuos Planetas primarios deſcribant circulos ferè concentricos (phæn. 1. & 2.) Luna verò circà terram in orbitâ elliptică revolvatur, & major ſit motus nodorum in orbita elliptica quam in circulari, cæteris omnibus manentibus, hinc motus augis cujuſcumque ſatellitis per Analogiam ex motu Augis Lunaris inventus, diminui debet in ratione paulò minore quam 1 ad 2, calculo non abſimili illi qui 31^{a}. prop. inſtituetur.

DE MUNDI SYSTEMATE.

vacat. (d) Æquationes maximæ nodorum & augis ſatellitis cujuſque ferè ſunt ad æquationes maximas nodorum & augis lunæ reſpectivè, ut motus nodorum & augis ſatellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi lunæ tempore unius revolutionis æquationum poſteriorum. (e) Variatio ſatellitis è jove ſpectati, eſt ad variationem lunæ, ut ſunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus ſatelles & luna ad ſolem revolvuntur, per idem corollarium; ideóque in ſatellite extimo non ſuperat $5^{''}.\ 12^{'''}$.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum & refluxum maris ab actionibus ſolis ac lunæ oriri.

Mare ſingulis diebus tam lunaribus quam ſolaribus bis intumeſcere debere ac bis defluere, patet (f) per corol. 19. & 20. prop.

205.

(d) * *Æquationes maximæ.* Nam errores angulares in ſingulis revolutionibus geniti, ideóque eorumdem errorum correctiones ſeu æquationes maximæ ſunt ut ſatellitum tempora periodica reſpectivè (per cor. 16. prop. 66. lib. 1.). Sed tempora periodica ſunt ut motus ipſi angulares reſpective (ibid.). Quare in eâdem quoque ratione ſunt æquationes maximæ.

(e) * *Variatio Satellitis è jove ſpectati*, hoc eſt, motus angularis ſatellitis eſt ad motum angularem Lunæ ut ſunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus ſatelles & Luna ad Solem revolvuntur, ſive clariùs in ratione nodorum Lunæ ad motum nodorum annuum & temporis periodici Lunæ ad tempus periodicum ſatellitis (per cor. 16. prop. 66. lib. 1. & not. in idem coroll.). Jam verò motus nodorum Lunæ annuus eſt 69681", ut poſteà ſtatuitur à Newtono, nodus autem ſatellitis extimi jovialis annis centum conficit 8°. 24' ideóque motus ejuſdem annuus eſt $302\ \frac{2}{5}$, tempus periodicum Lunæ eſt dierum 27 321 & ſatellitis extimi dierum 16.688. Sumptis Logarithmis erit

L. -	69.681	= 4.8431144
L. dierum	27.321	= 1.4364966
uttriuſque Log. ſumma		= 6.2796110
Deindè L.	$302\ \frac{2}{5}$	= 2.4805818
Lòg. dier.	16.688	= 1.2224043
utriuſque ſumma		= 3.7029861

Hæc ſubtrahatur à ſummâ ſuperiori 6.2796110 remanet Log. 2.5766249, cui reſpondet numerus 378. fere. Quare ex Analogiâ Newtoni & calculo colligitur variationem ſatellitis eſſe partem 378^{am}. variationis Lunæ circiter. Sed variationem Lunæ maximam in apogæo Solis deinceps determinat Newtonus 3' 14" ſive 1994". Quare pars 378^{a}. eſt 5" 15"' ut Newtonus invenit, quamproxime.

(f) * *Per Cor.* 19. & 20. Si fluidum in alveo per ſuperficiem cujuſvis Planetæ excavato contineatur, ſimulque cum Planetâ motu diurno periodico uniformiter revolvatur, partes ſingulæ hujus fluidi per vices acceleratæ & retardatæ in ſyzigiis ſuis, hoc eſt, in meridie & mediâ nocte vsle-

prop. LXVI. lib. I. ut (g) & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum luminarium ad meridianum loci minori quam sex horarum spatio sequi, uti fit in maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & promontorium *Bonæ Spei* ut & in maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter secundam, tertiam vel quartam, incidit, nisi ubi motus ab Oceano profundo per loca vadosa propagatus usque ad horam quintam sextam septimam aut ultra retardatur. Horas numero ab appulsu luminaris utriusque ad meridianum loci, tam infra horizontem quam supra, & per horas dici lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo luna motu apparente diurno ad meridianum loci revertitur. Vis solis vel lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impressa manet aliquamdiu & per vim novam subinde impressam augetur, donec mare ad altitudinem maximam ascenderit, id quod fiet spatio horæ unius duarumve sed sæpius ad littora spatio horarum trium circiter, vel etiam plurium si mare sit vadosum.

LIBER TERTIUS. PROP. XXIV. THEOR. XIX.

(h) Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernen-

velociores erunt; in quadraturis sivè horâ sextâ matutinâ, & vespertinâ tardiores quam superficies globi contigua, quare fluet in alveo refluetque per vices perpetuò (per cor. 19. & 20.) idem posteà iterum demonstrabitur viresque Solis & Lunæ seorsim computabuntur.

(g) * *Aqua maximam altitudinem.* Rem ità se habere patet ex observatis æstibus marinis, ratio autem hæc est. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum & posteà decrescit, attamen hujus vis effectus nondum est maximus. Omnis enim motus semel impressus perseverat uniformiter, donec motu contrario destruatur vel saltem retardetur. Hinc fit ut fluxus maris per sex circiter horas antemeridianas auctus & cum motu diurno conspirans acceleratus, majori celeritate ulterius pergere debeat & aquas magis magisque attollet, usquè dum eadem vis motui diurno contraria fluidi cursum paulatim sistat & aquas cogat refluere. Hæc motûs retardatio maxime circà octantes sive horam tertiam notabilis est. Alia non desunt exempla maximorum effectuum qui post causas maximas contingunt. Non in ipsis solstitiis æstivis maxime fervet æstas, sicut neque in ipsis solstitiis Hybernis maxime friget hiems; sed integro circiter mense post solstitia maximus deprehenditur æstatis Hyemisque effectus. Indubitatâ quoque constat experientiâ summum calorem secundâ aut tertiâ post meridiem horâ fieri.

105.

(h) * *Motus autem bini.* Quemadmodum corpus quodvis duplici vi sollicitatum in lineis duabus progredi nequit, sed conjunctis viribus parallelogrammi diagonalem eodem modo describit ac si unicâ vi juxtà diagonalis directionem urgeretur

(41.

DE MUNDI SYSTEMATE.

cernentur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vèl oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur ([i]) fluxus & refluxus maximus. In quaduraturis sol attollet aquam ubi luna deprimit, deprimetque ubi luna attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teste, major est effectus lunæ quam solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra syzygias & quadraturas, æstus maximus qui solâ vi lunari incidere semper deberet in horam tertiam lunarem, & solâ solari in tertiam solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ lunari propinquius est; ideóque in transitu lunæ à syzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia solaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo post octantes lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem in transitu lunæ à quadraturis ad syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus luminarium ex eorum distantiis à terrâ. In minoribus enim distantiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in ([k]) triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur sol tempore hyberno, in perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in syzygiis ([l]) paulò majores sint, & in quadraturis paulò minores (cæteris paribus) quam tempore æstivo; & luna in perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quam antè vel post dies quindecim, ubi in apogæo versatur. ([m]) Unde fit ut æstus duos omnino maximi in syzygiis continuis se mutuò non sequantur. Pen-

105. (41. lib. 1.) ità motus bini quos luminaria hæc duo excitant non cernentur distinctè sed motum quemdam mixtum efficient.

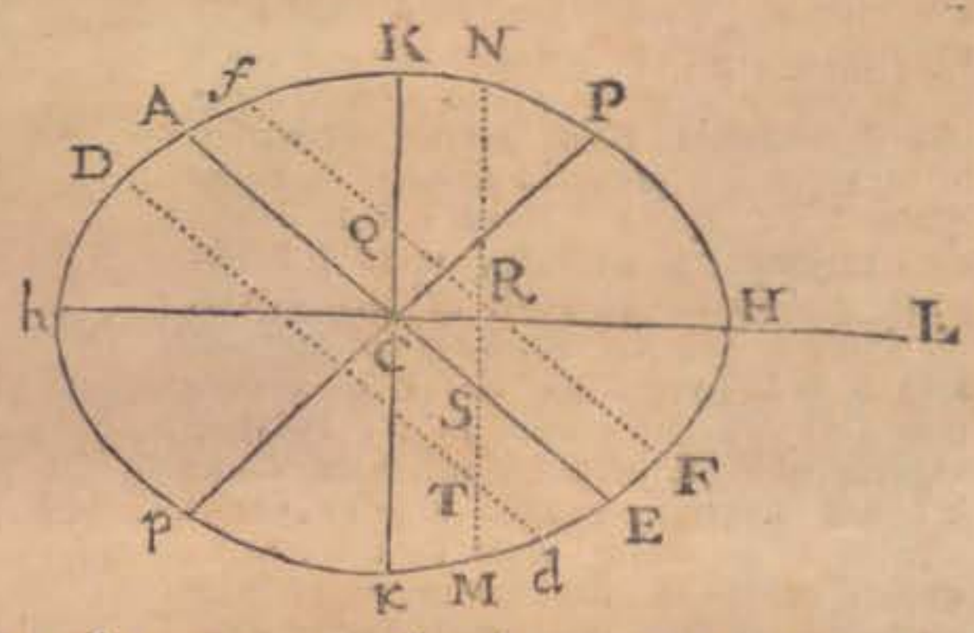
(i) * *Fluxus & refluxus maximus*, ut potè è virium summâ tum temporis oriundus.

(k) * *In triplicatâ ratione diametrorum* (cor. 14. prop. 66. lib. 1.).

(l) * *Paulò majores sint*, ob majorem virium summam & in quadraturis paulò minores ob minorem virium differentiam quam tempore æstivo.

(m) * *Undè fit ut æstus*. Si enim Luna in syzigiarum altera sit circà perigæum, æstumque maximum conjunctis cum sole viribus tunc temporis excitet, necesse est ut in alterâ syzygia versetur circà apogæum minoresque vires obtineat.

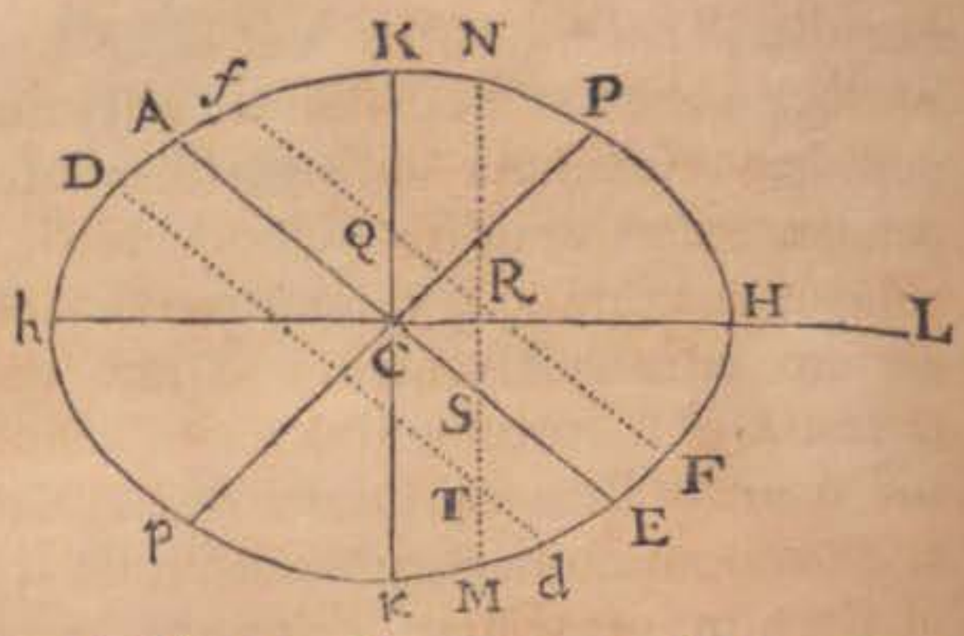
Pendet etiam effectus utriuſque luminaris ex ipſius declinatione ſeu diſtantiâ ab æquatore. Nam ſi luminare in polo conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, ſine actionis intenſione & remiſſione ideóque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur luminaria recedendo ab æquatore polum verſus, effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus in ſyzygiis ſolſtitialibus quam in æquinoctialibus. In quadraturis autem ſolſtitialibus majores ciebunt æſtus quam in quadraturis æquinoctialibus; eo quod lunæ jam in æquatore conſtitutæ effectus maximè ſuperat effectum ſolis. Incidunt igitur æſtus maximi in ſyzygias & minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriuſque. Et æſtum maximum in ſyzygiis comitatur ſemper minimus in quadraturis, ut experientia compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam ſolis à terrâ, tempore hyberno quam tempore æſtivo, fit ut æſtus maximi & minimi ſæpiùs præcedant æquinoctium vernum quam ſequantur, & ſæpius ſequantur autumnale quam præcedant.



Pendent etiam effectus luminarium ex locorum latitudine. Deſignet *A p E P* tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P*, *p* polos; *AE* æquatorem; *F* locum quemvis extra æquatorem; *F f* parallelum loci; *D d* parallelum ei reſpondentem ex alterâ parte æquatoris; *L* locum quem luna tribus ante horis occupabat; *H* locum telluris ei perpendiculariter ſubjectum; *h* locum huic oppoſitum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 diſtantia, *CH*, *Ch* maris altitudines maximas menſuratas à centro telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas: & ſi axibus *Hh*, *Kk* deſcribatur ellipſis, deinde ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* deſcribatur ſphæroïs *HPKhpk*; deſignabit hæc figuram ma-

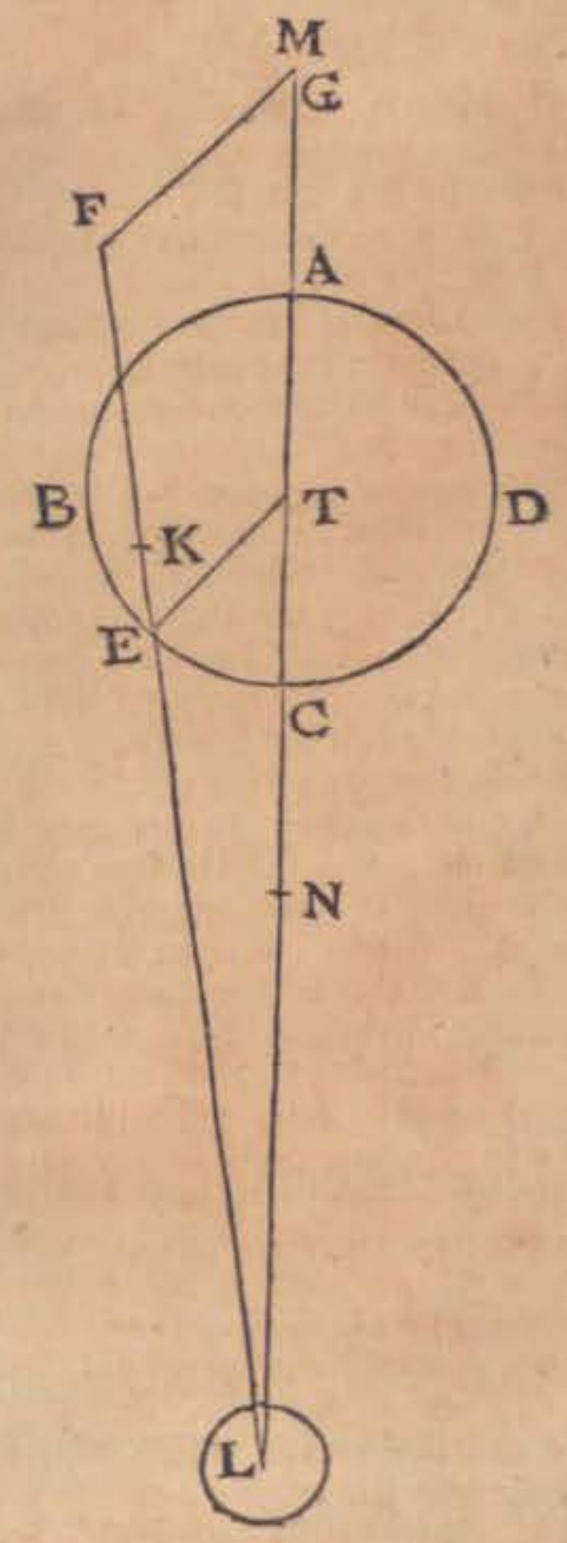
DE MUNDI SYSTEMATE.

ris (n) quam proximè, & erunt CF, Cf, CD, Cd altitudines maris in locis F, f, D, d. Quinetiam si in præfatâ ellipseos revolutione punctum quodvis N describat circulum NM, secantem parallelos Ff, Dd in locis quibusvis R, T, & æquatorem AE in S; erit CN altitudo matis in locis omni-



106.

(n) 106. * *Figuram maris quam proximè.* Circulus centro T descriptus tellurem referat, circulus autem centro L, descriptus exhibeat Lunam. Si nullâ esset in tellurem actio, tellus profundis aquis undiquè cooperta & quiescens (per hyp.) in sphæram sese componeret. At singulæ telluris partes gravitant in Lunam estque gravitas in Lunam in ratione duplicatâ distantiarum à centro reciprocè. Jam verò recta LT, exponat gravitatem acceleratricem corporis in centro T positi versùs Lunam, sitque E quælibet fluidi marini particula. Si in rectâ LE productâ sumatur LK æqualis LT, sitque LF ad LK in duplicatâ ratione LK ad LE, recta LF exponet gravitatem corporis in loco E versus Lunam, quæ vis dividitur in vires ut FG & GL (prop. 66. lib. 1.). Si autem à vi illâ quâ corpus in E, locatum urgetur quæ est ut GL, auferatur vis ut TL quâ centrum telluris urgetur versus Lunam relinquentur vires ut FG, GT, quibus corpus E sollicitatur præter vim propriæ gravitatis quâ tendit versus centrum terræ & vim ipsi communem cum centro ipsius terræ. Jam sit C punctum telluris cujus zenith Luna immineat, A verò punctum oppositum, sintque B & D puncta circumposita, sivè potius exhibeant circulum horizontis in quo Luna versatur, liquet punctum G à T maximè distare, ubi punctum E est aut in C, aut in A; in priori casu G, transeat in M, in posteriori in N; dum verò punctum E versatur in circulo BD, punctum G ferè coincidit cum T, nullaque partibus in



circulo

bus R, S, T, ſitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujuſvis F, affluxus erit maximus in F, horâ tertiâ poſt appulſum lunæ ad meridianum ſupra horizontem; poſtea defluxus maximus in Q horâ tertiâ poſt occaſum lunæ; dein affluxus maximus in f horâ tertiâ poſt appulſum lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimo defluxus maximus in Q horâ tertiâ poſt ortum lunæ; & affluxus poſterior in f erit minor quam affluxus prior in F. Diſtinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemiſphæricos, unum hemiſphærio KHk ad boream vergentem, alterum in hemiſphærio oppoſito Khk; quos igitur fluctum borealem & fluctum auſtralem nominare licet.

circulo B D locatis relinquitur vis præter vim gravitatis propriæ atque vim F G; ipſa verò F G, ſit B T aut D T, coeuntibus punctis F & K; quare fluidi particulæ in locis B & D, præter vim gravitatis propriæ urgentur etiam verſus centrum T vi ex Lunâ procedente; Particulæ in loco C, verſus Lunam magis attrahuntur quam terra integra quæ in centro T, locata fingi poteſt, particulæ autem in loco A, verſus Lunam minus attrahuntur quam terra integra in T, ideóque eodem modo afficiuntur ac ſi ad partes contrarias urgerentur. At particulæ in circulo B D, magis gravitant verſus T; in locis inter A, vel C, & B vel D, intermediis fluidi particulæ utramque conditionem participant; quo viciniores ſunt fluidi terreſtris partes punctis C & A, eò minùs graves ſunt, nam actio Lunæ ſivè vis ut G T, vim propriæ gravitatis verſus T, minuit, & quo propiores ſunt punctis B & D, eò graviores fiunt, eadem enim actio Lunaris ſivè vis ut F G, gravitatem propriam auget. Quia verò globus A B C D, fluido ſatis profundo undiquè coopertus ponitur fluidi autem partes cedunt vi cuicumque illatæ & cedendo facilè moventur inter ſe, fluidum illud verſus A & C poſitum à fluido verſus B & D, poſito expelletur, levius ſcilicet à graviore, attolletur ergò fluidum verſus A & C, deprimeturque verſus B & D, donec ſcilicet major fluidi moles & altitudo majorem gravitatem compenſet, & ubique conſtituatur æquilibrium.

107. Quapropter ſuperficies maris ſeſe componet in figuram ſphæroidem cujus axis eſt recta A C, quæ producta per Lunam tranſibit. Hinc patet figuram maris in ſphæroidem oblongam formari debere.

107. Simili argumento patet conſideratâ Solis actione fluidum terreſtre componi in ſphæroidem oblongam cujus axis productus per Solem tranſit. Si enim (in figur. præc.) globus L non Lunam ſed Solem deſignet, cætera ſe habent ut ſuprà. At in hoc caſu minor erit quam in altero axium differentia. Nam fluidi tumor in C hinc oritur quod fluidum magis gravitet verſus Lunam quam telluris centrum T, tumor autem fluidi in A, inde provenit quod terræ centrum magis quam fluidum verſus Lunam gravitet; quare, ſi hæc elevatio Solis actioni tribuatur, minor erit effectus quamvis actio Solis in terram major ſit quam actio Lunæ in eamdem, telluris enim ſemidiameter T C vel T A fere evaneſcit reſpectu immenſæ Solis à terrâ diſtantiæ, ideóque fluidi in C locati gravitas verſus ſolem erit inſenſibiliter major gravitate telluris verſus eundem, & fluidi in A poſiti gravitas verſus ſolem erit inſenſibiliter minor gravitate telluris verſus eundem, quare figura ſphæroidea indè genita parum intumeſcet ad vertices C & A, parumque in circulo B D deprimetur, attamen propter immenſas Solis licet remotiſſimi vires, aliquis erit actionis Solaris effectus.

DE MUNDI SYSTEMATE.

licet. Hi fluctus ſemper ſibi mutuò oppoſiti veniunt per vices ad meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum lunarium duodecim. Cumque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & auſtrales magis auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & occidunt. Æſtus autem major, lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum lunæ ad meridianum ſupra horizontem, & lunâ declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in (°) tempora ſolſtitiorum; præſertim ſi lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis. Sic experientiâ compertum eſt, quod æſtus matutini tempore hyberno ſuperant veſpertinos & veſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* verò altitudine quindecim digitorum: obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulam per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æſtus, etiam ceſſantibus luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motus impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proximè poſt ſyzygias majores reddit, coſque proximè poſt quadraturas minuit. Unde fit ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multò magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus, non ſint primi à ſyzygiis, ſed tertii. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & fluviorum oſtiis, ſint (P) quarti vel etiam quinti à ſyzygiis.

Porro

507. (o) * *In tempora ſolſtitiorum.* Tunc enim in ſyzygiis utrumque luminare ab æquatore maxime declinat, atque fluxuum differentia adhuc augebitur, ſi Lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis; nam præter declinationis Solis maximam, Luna quoque Soli conjuncta quantitate latitudinis maximæ in Boream aut auſtrum magis declinat. Hinc fit fluctus Borealis nobis viciniſſimus & fluctus auſtralis remotiſſimus in eâdem revolutione diurnâ.

(p) * *Sint quarti vel etiam quinti.* In opuſculo de mundi ſyſtemate quædam occur-

LIBER TERTIUS. PROP. XXIV. THEOR. XIX.

Porro fieri poteſt ut æſtus propagetur ob oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citius tranſeat per aliqua freta quam per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſivè advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales à diverſis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu lunæ ad meridianum portus. Si luna in hocce ſuo ad meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo coſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio dici illius efficient ut aqua tranquillè ſtagnet. Si luna tunc declinabat ab æquatore, fient æſtus in oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini

occurrunt obſervationes quæ ad hunc locum pertineat, eas itaque exſcribemus. Fieri etiam poteſt, inquit Autor, ut æſtus omnium maximus ſit quartus vel quintus à ſyzygiis vel tardius adveniat, eò quòd retardantur motus marium in tranſitu per loca vadoſa ad littora. Sic enim æſtus accedit ad littus occidentale Hiberniæ horâ tertiâ Lunari, & poſt horam unam & alteram ad portus in littore auſtrali ejuſdem inſulæ ut & ad inſulas Caſſiterides vulgò Sorling dictas. Dein ſucceſſivè ad Falmuthum, Plimuthum Portlandiam inſulam Vectam, Winchelſeiam, Doveriam, oſtium Tameſis & Pontem Londinenſem, conſumptis horis duodecim in hoc itinere. Sed & Oceani ipſius alveis haud ſatis profundis impeditur æſtuum propagatio, incidit enim æſtus ad inſulas fortunatas & ad Occidentalia marique atlantico expoſita littora Hiberniæ, Galliæ, Hiſpaniæ & Africæ totius uſquè ad caput bonæ ſpei in horam tertiam Lunarem, præterquam in locis nonnullis vadoſis ubi æſtus impeditus tardiùs advenit inque freto Gaditano quod motu ex mari mediterraneo propagato citiùs æſtuat; pergendo verò de his littoribus per Oceani latitudinem ad oras Americæ, accedit æſtus primò ad Braſiliæ littora maximè Orientalia circà horam Lunarem quartam vel quintam; deindè ad oſtium fluvii Amazonum horâ ſextâ, ad inſulas verò adjacentes horâ quartâ, poſteà ad inſulas Bermudas horâ ſeptimâ & ad Floridæ portum S. Auguſtini horâ $7\frac{1}{2}$. Tardius igitur progreditur æſtus per Oceanum quam pro ratione motûs Lunæ; & perneceſſaria eſt hæcce retardatio ut mare eodem tempore deſcendat inter Braſiliam & novam Franciam, aſcendatque ad inſulas fortunatas & littora Europæ & Africæ & viceversâ. Namque mare aſcendere nequit in uno loco quin ſimul deſcendat in altero. Lege jam deſcriptâ agitari quoque mare pacificum veriſimile eſt. Namque æſtus altiſſimi in littore Chilienſi & Peruviano incidere dicuntur in horam tertiam Lunarem, ſed quâ velocitate propagantur inde ad littus Orientale Japoniæ & ad inſulas Philippinas cæteraſque regno Sinarum adjacentes nondum reperi.

108.

108. In alveis fluminum pendet influxus & refluxus à fluminum curſu. Nam curſus ille facit aquam tardiùs influere ex mari & in mare citius & velocius re-

DE MUNDI SYSTEMATE.

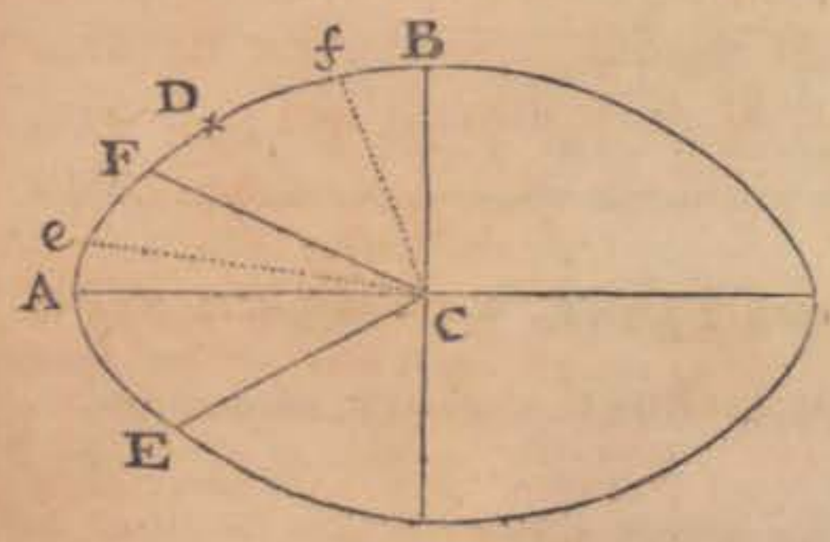
bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in medio ipſorum, & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantum perveniet ad maximam altitudinem & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ſi luna declinat in polum ſupra horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu lunæ ad meridianum, atque lunæ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batsham* ſub latitudine boreali 20 gr. 50′. *Halleius* ex nautarum obſervationibus patefecit. Ibi aqua die tranſitum lunæ per æquatorem ſequente ſtagnat, dein lunâ ad boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimam vel octavam, dein

109. fluere atquè adeò diutius refluere quam influere, præſertim ſi longè in flumen aſcenditur ubi minor eſt vis maris. Sic in fluvio Avonæ ad tertium lapidem infrà Briſtoliam refert Sturmius aquam horis quinis influere, ſeptenis refluere ſuprà Briſtoliam ut ad Canesham vel Bathoniam differentia procul dubio major eſt. Pendet etiam hæc differentia à magnitudine fluxûs & refluxûs. Nam prope Luminarium ſyzigias, vehementior maris motus facilius ſuperando reſiſtentiam fluminum faciet aquam citius ac diutius influere, adeóque minuet hanc differentiam: intereà verò dum Luna ad ſyzigias properat, neceſſe eſt ut flumina ob curſus ſuos per magnitudinem æſtuum impeditos magis impleantuur & propterea maris refluxum paulò magis impediant proximè poſt ſyzigias quam proximè antè. Eâ de cauſâ æſtus omnium tardiſſimi non incident in ipſas ſyzigias, ſed paulò præcedent. Dixi æſtus etiam antè ſyzigias retardari vi Solis. Conjungatur cauſa utraque & æſtuum retardatio & major erit & ſyzigias magis præcedet. Quæ omnia ità ſe habere colligo ex tabulis æſtuum quas Flamſteedius ex obſervationibus quamplurimis conſtruxit.

109. Æſtuum magnitudo non parum etiam pendet à magnitudine marium, ut in opuſculo citato obſervat Clariſſ. Autor. Sit C centrum terræ, E A D B oblonga maris figura, C A ſemiaxis major, G B ſemiaxis minor priori inſiſtens ad angulos rectos. Sumatur D punctum medium inter A & B, ſitque E C F, vel ipſi æqualis e C f angulus ad centrum terræ quem ſubtendit latitudo maris littoribus E, F, vel e, f, terminati; verſetur autem punctum A, in medio inter puncta E, I, & punctum D in medio inter puncta e, f. Si per differentiam altitudinum C A, C B, exponatur quantitas æſtus in mari ſatis profundo terram totam cingente, exceſſus altitudinis C A ſuper altitudinem C E vel C F deſignabit maximam quantitatem æſtus in medio maris E F littoribus E, F terminati, & exceſſus altitudinis C e ſuper altitudinem C f.

dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & lunâ declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum lunæ & affluxus in ortum, donec luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano *Sinenſi* inter continentem & inſulam *Luconiam*, alter à mari *Indico* inter continentem & inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim à mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex à mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo. LIBER TERTIUS. PROP. XXIV. THEOR. XIX.

Hactenus cauſas motuum lunæ & marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.



Cf, exponet maximam quantitatem æſtûs ad littora ejuſdem maris. (Nam, differentia inter Diametrum biſecantem angulum datum quem faciunt duæ Diametri Ellipſeos & alterutram ex illis Diametris major eſſe non poteſt ex naturâ Ellipſeos quam ſi illa Diameter biſecans ſit ſemi axis major, & differentia inter illas duas ipſas Diametros angulum datum conſtituentes major eſſe nequit quàm ſi Diameter angulum biſecans faciat angulum cum axe ſemi-rectum). Unde patet æſtus ad littora eſſe propemodum ut maris latitudo EF, arcu quadrantali non major. Hinc fit ut nullus aut ferè nullus obſervetur aquarum motus in maribus non ſatis latè patentibus, niſi cum Oceano ipſo liberè communicent. Si enim nihil aut parum cum Oceano communicent, ut accidit in mari mediterraneo, æſtus quoquè eam ob cauſam minor deprehenditur. Hinc eſt etiam quod propè æquatorem ubi mare inter Africam & Americam anguſtum eſt, æſtus ſint multò minores quam hinc indè in zonis temperatis ubi maria latè patent, & in maris pacifici littoribus ferè ſingulis tam Americanis quam Sinicis & intrà tropicos & extrà. Contingere tamen poteſt ut æſtus qui in Oceano mediocris eſt in fluviis evadat maximus propter tranſitûs anguſtias littorumque ſeorſim coeuntium convergentiam. Hæc de maris æſtu pro præſenti dicta ſint, de hâc Nobiliſſimâ inter Phyſicos quæſtione plurima in decurſu ubi recurret occaſio, adjungemus. Prolixius foret proſequi factas à diligentiſſimis Philoſophis æſtuum obſervationes; legantur quæ huc & illuc tum in tranſact. Angl. tum in Mon. Pariſ. diſperſa inveniuntur, ſed ea præſertim quæ Clariſſ. Viri Halleius num. 226. tranſact & Caſſinus in Mon. Pariſ. an. 1712. 1713. ſcripta reliquerunt. 109.

EDITOR

EDITOR LECTORI.

FElicius commentari non possumus ea quæ tradit Autor noster de Maris æstu, quam huic Propositioni subjungendo eas Dissertationes quæ Præmio fuêre condecoratæ à Celebri Parisiensi Scientiarum Academiâ: Id quidem primum nobis fuerat propositum, ut ea quæ in illis Dissertationibus momentosiora viderentur & ad Newtonianæ Philosophiæ illustrationem pertinerent, brevi compendio comprehensa Notis adjiceremus; verùm trunca ac ingenii nostri vitio detrita exhibere hæc Illustrissimorum Virorum scripta meritò piguit, & non dubitavimus nos meliùs consulturos tùm Lectoribus nostris tùm ipsis eorum scriptorum Authoribus, si qualia sunt edita hìc illa insereremus: cumque Authorum à typothetis absentiâ factum sit ut in Editione Parisinâ plurima irrepserint menda nullo Errorum catalogo correcta, ea, demonstrationibus ac calculis accuratè repetitis, emendavimus, figurasque ad loca quibus respondent aptari curavimus.

Quatuor quidem Dissertationes Parisinis typis fuerunt evulgatæ, quarum prior à Patre Cavallieri Jesuitâ, secunda à Daniele Bernoullio, tertia à . . . Mac-Laurino, quarta à Leonardo Eulero fuere ad Academiam missæ; Prior in eo occupatur ut Cartesianæ hypotheseos circa causam æstus marini vitia & hiatus corrigat & resarciat, quod quidem ingeniosè admodum præstat; tres reliquæ ex Legibus gravitatis aquarum Maris in Solem Lunam & Terram omnes Phænomeni propositi circumstantias explicant & calculis determinant, has ergo tres, omissâ priore, hujus esse loci credidimus.

In Dissertatione Mac-Laurini occurrit solutio syntheticâ Problematis de Figurâ Terræ, quale illud proposueramus in Notis nostris ad Prop. XIX. quodque parum felici successu Analyticè solvere tentaveramus, ex ejus solutione patet Meridianum esse veram Ellipsim in Hypothesi quod terra sit homogenea, cum autem hæc in manus nostras non devenerint nisi cum notæ ad eam Propositionem XIX prælum subiissent, inde factum est ut in iis Notis de illo Problemate ut nondum soluto egerimus: Quæ in his tribus Dissertationibus ingeniosa sunt enumerare longiùs foret, intelligit Lector quæ sint ipsi speranda à tantis Viris & quam facilis, his intellectis & perlectis, futurus sit transitus ad ea quæ sequuntur de Lunæ motu, de præcessione Æquinoctiorum, aliisque; Lectorem itaque rogamus ut nobis vitio non vertat, quod Typographo indulserimus hæc qualia sunt edere, ne, & ipse Lector & Typographus, eam paterentur moram quæ ad condendam Epitomen istarum Dissertationum necessaria fuisset.

TRAITÉ
SUR
LE FLUX ET REFLUX DE LA MER.

Par Mr. DANIEL BERNOULLY Professeur d'Anatomie & de Botanique à Basle.

Devise, *Deus nobis hæc otia fecit.*

Pour concourir au Prix de 1740.

CHAPITRE PREMIER.

Contenant une Introduction à la Question proposée.

I.

DANS le grand nombre des Systêmes sur le Flux & Reflux de la Mer, qui sont parvenus à notre connoissance depuis l'antiquité la plus reculée, il n'y a plus que ceux des Tourbillons & de l'Attraction ou Gravitation mutuelle des Corps célestes & de la Terre, qui partagent encore les Philosophes de notre tems: l'un & l'autre de ces Systêmes ont eu les plus grands Hommes pour Défenseurs, & ont entraîné des Nations entieres dans leur parti. Il semble donc que tout le mérite qui nous reste à espérer sur cette grande Question, est de bien opter entre ces deux Systêmes, & de bien manier celui qu'on aura choisi pour expliquer tous les Phénomenes qu'on a observés jusqu'ici sur le Flux & Reflux de la Mer, pour en tirer de nouvelles propriétés, & pour donner des uns & des autres les Calculs & les Mesures.

II.

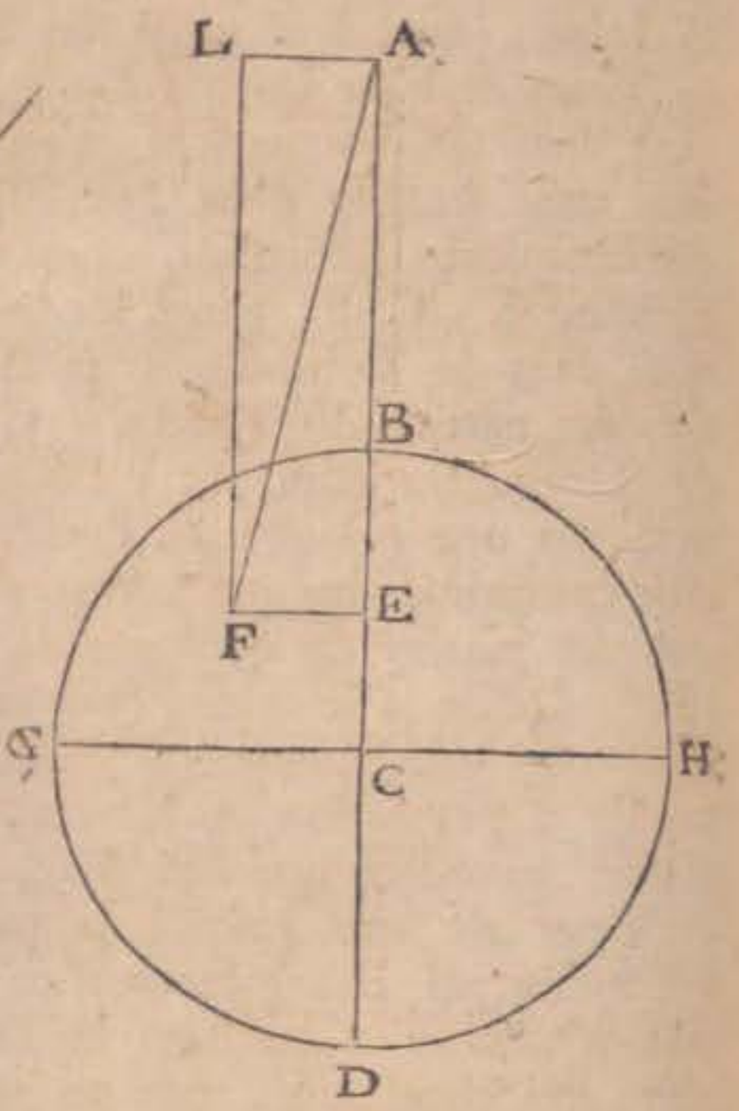
J'ai commencé d'abord par l'idée de Kepler, qu'on nomme avec juſtice le Pere de la vraie Philoſophie. Elle eſt fondée ſur l'Attraction ou Gravitation mutuelle des Corps céleſtes & de la Terre : cet incompréhenſible & inconteſtable Principe, que le grand Newton a ſi bien établi, & qu'on ne ſçauroit plus revoquer en doute, ſans faire tort aux ſublimes connoiſſances & aux heureuſes découvertes de notre ſiécle. Après un examen fort ſcrupuleux, j'ai vû que cette Gravitation mutuelle, conſidérée dans les Globes de la Terre, de la Lune & du Soleil, non-ſeulement pouvoit produire tous les Phénomenes du Flux & Reflux de la Mer, mais même qu'elle le devoit neceſſairement, & qu'elle le devoit, ſuivant toutes les loix qu'on a obſervées juſqu'ici. Avec ces heureux ſuccès, j'ai pouſſé mes recherches auſſi loin qu'il m'a été poſſible de les porter. En chemin faiſant, je ſuis tombé ſur les Théoremes de M. Newton, dont je n'avois pû gueres voir la ſource auparavant; mais en même tems j'ai remarqué le peu de chemin qu'on a encore fait dans cette matiere, & même l'inſuffiſance de la Méthode uſitée, lorſqu'elle eſt appliquée à des Queſtions un peu détaillées. J'ai ſuivi une toute autre route; j'ai pouſſé mes recherches bien plus loin, & je ſuis entré dans un détail tel que l'ACADEMIE m'a paru le demander; & je dois dire à l'avantage des Principes que nous adopterons, que j'ai trouvé par-tout un accord merveilleux entre la Théorie & les Obſervations, accord qui doit être d'autant moins ſuſpect, que je n'ai conſulté les Obſervations, qu'après avoir achevé tous mes Calculs, de maniere que je puis dire de bonne foi, d'avoir deviné la pluſpart des Obſervations, ſur leſquelles je n'étois pas trop bien informé, lorſque j'ai entrepris cet Ouvrage.

III.

Quant aux Tourbillons, j'avouë qu'il eſt bien difficile d'en demontrer le faux à ceux qui veulent s'obſtiner à les défendre : mais auſſi il n'en eſt pas de la Phyſique, comme de la Géometrie. Dans celle-ci on n'admet, ni ne rejette rien, que ce dont on peut abſolument démontrer la vérité ou la fauſſeté, pendant que dans la Phyſique il faut ſe rapporter ſouvent à un certain inſtinct naturel de ſentir le faux & le vrai, après avoir bien péſé toutes les raiſons de part & d'autre. Quant à moi, je ne trouve point ce caractere de vérité, ni dans l'hypotheſe des Tourbillons, ni dans les conſéquences que l'on en tire. Si nous diſons que le Tourbillon a la même denſité, la même direction & la même viteſſe que la Lune, ce Tourbillon ne ſçauroit faire aucun effet; & ſi au contrai-

traire nous ſuppoſons ces trois choſes n'être pas les mêmes de part & d'autre, il me paroît bien clair & bien certain, que l'effet du Tourbillon devroit ſe manifeſter infiniment davantage dans le mouvement de la Lune, que dans celui des Eaux de la Terre. Cependant on ſçait parfaitement bien que la Lune, quoique ſujette à beaucoup d'irrégularités dans ſes mouvemens, n'en a aucune qui puiſſe être attribuée à l'action auſſi ſenſible d'un Tourbillon. Si nous paſſons par deſſus toutes ces différentes difficultés, nous en rencontrerons d'autres également embaraſſantes. C'eſt contre les loix de l'Hydroſtatique, que la Lune, qui nage dans le Tourbillon, puiſſe cauſer des variations dans la compreſſion des parties du Fluide. C'eſt une propriété eſſentielle des Fluides de ſe remettre auſſi-tôt à l'Equilibre, lorſque ſes Parties en ſont ſorties. Si une colonne de Tourbillon, entre la Lune & la Terre, étoit plus comprimée qu'une autre colonne ſemblable, rien ne ſçauroit empêcher ſes parties de s'échaper de côté juſqu'au retabliſſement de l'Equilibre. Qu'on s'imagine, par exemple, l'air de notre Atmoſphere tout d'un coup extrêmement échauffé; ce changement feroit en même tems hauſſer à proportion le Mercure dans le Barometre, puiſque l'air chaud a plus de reſſort que l'air froid; mais comme rien n'empêche l'air de s'échaper de côté juſqu'à la parfaite conſervation de l'Equilibre, cela fait qu'un tel changement n'en ſçauroit faire aucun ſur le Barometre; auſſi n'obſerve-t-on dans le Barometre aucune variation du jour à la nuit, qui cependant, par un raiſonnement tout-à-fait ſemblable à celui des Tourbillonnaires pour expliquer les Marées, devroit être très-ſenſible. Pareillement ſi les eaux d'une Riviere donnent contre un pieu, on ne remarquera aucune différence dans la ſurface des eaux, que bien près du pieu, & le fond du lit de la Riviere ſera toujours également preſſé. En voilà aſſez & trop ſur cette matiere; car ce ſera toujours aux Sectateurs de Deſcartes de montrer l'effet des Tourbillons ſur l'Océan, avec la même clarté qu'on peut le faire, moyennant le principe de Kepler, principe d'ailleurs qui n'eſt plus conteſté; ſçavoir, que la Terre & tous les Corps céleſtes ont une tendance mutuelle à s'approcher les uns des autres. Ce principe poſé, il eſt facile de faire voir, que la Terre que nous ſuppoſerons devoir être ſans cette tendance parfaitement ronde, en changera continuellement ſa figure, & que c'eſt ce changement de figure qui eſt la cauſe du Flux & Reflux de la Mer: Comme ce changement dans la Figure de la ſurface de la Terre eſt produit de differentes façons, j'en ferai ici un dénombrement, & je tâcherai dans la ſuite d'en donner la meſure.

IV.



Si *A* eſt le centre de la Lune, ou du Soleil: *B G D H* la Terre; ſi l'on tire par les centres de la Lune ou du Soleil & de la Terre la droite *A D*, & qu'on prenne au dedans de la Terre un Point quelconque *F*, on tirera *F E* perpendiculaire à *B D*, avec la droite *F A*, & on achevera le Rectangle *F L A E*. Chaque point *F* eſt tiré ou pouſſé vers *A*, & cette force étant repreſentée par *F A*, elle ſera conſidérée comme compoſée des deux Laterales *F L* & *F E*: cela étant, on voit que la force *F E* étant appliquée dans chaque point de la Terre, ne ſçauroit que l'allonger au tour de *B D*: Et comme c'eſt une même raiſon pour tous les Plans qui paſſent par *B D*, il eſt clair que la Terre formera ainſi un Sphéroïde produit par la rotation d'une Courbe *B G D* autour de *B D*.

On remarquera, que cet allongement ne ſçauroit être qu'extrêmement petit. *Premierement*, à cauſe de la petiteſſe des Lignes, *F E* par rapport à *F A*. *En ſecond lieu*, à cauſe du peu de rapport qu'il y a entre la péſanteur du Point *F* vers *A*, à la péſanteur du même Point vers le centre de la Terre *C*. Nous verrons dans la ſuite que cet allongement ne peut aller qu'à un petit nombre de pieds, ce qui eſt fort peu conſidérable, par rapport au Diametre de la Terre.

On remarquera encore, que l'allongement total étant imperceptible par rapport au Diametre de la Terre, la différence des allongemens pour l'Hemiſphere ſupérieur *G B H*, & pour l'inférieur *G D H*, doit être inſenſible par rapport à l'allongement total; à la rigueur, il faudroit dire, que les forces exprimées par *F E*, ſont tant ſoit peu plus grandes dans l'Hemiſphere *G B H*; que dans l'Hemiſphere oppoſé, dont les parties ſont plus éloignées du point *A*, & qu'ainſi ledit Hemiſphere *GBH* ſera un peu plus allongé que l'autre Hemiſphere: mais on ſent bien que la différence doit être inſenſible. On peut donc prévoir que les Poles *B* & *D* reſteront également éloignés du Point *C*, & que la Courbe *G B H* pourra être cenſée la même que *G D H*. Nous donnerons un Calcul juſte & détaillé de tout cela dans la ſuite de ce Traité. Ve-

Venons à une ſeconde conſidération, qui produira le même reſultat, que celle dont nous venons de parler.

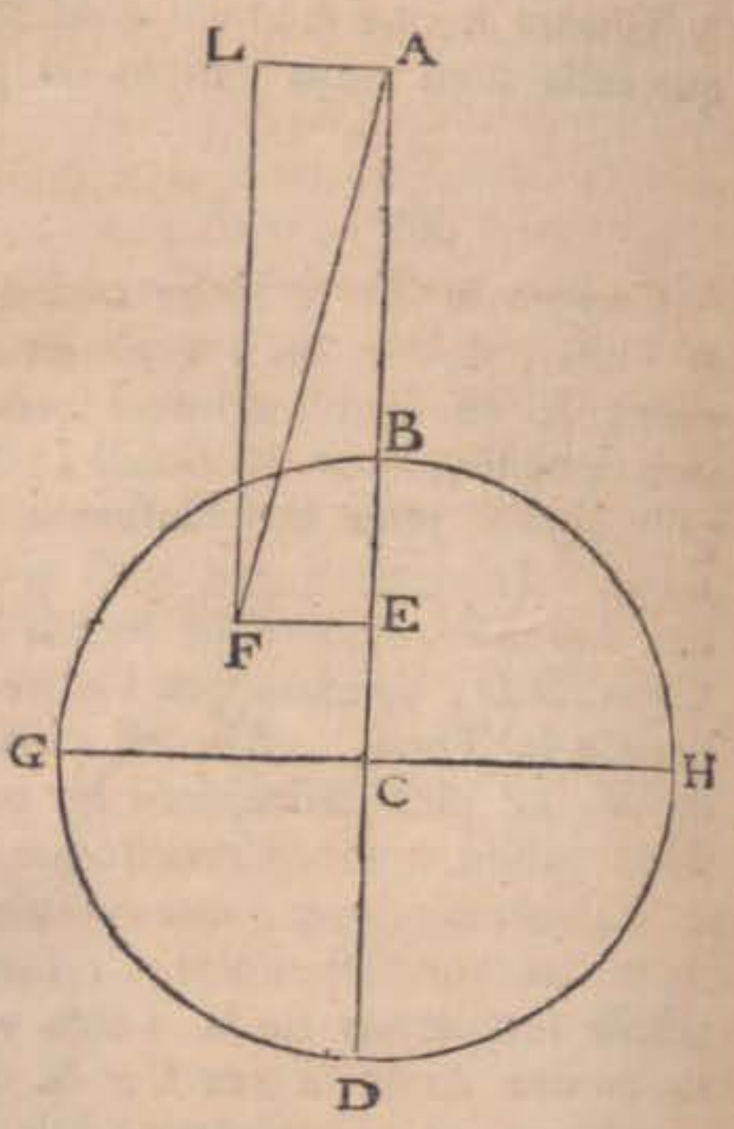
V.

Comme la Terre tâche continuellemènt à s'approcher du Soleil & de la Lune, il faut qu'il y ait en même tems d'autres forces qui la retiennent; & ce ſont les forces centrifuges de la Terre, qu'elle a par ſon mouvement autour du Soleil, & autour du centre de Gravité (je l'appelle ainſi, pour me conformer à l'uſage) qui eſt entre la Terre & la Lune. Je démontrerai auſſi ci-deſſous, que cette force centrifuge doit être ſuppoſée égale dans toutes les parties de la Terre, & parallele à la Ligne *AD*, pendant que l'autre force ſe répand inégalement ſur les parties de la Terre. Elle eſt plus grande dans les parties les plus proches de *A*, & plus petite dans les parties qui en ſont plus éloignées, & cela en raiſon quarrée reciproque des Diſtances. Cette raiſon ſuppoſée, le Calcul fait voir, que pourvû que les Couches concentriques de la Terre autour du Point *C*, ſoient homogenes, la force moyenne, qui pouſſe les parties de la Terre vers *A*, eſt préciſément celle qui répond au centre de la Terre *C*; & que c'eſt dans ce centre *C*, où la force centrifuge eſt préciſément égale à la force centripete. Ainſi chaque partie qui eſt entre *C* & *B*, eſt plus pouſſée vers *A*, qu'elle n'eſt repouſſée; & au contraire chaque partie ſituée entre *C* & *D*, eſt moins pouſſée vers *A*, qu'elle n'eſt repouſſée; de ſorte qu'en s'imaginant deux Canaux communiquans entre eux *GH* & *BD*, on voit que chaque goute dans la partie *CB*, eſt tirée vers *A*, & que chaque goute dans la partie *CD*, eſt pouſſée dans un ſens contraire. Cela diminue l'action de la péſanteur vers le centre de la Terre dans le Canal *BD*, pendant que cette même péſanteur n'eſt pas diminuée dans le Canal *GH*, d'où il arrivera encore un allongement autour de l'Axe *BD*, ce que je m'étois propoſé de faire voir.

Le Calcul montre que cette raiſon eſt en ſoi-même de fort peu d'importance; qu'elle ne ſçauroit allonger l'Axe *BD* conſidérablement. Mais ſon reſultat eſt aſſez comparable avec celui de l'allongement expoſé auparavant. On prévoit d'ailleurs encore que l'allongement produit par cette raiſon, doit être égal dans les Canaux *BC* & *CD*, la différence ne pouvant être ſenſible; & ainſi les Points *B* & *D* reſteront encore également éloignés du centre *C*.

VI.

Une troiſiéme raiſon, qui peut allonger davantage l'Axe *BD*, eſt que par l'allongement même, produit par les deux cauſes précedentes,



la péſanteur terreſtre qui fait deſcendre tous les Corps vers le centre *C*, eſt changée. Cette péſanteur peut être conſidérée comme égale dans les Canaux *GC* & *BC*, ou *DC* à des Diſtances égales du centre *C*, tant que la Terre eſt ſuppoſée Sphérique ; mais cette Sphéricité ôtée, il eſt naturel que cette égalité ne pourra plus ſubſiſter. Il eſt auſſi vraiſemblable que la péſanteur eſt diminuée dans les Canaux *CB* & *CD*, & qu'ainſi l'Axe doit encore être prolongé. Pour calculer cet allongement, nous aurons recours au Syſtême de M. Newton, qui ſuppoſe la péſanteur produite par l'Attraction commune de la matiere en raiſon quarrée reciproque des Diſtances. Ce n'eſt pas que je croye cette hypotheſe bien démontrée ; car la concluſion de la Gravitation mutuelle des Corps du Syſtême du Monde en raiſon quarrée reciproque des Diſtances, qu'on ne ſçauroit plus nier, à une ſemblable attraction univerſelle de la matiere, de laquelle M. Newton déduit la péſanteur ; cette conſéquence, dis-je, demande beaucoup d'indulgence. Mais je l'adopterai pour ce ſujet, parce que tous les autres Syſtêmes ſur la péſanteur me ſeroient inutiles : c'eſt le ſeul, qui étant du reſſort de la Géometrie, donne des meſures aſſurées & fixes ; & il eſt d'ailleurs digne de l'attention de tous les Géometres & Phyſiciens.

VII.

Les trois cauſes que je viens d'expoſer, comme pouvant & devant allonger la Terre autour de la Ligne qui paſſeroit par le centre du Soleil & de la Lune, ſont d'une force aſſez égale ; de ſorte qu'il faudra tenir compte de toutes, quoique chacune ſoit ſi petite, qu'elle ne ſçauroit allonger la Terre au delà d'un petit nombre de pieds, & peut-être moins d'un pied. Il ſera bon de remarquer ici que ce qui, après le Calcul, exprime leſdits allongemens, eſt toujours un certain multiple, ou ſous-multiple de $\frac{b\,g}{a\,G} \times b$, entendant par b le rayon de la Terre, par

a la diſtance du luminaire en queſtion & par $\frac{g}{G}$ la raiſon qui eſt entre la péſanteur d'un Corps placé en B vers A, & ſa péſanteur vers C, laquelle raiſon eſt extrêmement petite.

J'ai jugé à propos d'alleguer ici cette Formule, que le Calcul m'a enſeigné, afin que ceux qui voudroient le faire après moi, ſçachent d'abord quels termes on peut rejetter, comme inutiles, qui rendent les Calculs extrêmement pénibles, & qui ſe trouvent au bout du Calcul, n'être d'aucune importance. Ce ſeroit une choſe ridicule, de vouloir faire ici attention à des parties d'une Ligne qui proviendroient, ſi ladite quantité $\frac{b\,g}{a\,G} \times b$ étoit encore multipliée par $\frac{b}{a}$, ou par $\frac{g}{G}$.

VIII.

Notre deſſein eſt d'abord de chercher & d'exprimer analytiquement les allongemens dont nous venons de parler. On peut les trouver par rapport aux deux premieres cauſes, indépendamment de la Figure de la Terre; mais par rapport à la troiſiéme cauſe expoſée au ſixiéme Article, il faut ſuppoſer la Terre, c'eſt-à-dire, le Méridien $BGDH$ d'une Figure donnée; & c'eſt l'hypotheſe la plus naturelle, de la ſuppoſer elliptique, ayant pour Axes les Lignes BD & GH; quelle qu'elle ſoit, elle n'en ſçauroit être ſenſiblement différente, & ſi elle l'étoit, cela ne ſçauroit produire un changement bien conſidérable ſur le rapport des deux Axes BD & GH, que nous cherchons. Outre cela nous verrons que c'eſt ici un Problême, qui dépend encore de la loi des changemens dans les Denſités des couches de la Terre. M. Newton ſuppoſe la Terre par-tout homogene. Il ne l'a fait apparemment, que pour faciliter le Problême, qui eſt aſſez difficile dans toute autre hypotheſe. Mais cette ſuppoſition de M. Newton n'a aucune vraiſemblance; je dirai même, qu'elle ſeroit fort peu favorable à notre Syſtême, comme nous le verrons dans la ſuite. C'eſt pourquoi je n'ai pas voulu reſtreindre ſi fort la Solution du Problême en queſtion. J'ai cru que je payerois trop cher l'avantage d'applanir les difficultés du Problême, & les peines du Calcul. J'ai donc rendu notre Queſtion infiniment plus générale, pour en tirer tous les Corollaires, & pour choiſir ceux qui conviennent le plus à notre ſujet, & qui rendront par-là même plus vraiſemblables les hypotheſes, auxquelles ils appartiennent.

IX.

Voici à preſent nos hypotheſes. Nous conſidererons la Terre, comme

me naturellement ſphérique, & compoſée de couches concentriques: Nous ſuppoſerons ces couches homogenes, chacune dans toute ſon étendue; mais qu'elles ſont de différentes Denſités entre elles, & que la loi des variations de leur Denſité ſoit donnée. Quant à la Sphericité de la Terre, que nous ſuppoſerons, on voit bien qu'il ſeroit ridicule de s'y arrêter, puiſque l'élevation des eaux de l'Océean, cauſée par les deux Luminaires, ne ſçauroit différer ſenſiblement, que la Terre ſoit un peu applanie, ou un peu allongée. La ſuppoſition de l'Homogénéité des couches concentriques, ne doit pas non plus nous faire de la peine, puiſqu'on ne ſçauroit donner aucune raiſon, pourquoi elles devroient être hétérogenes.

CHAPITRE II.

Contenant quelques Lemmes ſur l'Attraction des Corps.

I.

JE prie encore une fois le Lecteur, de ne conſidérer ce Chapitre, que comme hypothétique. Je ne ſuppoſe l'Attraction univerſelle de la matiere, que parce que c'eſt la ſeule hypotheſe, qui admette des Calculs, & qu'elle eſt d'ailleurs aſſez bien fondée, pour mériter l'attention de tous les Philoſophes du monde.

On appelle au reſte Attraction qu'exerce un Corps *A* ſur un Corps *B*, la force accéleratrice, que le Corps *B* acquiert à chaque inſtant, en tombant vers *A*. On voit donc que l'effet de l'Attraction du Corps *A* ſur le Corps *B*, eſt de communiquer à celui-ci une péſanteur, qu'on ſuppoſe proportionnelle à la maſſe du Corps *A* diviſée par le quarré de la Diſtance; & cette péſanteur doit encore être multipliée par la maſſe du Corps *B*, pour avoir la force que ce Corps exerce s'il eſt empêché de s'approcher du Corps *A*.

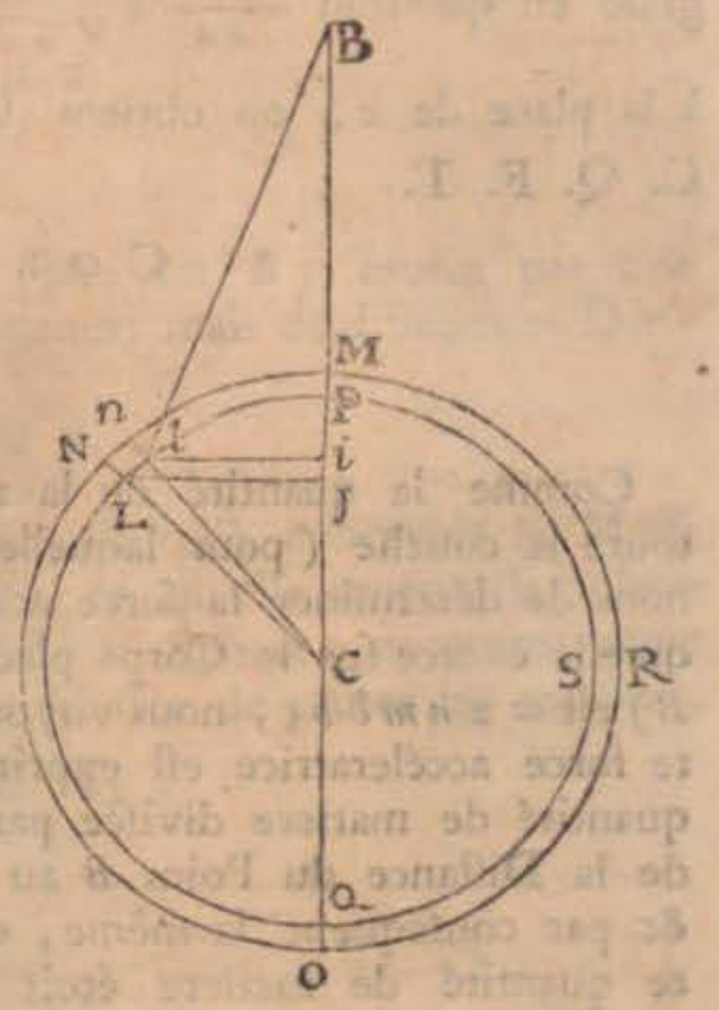
PROBLEME.

II.

Soit une couche ſphérique homogene, infiniment mince; & d'une épaiſſeur égale, compriſe entre les ſurfaces ſphériques *M N O R* & *P Q L S*, trouver l'Attraction, ou la force accéleratrice, que cette couche exercera ſur un Corps placé au point *B*, pris hors de la ſurface extérieure.

SOLU-

SOLUTION.



Qu'on tire la droite BO par le Point B & le Centre C, dans laquelle on prendra deux Points infiniment proches J & i: on tirera ennſuite les deux Perpendiculaires JL & il, & par les Points L & l, on tirera du centre les droites CN & Cn. Soit à préſent $CB=a$; $CJ=x$; $Ji=dx$; $CP=b$; PM ou LN (que nous regardons comme infiniment petite) $=6$: la Denſité de la matiere de la couche $=m$.

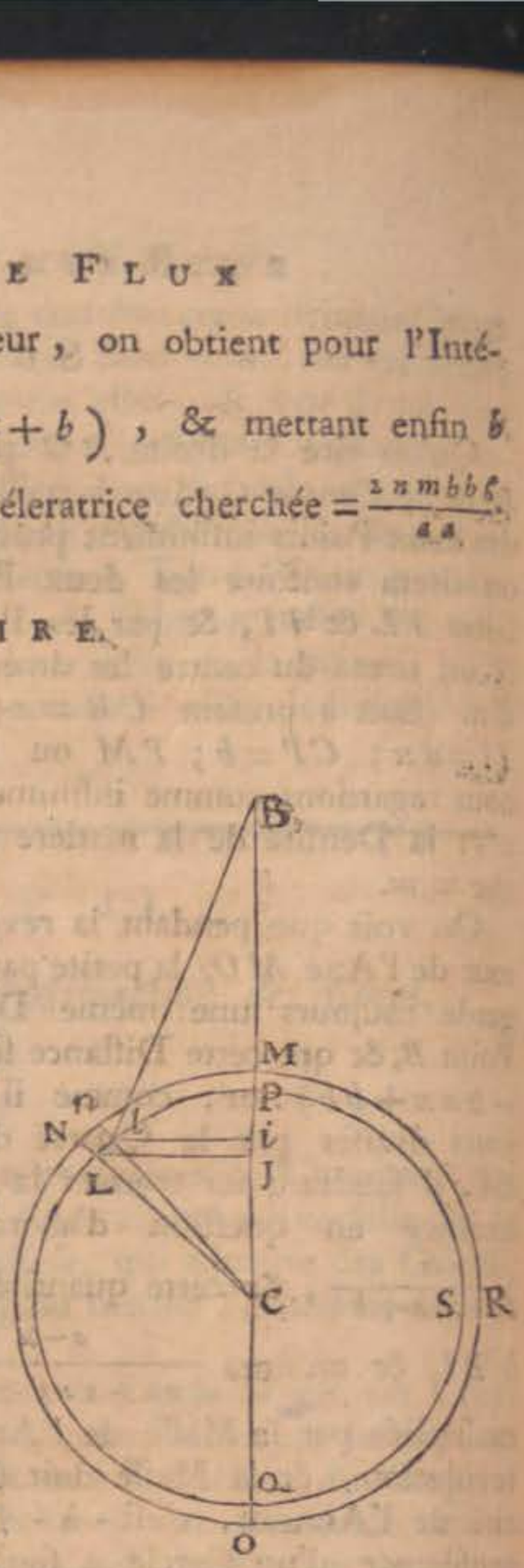
On voit que pendant la revolution autour de l'Axe MO, la petite partie $NLln$ garde toujours une même Diſtance du Point B, & que cette Diſtance ſera $=\sqrt{(aa-2ax+bb)}$: or, comme il faut toujours diviſer par le Quarré des Diſtances, il faudra pour trouver la force accélératrice en queſtion d'abord prendre $\frac{1}{aa-2ax+bb}$, & cette quantité doit être multipliée par la raiſon de Bi à Bl, & on aura $\frac{a-x}{(aa-2ax+bb)^{\frac{3}{2}}}$: & cette quantité doit encore être multipliée par la Maſſe de l'Anneau, que la partie $NLnl$ forme par ſa revolution, & la Maſſe doit être exprimée par la Denſité m & la capacité de l'Anneau, c'eſt-à-dire (en nommant n la raiſon de la circonférence d'un Cercle à ſon rayon) par $m\times NL\times Ll\times n\times LJ$: ou par $m\times 6\times\frac{bdx}{\sqrt{(bb-xx)}}\times n\times\sqrt{(bb-xx)}$ ou enfin par $nmb6dx$; de ſorte qu'on a la force accélératrice abſoluë produite par ledit Anneau $=\frac{nmb6(a-x)dx}{(aa-2ax+bb)^{\frac{3}{2}}}$, dont l'Intégrale exprimera l'Attraction cherchée de toute la couche. Pour trouver cette Intégrale, nous ſuppoſerons $aa-2ax+bb=yy$, & nous aurons $\int\frac{nmb6(a-x)dx}{(aa-2ax+bb)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{-nmb6(aa-bb+yy)dy}{2aayy}$ $=\frac{nmb6}{2aa}\times\left(\frac{aa-bb-yy}{y}+C\right)=\frac{nmb6}{2aa}\times\left(\frac{2ax-2bb}{\sqrt{aa-2ax+bb}}+C\right)$, entendant par C une Conſtante convenable: pour la trouver il faut remarquer, que l'Intégrale doit être $=o$, lorſque $x=-b$, d'où l'on tire

$\epsilon = \frac{2ab+2bb}{a+b} = 2b$: ſubſtituant cette valeur, on obtient pour l'Intégrale en queſtion $\frac{nmb\zeta}{aa}\left(\frac{ax-bb}{\sqrt{aa-2ax+bb}}+b\right)$, & mettant enfin b à la place de x, on obtient la force accéleratrice cherchée $= \frac{2nmbb\zeta}{aa}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

III.

Comme la quantité de la matiere de toute la couche (pour laquelle nous venons de déterminer la force accéleratrice, qu'elle exerce ſur le Corps placé au point B) eſt $= 2nmbb\zeta$, nous voyons que cette force accéleratrice eſt exprimée par la quantité de matiere diviſée par le quarré de la Diſtance du Point B au Centre C, & par conſéquent la même, que ſi cette quantité de matiere étoit concentrée au Centre.



SCHOLIE.

IV.

On remarquera que cette Solution n'a lieu, que lorſque le Point B eſt placé hors de la couche, parce que dans notre Calcul nous avons ſuppoſé, que chaque Anneau formé par la revolution de la partie $NLln$ produit une force accéleratrice du même côté, ce qui n'a plus lieu, lorſque le Point B eſt placé entre les deux ſurfaces, ou au-dedans de la ſurface intérieure. Je ne dirai rien de ces deux cas, dont chacun demande une Solution particuliere, parce que nous n'en aurons pas beſoin, & qu'ils ont déja été reſolus par l'Auteur de ces Problêmes. Je n'aurois même rien dit du cas que nous venons de réſoudre, comme pareillement réſolu par M. Newton, ſi je n'avois pas crû, qu'il étoit convenable de ſuivre toutes les traces qui nous menent à l'intelligence de notre Queſtion principale: auſſi ces précautions ſont-elles néceſſaires, pour pouvoir toujours exprimer d'une même façon les Quantités conſtantes; & ainſi nous nous ſouviendrons toujours

dans

dans la ſuite d'exprimer la force accéleratrice d'un Corps infiniment petit, par la Maſſe diviſée par le quarré de la Diſtance, & de dénoter la Maſſe par le produit de ſon étenduë, & de ſa Denſité.

PROBLEME.

V.

Trouver l'Attraction pour un Corps placé en *B*, cauſée par une Sphere ſolide, compoſée de couches homogenes; mais de différentes Denſités entre elles.

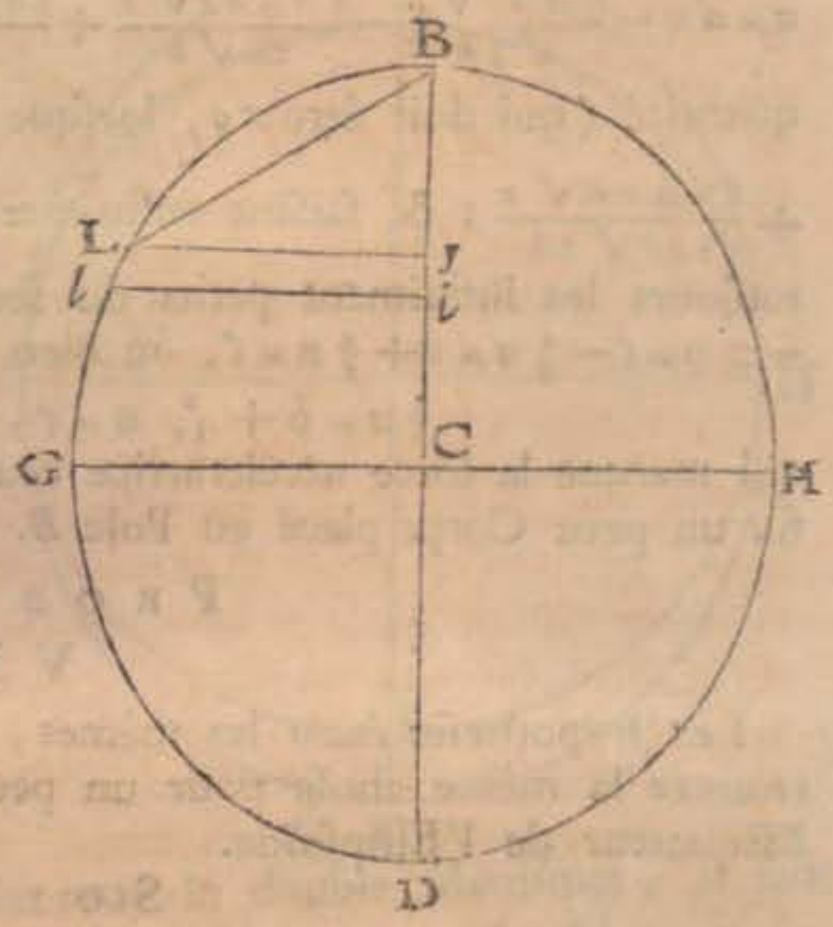
SOLUTION.

Il paroît par le troiſiéme Article, qu'on n'a qu'à concevoir la Maſſe de toute la Sphere ramaſſée au Centre *C*, & qu'elle cauſera la même Attraction, tant que le Point *B* eſt hors de la Sphere: nommant donc *M* la Maſſe du Globe, ou la ſomme des Maſſes de toutes les couches, l'Attraction cherchée ſera $= \frac{M}{aa}$. C. Q. F. T.

PROBLEME.

VI.

Soit *B G D H* une Ellipſe preſque circulaire, c'eſt-à-dire, dont la différence des Axes *B D* & *G H* ſoit regardée comme infiniment petite; & qu'on conçoive cette Ellipſe former par ſa rotation autour de l'Axe *B D*, un Sphéroïde homogene. On demande la force accéleratrice, ou l'attraction que ce Sphéroïde produira ſur un Corps placé au Pole *B*.



SOLUTION.

Soit la Denſité de la matiere exprimée par μ; le petit demi Axe $GC = b$; le grand demi Axe $BC = b + f$; $BJ = x$; $Ji = dx$; on aura la perpendiculaire $LJ = \frac{b+f}{b} \times \sqrt{2(b+f)x - xx}$. On voit facilement

ment * que l'Attraction cauſée par la couche, qui répond au Rectangle $LJil$, eſt $= n\mu dx - n\mu dx \times \frac{BJ}{BL}$, c'eſt-à-dire, par $n\mu dx - n\mu dx : \sqrt{xx + \frac{6b}{(b+6)^2} \times (2bx + 26x - xx)}$ ou par $n\mu dx - (b+6)\, n\mu x dx : \sqrt{(2b6xx + 66xx + 2b^3x + 2bb6x)}$: Dans cette derniere quantité, nous rejettons le Terme $66xx$, comme devant être comparé aux infiniment petits du ſecond ordre, & nous changerons le Signe radical du Dénominateur en Signe exponentiel de Numerateur; & de cette maniere nous aurons $n\mu dx - (b+6)\, n\mu x dx \times (2b^3x + 2b6xx + 2bb6x)^{-\frac{1}{2}}$: or on ſçait par la formation des ſuites de M. Newton, que $(2b^3x + 2b6xx + 2bb6x)^{-\frac{1}{2}}$ eſt $= (2b^3x)^{-\frac{1}{2}} - (2b^3x)^{-\frac{1}{2}} \times (b6xx + bb6x)$: ſubſtituant donc cette valeur, on obtient $n\mu dx - \frac{(b+6)n\mu x dx}{\sqrt{2b^3x}} + \frac{(b+6)\, n\mu x dx\, (b6xx + bb6x)}{2b^3x\sqrt{2b^3x}}$, qui marque l'action de la couche formée par la rotation du Rectangle $LJil$: à la place de cette quantité, on peut encore, en multipliant les quantités à multiplier, & rejettant les termes affectés de la ſeconde Dimenſion de 6, poſer $n\mu dx - \frac{n\mu dx\sqrt{x}}{\sqrt{2b}} - \frac{6n\mu dx\sqrt{x}}{2b\sqrt{b}} + \frac{6n\mu xdx\sqrt{x}}{2bb\sqrt{b}}$, & l'Intégrale de cette quantité (qui doit être $= o$, lorſque $x = o$) eſt $= n\mu x - \frac{2n\mu x\sqrt{x}}{3\sqrt{2b}} - \frac{6n\mu x\sqrt{x}}{3b\sqrt{2b}} + \frac{6n\mu xx\sqrt{x}}{5bb\sqrt{2b}}$; & faiſant enfin $x = 2b + 26$, on trouve, en rejettant toujours les infiniment petits du ſecond ordre $2n\mu b + 3n\mu 6 - 2n\mu b - 2n\mu 6 - \frac{2}{3}n\mu 6 + \frac{4}{5}n\mu 6$, ou bien enfin

$$\tfrac{2}{3}n\mu b + \tfrac{2}{15}n\mu 6,$$

qui marque la force accélératrice cauſée par l'action de tout l'Ellipſoïde ſur un petit Corps placé au Pole B. C. Q. F. T.

PROBLEME.

VII.

Les hypotheſes étant les mêmes, que dans la propoſition précedente, trouver la même choſe pour un petit Corps placé en G, qui eſt ſous l'Equateur de l'Ellipſoïde.

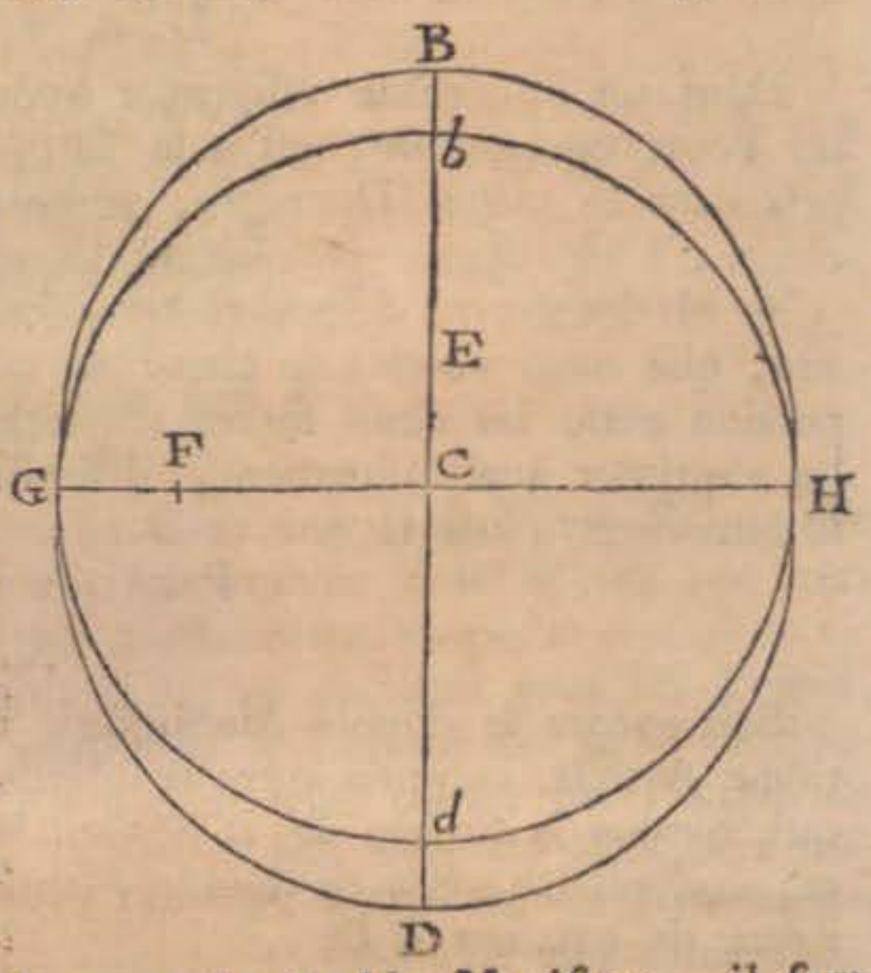
SOLUTION.

Il eſt facile de démontrer par la Géometrie, que toute Section de l'Ellipſoïde parallele à l'Axe de Rotation BD, fait une Ellipſe ſembla-

* Ceci ſe trouve demontré par le Cor. 1. de la Prop. XC. du 1er. Livre de Mr. Newton; on y voit que l'Attraction du point B par le Cercle dont LJ eſt le Rayon, eſt $1 - \frac{BJ}{BL}$ qu'il faut multiplier par la Maſſe du petit Cylindre dont ce Cercle eſt la Baſe & dont Ji eſt la hauteur pour avoir l'Attraction cauſée par la Couche qui répond au Rectangle $LJil$.

ble à l'Ellipſe génératrice *B G D H*. Conſidérons l'Ellipſoïde comme compoſée de la Sphere inſcrite, ayant pour Diametre le petit Axe *G H*, & de l'écorce formant un double Menisque: l'action de la Sphere doit être exprimée par $\frac{2}{3} n \mu b$, comme nous avons démontré au 5. §. Car la maſſe de cette Sphere eſt $\frac{2}{3} n \mu b^3$, & la diſtance du Point *G* au centre eſt $= b$. Il nous reſte donc à chercher quelle action reſulte du double Menisque.

Concevons pour cet effet tout l'Ellipſoïde partagé en couches paralleles & perpendiculaires à *G H*. Soit la diſtance du centre d'une de ces couches au Point $G = x$; ſon épaiſſeur $= dx$; il n'eſt pas difficile de voir * que la capacité du bord de cette couche (qui fait partie du double Menisque en queſtion) eſt $= \frac{n \ell}{2b} \times (2bx - xx)\, dx$, & que ce bord étant multiplié par la Denſité μ, en donne la quantité de matiere $= \frac{n \mu \ell}{2b} \times (2bx - xx)\, dx$. Or toutes les parties de ce bord infiniment mince, peuvent être cenſées agir également, & avec une même obliquité ſur le Corps placé au point *G*: on n'a donc qu'à multiplier cette quantité de matiere par la raiſon de la diſtance du centre de la couche au Point *G* à la diſtance du bord de la couche au même Point *G*, & diviſer par le quarré de cette Diſtance, pour avoir l'attraction du bord de la couche, qui ſera donc $\frac{n \mu \ell}{2b} \times (2bx - xx)\, dx \times \frac{x}{\sqrt{2bx}} \times \frac{1}{2bx}$, ou bien $\frac{n \mu \ell\, dx}{4bb\sqrt{2b}} \times (2b\sqrt{x} - x\sqrt{x})$ dont l'Intégrale eſt $= \frac{n \mu \ell}{4bb\sqrt{2b}} \times (\frac{4}{5} bx\sqrt{x} - \frac{1}{5} xx\sqrt{x})$ puiſqu'il ne faut point ajoûter ici de conſtante;



& pour avoir enfin l'Attraction de tout le double Menisque, il faut mettre $x = 2b$, après quoi on aura ſimplement $\frac{4}{15} n \mu b$. Si on ajoûte

* Car l'aire de l'Ellipſe éloignée de G de la quantité x eſt $\frac{n}{2b} \times b + \ell (2bx - xx)$ & l'aire du Cercle inſcrit eſt $\frac{n}{2} (2bx - xx)$. Donc otant cette aire du Cercle de celle de l'Ellipſe reſte $\frac{n \ell}{2b} (2bx - xx)$ pour l'aire de Menisque.

à cette quantité l'action de la Sphere inſcrite, on aura l'attraction cherchée de tout l'Ellipſoïde ſur un Corps placé au Point $G = \frac{2}{3} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu \ell$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.
VIII.

On voit par ces deux dernieres Propoſitions, que les forces accéleratrices au Pole, & ſous l'Equateur dans un Ellipſoïde homogene, ſont comme $\frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \ell$ à $\frac{2}{3} n \mu \ell + \frac{4}{15} n \mu \ell$, ou comme $5b + \ell$ à $5b + 2\ell$, laquelle raiſon peut paſſer pour celle de 1 à $1 + \frac{\ell}{5b}$. Je vois que cela eſt conforme à ce que M. Newton dit à la page 380. * des *Princip. Math. Phil. Nat. Edit.* 2. pour déterminer la Proportion de l'Axe de la Terre au rayon de ſon Equateur. Quant à ſon raiſonnement, il n'y a peut-être que lui, qui pût y voir clair; car ce grand Homme voyoit à travers d'un voile, ce qu'un autre ne diſtingue qu'à peine avec un Microſcope.

LEMME.

Dans un Sphéroïde elliptique homogene, la force accéleratrice pour un Point quelconque, eſt à la force accéleratrice pour un autre Point pris dans le même Diametre, comme la diſtance du premier Point au centre, à la diſtance pareille du ſecond Point.

† M. Newton a démontré cette Propoſition à la 199. page de ſon Livre, que nous venons de citer: & comme il ne s'agit ici que de la proportion entre les deux forces accéleratrices, ſans qu'il ſoit queſtion de les exprimer analytiquement, il ſeroit ſuperflu, pour mon deſſein, de la démontrer à ma façon.

PROBLEME.
X.

Soit encore le double Meniſque, tel que nous l'avons décrit au ſeptieme Article, compris entre la ſurface de l'Ellipſoïde *G B D H*, & *GbHd*, qui marque la ſurface de la Sphere inſcrite; il s'agit de trouver la force accéleratrice, que ce double Meniſque produira au point *E*, pris dans l'Axe de rotation *B D*.

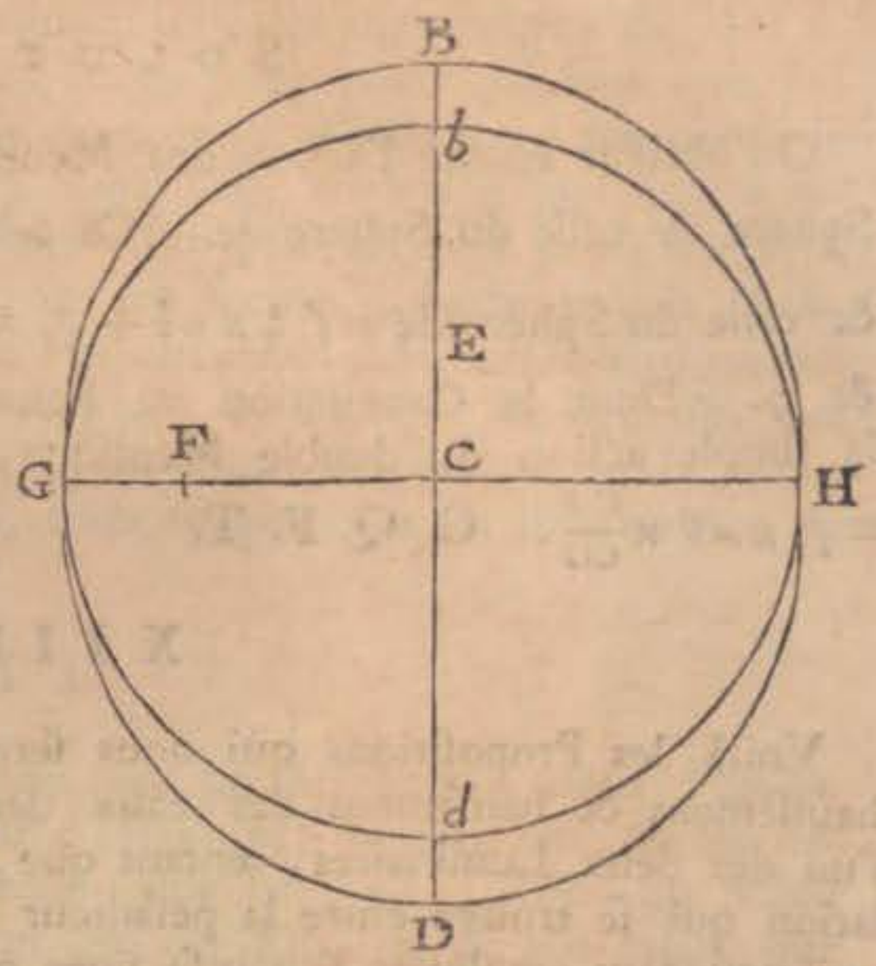
SOLUTION.

Nous garderons les dénominations de ci-deſſus: or on voit qu'on trouvera l'action du double Meniſque, en prenant celle de tout l'Ellipſoïde conſideré comme homogene avec les Meniſques, & en retranchant celle de la Sphere inſcrite. L'action de tout le Sphéroïde eſt en vertu

* Ceci ſe raporte à la page 80. & ſuiv. de ce Volume, & nous avons eſſayé d'éclaircir cet endroit de M. Newton dans la la Notte (r) & ſuivantes.

† C'eſt le Cor. 3. de la Prop. XCI. du Livre 1er. vol. 1er. pag. 519.

des 6 & 9 Articles $=(\frac{2}{3}n\mu b+\frac{2}{15}n\mu\beta)\times\frac{CE}{CB}$, & celle de la Sphere $=\frac{2}{3}n\mu b\times\frac{CE}{Cb}$: de là on tire la force accéleratrice, qui convient aux Menisques $=\frac{2}{3}n\mu b+\frac{2}{15}n\mu\beta)\times\frac{CE}{CB}-\frac{2}{3}n\mu b\times\frac{CE}{Cb}$. Substituons à la place de $\frac{CE}{Cb}$ cette quantité $\frac{CE}{CB-Bb}$, qui peut être censée égale à $\frac{CE}{CB}+\frac{Bb\times CE}{CB^2}$ (à cause que nous traitons la petite Bb, comme infiniment petite, par rapport à CB) & nous trouverons la force accéleratrice pour les Ménisques



$=\frac{2}{15}n\mu\beta\times\frac{CE}{CB}-\frac{2}{3}n\mu b\times\frac{Bb\times CE}{CB^2}=\frac{2}{15}n\mu\beta\times\frac{CE}{CB}-\frac{2}{3}n\mu\beta\times\frac{CE}{CB}$

$\left(\text{puisque }\frac{Bb}{CB}=\frac{\beta}{b+\beta}=\frac{\beta}{b}\right)=-\frac{8}{15}n\mu\beta\times\frac{CE}{CB}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

XI.

Le Signe négatif fait voir, que la Gravitation au Point E, causée par l'action des deux Ménisques, se fait vers le Pole B, & non vers le Centre C. Au reste on remarquera, que cette Proposition n'est vraie que pour les Points compris entre C & b, en excluant tous les Points, qui sont au-delà de b; & cela à cause que le Lemme du 9. §. ne sçauroit être appliqué à trouver la force accéleratrice causée par l'action de la Sphere pour le Point E, si ce Point est pris hors de la Sphere inscrite au Sphéroïde. Ainsi par exemple, au point B, la Gravitation causée par les Ménisques, se feroit vers le Centre avec une force accéleratrice $\frac{22}{15}n\mu\beta$. Je restreins ces Propositions, quoique ma Méthode suffise pour des solutions beaucoup plus générales; & cela pour ne me point engager dans des longueurs qui nous meneroient au-delà de notre sujet.

PROBLEME.

XII.

Trouver la même chose que dans l'Art. X. pour un Point quelconque F, pris dans une Ligne GH perpendiculaire à BD. SO-

SOLUTION.

On obtient encore l'action des Ménisques, en retranchant celle de la Sphere de celle du Sphéroïde. Or celle de la Sphere est $= \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CF}{CG}$, & celle du Sphéroïde $= (\frac{2}{3} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu b) \times \frac{CF}{CG}$, en vertu des §§ 7. & 9. Donc la Gravitation au Point F se fait vers le centre C par la simple action du double Ménisque, & la force accéleratrice y sera $= \frac{4}{15} n \mu b \times \frac{CF}{CG}$. C. Q. F. T.

XIII.

Voilà les Propositions qui nous seront nécessaires, pour mesurer les haussemens & baissemens des eaux dans la Mer libre par l'action de l'un des deux Luminaires, entant que ces variations répondent à la relation qui se trouve entre la pésanteur & la figure de la Terre. Ceux qui voudront employer l'analyse pure pour la Solution de nos deux derniers Problêmes, se plongeront dans des Calculs extrêmement pénibles, & verront par là l'avantage de notre Méthode.

CHAPITRE III.

Contenant quelques Considérations Astronomiques & Physiques, préliminaires pour la Détermination du Flux & Reflux de la Mer.

COmme le Flux & Reflux de la Mer dépendent de la Lune & du Soleil, on voit bien que notre sujet demande une exacte Théorie du mouvement de ces deux Luminaires. Quant au mouvement apparent du Soleil, on le connoit avec toute l'exactitude requise ici. Mais on est encore bien éloigné de sçavoir avec la même précision la Théorie de la Lune, qui est cependant d'une plus grande importance. Une idée qui m'est venuë là-dessus, d'employer le principe de la conservation de ce que l'on appelle communément *Forces vives* (principe déja employé sous un autre nom par le grand &. incomparable M. Huguens, pour trouver les Loix du choc des Corps parfaitement élastiques, & auquel on est redevable d'une grande partie des connoissances nouvelles dans la Dynamique, tant des Fluides, que des Solides:) Cette idée, dis-je, m'a conduit par un chemin fort abregé, à déterminer beaucoup

plus

plus exactement, que l'on n'a fait juſqu'ici, les mouvemens de la Lune, que l'on appelle communément irréguliers, mais qui ſont tous ſujets aux loix Méchaniques. Je m'étois propoſé d'inſerer ici ma nouvelle Théorie ſur la Lune; mais, comme notre ſujet n'eſt déja que trop étendu, & qu'il demande des diſcuſſions aſſez pénibles, je la différerai à une autre occaſion, où je la donnerai en forme d'Addition, ſi l'Académie trouve ce Traité digne de ſon attention. Je ne ferai donc ici qu'indiquer en gros les connoiſſances tirées du Syſtême du Monde, qui ſervent à donner un Syſtême général du Flux & Reflux de la Mer; & quand nous viendrons au détail, nous ſuppoſerons les mouvemens de la Lune parfaitement connus.

II.

On ſçait que la Lune & la Terre ſont un Syſtême à part: l'un & l'autre de ces Corps tournent autour d'un Point, & font leur revolution dans un même tems, décrivant chacun une Ellipſe: l'action du Soleil ſur l'un & l'autre Corps, change un peu ces Ellipſes, & fait même que la proportion des diſtances dudit Point aux Centres de la Lune & de la Terre, ne demeure pas exactement la même: mais, comme nous ne prétendons juſqu'ici que d'expoſer en gros les choſes néceſſaires à notre Queſtion, nous ne ferons point d'attention à ces inégalités, & conſidérerons la Terre & la Lune, comme faiſant des Ellipſes parfaites & ſemblables entre elles autour d'un même Point.

III.

Par ladite Revolution, les deux Corps tâchent à s'éloigner l'un de l'autre; & cet effort eſt contrebalancé par leur Gravitation mutuelle: & comme la Terre fait autant d'effort pour s'approcher de la Lune, que celle-ci en fait pour s'approcher de la Terre, il faut que les forces centrifuges ſoient auſſi égales: d'où il ſuit que le Point autour duquel ces deux Corps tournent, doit être placé, en ſorte que les forces centrifuges ſoient égales: c'eſt là la premiere idée. Il vaudroit donc mieux appeller ce Point, *Centre de Forces centrifuges*, ou bien, puiſque les viteſſes gardent dans notre hypotheſe une proportion conſtante, *Centre de Maſſes*, que *Centre de Gravité*. Il eſt vrai que ces mots reviennent au même, à prendre celui du Centre de Gravité dans le ſens commun: Mais quelle idée y peut-on attacher, lorſque la péſanteur eſt inégale dans les différentes parties du Corps? Il n'y a aucun Point alors, qu'on puiſſe nommer tel, quelque définition qu'on donne à ce mot. Quoi qu'il en ſoit, il eſt certain que les diſtances du Point en queſtion aux Centres de la

Terre & de la Lune, ſont en raiſon reciproque des Maſſes ou Quantités de matiere de ces Corps.

IV.

Si la Lune & la Terre étoient des Corps parfaitement homogenes dans toute leur étenduë, ou du moins chacun compoſé de Couches concentriques parfaitement homogenes, & qu'ils fuſſent parfaitement ſphériques, ſans avoir aucun mouvement, imprimé originairement, ou produit par une Cauſe Phyſique, autour d'un Axe paſſant par leur propre Centre de Gravité, il eſt clair, que toutes les parties des Corps garderoient pendant leur Revolution un Parallélifme; de ſorte que les deux Corps vûs du Centre de Gravité commun, paroîtroient faire préciſément le tour en ſens contraire autour d'un Axe perpendiculaire au plan des Orbites, pendant chaque Revolution des Corps. Cependant cela ne ſe fait point dans la Lune: car nous ſçavons qu'elle nous montre conſtamment une même face (je ne fais pas encore attention à quelques legers changemens;) & cela eſt contraire au Parallélifme, que nous venons d'alléguer: quoique ce ne ſoit pas ici proprement l'endroit pour expliquer ce Phénomene de la Lune, je ne laiſſerai pas de le faire, pour nous préparer à ce que nous aurons à dire ſur la Terre, comme eſſentiel à notre matiere.

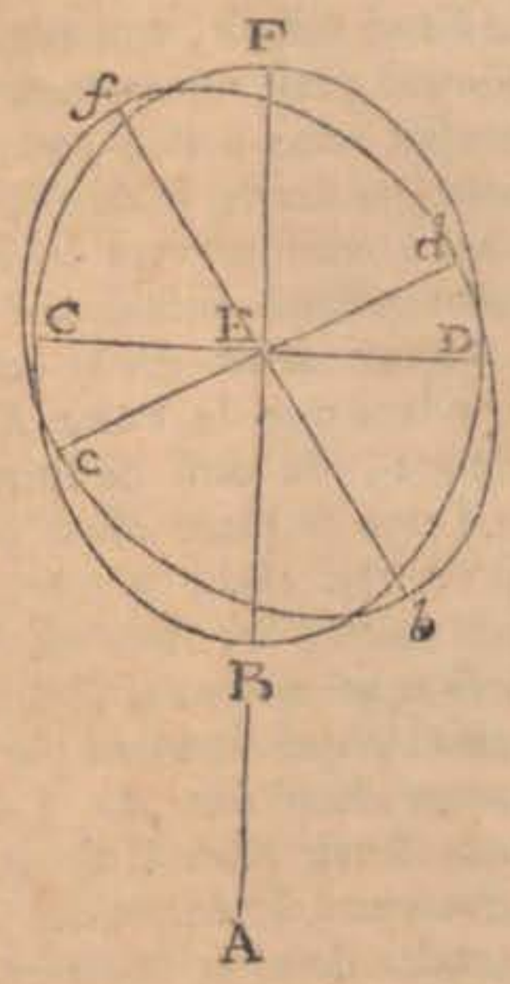
V.

Conſidérons donc, que la parfaite Homogénéité dans les Couches concentriques de la Lune, auſſi bien que ſa parfaite Sphéricité, ſont moralement impoſſibles: mais il n'eſt pas encore expliqué, comment on peut déduire de là, pourquoi la Lune nous montre toujours une même face. Il ne ſuffit pas de dire que le Centre de Gravité de la Lune pris dans le ſens commun, tâche toûjours à s'éloigner, le plus qu'il eſt poſſible, du Centre de Revolution. Quelques inégales que fuſſent les Couches, & quelque irréguliere que fut la Figure, la Lune garderoit toujours le Parallélifme des Faces, s'il n'y avoit pas une autre raiſon; ſçavoir, celle de l'inégalité de péſanteur de ſes Parties vers la Terre: les parties ayant d'autant plus de péſanteur, qu'elles ſont plus près de la Terre: c'eſt cette raiſon, qu'il faut joindre à l'une des deux autres, ou à toutes les deux enſemble; de ſorte que quand même la Lune ſeroit parfaitement homogene, ſa ſeule Figure, jointe à l'inégalité de péſanteur de ſes parties vers le Centre de la Terre, pourroit même produire le Phénomene en queſtion.

Soit *A* le Centre de la Terre: *BCFD*, par exemple, une Ellipſe, dont l'Axe *BF* ſoit le plus grand, & *CD* le plus petit: que cette Ellipſe forme par ſa Revolution autour de l'Axe *BF*, le Corps de la Lu-

ne.

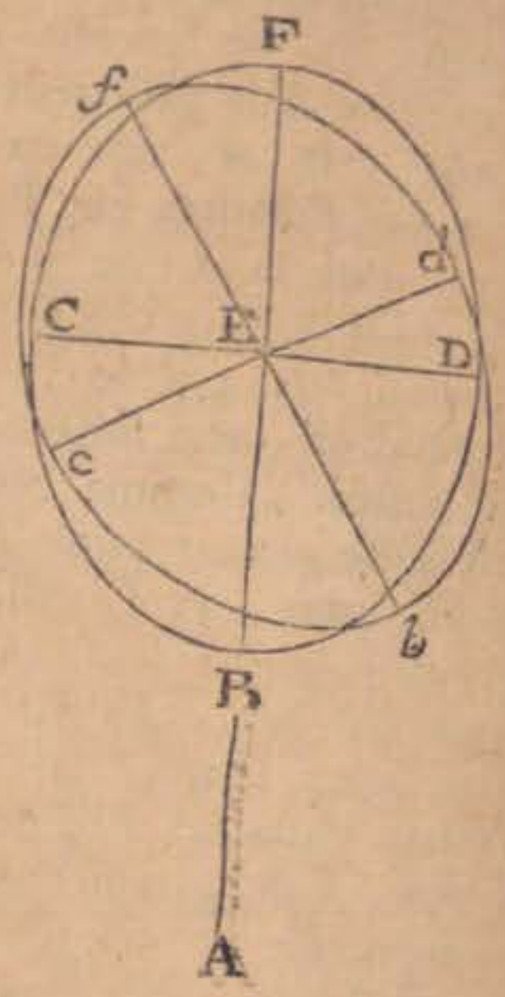
ne. Suppoſons après cela la Lune homogene & mobile autour de ſon Centre E, & ſervons-nous de l'hypotheſe ordinaire, que la péſanteur de chaque partie de la Lune vers A, ſoit en raiſon quarrée reciproque des diſtances au Point A. Cela étant, je dis, que la Lune montrera conſtamment au Point A la Face CBD, & que l'Axe FB paſſera toujours par le Point A, & que la Lune reprendroit cette ſituation, dès qu'elle en ſeroit détournée. Comme cette matiere eſt aſſez intéreſſante, tant pour l'Aſtronomie, que pour la Phyſique, je l'expliquerai par un exemple, qui rendra fort ſenſible, tout ce que nous venons de dire. Je dis donc qu'on doit regarder, à cet égard, la Lune, comme un Corps flottant dans un Fluide; car les parties d'un tel Corps, ſont pareillement animées de différentes péſanteurs: or on ſçait qu'un Corps flottant, qui n'eſt pas Sphérique, ou qui étant tel, n'eſt pas homogene, n'eſt pas indifférent à chaque ſituation; mais qu'il affecte conſtamment de certaines ſituations, qu'il reprend auſſi-tôt qu'il en a été détourné. Quelquefois le Corps n'a qu'une ſeule ſituation d'Equilibre; d'autres fois pluſieurs, ſuivant la ſtructure du Corps: Mais on ſe tromperoit toujours, ſi l'on croyoit, que le Centre de Gravité du Corps tâche à ſe mettre dans l'endroit le plus bas qu'il eſt poſſible; de même qu'on ſe trompe, en diſant, que le Centre de Gravité de la Lune, tâche à s'éloigner, le plus qu'il eſt poſſible, du Centre de la Terre. On voit donc aſſez, que la cauſe principale de ce que la Lune nous préſente toujours une même face, eſt l'inégalité de péſanteur; & à cette cauſe, il faudra joindre, ou la non-parfaite Sphéricité, ou la non-parfaite Homogénéité des Couches de la Lune, ou les deux cauſes à la fois.



V I.

Comme la Queſtion que nous venons d'expliquer, entraîne celle d'une legere nutation de la Lune en Longitude, que les Aſtronomes ont obſervée, il ne ſera pas hors de propos de faire voir comment cette nutation découle de notre Théorie. Nous avons vû que le Sphéroïde $CBDF$ mobile autour d'un Point E, doit toujours montrer au Point A la Face CBD tant que le Point E reſte dans ſa place. Suppoſons à préſent, que ce Corps s'éloigne un peu de cette ſituation, en faiſant une rotation infiniment petite autour du Point E, la force qui tend à la remettre dans ſa ſituation naturelle, eſt de même infiniment petite; ce qui fait voir, que

que le Point *E* faiſant ſa revolution autour du Point *A*, ce ne ſçauroit plus être exactement la Face *CBD*, qui regarde vers *A*, parce qu'à chaque petit mouvement du Point *E*, la Lune fait une petite rotation autour de ce Point, pour garder le Paralléliſme, & la force qui tâche à tourner vers le Point *A* la Face *CBD*, étant encore infiniment petite, ne ſçauroit s'en acquitter aſſez-tôt : & ce ſera la même choſe pendant que le Point *E* parcourt un ſecond Elément, & ainſi de ſuite, juſqu'à-ce qu'à la fin la Lune ſe place aſſez obliquement, pour que la force, qui tâche à mettre la Lune dans ſa ſituation naturelle, ſoit aſſez grande, pour réparer, à chaque moment, une nouvelle petite inclinaiſon, qui ſurvient par la rotation du Point *E* autour du Point *A*. [Cette explication pourra nous ſervir dans la ſuite, pour démontrer un des principaux Phénomenes des Marées.] La Lune prendra donc la ſituation oblique *cbdf*, ſi ſa Revolution autour du Point *A* eſt ſuppoſée ſe faire de *E* vers *D*. Mais cette ſituation oblique demeureroit encore la même à l'égard de la Ligne *FA*, ſans que la Lune eût aucune nutation, ſi le Point *E* faiſoit ſa Revolution autour du Point *A* dans un Cercle parfait, & avec une viteſſe conſtante : c'eſt donc l'inégalité des diſtances *AE*, & des viteſſes du Point *E*, qui fait que l'obliquité de la ſituation *fcbd* varie ; & c'eſt cette variation qui fait la nutation de la Lune en Longitude.



VII.

Venons maintenant à la Terre, & examinons quel mouvement elle doit avoir autour du Centre de Gravité, qui eſt entre elle & la Lune : cette recherche eſt néceſſaire pour notre Queſtion, & elle ne ſera plus difficile, après ce que nous avons dit de la Lune dans cette vûë. Nous remarquerons donc, que ſi la Terre eſt parfaitement homogene, ſoit dans toute ſon étendue, ſoit ſeulement dans chacune de ſes Couches concentriques ; & ſi elle eſt en même tems parfaitement ſphérique, elle doit conſerver parfaitement un Paralléliſme dans la ſituation de ſes parties, pendant ſa Révolution. Cependant cette parfaite Homogénеïté, eſt moralement impoſſible ; & la parfaite Sphéricité a été refutée par les Obſervations les plus exactes. Ce Paralléliſme ſeroit donc alteré, de même qu'il l'eſt dans la Lune, & la Terre ne manqueroit pas de preſenter



ſenter à la Lune une même face, ſans le mouvement journalier de la Terre. Ce mouvement empêche l'action de la Lune; & l'effet de cette action étant, à cauſe dudit mouvement journalier, tantôt d'un côté de la Terre, tantôt de l'autre, il ne pourroit plus produire qu'une legere nutation journaliere dans l'Axe de la Terre, & quelque petite inégalité dans le mouvement journalier de la Terre. Mais l'une & l'autre doivent être tout-à-fait inſenſibles, à cauſe de la grandeur de la Maſſe de la Terre, de l'extrême petiteſſe de l'action de la Lune, & de la rapidité du mouvement journalier.

VIII.

On voit donc que la Terre fera ſa revolution autour du Centre de Gravité, qui lui eſt commun avec la Lune, de telle maniere que ſon Axe gardera conſtamment une ſituation parallele. Si nous conſidérons donc le mouvement journalier de la Terre à part, il eſt clair que l'autre mouvement doit être ſuppoſé ſe faire d'une maniere à garder un Paralléliſme dans toutes les Sections de la Terre. Cela étant, il s'enſuit que chaque point de la Terre fait, à l'égard de cet autre mouvement, une même Ellipſe; que chaque partie a une même force centrifuge, & que les Directions des forces centrifuges ſont par-tout paralleles entre elles. Et c'eſt ici le point principal, que je me ſuis propoſé d'établir, & de bien démontrer dans ce Chapitre.

IX.

Ce que nous venons de démontrer du mouvement de la Terre à l'égard de la Lune, doit auſſi s'entendre à l'égard du Soleil; en ſorte que la force centrifuge des parties de la Terre, par rapport à ſon Orbite annuelle, doit être cenſée la même, & leurs directions paralleles entre elles. Mais cette Propoſition n'eſt pas ſi eſſentielle à l'égard de l'Orbite annuelle, comme à l'égard de l'Orbite, qui ſe fait autour du Centre de Gravité, qui eſt commun à la Terre & à la Lune, à cauſe de l'extrême petiteſſe de cette derniere Orbite.

CHAPITRE IV.

Qui expoſe en gros la Cauſe des Marées.

I.

APrès avoir expliqué au premier Chapitre trois différentes raiſons, qui peuvent allonger la Terre autour des deux Axes, qui paſſent par les Centres des deux Luminaires, il n'eſt pas difficile de voir comment on doit déduire de ces allongemens le Flux & Reflux de la Mer, pourvû qu'on ait égard en même tems au mouvement journalier de la Terre. Il eſt clair que ce mouvement journalier doit faire continuellement changer de place les deux Axes d'Allongement. Mais il faut remarquer ici par avance, que l'action compoſée des deux Luminaires, peut toujours être conſiderée comme une action ſimple, quoi-qu'à la vérité fort irréguliere. Cependant cette conſidération ſuffit, pour voir en gros, que la Mer doit en chaque endroit s'élever & ſe baiſſer environ deux fois dans un jour. Mais il s'agit de mettre cette cauſe en tout ſon jour, d'en développer tous les effets, & de les reduire à leur juſte meſure, autant que les circonſtances peuvent le permettre.

II.

La Queſtion qui ſe préſente d'abord, & qui eſt en même tems la plus importante pour notre ſujet, eſt de trouver la quantité de l'allongement cauſé par chacun des deux Luminaires. Nous ne conſidérerons donc qu'un ſeul Luminaire. Voici, avant toutes choſes, les ſuppoſitions dont je me ſervirai dans les Calculs, & que j'ai déja expoſées en partie.

I. Nous ſuppoſerons que la Terre eſt naturellement ſphérique. Cette hypotheſe n'eſt que pour abréger le Calcul, & on voit bien que l'effet des deux Luminaires doit être ſenſiblement le même ſur une Terre ronde, ou un peu applatie, ou un peu allongée.

II. Que les Couches concentriques de la Terre ſont d'une même matiere, ou d'une même denſité. Cette ſuppoſition eſt ſans doute fort naturelle ; car les inégalités ne peuvent qu'être tout-à-fait inſenſibles: mais il me ſemble qu'il n'y a aucune vraiſemblance de ſuppoſer que la Terre eſt homogene dans toute ſon étendue, comme M. Newton l'a fait.

III. Que la Terre, que nous ſuppoſons ſans, l'action des Luminaires, ronde, eſt changée par l'action de l'un des deux Luminaires en Ellipſoïde, dont l'Axe paſſe par le Centre du Luminaire agiſſant. C'eſt l'hy-

l'hypotheſe de M. Newton; & quoi qu'on ne puiſſe pas le démontrer pour le Syſtême des Attractions, elle ne doit pas nous arrêter: car quelle que ſoit la Figure de la Terre après ce petit changement, on voit aſſez qu'elle ne ſçauroit s'éloigner ſenſiblement de l'Ellipſoïde. Auſſi trouvons-nous cette Figure elliptique dans toutes les hypotheſes, qu'on pourroit ſe former ſur la péſanteur, ſuſceptibles d'un Calcul & tant ſoit peu naturelles. D'ailleurs un petit changement dans cette Figure extérieure de la Terre, n'en ſçauroit produire, qui ſoit ſenſible, entre l'Axe du Sphéroïde, & le Diametre qui lui eſt perpendiculaire.

IV. Nous ſuppoſerons, que les Luminaires ne ſçauroient faire changer de figure toutes les Couches qui compoſent la Terre juſqu'au Centre. Car vraiſemblablement la Terre eſt, dans ſa plus grande partie, ſolide; & quand même elle ſeroit toute fluide, ſa Maſſe ſeroit trop grande, pour être miſe toute entiere en mouvement, & pour obéir aſſez vîte à une action auſſi petite. Ces refléxions m'ont engagé à conſidérer la Terre, comme un noyau ſphérique, compoſé de Couches parfaitement ſphériques & inaltérables par l'action des deux Luminaires, & inondé d'un Fluide homogene, tel que ſont les eaux de la Mer; & à ſuppoſer, qu'il n'y a que ce Fluide inondant, qui reçoive des impreſſions des Luminaires, & que ſa profondeur n'eſt pas ſenſible par rapport au rayon de la Terre. Cette hypotheſe eſt ſans contredit la plus naturelle, lorſque la Terre n'eſt pas ſuppoſée homogene dans toute ſon étenduë, mais, ſi on la ſuppoſoit homogene, comme M. Newton l'a fait, contre toutes les apparences de vérité, notre hypotheſe n'entre plus en ligne de compte.

V. Enfin nous ſubſtituerons à la place des Forces centrifuges, qui empêchent la Terre de tomber vers les Luminaires, un autre force qui agiſſe de la même façon, afin que nous puiſſions conſidérer d'abord la Terre, comme dans un parfait repos, & un entier équilibre dans toutes ſes parties. Cette force à ſubſtituer, doit être ſuppoſée égale dans toutes les parties de la Terre (§. *VIII. Chap. III.*) & parallele à la Ligne qui paſſe par les Centres de la Terre & du Luminaire, dont il ſera queſtion.

III.

La Force centrifuge dont nous venons de parler, doit être priſe pour notre ſujet, préciſément telle, qu'elle ſoit égale à la force totale de l'Attraction du Luminaire, tout comme ſi la Terre ſe ſoutenoit dans ſa diſtance, en décrivant un Cercle parfait; & cela eſt vrai, quelle que ſoit la Force centrifuge réelle de la Terre. C'eſt ici une Propoſition, dont on ne ſent la vérité, qu'après quelque réflexion; & elle eſt fondée ſur ce que la différence entre la Force centrifuge, telle que nous venons de

la

la décrire, & la force centrifuge réelle, n'eſt employée qu'à pouſſer ou repouſſer la Terre, & ne ſçauroit lui faire changer ſa figure, puiſque nous avons démontré au VIII. Art. du précedent Chapitre, que chaque partie eſt pouſſée également & parallelement.

IV.

La Force centrifuge totale devant être parfaitement égale à la Gravitation totale de la Terre vers le Luminaire, & la premiere Force étant la même dans toutes les Parties, on voit bien qu'on pourroit ſuppoſer la Force centrifuge égale à la Gravitation vers le Luminaire, telle qu'elle eſt au Centre de la Terre. Car la Gravitation qui répond au Centre, peut être cenſée la moyenne entre toutes les Gravitations du Globe; & cela, quelque relation qu'on ſuppoſe entre les Diſtances & les Gravitations, puiſque la différence des diſtances eſt inſenſible, par rapport à la Diſtance totale; & que par conſéquent la Gravitation diminue comme également pour des égales augmentations de Diſtances, & qu'il ſe fera ainſi une juſte compenſation pour l'Hemiſphere tourné au Luminaire, & pour l'Hemiſphere oppoſé. Cette Propoſition n'eſt pourtant pas géometriquement vraie; mais la fin du Calcul m'a fait voir, qu'elle peut être cenſée vraie pour notre ſujet: & comme elle abrége fort le Calcul, je l'ai miſe ici, pour en faire uſage dans la ſuite.

PROBLEME.

V.

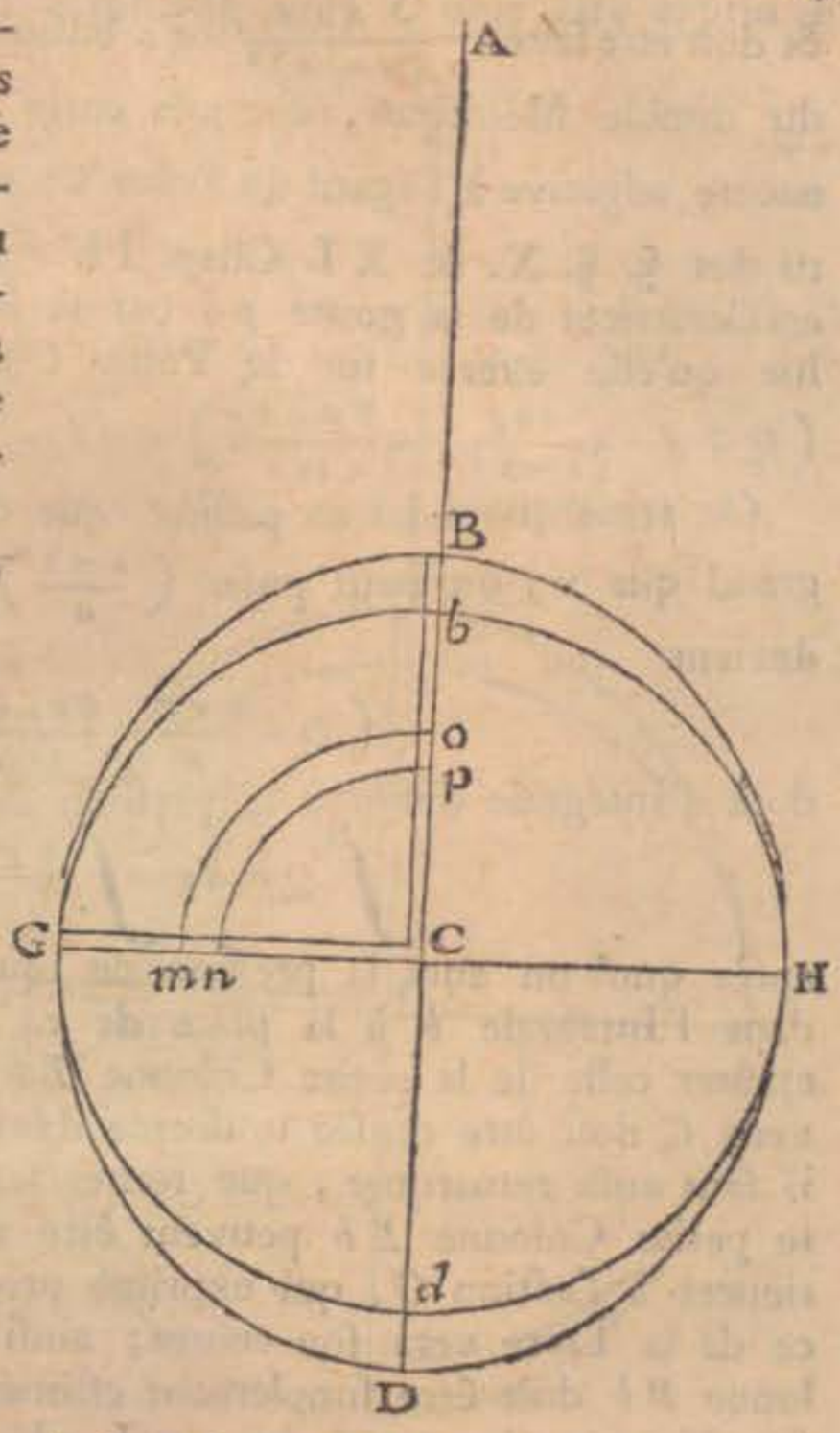
Soit *A* le Centre du Soleil, *BGDH* la Terre; *AD* une Ligne tirée par les Centres du Soleil & de la Terre: trouver la différence entre *BD* & ſa perpendiculaire *GH*, qui paſſe par le Centre *C*.

SOLUTION.

Qu'on s'imagine deux Canaux *BC* & *GC*, communiquans entre eux au Centre *C*, rempli d'un Fluide de différentes Denſités, telles qu'on ſuppoſe dans les couches de la Terre. Pour déterminer ces couches, nous conſidererons la Sphere inſcrite *GbHd*, & nous ſuppoſerons tout ce noyau immuable pendant la revolution journaliere de la Terre, fondés, à cet égard, ſur ce que nous avons dit dans la quatriéme hypotheſe du II. §. Quand même on feroit attention aux changemens de figure dans les couches près de *GbHd*, cette conſidération ne ſçauroit changer ſenſiblement le reſultat du Calcul, parce que ces changemens de

figure

figure ſont tout-à-fait inſenſibles, & que, ſelon toutes les apparences, ils ne ſçauroient ſe faire au-delà d'une certaine profondeur aſſez petite à l'égard du rayon de la Terre. Après cette remarque, nous déduirons la Solution de notre Problême, de ce que le Fluide doit être en équilibre dans les Canaux *G C* & *B C*. Pour ſatisfaire à cette loi, & pour obſerver un ordre, nous diviſerons la Solution en trois parties: dans la premiere, nous chercherons la preſſion totale du Fluide *B C* au Point *C*: dans la ſeconde, nous ferons la même choſe à l'égard du Fluide *G C*; & enfin nous ferons le Calcul, en faiſant les deux preſſions totales égales entre elles.



I. Soit $A\,C = a$; $G\,C$, ou $b\,C = b$; la cherchée $B\,b = \ell$: Qu'on tire du Centre *C* deux quarts de Cercles infiniment proches $p\,n$, $o\,m$; ſoit $C\,p$ ou $C\,n = x$; $p\,o$ ou $n\,m = d\,x$; la Denſité variable en $p\,o$ ou $n\,m = m$, la Denſité uniforme de l'eau (qui couvre le noyau ſphérique, & qui forme le double Ménifque) $= \mu$. Soit la Gravitation au Centre *C* vers le Centre du Soleil $A = g$, & la force centrifuge, qui agit parallelement à *B D*, ſera par-tout $= g$ (*§ VIII. Chap. III. & §. IV. Chap. IV.*) qu'on nomme *G* la Force accélératrice en *G* ou *b*, cauſée par l'action du Globe *G b H d*, & *Q* la même force accéleratrice pour les Points *p* & *n*. Après toutes ces préparations, on voit que la goute *p o* (dont la Maſſe doit être exprimée par la Denſité *m*, & par la hauteur *d x*, c'eſt-à-dire *m d x*) eſt animée par pluſieurs Forces accéleratrices: la *premiere* Force accéleratrice eſt celle qui reſulte de l'action du Globe *G b H d*, que nous avons nommé *Q*: la *ſeconde* eſt la Force centrifuge de *A* vers *C*, provenant par la revolution de la Terre autour du Point *A*: nous avons démontré, que cette Force doit être faite $= g$: la *troiſiéme* ſe fait vers *A*, & provient de la Gravitation vers le Soleil: celle-ci eſt négative à l'égard du Point *C*,

& doit être faite $= -\frac{aa}{(a-x)^2} \times g$: enfin la *quatriéme* provient de l'action du double Ménisque, compris entre $GBHD$ & $GbHd$, & elle est encore négative à l'égard du Point C; elle est $= -\frac{8}{15} n \mu \ell \times \frac{x}{b}$, en vertu des §. §. X. & XI. Chap. II. En multipliant toutes ces pressions accéleratrices de la goute po par sa Masse, on obtient la pression absolue qu'elle exerce sur le Point C; & cette pression absolue sera $\left(Q + g - \frac{aag}{(a-x)^2} - \frac{8 n \mu \ell x}{15 b}\right) \times m\,dx$.

On remarquera ici en passant, que comme a est sensé infiniment plus grand que x, on peut poser $\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 = 1 + \frac{a}{2x}$, & ainsi cette pression devient

$$\left(Q - \frac{2xg}{a} - \frac{8 n \mu \ell x}{15 b}\right) \times m\,dx.$$

dont l'Intégrale donnera la pression de la Colonne pC; sçavoir,

$$\int Q m\,dx - \int \frac{2 g m\,dx}{a} - \int \frac{8 n \mu \ell m x\,dx}{15 b},$$

après quoi on aura la pression de toute la Colonne bC, en substituant dans l'Intégrale b à la place de x. A cette pression, il faut encore ajoûter celle de la petite Colonne Bb, dont la gravitation ou pésanteur vers C doit être censée uniforme dans toute sa hauteur, & égale à G: il faut aussi remarquer, que toutes les autres forces qui agissent sur cette petite Colonne Bb peuvent être négligées, comme infiniment inférieures à l'action G, qui exprime proprement la pésanteur près la surface de la Terre vers son centre; ainsi donc la pression de la petite Colonne Bb doit être simplement estimée par sa hauteur ℓ, sa densité μ & sa pésanteur G, ce qui fait $\mu \ell G$. Il resulte enfin de tout cela, que la pression totale de toute la Colonne BC sur le Point C est

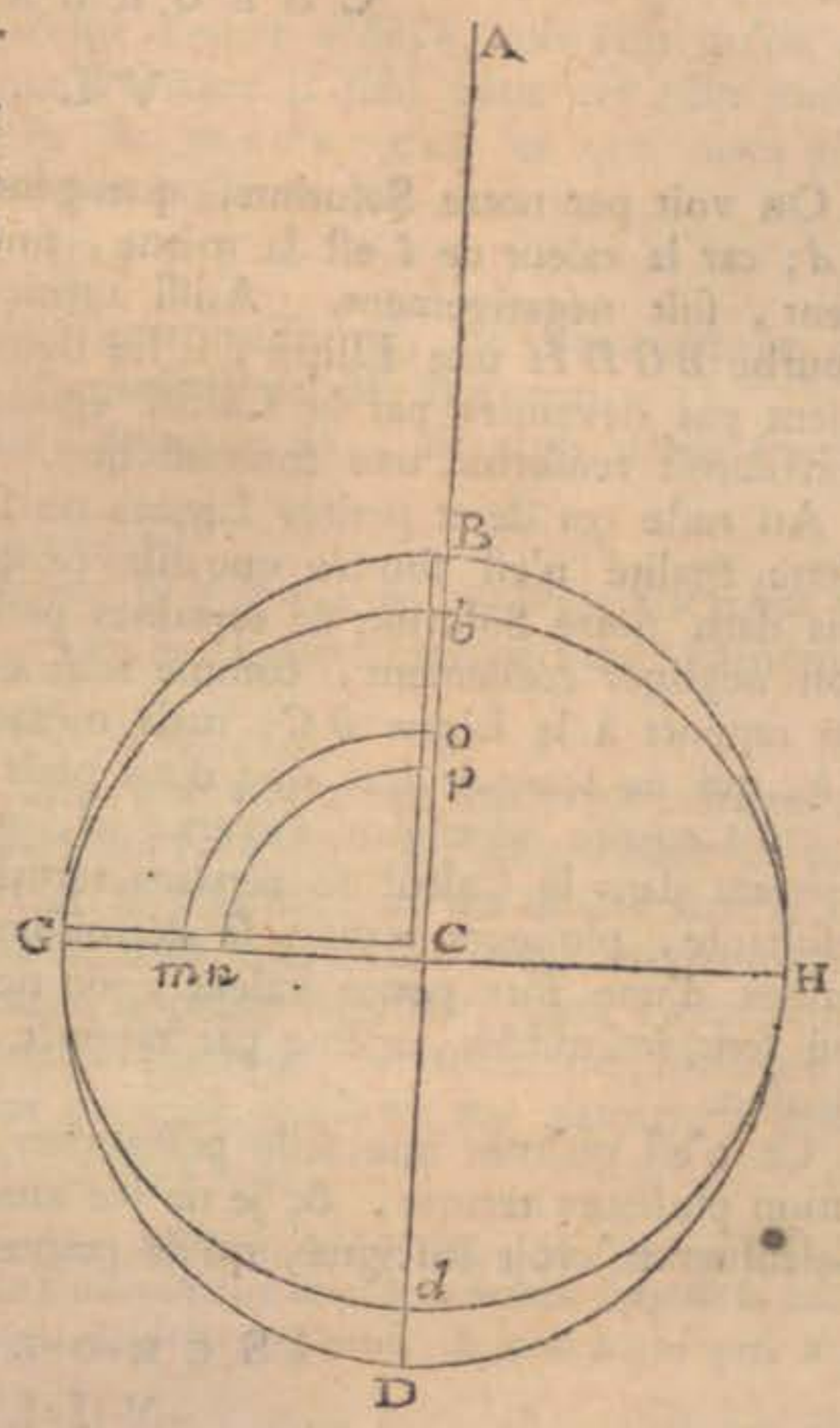
$$\mu \ell G + \int Q m\,dx - \int \frac{2 g m x\,dx}{a} - \int \frac{8 n \mu \ell m x\,dx}{15 b},$$

en prenant après l'intégration $x = b$.

II. Pour trouver à présent la pression de la Colonne GC, il faut chercher toutes les Forces qui animent la goute mn, dont la Masse est encore $m\,dx$. La *premiere* de ces Forces provient de l'Attraction du Globe $GbHd$, & est encore $= Q$, puisque cette Force est la même en n & en p: la *seconde* Force, provenant de la Force centrifuge des parties de la Terre, entant qu'elle se tourne autour du Point A, est $= 0$, cette Force étant par-tout perpendiculaire à GC (§. *VIII. Chap. III.*) La *troisiéme* Force provient de la Gravitation des Parties de la Terre vers A, cette Gravitation est au Point n vers le Point $A = \frac{aag}{aa+xx}$, & étant

étant décomposée, la Gravitation resultante vers C doit être exprimée par $\frac{aagx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$: dans cette derniere expression on peut rejetter au Dénominateur le terme xx, comme le Calcul me l'a fait voir; ainsi il provient $\frac{gx}{a}$, qui marque la troisiéme force vers C resultante de la Gravitation vers A. La *quatriéme* Force accéleratrice, qui anime la goute mn à descendre vers le centre, provient de l'action du double Ménisque, qui en vertu du XII. §. Ch. II. est $= \frac{4}{15}\ n\mu\beta \times \frac{x}{b}$. En prenant la somme de toutes ces Forces accéleratrices, la Force totale sera $Q + \frac{gx}{a} + \frac{4n\mu\beta x}{15b}$; cette Force accéleratrice totale doit être multipliée par la petite Masse mdx; & du produit il faut prendre l'Intégrale, qui marquera la pression qu'exerce la Colonne mC sur le centre C: Cette pression est donc

$$\int Qmdx + \int \frac{gmxdx}{a} + \int \frac{4n\mu\beta mxdx}{15b};$$



& pour avoir la pression, qui réponde à toute la Colonne GC, il faut encore après l'intégration faire $x = b$.

III. Après avoir exprimé analytiquement les valeurs des pressions des Colonnes BC & GC, il ne reste plus pour achever la Solution de notre Problême, qu'à faire une équation entre les deux dites valeurs trouvées dans la premiere & seconde partie. On aura donc $\mu G\beta + \int Qmdx - \int \frac{2gmxdx}{a} - \int \frac{8n\mu\beta mxdx}{15b} = \int Qmdx + \int \frac{gmxdx}{a} + \int \frac{4n\mu\beta mxdx}{15b}$, & cette équation arrangée donne

$$5\mu G a b\beta - \int 4n\mu a\beta mxdx = \int 15gbmxdx;$$

& de là on tire la valeur cherchée de β, qui est constante; savoir,

$$\beta = \frac{\int 15gbmxdx}{5\mu Gab - \int 4n\mu amxdx}.$$ C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

VI.

On voit par notre Solution, que généralement Bb doit être égale à Dd; car la valeur de ζ eſt la même, ſoit que l'on prenne x affirmativement, ſoit négativement. Auſſi auroit-il été ridicule de ſuppoſer la Courbe $BGDH$ une Ellipſe, ſi les deux parties GBH & GDH n'étoient pas devenues par le Calcul également allongées, & la ſuppoſition auroit renfermé une contradiction.

Au reſte ces deux petites Lignes ne ſeroient pas égales à la rigueur. Cette égalité n'eſt fondée que ſur ce que nous avons rejetté pluſieurs fois dans notre Solution de certaines petites quantités; mais qu'on pouvoit négliger réellement, comme tout-à-fait inſenſibles, non-ſeulement par rapport à la Ligne BC, mais même par rapport à la petite Ligne Bb, qui ne ſçauroit être que d'un petit nombre de pieds. Cependant je crois encore néceſſaire d'avertir ici, qu'il faut être ſur ſes gardes, en rejettant dans le Calcul de certains termes; car, comme dans l'équation reſultante, pluſieurs termes ſe détruiſent, & qu'il n'en reſte que des termes d'une fort petite valeur, on ne doit rejetter que des quantités qui ſont inſenſibles, même par rapport aux quantités reſtantes dans l'équation.

Ce n'eſt qu'avec une telle précaution, que j'ai négligé dans ma Solution pluſieurs termes, & je ne les aurois point négligées, ſi la fin du Calcul ne m'avoit enſeigné, qu'ils peuvent & doivent être négligés.

SCHOLIE.

VII.

Pour avoir une juſte idée de notre équation, remarquons que μ ſignifie la denſité de l'eau de la Mer, qui inonde la Terre, & m la denſité quelconque de la couche, dont la diſtance au centre eſt égale à x: π exprime la circonference du Cercle, dont le rayon eſt égal à l'unité: b eſt le rayon de la Terre: a la diſtance entre les centres du Soleil & de la Terre: g exprime la force accélératrice vers le Soleil, d'un Corps placé au centre de la Terre; & enfin G exprime la force accélératrice, ou la péſanteur des Corps à la ſurface de la Terre vers ſon centre.

Or, pour voir que tous les termes de notre équation ſont homogenes & comparables entre eux, & en même tems de quelle maniere il faut faire uſage de notre équation, il faut remarquer qu'en vertu du III. §. Chap. II. G doit être exprimée par la Maſſe de toute la Terre, diviſée par le quarré de ſon rayon; c'eſt-à-dire, qu'il faut ſuppoſer

ser $G = \frac{\int 2 n m x x d x}{b b}$, & comme on connoît pour le Soleil le rapport entre g & G, auſſi-bien que celui d'entre a & b, on voit qu'on peut enfin exprimer ℓ ſimplement par b: mais il faut pour cet effet intégrer auparavant les quantités $m x x d x$ & $m x d x$: c'eſt ce que nous allons faire dans quelques hypotheſes particulieres.

VIII.

Soit d'abord la denſité de la Terre uniforme, & nommément celle de l'eau de la Mer: c'eſt ici l'hypotheſe de M. Newton.

En ce cas m eſt une conſtante & égale à μ, & ainſi notre équation finale du V. §. eſt $\ell = \frac{15 g b b}{2 a (5 G - 2 n \mu b)}$;

Mais par le VII. §. on obtient $G = \frac{2}{3} n \mu b$, ou bien $2 n \mu b = 3 G$, & ſubſtituant cette valeur pour le ſecond terme du Dénominateur, il provient $\ell = \frac{15 g b}{4 G a} \times b$.

Nous verrons dans la ſuite, que cette expreſſion analytique donne préciſément la hauteur indiquée par M. Newton (†) ſimplement en pieds, pouces & lignes, ſans en donner le Calcul, ou du moins ſans le mettre à la portée, je ne dirai pas de tout le monde, mais uniquement de ceux qui voudroient bien prendre la peine néceſſaire pour l'approfondir. Notre Methode comprend donc le cas tout particulier de M. Newton. Mais ce cas donne une ſi petite quantité, qu'il ne me paroît pas poſſible

(†) C'eſt dans le Corollaire de la Prop. XXXVI. du Liv. III.; M. Newton dit que la hauteur de l'eau de la Mer ſous le Soleil ou au point oppoſé au Soleil, ſurpaſſe la hauteur de l'eau de la Mer à 90^d de ces points de 1 pied 11 $\frac{1}{8}$ pouc., & c'eſt à peu près à cela que revient l'expreſſion $\frac{15 g b}{4 G a} b$, car (par Cor. 1. Prop. 8. de ce Livre) la gravité à la ſurface du Soleil eſt à la gravité à la ſurface de la Terre comme 10000 à 435. Le Demi-Diamêtre du Soleil étant vû de la Terre ſous l'Angle de 16′ 4″ ce Diametre eſt à ſa diſtance du centre de la Terre comme 1 à 214, ainſi la gravité de la Terre ſur le Soleil (qui eſt g) eſt à la gravité à la ſurface de la Terre (qui eſt G) comme $\frac{10000}{214^2}$ à 435; D'où l'on trouve le Log. de $\frac{g}{G} = -4.7002107$. Le Diametre du Soleil étant à celui de la Terre comme 10000 à 109, on aura que le Rayon de la Terre $= b$ eſt à la diſtance du Soleil $= a$ comme 1 à $214 \times \frac{10000}{109}$, ainſi le Log. de $\frac{b}{a} = -5.7070265$, & L. $\frac{g b}{G a} = -8.4072372$ Enfin, reduiſant le Rayon de la Terre b en pouces à raiſon de 1145 $\frac{1}{2}$ lieuës de 2855 Toiſes chacune pour le Rayon, ſon Log. eſt 8.3718709. Ainſi le Log. de $\frac{g b}{G a} b = 0.7791081$ dont le nombre eſt 6,014 dont les $\frac{15}{4}$ ſont 22 $\frac{1}{2}$ pouces, à peu près comme M. Newton a trouvé.

d'en déduire les Phénomenes des Marées, tels que les obſervations les donnent. C'eſt ce que je ferai voir plus au long dans la ſuite. Je n'ai donc jamais pû comprendre, comment M. Newton, & tous ceux de ſa Nation, qui ont écrit ſur cette matiere, ont pû s'y attacher. On voit par là, combien il eſt eſſentiel d'étendre les hypotheſes des denſités des couches de la Terre. J'ai remarqué que la loi de ces denſités contribue beaucoup au hauſſement & baiſſement des eaux dans les Marées; qu'on en peut déduire tel effet, qu'on trouvera néceſſaire pour l'explication des Phénomenes indiqués par l'expérience; je ferai même voir que cet effet pourroit être infini dans de certaines hypotheſes. Mais ce que je ſouhaite ſur-tout que l'on remarque, c'eſt que les mêmes hypotheſes qui donnent plus d'effet aux Luminaires, pour hauſſer & baiſſer les eaux dans les Marées, ſont d'ailleurs extrêmement vrai-ſemblables par pluſieurs raiſons Phyſiques, toutes très-fortes. Mais venons à d'autres exemples.

IX.

Suppoſons la Terre creuſe en dedans, juſqu'à une diſtance donnée c depuis le centre, & que la croute (dont l'épaiſſeur ſera $= b - c$, ſoit encore par-tout d'une denſité égale à celle de l'eau de la Mer.

Nous avons en ce cas encore m égale à la conſtante μ, & ainſi le Calcul ſe fera comme dans le précedent Article, avec cette reſtriction, que les intégrales des quantités $mxxdx$, & $mxdx$ doivent être $= o$, lorſque $x = c$: de cette maniere on obtient $\int mxdx = \frac{1}{2}\mu xx - \frac{1}{2}\mu cc$, ou (en faiſant $x = b$) $= \frac{1}{2}\mu bb - \frac{1}{2}\mu cc$; ſubſtituant cette valeur dans l'équation finale du V §. il vient

$$6 = \frac{15gb(bb-cc)}{10Gab - 4n\mu a(bb-cc)};$$

& (*par le VII.* §.) G eſt $= \frac{\int 2nmxxdx}{bb} = \frac{2n\mu}{3bb} \times (x^3 - c^3) =$ (puiſqu'il faut poſer $x = b$) $\frac{2n\mu}{3bb} \times (b^3 - c^3)$: de cette derniere équation, on peut tirer celle-ci $\mu = \frac{3bbG}{2n \times (b^3 - c^3)}$, & enfin $4n\mu a(bb-cc) = \frac{6abbG(bb-cc)}{b^3 - c^3}$ & ſubſtituant cette valeur dans le ſecond terme du Dénominateur de notre équation, on a $6 = \frac{15g}{2G} \times \frac{b+x}{a} \times \frac{b^3 - c^3}{2bb + 2bc + 5cc}$.

Cette quantité eſt la même, que celle du précedent Article, lorſque $6 = o$; mais elle devient plus petite, à meſure qu'on ſuppoſe la Terre plus creuſée, & elle deviendroit tout-à-fait nulle, ſi on ſuppoſoit la Terre preſque entierement creuſe en forme d'une voute ſphérique, dont l'épaiſſeur fût peu conſidérable, par rapport au rayon de la Terre. Cette remarque ſuffit ſeule, pour refuter le ſentiment de ceux qui croyent que la Terre pourroit bien n'être qu'une croute voutée; car il ne pourroit

roit y avoir en ce cas aucun Flux & Reflux de la Mer, au moins dans notre Syſtême.

X.

Si l'on ſuppoſoit la loi des denſités des couches de la Terre exprimée par cette équation $m = \frac{x}{b}\mu$, c'eſt-à-dire, que les denſités fuſſent proportionnelles aux diſtances des couches au centre, on trouveroit la hauteur

$$\ell = \frac{15\,g\,b}{7\,G\,a} \times b,$$

& par conſéquent beaucoup plus petite, que ſi la Terre étoit par-tout d'une même denſité, ſçavoir en raiſon de 7. à 4. Auſſi cette hypotheſe n'eſt-elle aucunement vraiſemblable, y ayant apparence que les couches plus denſes ſont plus bas que les couches plus legeres.

X I.

Si la loi des denſités eſt exprimée par $m = \frac{b\,\mu}{x}$, c'eſt-à-dire, ſi l'on ſuppoſe les denſités, ſuivre la raiſon inverſe des diſtances des couches au centre, on trouveroit

$$\ell = \frac{15\,g\,b}{G\,a} \times b,$$

ce qui fait la valeur de ℓ quatre fois plus grande, que dans la ſuppoſition de M. Newton, de la parfaite homogenéité de la Terre.

X I I.

Suppoſons enfin la loi des denſités exprimée par $m = \left(\frac{b}{x}\right)^{\frac{4}{7}}\mu$, il faudra mettre $\frac{3}{2}\mu\,b\,b$ pour $\int m\,x\,dx$, & l'équation du V I. §. diviſée par μ ſera

$$\ell = \frac{42\,g\,b^{\frac{5}{7}}}{10\,G\,a - 12\,n\,\mu\,a\,b^{\frac{2}{7}}} \times b^{\frac{2}{7}},$$

mais en vertu du V I I. §. on a $G = \int \frac{2\,n\,m\,x\,x\,dx}{b\,b} = \int \frac{2n\mu x^{\frac{2}{7}}\,dx}{b^{\frac{2}{7}}} = \frac{6n\mu x^{\frac{5}{7}}}{5\,b^{\frac{2}{7}}}$ = (en faiſant $x = b$) $\frac{6}{5}\,n\,\mu\,b$. D'où l'on voit que le Dénominateur de notre équation fondamentale devient $= o$, & par conſequent $\ell = \infty$. Ainſi l'élevation des eaux ſeroit infinie.

X I I I.

J'ai mis cette derniere hypotheſe, non qu'elle ſoit poſſible, puiſque la denſité ne ſçauroit être infinie, comme elle devroit être au centre; mais pour faire voir l'avantage & la ſupériorité de notre Théorie, puiſqu'elle ne met point de bornes à l'élevation des eaux: ſi les Marées étoient cent ou mille fois plus grandes qu'on ne les obſerve, nous pourrions

rions lui assigner une cause suffisante. Ayant au reste bien examiné tous les Phénomenes du Flux & Reflux de la Mer, je suis entierement convaincu, que la force assignée par M. Newton ne sçauroit suffire pour les produire : il faut donc dire dans le systême même de ce Philosophe, que les densités de la Terre ne sont pas uniformes, mais qu'elles croissent vers le centre. Cette hypothese n'est-elle pas fort probable d'ailleurs d'elle-même ? L'eau est-elle le seul Fluide que nous connoissions ? & ne faut-il pas que les Fluides plus pésants, soient plus proches du centre de la Terre? le Mercure est près de quatorze fois plus pésant que l'eau: la grande compression que souffrent les parties proches du centre de la Terre, ne pourroit-elle pas contribuer à rendre la matiere plus compacte & plus dense ?

Si nous considérons outre cela, combien les Planetes & la Terre, qui nagent sans doute dans un milieu resistant, quoique extrêmement subtil, conservent leur mouvement, sans en perdre la moindre partie considérable pendant une longue suite de siécles, nous pourrions facilement croire, que tous ces Corps ont beaucoup plus de matiere, que M. Newton ne marque. Enfin de quel côté que j'envisage cette Question, tout me fait croire, que les couches de la Terre augmentent de densité vers le centre.

XIV.

Si, tout le Noyau ou tout le Globe de la Terre restant, l'eau de la Mer, qui inonde la Terre, changeoit de densité, la quantité *ℓ* suivroit la raison reciproque des densités des eaux de la Mer. Il suit de là que si la Terre étoit inondée de Mercure, les Marées seroient quatorze fois plus petites, qu'elles ne sont actuellement. Et si au contraire l'air étoit un Fluide homogene pesant, mais sans élasticité, sa hauteur seroit environ de 850 *ℓ* plus grande à ceux qui ont le Soleil au Zenith, qu'à ceux qui l'auroient à l'Horison. Cela feroit 1700 pieds de différence dans la hauteur de l'Atmosphere, à ne donner que deux pieds de valeur à *ℓ*; & cette différence en produiroit une sur le Barometre de plus de 20 lignes. D'où vient donc, demandera-t-on, qu'on n'observe point à cet égard aucune variation dans le Barometre ? C'est l'élasticité de l'air qui en est la cause; cette élasticité fait que la hauteur du Barometre doit être constamment la même dans toute la surface de la Mer, en faisant abstraction seulement des causes accidentelles & passageres, qui peuvent survenir tout d'un coup, & qui n'agissent sur l'air, que parce que celui-ci ne sçauroit obéir assez promptement, ni se mettre dans un instant dans son état naturel d'équilibre. On remarquera ici qu'il est faux, que la pression du Mercure soit égale à la pression, ou plûtôt au poids de la Colonne d'air verticale couchée dessus, ce que l'on affirme ordinairement; mais

mais la preſſion du Mercure eſt égale au poids moyen de toutes les Colonnes d'air verticales, qui environnent la Terre, c'eſt-à-dire, égale au poids de tout l'Atmoſphere (dont la hauteur eſt conſidérée comme infiniment petite, par rapport au rayon de la Terre) multiplié par la raiſon de la baſe de la Colonne du Mercure à toute la ſurface de la Terre. Cette Propoſition fait voir que la hauteur moyenne du Barometre doit être la même ſous l'Equateur & ſous le Cercle Polaire, quoique le poids abſolu de la Colonne d'air verticale ſous l'Equateur pendant les plus grandes chaleurs ne ſoit pas la moitié ſi grand que celui d'une pareille Colonne d'air ſous le Cercle Polaire en Hyver. On voit de tout ce que nous venons de dire, pourquoi, ni le Soleil, ni la Lune ne changent pas ſenſiblement la hauteur du Barometre, quoi qu'ils élevent les eaux conſidérablement. La véritable raiſon n'en eſt que l'élaſticité de l'air, qui doit faire preſſer également tous les endroits de la ſurface de la Terre; & cette ſeule refléxion démontre entierement l'inſuffiſance des inégales compreſſions de la matiere des Tourbillons, pour expliquer les Marées, comme nous avons déja remarqué au III. §. Chap. I.

XV.

Tous les cas particuliers, que nous venons d'examiner, font voir, & il n'eſt pas difficile de le démontrer généralement par l'équation du V. §. que la quantité ℓ (qui exprime la différence entre la plus grande hauteur de la Mer, & la plus petite, entant qu'elle eſt produite par la ſeule action du Soleil) eſt toujours $= \frac{n g b}{G a} \times b$: le cofficient n dépend des différentes denſités des couches de la Terre, le rapport $\frac{b}{a}$ eſt connu par les Obſervations aſtronomiques: il ne reſte donc qu'à voir comment on pourra déterminer la quantité $\frac{g}{G}$: c'eſt en comparant les effets que les Forces g & G produiſent; la premiere, en retenant la Terre dans ſon Orbite annuelle; la ſeconde, en retenant la Lune dans celle qu'elle fait autour de la Terre. Si la diſtance moyenne de la Lune au centre de la Terre eſt nommée α, la Force centrifuge de la Lune ſera $= \frac{b\,b}{\alpha\,\alpha} G$, & la force centrifuge de la Terre eſt $= g$: or la Force centrifuge moyenne de la Terre dans ſon Orbite, eſt à la force centrifuge moyenne de la Lune autour de la Terre, ou plutôt autour du centre de Gravité du ſyſtême de la Terre & de la Lune, comme la diſtance du Soleil diviſée par le Quarré du tems périodique de la Terre autour du Soleil, eſt à la diſtance de la Lune au centre de Gravité commun de la Terre & de la Lune, [M. Newton ſuppoſe cette diſtance $= \frac{19}{40}\alpha$, voyez ſes *Princ. Math. Phil. nat. Edit.* 2. *pag.* 430.; il fonde cette ſuppoſition ſur quelques Phénomenes des Marées,

rées, mais mal choisis à mon avis; elle est donc encore fort douteuse; mais comme elle n'est pas de conséquence pour notre sujet, je ne laisserai pas de l'adopter ici] divisée par le quarré du tems périodique de la Lune: on a donc, en nommant le tems périodique de la Terre T, & celui de la Lune t, cette Analogie $g : \frac{bb}{\alpha\alpha} G :: \frac{a}{TT} : \frac{39\,\alpha}{40\,tt}$;

ce qui donne $\frac{g}{G} = \frac{40\,abb\,tt}{39\,\alpha^3\,TT}$, & par consequent

$$6 = \frac{ngb}{Ga} \times b = \frac{40\,nb^3\,tt}{39\,\alpha^3\,TT} \times b.$$

REMARQUE.

Pour voir que cette Formule s'accorde avec celle de M. Newton pour la supposition de l'homogenéité de la Terre, nous remarquerons, qu'en ce cas on a $n = \frac{15}{4}$ (§. *VIII.*) & M. Newton suppose $\frac{b}{\alpha} = \frac{1}{60\frac{1}{4}}$ (*Princip. Mat. Phil. nat. Edit. 2. pag.* 430.) $\frac{tt}{TT} = \frac{1000}{178725}$ (*Princip. Math. pag.* 395.) & enfin $b = 19695539$ pieds après la mesure de M. Cassini. De tout cela il resulte

$$6 = \frac{40.\ 15.\ 1.\ 1000.\ 19695539}{39.\ 4.\ (60\frac{1}{4})^3.\ 178725.} \text{ pieds},$$

cela fait $6 = 1$ pied 11. pouces & un quart. M. Newton trouve 1 pied 11 pouces & un huitieme. (*Princ. Math. pag.* 429.) La différence me paroît trop petite, pour en rechercher l'origine.

XVI.

Tout ce que nous venons de dire par rapport à l'action du Soleil, doit être entendu aussi de la Lune, sans y rien changer; de sorte que les équations fondamentales des §. §. V. & VII. servent également pour la Lune, en entendant par a la distance entre les centres de la Terre & de la Lune, & par g la pésanteur d'un Corps placé au centre de la Terre vers la Lune. Et comme nous avons dit au XV. §. que quelque hypothese qu'on prenne pour exprimer les différentes densités dans les couches de la Terre, on trouvera toujours

$$6 = \frac{ngb}{Ga} \times b,$$

nous dirons par rapport à la Lune, qu'on trouvera toujours

$$\delta = \frac{n\gamma b}{G\alpha} \times b;$$

prenant

prenant pour δ la différence des hauteurs des eaux à ceux qui ont la Lune au Zenith, & à l'Horiſon, pour α la diſtance entre les centres de la Lune & de la Terre, & pour γ la péſanteur d'un Corps placé au centre de la Terre vers la Lune.

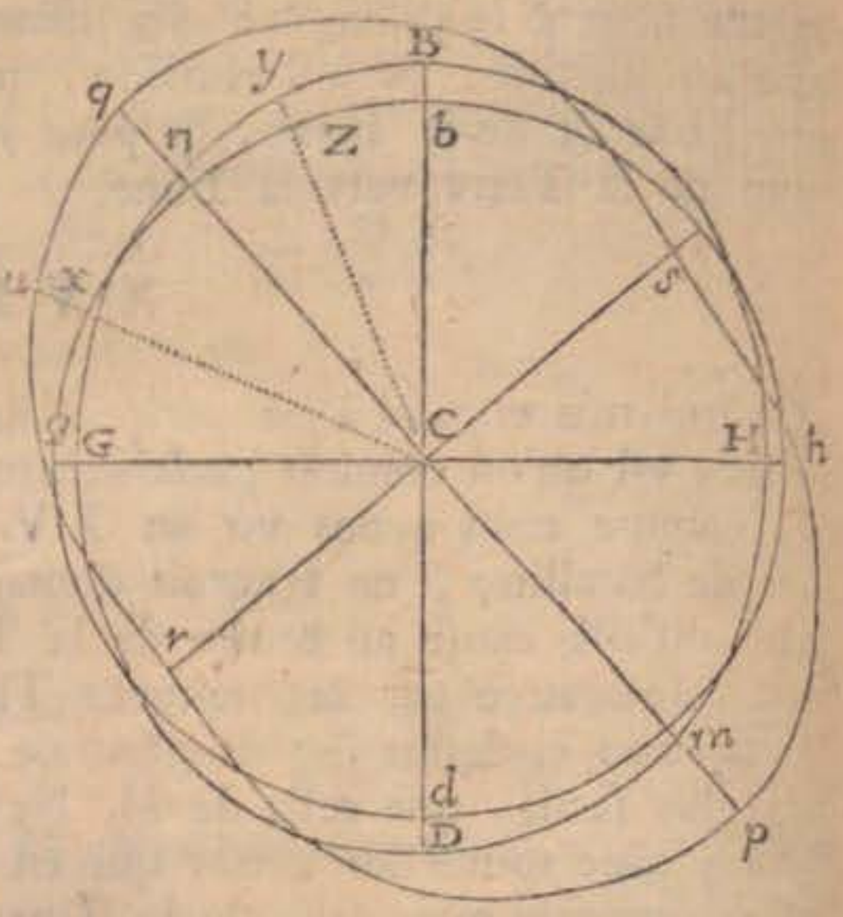
XVII.

Ce qui m'a engagé à ne parler d'abord que de l'action du Soleil ſur la Mer, eſt qu'on connoît parfaitement bien la valeur de g pour le Soleil, comme nous avons vû au XV. §. au lieu que la Lune, qui n'a point de Satellites, ne ſçauroit donner immédiatement la Force accélératrice qu'elle cauſe au centre de la Terre, & que nous avons nommé γ. Je trouve par ma nouvelle Théorie de la Lune, dont j'ai déja fait mention ci-deſſus, plus générale, plus exacte, & ſur-tout infiniment plus facile, que celle de M. Newton, qu'on peut déterminer lad. valeur γ avec toutes les autres qui en dépendent; ſçavoir la Maſſe de la Lune, comparée avec celle de la Terre, & leur commun centre de Gravité, moyennant quelques irrégularités dans les mouvemens de la Lune, pourvû qu'on puiſſe les obſerver aſſez exactement. M. Newton a tâché de déterminer la Force accélératrice γ, en comparant les effets de la Lune ſur la Mer avec ceux du Soleil; cette Methode ſeroit fort bonne, ſi on ſçavoit bien ſéparer les effets des deux Luminaires. Il a prétendu le faire, en comparant les Marées bâtardes, qui ſuivent les Quadratures, avec les plus grandes Marées, qui ſuivent les Syzygies. Nous verrons ci-deſſous ce que l'on peut trouver à redire à cette Methode, & comment on pourra en ſubſtituer d'autres plus exactes.

XVIII.

Au reſte, il eſt clair que la Lune & le Soleil produiront leurs effets independamment l'une de l'autre: tout ce que le Soleil pourroit contribuer au moins dans la pure Théorie, pour troubler l'action de la Lune, eſt qu'il allonge un peu la Terre: mais il eſt auſſi bien évident, que la Lune changera également la ſurface de la Mer ſur une Terre parfaitement ronde ou allongée d'un petit nombre de pieds: nous avons déja dit la même choſe dans la premiere hypotheſe du ſecond Article.

Voici donc comment il faudroit déterminer la ſurface de la Mer; ſi les deux Luminaires pouvoient produire dans un inſtant tout leur effet, c'eſt-à-dire, ſi l'eau n'avoit point d'inertie, & qu'elle pût prendre incontinent ſa juſte figure; car c'eſt de cette inertie, qu'il faudra tirer dans la ſuite pluſieurs inégalités, & autres Phénomenes, qu'on a obſervés dans les Marées.



Soit *b g d h* le Globe de la Terre parfaitement ſpherique, & conſidérons d'abord le Soleil, que nous ſuppoſerons placé dans la Ligne prolongé *b d* paſſant par le centre de la Terre *C*: notre Globe ſe changera en Sphéroïde, tel que *B G D H*, les eaux baiſſant autour de *g h*, & montant autour de *b* & *d*. Soit enſuite la Lune dans la Ligne prolongée *q p*; il eſt clair qu'elle agira ſur le Sphéroïde de la même façon qu'elle feroit ſur le Globe parfait, duquel le Sphéroïde differe d'une quantité tout-à-fait inſenſible: ainſi donc la Lune fera monter & baiſſer les eaux par deſſus la ſurface du Sphéroïde, tout autant qu'elle feroit à l'égard de la ſurface ſphérique, ſans l'action du Soleil. Il faut donc prendre *n q*, ou *m p*, à *b B*, ou *d D* en raiſon des Forces lunaire & ſolaire, c'eſt-à-dire, comme $\frac{\gamma}{\alpha}$ à $\frac{g}{a}$, tracer enſuite les courbes *q r p s*, telles qu'en prenant un Angle quelconque *u C q*, égal à un Angle *y C B*, la perpendiculaire *u x* interceptée entre les ſurfaces des Sphéroïdes, ait à la perpendiculaire *y z*, interceptée entre le premier Sphéroïde & le Globe, la raiſon de *n q* à *B b*. Voilà donc une Conſtruction géometrique générale, qui montre à chaque moment, & à chaque endroit, la hauteur de la Mer, & les variations de cette hauteur. Mais elle demande des Calculs longs & pénibles. Nous verrons dans la ſuite, comment on pourra s'y prendre, pour les faire, en commençant par les circonſtances & les hypotheſes les plus ſimples, & en ajoûtant des corrections & équations à faire pour chaque circonſtance changée.

XIX.

Voici donc les cas & les hypotheſes, par leſquelles nous commencerons. Nous ſuppoſerons d'abord, que la Lune fait des Cercles parfaits autour de la Terre, & pareillement la Terre autour du Soleil: que ces Orbites ſont dans le plan de l'Equateur de la Terre: que toute la Terre eſt inondée: que la ſurface de la Mer prend dans un inſtant ſa juſte Figure, tout comme ſi l'eau n'avoit point d'inertie, ni reſiſtances; & enfin qu'il ne faille déterminer les loix des Marées, que ſous l'Equateur. Mais avant de faire

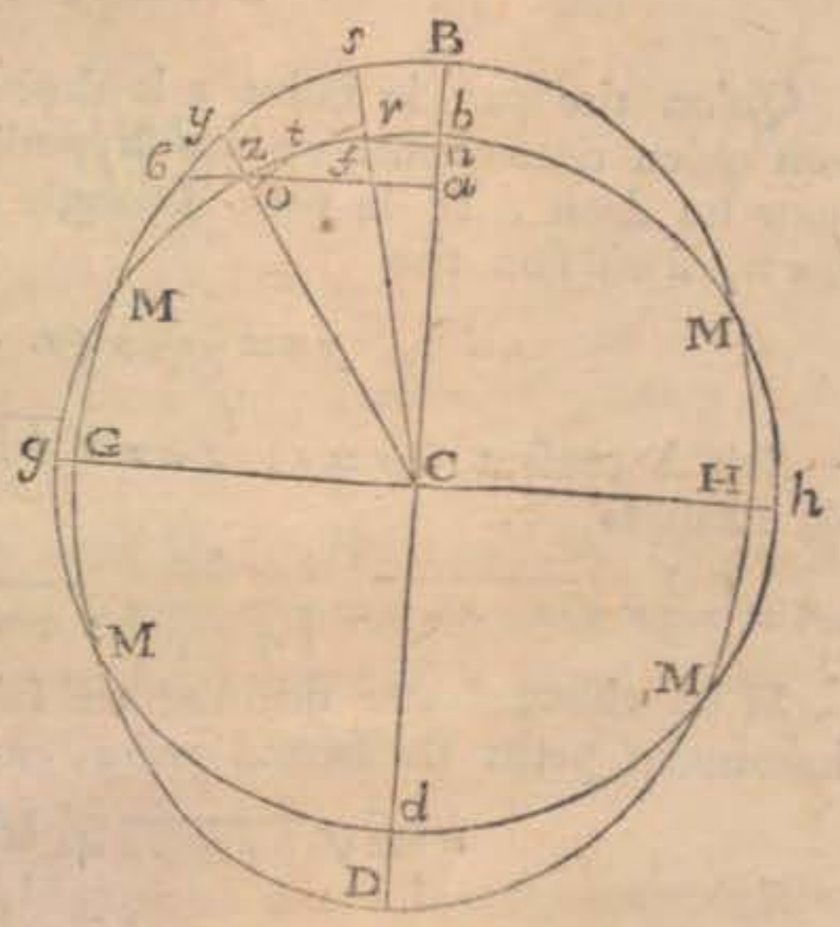
les Calculs, il ſera bon d'expoſer préliminairement quelques Lemmes géometriques.

CHAPITRE V.

Contenant quelques Propoſitions de Géometrie préliminaires pour l'Explication & le Calcul des Marées.

PROBLEME.

SOit, comme ci-devant, le Cercle *b g d h* & l'Ellipſe preſque circulaire *B G D H*, & ſuppoſons la Sphere & le Sphéroïde, décrits par la rotation du Cercle & de l'Ellipſe autour de l'Axe *B D*, égaux; trouver le rapport entre les petites Lignes *B b* & *G g*.



SOLUTION.

Nous ſuppoſerons pour nous ſervir des mêmes expreſſions, que nous avons employées juſqu'ici, $Bb + Gg = \ell$; $Gg = x$, & $Bb = \ell - x$; Cb ou $Cg = b$; n la circonference du Cercle, dont le rayon eſt égal à l'unité. Ceci poſé, on ſçait que la Sphere ſera $= \frac{2}{3} n b^3$: on ſçait auſſi, qu'un Ellipſoïde (dont le grand Axe eſt $= 2A$, & le plus petit Diametre $= 2B$) eſt $= \frac{2}{3} n B B A$; cela donne notre Sphéroïde $= \frac{2}{3} n (b - x)^2 \times (b + \ell - x) = \frac{2}{3} n (b^3 - 3bbx + bb\ell)$ ſi l'on néglige les infiniment petits du ſecond ordre. Faiſant à préſent par la condition du Problême la Sphere égale au Sphéroïde, on a $\frac{2}{3} nb^3 = \frac{2}{3} n (b^3 - 3bbx + bb\ell)$ c'eſt-à-dire, $x = \frac{1}{3}\ell$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

II.

Si $Gg = \frac{1}{3}\ell$, il faut que Bb ſoit $= \frac{2}{3}\ell$, & par conſéquent double de l'autre.

l'autre. Ainſi donc l'eau monte deux fois plus autour de la Ligne, qui paſſe par le centre de l'un des Luminaires, & celui de la Terre, qu'elle ne deſcend à la diſtance de 90 dégrés.

PROBLEME.

III.

Si l'on tire du centre C une droite quelconque Cy, trouver la petite Ligne yz, qui marque la hauteur verticale du Point y pris dans l'Ellipſe, par deſſus le Pont Z pris dans le Cercle.

SOLUTION.

Qu'on tire par le Point z la droite $\ell\alpha$ perpendiculaire à l'Axe: on voit qu'en conſéquence de nos hypotheſes, l'Angle ℓyz doit être pris pour un droit, & le petit Triangle ℓyz cenſé ſemblable au Triangle $C\alpha z$, d'où l'on tire

$$yz=\frac{\alpha z}{Cz}\times\ell z.$$

Soit à preſent $C\alpha=s$; $z\alpha=\sqrt{bb-ss}$; on aura par la nature de l'Ellipſe

$$\alpha\ell=\frac{CG}{CB}\times\sqrt{B\alpha\times\alpha D}=\frac{b-\frac{1}{3}\ell}{b+\frac{2}{3}\ell}\times\sqrt{(b+\tfrac{2}{3}\ell-s)\times(b+\tfrac{2}{3}\ell+s)}.$$

Si on change cette quantité en ſuites, & qu'on rejette toujours les infiniment petits du ſecond ordre, on trouvera enfin

$$\alpha\ell=\sqrt{bb-ss}+\frac{3ss-bb}{3b\sqrt{bb-ss}}\times\ell.$$

De là on tire $\alpha\ell-\alpha z=\ell z=\frac{3ss-bb}{3b\sqrt{bb-ss}}\times\ell$, & par conſequent

$$yz=\frac{3ss-bb}{3bb}\times\ell.\quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE I.

IV.

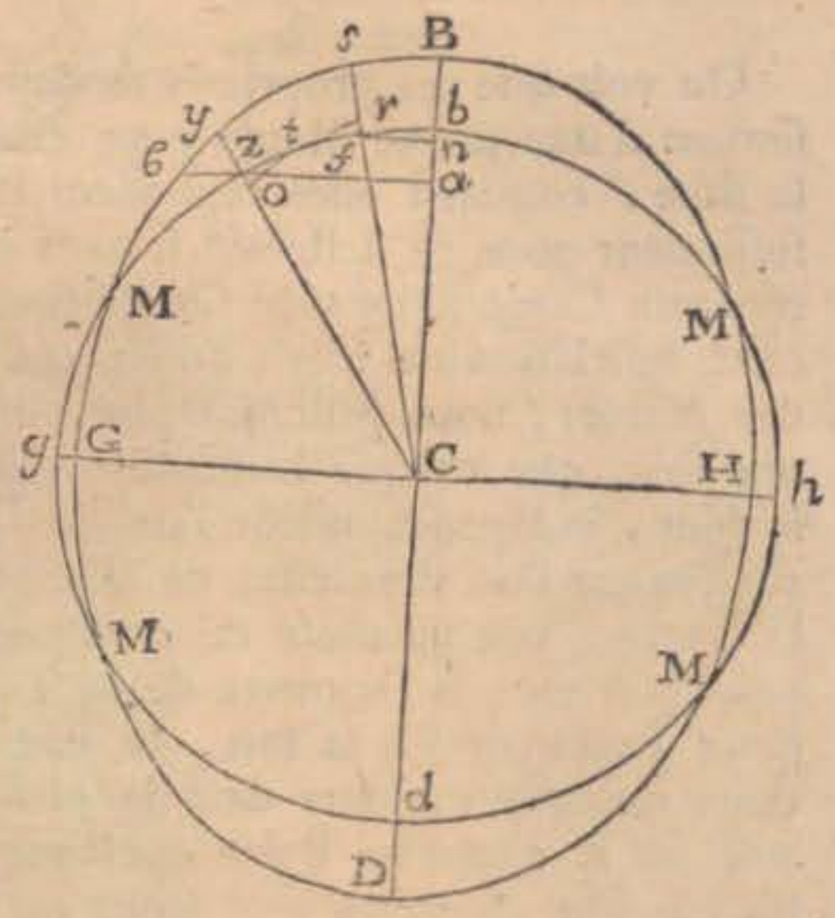
Pour trouver les Points M, où l'Ellipſe coupe le Cercle, on n'a qu'à faire $yz=o$, ce qui donne $s=b\sqrt{\frac{1}{3}}=o,5773b$, & l'Arc bM de $54^{\circ}.\ 44'$.

COROL

COROLLAIRE II.

V.

Si la Terre tournoit autour d'un Axe perpendiculaire au plan de notre Figure, & que le Cercle *b g d h* repréſentât ainſi l'Equateur de la Terre, dans lequel l'un des Luminaires eſt ſuppoſé ſe trouver: ſi par cette rotation de la Terre, le Point *B* eſt parvenu en *y*, le Luminaire reſtant dans l'Axe *BD*, l'Angle *b C Z* ſera l'Angle horaire, dont le Coſinus eſt appellé *s*, le Sinus total *b*; & on voit que la différence des hauteurs de l'eau avant & après ladite rotation ſera repréſentée par $Bb - yz$, c'eſt-à-dire par $\frac{2}{3}\ell + \frac{bb-3ss}{3bb} \times \ell$, ou par $\frac{bb-ss}{bb} \times \ell$, ou enfin (en nommant le Sinus de l'Angle horaire σ) par $\frac{\sigma\sigma}{bb}\ell$. Nous concluerons de là, que les baiſſemens des eaux ſont proportionnels aux Quarrés des Sinus des Angles horaires, qui commencent du moment de la haute-Mer.



COROLLAIRE III.

VI.

Les variations qui répondent à de petits intervalles de tems égaux, ſont pour chaque Point *Z*, proportionelles aux aires du Triangle *C z z*. Car l'intervalle de tems doit être exprimé ſimplement par un petit Arc de Cercle, qui eſt $= \frac{-b\,ds}{\sqrt{bb-ss}}$, en conſiderant *s* comme variable; & ſi nous faiſons cette quantité égale à un petit élement de tems *dt*, nous aurons $\frac{-b\,ds}{\sqrt{bb-ss}} = dt$ & $ds = \frac{-dt\sqrt{bb-ss}}{b}$. Or par le V §. tout le baiſſement des eaux étant $= \frac{bb-ss}{bb} \times \ell$, ſa différentielle ſera $= \frac{2\ell s\,dt\sqrt{bb-ss}}{b^3}$; & comme les quantités ℓ, *b* & *dt* ſont conſtantes, nous voyons, que les variations verticales des Marées, qui ſe font en de petits intervalles de tems égaux, ſont proportionnelles aux quantités répondantes $s\sqrt{bb-ss}$, ou aux Aires des Triangles *C z z*.

SCHO-

SCHOLIE.

VII.

On voit que ces proprietés tendent à déterminer les hauſſemens & baiſſemens d'une même Marée pour chaque moment, & nous verrons dans la ſuite, combien elles répondent aux Obſervations. Ces Propoſitions ſuffiroient pour ce deſſein, ſi nous ne voulions conſidérer que ce qui arrive aux Conjonctions & Oppoſitions des deux Luminaires: mais comme cette reſtriction ne feroit qu'un cas très-particulier de toute la Théorie des Marées, nous paſſerons plus outre. Remarquons cependant encore une fois, que chaque Luminaire peut être conſideré, comme agiſſant ſur la Mer, indépendamment l'un de l'autre; puiſque les petites variations cauſées par l'un des deux, ne changent pas ſenſiblement toute la figure de la Terre: une quantité de quelques pieds ne ſçauroit être ſenſible par rapport à tout le Diametre de la Terre. Nous allons donc conſidérer les deux Luminaires à la fois, & dans une poſition en longitude quelconque, quoique toujours dans le plan de l'Equateur. Nous conſidérerons auſſi ſur la Terre un Point quelconque dans l'Equateur, pour voir combien la Mer doit être plus haute ou plus baſſe dans ce Point, qu'elle ne ſeroit ſans l'action des Luminaires. C'eſt ici une Queſtion des plus eſſentielles pour notre ſujet. Souvenons-nous cependant, que $\mathfrak{b}$ ſignifie la hauteur de toute la variation des eaux d'une Marée, entant qu'elle eſt produite par la ſeule action du Soleil, & $\mathfrak{d}$ la même choſe pour la Lune.

PROBLEME.

VIII.

Soit $b\,\mathfrak{6}\,d\,\mathfrak{d}$, l'Equateur de la Terre parfaitement circulaire, tel qu'il ſeroit ſans l'action des deux Luminaires: ſuppoſons le Soleil dans la Ligne prolongée $d\,b$, & la Lune dans la Ligne prolongée $\mathfrak{d}\,\mathfrak{6}$; & ſoit un point Z donné de poſition: trouver la hauteur $y\,z$, qui marque l'élevation de la Mer pour ledit point Z produit par les deux Luminaires.

SOLUTION.

Suppoſons que le Soleil éleve les eaux en b de la hauteur $B\,b$, & la Lune de la hauteur $B\,\mathfrak{6}$ au Point $\mathfrak{6}$. On aura par les précedentes Propoſitions $Bb = \frac{2}{3}\mathfrak{6}$, & $B\,\mathfrak{6} = \frac{2}{3}\mathfrak{d}$: qu'on partage la hauteur cherchée $y\,z$ en deux parties $y\,r$, & $r\,z$, dont la premiere convienne à l'action de la Lune, & l'autre à l'action du Soleil: ſoit le Sinus total $= 1$, le Sinus de l'An-

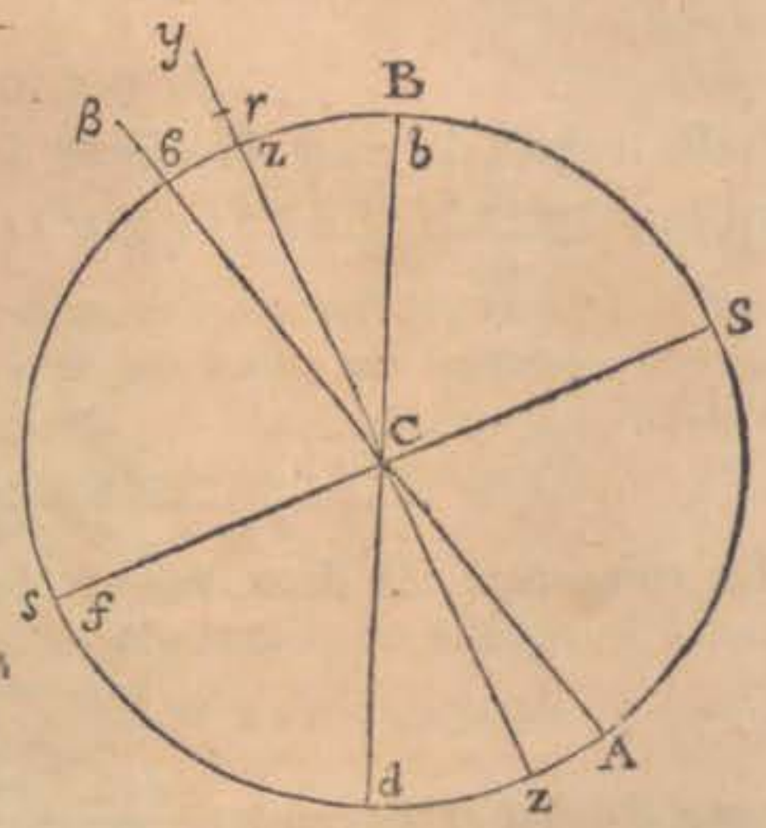
l'Angle donné $b\,C\,z = \frac{\sigma}{b}$; le Sinus de l'Angle $\beta\,C\,z$ pareillement donné $= \frac{\varphi}{b}$: de cette maniere, nous aurons en vertu du III. §. $r\,z = \frac{3ss-4b}{3bb} \times 6 = \frac{2bb-3\sigma\sigma}{3bb} \times 6$. & pareillement $y\,r = \frac{2bb-3\varphi\varphi}{3bb} \times \delta$, & par conséquent

$$y\,z = \frac{2bb-3\sigma\sigma}{3bb} \times 6 + \frac{2bb-3\varphi\varphi}{3bb} \times \delta. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE.

IX.

On voit par cette Solution la loi qu'il faudroit observer pour construire une Table, qui marquât pour chaque âge de la Lune, & pour chaque moment, les hauteurs des Marées, en supposant le Point z changer continuellement de position, jusqu'à-ce qu'il ait fait le tour: voyons à présent quel est le Point Z, qui marque la plus grande hauteur $y\,z$, les Poles b & β étant donnés de position.



LEMME.

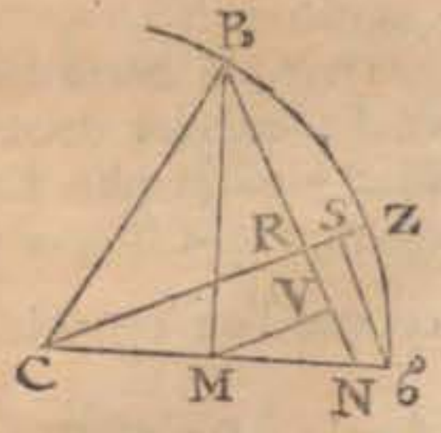
X.

Si le Sinus de l'Angle $b\,C\,z$ est appellé, comme ci-dessus, $\frac{\sigma}{b}$; le Sinus de l'Angle $\beta\,C\,z$, $\frac{\varphi}{b}$; le Sinus de la somme de ces deux Angles; c'est-à-dire, le Sinus de l'Angle $b\,C\,\beta$, $\frac{m}{b}$; je dis qu'on aura

$$\varphi = \frac{m\sqrt{(bb-\sigma\sigma)}-n\sigma}{b}, \text{ * \&}$$

$$\varphi^2 = \frac{mmbb+nn\sigma\sigma-mm\sigma\sigma-2mn\sigma\sqrt{(bb-\sigma\sigma)}}{bb}.$$

* La lettre n exprime ici $\sqrt{bb-mm}$. La demonstration de ce Lemme est fort simple, le Rayon B C étant b, le Sinus de tout l'Angle BCβ étant $\frac{m}{b}$, on aura BM$=m$, CM$=\sqrt{bb-mm}$; βS$=\sigma$, CS$=\sqrt{bb-\sigma\sigma}$, BR$=\varphi$. Prolongez B R en N, & menez MV parallèle à CR, les Triangles CβS & B M V seront semblables à cause des Angles droits S & V & des Angles égaux CβZ & M B N; Donc on aura Cβ (b) : CS $(\sqrt{bb-\sigma\sigma})$ = BM (m) : B V $= \frac{m\sqrt{bb-\sigma\sigma}}{b}$; On trouvera de même que Cβ (b) : βS (σ) = CN : NR = CM (n) : RV $= \frac{n\sigma}{b}$; Donc BR (φ) = BV − RV $= \frac{m\sqrt{bb-\sigma\sigma}}{b} - \frac{n\sigma}{b}$: C. Q. F. T.



Je n'ajoûterai pas la démonſtration de ce Lemme: mais il eſt pourtant bon d'avertir ici, qu'en cherchant la valeur de ς, qui marque le Sinus de la différence de deux Angles donnés par leurs Sinus; on tombe facilement dans une autre expreſſion beaucoup plus prolixe, & qui rend le Calcul du Problême, que nous allons expoſer, preſque impraticable.

PROBLEME.

Trouver les Points Z, où les hauteurs $y\,z$ ſoient les plus grandes.

SOLUTION.

La nature de notre Problême demande, que la différentielle de $y\,z$, ſçavoir $\frac{-2f\sigma d\sigma - 2\delta\varsigma d\varsigma}{3bb}$ (§. *VIII.*) ſoit $= o$, ou bien $\varsigma d\varsigma = \frac{-f}{\delta}\sigma d\sigma$.

Et ſi l'on différentie l'équation ſeconde du précedent Lemme, on trouve, prenant les quantités m, n & b pour conſtantes, & σ pour variable,

$$\varsigma d\varsigma = \frac{nn\sigma d\sigma - nm\sigma d\sigma}{bb} + \frac{2mn\sigma\sigma - nmbb}{bb\sqrt{(bb-\sigma\sigma)}}\,d\sigma :$$

En comparant ces deux valeurs de $\varsigma d\varsigma$, on trouve une nouvelle équation, à laquelle on pourra donner une telle forme,

$\left(-\frac{f}{\delta}bb\sigma + mm\sigma - nn\sigma\right)\sqrt{bb-\sigma\sigma} = 2mn\sigma\sigma - mnbb$: ſi l'on ſuppoſe pour abréger la Formule $\frac{-fbb}{\delta mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = A$, on trouve après une reduction entiere de l'équation, le Sinus de l'Angle bCz, ou

$$\frac{\sigma}{b} = \pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} \pm \frac{A}{2\sqrt{(4+AA)}}\right)}.$$ C. Q. F. T.

SCHOLIE.

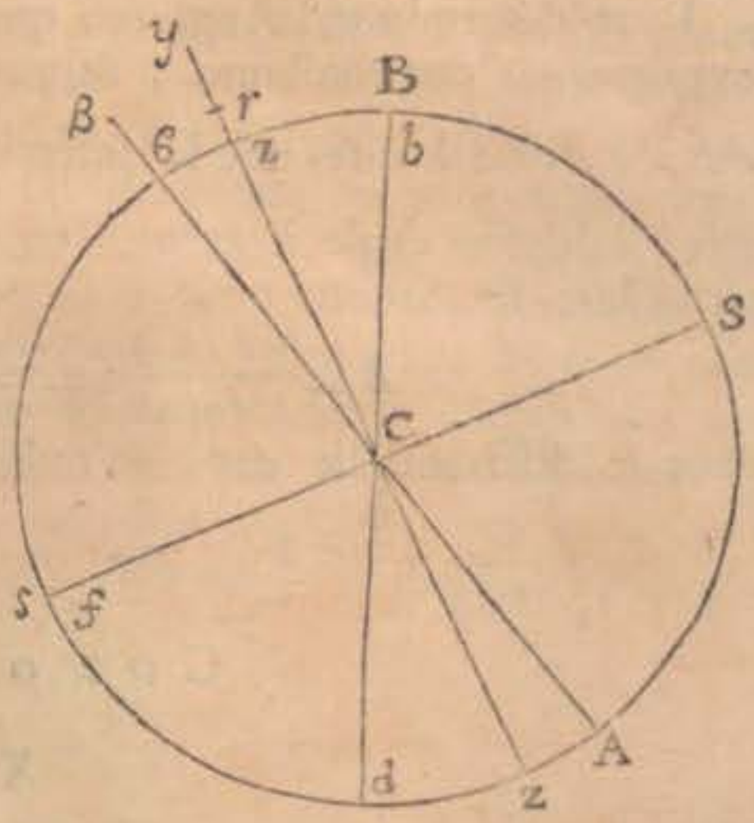
XII.

Il ne ſera pas difficile de reconnoître dans chaque cas, quel choix on doit faire des Signes ambigus. Mais pour faciliter la choſe, & pour en donner une idée d'autant plus diſtincte, on pourra faire les remarques qui ſuivent.

1°. Que notre Formule marque en même tems quatre Points z, Z, s & S; que les deux premiers diametralement oppoſés, marquent que la Mer y eſt la plus haute, & les deux autres diametralement oppoſés marquent que la Mer x eſt la plus baſſe, & que l'Arc $z\,s$ eſt toujours de 90°, ce que l'on connoit de ce que $\sqrt{\tfrac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}}$, exprimant le Sinus d'un Angle, ſon Coſinus eſt exprimé par $\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}\right)}$.

2°. Que

2°. Que l'Angle $b C \zeta$ étant aigu, le Point z tombe entre les Points b & ζ, que ſi cet Angle eſt droit, le Point z tombe préciſément ſur ζ (en ſuppoſant la Force lunaire plus grande que la Force ſolaire, comme elle l'eſt ſans doute); & enfin, lorſque l'Angle $b c \zeta$ eſt obtus, que le Point z tombe au-delà du Point ζ, l'Arc $b z$ devenant plus grand que l'Arc $b \zeta$, avec cette loi que le Point z s'approche reciproquement du Point d, tout comme il s'étoit éloigné du Point b. Enfin, qu'il y a autant de racines inutiles, qu'il faut rejetter, mais qu'il faudroit adopter, ſi la Force ſolaire ſurpaſſoit la Force lunaire.



COROLLAIRE I.

XIII.

On trouve le Sinus de l'Angle $\zeta C z$ exprimé par $\frac{\zeta}{b}$ de la même façon, que nous avons trouvé le Sinus de l'Angle $b C z$. On voit même que ſans faire le Calcul de nouveau, on n'a qu'à renverſer les lettres ζ & δ dans la la valeur de A. indiquée au §. XI. & ſuppoſer $-\frac{\delta b b}{\zeta m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = B$, & on aura $\frac{\zeta}{b} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{B}{2\sqrt{(4+BB}}\right)}$.

COROLLAIRE II.

XIV.

Conſidérant l'Angle $b C \zeta$ comme variable, on voit que l'Angle $\zeta C z$, qui marque l'Angle horaire entre le moment de la plus haute Marée, & celui du paſſage de la Lune par le Méridien, peut faire un *maximum*, ou plus grand, puiſqu'il eſt $= o$, tant lorſque l'Angle $b C \zeta$ eſt nul, que lorſqu'il eſt égal à un droit: nous allons déterminer cet Angle dans la Propoſition ſuivante.

PROBLEME.

XV.

Déterminer l'Angle $b C \zeta$ tel que ſon Angle $\zeta C z$ devienne le plus grand qu'il eſt poſſible.

SOLUTION.

Pour déterminer l'Angle en queſtion, il faut faire $d\varsigma = 0$, or ς étant exprimé par des conſtantes, & par la variable B (§. *XIII.*) il faut ſuppoſer $dB = 0$, c'eſt-à-dire, que la différentielle de la quantité $\frac{-\delta bb}{\epsilon mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$, doit être ſuppoſée égale à zero, en conſidérant les lettres m & n comme variables: ſubſtituons pour n ſa valeur $\sqrt{bb - mm}$ (§. *X.*) nous aurons

$$B = \frac{-\delta bb + \epsilon mm - \epsilon bb}{\epsilon m \sqrt{bb - mm}},$$

dont la différentielle devient nulle, en faiſant

$$\frac{m}{b} = \sqrt{\frac{\epsilon + \delta}{2\delta}}.$$

COROLLAIRE.

XVI.

Si ϵ étoit $= \delta$, c'eſt-à-dire, ſi les deux Luminaires avoient une force égale, pour mettre la Mer en mouvement, on auroit $m = b$. Mais la Force lunaire étant plus grande que la Force ſolaire, m devient plus petit que b: cependant l'Angle $b\,C\,\epsilon$ ne deviendra jamais moindre que de 45°.

On remarquera auſſi, qu'il y a quatre Points, tels que ϵ, dont deux ſont autant éloignés du Point b, que les deux autres le ſont du Point d; & que dans ces quatre Points, la haute Marée vient alternativement après & avant le paſſage de la Lune par le Méridien.

Nous allons voir à préſent comme on doit appliquer tout ce que nous venons de dire pour trouver l'heure des Marées, & pour faire voir, combien notre Théorie bien ménagée s'accorde là-deſſus avec les Obſervations.

CHAPITRE VI.

Sur l'heure moyenne des Marées pour toutes les Lunaiſons.

I.

ON a été de tout tems ſoigneux à bien remarquer l'heure des hautes & baſſes Marées, pour établir là-deſſus, autant qu'il eſt poſſible,

ble, des regles pour l'utilité de la Navigation; & quoi qu'il ſoit impoſſible de donner des regles générales & exactes, on n'a pas laiſſé de continuer ces recherches. Mais je ne ſçache pas qu'on ſe ſoit encore aviſé de raiſonner là-deſſus autrement, que par *induction* ſur un grand nombre d'Obſervations, pendant que c'eſt ici une matiere, qui dépend beaucoup de la Géometrie pour l'eſſentiel, & que ce n'eſt que par rapport à quelques circonſtances, qu'on eſt obligé de recourir aux Obſervations, pour établir des regles: & cela eſt ſi vrai, que la ſeule Théorie m'a fait voir pluſieurs Points, dont je n'étois pas encore inſtruit par la lecture. Voyons donc avant toutes choſes, juſqu'où la Théorie peut aller, pour éclaircir notre ſujet: nous nous attacherons encore aux hypotheſes marquées au XIX. §. du Chap. IV. que je prie le Lecteur de relire. Nous irons enſuite plus loin, & nous examinerons, quelle correction il faudra employer à l'égard de chaque hypotheſe; lorſqu'elle eſt en quelque façon changée.

I I.

Il eſt bon d'avertir ici le Lecteur, lorſque je parlerai des deux Marées qui ſe ſuivent, que j'entends deux Marées pareilles, qui ſe ſuivent au bout de 24. heures, en ſautant la Marée intermediaire; nous éviterons par-là de certaines petites inégalités, qu'on a obſervées, lorſqu'on a comparé enſemble les deux Marées, qui ſe font dans un même jour. Si l'on veut comparer enſemble des Marées, qui ont pluſieurs jours d'intervalle, nous choiſirons celles qui ſe font pendant que la Lune eſt au-deſſus de l'Horiſon.

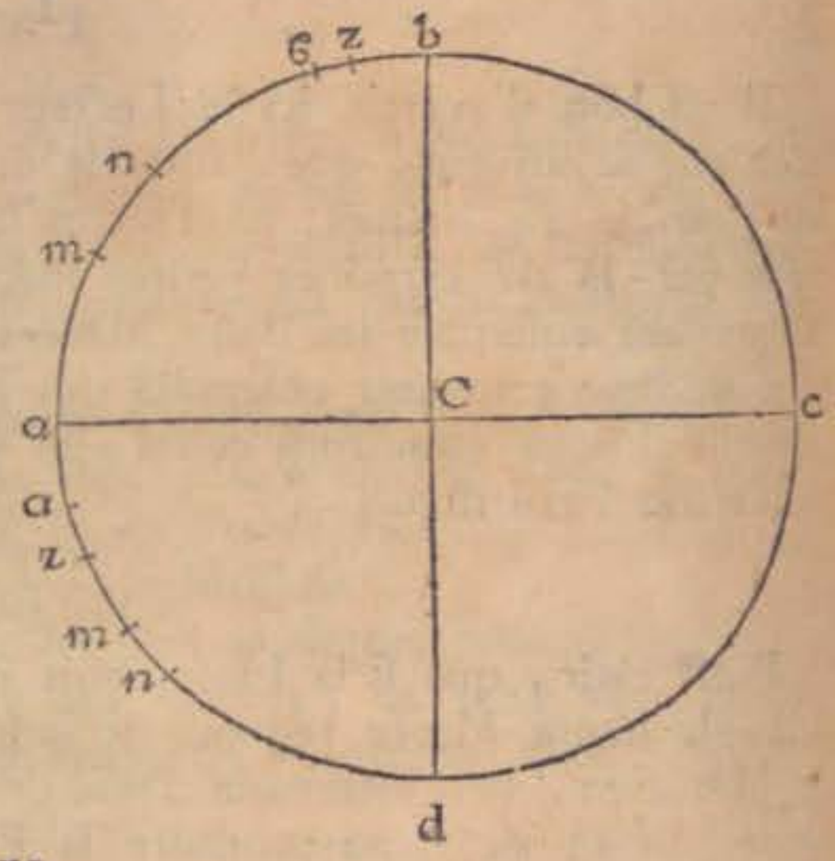
I I I.

Il eſt clair, que ſi la Lune avoit infiniment plus de force que le Soleil, la haute Marée répondroit préciſément au paſſage de la Lune par le Méridien, & l'intervalle d'une Marée à l'autre, ſeroit d'un jour lunaire précis; & ſi au contraire la Force du Soleil ſurpaſſoit infiniment la Force lunaire, la Marée ſe feroit au moment du paſſage du Soleil par le Méridien, & l'intervalle d'une Marée à l'autre, ſeroit préciſément d'un jour ſolaire. Mais comme les deux dites Forces ſont, ſuivant toutes les Obſervations, comparables entre elles, on voit que le vrai tems de la haute Marée doit dépendre du paſſage par le Méridien de l'un & de l'autre Luminaire; mais il aura toujours plus de rapport avec la Lune, qu'avec le Soleil, parce que la Force lunaire eſt, ſans contredit, plus grande que la Force ſolaire. Nous verrons dans la ſuite, qu'il y a quatre ſituations de la Lune, dans leſquelles l'intervalle de deux Marées, qui ſe ſuivent, eſt préciſément d'un jour lunaire; & qu'en

deçà, ou en delà de ces quatre Points, les Marées doivent néceſſairement avancer ou retarder ſur le tems du jour lunaire: nous déterminerons ces accélerations & retardemens, qui ſont fort inégaux, & nous ajoûterons pluſieurs autres Remarques ſur cette matiere, qui l'éclairciront plus que toutes les Obſervations, qu'on a faites juſqu'ici. Il eſt vrai que ces déterminations dépendent du rapport qu'il y a entre les Forces des deux Luminaires, que ce rapport eſt encore incertain, & qu'il eſt même variable : mais j'indiquerai quels ſont les moyens les plus ſûrs, pour le déterminer d'abord dans de certaines circonſtances, & enſuite généralement. Avant que de traiter cette Queſtion, qui eſt une des plus utiles, & des plus eſſentielles, nous déterminerons généralement le vrai tems des hautes & baſſes Marées, en ſuppoſant le rapport entre les forces des deux Luminaires connu.

IV.

Soit *b a d c* l'Equateur, dans le plan duquel les deux Luminaires ſont encore ſuppoſés ſe mouvoir de *b* vers *a*, pendant que l'Equateur de la Terre ſe tourne dans le même ſens autour de ſon Centre *C*. Prenons dans l'Equateur un Point *b*, & conſidérons les Luminaires ſe trouver dans leur Conjonction au Point *b*, c'eſt-à-dire, étant l'un & l'autre dans la Ligne prolongée *d b*; on voit qu'en ce cas la haute Marée doit être dans ce moment-là en *b*, & préciſément à midi.



V.

Voyons à préſent ce qui doit arriver un, deux, trois, &c. jours après : ſuppoſons pour cet effet, que le Soleil ſe trouvant encore à midi au Point *b*, la Lune réponde au Point *6*: la haute Marée répondra dans ce moment au Point *z*, & les Arcs *b z*, *6 z* ſe déterminent par les §. §. XI. & XIII. du Chap. V. il faut donc que le Point *b* parcoure dans l'Equateur l'Arc *b z*, pour ſe trouver dans l'endroit de la plus haute Marée ; car on peut négliger les petits Arcs, que les Luminaires parcourent, dans le tems que le Point *b* de l'Equateur parcourt l'Arc *b z*. On voit donc, que ſi l'on veut regler le tems des hautes

Marées

Marées après le tems vrai, on doit prendre l'Arc bz pour l'Arc horaire, qui marque l'heure de la haute Marée de ce jour-là.

Cette regle ſuppoſe le Point ℓ en repos, pendant le tems qui convient audit Arc horaire bz; mais il eſt facile de corriger cette ſuppoſition: car nous verrons dans la ſuite, que l'Arc bz eſt preſque égal à l'Arc $b\ell$; & cela étant, il eſt clair, qu'on n'a qu'à ſubſtituer des heures lunaires aux heures ſolaires, qui répondent à l'Arc bz, pour corriger la dite ſuppoſition.

VI.

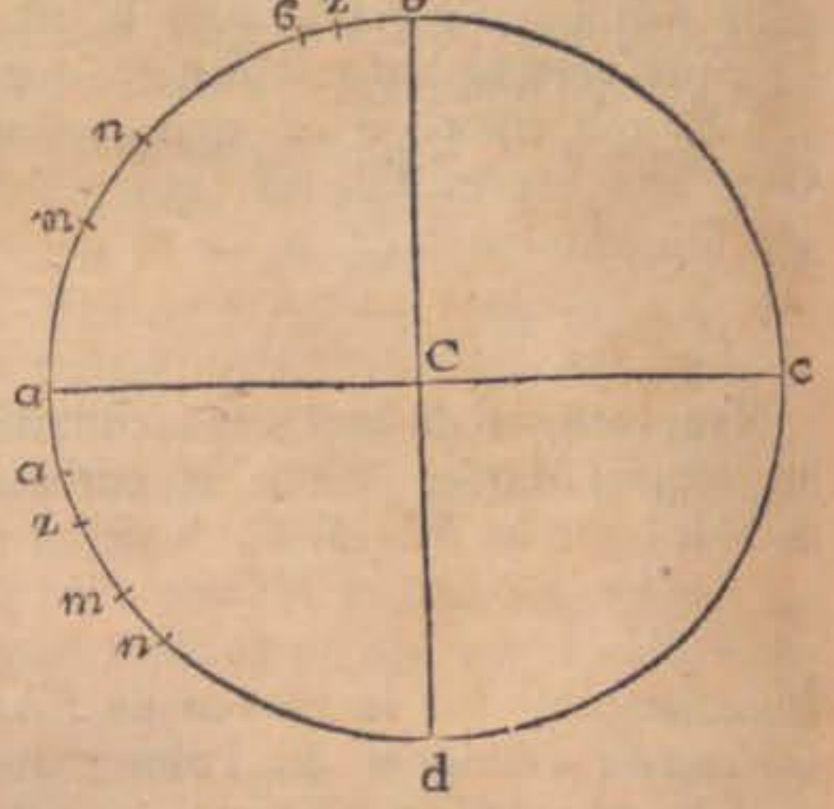
Nous venons de montrer, comment on peut déterminer le vrai tems des hautes Marées, en le rapportant au midi, c'eſt-à-dire, au paſſage du Soleil par le Méridien: voici à préſent, comment on peut déterminer l'heure des hautes Marées, en la rapportant au paſſage de la Lune par le Méridien, qu'on connoît par les Ephémerides: on peut le faire immédiatement par le moyen de l'Arc ℓz: nous verrons que le Point z ne ſçauroit s'éloigner du Point ℓ au-delà d'environ dix dégrés, qui répond à 40 minutes de tems, pendant lequel cet Arc ne ſçauroit varier ſenſiblement; d'où il ſuit que ce petit Arc ℓz marquera toujours l'Arc horaire entre le moment du paſſage de la Lune par le Méridien & le moment de la haute Marée.

VII.

L'Arc ℓz étant tantôt négatif, tantôt affirmatif, comme il paroît par le XIII. Art. du Chap. V. on voit que la haute Marée ſuivra le paſſage de la Lune par le Méridien, depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & qu'elle le précedera depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies: on voit encore par l'Art. XV. du Chap. V. que l'Arc ℓz fait un *maximum*, lorſque le Sinus de l'Arc $b\ell$ eſt $= \sqrt{\frac{\ell+\delta}{2\delta'}}$: c'eſt alors que la haute Marée retarde ou avance le plus ſur le paſſage de la Lune par le Méridien: & comme vers ce tems-là les Points ℓ & z peuvent être cenſés avoir un mouvement égal, l'intervalle d'une Marée à l'autre, ſera alors préciſément d'un jour lunaire: & cet intervalle peut être appellé intervalle moyen entre deux Marées qui ſe ſuivent: il eſt de 24. heures $50\frac{1}{2}$ minutes, en prenant 29 jours 12 heures 44 minutes, pour le tems moyen d'une Conjonction à l'autre.

On remarquera encore que l'intervalle d'une Marée à l'autre, eſt le plus petit dans les Syzygies, & le plus grand dans les Quadratures.

VIII.



Pour déterminer analytiquement les propriétés, que nous venons d'indiquer en gros, nous ſuppoſerons, que la Lune répondant au Point *m*, & la haute Marée étant dans ce moment là au Point *n*, l'Arc *m n* ſoit alors le plus grand qu'il eſt poſſible. Soit outre cela encore le Sinus total = 1, le Sinus de l'Arc $mb = m$, ſon Coſinus = *n*. Cela étant, nous avons déja dit, & nous le remarquerons encore ici:

1°. Qu'on aura $m = \sqrt{\frac{6+\delta}{\delta}}$.

2°. Qu'on peut déterminer la grandeur de l'Arc *m n* par le moyen du XIII. §. Chap. V. où nous avons démontré, que généralement le Sinus de cet Arc eſt

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} \pm \frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)}$$

en ſuppoſant $B = \frac{-\delta\, b\, b}{6\, m\, n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Pour appliquer cette regle générale à notre cas particulier, il faut ſuppoſer $b = 1$; $m = \sqrt{\frac{6+\delta}{2\delta}}$, & $n = \sqrt{\frac{\delta-6}{2\delta}}$: après ces ſubſtitutions, on trouve le Sinus de l'Arc *m n* $= \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{\delta\delta - 6\,6}}{2\delta}\right)}$; & commme δ eſt beaucoup plus grand que 6, on peut cenſer le Sinus de l'Arc *m n* être ſimplement $= \frac{6}{2\delta}$.

3°. Qu'on déterminera la grandeur de l'Arc *n b*, par le moyen du XI. §. du Chap. V. Il eſt remarquable que cet Arc ne dépend point du rapport, qui eſt entre la Force lunaire δ, & la Force ſolaire 6; car il eſt toujours de 45 dégrés.

4°. Que ſi la Lune eſt ſuppoſée dans un Point quelconque 6, les Arcs *b z* & 6 *z* peuvent ſe déterminer par le moyen des XI. & XIII. §. §. du Chap. V. comme nous avons déja dit: mais ſi l'on ſuppoſe le Point 6 bien près du Point *b*, nos Formules font voir, qu'on peut cenſer alors le Sinus de l'Arc $6\,z = \frac{6}{6+\delta} \times m$, & le Sinus du petit Arc $bz = \frac{\delta}{6+\delta} \times m$.

Cet-

Cette Formule nous ſervira à determiner combien les Marées priment vers les Syzygies.

5°. Que ſi la Lune ſe trouve en α bien près de a, la haute Marée repondra dans ce moment au Point z au-delà du Point α, & on trouvera par le XIII. Art. du Chap. V. ſi l'on traite bien l'équation qui y eſt marquée, le Sinus du petit Arc $\alpha z = \frac{\delta}{\delta - \zeta} \times n$, en prenant pour n le Cosinus de l'Arc $b\alpha$, ou ce qui revient au même, le Sinus du petit Arc $a\alpha$. Cette valeur du petit Arc αz nous ſervira à déterminer, combien les Marées retardent vers les Quadratures.

Ces deux dernieres Remarques ſont fondées ſur ce que m ou n, étant comme infiniment petits, les quantités A & B deviennent comme infiniment grandes, & alors on peut ſubſtituer ſimplement $\frac{1}{A}$ & $\frac{1}{B}$ à la place des Quantités

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}\right)} \text{ \& } \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)} :$$

& après ces ſubſtitutions, on trouve les Sinus des petits Arcs, comme nous les avons déterminés.

IX.

Toutes ces propriétés, que nous venons d'établir, ſont tout-à-fait conformes aux Obſervations. Mais pour en ſentir toute la force, il faudroit toujours ſçavoir le rapport qu'il y a entre les Forces δ & ζ, & c'eſt ce que j'ai déja dit, qu'on ne ſçauroit déterminer immédiatement par les principes d'Aſtronomie, faute d'Obſervations aſſez juſtes ſur la Lune; il faut donc s'en tenir aux effets Phyſiques, que la Lune produit ſur la Terre, pour en déduire ſa force; & je n'en connois point d'autres, que les Marées mêmes: mais il s'en faut ſervir avec beaucoup de circonſpection. Comme c'eſt ici un point très-eſſentiel, je n'ai pas voulu manquer de le conſidérer avec toute l'attention qu'il mérite. Voici mes reflexions là-deſſus.

X.

On pourroit déduire le rapport moyen entre les Forces δ & ζ du rapport des plus hautes Marées, qui ſe font près des Syzygies, & des plus petites Marées aux Quadratures. Car on voit par le VIII. §. Chap. V. que la hauteur de la plus grande Marée doit être à celle de la plus petite Marée, comme $\delta + \zeta$ eſt à $\delta - \zeta$. Mais les hauteurs des Marées dans les Ports, où l'on fait les Obſervations, dépendent de tant de circonſtances, qu'elles ne peuvent être tout-à-fait proportionelles aux hauteurs des Marées dans la Mer libre; & c'eſt ce qui fait, qu'on trou-

trouve le rapport moyen entre les plus grandes & les plus petites Marées, aſſez différent dans différents Ports.

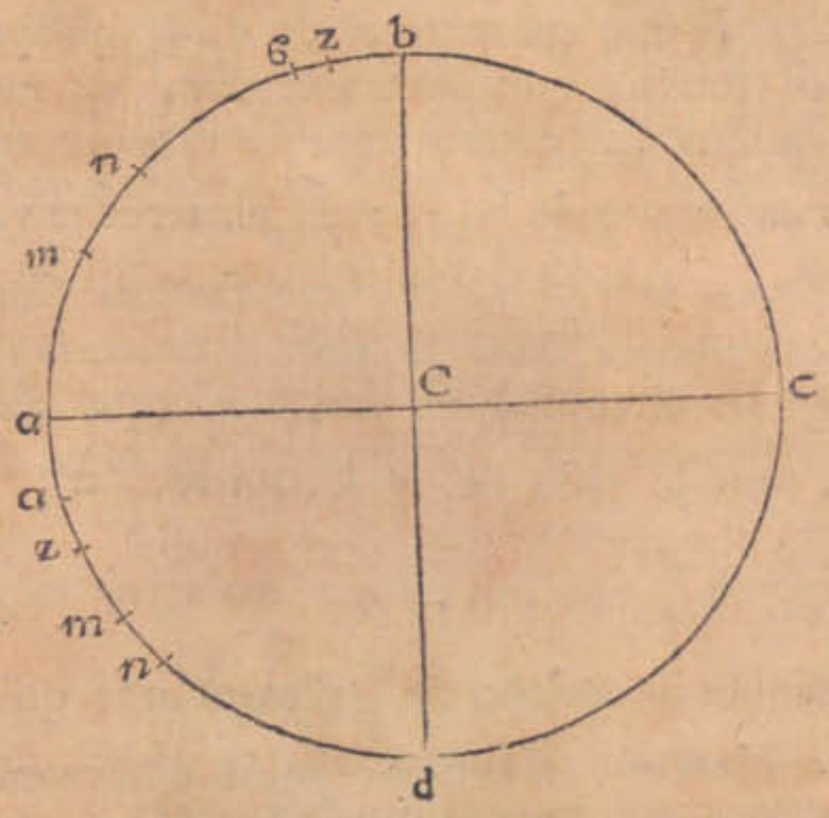
M. Newton, qui a ſuivi cette Méthode, rapporte une Obſervation faite par Sturm au-deſſous de Briſtol, où cet Auteur a trouvé que les hauteurs de la plus grande & de la plus petite Marée, ont été, comme 9 à 5, d'où il faudroit conclure, que $\delta = 3\frac{1}{2} \times 6$. Cette Obſervation eſt bien éloignée de celle que j'ai reçûe dernierement faite à Saint Malo par M. Thouroud. La voici: «Dans les grandiſſimes Marées, la Mer «s'éleve de 50 pieds en plomb au-deſſus du bas de l'eau: dans les Ma-«rées bâtardes, elle ne différe que de quinze pieds.» Si j'ai bien compris cette Obſervation, la plus grande Marée étoit à la plus petite, comme 50 à 15, ou comme 10 à 3; ce qui donneroit $\delta = \frac{13}{7} \times 6$. Ces deux reſultans ſont bien différens: il eſt vrai, que le rapport de δ à 6 eſt variable; mais cette variation ne ſçauroit aller ſi loin; ſi la plus petite valeur de $\frac{\delta}{6}$ eſt $= m$, la plus grande valeur de $\frac{\delta}{6}$ ſera environ $= \frac{3}{2} m$.

Il y a une autre refléxion à faire ſur cette Méthode de trouver le rapport entre les Forces des deux Luminaires: c'eſt que les Marées ſont une eſpece d'Oſcillations, qui ſe reſſentent toujours des Oſcillations précedentes: cette raiſon fait que les variations des Marées, ne ſçauroient être auſſi grandes qu'elles devroient être, ſuivant les Loix hydroſtatiques. Concevons un pendule attaché à une Horloge animée ſucceſſivement par des poids différens: On ſçait, que plus ces poids ſont grands, plus les Oſcillations du pendule deviennent grandes: mais en changeant les poids, les premieres Oſcillations ne prendront pas d'abord leur grandeur naturelle; elles ne s'en approchent que peu à peu. Il n'en eſt pas de même des durées des Oſcillations, lorſque le pendule eſt ſucceſſivement animé par différentes péſanteurs. Conſidérons d'abord un pendule ſimple animé par la péſanteur ordinaire, & qui faſſe ſes Oſcillations dans deux ſecondes de tems, & ſuppoſons enſuite la péſanteur devenir tout d'un coup quatre fois plus grande; je dis que la premiere Oſcillation, qui ſuivra ce changement, ſe fera de même que toutes les autres ſuivantes dans une ſeconde de tems.

Cette conſidération me porte à croire, que les Obſervations ſur les durées & ſur les intervalles des Marées ſont plus ſûres pour notre deſſein, que les hauteurs des Marées: ſi cette refléxion eſt bien fondée, on pourroit faire attention aux Méthodes ſuivantes, pour trouver le rapport moyen entre δ & 6.

1°. Il faudroit pendant pluſieurs mois obſerver, quel eſt le plus petit intervalle de deux Marées. Nous avons dit au VI. §. que l'intervalle moyen eſt d'un jour moyen lunaire, que je ſuppoſe de 24 heures 50 minutes: mais il ſera moindre dans les Syzygies; quoique plus grand qu'un

qu'un jour folaire, ou de 24 heures: ſuppoſons ce plus petit intervalle de 24 heures, & d'autant de minutes, qu'il y a d'unités dans N; &



il faudra prendre dans la Figure ci-deſſus un Arc horaire $b\,6$ de 50 minutes de tems: De cet Arc $b\,6$, il faut prendre une partie $6\,z$, qui réponde à $(50-N)$ minutes. Or par la IV. Remarque du VII. §. l'Arc $6z$ eſt à l'Arc $b\,6$, comme $\frac{6+\delta}{6} \times m$ eſt à m: d'où nous tirons cette analogie,

$$50-N : 50 :: 6 : 6+\delta.$$

& cette analogie donne

$$\delta = \frac{N}{50-N} \times 6.$$

Soit N égal à 35 (c'eſt ainſi qu'on l'obſerve à peu près dans les Marées regulieres) & on aura $\delta = \frac{35}{15}\,6$.

2°. On pourroit auſſi faire attention aux plus grands intervalles; ſi ce plus grand intervalle (qui ſe fait ordinairement après les Quadratures) étoit de 24 heures & d'autant de minutes, qu'il y a d'unités en M. On trouve par la même Méthode, que nous venons d'indiquer, & par la V. Remarque du VII. §. $\delta = \frac{M}{M-50} \times 6$.

Soit $M = 85$ minutes (c'eſt à peu près la valeur que l'on obſerve) & on trouvera

$$\delta = \frac{85}{35} \times 6.$$

Voilà les deux Méthodes, que je crois les plus exactes; & la premiere doit l'emporter ſur la ſeconde, parce que les Marées ſont plus irrégulieres après les Quadratures, qu'après les Syzygies. Il y a encore

plusieurs autres Méthodes pareilles à celles que je viens d'expoſer, & dont j'ai fait en partie le Calcul; mais comme je ne ſuis pas aſſez content des Obſervations, ſur leſquelles ces Méthodes ſont fondées, je ne les mettrai pas ici. Je me contenterai de dire, qu'après tous les examens que j'ai faits, j'ai trouvé, que pour accorder, autant qu'il eſt poſſible, toutes les Obſervations qui déterminent le rapport entre δ & ϵ, il faut ſuppoſer la valeur moyenne de $\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{5}{2}$; la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\epsilon} = 2$, & ſa plus grande valeur $= 3$. C'eſt donc ſur ces ſuppoſitions que nous raiſonnerons & calculerons dans la ſuite; & comme nous ne conſidérons encore toutes les circonſtances variables, que dans leur état moyen, nous ferons dans tout le reſte de ce Chapitre $\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{5}{2}$.

M. Newton ſuppoſe $\frac{\delta}{\epsilon}$ environ $= 4$: mais j'ai déja dit, pourquoi ſa Méthode doit indiquer la valeur de $\frac{\delta}{\epsilon}$ plus grande qu'elle n'eſt: la raiſon en eſt, que ſi les Marées, n'avoient point d'influence les unes ſur les autres, comme elles ont, les plus grandes Marées différeroient davantage des plus petites, & par là on trouveroit la valeur de $\frac{\delta}{\epsilon}$ plus petite.

Avant que de finir cette digreſſion ſur le rapport entre la force de la Lune, & celle du Soleil, & d'en faire l'application à notre ſujet, je ferai ici une refléxion ſur les Forces abſolues de la Lune & du Soleil. Nous avons fait voir aux §. §. VIII. & XV. du Ch. IV. que dans l'hypotheſe de l'homogenéité de la Terre adoptée par M. Newton, le Soleil ne ſçauroit faire varier les eaux au-delà de deux pieds, ni par conſéquent la Lune au-delà de cinq pieds. Ces deux Forces combinées enſemble pour les Quadratures feroient une Force abſolue à faire varier les eaux en pleine Mer de trois pieds de hauteur verticale pendant une Marée. Mais peut-on comprendre, que d'une variation de trois pieds en pleine Mer, il puiſſe provenir tous les effets des Marés aux Quadratures? Encore eſt-il très-vraiſemblable, que la variation actuelle des eaux differe beaucoup de la variation entiere, que la Théorie indique comme poſſible: peut-être même, que la variation actuelle eſt à peine ſenſible par rapport à l'autre, & cela non-ſeulement à cauſe des empêchemens accidentels, tel que le frottement, l'imparfaite fluidité, &c.; mais encore à cauſe de l'inertie des eaux & du mouvement journalier de la Terre; car on voit bien, que ſi ce mouvement journalier de la Terre étoit d'une viteſſe infinie, les Luminaires ne pourroient avoir aucun effet pour faire varier la Mer, quelque Force qu'ils euſſent. Je ſuis donc entierement perſuadé, que les Forces abſolues des deux Luminaires ſont beaucoup plus grandes, que M. Newton ne les ſuppoſe, & tous

les

ſes Commentateurs après lui, prenant l'homogenéité de la Terre, pour une hypotheſe, ſur laquelle ils bâtiſſent tout leur Syſtême. Ces reflé-xions doivent donner beaucoup de poids à tout ce que nous avons dit au Chap. IV. où nous avons démontré, qu'en ſuppoſant, que les Denſi-ſités des Couches de la Terre augmentent depuis la circonférence vers le centre (ſuppoſition d'ailleurs extrêmement probable par pluſieurs raiſons Phyſiques, dont j'ai expoſé une partie au XIII. §. du Chap. IV.) on peut augmenter, tant qu'on veut, les effets de la Lune & du Soleil ſur la Terre. Après cet examen ſur les Forces, tant relatives, qu'ab-ſolues des deux Luminaires, nous allons en faire uſage, pour conſidé-rer de plus près tout ce qui regarde la durée des Marées, leurs interval-les, & pour faire voir le merveilleux accord entre la Théorie & les Obſervations.

XI.

Les intervalles de deux Marées qui ſe ſuivent, ſont les plus petits dans le tems des Syzygies: leur intervalle moyen eſt alors de 24 heu-res 35 minutes, & les Marées priment chaque jour de 15 minutes ſur le mouvement de la Lune.

XII.

Les intervalles de deux Marées qui ſe ſuivent, ſont les plus grands dans le tems des Qnadratures: ils ſont alors de 24 heures 85 minutes; c'eſt-à-dire, de 25 heures 25 minutes: les Marées retardent de 35 mi-nutes par jour ſur le mouvement de la Lune. Cette grande inégalité doit rendre l'heure des Marées plus incertaine & plus irréguliere que dans les Syzygies; & c'eſt auſſi ce que l'on obſerve: mais ce n'eſt pas la ſeule raiſon.

XIII.

Les Marées répondront préciſément au paſſage de la Lune par le Mé-ridien, tant dans les Quadratures, que dans les Syzygies, ſi celles-ci ſe font auſſi au moment du paſſage de la Lune par le Méridien. Mais ſi les Quadratures & les Syzygies ne ſe font pas dans le moment du paſſage de la Lune par le Métidien, il faut des corrections. Dans les Syzygies, il faut une correction de 15 minutes pour un jour entier en vertu du XI. §. & par conſéquent $\frac{5}{8}$ de minutes par heure, que la hau-te Marée avancera ſur le paſſage de la Lune par le Méridien, ſi les Sy-zygies ſe font avant ce même paſſage; & que la haute Marée retarde-ra ſur le paſſage de la Lune par le Méridien, ſi les Syzygies ſe font après ce paſſage. Dans les Quadratures il faut une correction de 35 mi-nutes par jour, en vertu du §. XII. c'eſt-à-dire, environ une minute

& demie par heure, que la haute Marée retardera ſur le paſſage de la Lune par le Méridien, ſi les Quadratures ſe font avant ledit paſſage; & qu'elle avancera, ſi les Quadratures ſe font après le paſſage de la Lune par le Méridien. Car près des points *b* & *a*, les Arcs *bz* & *a z'* peuvent être cenſés proportionnels aux Arcs *bf* & *a α*.

XIV.

Si au lieu de rapporter les hautes Marées aux jours lunaires, on vouloit conſidérer les jours ſolaires, on voit bien qu'il faut dire, que les hautes Marées, au lieu de primer de 15 minutes dans les Syzygies, retardent de 35. minutes dans un jour, ou d'environ une minute & demie par heure; & qu'elles retardent de 85 minutes par jour dans les Quadratures, ce qui fait environ trois minutes & demie par heure: de là nous tirerons cette regle pour les Syzygies.

Il faut ajoûter à l'heure moyenne de la Marée dans les Syzygies une minute & demie par chaque heure, que les Syzygies auront devancé ladite heure moyenne, & en retrancher une minute & demie par chaque heure, que les Syzygies retarderont ſur la même heure moyenne.

Et pour les Quadratures nous aurons la regle ſuivante:

Il faut ajoûter, ou retrancher, dans les Quadratures de l'heure moyenne de la Marée, trois minutes & demie par chaque heure, que les Quadratures avanceront ou retarderont ſur la même heure moyenne.

XV.

M. Caſſini, dont les remarques ingénieuſes ſur les Marées m'ont ſervi de guide dans mes recherches, a donné par induction des regles pareilles, avec cette différence que dans les Syzygies, il a mis deux minutes par heure, au lieu d'une minute & demie; & deux minutes & demie dans les Quadratures, au lieu de trois minutes & demie.

XVI.

Enfin nous remarquerons, que l'intervalle moyen de deux Marées qui ſe ſuivent, lequel intervalle eſt de 24 heures lunaires, ou 24 heures 50 minutes, n'eſt pas également éloigné des Syzygies & des Quadratures; mais qu'il eſt beaucoup plus près des Quadratures, que des Syzygies: auſſi pouvoit-on le prévoir facilement; car comme toutes les accélerations depuis le Point *b* juſqu'au Point *m* (qui eſt celui, dont il eſt queſtion ici) doivent compenſer tous les retardemens depuis le Point *m* juſqu'au Point *a*, & que les accélerations ſont beaucoup plus petites

que

que les retardemens, on voit d'abord, que le Point *m* doit être plus près du Point *a*, que du Point *b*. Mais nous déterminerons exactement ce point *m* par le moyen de la premiere Remarque du VIII. §. où nous avons démontré que le Sinus de l'Arc *mb* est $= \sqrt{\frac{6+\delta}{2\delta}} = \sqrt{\frac{7}{10}} = 0{,}8366$ lequel Sinus répond à un Arc de $56^{d}.\ 47^{m}.$ L'Arc *mb* étant donc de $56^{d}.\ 47^{m}.$, l'Arc *ma* sera de $33^{d}.\ 13^{m}.$, & les deux Arcs *mb* & *ma* sont comme 3407 à 1993.

L'Arc *nb* étant toujours de 45 dégrés (*par la III. Remarque du VIII.* §.) nous avons l'Arc $mn = 11^{d}.\ 47^{m}.$; & cet Arc *mn* marque le plus grand intervalle possible entre le passage de la Lune par le Méridien, & la haute Marée. Cet intervalle est donc de 47 minutes de tems: le passage de la Lune par le Méridien suivra la haute Marée depuis les Syzygies jusqu'aux Quadratures, & la précédera depuis les Quadratures jusqu'aux Syzygies. Mais le plus grand intervalle de l'un à l'autre (qui se fait environ $2\ \frac{3}{4}$ jours avant & après les Quadratures) ne surpasse jamais 47 minutes de tems.

XVII.

Toutes ces Propositions depuis le XI. §. jusqu'ici, nous donnent une idée claire des heures des hautes Marées, & de toutes leurs variations pour chaque âge de la Lune. Car, quoi-que nos démonstrations soyent fort hypothetiques, elles n'en méritent pas moins d'attention; je ferai voir dans le Chapitre suivant, comment on peut donner des corrections assez justes à l'égard de toutes les hypotheses que j'ai exposées au XIX. §. du Chap. IV. Mais pour donner toute la perfection qui est possible, à cette matiere, je montrerai plus précisément, comment on peut trouver l'intervalle entre le passage de la Lune par le Méridien, & la haute Marée, pour tout Arc donné entre les deux Luminaires; après quoi je donnerai une Table, que j'ai pris la peine de calculer de dix en dix dégrés. Il sera facile après cela moyennant les Ephémerides & des Interpolations, de déterminer l'heure des Marées généralement.

XVIII.

Soit donc encore le Soleil en *b*; la Lune dans un Point quelconque *m*: la haute Marée en *n*. Soit le Sinus de l'Arc $mb = m$: le Sinus total $= 1$, le Cosinus de l'Arc $mb = n$: qu'on fasse (§. *XIII. Chap. V.*).

$$B = \frac{-\delta\, bb}{6\, m\, n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \frac{4\, m\, m - 7}{2\, m\, n} :$$

on

on aura le Sinus de l'Arc $m\,n$ (qui eſt l'Arc horaire entre le paſſage de la Lune par le Méridien & la haute Marée)

$$= \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} + \frac{B}{2\sqrt{4 + B\,B}}\right)}.$$

Si l'on change cette Quantité radicale en ſuites, en faiſant attention que B eſt toujours un nombre négatif beaucoup plus grand que l'unité, on verra qu'on peut, ſans aucune erreur ſenſible, ſuppoſer le Sinus de l'Arc horaire $m\,n = \frac{1}{B} - \frac{3}{2B^3}$, & même ſimplement $= \frac{1}{B}$ près des Syzygies & des Quadratures. Voici à préſent la Table dont je viens de parler.

La *premiere* Colonne marque de dix en dix Dégrés l'Angle compris entre les deux Luminaires vûs du centre de la Terre environ l'heure de la Marée : la *ſeconde* marque le nombre de minutes, qu'il faut retrancher depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & ajoûter depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies à l'heure du paſſage de la Lune par le Méridien, pour trouver l'heure de la Marée; & la *troiſième* marque la vraie heure de la haute Marée.

TABLE FONDAMENTALE

pour trouver l'heure moyenne des hautes Marées.

Distances entre les deux Luminaires en Dégrés.	*Tems de la haute Mer avant & après le passage de la Lune par le Méridien.*	*Heure de la haute Mer.*
o Dégrés.	o Minutes.	o Heur. o Min.
10	$11\frac{1}{2}$ avant.	o $28\frac{1}{2}$
20	22 avant.	o 58
30	$31\frac{1}{2}$ avant.	1 $28\frac{1}{2}$
40	40 avant.	2 o
50	45 avant.	2 35
60	$46\frac{1}{2}$ avant.	3 $13\frac{1}{2}$
70	$40\frac{1}{2}$ avant.	3 $59\frac{1}{2}$
80	25 avant.	4 55
90	o	6 o
100	25 après.	7 5
110	$40\frac{1}{2}$ après.	8 $0\frac{1}{2}$
120	$46\frac{1}{2}$ après.	8 $46\frac{1}{2}$
130	45 après.	9 25
140	40 après.	10 o
150	$31\frac{1}{2}$ après.	10 $31\frac{1}{2}$
160	22 après.	11 2
170	$11\frac{1}{2}$ après.	11 $31\frac{1}{2}$
180	o	12 o

XIX.

La Table que nous venons de donner, détermine généralement l'heure des hautes Mers pour les hypotheſes expoſées au XIX. §. Chap. IV. s'il eſt vrai que la raiſon moyenne entre les Forces de la Lune & du Soleil, ſoit comme 5 à 2. Je la crois à-peu-près telle, après avoir bien examiné toutes les Obſervations qui peuvent la déterminer: cependant, comme ces Obſervations ne ſont ni aſſez juſtes, ni en aſſez grand nombre, pour s'y fier entierement, je ne la donne pas encore pour tout-à-fait exacte: il eſt pourtant certain, que cette Table ne ſçauroit manquer d'avoir toute l'exactitude néceſſaire, les Marées étant ſujettes à pluſieurs irrégularités, dont on ne ſçauroit donner aucune meſure, & qui ſont de beaucoup plus grande conſéquence, que tout ce qu'il y a encore d'incertain dans la Table. Nous allons examiner avec quelles précautions & corrections on doit s'en ſervir.

CHAPITRE VII.

Qui contient à l'égard de pluſieurs Circonſtances variables, les Corrections néceſſaires pour les Théoremes & pour la Table du Chapitre précedent, & une Explication de pluſieurs Obſervations faites ſur les Marées.

I.

LEs Vents & les Courants irréguliers contribuent le plus à rendre les Marées incertaines & irrégulieres. Ils accélereront & augmenteront le Flux, ou le retarderont & le diminueront, ſelon qu'ils ont une direction commune ou contraire avec le Flux naturel des eaux. Mais on voit bien qu'il faut ſe contenter de ces effets, & qu'il eſt difficile & même impoſſible d'en marquer le détail, ou des meſures préciſes.

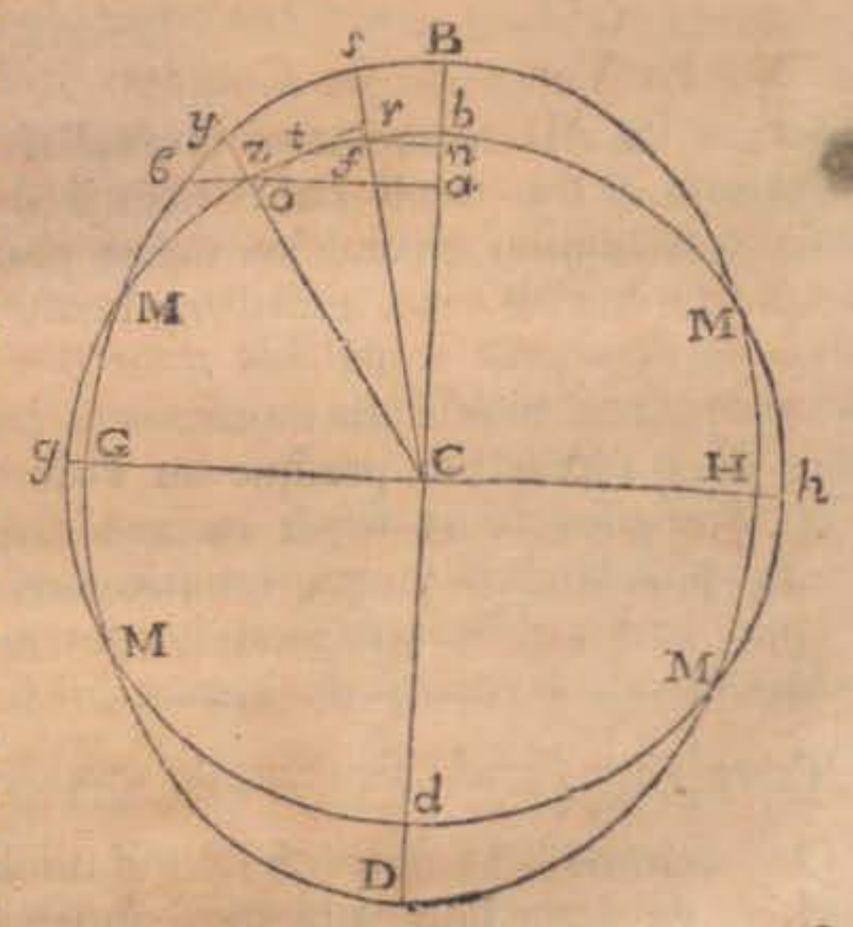
II.

La ſeconde circonſtance qui fait varier les Marées, eſt la ſituation du Port, ſa profondeur, ſa communication avec la Mer libre, la pente de ſon fonds & des environs, &c. Tout cela fait qu'il eſt impoſſible de marquer l'heure abſoluë des Marées dans les Ports, ou Bayes, ou Côtes differemment ſituées. Mais comme toutes circonſtances demeurent toujours les mêmes, on peut ſuppoſer qu'elles font le même effet ſur toutes les Marées; ſçachant donc combien la Marée eſt retardée dans les Syzygies, on la ſçaura auſſi à-peu-près dans toutes les autres ſituations

tuations de la Lune. Cette ſuppoſition eſt la ſeule reſſource qui nous reſte : j'avoue même qu'elle doit être fort peu exacte pour les différentes déclinaiſons des deux Luminaires à l'égard de l'Equateur: il n'eſt pas vraiſemblable non plus, qu'elle ſoit également juſte pour les grandes Marées dans les Syzygies, & pour les Marées bâtardes dans les Quadratures. Mais avec tout cela, on ne doit pas la rejetter, pluſieurs Obſervations m'ayant fait voir, que moyennant cette correction, le cours des Marées répond aſſez bien à la Théorie. Il faut donc ſçavoir par un grand nombre d'Obſervations pour chaque endroit l'heure moyenne des hautes Mers dans les Syzygies, & ajoûter cette heure au tems marqué dans la ſeconde & troiſiéme Colonne de notre Table : c'eſt cette heure moyenne des hautes Mers dans les Syzygies, que les Mariniers appellent *heure du Port*: elle varient extrêmement dans les différens Ports, comprenant tout le tems & durée d'une Marée.

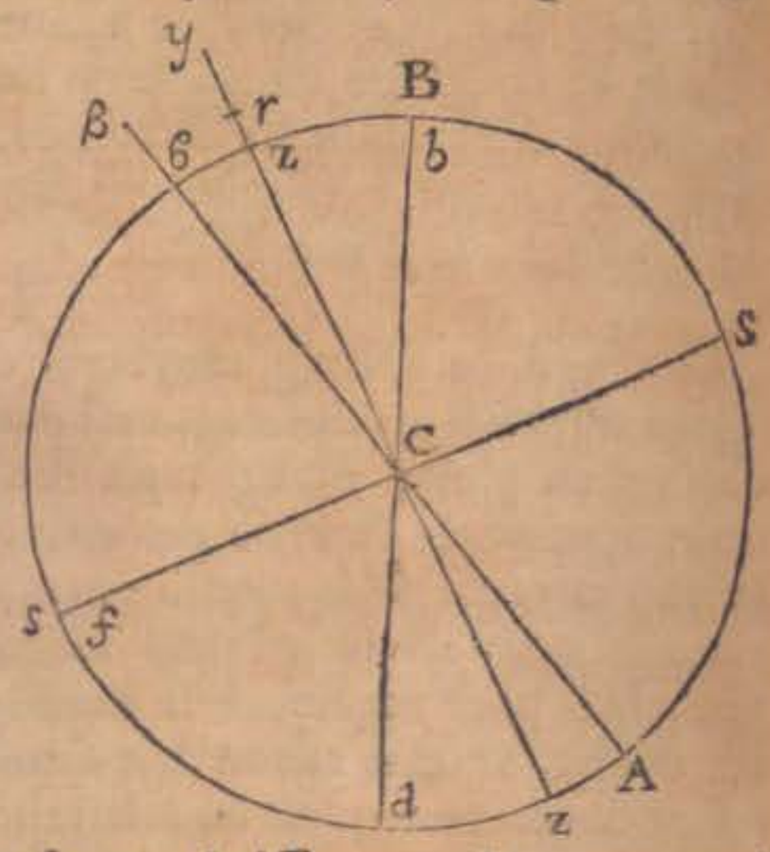
III.

Ce retard de l'heure moyenne des pleines Mers dans les Syzygies, à l'égard du midi, s'obſerve auſſi dans la Mer libre, ou plutôt dans les Iſles qui ſont en pleine Mer : mais il n'eſt pas ſi grand, & vient d'une autre cauſe, ſçavoir de l'inertie des eaux, qui les empêche d'obéïr aſſez promptement, à cauſe de la viteſſe du mouvement journalier de la Terre. On peut appliquer ici tout le raiſonnement que nous avons fait au VI. §. du Chap. III. pour expliquer la nutation de la Lune en longitude: On pourroit douter, ſi cette raiſon doit faire avancer ou retarder les Marées : Suppoſons donc, pour nous en éclaircir, que, tant les Luminaires, que la haute Marée, répondent à un même Point dans cette Figure : comme le mouvement des Luminaires n'eſt pas ſenſible, par rapport au mouvement journalier de la Terre, nous les conſidérerons comme demeurant dans la ligne *d b*: l'Equateur de la Terre changera ſa figure naturelle *b g d h* en *B G D H*; & cette figure *B G D H* tournant autour du Centre *C* de *B* vers *G*, le ſommet *B* viendra quelque tems après en *y*: cela étant, ſi les eaux pouvoient ſe compoſer dans un inſtant dans un état d'équilibre, l'élevation *B b* devroit ſe changer en *y z*, & la force qui devroit produire ce changement, ſeroit exprimée par *B b − y z*: mais cette force étant infiniment petite, ſi l'Angle *B C y*



eſt infiniment petit, elle ne ſçauroit produire tout ſon effet. On voit par-là, qu'il faut ſuppoſer l'Angle *B C y* d'une grandeur conſidérable, & conſidérer enſuite le ſommet *B* comme tranſporté en *y*, afin que la différence des preſſions ſoit aſſez grande, pour conſerver le ſommet des eaux au Point *y*, malgré la rotation du Globe. Le vrai ſommet étant donc en *y*, l'Angle *B C y* ſera l'Angle horaire, qui marquera les retardemens réels des hautes Marées ſur le paſſage de la Lune par le Méridien. Là-deſſus nous pourrons faire les Remarques qui ſuivent.

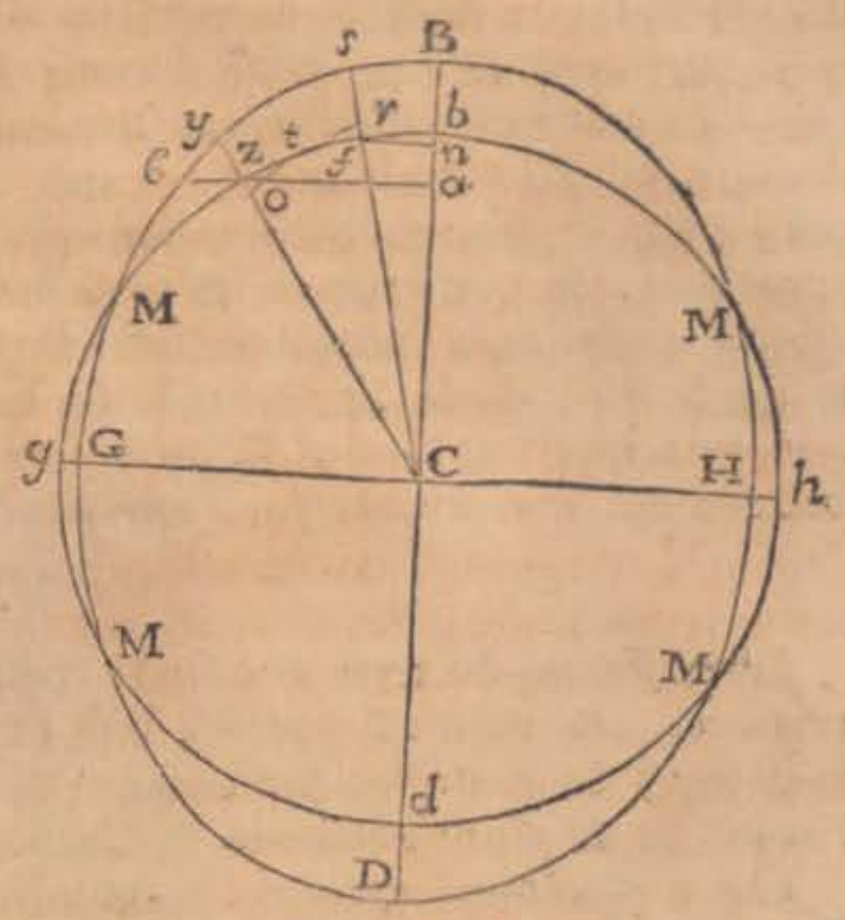
1°. Si les Luminaires ne ſont pas en conjonction, & que le Soleil ſoit en *b*, & la Lune en *ϐ* on pourra conſidérer la choſe, comme ſi les Luminaires étoient en conjonction, mais dans la Ligne *C z*, déterminée de poſition au VIII. §. du Chap. V. & augmenter toujours l'Angle *b C z* de l'Angle *B C y*, dont nous venons de parler: d'où il paroit que l'Angle horaire *B c y* doit toujours être ajoûté au tems marqué dans la troiſiéme Colonne de notre précedente Table: car la hauteur des Marées ne paroît pas devoir changer la choſe, puiſque les changemens de preſſion pour un petit tems donné, ſont proportionnels aux baiſſemens des eaux, qui doivent ſe faire pour conſerver le ſommet des eaux dans un même Point *y*.



2°. Si le mouvement journalier de la Terre étoit infiniment lent; l'Angle *B C y* ſeroit nul: mais il doit être plus grand, d'autant qu'on ſuppoſe le mouvement journalier plus grand & plus prompt; & la différence des hauteurs entre les hautes & baſſes Marées, doit diminuer à proportion.

3°. Si la viteſſe du mouvement journalier étoit comme infinie, la pleine Mer répondroit preſque au Point *G*; mais auſſi la différence des hautes & baſſes Mers ſeroit comme nulle. Il me ſemble après avoir bien conſidéré la choſe, que les haureurs des Marées dans les Syzygies doivent être cenſées proportionnelles aux Sinus des Angles *G C y* dans la Mer libre, & que ſi la hauteur *B b* ſans le mouvement journalier de la Terre eſt $= \ell$, elle ſera avec le mouvement journalier de la Terre $= \frac{C\alpha}{C\,b} \times \ell$.

Or, comme on a obſervé, que dans la Mer libre la haute Marée ſuit environ de deux heures le midi dans les Syzygies; il faut ſuppoſer l'Angle



gle *BCy* de 30 dégrés, & les forces abſolues des Luminaires doivent être ſuppoſées plus grandes en raiſon de $\sqrt{3}$ à 2 pour élever les eaux, autant qu'elles le feroient ſans le mouvement journalier de la Terre.

I V.

Nous avons encore fait voir, que ſans le concours des cauſes ſecondes, les plus grandes Marées devroient ſe faire dans les Syzygies, & les plus petites dans les Quadratures. Cependant on a obſervé, que les unes & les autres ſe font un ou deux jours plus tard. Ce retardement eſt encore produit, ſinon pour le tout, au moins en partie, par l'inertie des eaux, qui doivent être miſes en mouvement, & qui ne ſçauroient obéir aſſez promptement aux forces qui les ſollicitent, pour leur faire ſuivre les loix que ces forces demanderoient. Il y a peut-être encore une autre cauſe, & M. Caſſini me paroit le ſoupçonner de même, quoi qu'il ne ſe ſerve pas de nos principes, la voici: c'eſt qu'il ſe pourroit bien que cette cauſe, qui nous eſt encore ſi cachée, & qui donne une tendance mutuelle aux Corps flottans & compoſans le ſyſtême du monde, que cette cauſe, dis-je, ne ſe communiquât pas dans un inſtant d'un Corps à l'autre, non plus que la lumiere. S'il y avoit, par exemple, un Torrent central de matiere ſubtile, & d'une étenduë infinie, vers le centre de la Terre, & un ſemblable vers le centre de la Lune, ces deux Torrens pourroient produire la Gravitation mutuelle de ces deux Corps; & la viteſſe du premier pourroit être telle, qu'il fallût un ou deux jours à la matiere, pour parvenir depuis la Lune juſqu'à la Terre: en ce cas on voit bien que l'effet de la force lunaire ſur notre Océan, ſeroit le même, qu'il auroit été un ou deux jours auparavant dans la ſuppoſition que la Gravitation ſe communique dans un inſtant. Quoi qu'il en ſoit, comme ce retardement a été obſervé le même à-peu-près après les Syzygies & après les Quadratures, nous pouvons encore ſuppoſer, qu'il eſt le même, pendant toute la revolution de la Lune, c'eſt-à-dire, que les Marées ſont toujours telles, qu'elles devroient être, ſans leſdites cauſes, un ou deux jours auparavant.

Au reſte je n'ai mis ici ce que je viens de dire ſur la cauſe qui pourroit produire la Gravitation mutuelle des Corps du Syſtême du Monde (Gravitation, qu'il n'eſt plus permis de revoquer en doute) que comme

un exemple: je ne prétens pas expliquer ce Phénomene, j'avoue même, qu'il m'eſt encore tout-à-fait incompréhenſible: je ne crois pas non plus que l'ACADEMIE en ait voulu demander une explication; je ſouhaiterois donc qu'on remarquât que ceux qui voudroient ſe ſervir d'autres principes, pour expliquer le Flux & Reflux de la Mer, ne le feroient qu'en apparence, & que tout ce qu'ils pourroient alleguer ne feroient que des efforts d'expliquer mécaniquement la Gravitation ou l'Attraction mutuelle du Soleil, de la Lune & de la Terre, ſans diſconvenir pour cela de nos principes au fond, leſquels ſont ſûrs, & doivent être conſidérés comme des faits averés par l'expérience.

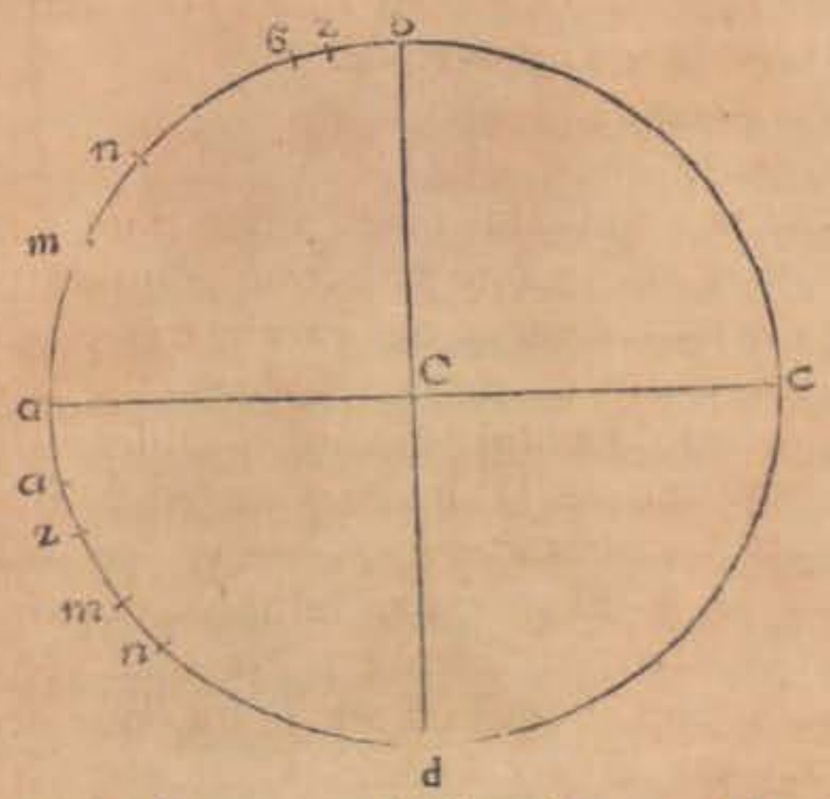
V.

Je profiterai de cette occaſion, pour parler d'un des principaux Phénomenes, & pour répondre à une objection, qu'on pourroit nous faire là-deſſus, & dont l'éclairciſſement me paroît très-propre pour faire voir l'avantage de notre Méthode & de nos Calculs.

On a déterminé après un nombre infini d'Obſervations, que dans les Syzygies l'heure moyenne de la haute Mer eſt à Breſt à 3 heures 28 minutes, & dans les Quadratures à 8 heures 40 minutes; & que la différence n'eſt que de 5. heures 12. minutes depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures. Cette différence a été obſervée tout-à-fait la même à Dunkerque, & dans d'autres Ports; quoique les heures des Marées ſoient différentes aux divers Ports. C'eſt donc ici une Obſervation qui mérite beaucoup d'attention, comme génerale & bien averée: cependant il eſt certain, que ſans les cauſes ſecondes, que nous avons déja indiquées, la différence entre les heures du Port pour les Syzygies; & pour les Quadratures, devroit être à-peu-près de 6 heures lunaires, c'eſt-à-dire d'environ 6 heures 12 minutes. Voici comment je détermine exactement cet intervalle.

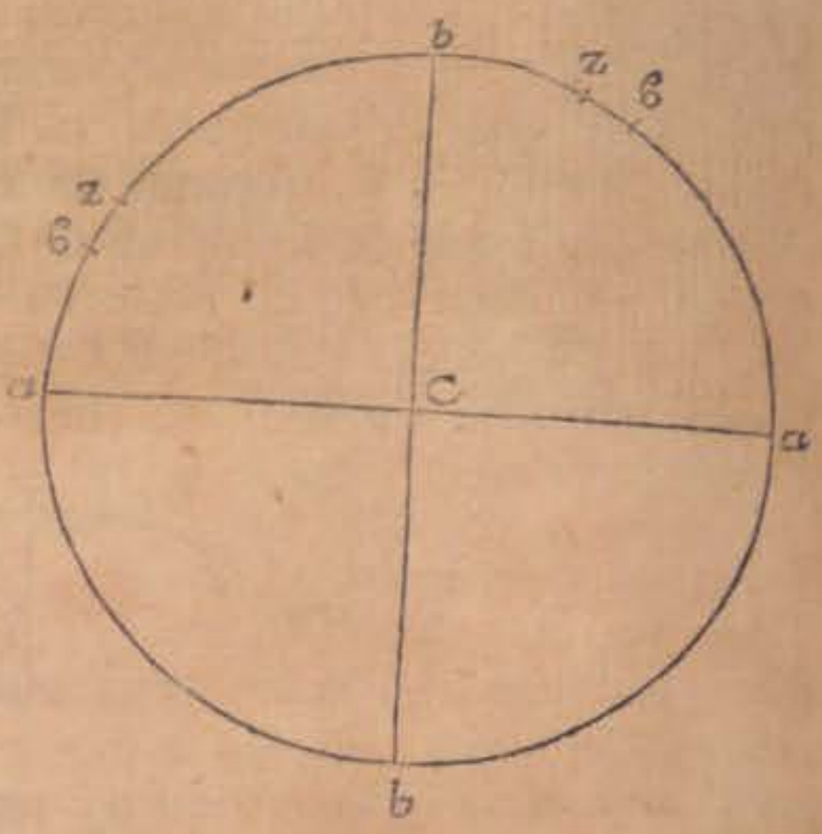
L'heure moyenne de la haute Mer dans les Syzygies, eſt dans la Théorie pure préciſément à midi, puiſqu'il faut conſiderer les Syzygies, comme tombant préciſément ſur l'heure du midi. Si les Syzygies ſe faiſoient plus tard, la haute Mer arriveroit plus tôt & reciproquement; & les accélerations compenſent parfaitement les retardemens après un grand nombre d'obſervations. L'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures, doit être de même cenſée celle qui ſe fait, lorſque la Quadrature ſe fait préciſément à midi; car, lorſqu'il eſt queſtion d'un certain jour, il en faut prendre le milieu, c'eſt-à-dire l'heure du midi, afin que les différences ſe détruiſent ou ſe compenſent les unes les autres. Soit donc le Soleil au Zenith *b*, & la Lune en *a* à 90 dégrés du Zenith, ou à l'Horiſon: cela étant, on voit que ſi la haute Mer eſt ſuppoſé ſe faire préciſément au moment du paſſage de la Lune par le Méridien,

ridien, elle doit ſe faire 6 heures lunaires après midi; car le Point *b* doit faire, par le mouvement journalier de la Terre, l'Arc horaire *b a x* (ſuppoſant que le paſſage de la Lune par le Méridien, qui a été à l'heure du midi en *b*, réponde au Point *x*); mais pour parler plus préciſément, la Lune & le Méridien ſe trouvant en *x*, la haute Marée répondra au Point z^1, & l'Arc *a z* ſera égal aux deux tiers du petit Arc *a x* (§. *XIII. Chap. VI.*) c'eſt donc l'Arc *b a* z^1 qui marque l'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures: l'Arc *b a* eſt



de 90 dégrés; le petit Arc *a x* eſt d'environ 3. dégrés, & l'Arc *x* z^1 de 2 dégrés, & par conſéquent l'Arc *b a* z^1 de 95 dégrés, qui donne un tems de 6 heures 20 minutes, qui devroit être *in abſtracto* l'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures, pendant que celle des Syzygies eſt à midi. D'où vient donc, me demandera-t-on, que, ſuivant les Obſervations, on ne trouve que 5. heures 12 minutes à la place de 6 heures 20. minutes. Je répons que c'eſt cette même anticipation des Syzygies & des Quadratures à l'égard des plus grandes & des plus petites Marées, dont nous avons parlé dans le précedent Article, qui en eſt la cauſe. Il eſt ſi vrai, que c'eſt ici la véritable raiſon, que la quantité de cette anticipation répond parfaitement bien à l'intervalle des heures moyennes des hautes Mers pour les Syzygies & les Quadratures. Nous en pourrons même déterminer plus exactement ladite anticipation, ſur laquelle on eſt encore bien diviſé, les uns la faiſant d'un jour, d'autres de deux, pendant qu'on a déterminé aſſez exactement, & d'un commun accord l'autre Point.

Prenons d'abord le terme de deux jours, comme le plus généralement adopté, en conſidérant que les Marées ſe reglent après les Luminaires, tels qu'ils ont été deux jours auparavant: imaginons-nous les Syzy-



Syzygies ſe faire en *b* & les Quadratures en *b* & *a*: l'effet des Luminaires ſera, en vertu de notre ſuppoſition, dans le tems des Syzygies, comme ſi le Soleil étoit en *b*, & la Lune en *6*, en prenant l'Arc *b6* d'environ $25\frac{1}{4}$ dégrés; & le même effet dans les Quadratures ſera comme ſi le Soleil étant en *b*, la Lune ſe trouvoit en *6'* environ $64\frac{1}{4}$ dégrés; dans les Syzygies, la haute Mer répond au Point *z*, & dans les Quadratures au Point *z'*. C'eſt donc l'Arc *z b z'* qui exprime l'Arc horaire entre l'heure moyenne de la haute Mer des Syzygies & celle des Quadratures (ſubſtituant toutefois des heures lunaires à la place des heures ordinaires, à cauſe du mouvement de la Lune.) Or la Table miſe à la fin du précedent Chapitre, fait voir par le moyen des interpolations, que la Lune étant avant les Syzygies à $25\frac{1}{4}$ dégrés du Soleil, l'heure de la haute Mer eſt à 10 heures 46. minutes du matin; & que la Lune étant après les Syzygies à $64\frac{1}{4}$ dégrés du Soleil, la haute Mer ſe fait à 3 heures 35 minutes du ſoir: l'intervalle eſt donc de 4 heures 49 min. tems lunaire, ou d'environ 5 heures, tems ordinaire. Ce reſultat répond déja aſſez bien à l'Obſervation, qui le donne de 5. heures 12. minutes.

Mais ſi au lieu de deux jours on prend $\frac{8}{5}$ jours, ou environ 59 heures, qui répond à-peu près à 20 dégrés de diſtance de la Lune depuis les Syzygies & les Quadratures, l'heure moyenne de la haute Mer le jour des Syzygies, ſera en vertu de la Table, à 11 heures 2 minutes du matin, & le jour des Quadratures, à 3 heures $59\frac{1}{2}$ minutes du ſoir; & l'intervalle de l'une à l'autre ſera de 4. heures $57\frac{1}{2}$ minutes tems lunaire, qui fait à-peu-près 5 heures 8 minutes. Et enfin on trouve une conformité exacte entre les deux points en queſtion, en donant un jour & demi au retardement des Marées, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que l'érat des Marées eſt tel qu'il devroit être naturellement, un jour & demi plutôt: c'eſt alors que l'intervalle de l'heure moyenne de la pleine Mer aux Syzygies à heures pareilles aux Quadratures, devient de 5 heures 12 minutes, tel qu'un grand nombre d'Obſervations l'a donné: auſſi ce terme d'un jour & demi, eſt-ce celui qui eſt le plus conforme aux Obſervations, & en conſultant les Tables qui ſont dans les Me-

Memoires de l'Académie de l'année 1710. pag. 330. & 332. & prenant la différence moyenne, on trouve fort à-peu-près la même valeur. Toutes ces circonſtances, l'explication naturelle de ce Phénomene, ſa conformité avec toutes les Obſervations faites juſqu'ici, & ſon uſage pour déterminer au juſte un des points des plus eſſentiels, qu'on n'a connu encore que par tatonnement, font bien voir la juſteſſe & la ſupériorité de nos Méthodes. *

VI.

Les autres corrections que l'on doit apporter aux Formules & à la Table du précedent Chapitre, regardent l'hypotheſe que nous avons faite, pour rendre d'abord la Queſtion & les Calculs plus faciles; ſçavoir *que les deux Luminaires ſont des Cercles parfaits autour de la Terre, & cela dans le plan de l'Equateur.* Cette ſuppoſition entraîne celle d'une égalité parfaite dans les diſtances des Luminaires à la Terre, auſſi-bien que dans leur mouvement, & elle fait outre cela leur déclinaiſon, à l'égard de l'Equateur, nulle. Voyons donc à préſent ce que les différentes diſtances, l'inégalité des viteſſes & l'obliquité des orbites peuvent faire ſur l'heure des Marées.

VII.

Les différentes diſtances des deux Luminaires à l'egard de la Terre changent le rapport de leurs forces ſur la Mer; & c'eſt cependant de ce rapport que dépendent preſque toutes les Propoſitions du précedent Chapitre. Nous avons ſuppoſé ce rapport pour les diſtances moyennes de la Lune & du Soleil, comme 5 à 2, fondés ſur un grand nombre d'Obſervations, qui doivent nous confirmer dans cette ſuppoſition, à l'égard des variations des diſtances, après avoir remarqué & démontré la Propoſition qui ſuit:

Les Forces de chaque Luminaire ſur la Mer ſont en raiſon reciproque triplée de leurs diſtances à la Terre.

En voici la Démonſtration. Nous avons dit & démontré au Chapitre quatriéme, que la Force de chaque Luminaire eſt généralement $= \frac{n g b}{G a^2} \times b$ en entendant par n un nombre conſtant par $\frac{G}{g}$ le rapport de la péſanteur dans la region de la Terre vers le Luminaire à la péſanteur qui ſe fait vers le centre de la Terre, & par $\frac{b}{a}$ le rapport du rayon de la

* Je vois après avoir fini cette Piece, que M. Caſſini a deja indiqué ce que nôtre Remarque contient de Phyſique. Voy. les Mem. de l'Ac. des Sc. de 1714. p. 252.

Terre *b* à la diſtance du Luminaire *a*: or comme les différentes diſtances ne changent que les quantités *G* & *a*, nous voyons que la Force de chaque Luminaire eſt conſtamment proportionelle à $\frac{g}{a}$, & la quantité *g*, qui exprime la péſanteur vers le centre du Luminaire, étant reciproquement proportionnelle aux quarrés des Diſtances *a*, il s'enſuit que les Forces de chaque Luminaire ſur la Mer, ſont en raiſon reciproque triplée de leurs Diſtances à la Terre.

M. Newton a déja démontré cette Propoſition, qui ſe confirme auſſi par toutes les Obſervations faites ſur les Marées, quand on en fait une juſte eſtime, & une application bien ménagée. La Propoſition que nous venons de démontrer, nous enſeigne qu'à la place de notre Equation fondamentale $\delta = \frac{5}{2}\theta$, employée dans le Chapitre précedent, il faut ſe ſervir de celle-ci plus générale

$$\delta = \frac{5}{2} \times \frac{l^3}{L^3} \times \frac{S^3}{s^3} \times \theta.$$

en dénotant par *l* & *s* les diſtances moyennes de la Lune & du Soleil à la Terre, & par *L* & *S* leurs Diſtances données quelconques; & là-deſſus on pourra calculer toutes les Queſtions traitées ci-deſſus pour des Diſtances quelconques entre les Luminaires & la Terre: mais nous ne conſidérerons que deux cas, 1°. Lorſque la Lune étant dans ſon Périgée, & la Terre dans ſon Aphelie, le rapport de δ à θ devient le plus grand; & 2°. Lorſque la Lune étant au contraire dans ſon Apogée, & la Terre dans ſon Perihelie, le rapport de δ à θ devient le plus petit. Nous donnerons 1000 parties à la diſtance moyenne de la Lune, 1055 à ſa plus grande diſtance, & 945 à ſa plus petite diſtance; & pour le Soleil, nous poſerons les pareilles diſtances être en raiſon de 1000, 1027 & 983: & nous aurons pour le *premier* cas $\delta = 3{,}115\ \theta$; & dans le *ſecond* cas $\delta = 2{,}022\ \theta$.

Comme il ne s'agit ici que des petites corrections, nous ſuppoſerons ſimplement pour le premier cas $\delta = 3\theta$, & pour le ſecond $\delta = 2\theta$; & afin que nos regles ſoient d'autant plus faciles dans l'application, nous n'aurons point d'égard aux variations du Soleil, comme n'étant preſque d'aucune importance par rapport à celles de la Lune. Diſons donc ſimplement, que dans le Perigée de la Lune, il faut mettre $\delta = 3\theta$, & dans l'Apogée $\delta = 2\theta$. Cela étant, voici les conſéquences que nous en tirons.

1°. Un jour & demi après les Syzygies, l'intervalle de deux Marées qui ſe ſuivent, eſt dans le Périgée de 24 heures $27\frac{1}{2}$ minutes; & dans l'Apogée de 24 heures 33 minutes.

2°. Un jour & demi après les Quadratures, le même intervalle eſt dans le Perigée de 25 heures 15 minutes; & dans l'Apogée de 25 heures

heures 40 minutes. Voyez à l'égard de ces deux Propoſitions le §. VII. du Chap. VI.

3°. Le plus grand intervalle entre le paſſage de la Lune par le Méridien & la haute Mer (que nous avons vû au XVI. §. du Chap. VI. devoir ſe faire environ $2\frac{1}{4}$ jours avant & après les Quadratures, ſans nos corrections, mais qui ſera réellement environ $1\frac{1}{4}$ jours avant, & $4\frac{1}{4}$ après les Quadratures) eſt de 39 minutes environ le Perigée de la Lune, & d'une heure environ ſon Apogée. Ce plus grand intervalle ſe fait auſſi plutôt dans le Perigée, & plus tard dans l'Apogée; la différence eſt d'environ un demi jour.

4°. Pour calculer la Table pareille à celle de ci-deſſus, mais qui ſerve pour le Perigée & pour l'Apogée de la Lune, nous remarquerons que les Sinus des petits Arcs horaires, qui marquent les intervalles entre le paſſage de la Lune & la haute Mer ſont toujours

$$= \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} + \frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)}$$

& qu'à la place de cette quantité, on peut ſubſtituer la valeur fort approchante $\frac{1}{B} - \frac{3}{2B^3}$ (*§. XVIII. Chap. VI.*) & même qu'on peut négliger ici, ſans le moindre ſcrupule, le ſecond terme, puiſqu'il ne s'agit que de petites corrections. Nous conſidérerons donc ces petits Arcs horaires, comme reciproquement proportionnels aux quantités B, c'eſt-à-dire, aux quantités $\frac{-\delta^3 bb}{6mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Et dans cette derniere quantité, nous pourrons encore rejetter ſans peine les deux derniers termes pour notre preſent deſſein, & dire par conſéquent, que pour les différentes valeurs de $\frac{\delta}{6}$, tout le reſte étant égal, les intervalles entre le paſſage de la Lune, & la haute Marée ſont reciproquement proportionnels aux valeurs de $\frac{\delta}{6}$, ou directement proportionnels aux valeurs de $\frac{6}{\delta}$. D'où il paroît que les nombres de la ſeconde Colonne de notre précedente Table, doivent être multipliés par la Fraction $\frac{5}{6}$ dans le Perigée, & par $\frac{5}{4}$ dans l'Apogée de la Lune, après quoi les nombres de la troiſiéme Colonne ſe déterminent comme dans la précedente Table. Mais quant aux nombres de la premiere Colonne, il faut les augmenter chacun d'environ 20 dégrés, à cauſe du retard d'un jour & demi expliqué au long dans ce Chapitre, pendant lequel la Lune change de place à l'égard du Soleil d'environ 19 dégrés, à la place deſquels je mettrai un nombre rond de 20 dégrés.

Voici donc à preſent une Table corrigée à l'égard de toutes les cir-

conſtances expoſées juſqu'ici. La premiere Colonne marque la diſtance qui eſt entre le Soleil & la Lune, environ le tems de la haute Mer, ou plutôt ici, environ le paſſage de la Lune par le Méridien. Les trois Colonnes ſuivantes marquent le nombre de minutes entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & la haute Mer pour le Perigée, pour les Diſtances moyennes & pour l'Apogée de la Lune. Et les trois dernieres marquent les heures abſolues des hautes Mers pour les Perigées, les Diſtances moyennes & les Apogées de la Lune. Et pour ſe ſervir de cette Table, il ne faudra plus qu'ajoûter aux nombres des ſix dernieres Colonnes l'heure moyenne du Port en vertu du III. §. La Table n'a été calculée que de dix en dix dégrés: les interpolations ſuppléeront avec aſſez de juſteſſe à telle autre Diſtance entre les deux Luminaires, que les Ephémérides indiqueront. La même méthode des interpolations peut auſſi être employée, lorſque la Lune ſe trouve à une Diſtance donnée de ſon Apogée ou Perigée.

TABLE PLUS GENERALE ET CORRIGE'E
pour trouver l'heure des hautes Marées.

Distances entre les Luminaires au moment du passage de la Lune par le Meridien.	Tems de la haute Mer avant & après le passage de la Lune par le Meridien en minutes de tems.			Table approchante des heures de la haute Mer, dont on peut se servir au défaut des Ephémérides, qui marquent le passage de la Lune par le Méridien.		
	Perigée de la Lune.	Distance moyenne de la Lune.	Apogée de la Lune.	Perigée de la Lune. H. M.	Distance moyenne de la Lune. H. M.	Apogée de la Lune. H. M.
0	18 après.	22 après.	$27\frac{1}{2}$ après.	0 18	0 22	0 $27\frac{1}{2}$
10	$9\frac{1}{2}$ après.	$11\frac{1}{2}$ après.	14 après.	0 $49\frac{1}{2}$	0 $51\frac{1}{2}$	0 54
20	0	0	0	1 20	1 20	1 20
30	$9\frac{1}{2}$ avant.	$11\frac{1}{2}$ avant.	14 avant.	1 $50\frac{1}{2}$	1 $48\frac{1}{2}$	1 46
40	18 avant.	22 avant.	$27\frac{1}{2}$ avant.	2 22	2 18	2 $12\frac{1}{2}$
50	26 avant.	$31\frac{1}{2}$ avant.	$39\frac{1}{2}$ avant.	2 54	2 $48\frac{1}{2}$	2 $40\frac{1}{2}$
60	33 avant.	40 avant.	50 avant.	3 27	3 20	3 10
70	$37\frac{1}{2}$ avant.	45 avant.	56 avant.	4 $2\frac{1}{2}$	3 55	3 44
80	$38\frac{1}{2}$ avant.	$46\frac{1}{2}$ avant.	58 avant.	4 $41\frac{1}{2}$	4 $33\frac{1}{2}$	4 22
90	$33\frac{1}{2}$ avant.	$40\frac{1}{2}$ avant.	$50\frac{1}{2}$ avant.	5 $26\frac{1}{2}$	5 $19\frac{1}{2}$	5 $9\frac{1}{2}$
100	21 avant.	25 avant.	31 avant.	6 19	6 15	6 9
110	0	0	0	7 20	7 20	7 20
120	21 après.	25. après.	31 après.	8 21	8 25	8 31
130	$33\frac{1}{2}$ après.	$40\frac{1}{2}$ après.	$50\frac{1}{2}$ après.	9 $13\frac{1}{2}$	9 $20\frac{1}{2}$	9 $30\frac{1}{2}$
140	$38\frac{1}{2}$ après.	$46\frac{1}{2}$ après.	58 après.	9 $58\frac{1}{2}$	10 $6\frac{1}{2}$	10 18
150	$37\frac{1}{2}$ après	45 après.	56 après.	10 $37\frac{1}{2}$	10 45	10 56
160	33 après	40 après.	50 après.	11 13	11 20	11 30
170	26 après.	$31\frac{1}{2}$ après.	$39\frac{1}{2}$ après.	11 46	11 $51\frac{1}{2}$	11 $59\frac{1}{2}$
180	18 après.	22 après.	27 $\frac{1}{2}$ après.	0 18	0 22	0 $27\frac{1}{2}$

Cette Table ſuppoſe encore le plan des Orbites de la Lune & du Soleil être le même que celui de l'Equateur de la Terre, ce qu'il faut ſur-tout remarquer à l'égard des trois dernieres Colonnes. Mais cette ſuppoſition n'a pas beaucoup d'influence ſur les autres Colonnes; & les Ephémerides, qui marquent le paſſage de la Lune par le Méridien, ſuppléeront aux trois dernieres.

VIII.

Après avoir expoſé au long tout ce que les différentes diſtances des Luminaires, & ſur-tout de la Lune à la Terre, peuvent contribuer pour faire varier l'heure des Marées, nous dirons auſſi un mot ſur l'inégalité du mouvement des Luminaires.

Cette inégalité ſeroit d'une très-grande importance, s'il falloit conſtruire une Table pour les heures des Marées, ſans ſe rapporter aux Tables & aux Ephémerides: mais elle ne nous eſt d'aucune conſéquence, puiſque nous ſuppoſons l'heure du paſſage de la Lune par le Méridien, auſſi-bien que l'Arc compris entre les deux Luminaires, connus par les Ephémerides. C'eſt la raiſon qui m'a engagé à rapporter l'heure des Marées au paſſage de la Lune par le Méridien, en donnant une Table, qui marque, combien la premiere avance ou retarde ſur l'autre.

IX.

Il nous reſte à conſidérer les inclinaiſons des Orbites à l'égard de l'Equateur: pour cet effet il faut concevoir un Cercle qui paſſe par les centres du Soleil, de la Lune & de la Terre; & c'eſt proprement ce Cercle que doivent repréſenter toutes nos Figures, que nous avons conſidérées juſqu'ici, comme repréſentant l'Equateur de la Terre. On voit bien après cela, que tous les Points reſteront dans ce Cercle aux mêmes endroits; & que les Arcs ſe conſerveront tels, que nous les avons déterminés: mais les Angles horaires formés ſur l'Equateur par ſes Arcs, en ſont changés. On ne ſçauroit ſans une Théorie parfaite de la Lune déterminer au juſte ces Angles horaires, à cauſe de la variabilité de l'inclinaiſon de l'Orbite lunaire à l'égard de l'Equateur; mais auſſi ce changement n'eſt-il pas fort conſidérable, par rapport à l'Arc horaire compris entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & le moment de la haute Mer; nous ſuppoſerons, & nous pouvons le faire ici ſans aucune erreur ſenſible, que les Orbites de la Lune & du Soleil ſont dans un même plan, ayant chacune une inclinaiſon avec l'Equateur de $23^{d}.\ 30^{m}.$ & nous conſidérerons là-deſſus la Lune dans trois ſortes de ſituation: 1°. Lorſque ſa déclinaiſon, à l'égard de l'Equateur, eſt nulle; & alors

il

il faut multiplier les nombres de la seconde, troisiéme & quatriéme Colonnes de notre Table par $\frac{92}{100}$, & ce qui proviendra marquera le nombre de minutes entre le passage de la Lune par le Méridien, & l'heure de la haute Mer. 2°. Lorsque la Lune se trouve dans sa plus grande déclinaison à l'égard de l'Equateur; & alors il faut multiplier lesdits nombres de notre Table par $\frac{100}{92}$. Et enfin 3°. lorsque la Lune se trouve au milieu de ces deux situations; auquel cas il faut se servir de notre Table, sans y apporter aucun changement. Quant aux autres situations de la Lune en longitude, on peut se servir du principe de la proportionalité de la différence des termes. Ces regles sont fondées sur la proportion qu'il y a entre les petits Arcs de l'Ecliptique & de l'Equateur, compris entre deux mêmes Méridiens fort proches l'un de l'autre.

X.

Il suit de tout ce que nous venons de dire, que le plus grand intervalle possible entre le passage de la Lune par le Méridien & la haute Marée, est environ un jour avant les Quadratures, & quatre jours après les Quadratures, la Lune dans son Apogée & dans sa plus grande déclinaison à l'égard de l'Equateur de la Terre; & que dans le concours de toutes ces circonstances, ledit plus grand intervalle peut aller jusqu'à 63 minutes de tems, que la haute Marée avancera sur le passage de la Lune par le Méridien un jour avant les Quadratures, & qu'elle retardera quatre jours après les Quadratures.

XI.

Voilà mes resléxions sur le tems des Marées; je me flatte qu'elles ont toute la précision qu'on peut esperer sur cette matiere, du moins quant à la Méthode. Toute l'incertitude qui y reste encore, est fondée sur le rapport moyen entre les forces de la Lune & du Soleil, que je crois pourtant avoir fort bien déterminé, puisque tous nos Théoremes conviennent si bien avec les Observations. Un plus grand nombre d'Observations nous donnera peut-être un jour plus de précision là-dessus. Il est vrai que nous n'avons déterminé l'heure & les intervalles des Marées, que sous la Ligne Equinoctiale; mais je ne crois pas que la latitude des lieux puisse changer sensiblement les intervalles des Marées: ainsi je n'ai pas jugé nécessaire d'en parler. La latitude des lieux a cependant beaucoup de liaison avec la hauteur des Marées: c'est à quoi nous ferons attention dans la suite.

CHA-

CHAPITRE VIII.

Sur les différentes hauteurs des Marées pour chaque jour de la Lune.

I.

JE me propoſe à préſent d'examiner les diverſités des hauteurs des Marées, non d'un endroit à l'autre, mais d'un même endroit, que nous ſuppoſerons d'abord pris ſous l'Equateur, pour toutes les diverſes circonſtances qui peuvent ſe rencontrer. Nous ſuivrons, pour cet effet, la même Methode que nous avons obſervée pour déterminer généralement l'heure des Marées, c'eſt-à-dire, que nous commencerons nos recherches par les cas les plus ſimples, pour ne pas être arrêtés tout court en voulant ſurmonter trop de difficultés à la fois : nous nous ſervirons donc d'abord des mêmes hypotheſes que nous avons employées dans le Chap. VI. & que nous avons expoſées à la fin du Chap. IV. après quoi nous pouſſerons nos recherches dans le Chapitre ſuivant à tous les cas poſſibles, tout comme nous avons fait dans le Chapitre précedent pour déterminer généralement l'heure des Marées.

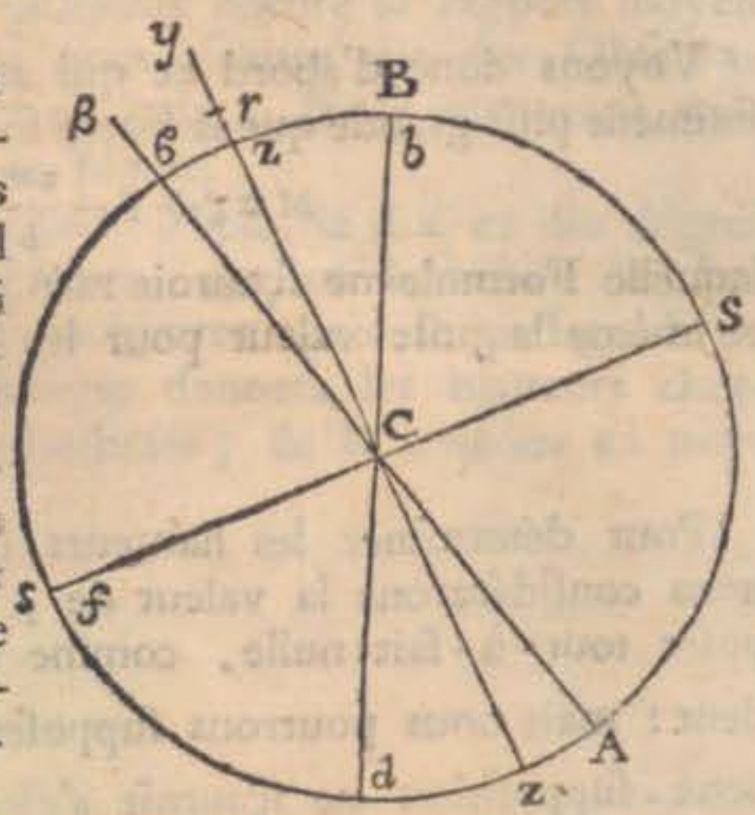
II.

J'entens par hauteur d'une Marée toute la variation de la hauteur verticale des eaux, depuis la haute Mer juſqu'à la baſſe Mer ſuivante. Pour trouver cette hauteur, il faut d'abord faire attention aux §. §. XI. XII. & XIII. du Chap. V. qui déterminent l'Equateur, les lieux de la Lune & du Soleil étant donnés, la poſition des deux points auſquels la Mer eſt la plus haute & la plus baſſe; après quoi le VIII. Art. du même Chapitre donnera la hauteur cherchée, en cherchant premierement la hauteur de la haute Mer, & enſuite la hauteur de la baſſe Mer.

III.

Remarquons d'abord, que les deux points de la Circonférence, qui marquent la haute & la baſſe Mer, ſont éloignés entre eux de 90 dégrés. On le voit par les expreſſions des §. §. XI. & XIII. & nous l'avons démontré dans la premiere Remarque du §. XII. Chap. V. Suppoſant donc le Soleil répondre au Point *b*, la Lune au Point *6*, & que la haute Mer réponde au Point *z*, il faut prendre l'Arc *z s* de 90 dégrés,

grés, & le Point *s* ſera celui qui répond à la baſſe Mer. Cherchez donc par le VIII. §. du Chap. V. la valeur de *yz*, qui marque l'élevation des eaux pour le Point *z*; & enſuite prenez de la même maniere la valeur de *sx*, qui étant négative, marque la dépreſſion des eaux; cela étant fait, on voit que la ſomme de *yz* & de *sx* marquera la hauteur de la Marée; mais dans l'expreſſion analytique de *sx*, il faut changer les Signes. Il eſt vrai que cette Methode ſuppoſe, que pendant l'intervalle, depuis la haute Mer juſqu'à la baſſe Mer, la Lune ne change pas de place; & c'eſt à quoi on pourroit avoir égard, en augmentant d'environ trois dégrés l'Arc *b ϐ* dans le Calcul de *sx*: mais ce ſeroit une exactitude hors de place, & qui augmenteroit beaucoup les peines du Calcul, qui n'eſt déja que trop embaraſſé. On pourra même remedier à ce petit défaut, déja inſenſible par ſa nature, en prenant l'Arc *b ϐ*, tel qu'il eſt, non au moment de la haute Marée, ni à celui de la baſſe Mer, mais au milieu de leur intervalle; & c'eſt ce que nous ſuppoſerons dans la ſuite.



Soit donc comme dans le V. Chap. le Sinus de l'Arc $b\beta = m$; ſon Coſinus $= n$; le Sinus de l'Angle $bCz = \sigma$; le Sinus de l'Angle $\beta Cz = \varsigma$; le Sinus total $= b$; & nous aurons en vertu du §. VIII. Chap. V.

$$yz = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \beta + \frac{2bb - 3\varsigma\varsigma}{3bb} \times \delta.$$

De là on trouvera *sx* en vertu du §. XII. Chap. V. en mettant $bb - \sigma\sigma$, & $bb - \varsigma\varsigma$ à la place de $\sigma\sigma$ & de $\varsigma\varsigma$: & de cette façon on aura

$$sx = \frac{3\sigma\sigma - bb}{3bb} \times \beta + \frac{3\varsigma\varsigma - bb}{3bb} \times \delta.$$

Changez à preſent les Signes dans la valeur de *sx*, & ſuppoſez la hauteur de la Marée $= M$, & vous aurez

$$M = \frac{bb - 2\sigma\sigma}{bb} \times \beta + \frac{bb - 2\varsigma\varsigma}{bb} \times \delta.$$

Cette derniere expreſſion marque généralement la hauteur des Marées, puiſqu'on peut toujours déterminer les valeurs de $\sigma\sigma$ & $\varsigma\varsigma$ par les §. §. XI. & XIII. du Chap. V. Mais les Calculs ne laiſſent pas d'être aſſez pénibles, quoi-que les Formules ne ſoient pas prolixes. Nous tâcherons donc

donc de rendre ces Calculs plus faciles, ſans déroger beaucoup à l'exactitude des Formules.

IV.

Voyons donc d'abord ce qui arriveroit, ſi la Force lunaire étoit infiniment plus grande que la Force ſolaire. On auroit en ce cas $\varrho = 0$ & $\sigma = m$,

$$M = 6 + \delta - \frac{2mm}{bb} \times 6,$$

laquelle Formule ne ſçauroit manquer d'être aſſez approchante ; elle donne même la juſte valeur pour les Syzygies & pour les Quadratures.

V.

Pour déterminer les hauteurs des Marées plus exactement encore, nous conſidérerons la valeur de ϱ comme fort petite, au lieu de la ſuppoſer tout-à-fait nulle, comme nous l'avons fait dans l'Article précedent : mais nous pourrons ſuppoſer hardiment $\varrho = \frac{6mn}{\delta}$, & on verra que cette ſuppoſition ne ſçauroit s'éloigner beaucoup de la vérité, ſi l'on conſulte l'Article VII. du précedent Chapitre vers la fin, & le peu d'erreur qui pourroit s'y trouver, n'eſt preſque d'aucune conſéquence pour notre préſent ſujet. On voit outre cela, que ϱ étant fort petit, on peut ſuppoſer cette Analogie

$$\varrho : m - \sigma :: b : n ;$$

puiſque cette Analogie ſeroit exactement vraie, ſi les quantités ϱ & $m - \sigma$ étoient réellement & infiniment petites : de cette Analogie on tire

$$\sigma = m - \frac{n\varrho}{b} = m - \frac{mnn6}{b\delta} ;$$

ſubſtituant ces valeurs expoſées pour les quantités ϱ & σ, & faiſant le Sinus total $b = 1$, on obtient cette Equation,

$$M = 6 + \delta - 2mm6 + \frac{2m^2n^26^2}{\delta} - \frac{2m^2n^46^3}{\delta\delta}.$$

De cette maniere il paroit que les Marées décroiſſent depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & qu'elles croiſſent avec la même loi depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies. Ceux qui voudront eſſayer la juſte Equation du §. III. & cette Equation approchante, ſur un même exemple, verront qu'elles ne different gueres.

VI.

Il nous ſera facile à préſent de calculer & de donner une Table pour les hauteurs des Marées, telle que nous en avons donné une à la fin du Chap. VI. pour les heures des Marées, & pour laquelle nous tâcherons

rons dans le Chapitre ſuivant de trouver les corrections néceſſaires aux différentes circonſtances, tout comme nous avons fait à l'égard de ladite Table du VI. Chap. Nous ſuppoſerons encore le rapport moyen de ☾ à ☾ être comme 5 à 2, tant que nous n'avons pas des Obſervations qui puiſſent déterminer ce rapport au juſte. Nous donnerons mille parties à la hauteur de la plus grande Marée.

La *premiere* Colonne marquera dans cette Table de dix en dix dégrés les Arcs compris entre les deux Luminaires, environ le milieu des Juſans (§. III.) c'eſt-à-dire, environ trois heures après le paſſage de la Lune par le Méridien; la *ſeconde* Colonne donnera les hauteurs cherchées des Marées, pour les ſuſdites hypotheſes; & la *troiſiéme* en marquera les différences.

TABLE FONDAMENTALE

pour trouver les Hauteurs des Marées, ou les Déscentes verticales des eaux pendant les Jusans.

Distance entre les Luminaires en Dégrés.	*HAUTEUR DES MARE'ES.*	*DIFFERENCE DES HAUTEURS.*
0 Dégrés.	1000 Parties.	
10	987	- 13
20	949	- 38
30	887	- 62
40	806	- 81
50	715	- 91
60	610	- 105
70	518	- 92
80	453	- 65
90	429	- 24
100	453	+ 24
110	518	+ 65
120	610	+ 92
130	715	+ 105
140	806	+ 91
150	887	+ 81
160	949	+ 62
170	987	+ 38
180	1000	+ 13

VII.

Si on avoit voulu conſtruire cette Table conformément à l'Equation finale du §. III. qui eſt la vraie Equation, on auroit pu profiter de la Table du VI. Chap. dans laquelle les nombres de la ſeconde Colonne diviſés par 4, donnent les dégrés de l'Arc, dont le Sinus eſt appellé ς; après quoi on connoît auſſi l'Arc dont le Sinus eſt appellé σ. Connoiſſant ainſi par les Tables les quantités ς & σ, on trouve ſans beaucoup de peine la valeur de M du §. III.

VIII.

On voit auſſi, que ſi la diſtance entre les deux Luminaires eſt entre deux nombres de la premiere Colonne, on peut ſans aucune erreur ſenſible employer le principe général des Interpolations, de ſorte que cette Table peut ſuffire pour tous les cas.

IX.

On remarquera au reſte, qu'il eſt ici de grande importance d'avoir ſubſtitué la vraie valeur pour $\frac{\delta}{\sigma}$, & qu'un aſſez petit changement dans cette valeur, a une grande influence ſur le rapport des Marées. On ne doit donc encore conſidérer cette Table, que comme un exemple de nos Formules générales: le Chapitre ſuivant fera voir les précautions que l'on doit prendre là-deſſus.

X.

Nous voyons tant par les Formules que nous avons données pour les hauteurs des Marées, que par la précedente Table, qu'elle eſt *in abſtracto* la nature des variations des Marées. On peut faire là-deſſus les Remarques qui ſuivent.

1°. Que les changemens des Marées ſont fort petits, tant aux Syzygies qu'aux Quadratures, & ils ſeroient infiniment plus petits que les autres, ſi l'intervalle d'une Marée à l'autre étoit auſſi infiniment petit.

2°. Que les plus grands changemens ne ſe font pas préciſément au milieu, mais plus près des Quadratures que des Syzygies: c'eſt-à-dire, que la plus grande diminution de Marée ſe fait dans nos ſuppoſitions, lorſque la Lune eſt environ à 60 dégrés (80 avec la correction de 20 dégrés expliquée au Chap. VII.) depuis les Syzygies; le plus grand décroiſſement ſe fait donc de la neuviéme à la dixiéme Marée (de

la douziéme à la treiziéme avec la correction) : de même le plus grand accroiſſement ſe fait à environ 30 dégrés depuis les Quadratures (50 dégrés avec la correction) qui répond au changement de la quatriéme à la cinquiéme Marée (de la ſeptiéme à la huitiéme avec la correction) depuis les Quadratures. Je parle dans cette Remarque de toutes les Marées qui ſe font, tant celles du matin, que celles du ſoir, pour rendre leurs intervalles plus petits : on ſe ſouviendra cependant de ce que j'ai dit expreſſément, que je fais abſtraction par-tout ailleurs des Marées, qui répondent au paſſage inférieur de la Lune par le Méridien, lorſqu'il s'agit de comparer les Marées entre elles : car ces deux ſortes de Marées ont quelques inégalités entre elles, que je n'ai pas encore conſidérées.

3°. Que les petits changemens dans les Syzygies, & ceux des Quadratures, comparés entre eux, ſont inégaux ; puiſque ceux-ci ſont environ doubles de ceux-là. Dans l'application de cette Remarque il faudra ajoûter, de part & d'autre, trois Marées, ou environ un jour & demi de tems.

4°. Que le plus grand changement de deux Marées qui ſe ſuivent, entre celles qui répondent à la Lune de deſſus (dont l'intervalle répond à environ 13 degrés de variation dans la diſtance de la Lune au Soleil) fait près du quart de la variation totale de la plus grande à la plus petite Marée.

XI.

Je ne doute pas que les Obſervations ne confirment en gros les Remarques que je viens de faire, & toutes les Regles précedentes. On ne ſçauroit plus douter de la Théorie que nous avons adoptée & établie; & la Théorie poſée, les Calculs en ſont ſûrs. Mais comme nous ne ſommes pas encore ſûrs des hypotheſes ſecondes, qu'on ne ſçauroit éviter, telles que ſont le juſte rapport entre la force lunaire & ſolaire, que nous avons ſuppoſé comme 5 à 2; le retardement des effets de la Lune ſur ſa poſition, que nous avons ſuppoſé d'un jour & demi, ou de trois Marées, ou de 20 dégrés, que la Lune peut parcourir en longitude pendant ce retardement, &c. nous nous croyons en droit de demander quelque indulgence pour le reſultat deſdites Remarques & Regles. Cependant comme je n'ai fait aucune ſuppoſition ſans un mur examen fondé ſur les plus juſtes Obſervations choiſies entre toutes celles qui peuvent les déterminer, j'oſerois me flatter d'un aſſez bon ſuccès, ſi Meſſieurs les ACADEMICIENS vouloient ſe donner la peine de confronter nos Tables, nos Regles & nos Théoremes nouveaux avec les Obſervations, dont ils ont un grand Tréſor: mais ce ſuccès, dont je me flatte par avance, ſe manifeſtera davantage, ſi ils veulent encore faire attention aux

corrections que je vais donner dans le Chapitre ſuivant, à l'égard de diverſes circonſtances variables, & que nous avons ſuppoſées dans ce Chapitre comme conſtamment les mêmes.

CHAPITRE IX.

Sur les Hauteurs des Marées corrigées, ſuivant differentes circonſtances variables.

I.

NOus ſuivrons dans cet examen la même route que nous avons tenuë dans le VII. Chap. à l'égard du tems des Marées. Pour commencer donc par l'effet des Vents & des Courants, on voit bien qu'ils peuvent augmenter & diminuer les Marées, & que ces variations ne ſont pas d'une nature à pouvoir être aucunement déterminées. On pourra pourtant remarquer que lorſque ces cauſes conſervent pendant un tems un peu conſidérable leur force & leur direction, leur effet conſiſtera plûtôt à hauſſer ou baiſſer la Mer elle-même, qu'à augmenter ou diminuer les Marées.

II.

Les circonſtances attachées à chaque Port ou autre endroit en particulier, telles que ſont ſa ſituation, la profondeur des eaux, la pente des fonds, la communication avec l'Océan, &c., font extrêmement varier les Marées. Ce ſont ces cauſes qui font que les grandes Marées ne ſont que d'un petit nombre de pieds dans de certains endroits de 8 ou 10 pieds dans d'autres, & de 50 à 60 pieds, & au-delà encore dans d'autres endroits. Ce qu'il y a de ſingulier, eſt que dans la Mer libre les grandes Marées ne ſont que d'environ 8 pieds, pendant qu'elle vont au-delà de 50 pieds dans pluſieurs Ports & autres endroits, dont la communication avec la Mer ouverte, eſt entrecoupée & empêchée de tous côtés; & qui par conſéquent devroient, ſelon les premieres apparences, avoir les Marées moins grandes. Nous donnerons dans un autre Chapitre la raiſon hydroſtatique de ce Phénomene, pour ne point nous écarter de notre ſujet préſent. Cela fait d'abord voir, qu'on ne ſçauroit rien déterminer ſur les grandeurs abſoluës des Marées, & que tout ce que la Théorie pourroit encore faire, ſeroit d'en marquer le rapport: mais l'expérienee nous enſeigne encore, que ce rapport même n'eſt pas conſtant dans les différens endroits, quoi qu'il ſoit renfermé dans des bornes plus étroites.

La

La grande Marée ſera double de la petite Marée dans un endroit; & elle pourra être triple dans un autre: c'eſt que les cauſes qui font varier les hauteurs abſoluës des Marées à l'égard de différens endroits, ne gardent pas une proportion tout-à-fait conſtante. Mais les Marées moyennes entre la plus grande & la plus petite pendant une même revolution de la Lune, peuvent être cenſées obſerver les regles que nous leur avons preſcrites dans le Chapitre précedent. Il y a même apparence, que les changemens qui dépendent de la différente ſituation des Luminaires obſerveront à-peu-près les Loix que nous avons démontrées *in abſtracto*. Ces refléxions m'ont déterminé à conſidérer la plus grande & la plus petite Marée, non telles qu'elles devroient être dans la Théorie pure, mais telles qu'on les obſerve, lorſque les Luminaires ſe trouvent à peu près dans l'Equateur, & dans leurs diſtances moyennes à la Terre, ſans qu'aucune cauſe accidentelle les trouble. Nous avons démontré au III. §. du Chap. VIII. que la hauteur de la grande Marée doit être exprimée par $\delta + \epsilon$, & la hauteur de la petite Marée par $\delta - \epsilon$: mais ſi l'on ſuppoſe la hauteur moyenne réelle de la grande Marée A & de la petite Marée B, il faudra ſuivant cette correction faire

$$\delta + \epsilon = A, \text{ \& } \delta - \epsilon = B:$$

c'eſt-à dire, $\delta = \frac{A+B}{2}$, & $\epsilon = \frac{A-B}{2}$;

& ces valeurs doivent être ſubſtituées dans les Equations & Formules du Chapitre précedent. En ſuppoſant $\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{5}{2}$ comme nous avons fait, on obtient $\frac{A}{B} = \frac{7}{3}$, & ſi cette raiſon étoit confirmée par les Obſervations, il n'y auroit aucun changement à faire. On pourroit ſe ſervir de la Table, telle qu'elle eſt, en donnant toujours 1000 parties à la hauteur de la grande Marée. Mais ſi $\frac{A}{B}$ avoit réellement une autre valeur conſidérablement différente de celle que nous venons de lui aſſigner, il ne faudroit pas négliger la correction que nous venons d'indiquer.

L'on voit auſſi après ces conſidérations, qu'on ne doit pas s'attendre à pouvoir déterminer avec la derniere préciſion les hauteurs des Marées. Nous pourrons donc ſans ſcrupule, pour rendre nos Propoſitions plus nettes & plus ſenſibles, nous ſervir de l'équation du §. IV. Chap VIII. qui auſſi-bien approche beaucoup de la vraie équation de l'Article qui précéde l'autre. Nous ſuppoſerons donc la hauteur des Marées toujours exprimée par $\delta + \epsilon - 2\,m\,m\,\epsilon$, & employant la correction indiquée, nous aurons à préſent

$$M = A - m\,m\,A + m\,m\,B, \text{ ou plus ſimplement,}$$
$$M = n\,n\,A + m\,m\,B:$$

C'eſt

C'eſt donc de cette derniere équation, que nous nous ſervirons dans la ſuite de cette Diſſertation.

III.

Cette correction pourra en même tems remédier à un autre inconvenient, qui provient de l'inertie & de la Maſſe des eaux. Nous avons déja dit ailleurs que les Marées ſont une eſpéce d'oſcillations qui tâchent naturellement à ſe conſerver telles qu'elles ſont : on ſent bien que cette raiſon doit empêcher les grandes Marées d'atteindre toute leur hauteur, & les petites de diminuer autant qu'elles devroient faire naturellement : qu'elle ne doit pas changer ſenſiblement la Marée moyenne entre la plus grande & la plus petite, & qu'elle change les autres d'autant plus qu'elles ſont plus éloignées de cette Marée moyenne. Et on voit que notre correction ſatisfait à toutes ces trois conditions.

IV.

Après ladite correction qui regarde immédiatement les hauteurs des Marées, il faut encore employer celle qui regarde les tems, que nous déterminons par les Phaſes de la Lune, ou par les diſtances, qui ſont entre les Luminaires. Nous avons expliqué au long aux §. §. IV. & V. du Chap. VII. que les Phaſes de la Lune qui répondent aux Marées en queſtion, ne doivent pas être priſes telles qu'elles ſont, mais telles qu'elles ſeroient environ un jour & demi après, c'eſt-à-dire, que les diſtances entre les Luminaires doivent être augmentées d'environ 20 dégrés, & moyennant cette correction, la Théorie ne ſçauroit manquer de ſatisfaire au juſte aux Obſervations.

V.

Nous n'avons conſidéré juſqu'ici les Luminaires, que dans leurs diſtances moyennes à la Terre, & c'eſt pour ce cas que nous avons appellé la hauteur de la plus grande Marée A, & celle de la plus petite Marée B. Pour déterminer donc ce que les différentes diſtances peuvent faire ſur les hauteurs des Marées, il faudra ſe rappeller tout l'Art. VII. du Chap. VII. Nous y avons démontré, que la force lunaire doit être ſuppoſée généralement $= \frac{l^3}{L^3} \times \delta$, & la Force ſolaire $= \frac{s^3}{S^3} \times \sigma$. Or comme la ſomme de ces Forces exprime toujours la hauteur de la grande Marée, & que la différence des mêmes Forces exprime la hauteur de la petite Marée, il faudra faire ces deux Analogies :

$$\delta+\zeta : \frac{l^3}{L^3}\times\delta+\frac{s^3}{S^3}\times\zeta :: A : \frac{l^3S^3\delta+L^3s^3\zeta}{L^3S^3(\delta+\zeta)}\times A$$

$$\delta-\zeta : \frac{l^3}{L^3}\times\delta-\frac{s^3}{S^3}\times\zeta :: B : \frac{l^3S^3\delta-L^3s^3\zeta}{L^3S^3(\delta-\zeta)}\times B.$$

La premiere de ces quatriémes proportionnelles marquera donc la hauteur corrigée de la grande Marée, & la ſeconde, la hauteur corrigée de la petite Marée. Par conſéquent l'équation finale du II. §. ſera celle-ci après ſa correction:

$$M=\frac{l^3S^3\delta+L^3s^3\zeta}{L^3S^3(\delta+\zeta)}\times n\,n\,A+\frac{l^3S^3\delta-L^3s^3\zeta}{L^3S^3(\delta-\zeta)}\times m\,m\,B.$$

Je m'aſſure que cette équation donnera toujours les hauteurs des Marées avec toute la juſteſſe qu'on peut attendre ſur cette matiere, pour les ſuppoſitions auſquelles notre Théorie eſt encore aſſujettie. Mais comme il eſt preſque impoſſible qu'il n'y ait abſolument aucune cauſe étrangére, qui trouble les Marées, nous ne devons pas être trop ſcrupuleux ſur ces corrections, qui ſont elles-mêmes médiocres. Ainſi pour rendre nos regles plus ſenſibles & plus faciles, nous ne ferons point d'attention aux changemens dans les diſtances du Soleil à la Terre; ces changemens ſont beaucoup plus petits que dans la Lune, & ils ſont en même tems de beaucoup moindre conſéquence: Nous ſuppoſons donc S conſtamment $=s$. Quant à la Lune, nous la conſidérerons, tout comme nous avons fait au VII. §. du Chap. VII. dans ſon Perigée, dans ſa diſtance moyenne & dans ſon Apogée, & nous retiendrons les ſuppoſitions que nous avons faites audit Article, pour les diſtances de la Lune, & pour les conſéquences que nous en avons tirées. Nous ferons donc pour le premier cas $\delta=3\zeta$, & $\frac{L^3}{l^3}=0{,}8439$: pour le ſecond cas $\delta=\frac{5}{2}\zeta$, & $\frac{L^3}{l^3}=1{,}000$, & enfin pour le troiſiéme $\delta=2\zeta$, & $\frac{L^3}{l^3}=1{,}174$. De cette façon nous aurons les trois équations qui ſuivent, exprimées en nombres décimaux.

1°. Pour le Périgée de la Lune,

$$M=1{,}138\,n\,n\,A+1{,}277\,m\,m\,B.$$

2°. Pour les diſtances moyennes de la Lune,

$$M=n\,n\,A+m\,m\,B.$$

3°. Pour l'Apogée de la Lune

$$M=0{,}901\,n\,n\,A+0{,}703\,m\,m\,B.$$

On remarquera dans ces équations, que A marque la hauteur de la grande Marée, & B la hauteur de la petite Marée dans les diſtances moyennes des Luminaires à la Terre, ces Luminaires étant ſuppoſés l'un

l'un & l'autre ſe trouver dans l'Equateur : que *m* marque le Sinus de l'Arc compris entre les Luminaires diminué de 20 dégrés, & *n* le Coſinus de cet Arc.

On remarquera après cela, que les grandes Marées ſont compriſes en vertu de la premiere & de la troiſiéme équation dans les termes de 1138 à 901, &. les Marées bâtardes dans les termes de 1277 à 703; d'où l'on voit que la différence entre les grandes Marées n'eſt pas à beaucoup près ſi grande, qu'elle l'eſt entre les Marées bâtardes, ſi on compare cette différence à la hauteur de la Marée qui lui répond. Cela ſe confirme par l'expérience, & c'eſt une nouvelle ſource des irrégularités des petites Marées comparées entre elles, dont nous avons déja parlé ailleurs, & que M. Caſſini n'a pas manqué d'obſerver.

V I.

J'ajoûterai ci-deſſous une Table fondée & calculée ſur les trois dites équations, mais qui ſe rapporte aux Quantités *A* & *B*, qu'il faut donc connoître par expérience pour le Port ou autre endroit, dont il eſt queſtion. On pourra déterminer ces Quantités *A* & *B*, ſur un grand nombre d'Obſervations, tant des hautes que des petites Marées, en prenant des unes & des autres le milieu Arithmétique.

V I I.

On remarquera, quant à la conſtruction de la Table que nous allons donner, que les Arcs compris entre les Luminaires, ont été augmentés de 20 dégrés à l'égard de la Table précédente, dans laquelle on n'a pas eu égard aux cauſes ſecondes & aux corrections à faire. Ces 20 dégrés ſont déterminés par le retard d'un jour & demi des Marées, par rapport aux Phaſes de la Lune, expliqué ci-deſſus : il eſt vrai que cet intervalle d'un jour & demi ne demande pas tout-à-fait 20 dégrés de correction : mais comme il faudroit eſtimer les diſtances entre les Luminaires, telles qu'elles ſont, non au moment de la haute-Mer (qui doit être ſuppoſée ſe faire au moment du paſſage de la Lune par le Méridién) mais au milieu du Juſan, en vertu du III. §. du Chap. VIII. & que l'intervalle depuis la haute Mer juſqu'au milieu du Juſan, demande encore une correction d'environ un dégré & demi, la ſomme de ces corrections peut être ſuppoſée de 20 dégrés, en eſtimant les diſtances des Luminaires au moment du paſſage de la Lune par le Méridien, que les Ephémérides indiquent.

VIII.

Voici donc à préſent la Table. La *premiere* Colonne y marque les diſtances entre la Lune & le Soleil dans le moment du paſſage de la Lune par le Méridien: les *trois* autres Colonnes marquent les hauteurs des Marées pour le Périgée de la Lune, pour les diſtances moyennes de la Lune à la Terre, & pour l'Apogée de la Lune.

TABLE PLUS GENERALE ET CORRIGE'E
pour trouver les Hauteurs des Marées.

Distances entre les Luminaires.	*HAUTEURS des Marées au Périgée de la Lune.*	*Hauteurs des Marées aux Distanees moyennes de la Lune à la Terre.*	*HAUTEURS des Marées à l'Apogée de la Lune.*
0 Deg.	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B
10	1,104A+0,038B	0,970A+0,030B	0,874A+0,021B
20	1,138A+0,000B	1,000A+0,000B	0,901A+0,000B
30	1,104A+0,038B	0,970A+0,030B	0,874A+0,021B
40	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B
50	0,853A+0,319B	0,750A+0,250B	0,676A+0,176B
60	0,668A+0,527B	0,587A+0,413B	0,529A+0,290B
70	0,460A+0,749B	0,413A+0,587B	0,372A+0,412B
80	0,284A+0,958B	0,250A+0,750B	0,225A+0,527B
90	0,133A+1,127B	0,117A+0,883B	0,105A+0,621B
100	0,034A+1,238B	0,030A+0,970B	0,027A+0,682B
110	0,000A+1,277B	0,000A+1,000B	0,000A+0,703B
120	0,034A+1,238B	0,030A+0,970B	0,027A+0,682B
130	0,133A+1,127B	0,117A+0,883B	0,105A+0,621B
140	0,284A+0,958B	9,250A+0,750B	0,225A+0,527B
150	0,460A+0,749B	0,413A+0,587B	0,372A+0,412B
160	0,668A+0,527B	0,587A+0,413B	0,529A+0,290B
170	0,853A+0,319B	0,750A+0,250B	0,676A+0,176B
180	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B

IX.

Il nous reſte à conſidérer les déclinaiſons des Luminaires & les latitudes des lieux ſur la Terre, pour leſquels on cherche la nature des Marées. Nous avons ſuppoſé les unes & les autres nulles dans ce Chapitre. Mais cette matiere eſt ſi riche & ſi remarquable par pluſieurs propriétés très ſingulieres, & elle demande d'ailleurs tant d'attention, que j'ai cru devoir la traiter à part. Ce ſera donc le ſujet du Chapitre ſuivant.

CHAPITRE X.

Dans lequel on examine toutes les propriétés des Marées, qui dépendent des différentes Déclinaiſons des Luminaires & des différentes latitudes des Lieux.

I.

LEs déclinaiſons des Luminaires à l'égard de l'Equateur, & les diſtances des lieux ſur la Terre du même Equateur, ont tant de rapport entre elles, qu'on ne ſçauroit bien traiter cette matiere, qui eſt une des plus importantes de notre ſujet, ſans les conſidérer les unes & les autres en même tems. Mais pour ne pas rendre la queſtion trop embarraſſante dès le commencement, nous ne ferons d'abord attention qu'à la Lune, tout comme ſi les Marées étoient uniquement produites par l'action lunaire. Nous conſidérerons auſſi la choſe d'abord ſuivant la pure Théorie, & nous verrons enſuite quelles corrections on y pourra employer.

II.

Reſſouvenons-nous de tout ce que nous avons dit dans quelques-uns des premiers Chapitres, & ſur-tout dans le cinquiéme, ſur le changement de la figure de la Terre produit par l'action de l'un des Luminaires. Nous avons conſidéré la Terre d'abord comme parfaitement ſphérique : nous avons démontré enſuite que cette figure eſt changée par l'action de l'un des Luminaires en ellipſoïde, dont l'Axe prolongé paſſe par le centre du Luminaire agiſſant ; & enfin que la rotation diurne de la Terre fait que chaque Point dans la ſurface de la Terre, doit tantôt ſe baiſſer, tantôt s'élever, afin que ſa figure ellipſoïde ſoit conſervée ; mais nous n'avons calculé ces baiſſemens & hauſſemens, que pour les

Points

Points pris dans l'Equateur même, dans le plan duquel nous avons ſuppoſé en même tems ſe trouver l'Axe de l'Ellipſoïde. C'eſt pour ces cas, que nous avons démontré (§. *V. Chap. V.*) *que les baiſſemens des eaux ſont proportionnels aux Quarrés des Sinus des Angles horaires, qui commencent du moment de la haute Mer*; & l'on remarquera que ces Angles horaires ſont proportionnels alors aux Arcs compris entre le Pole de l'Ellipſoïde & le Point en queſtion.

III.

Voici à préſent comment il faut s'y prendre, pour trouver les mêmes baiſſemens & hauſſemens, qui ſe font pendant le mouvement diurne de la Terre dans un point quelconque, & la Lune ayant auſſi une déclinaiſon quelconque. On voit qu'on aura toujours le même Ellipſoïde, quelle que ſoit la déclinaiſon de la Lune; mais qu'il ſera obliquement poſé à l'égard de l'Equateur: on voit auſſi qu'il faut s'imaginer dans ce Sphéroïde allongé une Section parellele à l'Equateur, qui paſſe par le point en queſtion: cette Section ne ſera pas un cercle parfait, & ſa circonférence n'aura pas tous ſes points également éloignés du centre de l'Ellipſoïde: c'eſt les différences de ſes diſtances, qui forment la nature des Marées. Il s'agit donc de déterminer ces différences.

IV.

Pour cet effet il faudra commencer par chercher les diſtances de chaque point du Parallele au *Pole de l'Ellipſoïde* (j'appelle ainſi l'extrémité de l'Ellipſoïde, qui prolongé, paſſe par le centre de la Lune) & ces diſtances étant connues, il eſt facile de trouver la diſtance du même point au centre de l'Ellipſoïde, & les différences de ces diſtances. Car ſi le Coſinus de la diſtance d'un point pris dans le Parallele au Pole de l'Ellipſoïde étoit ϱ, le Sinus total $= 1$, & ſi le demi Axe de l'Ellipſoïde eſt nommé $b + \delta$, & le plus petit demi-diametre b, la diſtance du point pris par le Parallele juſqu'au centre de l'Ellipſoïde ſera généralement $= b + \varrho\varrho\delta$; nous avons démontré cette Propoſition au §. V. Chap. V.

V.

Nous montrerons donc d'abord, comment il faudra déterminer la diſtance d'un Point quelconque, pris dans un Parallele donné au Pole de l'Ellipſoïde. La voye de la Trigonometrie ſphérique ordinaire nous ſeroit aſſez inutile ici, puiſqu'il nous faut des expreſſions analytiques, applicables à tous les cas, & traitables aux Calculs. Si l'on vouloit tirer de telles expreſſions des regles de ladite Trigonometrie, les formules qui en

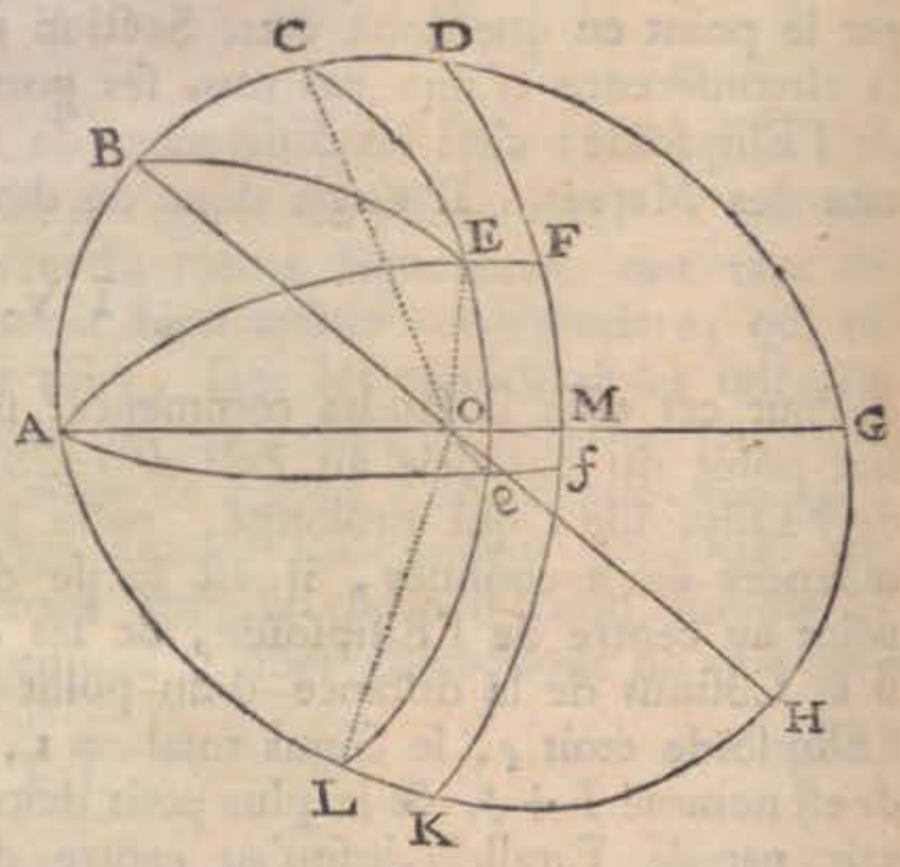
en proviendroient ſeroient beaucoup trop prolixes. M. Mayers nous a donné là-deſſus un beau Mémoire inſéré dans les Commentaires de l'Académie Impériale des Sciences de Petersbourg Tom. 2. p. 12. Il y a dans ce Mémoire au XVIII. §. un Théoreme général, par le moyen duquel on pourra toujours de trois choſes données dans un Triangle ſphérique, trouver le reſte par des expreſſions analytiques extrêmement ſimples. Voici le cas que notre ſujet demande.

Soit dans un Triangle ſpherique, le Sinus total = 1; le Sinus d'un des côtés = S; le Coſinus du même côté = C; le Sinus d'un autre côté = s; le Coſinus de cet autre côté = c; le Coſinus de l'Angle compris entre les deux côtés donnés = y; le Coſinus du troiſiéme côté oppoſé à l'Angle donné, que j'appellerai q, ſera exprimé par cette équation

$$q = S\,s\,y + C\,c.$$

VI.

Soit à preſent $A\,D\,G\,K$ le Méridien de la Terre, qui paſſe par le centre de la Lune, & que la Lune réponde au point B, qui deviendra ainſi le Pole de l'Ellipſoïde, & la droite $B\,H$, qui paſſe par le centre O, ſon Axe. Soit l'Axe de rotation de la Terre $A\,G$, les Poles A & G; DFK l'Equateur; CEL un Parallele, dans lequel nous prendrons un point quelconque E, & qu'on tire enfin par ce point E, & par le Pole A l'Arc AEF.



De cette maniere, l'Arc AB ſera le complément de la déclinaiſon de la Lune; l'Arc AE ſera le complément de la latitude du point E, & l'Arc DF ſera l'Arc horaire depuis le paſſage du point E par le Méridien, qui paſſe par la Lune; de ſorte qu'on connoît dans le Triangle $B\,A\,E$, les Côtés $B\,A$ & $E\,A$; avec l'Angle compris BAE, & de là on tirera par le moyen du Théoreme expoſé au précedent Article, l'Arc $B\,E$, qui eſt la diſtance du Point E au Pole de l'Eilipſoïde.

Nous nommerons donc encore le Sinus total 1, le Sinus du côté $AB = S$; ſon Coſinus = C; le Sinus du côté $AE = s$, ſon Coſinus = c; le

le Cosinus de l'Arc DF, qui est la mesure de l'Angle BAE, $=y$; le Cosinus de l'Arc $BE=q$: nous aurons

$$q = Ssy + Cc.$$

VII.

Ayant ainsi trouvé l'Arc BE, il est facile d'exprimer la droite EO, qui est la distance du point E jusqu'au centre de l'Ellipsoïde, par le moyen du 4e. Art. qui nous marque que cette distance est toujours égale au plus petit demi-diametre, augmenté par le produit du Quarré du Cosinus de cet Arc trouvé, & de l'excès du demi-Axe BO sur le plus petit demi-diametre: c'est-à-dire, si nous retenons les dénominations, dont nous nous sommes servis depuis le IV. §. jusqu'ici, que nous aurons $EO = b + (Ssy + Cc)^2 \delta$.

C'est cette équation de laquelle nous devons tirer toutes les variations des Marées, que la déclinaison de la Lune & la latitude du lieu peuvent produire.

VIII.

Nous voyons d'abord, que n'y ayant que la lettre y de variable, la quantité EO est toujours d'autant plus grande, que l'on prend y plus grande. Pour avoir donc la plus grande EO, il faut faire $y=1$. La haute Mer répond donc encore au passage de la Lune par le Méridien; & on aura alors la droite $CO = b + (Ss + Cc)^2 \delta$.

IX.

Mais pour trouver la plus petite EO ou eO, il ne faut pas faire $y=0$; mais $y = -\frac{Cc}{Ss}$ & alors la hauteur eO est simplement $= b$. Nous ferons là-dessus les remarques suivantes:

I. La différence entre la plus grande CO & la plus petite eO, faisant la hauteur de la Marée, entant quelle est produite par la seule action de la Lune, il s'ensuit que cette hauteur est $= (Ss + Cc)^2 \delta$. Cette formule nous apprend bien de nouvelles proprietés sur les Marées, & nous sert en même tems à décider plusieurs questions, sur lesquelles les Auteurs ne sont pas encore convenus.

(α) Nous voyons d'abord, que la plus grande Marée se fait, lorsque la déclinaison de la Lune est égale à la latitude du lieu. Cette regle suppose toute la Terre inondée; & c'est à quoi il faut avoir égard, lorsqu'il est question de la hauteur d'un lieu. Ce n'est pas par exemple immédiatement aux Ports de Picardie, de Flandre, &c. que les eaux sont

élévées par la Lune: la cauſe principale des Marées dans tous ces endroits doit être attribuée plûtôt à l'élevation & deſcente des eaux, qui ſe font dans la Mer du Nord, à environ 35 degrés de Latitude Septentrionale, autant que j'en ai pû juger par l'inſpection des Cartes Marines. J'avouë pourtant que ce n'eſt ici qu'une eſtime fort incertaine; il eſt impoſſible de rien dire de poſitif là-deſſus.

On remarquera auſſi que je parle ici de la hauteur de la Marée, qui répond au paſſage ſupérieur de la Lune par le Méridien: j'appellerai cette Claſſe de Marées, *Marées de deſſus*, & la Claſſe de celles qui répondent au paſſage inférieur de la Lune par le Méridien, *Marées de deſſous*.

(*f*) Si la déclinaiſon de la Lune eſt nulle, nous aurons $S=1$ & $C=0$, & la hauteur de la Marée de deſſus ſera $= ss\delta$. Nous voyons de-là, que ſi la Terre étoit toute inondée, & que les Luminaires reſtaſſent dans le plan de l'Equateur, les hauteurs des Marées pour les endroits de différentes latitudes ſeroient en raiſon quarrée des Sinus des diſtances au Pole.

(*g*) Si pour nos Païs Septentrionaux, la déclinaiſon de la Lune devient Méridionale, les Marées de deſſus deviennent encore plus petites à cet égard, & cette diminution ſeroit très-conſidérable, s'il n'y avoit pas une cauſe hydroſtatique que je marquerai ci-deſſous, qui lui eſt un obſtacle; ſans la conſidération de cette cauſe, on pourroit croire facilement que notre Théorie ne répond pas aſſez aux Obſervations.

(*h*) Nous éclaircirons cette matiere par un exemple, en ſuppoſant la Latitude du lieu de 35 degrés. En ce cas la hauteur des Marées de deſſus, tout le reſte étant égal, devoit être,

Dans la plus grande Déclinaiſon Septentrionale de la Lune, ...	$=0{,}963\,\delta$.
Lorſque la Déclinaiſon de la Lune eſt nulle .	$=0{,}671\,\delta$.
Dans la plus grande Déclinaiſon Méridionale de la Lune	$=0{,}265\,\delta$.

La différence de ces Marées eſt énorme, & ſurpaſſe de beaucoup toutes les inégalités qu'on peut ſoupçonner avoir quelque rapport à la Déclinaiſon de la Lune. Nous en dirons bientôt la raiſon.

(*i*) Si on ſuppoſoit la Latitude telle que Ss fût $= Cc$, ou $Ss = \sqrt{1-SS}\times\sqrt{1-ss}$, ou enfin $s=\sqrt{1-SS}=C$, le point E qui répondroit à la plus petite EO, ſeroit préciſément au point L. En ce cas, il n'y auroit qu'une Marée de deſſus dans l'eſpace d'un jour lunaire, & la Marée de deſſous s'évanouiroit entiérement. Cela arriveroit donc, par exemple, ſi la Lune ayant 20 degrés de Déclinaiſon Septentrionale, l'élevation du Pole étoit de 70 degrés: mais en même tems la Marée ſeroit

roit bien petite, puiſqu'elle ne monteroit qu'à environ la cinquiéme partie, qu'elle feroit ſous l'Equateur.

(*f*) Si s eſt plus petit que C, la quantité du §. VII. $(Ss+Cc)^2\delta$, ne ſçauroit plus devenir égale o; c'eſt pourquoi la Mer décroitra alors continuellement depuis le paſſage ſupérieur de la Lune par le Méridien, juſqu'à ſon paſſage inférieur. Il n'y aura donc plus qu'une Marée par jour depuis le parallele, qui fait $s=C$, juſqu'au Pole; & pour ſçavoir la hauteur de ces Marées, il faut dans cette Formule, premierement ſuppoſer $y=1$; & enſuite $y=-1$, & prendre la différence des Formules: la hauteur des Marées ſera donc dans ces cas $=(Ss+Cc)^2\delta-(-Ss+Cc)^2\delta$, ou bien $=4SsCc\delta$. Elle ne ſçauroit donc être qu'extrêmement petite.

Nous aurions un grand nombre de refléxions à faire encore ſur cette matiere, s'il ne falloit pas ſe contenir dans de certaines bornes; & quoique tous ces Théoremes ne ſoient vrais que dans la Théorie, où l'on ſuppoſe les eaux être conſtamment dans leur état d'équilibre, & toute la Terre inondée (car avec ces ſuppoſitions, ces Théorêmes ſeroient exactement vrais) & que diverſes circonſtances peuvent leur donner quelquefois une toute autre face, ils ne laiſſent pas d'être très-utiles, pour expliquer en gros un grand nombre de Phénomenes obſervés ſur les Marées, & pour pénétrer à fond cette matiere.

II. Nous avons démontré qu'il n'y a des Marées de deſſous, que que tant que s eſt plus grand que C, lorſque la Déclinaiſon de la Lune eſt Septentrionale (ſi cette Déclinaiſon eſt Méridionale, il n'y aura point alors de Marées de deſſus dans les Païs Septentrionaux.) Nous diſpoſerons donc s plus grand que C, & nous chercherons là-deſſus la hauteur de la Marée de deſſous, de la même façon que nous l'avons trouvée pour celles de deſſus.

Nous avons vû que la hauteur EO eſt la plus petite poſſible, lorſqu'on prend $y=-\frac{Cc}{Ss}$, & qu'alors elle devient $=b$; après cela les hauteurs EO croîtront juſqu'au point L, qui fait $y=-1$. La différence de ces hauteurs fera donc la hauteur de la Marée de deſſous, qui ſera par conſéquent $=(-Ss+Cc)^2\delta$, pendant que celle de la Marée de deſſus étoit $=(Ss+Cc)^2\delta$. On pourra faire là-deſſus les remarques ſuivantes.

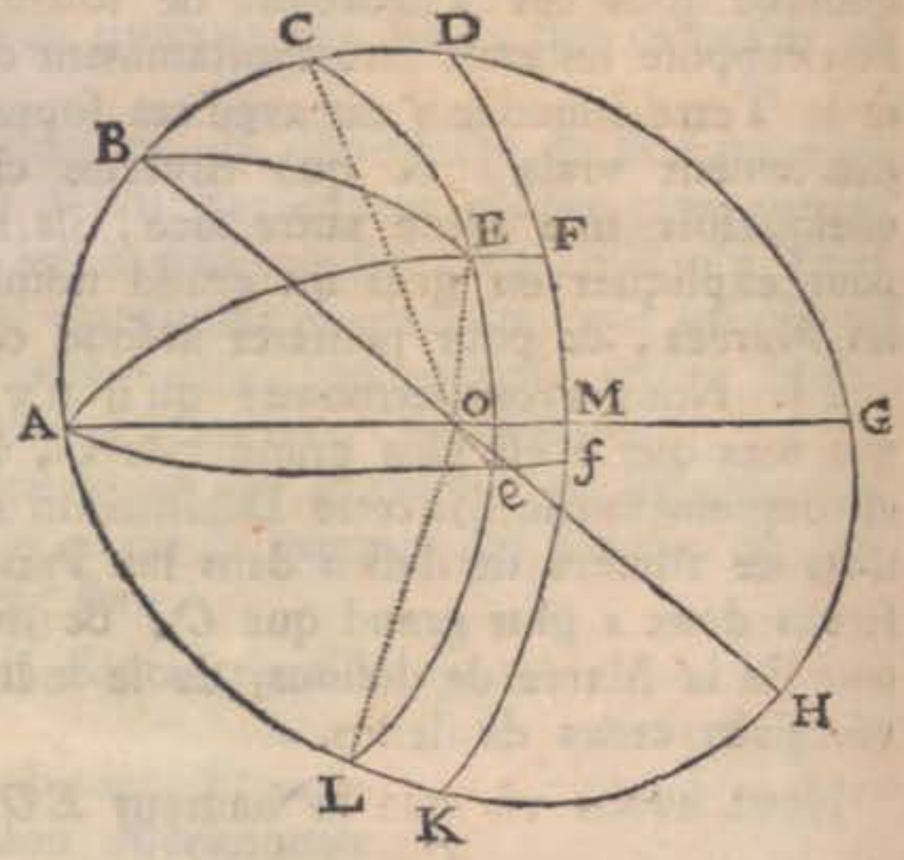
(*a*) Les Marées de deſſus ſont égales à celles de deſſous, lorſque la déclinaiſon de la Lune eſt nulle.

(*b*) Dans les Païs Septentrionaux, les Marées de deſſus ſont plus grandes que celles de deſſous, lorſque la déclinaiſon de la Lune eſt Septentrionale, & plus petites lorſque cette déclinaiſon eſt Méridionale, &

généralement les déclinaiſons de la Lune étant égales, mais de différens côtés les Marées de deſſus deviennent les mêmes qu'étoient celles de deſſous, & reciproquement.

(c) La différence des deux Marées d'un même jour lunaire eſt $=4\,Cc\,Ss\,\delta$; ſi l'on applique ces Formules à des cas particuliers, on verra que les Marées de deſſus devroient différer conſidérablement de celles de deſſous, s'il n'y avoit pas une autre raiſon qui doit les rendre à peu près égales. Nous expoſerons cette raiſon ci-deſſous, après que nous aurons examiné tout ce que la Théorie dit ſur cette matiere *in abſtracto*.

III°. Nous voyons auſſi que les durées des deux Marées d'un même jour doivent être ſelon la pure Théorie fort différentes. Voici comme on peut déterminer ces durées. Si dans le Parallele CL on ſuppoſe e être le point, la diſtance duquel au centre de l'Ellipſoïde ſoit la plus petite & égale à b, & qu'on tire enſuite par ce point un Arc de Méridien Aef, l'Arc Df ſera la meſure du tems depuis la haute Mer de deſſus juſqu'à la baſſe Mer ſuivante, & l'Arc fK la meſure du tems, depuis cette baſſe Mer juſqu'à la haute Mer de deſſous. Or nous avons vû au IX. §. que le Coſinus de l'Arc $Df\,(y)$ eſt $=-\frac{Cc}{Ss}$, ou bien ſi DM eſt de 90 degrés, le Sinus de l'Arc Mf vers le point $K=\frac{Cc}{Ss}$. Là-deſſus nous pourrons faire ces remarques.



(1) Dans les Païs Septentrionaux la déclinaiſon Septentrionale de la Lune rend les Juſans des Marées de deſſus plus longs, & les Flots des Marées de deſſous plus courts; & la déclinaiſon Méridionale fait le contraire avec les mêmes meſures; & lorſque la déclinaiſon eſt nulle, la durée du Juſan eſt égale à celle du Flot ſuivant.

(2) Si la déclinaiſon de la Lune eſt égale au Coſinus de la latitude du lieu, le Juſan durera 12 heures lunaires, & il n'y a point de Flot pour l'autre Marée, parce qu'il n'y a point du tout de Marée de deſſous.

(3) En général, la différence du tems, entre le Juſan de la Marée de deſſus, & le Flot de la Marée de deſſous, ſe détermine par le double

ble de l'Arc horaire Mf, & la différence des durées des deux Marées entieres, eſt exprimée par le quadruple de l'Arc Mf, dont le Sinus eſt $= \frac{Cc}{Ss}$. D'où l'on voit que plus la déclinaiſon de la Lune eſt grande, plus cette différence eſt grande auſſi.

Soit, par exemple, la latitude du lieu de 35. degrés, la déclinaiſon de la Lune de 25 degrés, l'Arc Mf ſera de 15 degrés, qui répond à une heure lunaire; le Juſan durera donc 7 heures lunaires, & le Flot ſuivant 5 heures lunaires, & la différence ſera de deux heures, & toute la Marée de deſſus durera 4 heures plus que celle de deſſous.

X.

Voilà donc comme la choſe ſeroit, ſi la Terre étoit toute inondée, & ſi les eaux étoient conſtamment dans une ſituation d'équilibre parfait. Nous avons expoſé toutes les variations des Marées qui ſont dues à l'action de la Lune, par rapport aux différentes déclinaiſons & latitudes, & par le moyen de nos Remarques on connoit les différences entre les Marées d'un même jour, entre celles qui ſe font dans différentes Saiſons, &c. tant à l'égard des hauteurs des Marées, que de leurs durées. Il eſt vrai que les deux hypotheſes indiquées ſont bien éloignées de la vérité, & que cela change extrêmement les meſures des variations; mais je ſuis pourtant ſûr qu'il doit y avoir des variations, & qu'elles ſeront de la nature que nous avons trouvée.

Quant aux irrégularités de la ſurface de la Terre, il n'eſt pas poſſible d'en deviner les effets, que fort ſuperficiellement, & comme chaque endroit demanderoit à cet égard des refléxions différentes, nous n'entreprendrons point cet examen. Nous ne conſidérerons donc que ce qui regarde le défaut de l'équilibre des eaux, & les mouvemens reciproques ou oſcillatoires qui en réſultent.

XI.

La Lune change la ſurface de la Terre de Sphérique en Ellipſoïdique, & l'Axe de l'Ellipſoïde paſſe par la Lune. Cet Axe étant différent de l'Axe de Rotation, la figure de la Terre change continuellement, quoique toujours la même à l'égard de l'Axe de l'Ellipſoïde; & s'il n'y avoit pas quelques cauſes ſecondes, leſdits changemens conſiſteroient ſimplement en ce que chaque goute montât & deſcendît alternativement & directement vers le centre.

Il eſt remarquable encore, que ſi les eaux ſe mouvoient librement, ſans ſouffrir aucune reſiſtance, ces oſcillations augmenteroient continuellement

à l'infini, parce qu'à chaque demi-tour de la Terre, les eaux doivent être cenſées avoir reçû quelque nouvelle impulſion : c'eſt une propriété qu'on peut démontrer par pluſieurs exemples ſemblables, tirés de la Méchanique & de l'Hydrodynamique. Mais le grand nombre de reſiſtences qui s'oppoſent aux mouvemens des eaux, font que celles-ci prennent bien vîte leur plus grand degré d'oſcillations. Ces derniers degrés d'oſcillations peuvent cependant être cenſés proportionnels aux forces que la Lune exerce ſous différentes circonſtances, pourvû que les changemens qui ſe font dans la Lune, ſe faſſent aſſez lentement, pour donner aux eaux le tems qu'il leur faut pour changer leur mouvement. On peut donc dire à cet égard, que les changemens qui ſe font dans la Lune, par rapport à ſes declinaiſons doivent produire dans les Marées à peu-près les Phénomenes que nous avons indiqués, & à beaucoup plus forte raiſon les changemens de déclinaiſons dans l'autre Luminaire. Mais les changemens qui ſont dûs à la rotation de la Terre ſont trop vîtes, pour que les Marées puiſſent s'y accommoder, car elles tâchent de conſerver leur mouvement reciproque comme un Pendule ſimple. Cette ſeule raiſon fait que ſi les deux Marées d'un même jour doivent être ſuivant les différens effets de la Lune fort différentes, la plus grande augmente la plus petite, & celle-ci diminue l'autre, de ſorte qu'elles ſont beaucoup moins inégales qu'elles ne devroient être ſans cette raiſon. Tout ce qu'on peut donc dire à cet égard, eſt que nos Théorêmes ſont vrais, quant à leur nature, mais non pas ſuivant les meſures que nous en avons données. On peut pourtant, moyennant une autre refléxion, réparer en quelque façon cet inconvenient: c'eſt en ſuppoſant que la plus grande Marée donne à la plus petite, qui eſt ſa compagne, autant qu'elle en perd, & les ſuppoſer l'une & l'autre à peu-près égales, ce que l'expérience confirme, & de là on tirera la hauteur abſoluë de chacune, en prenant le milieu Arithmétique des deux Marées, qui conviennent à un même jour lunaire. En corrigeant de cette façon les précédentes Propoſitions, nous aurons les Théorêmes ſuivans, qui ne ſçauroient plus manquer d'être aſſez conformes aux Obſervations.

XII.

La hauteur de la Marée de deſſus eſt $= (Ss + Cc)^2 \delta$ (§. *Remarque I.*) & la hauteur de la Marée de deſſous $= (-Ss + Cc)^2) \delta$ (§. *IX. Remarque II.*) en prenant donc la moitié de la ſomme de ces deux hauteurs, nous aurons la hauteur moyenne de la Marée, qui convient aux déclinaiſons de la Lune, & latitudes du lieu données, $(SSss + CCcc)\delta$. De cette Formule, que je crois fort juſte pour la ſuppoſition de l'entiere inondation de la Terre, on pourra tirer les Corollaires ſuivans.

(I.) Les

(I.) Les déclinaiſons Septentrionales & Méridionales de la Lune font le même effet ſur les Marées, à l'égard de leur hauteur moyenne.

Cette propriété eſt confirmée par les Obſervations. Mais il ſera toujours vrai, que dans les Païs Septentrionaux la déclinaiſon Septentrionale de la Lune augmente un peu les Marées de deſſus, & diminue celles de deſſous; & que la déclinaiſon Méridionale fait le contraire: & c'eſt ce que l'expérience confirme auſſi. On ſe ſouviendra donc que nous parlons de la hauteur moyenne des deux Marées d'un même jour lunaire.

(II.) A la hauteur de 45 degrés la hauteur moyenne de la Marée eſt $= (\frac{1}{2} SS + \frac{1}{2} CC)\delta = \frac{1}{2}\delta$, & par conſéquent conſtamment la même.

C'eſt ici une proprieté bien ſinguliere, que quelles que ſoient les déclinaiſons des Luminaires, les hauteurs moyennes des Marées n'en ſoient point changées, & cette propriété nous fait voir, pourquoi dans nos Païs on s'apperçoive de ſi peu de changement dans les Marées, à l'égard deſdites déclinaiſons.

(III.) Si la latitude du lieu eſt moins de 45°. la plus grande Marée moyenne ſe fait lorſque les déclinaiſons des Luminaires ſont nulles, & les Marées diminuent, ſi les déclinaiſons augmentent.

L'expérience confirme encore cette propriété, & tout le monde convient que dans nos Païs (dont les Marées dépendent de la Mer du Nord, à environ 35 degrés de latitude) les plus grandes Marées, tout le reſte étant égal, ſe font environ les Equinoxes.

Si la latitude du lieu eſt plus grande de 45 degrés, c'eſt le contraire.

(IV.) Sous l'Equateur, la hauteur de la Marée eſt $= SS\delta$, & les variations qui dépendent des différentes déclinaiſons de la Lune, y ſeront le plus ſenſibles: ſi la déclinaiſon eſt nulle, la hauteur de la Marée y eſt exprimée par δ; & ſi la déclinaiſon eſt ſuppoſée de 15 dégrés (elle peut aller juſqu'à près de 29 degrés) la hauteur de la Marée moyenne ſera de $0{,}82\,\delta$. La différence des hauteurs eſt de $\frac{18}{100}\delta$.

(V.) Les variations ſont moins grandes à cet égard ſur les Côtes de la France, baignées par l'Océan, ſi les Marées y ſont cauſées par la Mer du Nord à la hauteur d'environ 35 degrés, la hauteur de la Marée, la déclinaiſon de la Lune étant nulle, y ſera exprimée par $0{,}671\,\delta$, & ſi la Lune avoit 25 degrés de déclinaiſon, la hauteur moyenne y ſera exprimée alors par $0{,}610\,\delta$. La plus grande Marée eſt donc à la plus petite à cet égard, comme 671 à 610, & la différence ſera comme 61; qui fait l'onziéme partie de la grande Marée.

Nous voyons par ces exemples, que les variations qui dépendent de la déclinaiſon de la Lune, ſont toujours beaucoup plus petites, que celles

les qui dépendent des différentes distances de la Lune, & qui peuvent aller jusqu'au tiers de la grande Marée. C'est pourquoi on a eu beaucoup de peine à s'appercevoir des variations qui répondent aux différentes déclinaisons.

(VI.) Enfin nous remarquerons que cette Formule $(SSss+CCcc)\delta$ pour les hauteurs moyennes des Marées ne doit pas être poussée au-delà du terme des doubles Marées, qui est lorsque la latitude du lieu est égale à la déclinaison de la Lune: car, passé ce terme, nous avons démontré qu'il ne doit y avoir qu'une Marée par jour, dont la hauteur est exprimée par $4SsCc\delta$, en vertu de la Remarque (ζ) de l'Art. IX. Il faudra aussi donner à ce terme une certaine latitude; car il y apparence que ce n'est qu'à une certaine distance depuis ce terme vers l'Equateur, que les Marées commencent à être doubles, & à une autre distance vers le Pole, qu'elles commenceroient à être simples, si la Mer libre s'étendoit jusques-là; & que dans la Zone, qui est entre deux, les Marées seront mêlées de l'une & l'autre espéce avec beaucoup d'irrégularité.

XIII.

Nous venons d'exposer au long, & avec toute la précision possible, le rapport réel des hauteurs des Marées: nous n'avons qu'un mot à dire sur l'heure des hautes Marées. Comme c'est toujours au moment du passage supérieur de la Lune par le Méridien, que la Mer devroit être la plus haute, quelle que soit la déclinaison de la Lune, & la latitude du lieu: nous voyons que si les Marées dépendoient uniquement de la Lune, ces deux sortes de variations ne devroient point apporter de changement à l'heure de la haute Mer; & si l'on veut avoir égard aux forces du Soleil, nous avons déja montré au IX. Art. du Chap. VII. les variations qui peuvent provenir à cet égard.

Mais si la déclinaison de la Lune & la latitude du lieu n'ont pas d'influence directement sur l'heure de la haute Mer, & si elles n'en ont que très-peu, lorsque l'action de la Lune est combinée avec celle du Soleil, il est remarquable, que tant la déclinaison de la Lune, que la latitude du lieu, feroient extrêmement varier l'heure des basses Mers, sans cette cause seconde, que j'ai exposée au long dans le XI. Art. & qui fait que les deux Marées d'un même jour lunaire sont beaucoup moins inégales, qu'elles ne devroient être. Cependant cette raison ne sçauroit rendre les deux Marées tout-à-fait égales, & il sera toujours vrai, ce que j'ai dit dans la Remarque (1) de la III. Partie du §. IX. que c'est tantôt le Jusan d'une Marée, qui surpasse en durée le flot de la Marée suivante, tantôt celui-ci qui surpasse l'autre. C'est une propriété qui n'est point échappée aux Observateurs des Marées; mais on n'avoit pas

remar-

remarqué les circonſtances de ces inégalités, ſçavoir que dans les Païs Septentrionaux, la déclinaiſon Septentrionale de la Lune rend les Marées de deſſus plus longues, & les Marées de deſſous plus courtes, & que la déclinaiſon Méridionale fait le contraire.

On voit donc qu'à cet égard le Juſan peut être différent du flot ſuivant, mais non pas du flot antécédent; & ſi l'on remarque quelque différence entre le flot & le Juſan d'une même Marée, ou cette différence ſera conſtante pendant tout le cours de l'année, & alors il faut l'attribuer à la configuration des Côtes; ou elle n'aura point de loix, & ne ſera que tout-à-fait accidentelle, & cauſée par des Vents ou Courants accidentels.

XIV.

Les différences que nous avons expoſées dans ce Chapitre entre les deux Marées d'un même jour, tant pour leur hauteur, que pour leur durée, nous donnent un moyen de reconnoitre ces deux Claſſes de Marées, & de diſtinguer l'une d'avec l'autre, ce qui ſeroit impoſſible ſans cela ſur les Côtes irrégulieres de l'Europe, où nous ſçavons que les diverſes heures du Port comprennent toute l'étendue d'une Marée, ou d'un demi-jour lunaire.

La Claſſe des Marées de deſſus comprendra celles qui ſont plus grandes & plus longues, la déclinaiſon de la Lune étant Septentrionale, ou qui ſont petites & plus courtes, cette déclinaiſon étant Méridionale, & l'autre Claſſe ſera reciproque.

XV.

Nous avons examiné avec toute l'attention requiſe les effets des différentes déclinaiſons de la Lune, qui ſont la ſource de tant de propriétés très-remarquables des Marées. Il ne nous reſte donc plus qu'à conſidérer encore les déclinaiſons du Soleil. Cet examen nous ſera très-facile, après celui que nous venons de faire ſur la Lune.

Nous nommerons la force du Soleil, ſa déclinaiſon étant nulle, $\mathfrak{C}$, comme nous avons fait toujours dans le Corps de ce Traité, & nous retiendrons les dénominations du V. §. Si nous appliquons donc au Soleil tout le raiſonnement que nous avons fait ſur la Lune, nous voyons qu'on n'a qu'à ſubſtituer dans toutes les Formules de ce Chapitre $\mathfrak{C}$ à la place de $\mathfrak{d}$, pour trouver les variations qui proviennent des différentes déclinaiſons du Soleil dans tous les lieux de la Terre, & de cette maniere tout ce que nous avons dit ſur la Lune, ſera auſſi vrai à l'égard du Soleil. Si donc la hauteur de la Marée, entant qu'elle eſt produite ſous l'Equateur par la ſeule action du Soleil au tems des Equinoxes, eſt appellée $\mathfrak{C}$, la hauteur de la Marée ſera pour telle déclinaiſon du Soleil,

& telle latitude du lieu entre les deux Cercles Polaires qu'on voudra = $(TTss+EEcc)\mathfrak{C}$, entendant par T le Sinus de la distance du Soleil au Pole, & par E son Cosinus.

XVI.

Pour tirer tout l'avantage, qui est possible, de nos Méthodes, & leur donner la derniere perfection, nous tâcherons enfin de donner une Formule générale pour tous les cas possibles. Souvenons-nous pour cet effet, que nous avons nommé au IX. Chapitre A la hauteur des Marées qui se font sous la Ligne dans les Syzygies (ou plutôt un jour & demi après) les distances des Luminaires étant moyennes, & leurs déclinaisons nulles; & que pour les mêmes circonstances nous avons nommé B la hauteur des Marées bâtardes: voyons à présent, comment il faut changer ces Quantités A & B, lorsque les déclinaisons des Luminaires, & les latitudes des lieux sont d'une grandeur quelconque.

(I.) Quant à la quantité A, comme elle a été exprimée par la somme des forces entieres des deux Luminaires, c'est-à-dire, par $\mathfrak{S}+\mathfrak{C}$, on voit qu'il faut mettre ici à la place de $\mathfrak{S}$ sa quantité corrigée $(SSss+CCcc)\mathfrak{S}$, & à la place de $\mathfrak{C}$ sa quantité corrigée $(TTss+EEcc)\mathfrak{C}$, & ensuite faire cette Analogie

$$\mathfrak{S}+\mathfrak{C} : A :: (SSss+CCcc)\mathfrak{S}+(TTss+EEcc)\mathfrak{C} : \frac{(SSss+CCcc)A+(TTss+EEcc)\mathfrak{C}}{A+\mathfrak{C}}A.$$

Cette quatriéme proportionnelle marque la hauteur des Marées dans les Syzygies, lorsque les déclinaisons des Luminaires, & la latitude du lieu sont quelconques, & si la déclinaison de l'un & l'autre Luminaire est nulle, cette quantité devient simplement $= ss\,A$. Si l'on nomme donc F la hauteur de la Marée dans les Syzygies, les déclinaisons des Luminaires étant nulles pour un lieu quelconque, il faut supposer $ssA=F$, & de cette maniere ladite quatriéme proportionelle devient

$$= \frac{(SSss+CCcc)A+(TTss+EEcc)\mathfrak{C}}{ss(\mathfrak{S}+\mathfrak{C})}F.$$

C'est cette quantité qu'il faut substituer dans les équations du §. V. Chap. IX. pour A.

(II.) La quantité qu'il faudra substituer pour B dans ces equations, que nous venons de citer, se trouve à peu-près de la même façon; il n'y a qu'à prendre au lieu de la somme $A+\mathfrak{C}$ leur différence $A-\mathfrak{C}$, qui exprimoit la hauteur des Marées bâtardes. Si l'on appelle donc G la hauteur de la Marée dans les Quadratures, les déclinaisons des Luminaires étant nulles, on trouvera la quantité à substituer pour

$$B = \frac{(SSss+CCcc)A-(TTss+EEcc)\mathfrak{C}}{ss(A-\mathfrak{C})} \times G,$$

Nous ſubſtituerons encore dans l'équation générale du §. V. Chap. IX. à la place des Lettres *S* & *s* (qui y marquent le rapport des diſtances du Soleil à la Terre ſous diverſes circonſtances, & qui ſe trouvent employées dans ce Chapitre dans un autre ſens) ces autres Lettres *D* & *d*.

Après ces réflexions préliminaires nous conſidérerons le Problême général des hauteurs des Marées ſous telles circonſtances, qui pourront concourir, & qui ſervira à déterminer ces hauteurs avec toute la préciſion poſſible. Je m'aſſure que tous ceux qui jetteront les yeux ſur cette Solution, verront ſans peine, combien j'ai été attentif à examiner & éplucher toutes les circonſtances qui peuvent faire varier les Marées.

PROBLEME GENERAL.

XVII.

Trouver généralement la hauteur des Marées, en ſuppoſant toutes les circonſtances qui peuvent les faire varier, connuës.

SOLUTION.

Il faut connoître d'abord par Obſervations les quantités *F* & *G*, qui marquent les hauteurs moyennes des grandes Marées, & des Marées bâtardes, qui ſe font un jour & demi après les Syzygies & les Quadratures, les déclinaiſons des Luminaires étant nulles, & leurs diſtances à la Terre étant moyennes. Dans la Théorie, deux Obſervations ſuffiſent pour cet effet; mais il vaut mieux dans l'application de nos Méthodes obſerver un grand nombre de fois, comme on a déja fait preſque dans tous les Ports de la France, la hauteur des grandes Marées, & celles des petites Marées, les Luminaires ſe trouvant à peu-près dans l'Equateur, & prendre des unes & des autres le milieu Arithmétique, que j'appelle *F* pour les grandes Marées, & *G* pour les petites Marées.

Il faut enſuite connoître le rapport moyen, qu'il y a entre les forces de la Lune & du Soleil. Nous avons donné pluſieurs moyens pour cela dans le corps de cette Diſſertation, & nous nous croyons bien fondés de le ſuppoſer comme 5 à 2. Quoi qu'il en ſoit, nous nommons ce rapport $a : b$.

Il faut après cela faire attention aux Phaſes de la Lune, ou à l'Arc compris entre les deux Luminaires dans le moment du paſſage de la Lune par le Méridien: cet Arc doit être diminué de 20 dégrés (§. *VII. Chap. IX.*) Nous nommons le Sinus de l'Arc réſultant *m*, & le Coſinus *n*, & le Sinus total 1.

Il faut auſſi connoître les diſtances des Luminaires à la Terre : j'appelle *d* la diſtance moyenne du Soleil; *D* ſa diſtance au tems de la Marée cherchée; *l* la diſtance moyenne de la Lune; *L* ſa diſtance au tems de la Marée cherchée.

Il faut ſçavoir encore les déclinaiſons des Luminaires à l'égard de l'Equateur : j'appelle *S* le Sinus de la diſtance de la Lune au Pole; *C* ſon Coſinus; *T* le Sinus de la diſtance du Soleil au Pole; *E* ſon Coſinus.

Enfin, il faut faire attention à la latitude du lieu, & à la Remarque (*α*) du IX. Art. que nous avons faite pour l'eſtimation des latitudes. Nous appellons le Sinus de la diſtance au Pole *s* & le Coſinus *c*. Toutes ces dénominations faites, je dis que la hauteur de la Marée ſera

$$\frac{l^3 D^3 \delta + L^3 d^3 \epsilon}{L^3 D^3 (\delta + \epsilon)} \times \frac{n\,n}{s\,s} \times \frac{(SSss + CCcc)\,\delta + (TTss + EEcc)\,\epsilon}{\delta + \epsilon} \times F.$$
$$+ \frac{l^3 D^3 \delta - L^3 d^3 \epsilon}{L^3 D^3 (\delta - \epsilon)} \times \frac{m\,m}{s\,s} \times \frac{(SSss + CCcc)\,\delta - (TTss + EEcc)\,\epsilon}{\delta - \epsilon} \times G.$$

XVIII.

Je n'ai mis ici cette grande Formule, que pour faire voir toute l'étendue & toute l'exactitude de notre Théorie & de nos Calculs, car les meſures & la Table que nous avons donnés au Chapitre IX. ont aſſez de préciſion dans une Queſtion auſſi ſujette que celle-ci aux variations accidentelles, qui n'admettent aucune détermination.

Je ne dis rien des Marées & de leurs changemens extraordinaires, qui ſe font dans la Zone glaciale, pour ne point groſſir trop ce Traité, & pour ne point l'embarraſſer de choſes fort abſtraites & aſſez difficiles. J'ai d'ailleurs déja expoſé en gros & même aſſez au long ce qui en eſt.

Quant enfin à l'heure des hautes Mers, j'ai fait voir qu'elle n'eſt point changée par les déclinaiſons des Luminaires, ni par la latitude du lieu; nous avons donc déja donné toute la perfection poſſible dans les Chapitres précédens à cette autre grande Queſtion. Pour l'heure des baſſes Mers, qui dépendent beaucoup des déclinaiſons des Luminaires, & de la latitude du lieu, nous en avons fait voir toutes les variations & propriétés dans ce Chapitre.

CHAPITRE XI.

Qui contient l'Explication & Solution de quelques Phénomenes & Queſtions, dont on n'a pas eu occaſion de parler dans le corps de ce Traité, ſur-tout à l'égard des Mers détachées, ſoit en partie, ſoit pour le tout, de l'Océan.

I.

SUivant quelle progreſſion les eaux montent & deſcendent dans une même Marée, par rapport au tems donnés.

Cette Queſtion dépend de toutes les circonſtances que nous avons conſidérées dans ce Traité; mais les variations à l'égard du changement de ces circonſtances, ne font pas varier beaucoup la loi, ſuivant laquelle les eaux montent & deſcendent; je ne parlerai donc que du cas le plus ſimple, qui eſt lorſque la latitude du lieu, & les déclinaiſons des Luminaires ſont nulles, & lorſqu'en même tems les Luminaires ſont dans leurs Syzygies, ou dans leurs Quadratures. Que l'on exprime donc tout le tems depuis la haute Mer juſqu'à la baſſe Mer par un quart de Cercle, dont le rayon eſt égal à l'unité: je dis *que les deſcentes verticales des eaux depuis la haute Mer doivent être exprimées par les Quarrés des Sinus des Arcs, qui repréſentent les tems donnés.* Si l'on conſidére les Marées depuis le commencement du Flot, il faudra dire *que les élévations verticales des eaux, ſont en raiſon quarrée des Sinus, qui répondent aux tems donnés* §. III. Chap. V. Ceux qui voudront rendre cette Propoſition plus générale, pourront conſulter le §. VIII. Chap. V. & ſi on y ajoute enfin les §. §. VI. & VII. du Chap. X. on verra facilement, ce qu'il faudroit faire pour tous les cas poſſibles. Mais la loi générale ne différera pas beaucoup de celle que nous venons d'expoſer; & cela d'autant moins que les deux Marées d'un même jour, qui devroient être ſouvent fort inégales, ne laiſſent pas de ſe compoſer à une égalité mutuelle par la raiſon expoſée au long au §. XI. Chap. X. On peut donc ſe tenir ſans peine à la Regle que nous venons d'établir.

Il s'enſuit de cette Regle, que les baiſſemens ou élevations des eaux, qui ſe font dans de petits tems égaux, ſont proportionnels aux produits des Sinus par les Coſinus répondans des Arcs horaires; de ſorte que ſi on partage tout le tems du Flux ou du Reflux également, les variations également éloignées en deçà & en delà de ce terme, ſont égales: ces variations ſont les plus ſenſibles au milieu du Flux ou du Ruflux, & la

variation totale depuis le commencement du Flux ou du Reflux juſqu'au milieu, fait préciſément la moitié de toute la variation d'une Marée. On voit enfin que les variations doivent être inſenſibles au commencement & à la fin de chaque Flux & Reflux.

Toutes ces Propoſitions ſont confirmées entierement par les Obſervations qu'on a faites ſur cette matiere, rapportées par M. Caſſini dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1720. pag. 360. Il ſemble ſeulement qu'il y a une erreur de quelques minutes dans la détermination de l'heure de la baſſe Mer, erreur preſque inévitable dans cette ſorte d'Obſervations. Mais il faut remarquer, pour voir plus parfaitement l'accord de notre Regle avec les Obſervations, que tout le tems du Flux & Reflux eſt de ſix heures lunaires, pendant que les Obſervations ont été priſes ſur des heures ſolaires.

II.

Pourquoi il n'y a point de Marées ſenſibles dans la Mer Caſpienne, ni ſelon quelques-uns dans la Mer Noire, & pourquoi elles ſont très-petites dans la Mer Méditerranée, & de quelle nature ſont ces Marées.

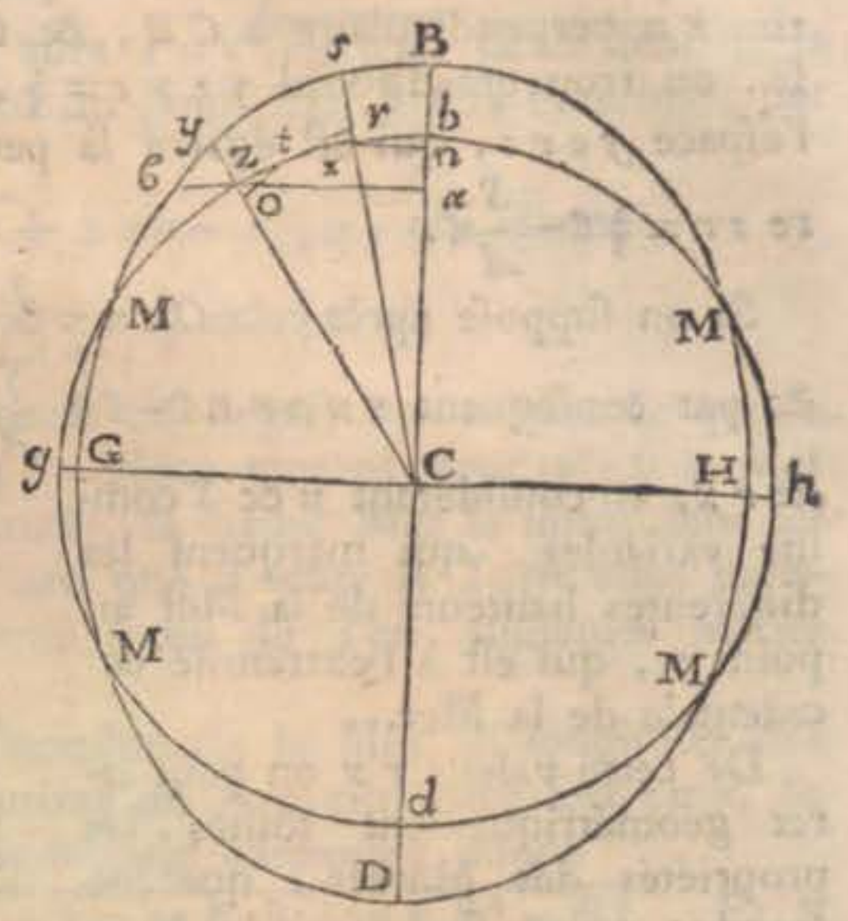
On ne ſçauroit bien répondre à ces queſtions, ſans conſidérer auparavant le Problême principal, qui eſt de ſçavoir les Marées, lorſque la Mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, & c'eſt un Problême pénible pour le Calcul, & aſſez délicat pour la Méthode. Pour le rendre d'abord plus ſimple, nous ſuppoſerons les Luminaires en conjonction & dans le plan de l'Equateur, & que c'eſt auſſi ſous l'Equateur, que l'on cherche les Marées.

Reſſouvenons-nous que ſans l'action des Luminaires, l'Equateur ſeroit parfaitement circulaire, comme $bgdh$, & que les Luminaires ſe trouvant dans l'Axe DB, cette Figure eſt changée en l'Ellipſe $BGDH$, lorſque toute la Terre eſt inondée, & que les eaux peuvent couler de tous côtés. Nous avons démontré auſſi au III. §. Chap. V. que dans cette ſuppoſition, la petite hauteur yz (dont les variations par rapport à ſes différentes ſituations expriment les variations des Marées au point z) eſt $= \frac{3ss-bb}{3bb} \times \ell$, dans laquelle Formule on ſuppoſe $C\alpha = s$; $Cb = b$, & la différence entre la plus grande CB & la plus petite $CG = \ell$.

Suppoſons à préſent que la Mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, ſçavoir celle de zx, & qu'on tire par le centre C & l'extrémité x la droite Cs. Cela poſé on voit bien que la ſurface de la Mer ne peut pas être en ys, comme elle ſeroit, ſi toute la terre étoit inondée; car l'eſpace yCs eſt plus grand que l'eſpace zCx, & il faut que

cet

cet eſpace ſoit conſtamment le même; puiſque la quantité d'eau dans une Mer doit être ſuppoſée la même pendant les revolutions de la Terre: mais la ſurface de l'eau prendra la courbure *o r*, & voici quelle ſera la nature de cette courbure *o r*; il faut premierement, que l'eſpace *o Cr* ſoit conſtamment le même que l'eſpace *z Cx*, & en ſecond lieu, que la courbe *o r* ſoit ſemblable à la courbe *y s*, ou plûtôt la même, puiſque toutes les petites lignes, telles que *s x*, ſont incomparablement plus petites que le rayon de la Terre; & ainſi la petite perpendiculaire *s r* ſera égale à la petite perpendiculaire *y o*, de même que toutes les perpendiculaires compriſes entre les termes *s* & *y*.



On voit donc déja que ce ne ſont plus les *s x* & *y z*, dont les variations marquent les variations des Marées pour les points *x* & *z*, & que ces variations ſont exprimées ici par celles des petites lignes *r x* & *o z*. De là on peut conclure par la ſeule inſpection de la Figure, que les Marées doivent être d'autant plus petites, que la Mer eſt moins étendue en longitude; que ces Marées ne peuvent être que tout-à-fait inſenſibles dans la Mer Caſpienne & dans la Mer Noire, & fort petites dans la Mer Méditerranée, dont la communication avec l'Océan eſt preſque entiérement coupée au Détroit de Gibraltar. On en peut même tirer des propriétés très-ſingulieres de cette ſorte de Marées. 1°. Que la plus haute Mer ne ſe fait pas ici au moment du paſſage des deux Luminaires par le Méridien, comme dans l'Océan, ni 6 heures lunaires après, mais au milieu, ſi la Mer a peu d'étendue en longitude. 2°. Que les Marées ſont les plus grandes aux extrémités Orientales & Occidentales *z* & *x*, & qu'elles ſont incomparablement plus petites au milieu *r*. 3°. Que la haute Mer dans l'une des extrémités ſe fait au même moment que la baſſe Mer dans l'autre extrémité. Voilà en gros les propriétés des Marées dans ces Mers: le Calcul en fera connoître le détail.

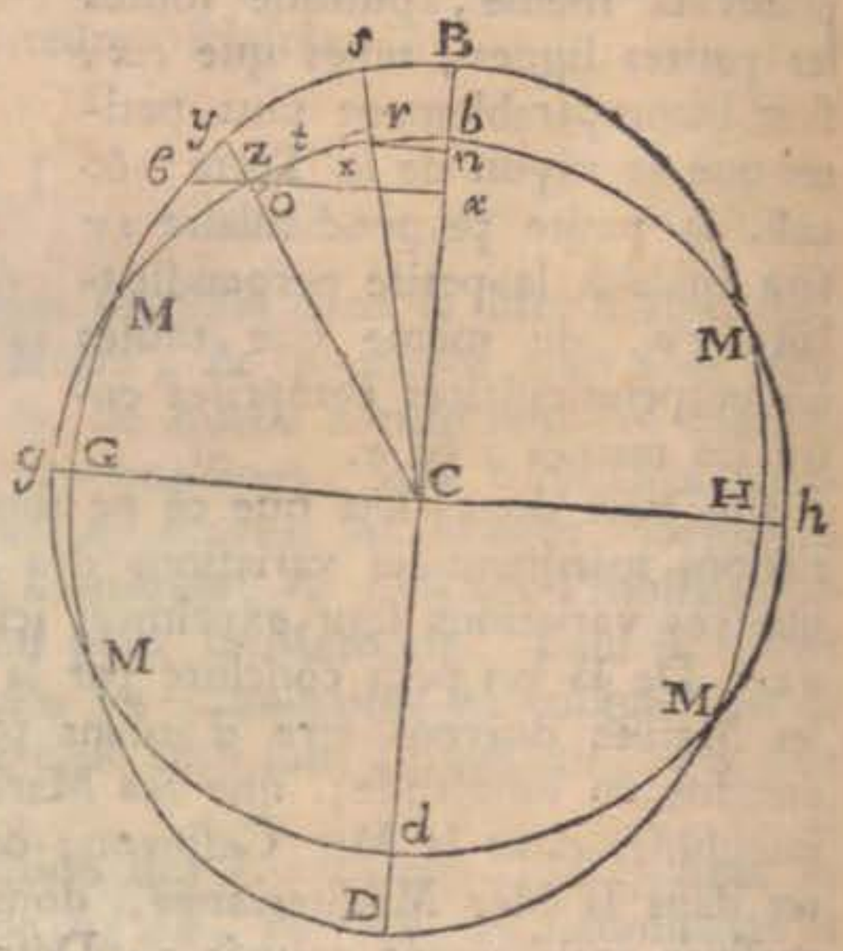
Pour ne point ennuyer le Lecteur par une trop longue ſuite de raiſonnemens purement Géometriques, & dans pluſieurs circonſtances aſſez compliquées & chargées de Calcul, je ne mettrai ici que le plus précis.

Soit $B\,b + G\,g = \delta$, qui marque la variation pour la Mer libre de tous

côtés;

côtés : ſoit l'Arc $z x$, qui marque l'étendue de la Mer en longitude $= A$. Le rayon de la Terre que nous prenons pour le Sinus total $= 1$; qu'on tire $x n$ perpendiculaire à CB, & ſoit l'eſpace $z \alpha n x z = S$. Cela poſé, on trouvera d'abord $y z x s = \frac{2}{3} A \ell$. Cet eſpace devant être égal à l'eſpace $y o r s$, qui eſt égal à la petite $s r$ multiplié par A, on en tire $s r = \frac{2}{3}\ell - \frac{S}{A}\ell$.

Si on ſuppoſe après cela $Cn = n$ & $C_x = s$, on en aura $s x = n n \ell - \frac{1}{3}\ell$, & par conſéquent $r x = n n \ell - \ell + \frac{S}{A}\ell$, & ce ſont les différentes valeurs de $r x$, en conſidérant n & S comme variables, qui marquent les différentes hauteurs de la Mer au point x, qui eſt à l'extrémité occidentale de la Mer.



De cette valeur $r x$ on peut tirer géométriquement toutes les propriétés des Marées, quelque étendue qu'on ſuppoſe à la Mer, & tout ce que nous avons trouvé pour le point x, peut être déterminé de la même façon pour tel autre point dans l'Arc $z x$ qu'on voudra ; mais on remarquera ſurtout une propriété générale, qui eſt que l'Arc horaire compris entre la haute & la baſſe Mer, c'eſt-à-dire l'Arc compris entre la plus grande & la plus petite $r x$, eſt toûjours de 90 degrés. Pour le démontrer, il faut ſuppoſer la différentielle $r x = 0$, & faire $-dS = \frac{n n - r s}{\sqrt{1 - n n}}\, dn$, à cauſe de la valeur conſtante de A, d'où l'on tirera cette équation $2 A n \sqrt{1 - n n} + s s = 0$, qui marque déja la propriété générale que nous venons d'indiquer. Cette propriété donne enſuite la hauteur de la Marée, exprimée par la différence de la plus grande & de la plus petite valeur de $r x = \left(2 n n - 1 + \frac{n \sqrt{1 - n n} - s \sqrt{1 - s s}}{A} \right) \ell$, & on remarquera que dans toutes ces Formules, s eſt donnée en n & en conſtantes, à cauſe de l'Arc A donné.

Nous appliquerons ces équations générales à deux ſortes de cas particuliers ;

ticuliers ; premierement, lorſque A eſt de 90 degrés ; & en ſecond lieu, lorſque cet Arc eſt fort petit.

I. Si A eſt de 90 degrés, on aura $s = \sqrt{1 - nn}$, & le lieu de la haute ou de la baſſe Mer, à l'égard du point fixe B ſera déterminé par cette Equation

$$-2An\sqrt{1-nn} + 2nn - 1 = 0, \text{ qui donne}$$

$$Cn, \text{ ou } n = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{AA+1}}\right)} = 0{,}9602,$$

qui marque que l'Arc xb eſt d'environ 16 degrés 13. minut. & que la hauteur de la Marée ſera de 0,8446. Nous voyons donc que ſi la Mer avoit 90 degrés d'étendue en longitude, la haute Mer ſe feroit dans les Syzygies 1 heure 5. minutes plus tard que ſi toute la Terre étoit inondée, & que la hauteur de la Marée ſeroit de 156 milliémes parties plus petite.

II. Suppoſons à préſent que l'étendue de la Mer en longitude ſoit très-petite, c'eſt-à-dire, que A exprime un Arc circulaire fort petit, & ſoit la corde de cet Arc $= B$: la Géométrie commune donne $s = n - \frac{1}{2}nBB + \frac{1}{2}\sqrt{4BB - 4nnBB + nnB^4 - B^4}$. Et B étant ſuppoſée fort petite, on changera la quantité radicale en ſuite, & l'on négligera les quantités affectées de B^3 (le Calcul fait voir à la fin, qu'il faut retenir les termes affectés de BB) & de cette maniere on trouvera

$$s = n - B\sqrt{1-nn} - \tfrac{1}{2}nBB.$$

On remarquera après cela, que la différence entre l'Arc A & ſa corde B, convertie en ſuite commence par le terme $\frac{1}{4}B^3$, lequel pouvant être négligé pour notre deſſein, on mettra A à la place de B, & on aura

$$s = n - A\sqrt{1-nn} - \tfrac{1}{2}nAA.$$

En ſubſtituant dans l'équation expoſée ci-deſſus

$$2An\sqrt{1-nn} - nn + ss = 0$$

la valeur trouvée pour s, & négligeant toujours les termes affectés de A^3 & de A^4, nous aurons ſimplement $n = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

L'Arc xb eſt donc pour ce dernier cas de 45 degrés, & la haute Mer, ſi elle étoit ſenſible, ne ſe feroit par conſéquent que trois heures lunaires après le paſſage de la Lune par le Méridien. La hauteur de la Marée étant généralement exprimée, comme nous avons vû ci-deſſus, par $\left(2nn - 1 + \frac{n\sqrt{1-nn} - s\sqrt{1-ss}}{A}\right) \times b$, il faudra ſubſtituer dans cette expreſſion les valeurs trouvées pour n & s ; ce que faiſant avec les mê-

mes précautions, que nous avons employées en cherchant la valeur de s, on trouvera à la fin ſimplement la hauteur de la Marée $= A\,6$.

Cette expreſſion fait voir que dans les petites Mers, les hauteurs des Marées ſont proportionelles aux étendues que ces Mers ont en longitude, & les Marées ſe trouveront par cette Analogie. Comme le Sinus total eſt à l'Arc longitudinal, que la Mer renferme, ainſi la hauteur de Marée dans la Mer qui eſt ſuppoſée inonder toute la Terre, exprimée par 6, ſera à la hauteur de la Marée en queſtion.

Appliquons maintenant tout ce que nous avons trouvé pour en tirer les propriétés des Marées dans la Mer Caſpienne. Suppoſons pour cet effet, que dans les conjonctions & oppoſitions des Luminaires, la hauteur des Marées grandiſſimes dans la Mer du Sud (dans laquelle les Marées ne ſçauroient manquer d'atteindre preſque toute la hauteur, qu'elles auroient, ſi toute la Terre étoit inondée) eſt ſous l'Equateur de 8 pieds: c'eſt la hauteur que les Relations de voyages m'ont fait adopter pour la Mer libre, & que je crois qu'on remarquera ſur les Côtes eſcarpées des petites Iſles ſituées près de l'Equateur dans ladite Mer du Sud: Cela étant, j'ai démontré dans la Propoſition (II.) du XII. §. du Chapitre précédent, que les grandes Marées ne ſeront plus que de 4 pieds à la hauteur de 45 degrés, où je ſuppoſe le milieu de la Mer Caſpienne. Si nous donnons après cela à cette Mer dix dégrés d'étendue en longitude, cet Arc fait environ la ſixiéme partie du Rayon, & la hauteur des grandiſſimes Marées devroit être par conſéquent aux extrémités Orientale & Occidentale de la Mer Caſpienne d'environ huit pouces: mais elles ſeront nulles au milieu de la Mer. Je ſuppoſe cette agitation de la Mer trop petite pour avoir pû être remarquée par les gens qui ont été ſur les lieux, & qui ſans doute n'ont pas fait un examen fort ſcrupuleux là-deſſus, & qui n'auroient pas manqué de l'attribuer à des cauſes accidentelles, s'ils avoient remarqué quelque petite élévation & baiſſement des eaux. J'eſpére que des Obſervations plus exactes confirmeront un jour ce que je viens d'indiquer ſur les Marées de la Mer Caſpienne.

On doit faire le même raiſonnement ſur la Mer Noire, qui peut être conſidérée comme détachée de la Mer Méditerranée, à cauſe du peu de largeur du Détroit qui eſt entre deux. Il eſt à remarquer qu'on a obſervé dans cette Mer des Marées, quoique très-petites.

On voit auſſi que les Marées dans la Mer Méditerrannée doivent être beaucoup plus petites, que dans l'Océan, ſur-tout ſi l'on fait attention que cette Mer n'eſt tout-à-fait ouverte que depuis l'Iſle de Chypre juſqu'à celle de Sicile.

III.

Comment les Marées peuvent être beaucoup plus grandes sur les Côtes, dans les Bayes, dans les Golfes, &c. que dans la Mer libre de tous côtés.

Pour répondre à cette queſtion, il faut encore faire réflexion à ce que j'ai déja dit, que ſi les Luminaires reſtoient à un même lieu, & que le mouvement journalier de la Terre ſe fit avec une lenteur infinie, les eaux qui inondent la Terre, ne pourroient point manquer d'être dans un parfait équilibre, & les Marées auroient par-tout les hauteurs qu'on leur a preſcrites dans cet Ouvrage, ſans que la configuration des Côtes ou autres cauſes ſemblables les pût déranger, pourvû que l'endroit en queſtion communiquât avec l'Océan : d'ailleurs les eaux ne feroient que monter & deſcendre verticalement; excepté aux Côtes, qui alternativement ſont baignées, & reſtent à ſec, & auſquelles les eaux auroient quelque mouvement horiſontal, quoi qu'infiniment lent, & la direction de ce mouvement des eaux dépendroit dans ce cas, auſſi bien que dans les autres, de la direction de la pente des Côtes. Mais la vîteſſe du mouvement journalier de la Terre, qui fait que dans le tems d'un jour tout l'Océan doit faire quatre mouvemens & agitations reciproques, rend ces mouvemens fort ſenſibles. Comme outre cela la Mer n'inonde pas toute la Terre, & qu'il y a de grands Golfes, Canaux, &c. qui par l'élévation & baiſſement des eaux, ſont tantôt plus tantôt moins pleins, il faut que ceux-ci reçoivent les eaux & les renvoyent alternativement vers des endroits qui s'empliront, pendant que les autres ſe vuideront, & de là doivent provenir des mouvemens horiſontaux, qu'on appelle communément Flux & Reflux. Ce ſont ces mouvemens horiſontaux, qui ſe faiſant vers des endroits plus ſerrés, peuvent produire les grandes Marées, qui vont dans de certains endroits au-delà de 60 pieds; c'eſt auſſi cette raiſon qui rend les Marées plus grandes dans le Golfe de Veniſe, qu'elles ne ſont dans la Mer Méditerrannée. C'eſt ici qu'on peut faire un grand uſage de ce que divers Auteurs ont donné ſur le mouvement des eaux, & je m'aſſure que moyennant les connoiſſances qu'on a déja ſur cette matiére, on pourroit rendre exactement raiſon de tous les différens Phénomenes, qui s'obſervent ſur les Marées aux endroits différemment ſitués. Mais un tel examen demanderoit des volumes, & des années pour les faire.

IV.

Quelle eſt en gros la nature des Marées au Détroit de Gibraltar.

Les Marées doivent ſans doute être beaucoup plus compliquées ; & paroître plus irrégulieres au Détroit de Gibraltar, que dans d'autres endroits, parce qu'il s'y fait un concours de deux ſortes de Marées, dont l'une vient de l'Océan, & l'autre de la Méditerranée ; & on voit facilement, que ſi les Marées conſiſtoient ſimplement à élever & baiſſer les eaux, ſans cauſer des Courans, il y auroit ſur ces Côtes quatre Marées par jour, c'eſt-à-dire, que les eaux monteroient & deſcendroient quatre fois, parce que les Marées des deux Mers ne ſe font pas en même tems : mais comme il ſe forme des Courans reciproques, chaque Courant tâche à ſe conſerver, & de là il ſe forme des liſieres, qui ont chacune des mouvemens différens : celles qui ſont ſur les Côtes de chaque côté, paroiſſent devoir être attribuées aux Marées de la Méditerranée, & deux autres qui les touchent, aux Marées de l'Océan : on remarque même au milieu une cinquiéme liſiere, dont le mouvement n'eſt pas ſi irrégulier que celui des quatre autres, & qui ne fait voir preſque aucun rapport avec la Lune : il ſemble que ce Courant ne doit ſa ſource, qu'à un défaut d'équilibre entre les deux Mers.

Je dirai à cette occaſion, qu'il peut arriver de même, que les Marées ſont formées dans un certain Port par le mouvement des eaux, qui viennent de deux différens côtés & à divers tems : il ſemble qu'il faut tirer de là qu'il peut y avoir des endroits où le Flot dure conſtamment plus long-tems que le Juſan, & qu'il y en a d'autres où il arrive le contraire. Cette même cauſe peut encore produire pluſieurs ſortes de Phénomenes particuliers à de certains endroits.

V.

Pourquoi les petites Marées ſont beaucoup plus inégales, par rapport à leur grandeur, que les grandes Marées.

Nous avons déja vû que les petites Marées qui ſuivent les Quadratures, doivent être fort ſuſceptibles de pluſieurs irrégularités, tant par rapport au moment de la haute & baſſe Mer, que par rapport à la hauteur de la Marée.

Il me ſemble qu'on doit outre cela remarquer les grandes inégalités qui régnent parmi les petites Marées, quoique tout-à-fait régulieres, pouvant ſous diverſes circonſtances croître juſqu'au double, pendant que les grandes Marées ne croiſſent que d'environ un quart. Pour rendre raiſon de cette Obſervation qu'on a faite, il faut ſe reſſouvenir des circonſtances eſſentielles & fondées dans la nature des Marées, qui peuvent les rendre, tantôt plus grandes, tantôt plus petites dans un même lieu, quoique l'âge de la Lune ne différe point.

Nous avons vû que ce ſont les diverſes diſtances des Luminaires à la Terre,

Terre, & leurs différentes déclinaiſons, qui peuvent encore changer les hauteurs des Marées, lorſque l'âge de la Lune, & la latitude du lieu ſont les mêmes. Le calcul nous a enſeigné auſſi, que l'effet de la diverſité des déclinaiſons des Luminaires eſt beaucoup plus petit que celui de la diverſité des diſtances : comme donc la diverſité des diſtances eſt beaucoup plus grande dans la Lune, que dans le Soleil, & que le Soleil a en même tems beaucoup moins de force que la Lune, on peut pour eſtimer en gros les variations des petites Marées, & les variations des grandes Marées, ſimplement faire attention aux diſtances de la Lune : nous avons trouvé que la diverſité des diſtances peut faire varier l'action de la Lune depuis 2 à 3, l'action du Soleil que nous conſidérons comme conſtante, étant exprimée par l'unité. Cela étant, & les hauteurs des petites Marées étant auſſi proportionnelles aux différences des actions des deux Luminaires, nous voyons que les hauteurs de ces petites Marées doivent être contenues dans les termes de $2-1$, & $3-1$, ou 1 & 2, pendant que les hauteurs des grandes Marées, qui ſont proportionnelles aux ſommes des actions des Luminaires, ſeront renfermées dans les termes de $2+1$ & $3+1$, c'eſt-à-dire, de 3 & 4.

Leſdits termes ſont confirmés par les Obſervations, comme par exemple, par celles qui ſont expoſées dans les Mémoires de l'Academie de 1713. pag. 287. & 288. Nous voyons de cette raiſon, que les variations abſoluës doivent être à peu-près les mêmes dans les petites Marées & dans les grandes Marées, & c'eſt ce que les Obſervations citées confirment auſſi; & comme ces variations ſont par conſequent plus ſenſibles dans les petites Marées que dans les grandes Marées, il faudra peut-être ſe ſervir plûtôt des premieres, que des autres, pour examiner par des Obſervations ce que les diverſes circonſtances peuvent contribuer pour faire varier les hauteurs des Marées.

VI.

Pourquoi les Marées étant montées plus haut, & ayant inondé plus de terrain pendant le Flot, deſcendent en même tems davantage, & laiſſent plus de terrain à ſec pendant le Juſan, & quelle proportion il y a entre les montées & deſcentes.

Nous voyons la premiere Queſtion indiquée, comme fort remarquable dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1712. pag. 94. La raiſon en eſt que les Marées font une eſpece de mouvement oſcillatoire, ou de balancement; car il y a dans ces balancemens un point d'équilibre, qui doit paſſer pour fixe, & au-deſſus duquel l'eau doit être cenſée s'élever dans la haute Mer, & ſe baiſſer dans la baſſe Mer. On pourroit croire d'abord que les élévations & deſcentes de l'eau à l'é-

gard du point fixe, ſont conſtamment proportionnelles, & en ce cas notre Problême ſeroit réſolu dans toute ſon étendue avec beaucoup de facilité. Mais il y a une toute autre proportion bien plus variable & bien plus compliquée, que nous allons rechercher, d'autant que ce n'eſt pas proprement la hauteur des Marées dans le ſens que nous lui avons donné juſqu'ici, qu'il importe davantage de connoître dans la Navigation pour l'entrée & ſortie des Vaiſſeaux dans les Ports ou les Rades: il s'y agit plutôt de connoitre la hauteur abſolue des eaux, lorſqu'elles ſont arrivées à leur plus grande ou leur plus petite hauteur; & pour cet effet, il faut ſçavoir dans chaque Marée, tant l'élévation des eaux à l'égard du point fixe, que leur baiſſement: juſqu'ici nous n'avons déterminé que la ſomme de ces variations ſous le nom de hauteur de la Marée.

Voyons d'abord comment il faudra déterminer le point fixe: il eſt vrai qu'il eſt en quelque façon arbitraire, cependant il paroît le plus convenable de le placer là, où atteindroit la ſurface de la Mer, ſi les Marées étoient nulles. Un tel point doit être conſidéré comme demeurant conſtamment à la même hauteur; car les cauſes qui peuvent le hauſſer ou le baiſſer, telles que ſont les Vents, les Courans inégaux, &c. ne ſont que paſſageres & purement accidentelles. Il s'agit donc à préſent de ſçavoir, combien les eaux montent au-deſſus de ce point fixe dans la haute Mer, & combien elles deſcendent au-deſſous du même point dans la baſſe Mer. Cette Queſtion dépend de toutes les circonſtances qui concourent pour former la hauteur abſolue des Marées, & que nous avons examinées au long avec tout le ſoin poſſible. Ce ſeroit donc ſe jetter de nouveau dans les mêmes difficultés, ſi nous voulions traiter la préſente Queſtion avec la même rigueur, & auſſi ſcrupuleuſement, que nous avons fait l'autre; c'eſt pourquoi nous ne conſidérerons que les circonſtances fondamentales & principales, qui ſont que la Terre eſt toute inondée, que les Luminaires ſont dans le plan de l'Equateur, & que la latitude du lieu eſt nulle, faiſant abſtraction de toutes les cauſes ſecondes: ceux qui voudront enſuite une Solution plus exacte, n'auront qu'à conſulter les Chapitres VIII. & IX. pour y arriver.

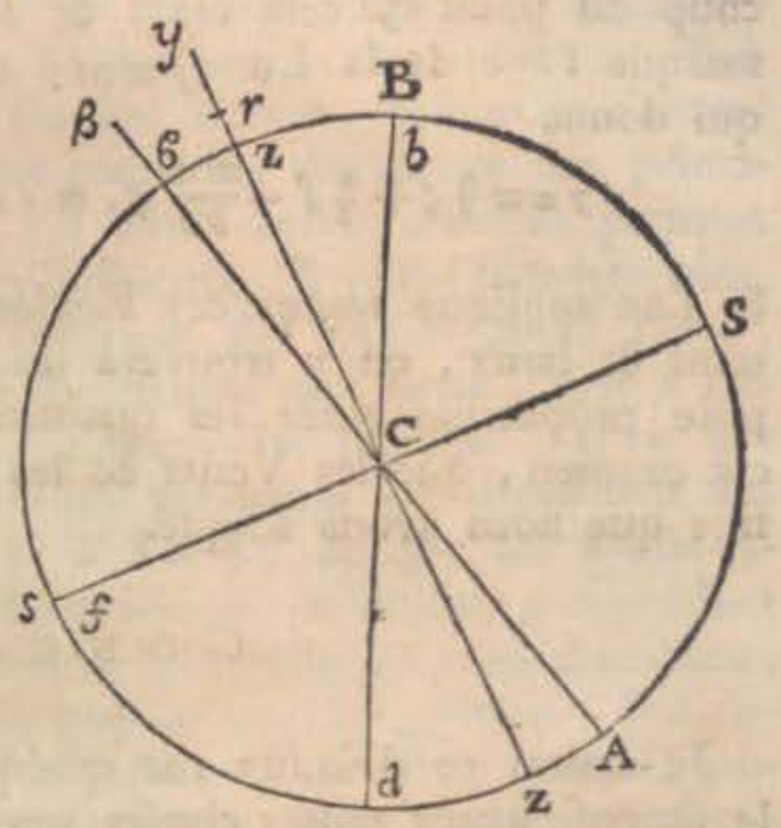
Soit donc encore (comme nous avons ſuppoſé au Chap. V.,) $b\,\ell\,s\,\delta\,b$ l'Equateur, & que b marque le lieu du Soleil, ℓ celui de la Lune, & z le point de la plus grande élévation des eaux, exprimée par yz; ſi l'on prend un Arc de 40 degrés zs, le point s marquera l'endroit du plus grand baiſſement des eaux, exprimé par sx: nous avons démontré là-deſſus au VIII. §. du Chap. V. qu'on a généralement

$$yz = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \ell + \frac{2bb - 3\varepsilon\varepsilon}{3bb} \times \delta .$$

dans laquelle équation b marque le Sinus total, σ le Sinus de l'Angle $\underline{b}Cz$,

$b\,C\,z$, déterminé au §. XI. Chap. V. ς le Sinus de l'Angle $\beta\,C\,z$, exprimé au §. XIII. Chap. V. β la hauteur des Marées entant qu'elles seroient produites par la seule action de la Lune. Nous avons démontré pareillement au III. §. Chap. VIII. qu'en regardant $s\,x$ comme positive, de négative qu'elle est par rapport à $y\,z$, on a généralement

$$s\,x = \frac{b\,b - 3\,\sigma\,\sigma}{3\,b\,b} \times \beta + \frac{b\,b - 3\,\varsigma\,\varsigma}{3\,b\,b} \times \delta .$$



Or comme les points z & s, qui sont de niveau, marquent le point fixe dans le sens que nous venons de lui donner, on voit que ces quantités $y\,z$ & $s\,x$ marquent préciſément l'élévation des eaux au deſſus du point fixe, & leur baiſſement au-deſſous du même point, tels que nous ſommes propoſés de les déterminer. Des valeurs que nous venons de trouver, on pourra tirer les Corollaires ſuivans.

(*a*) La différence entre chaque élévation au-deſſus du point fixe, & la deſcente au-deſſous du même point, eſt toujours $= \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\delta$: d'où nous voyons déja que l'une croiſſant ou diminuant, l'autre doit croître ou diminuer auſſi, qui eſt le Phénomene obſervé par M. Caſſini. Cette différence fait *environ* le tiers de la plus grande hauteur de Marée : je dis *environ*, parce que les quantités β & δ ſont variables, quoique leurs variations ſoient beaucoup plus petites que celles qui réſultent des différens âges de la Lune, & à cet égard on peut dire que la différence dont il s'agit ici, eſt preſque conſtante.

(*b*) Dans les Syzygies (ou plûtôt un jour & demi après) les quantités ς & σ doivent être ſuppoſées $= 0$, & ainſi on a $y\,z = \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{3}\delta$, & $s\,x = \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\delta$: la montée eſt donc dans les grandes Marées toujours double de la deſcente. Cette propriété ſervira à déterminer commodément le point fixe dans chaque Port, & elle le donne de 5. pieds 3 pouces plus haut pour Breſt, qu'il n'a été choiſi par les Obſervateurs, ſi on la compare avec l'Obſervation, qui eſt au milieu de la page 94. des Mém. de l'Acad. des Scienc. de 1712.

(*c*) Dans les Quadratures (ou un jour & demi après) il faut faire $\varsigma = 0$, & $\sigma = b$, ce qui donne $y\,z = \frac{2}{3}\delta - \frac{1}{3}\beta$, & $s\,x = \frac{1}{3}\delta - \frac{1}{3}\beta$: d'où l'on voit que la montée & deſcente des eaux à l'égard de notre point fixe, ont une raiſon variable dans les petites Marées, qui dépend du rap-

rapport qui ſe trouve alors entre la force lunaire δ, & la force ſolaire ζ. Nous avons ſuppoſé dans cet Ouvrage ce rapport moyen comme 5 à 2, & ce rapport poſé, il faut dire que dans les petites Marées, l'élévation des eaux au-deſſus de notre point fixe, eſt 8 fois plus grande que leur baiſſement au-deſſous du même point. Dans les Marées minimes nous avons ſuppoſé $\delta = 2\zeta$, & dans les plus grandes des petites Marées $\delta = 3\zeta$.

(*d*) Nous avons fait voir, que le point z n'eſt jamais éloigné beaucoup du point ζ, cela étant & faiſant le Sinus de l'Angle $bc\zeta$ (qui marque l'âge de la Lune) $= m$, on pourra ſuppoſer $\varsigma = 0$ & $\sigma = m$, ce qui donne

$$yz = \tfrac{2}{3}\zeta + \tfrac{2}{3}\delta - \frac{mm}{bb}\zeta, \text{ \& } sx = \tfrac{1}{3}\zeta + \tfrac{1}{3}\delta - \frac{mm}{bb}\zeta.$$

Si l'on applique toutes ces Regles aux Obſervations faites en différens tems & lieux, on y trouvera un grand accord, ſi l'on choiſit bien la juſte proportion entre les quantités δ & ζ. Mais on remarquera dans cet examen, que les Vents & les Courans peuvent faire varier le point fixe que nous avons adopté.

CONCLUSION.

Je finirai ce diſcours par quelques refléxions ſur notre Théorie. Elle ſuppoſe avant toutes choſes une peſanteur vers les centres du Soleil & de la Lune, pareille à celle qui ſe fait vers le centre de la Terre, & que cette peſanteur s'étend au-delà de la région de la Terre. C'eſt le ſeul principe qui nous ſoit abſolument néceſſaire, & il n'y a perſonne qui le conteſte. La rondeur des Luminaires prouve ſuffiſamment la peſanteur qui ſe fait vers le centre ; & quelle raiſon pourroit-on avoir pour donner des limites à cette peſanteur ? Auſſi a-t-elle été reconnue depuis les ſiécles les plus reculés ; mais on n'en a connu toute l'évidence & toutes les loix, que depuis la Philoſophie immortelle de M. NEWTON. Les premieres conſéquences que nous avons tirées de ce principe pour l'explication des Marées, ſont purement Géométriques. Nous pouvons donc être aſſurés de connoître la vraie cauſe des Marées, quoique nous en ignorions encore la cauſe premiere, qui eſt la cauſe générale & phyſique de la peſanteur. S'il y avoit quelqu'un qui eût deviné cette premiere cauſe, il mériteroit d'autant plus la préférence, que ſon Syſtême renfermeroit néceſſairement la vraie cauſe univerſelle de la peſanteur : cette conſéquence ſera la pierre de touche pour prouver la vérité d'un tel Syſtême ſur les Marées. Il en eſt de ceci, comme ſi l'on demandoit, par exemple, pourquoi la ſurface de l'eau dans un reſervoir ſe met toujours horiſontalement : on voit qu'on ne ſçauroit en dire

re la premiere cauſe, ſans qu'elle renferme la vraie Théorie ſur la peſanteur & ſur la fluidité, qui ſeules peuvent être la vraie cauſe du Phénomene en queſtion. Cette ſeule refléxion m'a fait quitter quelques conjectures qui ſe préſentoient à mon eſprit ſur la cauſe matérielle des Marées, quoi qu'elles me paruſſent d'ailleurs aſſez plauſibles. Je n'ai fait au reſte en employant ce principe, que ce que Kepler a déja fait. M. Newton eſt allé beaucoup plus loin ſur cette matiere, après avoir démontré auparavant que la peſanteur vers chaque corps dans le Syſtême du monde diminue en raiſon quarrée reciproque des diſtances: d'où il a tiré pluſieurs nouvelles propriétés ſur les Marées, leſquelles s'accordant avec les Obſervations, pourroient confirmer davantage ſon principe ſur la diminution de la peſanteur, s'il avoit beſoin d'autres preuves. Ce principe n'a pourtant pas beaucoup d'influence, ſi je me ſouviens bien, ſur les variations des Marées, qui dépendent des Phaſes de la Lune, des declinaiſons des Luminaires & de la latitude des lieux, ſoit à l'égard des hauteurs des Marées, ſoit à l'égard des Marées. Il ne ſert principalement qu'à déterminer au juſte les variations qui dépendent des différentes diſtances des Luminaires à la Terre, & que les Obſervations n'ont pû déterminer avec aſſez de préciſion; il n'y en a cependant aucune qui lui ſoit contraire, & pluſieurs Obſervations bien détaillées, ſont tout-à-fait conformes aux réſultats que ce principe donne. On remarquera enfin que ce que j'ai dit ſur la peſanteur terreſtre, que j'ai conſidérée comme formée par l'attraction univerſelle de la matiere, n'a abſolument aucun rapport avec aucune variation des Marées; ces Marées pourront ſubſiſter telles qu'elles ſont, quelle que ſoit la nature de la peſanteur à cet égard: tout cet examen ne nous a ſervi que par rapport à la queſtion, quelle devroit être la hauteur abſolue de la hauteur des Marées, ſans le concours d'une infinité de cauſes ſecondes, qui peuvent augmenter & diminuer ces hauteurs abſolues, de ſorte que quel qu'eût été le réſultat de ces recherches, notre Théorie n'en eût pû ſouffrir aucune atteinte. J'eſpére avec tout cela, qu'on n'aura pas trouvé ces recherches inutiles à l'égard de pluſieurs circonſtances qui en ont été éclaircies, outre que nos déterminations donnent, en choiſiſſant les hypotheſes les plus vraiſemblables, des nombres tels que la nature de la choſe paroît exiger. Nous pouvons donc être tout-à-fait ſûrs de n'avoir rien admis d'eſſentiel dans toutes nos recherches, qui ne ſoit au-deſſus de toute conteſtation.

Quant à l'application de nos principes, à l'uſage que j'en ai fair, & au ſuccès de mon travail, ce n'eſt pas à moi à faire cet examen, ſur-tout ne pouvant le faire, ſans entrer dans un certain parallele avec un auſſi grand Homme qu'étoit M. Newton. Si j'ai eu quelques ſuccès, je dois avouer à l'honneur de ce ſçavant Philoſophe, que c'eſt

lui qui nous a mis en état de raiſonner ſolidement ſur ces ſortes de matieres ; & ſi j'oſe me flatter de quelque mérite, c'eſt celui d'avoir traité notre ſujet avec une attention & une exactitude conforme aux grande vûës de L'ACADEMIE, & au reſpect qu'on doit à cet illuſtre Corps.

DE CAUSA PHYSICA FLUXUS ET REFLUXUS MARIS.

A D. D. MAC-LAURIN *Mathematicarum Professore, è Societate Academiæ Edimburgensis.*

OPINIONUM COMMENTA DELET DIES, NATURÆ JUDICIA CONFIRMAT.

SECTIO I.

PHÆNOMENA.

PHILOSOPHI motum Maris triplicem olim agnoverunt *, diurnum, menstruum & annuum; motu diurno Mare bis singulis diebus intumescit defluitque, menstruo æstus in Syzygiis Luminarium augentur, in Quadraturis minuuntur, annuo denique æstus hyeme quàm æstate fiunt majores: verùm Phænomena hæc sunt paulò accuratiùs proponenda.

I. Motus Maris diurnus absolvitur horis circiter solaribus 24. minutisque primis 48, intervallo scilicet temporis quo Luna motu apparente à Meridiano loci cujusvis digressa ad eundem revertitur. Hinc altitudo Maris maxima contingit Lunâ appellente ad datum situm respectu Meridiani loci dati; verùm hora solaris in quam incidit æstus singulis diebus retardatur, eodem ferè intervallo quo Lunæ appulsus ad Meridianum loci. Atque hic motus adeò accuratè ad motum Lunæ componitur, ut, secundùm Observationes à celeb. D. Cassini allatas, ratio sit habenda horæ in quam incidit vera conjunctio vel oppositio Solis, & æquatio à motu

* Plin. Lib. 2. Cap. 99.

motu Lunæ desumpta adhibenda, ut tempus quo Mare ad maximam assurget altitudinem die Novilunii vel Plenilunii accuratiùs definiatur. In æstuariis autem diversi existunt æstus tempore, ut loquitur Plinius, non ratione discordes. Duo æstus qui singulis diebus producuntur, non sunt semper æquales; matutini enim majores sunt vespertinis tempore hyberno, minores tempore æstivo, præsertim in Syzygiis Luminarium. (*a*).

II. De motu Maris mensruo tria præcipuè sunt observanda. 1. Æstus fiunt maximi singulis mensibus paulò post Syzygias Solis & Lunæ, decrescunt in transitu Lunæ ad Quadraturas, & sunt paulò post minimi. Differentia tanta est, ut ascensus totius aquæ maximus sit ad minimum ejusdem mensis, secundùm quasdam Observationes, ut 9 ad 5; & in nonnullis casibus differentia observatur adhuc major. 2. Æstus sunt majores, cæteris paribus, quò minor est distantia Lunæ à Terra, idque in majori ratione quàm inversa duplicata distantiarum, ut ex variis Observationibus colligitur. Ex. gr. anno 1713. ascensus aquæ in Portu Bristonico, (*b*) referente eodem Cl. viro, 26°. Febr. fuit pedum 22 digitorum 5. & Martii 13°. pedum 18. digit. 2. Declinatio Lunæ in utroque casu ferè eadem; in priori distantia Lunæ partium 953, in posteriori partium 1032, quarum distantia mediocris est 1000. Est autem quadratum numeri 1032 ad quadratum numeri 953, ut 22. pedes 5 digit. ad 19 pedes $1\frac{2}{5}$ digitos; ascensus aurem aquæ in posteriori casu fuit tantùm 18. ped. cum 2. digitis. 3. Æstus sunt, cæteris paribus, majores, cùm Luna versatur in Circulo æquinoctiali, & minuuntur crescente Lunæ declinatione ab hoc Circulo.

III. Æstus fiunt, cæteris paribus, majores, quò minor est distantia Solis à Terra; adeòque majores hyeme cæteris paribus, quàm æstate. Differentia verò longè minor est quàm quæ ex diversis Lunæ distantiis oritur. Ex. gr. distantiæ Lunæ perigeæ fuerunt æquales Junii 19. 1711. & Decemb. 28. 1712. ascensus aquæ priore die pedum 18 digit. 4, posteriori pedum 19 digit. 2; declinatio autem Lunæ fuit paulò minor in hac quàm in illa Observatione. (*c*).

Porrò in diversis locis æstus sunt diversi, pro varia locorum latitudine, eorumque situ respectu Oceani unde propagantur, pro ipsius Oceani amplitudine, & littorum fretorumque indole, aliisque variis de causis.

SECTIO II.

PRINCIPIA.

Phænomenis æstus Maris insignioribus breviter recensitis, progredimur ad

(*a*) *Mém. de l'Acad. Royale*, 1710. 1712. & 1713.
(*b*) *Ibid.* (*c*) *Mém. de l'Acad. Royale*, 1710. 1712. & 1713.

ad Principia, unde horum ratio eſt reddenda. Liceat tamen præfari nobiliſſimam quidem, ſed ſimul difficilimam eſſe hanc Philoſophiæ partem, quæ Phænomenorum cauſas inveſtigat & explicat. Ea eſt Naturæ ſubtilitas, ut non ſit mirum cauſas primarias, ſolertiam Philoſophorum plerumque effugere. Qui omnium Phænomenorum rationes, exponere, integramque cauſarum ſeriem nobis exhibere in ſe ſuſceperunt; illi certè magnis ſuis auſis hucuſque exciderunt. Philoſophiam quidem perfectiſſimam viri clariſſimi ſibi propoſuerunt exſtruendam, qualem tamen humanæ ſorti competere fas eſt dubitare. Præſtat igitur tantorum virorum ſucceſſu minùs felici edoctos, ipſius naturæ veſtigia cautè & lentè ſequi. Quòd ſi Phænomena ad generalia quædam Principia reducere poſſimus, horumque vires calculo ſubjicere, hiſce gradibus aliquam veræ Philoſophiæ partem aſſequemur; quæ quidem manca ſeu imperfecta erit, ſi ipſorum Principiorum cauſæ lateant: tanta tamen ineſt rerum naturæ venuſtas, ut ea pars longè præſtet Subtiliſſimis virorum acutiſſimorum commentis.

Motus Maris cuivis vel leviter perpendenti manifeſtum eſt Luminarium, Lunæ præſertim, motibus affines eſſe & analogos. Eadem eſt periodus motûs Maris diurni ac Lunæ ad Meridianum loci, eadem motûs menſtrui ac Lunæ ad Solem; utriuſque Luminaris vis in motu Maris generando hinc elucet, quòd æſtus ſint majores quò minores utriuſque diſtantiæ à Terra; adeò ut nullus ſit dubitandi locus, motum Maris eſſe aliquâ ratione ad motum Lunæ & Solis compoſitum. Quales autem dicemus illas eſſe vires quæ à Luna & Sole propagatæ (aut ab his aliquo modo pendentes) aquam bis ſingulis diebus tollunt & deprimunt; quæ in Syzygiis Luminarium conſpirant, Quadraturis pugnant; in minoribus utriuſque diſtantiis augentur, in majoribus minuuntur; quæ in minori Lunæ declinatione fortiores, in majori debiliores ſunt; & nonnunquam majorem motum cient cùm Sol & Luna infra Horizontem deprimuntur, quàm cùm in Meridiano ſuperiori ambo dominantur. Fuerunt Viri celeberrimi qui æſtum Maris preſſione quâdam Lunæ cieri putarunt. Verùm cauſam & menſuram hujus preſſionis non oſtenderunt, nec quo pacto motus Maris varii hinc oriri poſſint ſatis clarè indicarunt, multò minùs motus illos (hoc principio poſito) ad Calculum revocare docuerunt.

Sagaciſſimus Keplerus Mare versùs Lunam gravitare, æſtumque Maris hinc cieri olim monuit. Newtonus, poſtquàm leges gravitatis detexiſſet, invenit æquilibrium Maris non tam turbari ipſius gravitate versùs Lunam, quàm ex inæqualitate vis quâ particulæ Maris tendunt ad Lunam & Solem pro diverſis ſuis diſtantiis ab horum centris, primuſque motum Maris ad certas Leges, & ad Calculum revocare docuit. Fatendum quidem eſt gravitatis cauſam ignotam eſſe vel ſaltem obſcuram;

Corpora tamen non ſunt ideò minùs gravia. Sint qui aſſerant Corpora nullo impulſu aut vi externâ, ſed vi quâdam innatâ ſe mutuò appetere; verùm non æquum eſt horum ſomnia veritati afficere. Alii ſtatim confugiant ad immediatum ſupremi Auctoris imperium, aſt neque horum nimia feſtinatio probanda eſt, neque illorum faſtidium qui tot naturæ teſtimoniis non attendunt quoniam cauſa gravitatis eſt obſcura. Vis gravitatis eſt nobis adeò familiaris, ejuſque menſura adeò pro comperto habetur, ut hâc ad alias vires æſtimandas ferè ſemper utamur; quam in Cœlis, non minùs quàm in Terris dominari, & ſecundùm certam legem augeri & minui demonſtravit vir eximius tanta cum evidentia ut majorem fruſtra deſideres in ardua & difficili hâc Philoſophiæ parte, quæ de rerum cauſis agit.

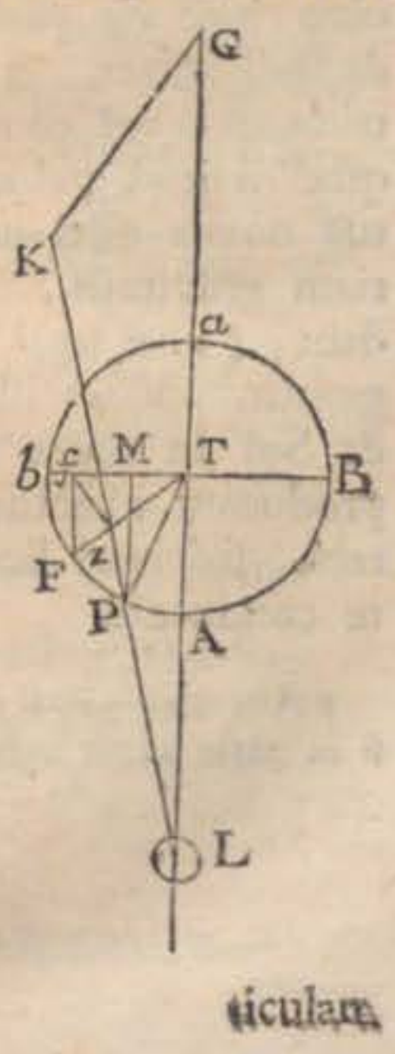
Newtonus argumento ſingulari oſtendit, Lunam urgeri versùs centrum Terræ vi quæ (habitâ ratione diſtantiarum) cum gravitate Corporum terreſtrium planè congruit; quali Terram versùs Lunam pariter urgeri æquo jure cenſendum eſt. Cùm Corpus aliquod versùs aliud pellitur, inde quidem haud ſequitur hoc versùs illud ſimul urgeri. Verùm quid de gravitate Corporum cœleſtium ſentiendum ſit, ex iis quæ comperta ſunt de gravitate Corporum terreſtrium (aliiſque viribus ſimilibus) optimè dignoſcitur; cùm per hanc ad illam agnoſcendam ducamur, ſintque Phænomena omninò ſimilia. Mons gravitat in Terram, & ſi Terra non urgeret montem vi æquali & contraria, Terra à monte pulſa pergeret cum motu accelerato in infinitum. Porrò ſtatus cujuſvis ſyſtematis Corporum (i. e. motus centri gravitatis) neceſſariò turbatur ab omni actione cui non æqualis & contraria eſt aliqua reactio, ita ut vix quidquam perenne aut conſtans dici poſſit in ſyſtemate ſi hæc lex locum non habeat. Cumque Terræ partes ita ſemper in ſe mutuò agant, ut motus centri gravitatis Terræ nullâtenus turbetur à mutuis Corporum aut agentium quorumcunque conflictibus, ſive intra ſive extra ſuperficiem ſitorum; eademque lex obtineat in viribus magneticis, electricis aliiſque, teſte experientiâ, jure concludit Newtonus Lunam non tantùm in Terram, ſed hanc quoque in illam gravitare, & utramque circa commune centrum gravitatis moveri, dum hoc centrum circa totius ſyſtematis centrum gravitatis (*a*) continuò revolvitur.

Gravitatem, cæteris paribus, proportionalem eſſe quantitati materiæ ſolidæ Corporis, accuratiſſima docent experimenta, idemque, è calculo gravitatis Corporum cœleſtium comprobatur; quin gravitatem quoque ſequi

(*a*) Suſpicari licet aliquam obliquitatis Eclipticæ variationem, de qua ſermo eſt apud Aſtronomos, ex motu Solis circa centrum ſyſtematis oriri: indicio erit hanc eſſe Phænomeni cauſam, ſi conſtiterit illam variationem analogiam ſervare cum motu Jovis Planetarum maximi.

sequi rationem materiæ Corporis versùs quod dirigitur, ex principio memorato aliisque argumentis colligitur. Similis est ratio aliarum virium quæ in naturâ dominantur. Lucis radii ex. gr. magis refringuntur, cæteris paribus, quò densiora sunt Corpora quæ subintrant. Terræ partes versùs se mutuò gravitant, non versùs illud punctum fictum quod centrum Terræ appellamus; quod cùm rationi & analogiæ naturæ sit maximè consentaneum, tum pulcherrimè confirmatur accuratissimis experimentis quæ in Boreali Europæ parte nuper instituerunt viri clarissimi ex Academia Regia Parisiensi. Causa gravitatis (quæcumque demum sit) latè dominatur; cumque sit diversa in diversis distantiis, non est mirandum, ejus vim pendere quoque à magnitudine illius Corporis, versùs quod alia impellit. Fatemur vim hanc Corpori centrali impropriè tribui; expedit quidem brevitatis gratiâ sic loqui, id autem sensu vulgari non Philosophico est intelligendum.

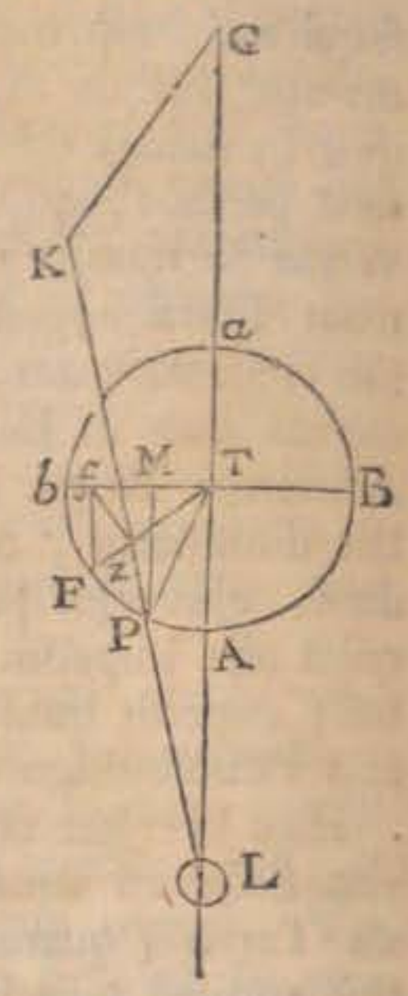
Hæc breviter tantùm hîc attingimus. Newtonus postquàm definivisset vim Solis ad aquas turbandas ex differentiâ diametri Æquatoris & Axis Terræ (quam approximatione quâdam suâ investigaverat) per regulam auream quærit breviter ascensum aquæ ex vi Solis oriundum. Verùm quamvis elevatio aquæ quæ sic prodit parum à verâ differat, cùm tamen Problemata hæc sint diversi generis, quorum priùs pendet à Quadraturâ circuli, posterius autem à Quadraturâ Hyperbolæ seu Logarithmis, ut posteà videbimus; sitque dubitandi locus an à priori ad posteriorem elevationem determinandam, transitus adeò brevis sit omni ex parte legitimus, vel etiam an Methodus quâ figuram Terræ definiverat sit satis accurata; cúmque vires subtilissimæ motum Maris producant, quæ nullos alios sensibiles edunt effectus, adeò ut leviſſima quæque in hac disquisitione alicujus momenti esse possint; propterea existimavi me facturum operæ prætium, si aliam aperirem viam quâ calculus in hisce Problematibus ex genuinis principiis accuratissimè institui poterit.



Repetenda imprimis sunt pauca ex Newtono, postea viam diversam sequemur. Sit *L* Luna, *T* centrum Terræ, *Bb* planum rectæ *LT* perpendiculare, *P* particula quævis Terræ; sitque *PM* perpendicularis in planum *Bb*. Repræsentet *LT* gravitatem Terræ mediocrem vel particulæ in centro *T* positæ versùs Lunam, sumatur *LK* ad *LT*, ut est LT^2 ad LP^2, eritque recta *LK* mensura gravitatis particulæ *P* in Lunam. Ducatur *KG* rectæ *PT* parallela, occurratque *LT* productæ, si opus est, in *G*, & resolvetur vis *LK* in vires *KG* & *LG*, quarum prior urget par-

ticulam

ticulam *P* versùs centrum Terræ eſtque ferè æqualis ipſi *PT*; poſterioris pars *TL* omnibus particulis communis, & ſibi ſemper parallela, motum aquæ non turbat; altera verò pars *TG* eſt quàm proximè æqualis ipſi 3 *PM*: * Imprimis igitur quærendum eſt quænam debèat eſſe figura Terræ fluidæ cujus particulæ versùs ſe mutuò gravitant viribus in inversâ diſtantiarum ratione, duplicatâ decreſcentibus, quæque ſimul agitantur duabus viribus extraneis, quarum altera versùs centrum *T* dirigitur, eſtque ſemper ut *PT* diſtantia particulæ à centro, altera agit in recta ipſi *TL* parallela eſtque ad priorem ut 3 *PM* ad *PT*. Oſtendemus autem Sectione ſequenti figuram hujus Fluidi eſſe accuratè Sphæroidem quæ gignitur revolutione Ellipſeos circà Axem tranſverſum, ſi Terra ſupponatur uniformiter denſa; atque hinc calculum motûs Maris ex motibus cœleſtibus deducere conabimur.



Obſervandum autem alias cauſas conſpirare ad motus Maris producendos cum inæquali gravitate partium Terræ versùs Lunam & Solem. Motus Terræ diurnus circa Axem ſuum variis modis æſtum Maris afficere videtur, præter illum à Newtono memoratum, quo æſtus ad horam lunarem ſecundam aut tertiam retardatur. 1. Æſtus fit paulò major ob vim centrifugam & figuram ſphæroïdicam, ex motu Terræ oriundam, cùm hæc vis paulò major evadat in partibus Maris altioribus quàm in depreſſioribus. 2. Cùm Maris æſtus fertur vel à Meridie versùs Septentrionem, vel contrà à Septentrione versùs Meridiem, incidit in aquas, quæ diversâ velocitate circa Axem Terræ revolvuntur, atque hinc motus novos cieri neceſſe eſt, ut poſtea dicemus. Porrò ſecundùm Theoriam gravitatis, vis quâ particulæ Maris urgentur versùs Terram ſolidam, (quæ aquâ longè denſior eſt) ſuperat vim quâ versùs aquam urgentur. Vires illæ ſunt quidem exiguæ; cùm autem vires quibus Luna & Sol in aquas agunt, in experimentis pendulorum & ſtaticis nullos producant effectus ſenſibiles, tantos autem motus in aquis Oceani generent, ſuſpicari licet vires tantillas ad aquæ motus augendos aliquâ ex parte conducere.

* Vis hæc paulò major eſt ſi particula *P* ſit in parte Terræ Lunæ obverſa, minor ſi in parte Lunæ aversâ, unde meritò habetur æqualis ipſi 3 P M.

SECTIO

SECTIO III.

De Figurâ quam Terra fluida æqualiter denſa indueret ex inæquali particularum gravitate, versùs Lunam aut Solem.

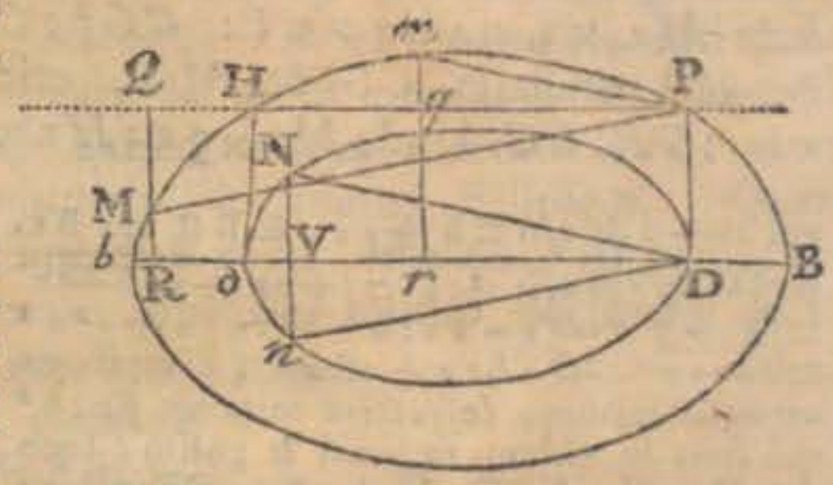
Expoſitis Phænomenis æſtus Maris & principiis generalibus unde celeberrimi Phænomeni ratio petenda videtur, progredimur nunc ad figuram determinandam quam Terra fluida viribus Lunæ vel Solis ſuprà explicatis, agitata aſſumeret; præmittenda autem ſunt quædam Lemmata quibus hæc diſquiſitio aliàs difficillima facilè perfici poterit.

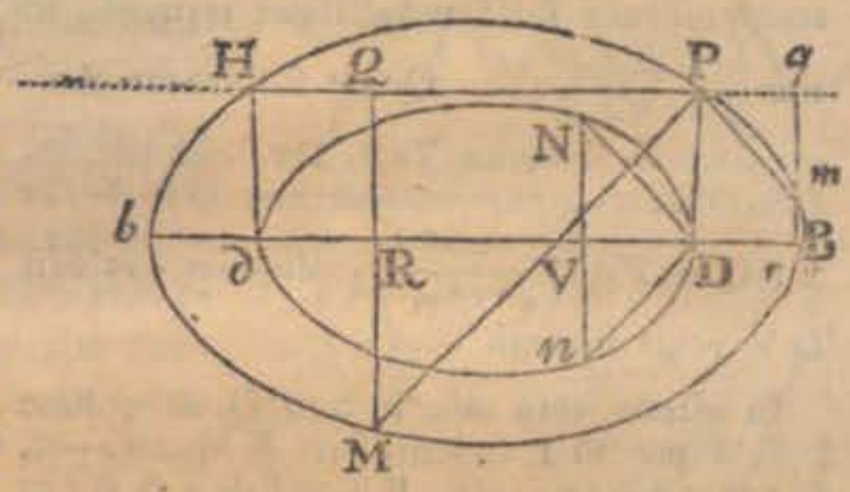
(†) LEMMA I.

(†) Hoc Lemma ad demonſtrandum Corol. 4^tum^ proponitur, quod Corollarium ad Propoſitionem ſequentem reducitur quæ facillime Analytice demonſtrari poteſt.

THEOREMA.

A Puncto quovis Ellipſeos, ducantur ad Ellipſim tres lineæ P H, P M, P m, prior quidem P H ſit axi parallela reliquæ P M, P m faciant cum ipſa æquales quoſvis angulos M P H, m P H; à punctis P, H, M & m ducantur perpendiculares ad P H & ad axim P D, H d, Q M R, m q r & ſuper D d deſcribatur Ellipſis ſimilis priori, ducanturque à puncto D ad eam Ellipſim lineæ D N, D n lineis P m, P M parallelæ, denique ducatur N n quæ ſecet axim in V dico quod 2 D V = P Q + P q = D R + D r, ſi puncta Q & q cadant ab eâdem parte puncti P, vel quod 2 D V = P Q − P q = D R − D r ſi puncta Q & q cadant ad partes diverſas puncti P.





Primo, quoniam ex conſtructione, lineæ D N, D n æquales faciunt angulos cum axe D d, facile deducitur lineam N V n eſſe axi perpendicularem ideoque ſi Radius ſit ad Tangentem anguli Q P M, ut 1 ad t, & D V dicatur z, erit N V = tz; & pariter ſi P Q aut P q vel eorum æquales D R aut D r dicantur x, M Q vel m q dicentur, tx.

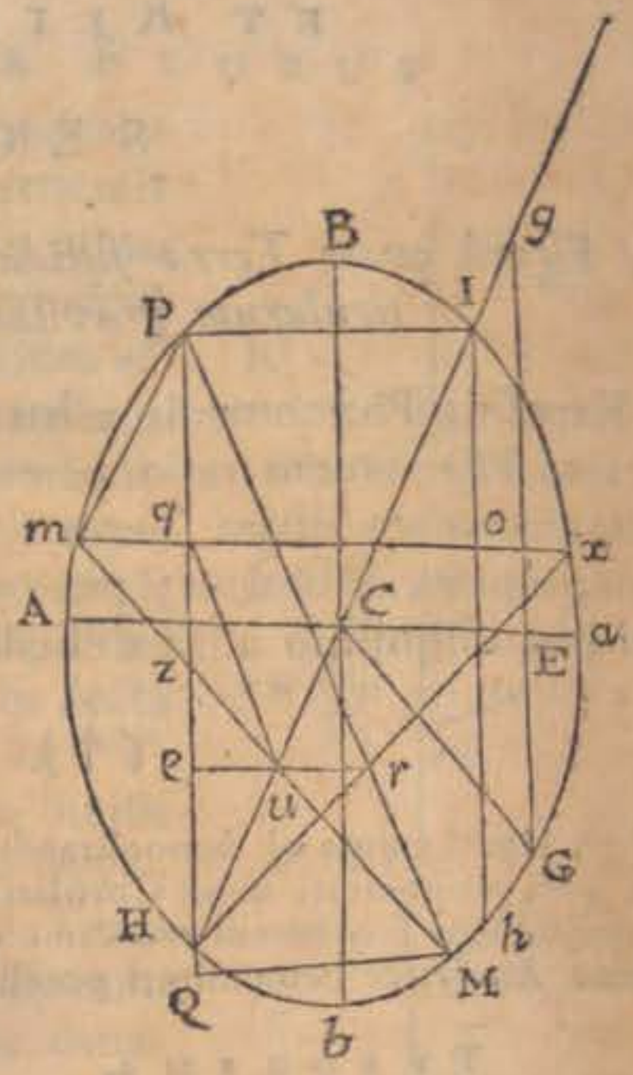
Axis major ſit ad minorem in utraque Ellipſi ut a ad b dicaturque B D f, D b = g, D P = h, & D d = $g - f = l$ erit per naturam Ellipſeos $a^2 : b^2 = fg : h^2$, & pariter erit $a^2 : b^2 = z \times \overline{l - z} : t^2 z^2 = l - z : t^2 z$, hinc $a^2 : \frac{b^2}{t^2} = l - z : z$ & Componendo $\frac{t^2 a^2 + b^2}{t^2} : \frac{b^2}{t^2} =$

$a^2 t^2 + b^2 : b^2 = l : z = \frac{b^2 l}{a^2 t^2 + b^2} =$ D V.

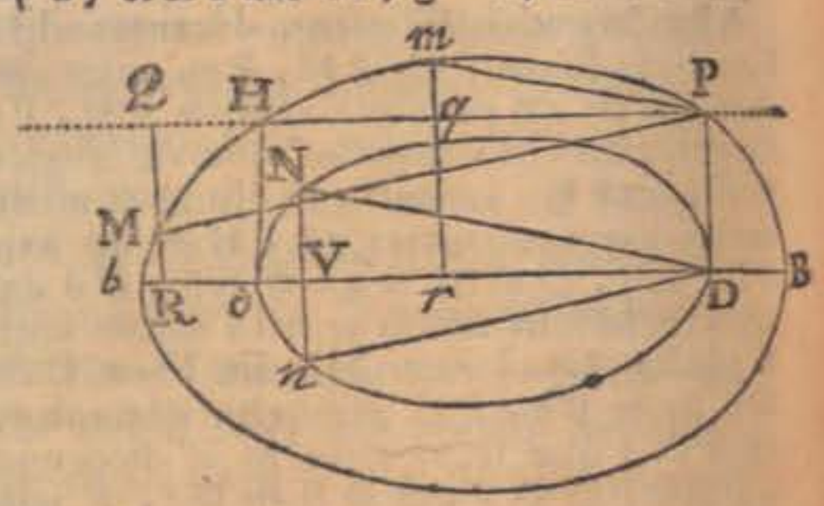
In primo autem caſu in quo Q & q ſunt ab eadem parte puncti P erit R M = $h - tx$

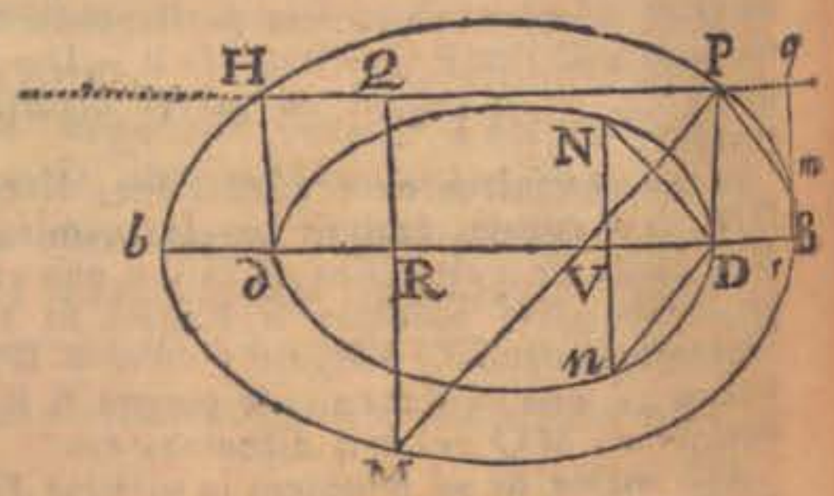
Sit *Abab* Ellipsis, *C* centrum, *HI* diameter quævis, *Mm* ordinata ad diametrum *HI* in puncto *u*, ex *H* & *M* ducantur rectæ *HP* & *mx* parallelæ, duabus quibusvis diametris conjugatis; & sibi mutuò occurentes in *q*; jungantur *qu* & *PM*, atque hæ rectæ erunt sibi mutuò parallelæ.

Occurrat recta *HP*, ordinatæ *Mm* in *z*, & rectæ *MQ* (quæ parallela sit ipsi *mq*) in *Q*. Sint *CG*, *CA* & *CB* semidiametri respectivè parallelæ rectis *Mm*, *mx* & *HP*, Ducatur *GE* parallela ipsi *CB* & producatur donec occurrat semidiametro *CI* in *g*. Ex natura Ellipseos Rectangulum $Mz \times zm : Hz \times zP :: CG^2 : CB^2$; & ob parallelas *CG* & *Mm*, erit $qz : zm :: GE : CG$. Unde $Mz \times qz : Hz \times zP ::$



vel $tx-h$ & $rm = h+tx$, & BR aut Br, $f+x$; & Rb aut rb, $g-x$; hinc ex natura Ellipseos erit $a^2 : b^2 = \overline{f+x} \times \overline{g-x} : \overline{h \mp tx}^2$ $= fg + gx - fx - xx : h^2 \mp 2htx + t^2x^2$ $= lx - x^2 : \mp 2htx + t^2x^2$ (demptis ex utroque termino respectivè terminis $fg : h^2$ qui sunt in eâdem ratione, & posito *l* loco $g-f$) $= l-x : \mp 2ht + t^2x$, atque hinc habetur $a^2t^2x \mp 2a^2ht = b^2l - b^2x$ & transpositione factâ reductisque terminis, fit $x = \frac{b^2l \pm 2a^2ht}{a^2t^2+b^2}$. Quare si sumatur summa duarum linearum DR, Dr, quæ per singulos valores *x* exprimuntur erit $DR + Dr = PQ + Pq = \frac{2b^2l}{a^2t^2+b^2}$ duplum valoris DV prius inventi.





In altero verò casu in quo Q & q hinc inde à puncto P cadunt, erit $RM = tx-h$, & $rm = h-tx$, erit $BR = f+x$ & $Br = f-x$, $Rb = g-x$ & $rb = g+x$. Unde ex natura Ellipseos erit

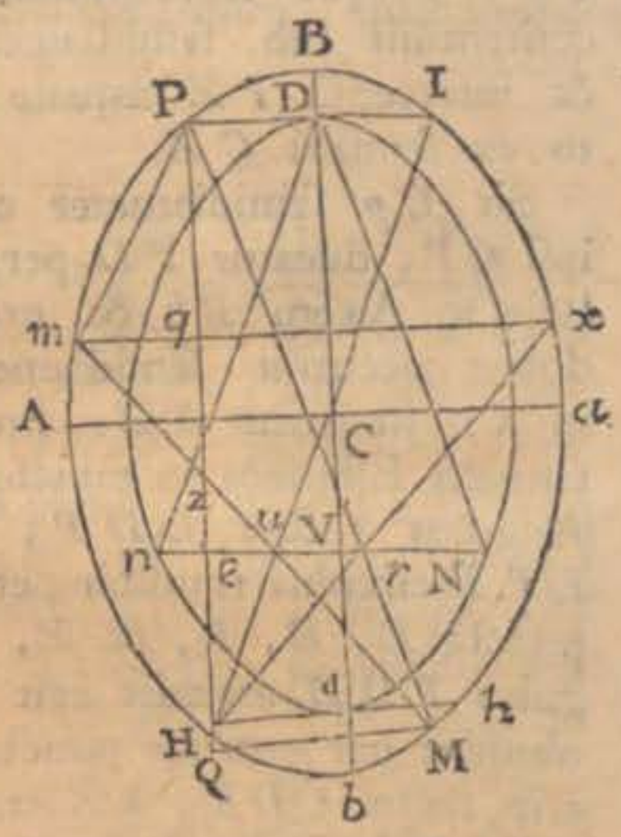
$a^2 : b^2 = f \pm x \times g \mp x : h^2 - 2htx + t^2x^2$
$= fg \pm gx \mp fx - x^2 : h^2 - 2htx + t^2x^2$
$= \pm lx - x^2 \cdot 2htx + t^2x^2$ (demptis terminis fg; h^2 & adhibito *l* loco $g-f$)
$= \pm l - x : -2ht + t^2x$, hincque obtinetur $a^2t^2x - 2hta^2 = \pm b^2l - b^2x$ & transpositione factâ reductisque terminis fit $x = \frac{\pm b^2l + 2hta^2}{a^2t^2+b^2}$. Quare si sumatur differentia duorum DR, Dr quæ per singulos valores *x* exprimuntur erit $DR - Dr = PQ - Pq = \frac{2b^2l}{a^2t^2+b^2}$ duplum valoris DV prius inventi, ergo $2DV = PQ \mp Pq$ prout Q & q sunt ab eâdem vel à diversâ parte puncti P, Q, E, D.

$CG \times GE : CB^2$. Verùm $Hz \times zP : zu \times zP :: Hz : zu :: Gg : CG$. Quare ex æquo $Mz \times zq : zu \times zP :: Gg \times GE : CB^2$. Eſt autem Rectangulum ſub Gg & GE æquale quadrato ex ſemidiametro CB per notam proprietatem ellipſeos, cùm CI ſit conjugata ſemidiametro CG, & CB ipſi CA. Proinde $Mz \times zq = zu \times zP$, & $zq : zu :: zP : zM$, adeóque qu parallela rectæ PM. q. e. d.

COR. 1. Recta PQ dividitur harmonicè in q & z vel $PQ : Pq :: Qz : qz$. Quippe ducatur ue parallela ipſi mx, occurratque rectæ HP in e, tum erit $Pz : qz :: PM : qu$ (ob parallelas PM, qu) $:: PQ : qe$. Unde $Pq : qz :: Pe : qe :: qe : ez :: Pe + qe : qe + ez ::$ (quoniam Qe, eq ſunt æquales) $PQ : Qz$.

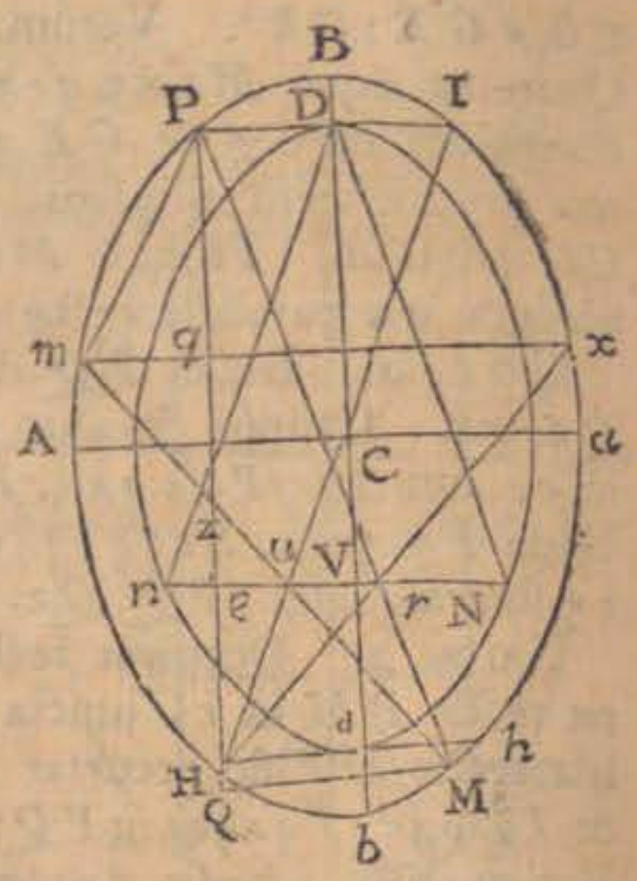
COR. 2. Occurrat recta mx Ellipſi in x, jungatur Hx quæ occurrat rectæ PM in r, juncta ur erit parellela mx. Quippe ſit Ih parallela rectæ HP & occurrat ipſi mx in o; tum ox erit æqualis rectæ qm & $Io : ox :: Pq : qm :: PQ : QM$; adeóque Ix erit parallela ipſi PM. Verùm cùm IH ſit diameter Ellipſeos & ad x punctum in Ellipſi ſitum ductæ ſint rectæ Ix, Hx ab extremitatibus diametri IH, erunt hæ parallelæ duabus diametris conjugatis, ex naturâ Ellipſeos. Quare cùm ex punctis H & M eductæ ſint duæ rectæ Hx & PM reſpectivè parallelæ duabus diametris conjugatis, quæ ſibi mutuò occurrunt in r, juncta ur erit parallela rectæ xm per hoc Lemma.

COR. 3. Sit recta HP nunc parallela Axi Ellipſeos, eritque Angulus HPM æqualis Angulo HPm, quoniam $QM : qm :: Qz : qz :: PQ : Pq$ per Cor. 1. Ducantur porrò Hh & PI parallelæ alteri Axi Aa & occurrant Axi Bb in D & d; ſuper Axem Dd deſcribatur Ellipſis ſimilis Ellipſi $ABab$ & ſimiliter poſita cui occurrat recta ur producta in N & n; occurrat ur Axi Dd in V, eritque VN vel Vn æqualis rectæ er, & ſi jungantur Dn, DN erunt hæ rectæ reſpectivè parallelæ rectis PM, Pm. Nam $Pe : er :: Pq : qm$ & $He : er :: Hq : qx$, unde $He \times Pe : er^2 :: Hq \times qP : mq \times qx :: CB^2 : CA^2$. Sed Rectangulum $DV \times Vd : VN^2 :: CB^2 : CA^2$; $dV = He$, $DV = Pe$, adeóque $DV \times Vd = He \times Pe$, unde $VN^2 = er^2$, & $VN = er$, PM parallela rectæ DN & Pm rectæ Dn.



COR. 4. Hinc ſequitur conversè quod ſi Nn ſit ordinata ab interiori Ellipſi ad Axem Dd & DP perpendicularis Axi Dd occurrat Ellipſi exteriori in P; jungantur DN & Dn hiſque parallelæ PM, Pm occur-

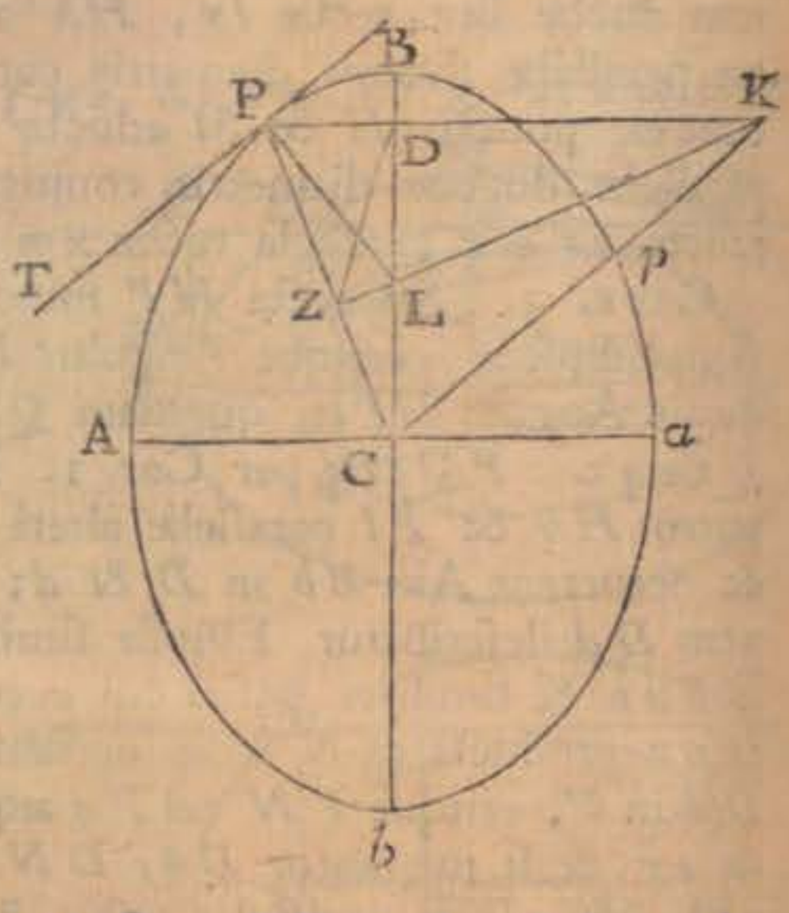
occurrant Ellipſi exteriori in *M* & *m*; ducatur *PH* parallela Axi *Dd*, in quam ſint perpendiculares *MQ* & *mq*, tum *PQ* + *Pq* (vel 2 *Pe*) erit æqualis 2 *DV*, punctis *Q* & *q* cadentibus ad eaſdem partes puncti *P*, & *PQ* − *Pq* = 2 *DV* cum *Q* & *q* ſunt ad contrarias partes puncti *P*.



LEMMA II.

Recta *PL* perpendicularis Ellipſi *ABab* in *P*, occurrat Axi *Bb* in *L*, & ex puncto *L* ſit *LZ* perpendicularis in ſemidiametrum *CP*, eritque Rectangulum *CPZ* contentum ſub ſemidiametro *CP* & interceptâ *PZ* æquale quadrato ex ſemiaxi *CA*.

Sit *Cp* ſemidiameter conjugata ipſi *CP*, ducatur *PD* perpendicularis in Axem *Bb* & producatur donec occurrat ſemidiametro *Cp* in *K*, jungatur *KZ*. ſitque *PT* tangens Ellipſeos in puncto *P*. Ob Angulos rectos *LDP*, *LZP*, *LPT* circulus tranſibit per quatuor puncta *L*, *D*, *P*, & *Z*, & continget rectam *PT* in *P*, adeóque Angulus *PDZ* æqualis erit Angulo *CPT* vel *PCK*. Proinde circulus tranſibit per quatuor puncta *C*, *K*, *D* & *Z*; Angulus *CZK* æqualis erit recto *CDK*, *KZ* tranſibit per punctum *L* & ex naturâ circuli $CP \times PZ = DP \times PK = CA^2$. q. e. d. (*a*)

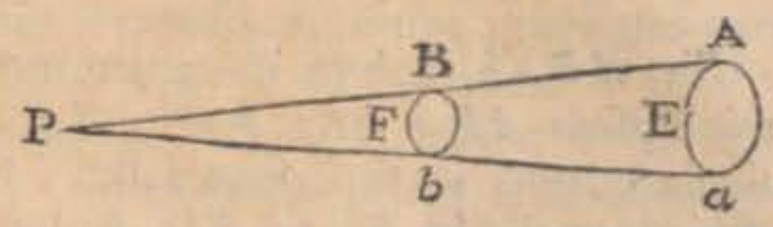


LEM-

(*a*) Proprietates bis in hoc & præcedenti Lemmate demonſtratæ analogicè facilè ad hyperbolam transferuntur.

LEMMA III.

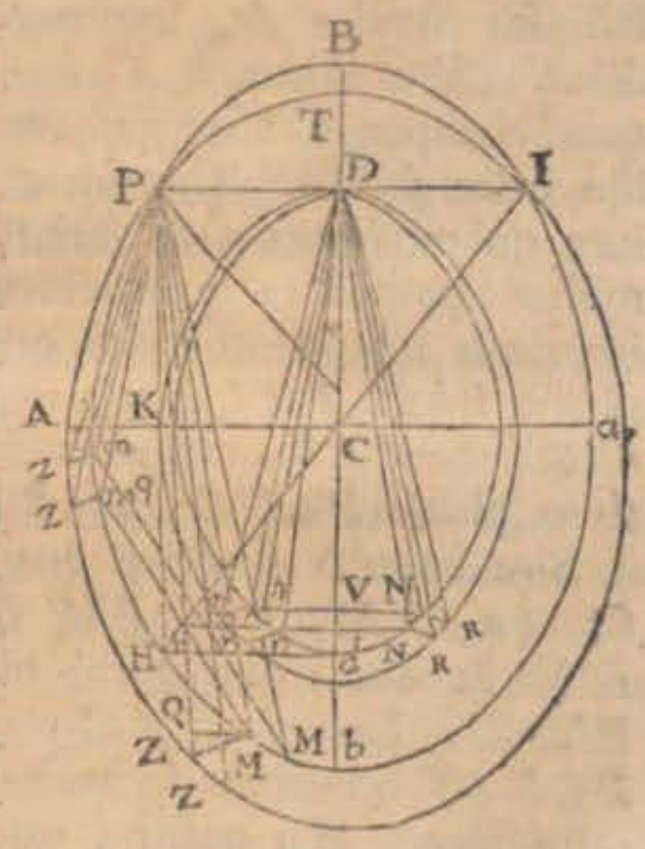
Ponamus particulas corporum versùs ſe mutuò gravitare viribus decreſcentibus in inversâ duplicatâ ratione diſtantiarum à ſe invicem, ſintque *PAEa*, *PBFb* ſimiles pyramides vel coni ex materiâ hujuſmodi homogeneâ compoſiti, eritque gravitas particulæ *P* in ſolidum *PAEa* ad gravitatem ejuſdem particulæ in ſolidum *PBFb* ut *PA* ad *PB*, vel ut homologa quævis latera horum ſolidorum.



Gravitas enim particulæ *P* in ſuperficiem quamvis *AEaA* puncto *P* concentricam eſt ut ſuperficies hæc directè & quadratum radii *PA* inversè, adeóque eſt ſemper eadem in quâvis diſtantiâ *PA*. Quare gravitas particulæ *P* versùs totum ſolidum *PAEa* erit ad gravitatem ejuſdem particulæ versùs totum ſolidum *PBFb* ut *PA* ad *PB*.

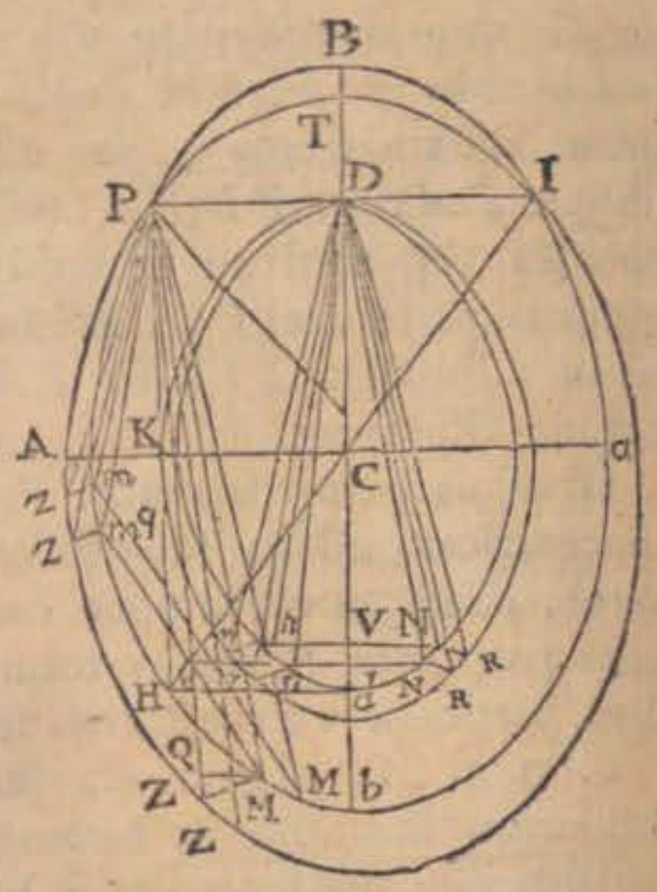
COR. 1. Hinc gravitates quibus particulæ ſimiliter ſitæ reſpectu ſolidorum ſimilium & homogeneorum versùs hæc ſolida urgentur, ſunt ut diſtantiæ particularum à punctis ſimiliter ſitis in ipſis ſolidis, vel ut latera quævis ſolidorum homologa. Quippe hæc ſolida reſolvi poſſunt in ſimiles conos vel pyramides, vel ſimilia horum fruſtra, quæ vertices habebunt in particulis gravitantibus.

COR. 2. Hinc etiam facilè ſequitur (*) quòd ſi annulus ellipticus, figuris ſimilibus *DBab*, *DndN* terminatus, circà Axem alterutrum revolvatur, gravitatem particulæ intra ſolidum ſic genitum ſitæ, vel in interiori ejus ſuperficie poſitæ, versùs hoc ſolidum evaneſcere; quoniam ſi recta quævis Ellipſibus hiſce ſimilibus & ſimiliter poſitis occurrat, æqualia ſemper erunt rectæ ſegmenta extrema quæ ab Ellipſibus intercipiuntur (ut facilè oſtenditur ex naturâ harum figurarum) adeóque vires æquales & oppoſitæ in hoc caſu ſe muruò deſtruent. Hinc verò ſequitur quòd ſi *ABab* ſit Sphærois genita motu Ellipſeos circà alterutrum Axem, ſintque *B* & *D* particulæ quævis in eodem ſemidiametro ſitæ, gravitatem particulæ *B* versùs Sphæroidem fore ad gravitatem particulæ *D* ut diſtantia *CB* ad diſtantiam *CD*, per Corollarium præcedens.



(*) Vid. Newt. Lib. I. Prop. XCI. Cor. 3.

LEMMA IV.



Sit *ABab* Sphærois genita motu semiellipseos *ABa* circà Axem *Aa*, *P* particula quævis in superficie solidi, sit *PK* Axi normalis in *K*; & *PD* Axi parallela occurrat plano *Bb* (quod Axi supponitur normale) in *D*. Resolvatur vis quâ particula *P* gravitat versùs Sphæroidem in duas vires, alteram Axi parallelam, alteram eidem perpendicularem, eritque prior æqualis vi quâ particula *K* in Axi sita tendit ad centrum solidi, posterior autem æqualis vi quâ particula *D* urgetur versùs idem centrum.

Producatur *PK* donec rursùs occurrat Ellipsi generatrici in *H*, ducatur *Hd* parallela Axi *Aa* quæ occurrat Axi *Bb* in *d*, concipiamus solidum *DndN* simile ipsi *BAba* & similiter positum describi super Axem *Dd*. Horum solidorum Sectiones ab eodem plano resectæ erunt semper Ellipses similes & similiter positæ, uti notum est & facilè ostenditur. Sint igitur *BAba*, *DndN* hujusmodi figuræ à plano *PAbIBP*, quod semper transire ponatur per datam rectam *PDI* resectæ ex similibus hisce solidis. Contineat planum *PzZIT* cum plano priori Angulum quàmminimum & faciat Sectiones similes *PzZIT*, *DrRD* & similiter positas in prædictorum solidorum superficiebus. Hisce positis, imprimis ostendemus vim quâ particula *P* urgetur versùs duo frusta quæ planis *PbI*, *PZI* & planis *PBI*, *PTI* continentur, si reducatur ad directionem *PK*, æqualem fore vi quâ particula *D* urgetur versùs frustum planis *DnND*, *DrRD* terminatum.

Sint enim *Nn*, *N'n'* duæ ordinatæ ex interiori Ellipsi ad Axem *Dd*; sint (*a*) *PM*, *Pm*, *PM'* & *Pm'* respectivè parallelæ rectis *DN*, *Dn*, *DN'* & *Dn'*; sint porrò plana *DNR*, *DN'R'*, *Dnr*, *Dn'r'*, *PMZ*, *PM'Z'*, *Pmz*, *Pm'z'* plano *PbIB* perpendicularia quæ alteri plano, *PzZIT* occurrant in rectis *DR*, *DR'*, *Dr*, *Dr'*, *PZ*, *PZ'*, *Pz*, *Pz'*, respectivè. His positis, quoniam Anguli *NDN'* & *MPM'*, *nDn'* & *mPm'*,

(*a*) In hac Figura describenda rectas *NR*, *N'R'*, &c. non duximus secundùm regulas perspectivæ, sed eâ ratione quâ facillimè dignosci possint.

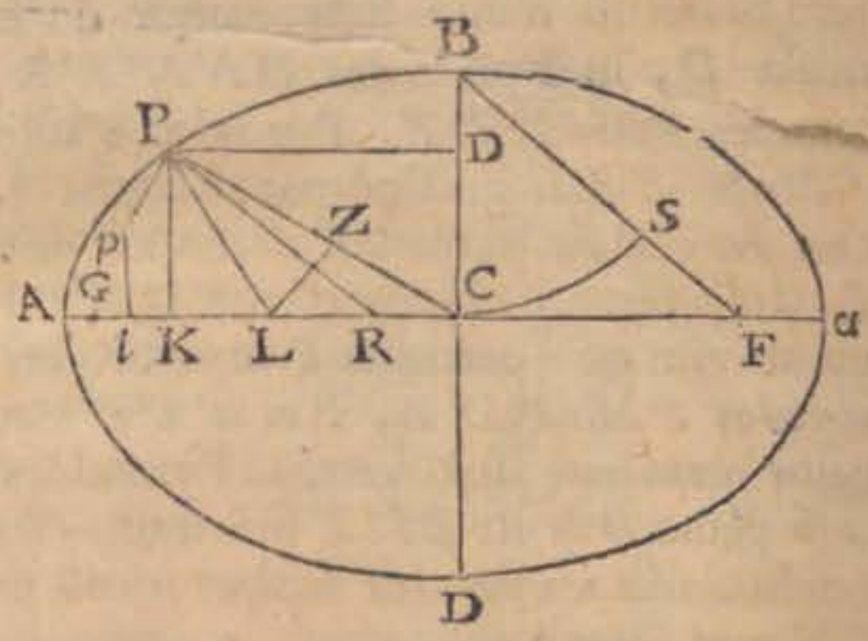
mPm', ponuntur ſemper æquales; & rectæ PM & DN, Pm & Dn, æqualiter ſemper inclinantur ad PI communem planorum Sectionem; ſi Angulus NDN' & inclinatio planorum $PbTB$, $PZIT$ ad ſe invicem continuò minui ſupponantur donec evaneſcant, erunt gravitates particulæ D, in Pyramides $DNN'R'R$, $Dnn'r'r$ & particulæ P in Pyramides $PMM'Z'Z$, $Pmm'z'z$ ultimo in ratione rectarum DN, Dn, PM & Pm reſpectivè per Lemma 3. Eædemque vires ſecundùm rectas Axi Aa, perpendiculares æſtimatæ erunt ut rectæ DV, DV, PQ, Pq reſpectivè. Unde cùm $PQ \mp Pq = 2DV$ per Corol. 4. Lem. 1. ſequitur vim quâ particula P urgetur versùs Axem Aa, gravitate ſuâ in Pyramides $PMM'Z'Z$, $Pmm'z'z$ æqualem eſſe vi, quâ particula D urgetur gravitate ſuâ versùs Pyramides $DNN'R'R$, $Dnn'r'r$. Quare ſi plana DNR, PMZ ſibi mutuò ſemper parallela & plano $PbIB$ perpendicularia moveantur ſemper circà puncta D & P (rectis ſcilicet DN, PM procedentibus ſemper in plano $PbIB$, & rectis DR, Pz in plano $PZIT$) erunt vires quibus particula P urgetur versùs Axem ex gravitate ſuâ in fruſta motu planorum PMZ, Pmz ſic deſcripta, æquales ſemper viribus, quibus particula D urgetur versùs eundem Axem gravitate ſuâ in fruſta motu planorum DNR, Dnr deſcripta; unde ſequitur particulam P urgeri eâdem vi ſecundùm rectam PK, gravitate ſuâ in fruſtra planis PbI, PzI, & planis PBI, PTI contenta, quâ particula D tendit versùs fruſtra planis $DnND$, $DrRD$ terminata. Proinde cùm hæ vires ſecundùm rectas Axi totius ſolidi perpendiculares æſtimatæ ſint etiam æquales, & par ſit ratio virium quibus particulæ P & D urgentur versùs fruſta quævis alia ſimiliter ex ſolidis reſecta, ſequitur particulam P æqualiter urgeri versùs Axem gravitate ſuâ in ſolidum exterius, & particulam D gravitate ſuâ in ſolidum ſimile interius, vel etiam in ſolidum exterius, cùm hæ vires ſint eædem per Corol. 2. Lem. 3.

Simili planè ratione colligitur vim, quâ particula P urgetur ſecundùm rectam Axi Parallelam æqualem eſſe vi, quâ particula K in Axe ſita urgetur versùs centrum ſolidi.

COR. 1. Particulæ igitur quævis Sphæroidis æqualiter ab Axe vel Æquatore ſolidi diſtantes æqualiter versùs Axem vel Æquatorem urgentur. Vireſque quibus particulæ quævis urgentur versùs Axem ſunt ut illarum diſtantiæ ab Axe, & vires quibus urgentur versùs planum Æquatoris, ſunt ad ſe invicem, ut illarum diſtantiæ ab hoc plano.

COR.

COR. 2. Repræsentet *A* vim quâ Sphærois urget particulam in Axis termino *A* sitam, *B* vim quâ idem solidum urget particulam *B* in circumferentia circuli medii inter *A* & *a* positam; sumatur *KR* ad *KC*, ut $\frac{A}{CA}$ est ad $\frac{B}{Ca}$, jungatur *PR*, & particula *P* tendet versùs Sphæroidem in recta *PR*, vi quæ huic rectæ semper est proportionalis. Vis enim quâ particula *D* urgetur versùs centrum solidi, est ad *B*, ut *CD* ad *CB*, per Cor. 2. Lem. 3. Similiter vis quâ particula *K* urgetur versùs solidi centrum est ad *A*, ut *CK* ad *CA*. Quare per Lemma 4. vis quâ particula *P* urgetur secundùm rectam *PK* Axi normalem est ad vim, quâ urgetur secundùm rectam *PD* Axi parallelam, ut $\frac{PK \times B}{Ca}$ ad $\frac{CK \times A}{Ca}$; adeóque ut $PK \times KC$ ad $CK \times KR$. i. e. ut *PL* ad *KR* ex constructione. Quare particula *P* urgetur secundùm rectam *PR*, his viribus conjunctis, & vis composita est ad *B*, ut *PR* ad *BC*. Quo verò pacto vires *A* & *B* computari possint postea ostendemus.



PROPOSITIO I.

THEOREMA FUNDAMENTALE.

Constet Sphærois *AB ab* materia fluida, cujus particulæ versùs se mutuò urgeantur viribus in inversâ duplicatâ ratione distantiarum decrescentibus; agantque simul duæ vires extraneæ in singulas Fluidi particulas, quarum altera tendat versùs centrum Sphæroidis, sitque semper proportionalis distantiis particularum ab hoc centro; altera agat secundùm rectas Axis solidi Parallelas, sitque semper proportionalis distantiis particularum à plano *B b* Axi normali; & si semiaxes *CA*, *CB* Ellipseos generatricis sint inversæ proportionales viribus totis, quæ agunt in particulas æquales in extremis Axium punctis *A* & *B* sitas, erit totum Fluidum in æquilibrio.

Ut hæc Propositio nostra primaria clarissimè demonstretur, ostendemus imprimis vim compositam ex gravitate particulæ cujusvis *P* & duabus viribus extraneis, semper agere in rectâ *PL*, quæ est ad superficiem Sphæroidis semper normalis. 2. Fluidum in rectâ quâvis *PC* à superficie ad centrum ductâ, ejusdem ubique esse ponderis. 3. Fluidum in

canalibus

canalibus quibuſvis à ſuperficie ad datam quamvis particulam intra ſolidum ductis, eâdem ſemper vi particulam illam urgere.

1. Vires totæ quæ agunt in particulas A & B dicantur M & N, quæ ex hypotheſi ſunt in ratione Axium CB & CA. Reſolvatur vis prior extranea quæ agit ſecundùm rectam PC in vires duas, alteram Axi parallelam, alteram eidem perpendicularem; eruntque hæ vires ſemper ut rectæ PK & KC. Unde cùm vis quâ gravitas particulæ P urget eam ſecundùm rectam PK ſit etiam ut PK, per Lemma ſuperius, ſequitur vim totam quâ particula P urgetur ſecundùm rectam PK, eſſe ad N, ut PK ad CB. Vires tres agunt in particulam P ſecundùm rectam PD Axi parallelam, particulæ ſcilicet gravitas & duæ vires extraneæ, quæ ſingulæ variantur in ratione rectæ PD vel KC; adeóque vis ex his tribus reſultans erit ad M ut CK ad CA. Vis igitur quâ particula P urgetur ſecundùm rectam PK eſt ad vim quâ urgetur ſecundùm rectam PD ut $\frac{N \times PK}{CB}$ ad $\frac{M \times KC}{CA}$ ſive (cùm $M : N :: CB : CA$) ut $PK \times CA^2$ ad $CK \times CB^2$. i. e. (quoniam ſi PL Ellipſi generatrici perpendicularis occurrat Axi Aa in L, erit KC ad KL, ut CA^2 ad CB^2, ex notâ Ellipſis proprietate) ut $PK \times KC$ ad $KC \times KL$, adeóque ut PK ad KL. Unde vis compoſita particulam urget in recta PL, quæ ad ſuperficiem Fluidi ponitur perpendicularis; eſtque ſemper ut recta hæc PL, cùm vires ſecundùm rectas PK ſint ſemper ut PK.

2. Sit LZ normalis in ſemidiametrum CP, & vis quâ particula P urgetur versùs centrum, erit ut recta PZ per vulgaria Mechanicæ Principia, & pondus Fluidi in rectâ PC ut rectangulum $CP \times PZ$, quod ſemper eſt æquale quadrato ex ſemiaxi CB per Lemma II. Centrum igitur æqualiter undique urgetur, eſtque Fluidum in æquilibrio in C.

3. Sit p particula quævis in ſolido ubicunque ſita, Pp recta quævis à ſuperficie ad particulam p ducta; ſint PK, pl normales in Axem Aa, & vis quâ particula p urgetur pondere Fluidi in rectâ quâvis Pp ſecundùm hanc rectam, facili calculo quem brevitatis gratiâ omitto, invenietur æqualis $\frac{N}{2CB} \times \overline{PK^2 - pl^2} - \frac{M}{2CA} \times \overline{Cl^2 - CK^2} =$ (cùm $M : N :: CB : CA$) $\frac{M \times CA^2 \times PK^2 + M \times CK^2 \times CB^2 - M \times CA^2 \times pl^2}{2CB^2 \times CA} - \frac{M \times CB^2 \times Cl^2}{2CB^2 \times CA}$ = (cùm $PK^2 : CA^2 - CK^2 :: CB^2 : CA^2$, & ſi CG ſit ſemiaxis Ellipſeos per p ductæ ſimilis Ellipſi $ABab$, & ſimiliter ſitæ, $pl^2 : CG^2 - Cl^2 :: CB^2 : CA^2$) $\frac{M \times CA - M \times CG}{2}$ adeóque cùm hæc quantitas à ſitu puncti P non pendeat, vis hæc eſt ſemper eadem, ſi detur locus particulæ p; quæ proinde cùm undique æqualiter urgeatur, Fluidum erit ubique in æquilibrio.

COR. I. Sit ut in Cor. 2. Lemmatis IV. A vis gravitatis in Sphæroidem in loco A, B vis gravitatis in eandem in loco B, V vis KG in mediocri suâ quantitate in superiore Sectione expositâ, quâ Luna vel Sol aquam Sphæroidis deprimit in distantia d, quæ ponitur mediocris inter CA & CB. Sit $CA=a$, $CB=b$, eritque vis N, quâ particula B versùs C urgetur, æqualis $B+\frac{bV}{d}$, & $M=A+\frac{aV}{d}-\frac{3aV}{d}=A-\frac{2aV}{d}$. Unde per hanc Propositionem si $a:b::B+\frac{bV}{d}:A-\frac{2aV}{d}$, erit Fluidum in æquilibrio. Atque hinc ex datis A, B & V in terminis a & b species figuræ innotescet. Est $Aa-Bb=\frac{2a^2V}{d}+\frac{b^2V}{d}$.

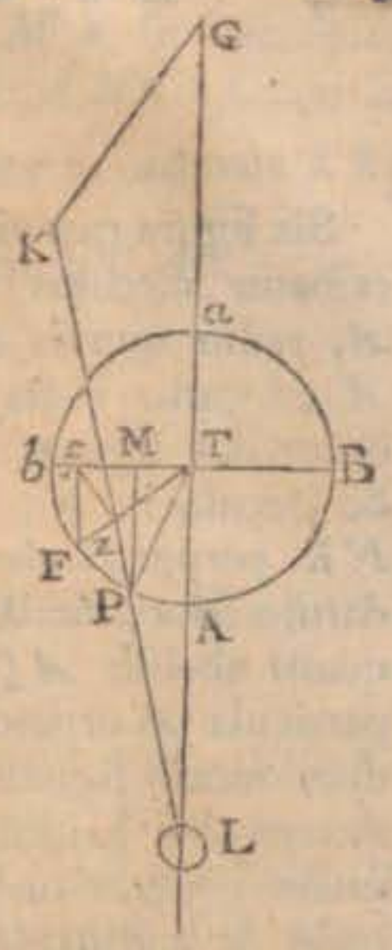
COR. 2. Cùm vis V (sive ex inæquali gravitate particularum versùs Lunam, vel versùs Solem oriatur) sit exigua admodum respectu virium A & B, & differentia inter a & b admodum parva, ducatur $a=d+x$ & $b=d-x$, eritque $Bd-Bx+Vx\frac{\overline{d-x}^2}{d}=Ad+Ax-2Vx\frac{\overline{d+x}^2}{d}$, & neglectis terminis ubi xx reperitur $Bd-B\bar{x}+Vd-2Vx=Ad+Ax-2Vd-4Vx$, unde $Bd-Ad+3Vd=Ax+Bx-2Vx$; adeóque $x:d::B-A+3V:B+A-2V$; & differentia altitudinis aquæ in A & B (seu $2x$) ad semidiametrum mediocrem d ut $2B-2A+6V$ ad $B+A-2V$, vel quàm proximè ut $B-A+3V$ ad gravitatem versùs Sphæroidem mediocrem.

COR. 3. In præcedentibus Corollariis suppositimus $d=\frac{1}{2}CA+\frac{1}{2}CB$; verùm si d denotet aliam quamvis distantiam ubi vis KG ponatur æqualis ipsi V, sitque $e=\frac{1}{2}CA+\frac{1}{2}CB$, erit $x:e::B-A+\frac{3eV}{d}:B+A-\frac{2eV}{d}$.

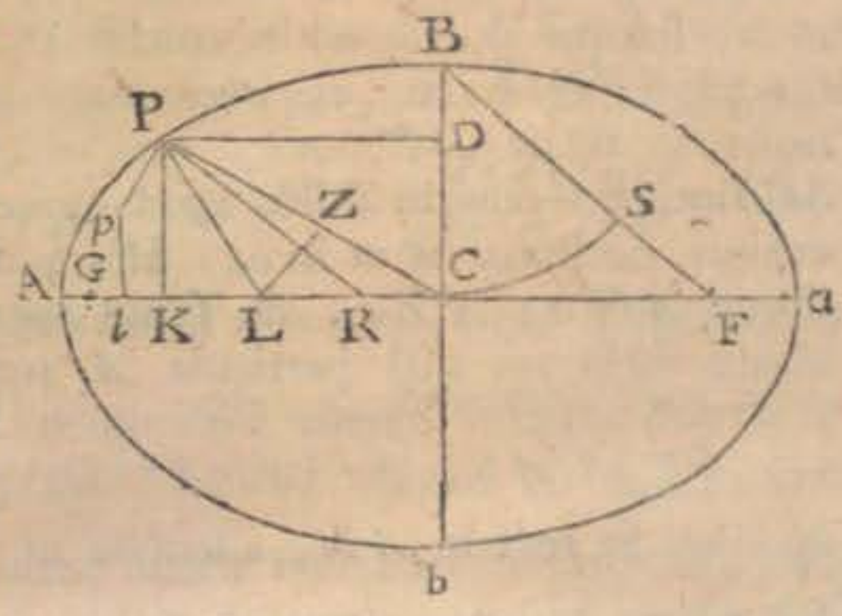
COR. 4. Per vim V in his Corollariis intelleximus vim vel Solis vel Lunæ, & figuram consideravimus, quam Terra fluida homogenea indueret si hæ vires seorsùm in eam agerent. Sit nunc Luna Soli conjuncta vel opposita, & simul agant in Terram. In hoc casu vires Luminarium conspirant ad aquam tollendam in A & a, eamque deprimendam in B & b, & easdem ubique servant leges. Unde erit etiam in hoc casu fluidum in æquilibrio, si vis tota quæ agit in loco A, sit ad vim totam quæ agit in loco B ut CB ad CA; adeóque si V nunc designet summam virium, quibus Sol & Luna aquam deprimit in rectis Tb, TB ad mediocrem distantiam fluidum erit in æquilibrio, si $b:a::A-\frac{2aV}{d}:B+\frac{bV}{d}$, vel x ad d ut $B-A+3V$ ad $B+A-2V$ quàm proximè, ut priùs.

COR. 5. Sit nunc Luna in recta Aa, Sol in recta Bb, & quoniam

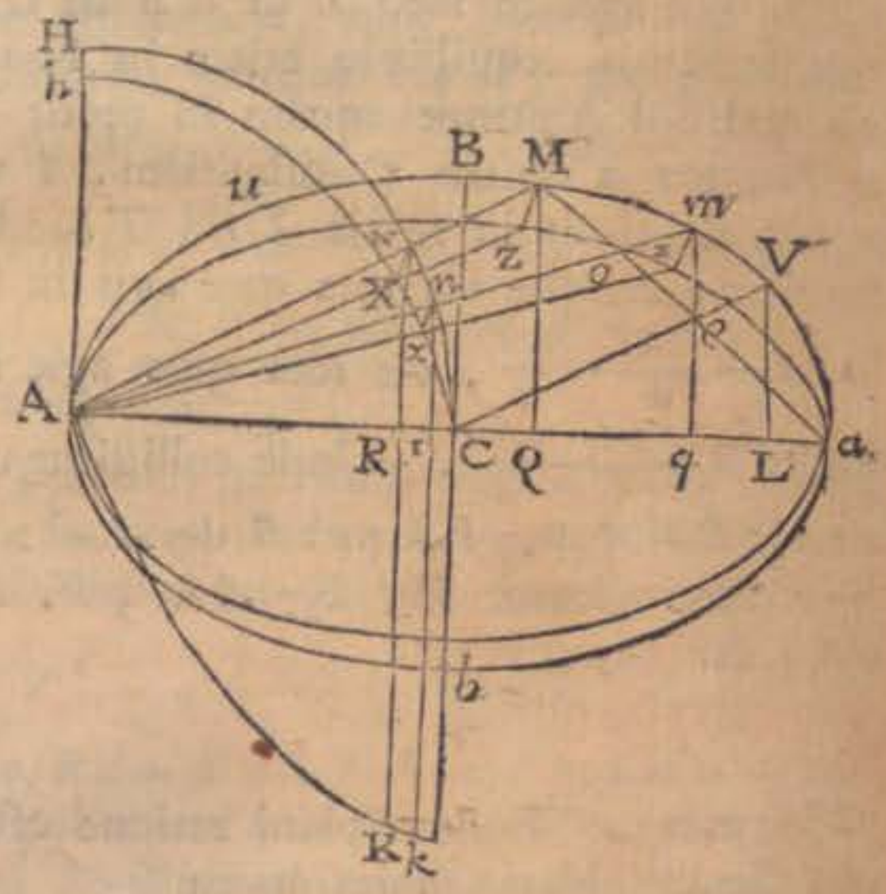
niam Lunæ vis potior eſt, Axis tranſverſus figuræ generatricis tranſeat per Lunam, conjugatus per Solem; & ſi vis tota quæ agit in loco A ſit ad vim totam quæ agit in loco B ut CB ad CA erit Sphærois fluida in æquilibrio etiam in hoc caſu. Sit s vis quâ Sol deprimit aquam in rectis TA, Ta ad mediocrem à centro C diſtantiam, l vis quâ Luna aquam deprimit in rectis TB, Tb ad æqualem diſtantiam; eritque vis tota quæ agit in loco A æqualis $A - \frac{2al}{d} - \frac{as}{d}$, vis tota quæ agit in loco B æqualis $B + \frac{bl}{d} - \frac{2bs}{d}$. Unde colligitur ut in Corol. 2. $x : d :: B - A + 3l - 3s : B + A - 2l - 2s ::$ (ſi $l - s$ nunc dicatur V) $B - A + 3V. B + A - 2V$, ut priùs.



SCHOL. Eâdem planè ratione oſtenditur quòd ſi $BabA$ ſit Sphærois fluida oblata genita motu ſemiellipſis BAb circa Axem minorem Bb; & vertatur hæc Sphærois circa eundem Axem tali motu ut gravitas versùs Sphæroidem hanc in Polo A ſit ad exceſſum quo gravitas in loco B ſuperat vim centrifugam in B ex motu Sphæroidis circa Axem oriundam ut CB ad CA, Fluidum fore ubique in æquilibrio. Unde ſequitur figuram Terræ, quâtenus ex vi centrifugâ à motu diurno oriunda immutatur, eſſe Sphæroidem oblatam qualis gignitur motu ſemiellipſis Bab circa Axem minorem (ſi materia Terræ pro æqualiter denſa habeatur) ſemidiametrum Æquatoris eſſe ad ſemiaxem ut gravitas ſub Polis in Terram eſt ad exceſſum gravitatis ſupra vim centrifugam ſub Æquatore, corpus in loco quovis P tendere versùs Terram vi quæ eſt ſemper ut recta PL perpendicularis Ellipſi generatrici & Axi majori occurrens in L, & menſuram denique gradus in Meridiano eſſe ſemper ut cubus ejuſdem rectæ PL. Hæc omnia accuratè demonſtrantur ex hac Propoſitione; quæ quamvis in diſquiſitione de figurâ Terræ eximii uſus ſint, hic obiter tantum monere convenit.



LEMMA V.



Sit figura quævis ABa: describatur circulus CNH centro A, radio quovis dato AC; ex A educatur recta quævis AM occurrens figuræ ABa in M, & circulo in N; sint MQ & NR perpendiculares in Axem datum Aa, sit KR semper æqualis abcissæ AQ, & vis quâ particula A urgetur versùs solidum motu figuræ ABa circa Axem Aa genitum erit ut area quam generat ordinata KR directè & radius AC inversè.

Occurrat alia recta ex A educta figuræ in m & circulo in n, sintque mq & nr normales in Axem Aa. Sit $AZza$ alia Sectio solidi per Axem, cui occurrant plana AMz, Amz ipsi AMa normalia in rectis AZ, Az, quæ circulum radio AC in plano $AZza$ descriptum secent in X & x; denique arcus Mo circularis centro A descriptus occurrat Am in o. His positis, minuatur angulus contentus planis AMa, AZa, & simul angulus MAm donec evanescant, & ultima ratio vis quâ particula A tendit ad Piramidem $AMZzm$ ad vim quâ urgetur versùs Piramidem $ANXxn$ erit rectæ AM ad AN, vel AQ ad AR, per Lem. II. vis hujus Piramidis est ut vis superficiei $NXxn$ in rectam AN, adeóque ut $\frac{NX \times Nn}{AN^2} \times AN = \frac{NX \times Nn}{AN}$, vel ut $\frac{NR \times Nn}{AN}$ (quoniam NX est ut NR) i. e. ut Rr; ejusdemque vis ad directionem Axis reducta ut $Rr \times \frac{AR}{AN}$; quare vis Piramidis $AMZzm$ ad eandem directionem reducta $Rr \times \frac{AQ}{AC} = \frac{Rr \times KR}{AC}$. Vis igitur quâ particula A urgetur versùs frustum solidi planis AMa, Aza contenti, est ut area quam generat ordinata KR directè & radius AC inversè; cúmque solidum sit rotundum, motu scilicet figuræ circa Axem Aa genitum, par erit ratio vis quâ particula urgetur versùs integrum solidum.

COR. Vis quâ particula A urgetur in solidum est ad vim quâ urgetur versùs Sphæram super diametrum Aa descriptam ut area quam gene-

generat ordinata KR ad $\frac{2}{3}$ CA^2. Quippe si AMa sit circulus; erit AQ ad Aa ut AQ^2 ad AM^2, vel AR^2 ad AN^2. Unde in hoc casu erit $KR = \frac{2AR^2}{AC}$, & area ARK (quam generat ordinata KR) $= \frac{2AR^3}{3AC}$, adeóque area tota motu ordinatæ RK genita erit $\frac{2}{3}$ CA^2.

PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

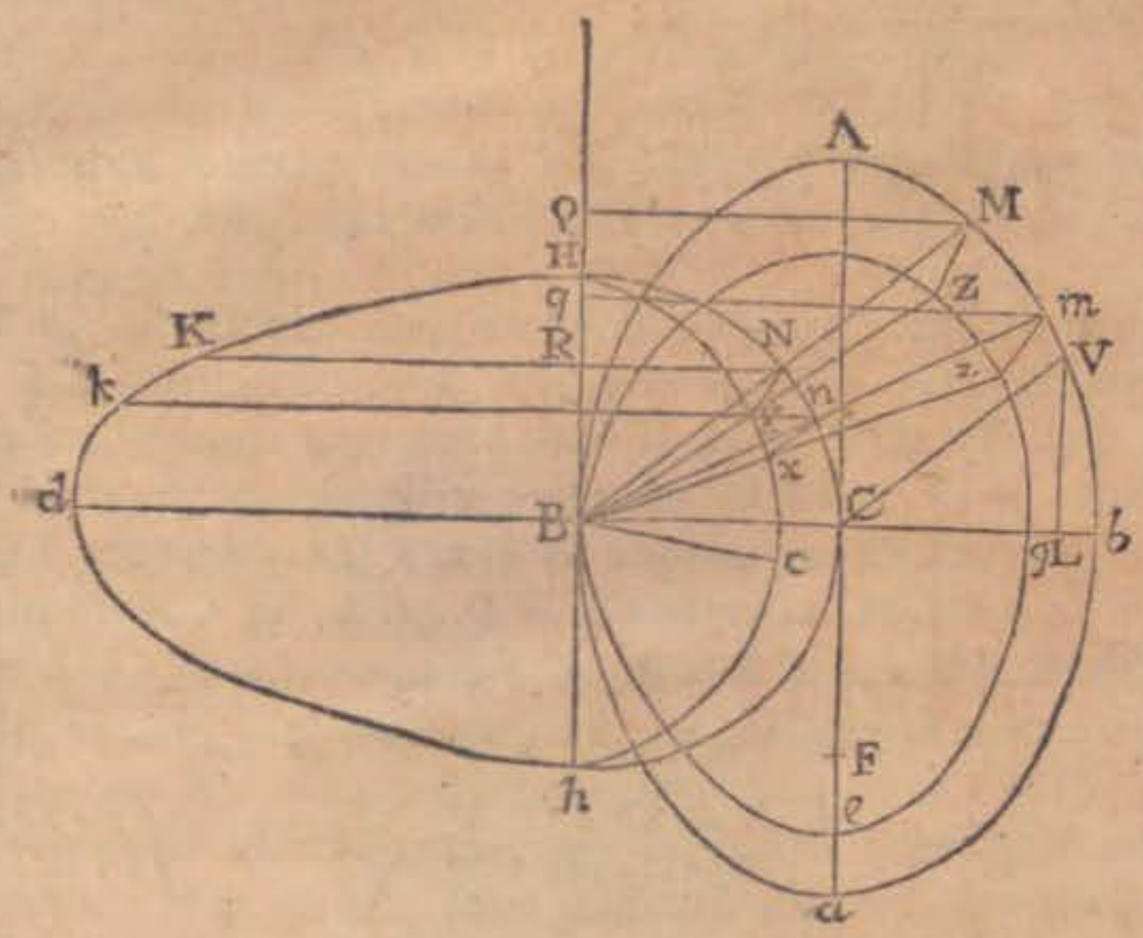
Invenire gravitatem particulæ A in extremitate Axis transversi sitæ versùs Sphæroidem oblongam.

Cæteris manentibus ut in Lemmate præcedenti sit AMa Ellipsis; Aa Axis transversus, C centrum, Bb Axis conjugatus, F focus; educatur recta quævis AM ex A Ellipsi occurrens in M, cui parellela CV occurrat Ellipsi in V; unde ducatur ordinata ad Axem VL, juncta aM rectæ CV occurrat in e, eritque $AM = 2Ce$: cúmque $AQ : CL :: AM (2Ce) : CV :: 2CL : Ca$, erunt $\frac{1}{2}AQ$, CL & CA continuè proportionales. Sit $CA = a$, $CB = b$, $CF = c$, $AR = x$, $CL = l$, cúmque $AR^2 : NR^2 :: CL^2 : VL^2$ erit $x^2 : a^2 - x^2 :: l^2 : \overline{a^2 - l^2} \times \frac{b^2}{a^2}$; adeóque $l^2 = \frac{a^2b^2x^2}{a^4 - c^2x^2}$ & AQ vel $KR = \frac{2a^2b^2x^2}{a^4 - c^2x^2}$, area $ARK = \int \frac{2ab^2x^2dx}{a^4 - c^2x^2} = (\text{si } z : x :: c : a) \int \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{z^2dz}{a^2 - z^2}$. Quare sit a quantitas cujus Logarithmus evanescit, sive systematis Logarithmici modulus, l Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$, eritque $ARK = \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \overline{l - z}$. Unde vis quâ particula A gravitat versùs solidum genitum motu segmenti elliptici $AUMA$ circa Axem Aa, erit ad vim quâ eadem particula gravitat versùs solidum genitum motu segmenti circularis ex circulo supra diametrum Aa descripti eadem recta AM abscissi circa eundem Axem ut $\frac{2a^2b^2}{c^3} \times \overline{l - z}$ ad $\frac{2x^3}{3a}$; & si L sit Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ (vel $\frac{a}{b} \times \overline{a+c}$) erit vis quâ particula A tendit versùs totam Sphæroidem ad vim quâ tendit versùs totam Sphæram ut $3b^2 \times \overline{L - c}$ ad c^3.

SCHOL. Eâdem ratione invenitur gravitas particulæ in Polo sitæ versùs Sphæroidem oblatam, quærendo aream cujus ordinata est $\frac{2b^2a^2}{c^3} \times \frac{z^2}{b^2 + z^2}$. Sit $BAba$ Sphærois oblata motu Ellipsis BAb circa Axem minorem genita, centro B, radio BC describatur Arcus circu-

li *CS*, rectæ *BF* occurrens in *S*, eritque gravitas in hanc Sphæroidem in Polo *B* ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram super diametrum *Bb* descriptam ut $3\,CA^2 \times \overline{CF-CS}$ ad CF^3. Methodus verò quâ gravitas particulæ in Æquatore sitæ versùs Sphæroidem oblongam vel oblatam computatur, est minùs obvia, facilis tamen evadit ope sequentis Lemmatis.

LEMMA VI.



Duo plana *BMbaB*, *BZgeB* se mutuò secent in recta *HBb*. communi figurarum tangente, auferantque ex solido frustum *BMbaBzgeB*; sint semicirculi *HCb*, *Hcb* sectiones horum planorum & superficiei Sphæræ centro *B*, radio *BC* descriptæ. Ex puncto *B* educatur recta quævis *BM* in priori plano figuræ *BMba* occurrens in *M*, & semicirculo *HCb* in *N*; sintque *MQ* & *NR* normales in *Hb*, & ordinata K*R* semper æqualis rectæ *MQ*. His positis, si angulus *CBc* planis hisce contentus minuatur in infinitum, erit gravitas particulæ *B* versùs frustum *BMbaBZgeB* ultimò ad gravitatem ejusdem particulæ versùs frustum Sphæræ semicirculis *HBb*, *Hcb* contentum, ut area *HKdb* genita motu ordinatæ K*R* ad semicirculum *HCb*.

Sit *m* punctum in figurâ *BMB*, ipsi *M* quàm proximùm jungatur *Bm* quæ circulo *HCb* occurrat in *n*; sitque *nr* normalis in *Hb*. Ad hæc sint plana *BMZ*, *Bmz* perpendicularia plano *BMba*, secentque planum alterum *BZge* in rectis *BZ*, *Bz* circumferentiæ *Hcb* occurrentibus in *X* & *x*. His positis, vis quâ particula *B* gravitat in Pyramidem

dem $BMZzm$ erit ad vim quâ eadem particula gravitat in Pyramidem $BNXxn$ ultimò ut recta BM ad BN, vel Mm ad NR per Lem. III. Gravitas autem in hanc Pyramidem eſt ut $\frac{NX \times Nn}{BN^2} \times BN$, vel (quoniam NX eſt ut NR) ut $\frac{NR \times Nn}{BC}$ i. e. ut Rr; atque hæc gravitas agit ſecundùm rectam Bb vi quæ eſt $\frac{Rr \times RN}{BC}$; unde gravitas in Pyramidem $BMZzm$ agit ſecundùm rectam Bb vi quæ eſt ut $\frac{Rr \times MQ}{BC}$, vel $\frac{Rr \times KR}{BC}$. Proinde ultima ratio virium quibus particula B urgerur versùs integra fruſta ſolidi & Sphæræ BC, eſt ratio areæ $HKdb$ (quam generat ordinata KR) ad ſemicirculum HCb.

Cor. Gravitas in fruſtum planis $BMba$, $BZge$ terminatum, eſt ad gravitatem in fruſtum Sphæricum contentum circulis ſuper diametros Bb, Bg deſcriptis, ut area $HKdb$ ad $\frac{8}{3} CB^2$. Sit enim $BMBb$ circulus, eritque MQ ad Bb, ut RN^2 ad BC^2, & $KR = \frac{2RN^2}{CB} = 2BC^2 - \frac{2BR^2}{CB}$, & area $HKdB = \frac{4}{3} CB^2$ adeóque area tota $HKdb = \frac{8}{3} CB^2$.

PROPOSITIO III.

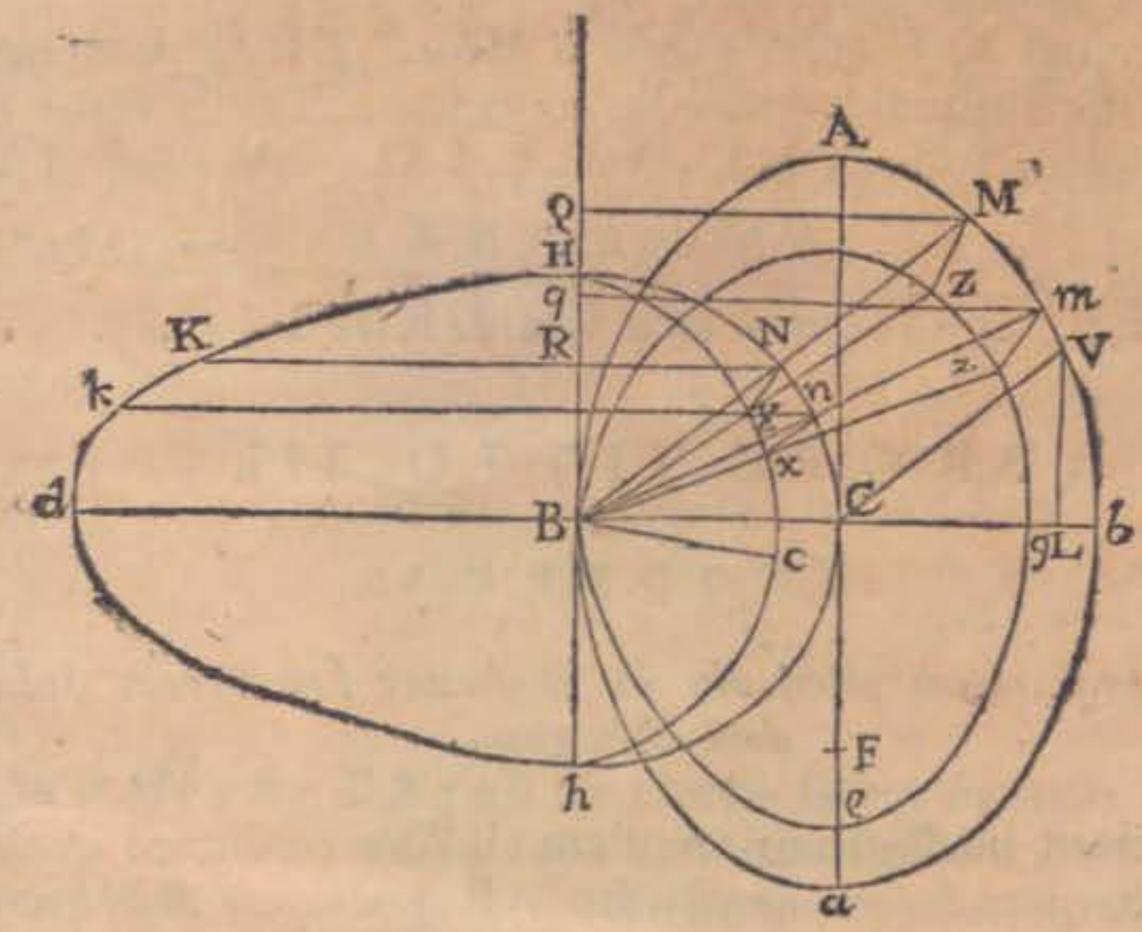
Problema.

Invenire gravitatem particulæ in Æquatore ſitæ versùs Sphæroidem oblongam.

Per Æquatorem intelligimus circulum ab Axe conjugato genitum dum figura circa alterum Axem revolvitur. Repræſentet $BMba$ in figura præcedentis Lemmatis, Sectionem quamvis Sphæroidis Æquatoris plano normalem, eritque hæc figura ſemper ſimilis Sectioni per Polos ſolidi, ſeu figuræ cujus revolutione ſolidum genitum eſſe ſupponimus. Hujus demonſtrationem ut facilem & ab aliis traditam brevitatis gratiâ omitto. Sit igitur CA Sectionis hujus ſemiaxis tranſverſus, CB ſemiaxis conjugatus, F focus; ſit $CB = b$, $CA = a$, $CF = c$, $BR = x$, CV ſemidiameter parallela rectæ BM, VL ordinata ad Axem Bb, $CL = l$. Tunc $CB : CL :: CL : \frac{1}{2} MQ$ ut in Propoſit. præcedenti, & $MQ = \frac{2l^2}{b}$. Verùm $NR^2 : BR^2 :: CL^2 : VL^2$ i. e. $b^2 - x^2 : x^2 :: l^2 : \overline{b^2 - l^2} \times \frac{a^2}{b^2}$, vel $a^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2} : x^2 :: l^2 : b^2 - l^2$, & $l^2 = \frac{a^2 b^2 \times \overline{b^2 - x^2}}{a^2 b^2 - c^2 x^2} = (\text{ſiz} : x :: c : b)$ $\frac{b^2 a^2}{c^2} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2}$, & $KR = MQ = \frac{2l^2}{b} = \frac{2a^2 b}{c^2} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2}$, & area $BdKR$ æqua-

æqualis $\int \frac{2a^2b^2dz}{c^3} \times \frac{c^2-z^2}{a^2-z^2} = \frac{2a^2b^2z}{c^3} - \int \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{b^2dz}{a^2-z^2}$. Sit igitur l (ut in priore Propositione) Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$, & area $B\,d\,K\,R$ erit $\frac{2a^2b^2z}{c^3} - \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{b^2l}{a^2} = \frac{2b^2}{c^3} \times a^2-b^2\,l$.

Supponantur nunc $x=b$, adeóque $z=c$; sitque L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$, ut priùs, eritque area tota $HK\,dh$, motu ordinatæ $K\,R$ genita, æqualis $\frac{4b^2}{c^3} \times a^2-b^2\,L$. Quare gravitas particulæ B



versùs frustum planis ellipticis $B\,M\,b\,a$, $B\,Z\,g\,e$ terminatum erit ultimò ad gravitatem in frustum iisdem planis contentum à Sphæra centro C radio $C\,B$ descripta resectum, ut $a^2\,c-b^2\,L$ ad $\frac{2}{3}\,c^3$ per Cor. Lem. VI. Sit circulus $B\,P\,p\,b$ Æquator Sphæroidis, $B\,P$ & $B\,p$ duæ quævis chordæ hujus circuli; Sectiones Sphæroidis circulo $B\,P\,b$ perpendiculares erunt Ellipses similes Sectioni quæ per Polos solidi transit, quarum $B\,P$ & $B\,p$ erunt Axes transversi; Sectiones autem Sphæræ super diametrum $B\,b$ descriptæ per eadem plana erunt circuli quorum diametri erunt chordæ $B\,P$, $B\,p$. Proinde eadem semper erit ratio gravitatis particulæ B in frustra elliptica & sphærica his planis terminata; eritque gravitas versùs integram Sphæroidem ad gravitatem versùs Sphæram, ut $a^2\,c-b^2\,L$ ad $\frac{2}{3}\,c^3$, a denotante semiaxem transversum figuræ cu-

jus

jus motu gignitur ſolidum, b ſemiaxem conjugatum, c diſtantiam foci à centro, & L, Logarithmum ipſius $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ vel $a \times \frac{a+c}{b}$. q. e. f.

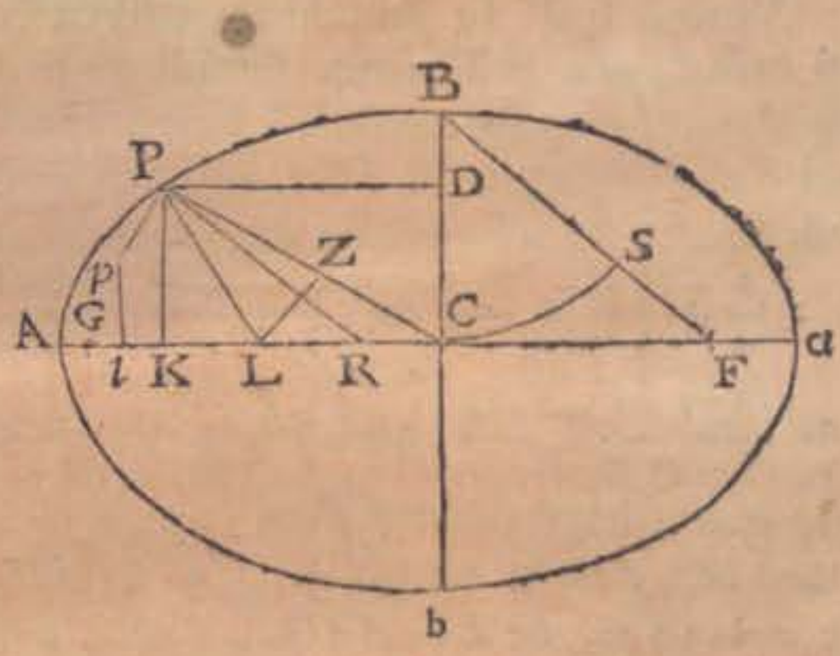
COR. Eadem ſemper eſt ratio gravitatis versùs fruſtum quodvis Sphæroidis & fruſtum Sphæræ eodem plano ad Æquatorem normali abſciſſum ab eâdem parte plani; vel gravitas in portionem à Sphæroide hoc plano abſciſſam eſt ad gravitatem in integram Sphæroidem, ut gravitas in fruſtum Sphæræ eodem Plano ex eâdem parte abſciſſum ad gravitatem in integram Sphæram.

SCHOL. Eâdem ratione ſi $BAba$ ſit Sphærois oblata motu figuræ BAb circa Axem minorem Bb genita, erit gravitas in Sphæroidem hanc in loco A ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C radio CA deſcriptam, ut $CA^2 \times CS - CB^2 \times CF$ ad $\frac{2}{3} CF^3$.

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

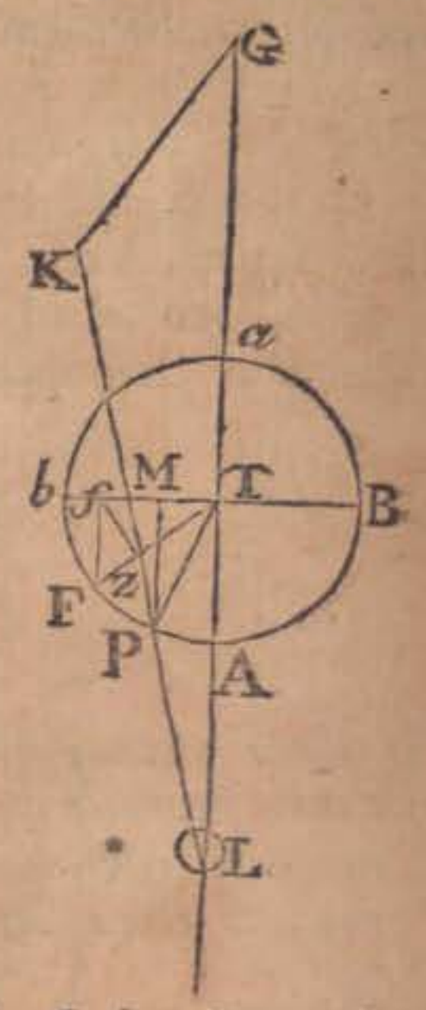
Ex datis viribus quibus Terræ particulæ gravitant versùs Solem & Lunam, invenire figuram quam Terra indueret in Syzygiis vel Quadraturis Solis & Lunæ in hypotheſi quòd Terra conſtet ex Fluido homogeneo, & circa Axem ſuum non moveatur.



Gravitas in loco A versùs Sphæroidem oblongam motu figuræ ABa circa Axem tranſverſam Aa genitam, eſt ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C radio CA deſcriptam, ut $3b^2 \times \overline{L-c}$ ad c^3 per Prop. II. Hæc autem gravitas eſt ad gravitatem in B versùs Sphæram centro C radio CB deſcriptam, ut CA ad CB (per Cor. 1. Lem. III.) quæ eſt ad gravitatem in loco B versùs Sphæroidem ut $\frac{2}{3} C^3$ ad $a^2c - b^2L$ per Prop. IV. Componantur hæ rationes, eritque gravitas in loco A versùs Sphæroidem ad gravitatem in loco B versùs eandem, ut $2ab \times \overline{L-c}$ ad $a^2c - b^2L$. Deſignet A gravitatem in loco A, B gravitatem in loco B, V ſummam virium quibus Luminaria conjuncta vel oppoſita aquam deprimunt in rectis TB,

TB, Tb perpendicularibus rectæ Aa quæ per Terræ & Luminarium centra tranſire ſupponitur, ut in Cor. 4. Prop. I. vel differentiam earumdem virium in Lunæ Quadraturis, ut in Cor. 5. ejuſdem Prop. & per ea quæ demonſtrantur Cor. 1. Prop. I. erit $Aa-Bb = \frac{2a^2V+b^2V}{d}$. Adeóque $Aa-bA \times \frac{a^2c-b^2L}{2ab \times \overline{L-c}} = \frac{2a^2V+b^2V}{d}$, & V:

$A :: 2a^2L+b^2L-3a^2c : \frac{2a}{d} \times \overline{2a^2+b^2} \times \overline{L-c}$. Atque ex datâ ratione V ad A vel ad B, vel $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ (quæ pro G gravitate mediocri in circumferentiâ $AaBb$ haberi poteſt) habebimus æquationem unde ſpecies figuræ & differentia ſemiaxium ſeu aſcenſus aquæ computari poſſunt.



Eſt autem L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$, adeóque æqualis $c+\frac{c^3}{3a^2}+\frac{c^5}{5a^4}+\frac{c^7}{7a^6}$, &c. per Methodos notiſſimas, adeóque $L-c=\frac{c^3}{3a^2}+\frac{c^5}{5a^4}+\frac{c^7}{7a^6}$, &c. Unde eſt V ad A, ut $\frac{2c^2}{15a^2}+\frac{4c^4}{35a^4}+\frac{6c^6}{63a^6}$, &c. ad $\frac{\overline{L-c} \times ad}{c^3 \times 2a^2+b^2}$, & V ad $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ vel G, ut $\frac{2c^2}{15a^2}+\frac{4c^4}{35a^4}+\frac{6c^6}{63a^6}$, &c. ad $\frac{2a^2+b^2}{2bdc^3} \times \overline{2abL-b^2}\,\overline{L+a^2c-2abc}$.

Verùm ſi V ſit admodum exigua reſpectu gravitatis G (ut in præſenti caſu) erit differentia ſemidiametrorum CA, CB ad ſemidiametrum mediocrem quàm proximè ut $15V$ ad $8G$, vel paulò accuratiùs ut $15V$ ad $8G-57\frac{5}{14} \times V$. Sit enim ut in Cor. 2. Prop. I. $a=d+x$, $b=d-x$, adeóque $c^2=a^2-b^2=4dx$, eritque $A:B::2ab \times L-c : a^2c^2-b^2L :: \frac{b}{3}+\frac{bc^2}{5a^2}+\frac{bc^4}{7a^4}$ &c. $:\frac{a}{3}+\frac{ac^2}{15a^2}+\frac{ac^4}{35a^4}$, &c. i. e. ut $\frac{d-x}{3}+\frac{4dx \times \overline{d-x}}{5 \times \overline{d+x^2}}+\frac{16d^2x^2 \times \overline{d-x}}{7 \times \overline{d+x^4}}$, &c. ad $\frac{d+x}{3}+\frac{4dx \times \overline{d+x}}{15 \times \overline{d+x^2}}+\frac{16d^2x^2 \times \overline{d+x}}{35 \times \overline{d+x^4}}$, &c. adeóque (neglectis terminis, quos plures dimenſiones ipſius x ingrediuntur) ut $\frac{1}{3}d+\frac{17}{15}x : \frac{1}{3}d+\frac{19}{15}x$. Proinde erit $B-A$ ad $B+A$ $(=2G::x: 5d+18x$, & $B-A:G::2x:5d+18x$. Sed per Cor. 2. Prop. I. eſt x ad d ut $B-A+3V$ ad $B+A-2V$, adeóque ſubſtituendo valores quantitatum $B-A$ & $B+A$, erit $x:d:: \frac{2Gx}{5d+18x}+3V : 2G-2V$. Unde $2Gx-2Va=\frac{2Gdx+15Vd+54Vx}{5d+18x}$, & $10Gdx-10dVx+36Gxx-36Vxx=2Gdx+15Vd+54Vx$, & terminis omiſſis ubi reperi-

reperitur $x\,x$, erit $8\,G\,dx - 64\,V\,x = 15\,V\,d$ atque $x : d :: 15\,V : 8\,G - 64\,V$, & $2x$ ad d ut $15\,V$ ad $4\,G - 32\,V$. Aſcenſus igitur totius aquæ i. e. differentia ſemidiametrorum CA, CB (vel $2x$) eſt ad ſemidiametrum mediocrem, ut $15\,V$ ad $8\,G$ quàm proximè; facile autem erit rationem hanc exhibere magis accuratè, quoties uſus id poſtulabit, aſſumendo plures terminos valoris Logarithmi L, & calculum proſequendo; prodit autem hoc pacto x ad d magis accuratè, ut $15\,V$ ad $8\,G - 57\frac{5}{14} \times V$.

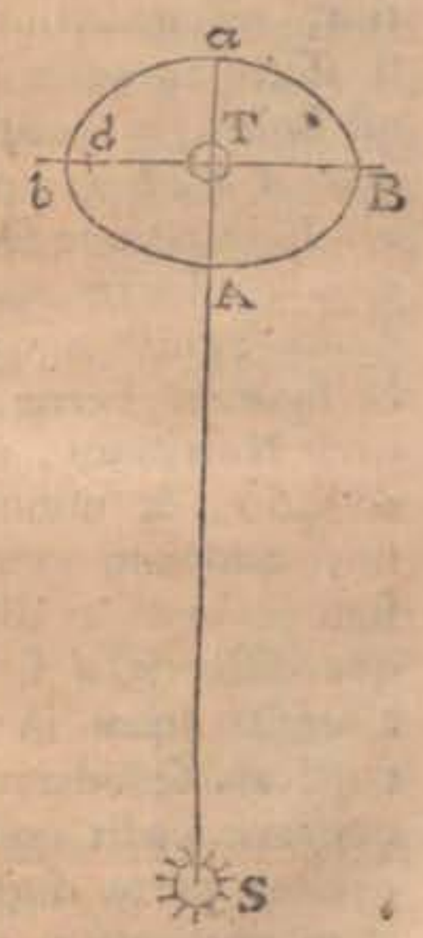
Cor. $B - A$ eſt æqualis $\frac{3V}{4}$; & $B - G = \frac{3V}{8}$ quàm proximè. Quippe $B - A : G :: 2x : 5d :: 30\,V : 40\,G$, adeóque $B - A : V :: 3 : 4$.

Schol. Eâdem ratione patebit gravitatem versùs Sphæroidem oblatam in Polo B fore ad gravitatem in Æquatore in loco quovis A, ut $2\,CB \times CA \times \overline{CF - CS}$ ad $CA^2 \times CS - CB^2 \times CF$.

PROPOSITIO V.

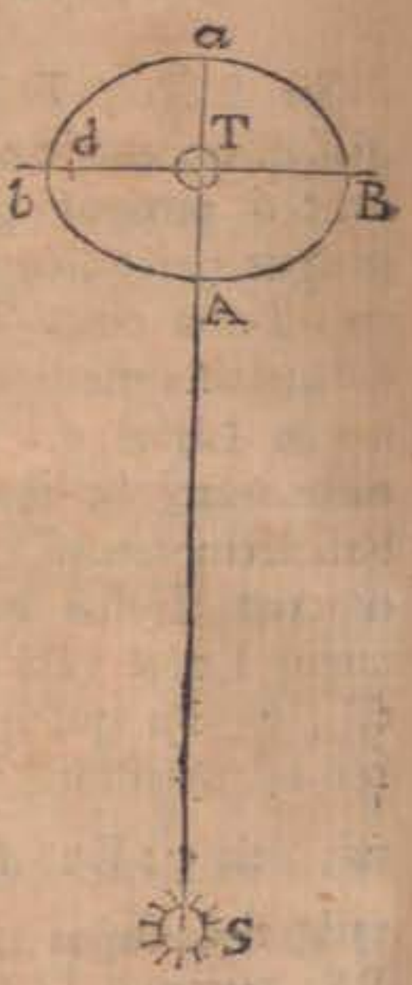
PROBLEMA.

Invenire vim V *quæ oritur ex inæquali gravitate partium Terræ versùs Solem, & definire aſcenſum aquæ hinc oriundum.*



Sit S Sol, T Terra, $AB\,ab$ orbita lunaris neglectâ excentricitate, B & b Quadraturæ. Deſignet S tempus periodicum Terræ circa Solem, L tempus periodicum Lunæ circa Terram, l tempus quo Luna circa Terram revolveretur in circulo ad diſtantiam mediocrem $T\,d$ $(= \frac{1}{2}\,CA + \frac{1}{2}\,CB)$ ſi motus Lunæ gravitate ſuâ versùs Solem nullâtenus turbaretur, & ſolâ gravitate versùs Terram in orbitâ retineretur. Deſignet porrò K gravitatem mediocrem Lunæ vel Terræ versùs Solem, g gravitatem Lunæ versùs Terram in mediocri ſuâ diſtantiâ, v vim quam actio Solis huic gravitati adjiceret in Quadraturis ad eandem diſtantiam. His poſitis, erit $v : K :: dT : ST$; atque $K : g :: \frac{ST}{SS} : \frac{dT}{ll}$ ex vulgari doctrina virium centripetarum; unde $V : g :: ll : SS$: cúmque ll ſit paulò minùs quàm LL, quoniam Luna nonnihil diſtrahitur à Terrâ gravitate ſuâ in Solem, patet vim v eſſe ad g in paulò minori ratione quàm LL ad SS. Hanc autem rationem vis v ad g nemo hactenus (quantùm novi)

novi) accuratè definivit; ea tamen propior videtur esse rationi LL ad $SS+2LL$ vel saltem rationi LL ad $SS+\frac{1}{2}LL$ quàm rationi LL ad SS. Argumenta verò quibus id colligitur hîc omittenda censeo, moniti Academiæ illustrissimæ memor, cùm in hâc disquisitione parvi sit momenti quænam harum rationum adhibeatur. Supponamus igitur cum Newtono $v:g::LL:SS::$ (per computos Astronomicos periodorum Solis ac Lunæ) 1:178,725. Vis V quæ in Terræ superficie vi v respondet, est ad v, ut Terræ semidiameter mediocris ad distantiam Lunæ mediocrem vel ut 1 ad $60\frac{1}{2}$. Vis autem g agit secundùm rectas, quæ in centro gravitatis Terræ ac Lunæ concurrunt, cujus ratione habitâ ex incremento gravitatis in descensu ad superficiem Terræ patebit vim V esse ad G (quâ gravitas mediocris in superficie Terræ designatur ut suprà) ut 1 ad 38604600. Unde cùm per Cor. 2. Prop. III. sit $x:d::15V:8G-57\frac{5}{14}V$ erit in hoc casu $x:d::1:20589116$. Cúmque semidiameter Terræ mediocris sit pedum 19615800; hinc sequitur totum aquæ ascensum ex vi Solis oriundum fore pedis unius Parisiensis cum $\frac{90545}{100000}$ partibus pedis, i. e. pedis unius cum digitis decem, & $\frac{8654}{10000}$ partibus digiti; quem suo more breviter deprehendit Newtonus esse pedis unius digitorum undecim cum $\frac{1}{30}$ parte digiti, quæ altitudo à nostrâ differt tantùm sexta parte unius digiti.



Verùm in hoc calculo Terra supponitur esse Sphærica, nisi quatenus à vi Solis Mare elevatur. Sed si ascensum aquæ maximum quæramus, ponendum est Solem in circulo æquinoctiali versari, figuramque $ABab$ in hoc plano constitui, & augenda est vis V in ratione semidiametri mediocris ad semidiametrum Terræ maximum, & minuenda est vis G donec evadat æqualis gravitati sub Æquatore: i. e. Si figuram Terræ eam esse supponamus quam definivit Newtonus, augenda erit vis V in ratione 459 ad 460, & minuenda est G in eadem ferè ratione, quoniam vires gravitatis in superficie Terræ sunt inversè ut distantiæ locorum à centro; cúmque distantia d sit augenda in eâdem ratione, erit ascensus aquæ in Æquatore augendus in ratione triplicata semidiametri mediocris ad maximam, adeóque erit pedis unius digitorum undecim cum 60ma circiter parte digiti. Terra autem altior est sub Æquatore quàm prodiit calculo Newtoniano ex hypothesi quòd Terra sit uniformiter densa à superficie usque ad centrum; ut colligitur ex variis pendulorum Observationibus, & præsertim ex mensurâ gradus meridia-

meridiani quam viri clariſſimi nuper definiverunt accuratiſſimè ſub Circulo Polari.

SCHOL. 1. Si gravitatem poſuiſſemus æqualem in *A* & *B*, & ejuſdem vis in totâ circumferentiâ *AB ab*, prodiiſſet *x* æqualis tantùm $\frac{3Vd}{2G}$, & aſcenſus aquæ (ſeu $2x$) pedis unius digitorum ſex cum tertiâ circiter parte digiti. Quippe in hâc hypotheſi prodiiſſet *CA* ad *CB*, ut $G+V$ ad $G-2V$, adeóque *x* ad *d*, ut $\frac{3V}{2}$ ad *G* quàm proximè. Atque hinc apparet utilitas præcedentium Propoſitionum, cùm aſcenſus aquæ ſecundùm hanc minùs accuratam hypotheſim minor ſit aſcenſu quem in hâc Propoſitione definivimus, differentiâ $\frac{3Vd}{4G}$, quartâ ſcilicet parte aſcenſus illius.

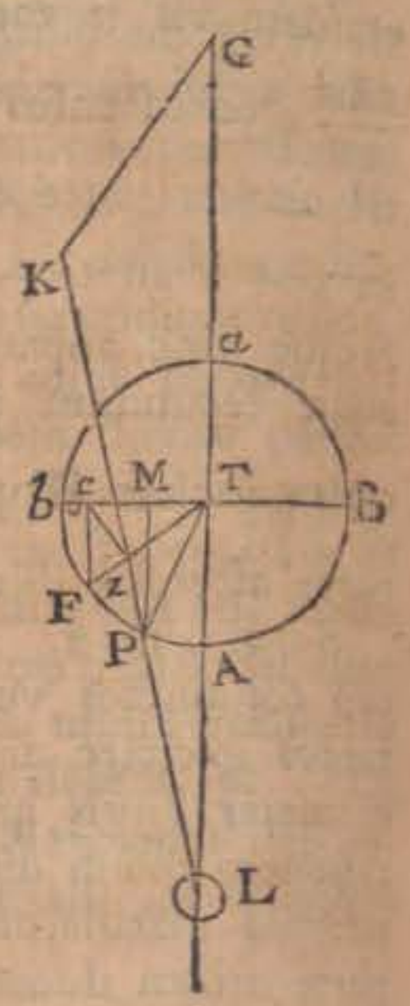
SCHOL. 2. Ex hac doctrina patet Satellites Jovis Soli & ſibi mutuò conjunctos vel oppoſitos in Oceano Joviali (ſi ullus ſit) ingentes motus excitare debere, modò non ſint Lunâ noſtrâ multò minores; cùm diameter Jovis ad diſtantiam cujuſque Satellitis multò majorem habeat rationem quàm diameter Terræ ad diſtantiam Lunæ. Veriſimile eſt mutationes macularum Jovis ab Aſtronomis obſervatas hinc aliquâ ſaltem ex parte ortum ducere; quòd ſi hæ mutationes eam analogiam ſervare deprehendantur cum aſpectibus Satellitum, quam hæc doctrina poſtulat, indicio erit veram earum cauſam hinc eſſe petendam. Ex hâc doctrinâ licet quoque conjicere non abſque utilitate, motus Satellitum circa Axes ſuos & circa primarios ita compoſitos eſſe ut idem Hemiſpherium ſuis primariis ſemper oſtendant, ſecundùm ſententiam celeb. Aſtronomorum. Veriſimile enim eſt motus Maris nimios in Satellitibus cieri deberi, ſi cum aliâ quâvis velocitate circa Axes ſuos revolverentur; aquis autem in his agitandis (ſi quæ ſint) ſufficere poſſunt æſtus ex variis Satellitum diſtantiis à ſuis primariis oriundis.

SECTIO IV.

De motu Maris quâtenus ex motu Telluris diurno aliiſve de cauſis immutatur.

Oſtendimus in Sectione præcedenti Terram fluidam versùs Solem vel Lunam inæqualiter gravem Sphæroidis oblongæ figuram induere debere; cujus Axis tranſverſus per centrum Luminaris tranſiret, ſi Terra non revolveretur circa Axem ſuum motu diurno; & aſcenſum aquæ in hypotheſi Terræ quieſcentis ex vi Solis oriundum definivimus. Verùm

ob motum Terræ diversa est ratio æstus Maris. Hinc enim aqua nunquam fit in æquilibrio, sed perpetuis motibus agitatur. Supponamus Solem & Lunam conjunctos vel oppositos versari in plano Æquatoris $AB\alpha b$; sit $A\alpha$ diameter quæ per illorum centra transit, Bb huïc perpendicularis. Dum aquæ moles revolvitur motu diurno, augentur vires quibus ascensus ejus promovetur in transitu aquæ à locis b & b ad A & α, & in his locis evadunt maximæ; ascensus tamen aquæ prorogari videtur, postquàm hæ vires minui cœperunt usque ferè ad loca ubi hæ vires æquipollent viribus quibus deprimitur infra altitudinem quam naturaliter obtineret, si nullâ vi extraneâ motus aquæ perturbaretur; adeò ut motus aquæ considerari possit tanquam libratorius, & tantundem ferè ascendat viribus quibus elevatur decrescentibus, quàm iisdem crescentibus. Cúmque vis centrifuga ex motu diurno orta sit multò minor gravitate, situs loci F ubi prædictæ vires æquipollent sub Æquatore, dum aqua transit à loco b ad locum A, sic ferè definiri posse videtur. Ex puncto F sit Ff normalis in Bb, & fz in TF. Designet V summam virium quibus Sol & Luna aquam deprimunt in rectis TB, Tb ut suprà, & vis quâ aqua tollitur in F erit $\frac{3V \times Fz}{d} = \frac{3V \times Ff^2}{d \times TF}$.



Supponamus F esse locum aquæ ubi altitudo aquæ sit minima, ut TF haberi possit pro semiaxe conjugato figuræ $AB\alpha b$, dicatur graviras in extremitate hujus Axis B, & gravitas mediocris in hac figura G, ut suprà; & vis quâ aqua deprimitur infra situm naturalem in loco F erit $B - A + \frac{V \times TF}{d}$. Ponantur hæ vires æquales, cúmque TF sit quàm proximè æqualis distantiæ d, sitque $B - G = \frac{3V}{8}$ per Cor. Prop. IV. erit $\frac{3V}{8} + V = \frac{3V \times Ff^2}{d^2}$, seu $TF^2 : Ff^2 :: 3 : 1 + \frac{3}{8} :: 24 : 11$. unde angulus FTb erit graduum 42 minutorum 37, inciderque ferè in punctum medium inter b & A. Hunc verò calculum ut accuratum non proponimus.

PROPO-

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

Motum Maris ex vi Solis oriundum, & motum lunarem in orbitâ quàm proximè circulari inter ſe comparare, & hinc aſcenſum aquæ æſtimare.

Aſtronomis notiſſimum eſt Lunæ diſtantiam mediocrem in Syzygiis minorem eſſe diſtantiâ mediocri in Quadraturis. Clariſ. Halleyus ex Obſervationibus colligit diſtantiam priorem eſſe ad poſteriorem ut $44\frac{1}{2}$ ad $45\frac{1}{2}$. Newtonus Methodo quâdam ſuâ harum rationem invenit eſſe eam 69 ad 70: Princip. Prop. 28. Lib. 3. Clariſſimus Auctor Tractatûs de Motibus Lunæ ſecundùm Theoriam gravitatis, in hac doctrina optimè verſatus, colligit eam eſſe numeri 69 ad 70, ratione non habitâ decrementi gravitatis dum Luna tranſit à Syzygiis ad Quadraturas. Ut motus Maris ex vi Solis oriundus (qualis ſuprà definitur Prop. V.) cum motu Lunæ conferatur, ſupponamus orbem Lunarem aquâ compleri & quæramus aſcenſum hujus aquæ per Prop. IV. & V. In Prop. V. erat vis v ad g, ut 1 ad 178,725; quare in hoc caſu foret $x : d :: 15v : 8g - 57\frac{5}{14} \times v :: 1 : 91{,}496$: adeóque ſemiaxis figuræ ad ſemiaxem conjugatum (vel $d + x$ ad $d - x$) ut 46.248 ad 45,248; quæ ferè congruit cum ratione diſtantiarum Lunæ in Quadraturis & Syzygiis quam Halleyus ex Obſervationibus deducit; adeò ut figura orbitæ Lunaris ſpecie vix diverſa ſit ab ea quam Globus aqueus quieſcens Lunæ orbitam complens ex vi Solis indueret; forent tamen poſitione diverſæ, ſiquidem illius Axis minor Solem reſpiciat, hujus Axis major versùs Solem dirigeretur. Ratio numeri 59 ad 60 (quarum ſemidifferentia eſt ad ſemiſummam ut $3v$ ad g quàm proximè) probè congruit cum ratione ſemiaxium figuræ quam aqua ex vi Solis indueret, ſi vis gravitatis eadem eſſet per totam circumferentiam $ABab$, ut oſtendimus in Schol. 1. Prop. V. Aſcenſus autem aquæ Prop. V. definitus congruit cum eâ quam ex Obſervationibus colligit Halleyus; unde ſuſpicari licet differentiam diametrorum orbitæ lunaris paulò fieri majorem ex decremento gravitatis Lunæ in Terram dum tranſit à Syzygiis ad Quadraturas, ſimili ferè ratione quâ aſcenſus aquæ prodiit in hâc propoſitione major propter exceſſum gravitatis aquæ in Terram in loco B ſupra ipſius gravitatem in loco A aliiſque à centro diſtantiis. Verùm quicquid ſit judicandum de ratione diametrorum orbitæ Lunaris, ex his colligere licet aſcenſum aquæ Prop. V. definitum majorem vix evadere propter motum Terræ diurnum circa Axem ſuum. Supponamus enim hunc mo-

cum augeri donec vis centrifuga ex hoc motu oriunda fiat æqualis gravitati, & particulæ Maris revolvantur ad morem Satellitum in orbitis quàm proximè circularibus Terram contingentibus. Hæ orbitæ erunt ellipticæ, quarum Axes minores productæ transibunt per Solem. Et si semiaxium differentia sit ad semidiametrum mediocrem ut $3V$ ad G (secundùm ea quæ de motibus lunaribus tradit vir acutissimus) erit minor ascensu aquæ suprà definito Prop. V. in qua invenimus $2x$ esse ad d ut $15V$ ad $4G$. Quòd si quæramus horum semiaxium differentiam ex figura orbitæ lunaris quâtenus ex Observationibus innotescit secundùm clariss. Halleyum, parum admodum superabit ascensum aquæ suprà definitum. Nec mirum si non accuratè convèniant, cùm gravitas Lunæ versùs Terram sequatur rationem inversam duplicatam distantiarum, gravitas aquæ major quoque sit in majori distantiâ, sed non in eâdem ratione. Cùm hæc Phænomena sint analoga, & sibi mutuò aliquam lucem afferant, hæc de iis inter se collatis memorare videbatur operæ prætium. Supponimus tamen hîc aquæ motum in eodem circulo Æquatori parallelo perseverare, vel latitudinem eandem in singulis revolutionibus servare, & variationem ascensus aquæ quæ ex figurâ Sphæroidicâ Terræ provenit non consideramus.

PROPOSITIO VII.

Motus aquæ turbatur ex inæquali velocitate, quâ corpora circa Axem Terræ motu diurno deferuntur.

Quippe si aquæ moles feratur æstu, vel aliâ de causâ, ad majorem vel minorem ab Æquatore distantiam, incidet in aquam diversâ velocitate circa Axem Terræ latam; unde illius motum turbari necesse est. Differentia velocitatum quibus corpora, exempli gratiâ, in loco 50gr. ab Æquatore diffito, & in loco 36 tantùm milliaria magis versùs Septentrionem vergente, major est quàm quâ 7 milliaria singulis horis describeretur, ut facili calculo patebit. Cúmque motus Maris tantus nonnunquam sit ut æstus 6 milliaria, vel etiam plura singulis horis describat, effectus qui hinc oriri possunt non sunt contemnendi.

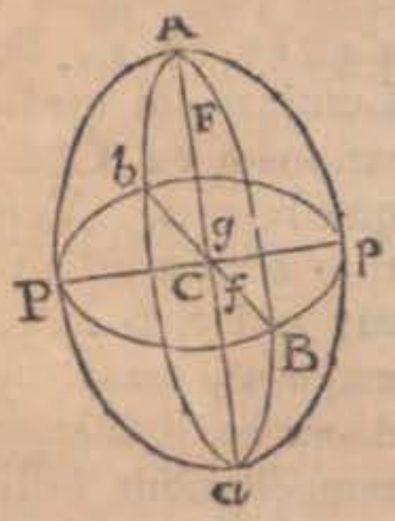
Si aqua deferatur à Meridie versùs Septentrionem motu generali æstus, vel aliâ quâvis de causâ, cursus aquæ hinc paulatim deflectet versùs Orientem, quoniam aqua priùs ferebatur motu diurno versùs hanc plagam majori velocitate quàm est ea quæ convenit loco magis versùs Boream sito. Contrà si aqua à Septentrione versùs Meridiem deferatur, cursus aquæ ob similem causam versùs Occidentem deflectet. Atque hinc varia motus Maris Phænomena oriri suspicamur. Hinc forsitan, exempli gratiâ, Montes glaciales quæ ex Oceano Boreali digrediuntur, frequen-

frequentiùs conſpiciuntur in Occidentali quàm Orientali Oceani Atlantici plagâ. Quin & majores æſtus hinc cieri poſſe in pluribus locis qnàm qui ex calculo virium Solis & Lunæ prodeunt, habitâ ratione latitudinis, veriſimile eſt. Eandem cauſam ad ventos præſertim vehementiores propagandos, & nonnunquam augendos vel minuendos, aliaque tum Aëris tum Maris Phænomena producenda conducere ſuſpicamur. Sed hæc nunc ſigillatim proſequi non licet.

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

Invenire variationem aſcenſus aquæ in Prop. V. definiti, quæ ex figurâ Terræ Sphæroidicâ provenit.



Sint $PApa$, $PBpb$ Sectiones Terræ per Polos P & p, quarum prior tranſeat per loca A & a, ubi altitudo aquæ in Æquatore viribus Solis & Lunæ fit maxima, poſterior per loca B & b ubi fit minima; ſint hæ Sectiones ellipticæ, F focus figuræ $PApa$, f focus Sectionis $PBpb$, & g focus Sectionis $ABab$. Et ſi omnes Sectiones ſolidi per rectam Aa tranſeuntes ſupponantur ellipticæ calculo inito ope Lemmatis V. invenimus gravitatem in loco A versùs ſolidum hoc fore ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C ſuper diametrum Aa deſcriptam ut $1 + \frac{3CF^2 + 3Cg^2}{10CA^2} + \frac{9CF^4 + 6CF^2 \times Cg^2 + 9Cg^4}{56CA^4}$, &c. ad $\frac{CA^2}{CB \times CP}$; & ſi gravitas in loco B, definiatur ſimili calculo, ope ejuſdem Lemmatis & Schol. Prop. II. conſtabit ratio gravitatis in A ad gravitatem in B, & per Cor. 2. Prop. I. innoteſcet ſemidiametrorum CA & CB differentia ſive aſcenſus aquæ. Verùm calculum utpotè prolixum omittimus, cùm ſit exigui uſus. Hâc Propoſitione oſtendere tantùm volui Geometriam nobis non defuturam in Problemate celeberrimo accuratiſſimè tractando. Verùm reſtat præcipuus in hac diſquiſitione nodus, de quo pauca ſunt addenda.

PROPOSITIO IX.

Problema

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Hæc ex motibus cœleſtibus colligi nequit, ſi verò conferetur aſcenſus aquæ in Syzygiis Luminarium, qui ex ſummâ virium Solis & Lunæ generatur, cum ejuſdem aſcenſu in Quadraturis, qui ex earundem differentia oritur, ex vi Solis per Prop. V. datâ, invenietur vis Lunæ. Hanc quærit Newtonus ex Obſervationibus à Sam. Sturmio ante oſtium Fluvii Avonæ inſtitutis, ex quibus colligit aſcenſum aquæ in Syzygiis æquinoctialibus eſſe ad aſcenſum aquæ in Quadraturis iiſdem, ut 9. ad 5. Dein poſt varios calculos concludit vim Lunæ eſſe ad vim Solis, ut 4.4815 ad 1, & aſcenſum aquæ ex utrâque vi oriundum in diſtantiis Luminarium mediocribus fore pedum 50 cum ſemiſſe. Harum virium rationem ex Obſervationibus à celeb. Caſſini in loco ſuprà citato allatis quæſivimus. Verùm cùm præter generales cauſas jam memoratas quarum aliquæ ad calculum vix revocari poſſunt, aliæ variæ ex locorum ſitu, vadorum indole, ventorum vi & plagâ pendentes æſtus Maris nunc majores, nunc minores reddant, non eſt mirum ſi vires Lunæ quæ prodeunt ex Obſervationibus in locis diverſis, vel in eodem loco diverſis tempeſtatibus inſtitutis non planè conſentiant. Computis igitur quos de motu Maris ex vi Lunæ oriundo inſtituimus recenſendis impræſentiarum non immorabimur. Poſtquam verò Obſervationes aliquæ circa æſtus Maris ad littora Americæ & Indiæ Orientalis quas expectamus, ad manus pervenerint, de hiſce forſan certiùs judicemus. Obſervamus tantùm æſtus in minori ratione decreſcere videri quàm duplicatâ Sinus complementi declinationis; quin & reliquæ æſtus leges generales ex motu aquæ reciproco perturbantur. Sed veremur ne tædium pariat, ſi repetamus quæ ab aliis jamdudum tradita ſunt. Æſtus anomali à locorum & Marium ſitu plerumque pendere videntur. Obſervandum tamen ex Theoriâ gravitatis ſequi, unicum tantùm æſtum ſpatio 24 horarum contingere nonnunquam debere in locis ultra 62 gradum latitudinis, ſi reciprocatio motus aquæ id permitteret. *

Quòd ſi analyſis diverſarum cauſarum quæ ad æſtus Phænomena producenda conferunt accurata inſtitui poſſet, id certè ad uberiorem ſcientiam

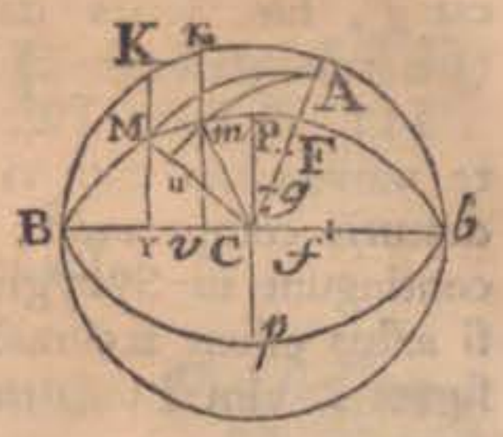
* Sit enim Lunæ declinatio 28 gr. & loci ultra 62 gr. versùs eandem plagam, & manifeſtum eſt. Lunam ſemel tantùm 24 horarum ſpatio loci hujus horizontem attingere.

tiam virium & motuum ſyſtematis Mundi non parum conferret. Hinc enim ſitus centri gravitatis Lunæ & Terræ, & quæ ad æquinoctiorum præceſſionem aliaque Phænomena naturæ inſignia ſpectant, certiùs innoteſcerent. Quas ob cauſas aſcenſus aquæ quantitatem, quouſque ex motibus cœleſtibus eam aſſequi licet, accuratè definiendam & demonſtrandam, poſitis legibus gravitatis quæ ex Obſervationibus deducuntur (de cujus causâ hîc non eſt differendi locus) putavimus. Cogitata autem hæc qualiacunque judicio Illuſtriſſimæ ACADEMIÆ REGIÆ, quam omni honore & reverentiâ ſemper proſequimur, lubenter ſubmittimus.

ANNOTANDA IN DISSERTATIONEM de Causa Physica Fluxus & Refluxus Maris, cui præfigitur Sententia, Opinionum commenta delet dies, Naturæ judicia confirmat.

I. IN Prop. IV. invenitur $x = \frac{15Vd}{8G}$ quàm proximè, qui valor ipsius x est satis accuratus, nec ullâ correctione indiget præsertim in calculo Prop. V. Est autem magis accuratè x ad d ut $15V$ ad $8G - \frac{88}{7}V$ non ut $15V$ ad $8G - \frac{803}{14}V$ sive $8G - 57\frac{5}{14}V$ ut lapsu quodam calami aut calculi scripseram ad finem Prop. IV. qui quidem est exigui momenti, & argumenta Propositionum sequentium non immutat. Calculi autem summam hîc adjiciam. Inveneram in Prop. IV. esse B ad A, ut $\frac{1}{3} + \frac{c^2}{15a^2} + \frac{c^4}{35a^4}$, &c. ad $\frac{b}{a} \times \frac{1}{3} + \frac{c^2}{3a^2} + \frac{c^4}{7a^4}$, &c. adeóque (substituendo loco $\frac{b}{a}$ ipsius valorem $\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a}}$, sive $1 - \frac{c^2}{2a^2} - \frac{c^4}{8a^4}$; &c. ut $\frac{1}{3} + \frac{c^2}{15a^2} + \frac{c^4}{35a^4}$, &c. ad $\frac{1}{3} + \frac{c^3}{30a^2} + \frac{c^4}{840a^4}$; &c. unde $B - A$ est ad G (seu $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$) ut $\frac{c^2}{10a^2} + \frac{23c^4}{24 \times 35a^4}$, &c. ad $1 + \frac{3c^2}{20a^2} + \frac{25c^4}{8 \times 70a^4}$, &c. Est autem $c^2 = 4dx$, & $a^2 = d^2 + 2dx + x^2$ ex iis quæ in Propositione supponuntur; unde $\frac{c^2}{4a^2} = \frac{x}{d} - \frac{2x^2}{d^2} + \frac{3x^3}{d^3}$, &c. & substituendo loco $\frac{c^2}{a^2}$ ejus valorem $\frac{4x}{d} - \frac{8x^2}{d^2}$, &c. prodibit $B - A$ ad G, ut $14dx + 18x^2$ ad $35d^2 + 21dx + 17x^2$ quàm proximè. Cúmque sit $\overline{B-A} \times d + 3Vd = 2Gx - 2Vx - \frac{3Vx^2}{d}$ per Corol. Prop. I. substituatur valor ipsius $\overline{B-A}$, & negligantur termini quos ingreditur Vx^2 (quoniam V est admodum parva respectu G) eritque $3 \times 35Vd^2 = 56Gdx - 133Vdx + 24Gx^2$ & $x = \frac{3 \times 35Vd^2}{56dG - 133Vd + 24Gx}$, quòd si in denominatore pro x scribatur valor vero propinquus $\frac{15Vd}{8G}$ prodibit valor magis accuratus $\frac{3 \times 35Vd}{56G - 88V}$, eritque $x : d :: 15V : 8G - \frac{88}{7}V$ quàm proximè. Diversâ paulò ratione prodit $x = \frac{15Vd}{8G} + \frac{165VVd}{56GG}$, &c. quam seriem producere non est difficile, si operæ pretium videbitur. In Prop. VI. quæsivimus figuram aquæ

aquæ orbem lunarem complentis ex actione Solis oriundam. Hâc correctione adhibitâ, & cæteris retentis ut priùs, Axis minor figuræ ad majorem ut 46.742 ad 47.742, quæ parùm differt à ratione quàm in eâ Propositione exhibuimus.



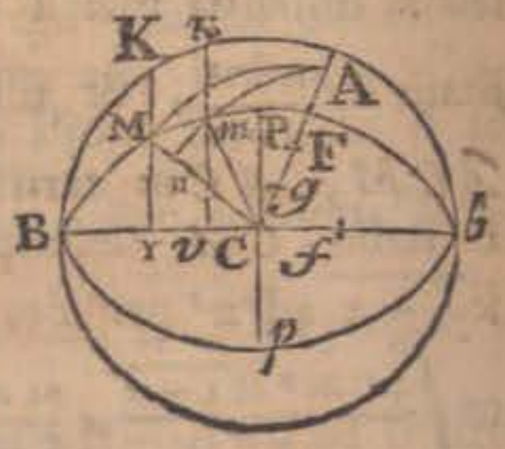
II. Series quam exhibuimus in Prop. VIII. deducitur per Lem. V. & Prop. II. Sit $CA=a$. $CB=b$. $CP=e$. $CF=c$. $Cf=f$. $Cg=g$. Sint ACM, ACm Sectiones quævis solidi per rectam AC (quæ normalis est plano $BPbp$) transeuntes. Arcus mu centro C radio Cm descriptus, occurrat rectæ CM in u, & occurrant ordinatæ MV, mv Axi Bb in V & v, & circulo BKb in K & k. Sit $CA^2-CM^2=x^2$, seu x distantia foci à centro in figura ACM, sit L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, & ultima ratio gravitatis particulæ A in frustum planis ACM, ACm terminatum ad gravitatem in frustum Sphæræ centro C radio CA descriptæ iisdem planis contentum, erit ea $\frac{3}{4}CM^2\times\overline{L-x}$ ad x^3 per Prop. II. Gravitas igitur particulæ A in solidum erit ut $\int\frac{\frac{3}{4}CM^2\times\overline{L-x}}{x^3}\times\frac{mu}{CM}=\int\frac{\frac{3}{4}CM\times mu}{x^3}\times\overline{L-x}=\int\frac{\frac{3}{4}CK\times Kk\times CP}{CK\times x^3}\times\overline{L-x}=\int\frac{\frac{3}{4}e\times Kk}{x^3}\times\overline{L-x}$. Sit $CV=u$. Eritque $u^2+\overline{b^2-u^2}\times\frac{c^2}{b^2}=CM^2=a^2-x^2$. Unde $c^2+\frac{b^2-c^2}{b^2}u^2=a^2-x^2$, $u^2=\overline{a^2-c^2-x^2}\times\frac{b^2}{b^2-c^2}=\overline{c^2-x^2}\times\frac{b^2}{f^2}$. Adeóque $KV^2=b^2-u^2=b^2-\frac{b^2}{f^2}\times\overline{c^2-x^2}=b^2\times\frac{\overline{f^2+x^2-c^2}}{f^2}=\frac{b^2}{f^2}\times\overline{x^2-g^2}$. Est autem $Kk:Vv::CK:KV$. Adeóque $Kk=\frac{b\,dv}{KV}=\frac{b^2}{f}\times\frac{-x\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}\times\frac{b}{f}\sqrt{x^2-g^2}}$

$=\frac{-b\,x\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}$. Quare gravitas particulæ A versus solidum erit ut $\int\frac{-\frac{3}{4}ebx\,dx}{x^3\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}\times\overline{L-x}$. Verùm $L-x=\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^5}{5a^4}$, &c. Quare gravitas illa erit $\int\frac{-\frac{3}{4}ebx\,dx}{3a^2\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}+\int\frac{-\frac{3}{4}ebx^3dx}{5a^4\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}$, &c. Sit $z^2=x^2-g^2$, & prior summa erit $\int\frac{-e\,dz}{a^2\sqrt{c^2-g^2-z^2}}$, secunda erit $\int\frac{-ebx^2dz}{5a^4\sqrt{c^2-g^2-z^2}}$

$=\int\frac{-ebdz\times\overline{z^2+g^2}}{5a^4\sqrt{c^2-g^2-z^2}}$. Quæ cum subsequentibus summis ad circulares Ar-

Arcus facilè reducuntur. Atque hinc ratio gravitatis particulæ A versùs hoc ſolidum ad gravitatem versùs Sphæram ſuper ſemidiametrum CA conſtructam, erit qualis in Propoſitione aſſignatur, terminis ſeriei citiſſimè decreſcentibus, ſi CF, Cf & Cg ſint admodum parvæ. Si evaneſcat g, hæc ſeries dabit gravitatem versùs Sphæroidem in Æquatore; quæ tamen elegantiùs inveſtigatur in Prop. III.

III. In Prop. IX. obſervavimus poſt Newtonum vim Lunæ ad Mare movendum cum vi Solis poſſe conferri, æſtus in Syzygiis & Quadraturis comparando; eadem ratio obtineri poſſet conferendo æſtus qui contingunt in Syzygiis Luminarium in diverſis diſtantiis Lunæ à Terra, ſi æſtus eſſent accuratè proportionales viribus quibus producuntur. Deſignet L vim Lunæ mediocrem, S vim Solis mediocrem, X & x duas diverſas diſtantias Lunæ à Terra in Syzygiis æquinoctialibus, Z & z diſtantias Solis à Terra in iiſdem Syzygiis, d & D mediocres utriuſque diſtantias; & ſi Lunæ declinatio nulla ſit, atque eſſent ut vires Luminarium, ſeu ut $\frac{Ld^3}{X^3} + \frac{SD^3}{Z^3}$ & $\frac{Ld^3}{x^3} + \frac{SD^3}{z^3}$, hinc comparando æſtus ratio L ad S detegeretur. Sit enim aſcenſus aquæ in priori caſu ad aſcenſum in poſteriori ut m ad n, eritque L ad S ut $\frac{mD^3}{z^3} - \frac{nD^3}{Z^3}$ ad $\frac{nd^3}{X^3} - \frac{md^3}{x^3}$.



INQUI

INQUISITIO PHYSICA
IN CAUSAM
FLUXUS AC REFLUXUS
MARIS.

A. D. D. EULER, *Mathematicarum Professore,*
è Societate Academiæ Imperialis
Sancti-Petersburgensis.

Cur nunc declivi nudentur littora Ponto,
Adversis tumeat nunc Maris unda fretis;
Dum vestro monitu naturam consulo rerum:
Quàm procul à Terris abdita causa latet!
In Solem Lunamque feror. Si plauditis auso;
Sidera sublimi vertice summa petam.

CAPUT PRIMUM.

De Causâ Fluxus ac Refluxus Maris in genere.

§. I. OMNEM mutationem, quæ in corporibus evenit, vel ab ipsa motûs conservatione proficisci, vel à viribus motum generantibus, hoc quidem tempore, quo qualitates occultæ causæque imaginariæ penitùs sunt explosæ, nullâ indiget probatione. Hoc autem discrimen quovis oblato Phænomeno diligentissimè considerari oportet, ne tam motûs conservationi ejusmodi effectus tribuatur, qui sine viribus oriri nequit, quàm vires investigentur, quæ motum suâ naturâ conservandum producant. Quo quidem in negotio, si debita attentio adhibeatur, errori vix ullus relinquitur locus: cùm ex legibus naturæ satis superque constet, cujusmodi motus vel per se conserventur, vel viribus externis debeantur. Corpus scilicet in motu positum

tum propriâ vi hunc motum uniformiter in directum retinet: atque corpus, quod circa axem convenientem per centrum gravitatis tranſeuntem motum rotatorium ſemel eſt conſecutum, eodem motu rotari perpetuò ſuâ ſponte perget: neque hujuſmodi motuum cauſam in ullâ re aliâ, niſi in ipsâ corporum naturâ, quæri oportet. Quocirca ſi hujus generis Phænomenon fuerit propoſitum, alia cauſa inveſtigari non poteſt, niſi quæ à principio tales motus procreaverit.

§. 2. Hujus generis foret quæſtio, ſi quæreretur cauſa motûs vertiginis Planetarum ac Solis; hîc enim ſufficeret eam cauſam aſſignaſſe, quæ initio hos motus produxiſſet, cùm Sol æquè ac Planetæ talem motum ſemel conſecuti eundem propriâ vi perpetuò conſervare debeant, neque ad hoc Phænomenon explicandum vis ulla externa etiam nunc durans requiratur. Longè aliter ſe res habet, ſi motus proponatur neque uniformis, neque in directum procedens, cujuſmodi eſt motus Planetarum periodicus circa Solem: hoc enim caſu minimè ſufficit ea vis, quæ initio Planetas ad iſtiuſmodi motus impulerit, ſed perpetuò novæ virium actiones requiruntur, à quibus tam celeritas quàm directio continuò immutetur: quæ vires, quàm primùm ceſſarent, ſubitò Planetæ orbitas ſuas deſererent, atque in directum motu æquabili avolarent. Quòd ſi igitur Phænomenon quodcunque naturæ proponatur, antè omnia ſollicitè eſt inquirendum, ad quodnam genus id pertineat, atque utrum cauſa in viribus externis ſit quærenda, an in ipſo ſubjecto corpore? Quinetiam ſæpenumerò uſu venire poteſt, ut effectus utriuſque generis in eodem Phænomeno multùm ſint inter ſe permixti; quo caſu ſummo ſtudio ii à ſe invicem diſcerni antè debebunt, quàm cauſarum inveſtigatio ſuſcipiatur,

§. 3. His ritè perpenſis explicatio Galilei, quam in ſuis Dialogis de æſtu Maris aſſignare eſt conatus, mox concidit; putavit enim Fluxum ac Refluxum Maris tantùm à motibus Terræ rotatorio circa axem & periodico circa Solem oriri, neque aliis viribus tribui oportere, niſi quæ hos motus cùm producant, tùm conſervent. Namque ſi ponamus Terram ſolo motu diurno eſſe præditam, iſte motus Mare aliter non afficiet, niſi id ſub Æquatore attollendo, ex quo figura Terræ ſphæroidica compreſſa naſcitur, motus verò reciprocus in Mari omninò nullus hinc generari poterit. Quòd ſi autem Terræ inſuper motum æquabilem in directum tribuamus, priora Phænomena nullo modo afficientur, ſed prorsùs eadem manebunt, quemadmodum ex principiis mechanicis clariſſimè perſpici licet, quibus conſtat motum uniformem in directum omnibus partibus Syſtematis cujuſcunque corporum æqualiter impreſſum nullam omninò mutationem in motu & ſitu partium relativo inferre. Abeat nunc motus iſte æquabilis Terræ in directum impreſſus in circularem vel ellipticum per vires quibus Terra perpetuò ad Solem urgetur; ac ne

hoc

hoc quidem casu ullus motus reciprocus in Mari produci poterit; quod cùm per se est perspicuum, tùm etiam ab ipso Galileo non statuitur: ipse enim non tàm ex mixtione motûs vertiginis & periodici æstum Maris proficisci est arbitratus, quàm ex motu quocunque progressivo sive rectilineo sive curvilineo, si is cum motu rotatorio combinetur.

§. 4. Quanquàm autem motus Terræ periodicus circa Solem cum motu rotatorio circa axem conjunctus nullum in Mari motum reciprocum generare valet, tamen Mare, quod si motus esset æquabilis in directum in quiete persisteret, aliquantùm turbari debebit. Quòd si autem ad vim quâ Terra in orbitâ suâ continetur attendamus, non difficulter mutationem, quam Mare ab ea patietur, colligere poterimus. Nam cùm partes Terræ à Sole remotiores minori vi, propiores verò majori sollicitentur, illæ ad majus tempus periodicum, hæ verò ad minus absolvendum cogentur, ex quo partibus Terræ fluidis, ut potè mobilibus, motus ab Oriente versùs Occidentem secundùm ecclipticam inducetur hancque veram esse causam existimo ac præcipuam cur tàm Oceanus quàm aer sub Æquatore perpetuò habeat Fluxum ab ortu versùs occasum. Possem etiam ex eodem principio clarè ostendere tàm Maris, si omninò liberum esset, quàm aeris celeritatem tantam fore, quâ tempore viginti-quatuor horarum spatium circiter viginti graduum absolvatur; sed cùm hæc inquisitio ad præsentem quæstionem propriè non pertineat, atque inclyta Academia fortasse aliâ occasione quæstiones hùc spectantes sit propositura, uberiorem explicationem hujus insignis Phænomeni eò usquè differendam esse censemus; hoc quidem tempore tantùm indicasse contenti, motum Terræ periodicum conjunctim cum motu diurno Mari morum aliquem imprimere posse, sed neutiquam motum reciprocum, uti Galileus est arbitratus.

§. 5. Uti in omnibus omninò quæstionibus physicis multò facilius est, quæ non sit causa Phænomeni cujuspiam oblati, quàm quæ sit, ostendere; ita etiam præsens quæstio de Fluxu ac Refluxu Maris est comparata, ut non difficulter causas falsò assignatas possimus refellere. Ac primò quidem post eversam Galilei sententiam, explicatio æstus Maris Cartesiana pressioni Lunæ innixa tot tantisque laborat difficultatibus, ut omninò subsistere nequeat. Præterquàm enim quòd istiusmodi pressio aliundè probari nequeat, atque ad hoc solum Phænomenon explicandum gratuitò assumatur, observationibus etiam minimè satisfacit. In aperto enim ac libero Oceano aquam mox post transitum Lunæ per Meridianum elevari observamus, cùm secundùm Cartesii sententiam eodem tempore deprimi deberet; neque prætereà hoc modo satis distinctè explicatur, cur Luna sub Terra latens eundem ferè effectum exerat, ac si super Horizonte versetur. Deinde hoc idem negotium non feliciori successu aggressus est Wallisius causam in communi centro gravitatis Terræ & Lunæ

quærens, cujus explicatio mox ſatis dilucidè eſt ſubverſa. Supereſt denique Newtoni theotia, quæ nemine contradicente Phænomenis multò magis eſt conſentanea: at in ea id ipſum quod hoc loco quæritur, cauſa ſcilicet phyſica, non aſſignatur, ſed potiùs ad qualitates occultas referri videtur; interim tamen ne hæc quidem theoria ſatis eſt evoluta, ut de ejus ſive conſenſu ſive diſſenſu cum obſervationibus judicium ſatis tutum ferri queat.

§. 6. Cùm igitur dubium ſit nullum, quin Fluxûs ac Refluxûs Maris cauſa in viribus externis & realibus ſit poſita, quæ ſi ceſſarent, ſimul æſtus Maris mox evaneſceret, ubi lateant hæ vires & quomodo ſint comparatæ potiſſimùm nobis erit explicandum, hoc enim eſt id ipſum, quod celeberrima Academia Scientiarum Ragia in quæſtione propoſita requirit. Neque verò vires tantummodò indicaſſe ſufficiet, verùm præterea id maximè erit monſtrandum, quomodo iſtæ vires agant, atque hos ipſos effectus, quos obſervamus, non verò alios producant; in hoc enim totius quæſtionis cardo, explicationis ſcilicet confirmatio, vertitur. Quoniam autem plerumque pluribus viribus excogitandis idem Phænomenon explicari poteſt, ſtudium adhibendum eſt ſummum in hac indagatione, ne ad vires inanes atque imaginarias delabamur, quæ in mundo neque ſunt neque locum habere poſſunt. Parum enim ſcientiæ naturali conſulunt, qui quovis Phænomeno oblato ſibi pro arbitrio mundi ſtructuram peculiarem effingunt, neque ſunt ſolliciti, utrùm ea compages cum aliis Phænomenis conſiſtere queat, an verò ſecùs. Quòd ſi enim jam aliundè conſtet exiſtere in mundo ejuſmodi vires, quæ oblato effectui producendo ſint pares, fruſtrà omne ſtudium in conquiſitione virium novarum collocabitur.

§. 7. Quoniam autem ad cauſam cujuſque Phænomeni deregendam, ad ſingulas circumſtantias ſedulò attendere neceſſe eſt, ante omnia mirificum conſenſum æſtûs Maris cum motu Lunæ contemplari conveniet. Non ſolùm enim inſignis harmonia inter æſtum Maris ac Lunæ motum diurnum deprehenditur, ſed etiam revolutio ſynodica reſpectu Solis ingentem affert varietatem. Omnes denique obſervationes abundè declarant rationem Fluxûs & Refluxûs Maris à ſitu cùm Lunæ tum etiam Solis conjunctim pendere: ex quo ſtatim prono ratiocinio conſequitur, vires illas æſtum Maris producentes, quæcunque etiam ſint, cùm Lunam potiſſimùm, tùm verò etiam Solem reſpicere debere. Quamobrem imprimis nobis erit inquirendum, utrum ejuſmodi vires Solem & Lunam reſpicientes, quæ in aquis talem effectum, qualis eſt æſtus Maris, producere queant, jure ac ratione ſtatui poſſint, an ſecùs. Ac ſi pluribus modis iſtiuſmodi vires animo concipere liceat, diligenter erit diſpiciendum, quænam cum aliis Phænomenis conſiſtere poſſint nec ne. Quanquamvis enim explicatio quæpiam cum Phænomenis conſpiret, niſi virium,

quæ

quæ assumuntur, existentia aliundè comprobetur, labili ea omninò innititur fundamento. Quòd si autem contrà, effectus ejusmodi viribus tribuatur quas in mundo reverà existere alia Phænomena clarè docuerunt, atque summus explicationis cum experientiâ consensus deprehendatur, dubium erit nullum quin ista explicatio sit genuina & sola vera.

§. 8. Quamvis autem certis viribus Lunæ ac Soli tribuendis Phænomenon æstûs Maris commodè explicari posset, tamen ob hanc solam causam istiusmodi vires statuere nimis audax videtur: quamobrem imprimis erit dispiciendum, num aliæ rationes ejusmodi vires non solùm admittant, sed etiam actu existere manifestò indicent. Perlustremus igitur vires, quas jam aliundè in mundo vigere novimus, scisciteturque paucis an ad motum reciprocum Oceano inducendum sint idoneæ: tales enim vires si in mundo jam extent, omnis labor in aliis inquirendis impensus irritus foret ac ridiculus. Ac primò quidem si Solem spectamus, motus Terræ annuus omninò declarat Terram perpetuò versùs Solem urgeri & quasi attrahi, idque fortiùs in minori distantia, debiliùs verò in majori; atque adeò hanc Solis vim in Terram rationem tenere reciprocam duplicatam distantiarum: ex quo spontè sequitur non solùm universam Terram, sed etiam singulas ejus partes perpetuò versùs Solem urgeri. Tota quidem Terra æquè fortiter ad Solem sollicitatur, ac si omnis materia in ejus centro esset congesta; interim tamen partes circa superficiem sitæ vel magis vel minùs ad Solem allicientur, quàm totum Terræ corpus, prouti vel minùs vel magis sint remotæ à Sole, quàm centrum Terræ. Hinc igitur fit, ut hæc eadem vis ad Solem tendens aquam modò magis modò minus trahat, ex quâ alternâ actione motus reciprocus in Fluidis necessariò oriri debet. Quocircà ista Solis vis in præsenti negotio neutiquam negligi poterit, cùm ea, si fortè sola causam æstûs Maris non constituit, certè effectum aliarum virium necessariò afficere ac turbare debeat.

§. 9. Quemadmodùm autem Terra cum omnibus suis partibus versùs Solem sollicitatur, ita eorum sententia non multùm à veritate abhorrere videtur, qui in Lunâ similem vim collocant. Observationes quidem hujusmodi vim in Lunâ non demonstrant sicuti in Sole; cùm motus Terræ in orbitâ suâ à Luna omninò non affici deprehendatur: sed si docuerimus eandem vim ad Lunam respicientem, quæ æstui Maris producendo sit par, in motu Terræ nullam sensibilem anomaliam producere valere, audacia, quæ fortè in talis vis admissione consistere videbatur, multùm mitigabitur. Hujusmodi autem vis existentia aliis rationibus, nullo ad æstum Maris habito respectu, satis clarè evinci potest; quia enim nullum est dubium, quin Luna ad Terram constanter feratur, ob æqualitatem actionis & reactionis Terram quoque versùs Lunam pelli necesse est. Namque si ponamus Sole penitùs sublato, Terræ ac

Lunæ omnem motum ſubitò adimi, Luna utique ad Terram accedet; nemo autem non concedet, probè perpenſis principiis mechanicis, Terram intereà non prorsùs eſſe quieturam, ſed Lunæ obviam ituram, concurſumque in communi gravitatis centro contingere: hoc autem evenire non poterit, niſi Terra actu ad Lunam ſollicitetur. Deindè in ipsâ Lunâ gravitatem dari ſimilem huic, quam in Terrâ ſentimus, negari non poteſt; niſi enim talis vis in Lunâ vigeret, partes Lunæ fluidæ, cùm ob graviratem in Terram, tùm ob motum Lunæ circa proprium axem, etſi ſit admodùm lentus, & tempori periodico æqualis, jam dudùm avolaſſent, parteſque ſolidæ conſiſtentiam ſuam amiſiſſent. Pluribus deniquè aliis rationibus ex naturâ vorticum petitis, magis confirmari poſſet tale corpus mundanum, cujuſmodi eſt Luna, ſubſiſtere non poſſe, niſi vortice ſit cinctum, quo gravitas in id generetur. Quòd ſi autem gravitationem versùs Lunam concedamus, cur ejus actionem non ad nos uſquè admittamus, nulla omninò ratio ſuadet: quin potiùs ejuſmodi vim ſimilem ſtatui conveniet, reliquis in mundo deprehenſis, quæ quaſi in infinitum porriguntur, atque inverſam duplicatam tenent diſtantiarum rationem.

§. 10. His expoſitis manifeſtum eſt, & quaſi experientiâ convictum, Terram cum ſingulis ſuis partibus tam versùs Lunam quàm versùs Solem perpetuò ſollicitari, atque utramque vim proportionalem eſſe reciprocè quadratis diſtantiarum. Hæ igitur vires, cùm actu exiſtant, conſtanterque effectum ſuum exerant, in præſenti negotio, quo in cauſam æſtûs Maris inquirimus, præteriri omninò nequeunt; niſi dilucidè antè ſit probatum, eas non ſolùm Fluxum ac Reſluxum non generare, ſed ne quidem quicquam efficere. Si enim iſtæ vires ullum duntaxat motum reciprocum Mari inducere valeant, quantumvis is etiam ſit exiguus, atque adeò æſtui Maris fortaſsè contrarius, earum tamen ratio neceſſariò erit habenda, cùm ſine illis vera cauſa, quæcumque ſit, neque inveſtigari neque cognoſci poſſit. Neque præterea ſanæ rationis præcepta permittunt alias vires excogitare, in iiſque cauſam æſtûs Maris collocare, antequam evidenter ſit demonſtratum, binas iſtas vires Solem Lunamque ſpectantes, quas non gratuitò aſſumſimus, ſed ex certiſſimis Phænomenis in mundo exiſtere novimus, ad Fluxum ac Refluxum Maris producendum non eſſe ſufficientes. In ſequentibus autem capitibus clariſſimè ſumus oſtenſuri, ab his duabus viribus non ſolùm in Oceano motum reciprocum generari debere, ſed etiam eum ipſum, qui æſtus marini nomine inſigniri ſolet: atque hanc ob rem firmiter jam affirmamus veram Fluxûs ac Reſluxûs cauſam in ſolis illis duabus viribus, quarum altera ad Solem eſt directa, altera ad Lunam, eſſe poſitam; hocque ſimul omnium eorum ſententias funditùs evertimus, qui vel aliis omninò viribus idem Phænomenon adſcribere, vel cum his ipſis alias vires conjungere conantur.

§. 11.

§. 11. Quæſtio igitur de cauſa Fluxûs ac Refluxûs Maris, prouti ea ab Illuſtriſſimâ Academiâ Regiâ eſt propoſita, ad hanc deducitur quæſtionem, ut binarum illarum virium, quibus ſingulæ Terræ partes cùm ad Solem tùm ad Lunam perpetuò urgentur, idque in diſtantiarum ratione reciprocâ duplicatâ, cauſa aſſignetur Phyſica. Ex quo tractationem noſtram bipartitam eſſe oportebit. Primò ſcilicet ex principiis Mechanicis dilucidè erit oſtendendum, à binis illis viribus Solem Lunamque reſpicientibus cùm Fluxum ac Refluxum Maris generatim oriri debere, tùm etiam hoc modo ſingula Phænomena diſtinctè explicari poſſe: hac enim parte abſolutâ nullum ſupererit dubium, quin origo æſtûs Maris his ipſis viribus, quas actu jam in mundo exiſtere docuimus, debeatur. Deinde verò harum virium cauſa Phyſica indicari debet, cùm id ſit præcipuum, quod Inclyta Academia requirit. Quod quidem ad illam partem attinet, in ejus explicatione minimè hæſitamus; & clariſſimis certiſſimiſque demonſtrationibus evincere pollicemur, per iſtas vires omnia omninò æſtûs Maris Phænomena abſolutiſſimè explicari poſſe; quâ in re nulli dubitationi ullus relinquetur locus, cùm tota ad Geometriam & Mechanicam ſublimiorem pertineat, calculoque analytico ſit ſubjecta. Altera verò pars, in ſcientiam naturalem imprimis incurrens, majori difficultati videtur obnoxia, nec tantæ evidentiæ capax; verùm cùm iſta res occaſione plurium quæſtionum ab Academiâ Celeberrima antehac propoſitarum jam tanto ſtudio ſit inveſtigata atque abſoluta, eam non minori certitudine expedire confidimus.

§. 12. Exploſis hoc ſaltem tempore qualitatibus occultis miſsâque Anglorum quorumdam renovatâ attractione, quæ cum ſaniori philoſophandi modo nullatenùs conſiſtere poteſt, omnium virium quæ quidem in mundo obſervantur, duplex ſtatuendus eſt fons atque origo. Nempe cùm viribus tribuatur vel motûs generatio vel immutatio, iſte effectus ſemper vel ab alliſione corporum, vel à vi centrifugâ proficiſcitur, quarum actionum utraque facultati, quâ omnia corpora ſunt prædita in ſtatu ſuo ſive quietis ſive motûs æquabilis in directum perſeverandi, debetur. Ob hanc enim ipſam facultatem corpus in motu poſitum alia corpora, quæ vel ipſius motui directè ſunt oppoſita, vel ejus directionem mutare cogunt, ad motum ſollicitat; atque priori caſu regulæ colliſionis corporum, poſteriori verò vis centrifugæ indoles & proprietates oriuntur ac demonſtrantur. Cùm igitur omnia corpora terreſtria tam versùs Solem, quàm versùs Lunam perpetuò ſollicitentur, cauſa hujus ſollicitationis continuo appulſui materiæ cujuſdam ſubtilis, vel vi centrifugæ ſimilis materiæ tribui debebit. Priori igitur caſu materiam ſubtilem ſtatui opporteret, quæ conſtanter ſummâ rapiditate cùm ad Solem tùm ad Lunam ferretur: hujuſmodi verò hypotheſis ob maximas difficultates, quibus eſt involuta, admitti minimè poteſt. Primò enim perpetuò novis viribus

ribus esset opus, quæ materiam subtilem indesinenter versùs Solem Lunamque pellerent, quâ quidem re quæstio non majorem lucem assequeretur. Deinde talis motus per se diu consistere non posset, propter perpetuum materiæ subtilis ad eadem loca affluxum nullumque refluxum, ut taceamus alia maxima incommoda cum istiusmodi positione permixta.

§. 13. Exclusâ igitur materiæ subtilis continuâ allisione, tanquam ad vires cùm ad Solem tùm Lunam tendentes producendas minimè idonea, alia harum virium causa non relinquitur, nisi quæ in vi centrifugâ consistat. Quemadmodum autem materia subtilis in gyrum acta ac vorticem formans non solùm animo concipi, sed etiam in mundo persistere queat, jam satis superque est expositum, cùm in dissertationibus, quæ cùm quæstio de causâ gravitationis agitaretur, laudes Illustrissimæ Academiæ merebantur, tùm etiam in aliis operibus; quibus in locis simul dilucidè est ostensum, quomodo ejusmodi vortices comparatos esse oporteat, ut vires centrifugæ fiant quadratis distantiarum à centro vorticis reciprocè proportionales. Quæ res cùm meo quidem judicio jam tam plana sit facta, ut vix quicquam ad præsens institutum attinens adjici queat, vorticum ulteriori examini sine ullâ hæsitatione supersedemus; idque eò magis, quòd Celeberrima Academia ejusmodi amplam atque adeò jam confectam digressionem postulare haud videatur. Quoniam enim quæstio de causa gravitatis cùm versùs Terram tùm etiam versùs Solem & Planetas jam satis est investigata ac diremta; nunc quidem, si cujuscunque Phænomeni causa eò fuerit perducta, ibidem acquiescendum videtur, neque actum agendo denuò in causâ gravitatis investigandâ nimiùm immorari conveniret. Denique in præsenti negotio sufficere posset, si æstûs Maris causa adhuc tantis tenebris obvoluta ad alia maximè aperta Phænomena reducatur, quorum causa non solùm habetur probabilis, sed etiam quæ sola sit veritati consentanea, cujusmodi est gravitatio tàm versùs Solem quàm Lunam.

§. 14. Causam igitur Fluxûs ac Refluxûs Maris proximam in binis vorticibus materiæ cujusdam subtilis collocamus, quorum alter circa Solem alter verò circa Lunam ita circumagatur, ut in utroque vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum à centro vorticis; quæ lex vis centrifugæ obtinebitur, si materiæ subtilis vorticem constituentis celeritas statuatur tenere rationem reciprocam subduplicatam distantiarum à centro vorticis. Quæcunque igitur corpora in istiusmodi vortice posita ad ejus centrum pellentur vi acceleratrice, quæ pariter ac vis centrifuga quadratis distantiarum reciprocè est proportionalis. Vis absoluta autem quâ corpus quodpiam in datâ distantiâ à centro vorticis collocatum eò urgetur, pendet à celeritate materiæ subtilis absolutâ. Ac primò quidem quod ad vorticem circa Solem rotatum attinet, ejus vis absoluta ex tem-

tempore Terræ periodico cum distantia ejusdem à Sole comparato tanta colligitur, ut corpus, cujus distantia à centro Solis æqualis est semidiametro Terræ, eò sollicitetur vi, quæ sit 227512 vicibus major, quàm est gravitas naturalis in superficie Terræ. Metiemur autem hanc ipsam vim absolutam cujusque vorticis, per vim, quam idem vortex exerit in distantiâ à suo centro semidiametro Terræ æquali: ex quo si vis gravitatis terrestris designetur per 1. erit vis absoluta Solis = 227512, cujus numeri loco brevitatis gratiâ utemur litterâ *S*. Simili modo vim vorticis Lunam cingentis absolutam indicabimus litterâ *L*, cujus valorem Newtonus rectè cùm ex ipso Fluxu ac Refluxu Maris, tùm etiam ex præcessione Æquinoctiorum constituisse videtur circiter $\frac{1}{460}$. Quare si, positâ Terræ semidiametro = 1, corporis cujusdam à centro Solis vel Lunæ distantia fuerit x, erit vis, quâ id corpus vel ad Solem sollicitatur vel ad Lunam, vel = $\frac{L}{xx}$ vel = $\frac{S}{xx}$, uti ex indole horùm vorticum prona consequentia fluit. In his quidem litterarum *S* & *L* determinationibus assumsimus mediam Solis à Terra distantiam 20620 semidiametrorum Terræ, quæ ex parallaxi horizontali 10″ sequitur, Lunæ verò à Terra distantiam mediam 60 semid. Terræ; interim tamen vires ad Mare movendum hinc ortæ ab his hypothesibus non pendent, uti sequentibus patebit.

§. 15. Quoniam igitur æstum Maris per binas vires, quarum altera Solem respicit, altera Lunam, sumus exposituri, facilè videri possemus eandem omninò explicationem suscipere, quam Newtonus dedit in suis Principiis Mathematicis Philosophiæ Naturalis. Primùm autem notandum est, quòd si Newtonus veram causam hujus Phænomeni assignasset, summoperè absurdum atque absonum foret, novitatis studio aliam causam, quæ certò falsa futura esset, excogitare. Deinde verò Newtonus ne vestigium quidem reliquit, ex quo causa harum virium attractivarum, quas Soli Lunæque tribuit, colligi posset, sed potiùs de causæ Physicæ inventione, qualem Academia Regia potissimum requirit, desperasse videtur; id quod ejus asseclæ apertè testantur, qui attractionem omnibus corporibus propriam esse, neque ulli causæ externæ deberi firmiter asserunt, atque adeò ad qualitates occultas confugiunt. Denique Newtonus deductionem & expositionem omnium Phænomenorum ad æstum Maris pertinentium minimè perfecit, sed quasi tantum adumbravit; plena enim explicatio tot tamque difficilium Problematum solutionem postulat, quæ Newtonus non est aggressus: cùm enim hujus quæstionis enodatio amplissimos calculos requirat, ipse analysin vitans pleraque tantum obiter indicasse contentus fuit; ob quem defectum plurimis adhuc dubiis circa ipsius explicationem locus est relictus. Neque enim in his viribus veram æstûs Maris causam contineri antè certum esse potest, quàm absoluto cal-

calculo perfectus consensus Phænomenorum cum Theoriâ fuerit declaratus.

CAPUT SECUNDUM.

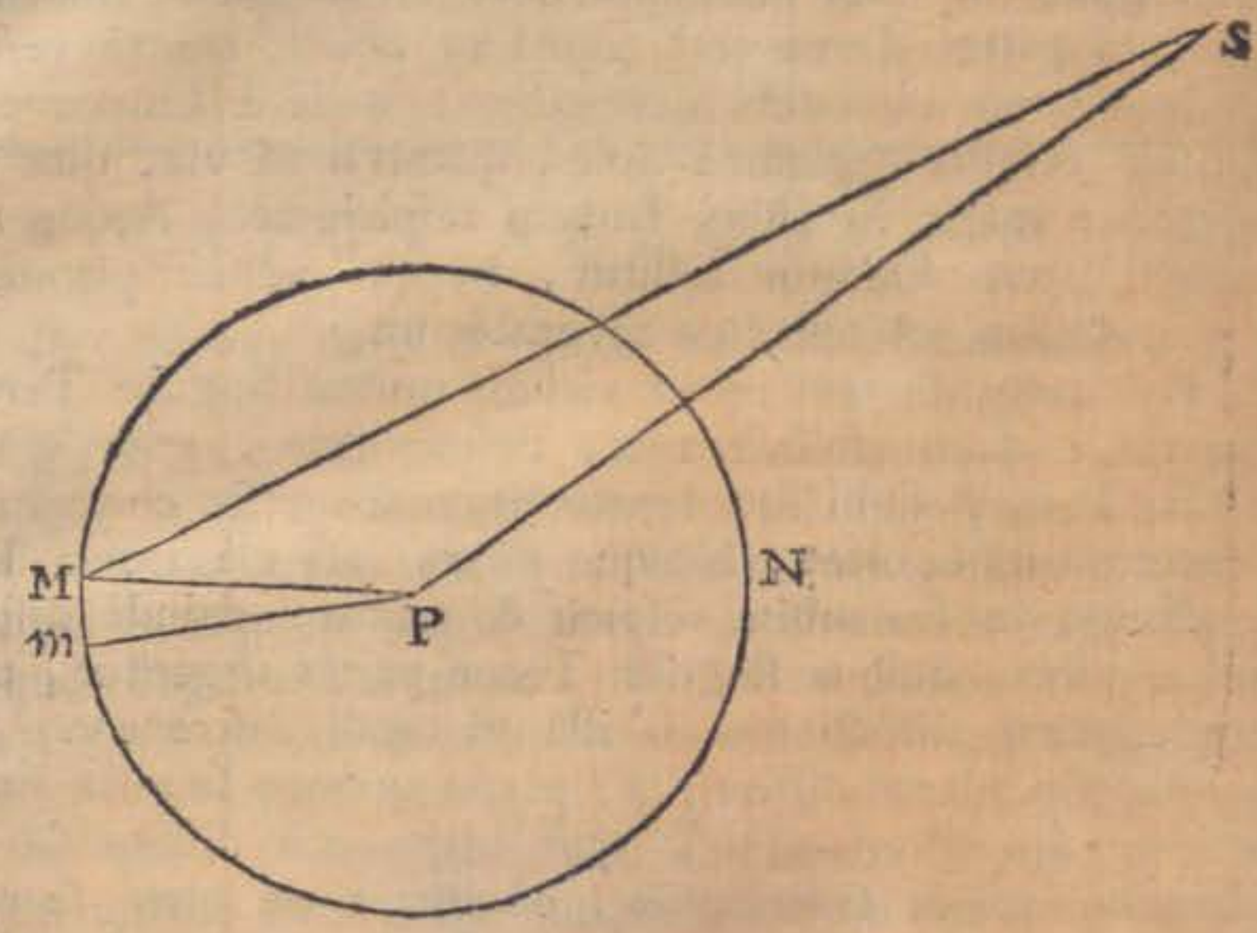
De viribus Solis & Lunæ ad Mare movendum.

§. 16. EFFECTUS, quos vires cùm Solis tùm Lunæ antè stabilitæ in Terram exerunt, ad duo genera sunt referendi: quorum alterum eos complectitur effectus quos Sol ac Luna in universam Terram tamquam unum corpus consideratam exercet; alterum verò eos, quos singulæ Terræ partes à viribus Solis ac Lunæ patiuntur. Ad effectus prioris generis investigandos, omnis Terræ materia tanquam in unico puncto, centro scilicet gravitatis, collecta consideratur, ac tàm ex motu insito quàm viribus sollicitantibus motus Terræ progressivus in suâ orbitâ determinari solet. Ex hocque principio innotuit vim hanc Solis efficere, ut Terra circa Solem in orbitâ ellipticâ circumferatur, vim Lunæ autem tam esse debilem, ut vix ac ne vix quidem ullam sensibilem perturbationem in motu Terræ annuo producere valeat. Contrà autem docebitur, vim Lunæ ad partes Terræ inter se commovendas ac Mare agitandum multò esse fortiorem vi Solis; ex quo plerisque primo intuitu summè paradoxon videatur, quòd vis Lunæ in priori casu respectu vis Solis evanescat, cùm tamen eadem casu posteriori multum excedat vim Solis. Sed mox, cùm effectus utriusque generis diligentiùs evolvemus & perpendemus, satis dilucidè patebit, eos inter se maximè discrepare, atque à vi, quæ in universam Terram minimum exerat effectum, maximam tamen agitationem partium Terræ inter se oriri posse & viciſſim.

§. 17. Ad illum autem harum virium effectum, qui in commotione partium Terræ inter se consistit, dijudicandum, ante omnia probè notari oportet, si singulæ Terræ partes viribus æqualibus & in directionibus inter se parallelis sollicitentur, eo casu nullam omnino commotionem partium oriri, etiamsi sint maximè fluidæ nulloque vinculo invicem connexæ, sed totum virium effectum in integro tantum corpore movendo consumtum iri; perindè ac si totum Terræ corpus vel in unico puncto esset conflatum, vel ex materiâ firmissimè inter se connexâ constaret. Ex quo manifestum est partes Terræ saltem fluidas, quæ viribus cedere queant, inter se commoveri non posse, nisi à viribus dissimilibus urgeantur: atque hanc ob rem non magnitudo virium partes Terræ sollicitantium, sed potiùs dissimilitudo, quâ cùm quantitatis tùm directionis ratione inter se discrepant, eum effectum, quo situs partium mutuus per-

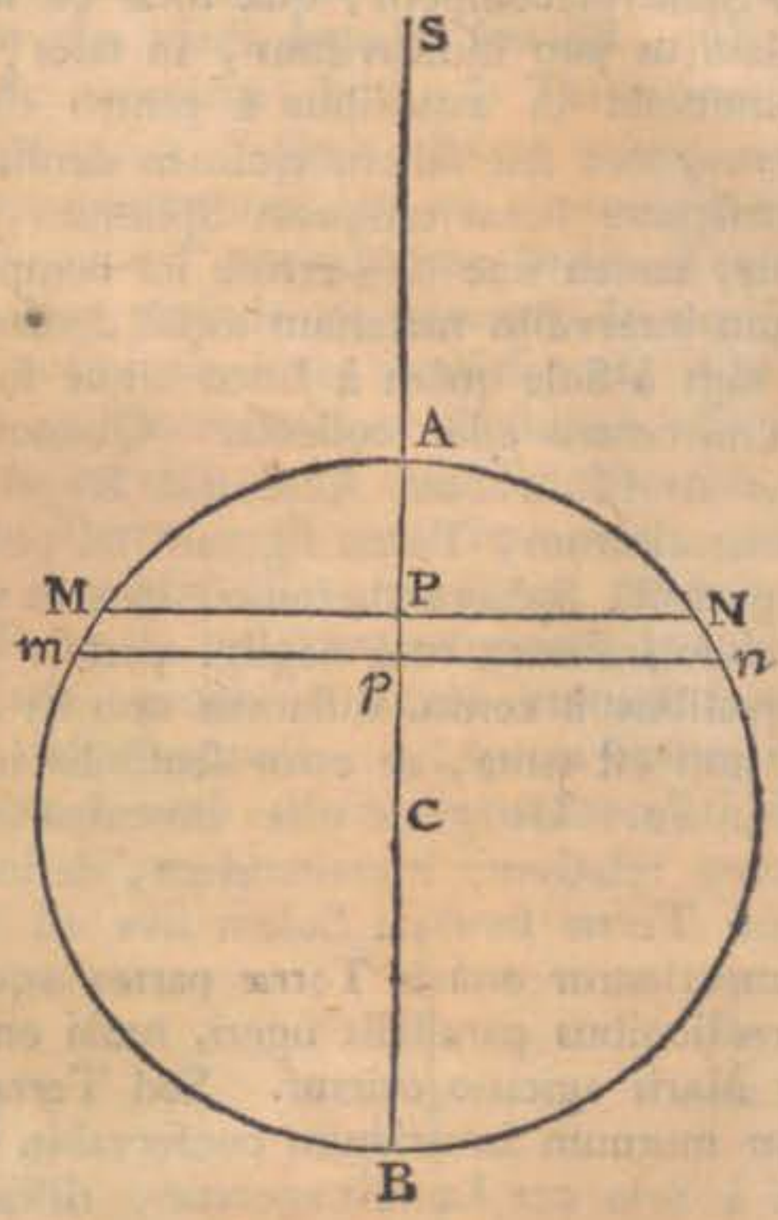
perturberur, producit. Ita vis Solis, etſi eſt maxima, tamen ob inſignem diſtantiam partes Terræ ferè æqualiter afficit, contrà verò vis Lunæ ob propinquitatem admodùm inæqualiter: unde à Luna multò major agitatio Oceani reſultat, quàm à Sole, quamvis ea vis, quæ ad Solem tendit, inſigniter major ſit alterâ Lunam reſpiciente. Atque hoc pacto dubium antè allatum funditùs tollitur, hocque adhuc planius fiet, ſi utriuſque vis effectus ad calculum revocabimus.

§. 18. Ad inæqualitatem igitur virium quibus ſingulæ Terræ partes vel à Sole vel à Luna ſollicitantur, definiendam, ante omnia vim, quâ univerſa Terra, ſi in ſuo centro gravitatis eſſet concentrata, afficeretur, determinari oportet, hæcque eſt ea ipſa vis, quæ Terræ motum progreſſivum in ſua orbita reſpicit & turbat; deindè diſpiciendum eſt, quantùm vires, quibus ſingulæ Terræ partes urgentur, tàm ratione quantitatis quàm directionis ab illâ vi totali diſcrepent. Quòd ſi enim nulla deprehendatur differentia, partes quoque ſingulæ ſitum ſuum relativum inter ſe retinebunt; at quò major erit differentia inter vires illas ſingulas partes ſollicitantes, eò magis eæ inter ſe commovebuntur, ſitum relativum permutabunt. In hac autem inveſtigatione, ſimul gravitatis naturalis, quâ omnia corpora versùs centrum Terræ tendunt, ratio eſt habenda; hæc enim vis in cauſa eſt, quòd quantumvis vires Solis & Lunæ in diverſis Terræ regionibus ſint inæquales, æquilibrii tamen ſtatus detur, in quo partes tandem ſingulæ conquieſcant, neque perpetuò inter ſe agitari pergant. Atque hanc ob rem ſingulæ Terræ partes à tribus viribus ſollicitatæ conſiderari debebunt, primò ſcilicet à propriâ gravitate, quâ directè deorſum nituntur; tùm verò à vi, quâ ad Solem urgentur, ac tertiò à vi versùs Lunam directâ; hæque tres vires, cujuſmodi Phænomena quovis tempore in partibus Terræ fluidis gignant, erit inveſtigandum.



§. 19. Quò igitur vim totalem, quâ Terra vel à Sole vel à Luna urgetur, definiamus, conſideremus primùm peripheriam circuli MN tanquam ex materiâ homogeneâ conflatam, cujus centro P verticaliter immineat Sol vel Luna in S, ita ut recta PS ad planum circuli MN ſit perpendicularis. Sit circuli hujus radius $PM=y$, & diſtantia $SP=x$, ac vis ſive Solis ſive Lunæ abſoluta $= S$. His poſitis elementum peripheriæ Mm pelletur ad S in directione MS vi acceleratrice $=\frac{S}{MS^2}=\frac{S}{xx+yy}$, poſitâ cùm vi gravitatis naturalis in ſuperficie Terræ $= 1$, tùm etiam ſemidiametro Terræ $= 1$: atque hanc ob rem elementum Mm versùs S nitetur vi $=\frac{S\times Mm}{xx+yy}$. Reſolvatur hæc vis in binas laterales, quarum alterius directio cadat in MP, alterius verò ſit parallela directioni PS; atque evidens erit vires omnes MP per totam peripheriam ſe mutuò deſtruere, alterarum verò mediam directionem cadere in PS, ac vim his omnibus æquivalentem iiſdem conjunctim ſumtis fore æqualem. Trahetur autem elementum Mm in directione ipſi PS parallela vi $=\frac{Sx\times Mm}{(xx+yy)^{\frac{1}{2}}}$, unde poſitâ ratione radii ad peripheriam $= 1:\pi$ tota circuli MN peripheria, quæ erit $=\pi y$, urgebitur ſeu quaſi gravitabit versùs S in ipsâ directione PS vi $=\frac{\pi Sxy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. Vis autem acceleratrix quâ hæc peripheria circuli versùs S ſollicitabitur, prodibit, ſi vis motrix inventa dividatur per maſſam movendam, quæ eſt $=\pi y$, eritque $=\frac{Sx}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$.

§. 20. Hoc præmiſſo, contemplemur ſuperficiem ſphæricam genitam converſione circuli AMB circa diametrum AB; ſitque ſemidiameter $AC=BC=r$; erit ipſa ſuperficies $=2\pi rr$. Jam attrahatur hæc ſuperficies ad Solem Lunamve in S, exiſtente diſtantiâ $SC=a$; atque ad vim totalem ſeu conatum quo integra ſuperficies ad S tendet, inveniendum, concipiatur annulus genitus converſione elementi Mm circa diametrum AB, quæ protenſa per S tranſeat. Poſitis igitur $SP=x$, $PM=y$, erit per §. præc. conatus hujus annuli in directione $PS=\frac{\pi Sxy.Mm}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. At poſito $Pp=dx$, erit $Mm=\frac{rdx}{y}$, & $xx+yy=2ax-aa+rr$, unde annulli conatus versùs S erit $=\frac{\pi Srxdx}{(2ax-aa+rr)^{\frac{3}{2}}}$, cujus integrale eſt $=C+\frac{\pi Sr(ax-aa+rr)}{a^2\sqrt{(2ax-aa+rr)}}$, ex quo conatus portionis ſuperficiei ſphæricæ converſione arcus AM ortæ prodibit $=\frac{\pi Srr}{aa}+\frac{\pi Sr(ax-aa+rr)}{a^2\sqrt{(2ax-aa+rr)}}$. Quare ſi ponatur $SP=SB$ ſeu $x=a+r$, emerget conatus totius ſuperficiei ſphæricæ $=\frac{2\pi Srr}{aa}$: hincque cùm ipſa ſuperficies ſit $=2\pi rr$, erit vis acceleratrix quâ ſuperficies ſphærica actu versùs S tendet $=\frac{S}{aa}$, ideoque tanta, quanta foret, ſi tota ſuperficies in centro C eſſet collecta.



§. 21. Cùm igitur ſuperficies ſphærica perinde ad Solem ſive Lunam in S ſolliciteturr, ac ſi tota in ipſo centro eſſet conflata, hæc proprietas ad omnes ſuperficies ſphæricas, ex quibus integra Sphæra compoſita concipi poteſt, patebit, dummodo ſingulæ hæ ſuperficies ex materiâ homogeneâ conſtent, ſive quod eodem redit, ipſa Sphæra in iiſdem à centro diſtantiis ſit æquè denſa. Hanc ob rem ejuſmodi Sphæra quoque perinde ad S in directione PS urgebitur, ac ſi tota ipſius materia in centro C eſſet concentrata; hæcque proprietas non ſolùm in ejuſmodi

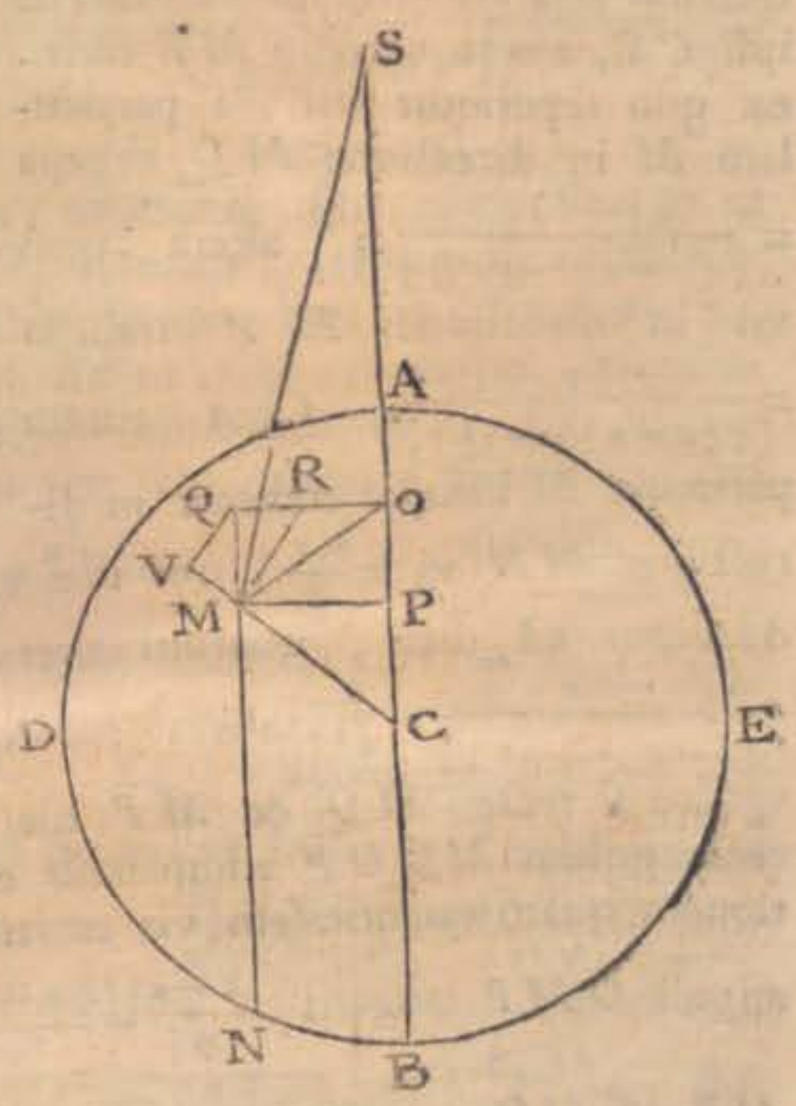
di Sphæras competit, quæ totæ ex materiâ uniformi ſunt confectæ, ſed etiam ut jam indicavimus, in tales, quæ ex materiâ conſtant difformi, dummodo in æqualibus à centro diſtantiis, materia circumquaque ſit homogenea ſeu ſaltem ejuſdem denſitatis. Cùm igitur Terram ſibi repræſentare liceat tanquam Sphæram, ſi non ex uniformi materiâ conflatam, tamen ſine ullo errore ita comparatam, ut in æqualibus circa centrum intervallis materiam æquè denſam includat, Terra quoque univerſa tàm à Sole quàm à Lunâ æquè ſollicitabitur, ac ſi omnis ejus materia in centro eſſet collecta. Quanquam enim nunc quidem accuratiſſimis ab Illuſtriſſimâ Academiâ Regiâ inſtitutis paſſim menſuris ſatis eſt demonſtratum, Terræ figuram ad polos eſſe compreſſam, tamen tantilla à perfectâ Sphærâ aberratio, in aliis quidem negotiis maximi momenti, in hoc inſtituto tutò negligi poteſt. Parique ratione, etiamſi Terra in æqualibus à centro diſtantiis non ſit æquè denſa, tamen differentia certè non eſt tanta, ut error ſenſibilis inde ſit metuendus.

§. 22. Ut igitur vires inveniantur, quæ tendant ad ſitum partium Terræ relativum immutandum, definienda eſt vis acceleratrix, quâ centrum Terræ ſive ad Solem ſive ad Lunam urgeatur: quâ cognitâ, ſi comperiantur omnes Terræ partes æqualibus viribus acceleratricibus & in directionibus parallelis ugeri, nulla omnino ſitûs mutatio, nullaque proinde Maris agitatio orietur. Sed Terra in ſe ſpectata omnium partium ſitum mutuum invariatum conſervabit. At ſi vires, quibus ſingulæ partes à Sole aut Lunâ urgentur, diſcrepent à vi centrum Terræ afficiente, tàm ratione quantitatis quàm directionis, tum niſi firmiſſimè inter ſe ſint connexæ in ſitu ſuo mutuo perturbari debebunt. Hocque caſu aquæ, quæ ob fluiditatem vi etiam minimæ cedunt, ſenſibiliter agitabuntur, atque affluendo defluendoque aliis locis elevabuntur, aliis deprimentur. Cùm autem iſte motus, qui in ſingulis Terræ partibus generatur, à differentiâ inter vires centrum Terræ & ipſas partes ſollicitantes proficiſcatur, propria vis, quâ quæque particula agitabitur, innoteſcet, ſi à vi acceleratrice illam particulam ſollicitante auferatur vis acceleratrix, quam centrum Terræ patitur: hæcque ſubtractio ita inſtituitur, ut cuique particulæ præter vim actu eam ſollicitantem alia vis æqualis illi, quam centrum perpetitur, in directione contrariâ applicata concipiatur: tum enim vis quæ ex compoſitione harum duarum oritur, erit vera vis particulam illam de loco ſuo deflectens.

§. 23. Conſentanea eſt hæc reductio principiis Mechanicis, quibus ſtatuitur motum relativum in ſyſtemate quotcunque corporum & à quibuſcunque viribus ſollicitatorum manere invariatum, ſi non ſolùm toti ſyſtemati motus æquabilis in directum ſimul imprimatur, ſed etiam ſingulis partibus vires æquales quarum directiones ſint inter ſe parallelæ, applicentur. Noſtro igitur caſu motus inteſtinus partium Terræ non turbabitur

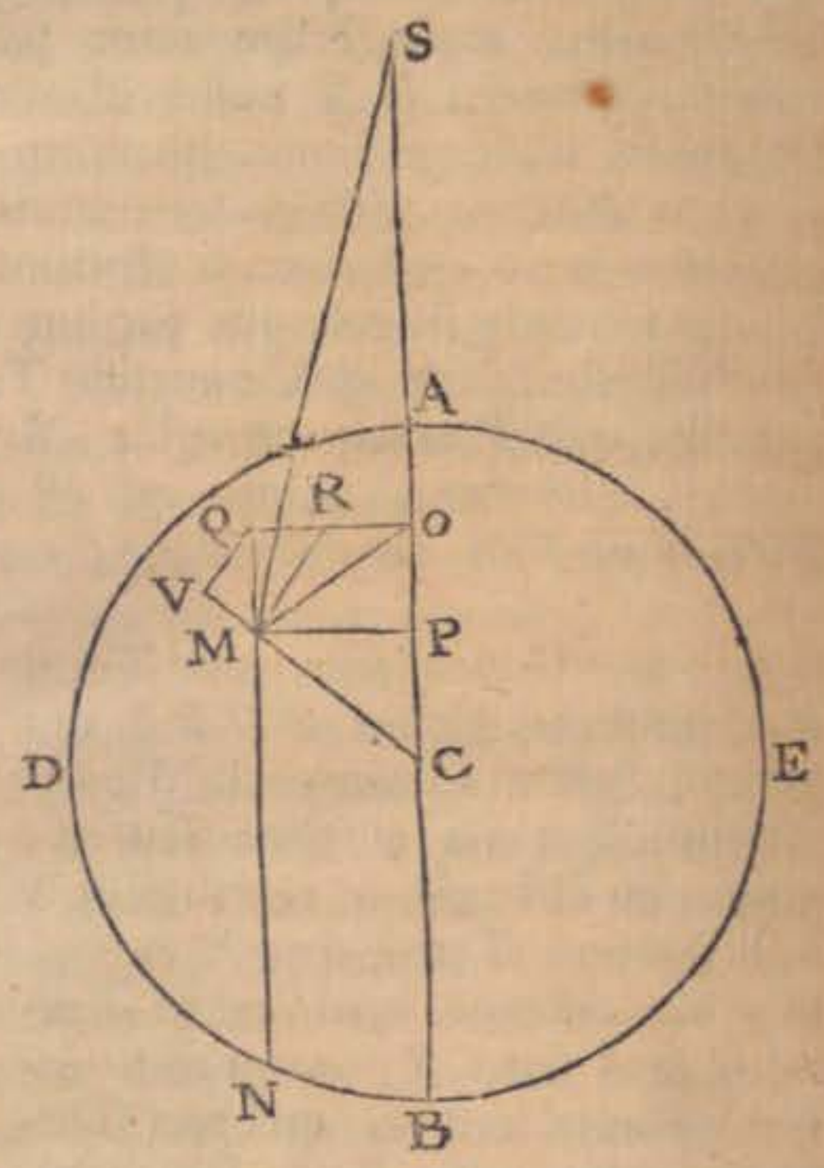
babitur, ſi ſingulis particulis vires æquales in directionibus parallelis applicemus ut fecimus: quòd ſi autem iſtæ vires æquales ſint illi, quâ tota Terra ſeu centrum ſollicitatur, & contrariæ, hoc ipſo Terræ motum curvilineum & inæquabilem, quippe qui ab iiſdem viribus oritur, adimemus. Quare ſi inſuper toti Terræ motum æqualem & contrarium illi, quo actu fertur, impreſſum concipiamus, obtinebimus totam Terram quieſcentem, atque etiam nunc partes perinde agitabuntur & inter ſe commovebuntur, ac ſi nullas iſtiuſmodi mutationes intuliſſemus. Quilibet autem facilè percipiet, quantum ex hâc reductione ſubſidium aſſequamur; multò enim facilius erit mutationes, quæ in ipsâ Terrâ accidunt, percipere atque explicare, ſi centrum Terræ conſtituatur immotum, quàm ſi totalis motus ſingularum partium motibus eſſet permixtus. Hanc ob rem iſtâ reductione quâ centrum Terræ in quietem redigitur, perpetuò utemur, quò Phænomena æſtûs Maris, prouti in Terrâ immotâ ſentiri debent, elicianus; quippe qui eſt caſus naturalis, ad quem omnes obſervationes ſunt accommodatæ, omnes verò theoriæ accommodari debent.

§. 24. Concipiatur nunc Terra tota tanquam globus $ADBE$ urgeri ad Solem Lunamve in S exiſtentem cujus vis abſoluta ſeu ea, quam in diſtantia à centro ſuo S ſemidiametro Terræ æquali exerit, ſit $=S$, diſtantia verò centri Terræ C ab S ſeu CS ponatur $=a$; eritque vis acceleratrix, quâ tota Terra tanquam in C collecta ſollicitabitur in directione CS, $=\frac{S}{aa}$. Contemplemur jam particulam Terræ quamcunque M cujus ſitus ita ſit definitus, ut ſit $CP=x$ & $PM=y$, exiſtente MP normali ad CS; hinc igitur habebitur $SP=a-x$ & $SM=\sqrt{((a-x)^2+y^2)}$. Vis igitur acceleratrix, quâ particula M versùs S pelletur, erit $=\frac{S}{(a-x)^2+y^2}$; à quâ cùm auferri debeat vis, quâ tota Terra versùs S nititur; concipienda eſt particulæ M applicata vis $=\frac{S}{aa}$ in directione MN ipſi CS parallela & oppoſita; quæ duæ vires particulam M æquè afficient ac ſi univerſa Terra quieſceret vel uniformiter in directum moveretur, qui caſus ab il-



lo non differt. Ex his igitur ambabus viribus conatus innoteſcet, quo particula M à vi ad S directa de loco ſuo recedere annitetur: ad ipſum autem motum definiendum inſuper vis gravitatis erit reſpicienda: & quia hæc particula non eſt libera, ſed quaquaversùs materiâ terreſtri circumdata, inveſtigari oportet, quantum iſta materia effectum viribus ſollicitantibus concedat.

§. 25. Quoniam autem in hoc capite nobis nondum eſt propoſitum in ipſum effectum ab his viribus oriundum inquirere, ſed tantum conatum evolvere atque explorare; diligentiùs perpendemus, cujuſmodi vires ex combinatione harum potentiarum particulam M ſollicitantium reſultent. Hunc in finem reſolvatur vis MS in duas laterales, quarum alterius directio parallela ſit ipſi CS, altera verò in MP cadat: ex quo reperietur vis illa particulam M in directione MQ urgens $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$; altera verò vis in directione MP trahens $= \frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cùm autem particula M inſuper trahatur in directione MN vi $= \frac{aa}{S}$, tres iſtæ vires à Sole Lunave in S exiſtente reducentur ad duas, quarum altera in directione MQ urgens erit $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{S}{a^2}$, altera verò directionem habens $MP = \frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Quare ſi rectæ MQ & MP his viribus proportionales capiantur, & rectangulum $MQOP$ compleatur exprimet diagonalis MO tàm directionem quàm quantitatem vis ex tribus præcedentibus ortæ: erit autem anguli OMP tangens $= \frac{a-x}{y} - \frac{((a-x)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2 y}$; quo cognito, ſi fiat ut MP ad MO ita $\frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ad quartam, hæc ipſa quarta proportionalis erit vis particulam M in directione MO ſollicitans, quæ oritur à vi ad S tendente.



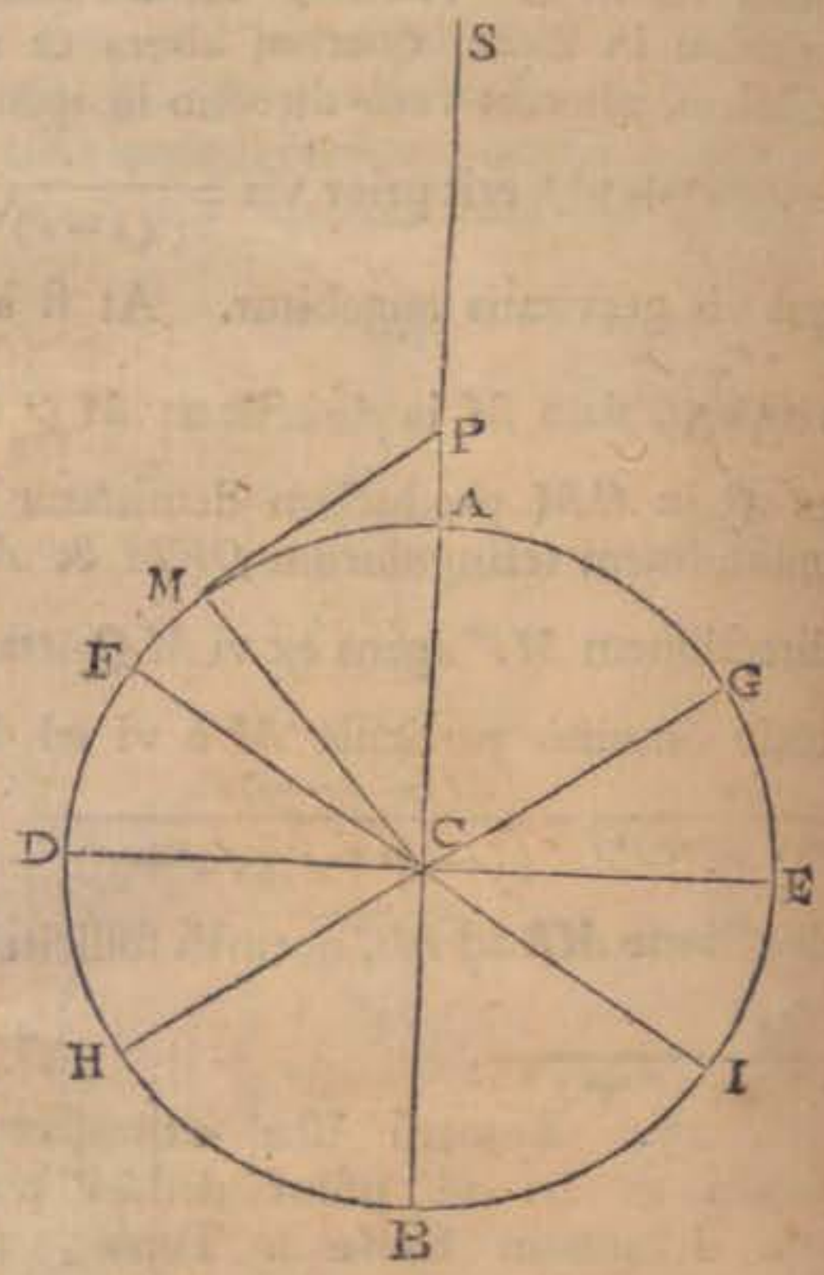
§. 26. Ut autem iſtæ vires faciliùs cum gravitate naturali, cujus directio eſt MC, conjungi queant, reſolvantur eæ in binas, quarum altera in ipſam directionem MC cadat, alteriûs verò directio ſit MR nor-

malis ad MC. Ad hoc commodiſſimè præſtandum, reſolvatur vis MS primùm in duas, quarum altera ut antè directionem habeat ipſi CS parallelam, alteriûs verò directio in ipſam MC incidat. Cùm igitur ſit $MC = \sqrt{(x^2+y^2)}$ erit prior vis $= \frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, poſterior verò $= \frac{S\sqrt{(x^2+y^2)}}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ quâ vis gravitatis augebitur. At ſi à priori auferatur vis $= \frac{S}{aa}$, remanebit vis particulam M in directione MQ ſollicitans $= \frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S}{a^2}$. Jam ex Q in CM productam demittatur perpendiculum QV, eritque ob ſimilitudinem triangulorum QVM & MPC vis gravitati contraria ſecundùm directionem MV agens ex vi MQ orta $= \frac{Sax}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{Sx}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$; unde omninò particula M à vi ad S tendente versùs C urgebitur vi $= \frac{Sx}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{S(ax-xx-yy)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2)}}$. Præterea verò eadem particula M in directione MR ad MC normali ſollicitabitur vi $= \frac{Say}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{Sy}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

§. 27. Tametſi iſtæ expreſſiones tantoperè ſint compoſitæ, ut parum ex iis ad uſum deduci poſſe videatur, tamen ſi conſideremus diſtantiam Lunæ à Terra, multò magis autem diſtantiam Solis, vehementer excedere quantitatem Terræ, ac propterea quantitates x & y reſpectu quantitatis a exiguas admodum eſſe; per approximationem ſatis commodas formulas ex iis derivare licebit. Cùm enim ſit proximè $\frac{1}{((a-x)^2+y)^2\frac{3}{2}} = (a^2-2ax+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^3} + \frac{3(2ax-xx-yy)}{2a^5} + \frac{15(2ax-xx-yy)^2}{8a^7}$, loco $\frac{1}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ſatis tutò ſubſtitui poterit $\frac{1}{a^3} + \frac{3x}{a^4} + \frac{3(4xx-yy)}{2a^5}$. Ex his autem obtinebitur vis, quâ particula M præter gravitatem à vi Solis ſive Lunæ in S exiſtentis ad centrum Terræ C in directione MC urgetur, $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{3Sx(3yy-2xx)}{2a^4\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$. Præterea autem eadem particula M ſollicitabitur in directione MR ad MC normali, vi $= \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{3Sy(4x+yy)}{2a^4\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{3Sy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}\left(x+\frac{4xx-yy}{2a}\right)$. Atque cùm in his formulis termini primi poſteriores multis vicibus excedant, rem craſſiùs inſpiciendo, particula M à vi Solis Lunæve ſecundùm MC urgebitur vi $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}$, in directione verò MR vi $= \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

§. 28.

§. 28. Ex his igitur poſtremis formulis intelligitur ab actione Solis ſive Lunæ in S exiſtentis gravitatem particulæ M augeri ſi ejus ſitus reſpectu rectæ SC ita fuerit comparatus, ut ſit $yy > 2xx$ hoc eſt tangens anguli $MCP > \sqrt{2}$ poſito ſinu toto $= 1$, contrà verò gravitatem diminui, ſi fuerit $yy < 2xx$. Quare cùm angulus cujus tangens eſt $= \sqrt{2}$ contineat $54^\circ, 45'$ circiter, ſi concipiatur circulus Terræ maximus quicunque $ADBE$, cujus planum per punctum S tranſeat, in eoque ducantur rectæ FCI & GCH, quæ cum rectâ SAB angulos conſtituant $54^\circ\ 45'$; tùm omnes Terræ particulæ in ſpatiis FCH & GCI ſitæ gravitatis naturalis augmentum accipient, reliquæ verò particulæ in ſpatiis FCG & HCI poſitæ decrementum gravitatis patientur. Atque hinc, quâcumque Terræ particulâ propoſitâ, definiri poterit, quantùm ejus gravitas à Sole Lunâve in S exiſtente vel augeatur vel diminuatur. Altera verò vis, quâ particula M in directione horizontali MR urgetur, *(vide figuram ad pag. 298.)* affirmativa erit, in eamque plagam, quæ in figura repræſentatur, verget, ſi quantitates x & y ambæ fuerint vel affirmativæ vel negativæ: contrariumque eveniet, ſi earum altera ſit affirmativa, altera negativa. Quare ſi particula M ſita fuerit vel in quadrante ACD vel ACE, tum vis horizontalis ad rectam CA tender; contrà verò hæc vis ad radium CB dirigetur, ſi particula M ſit vel in quadrante BCD vel BCE conſtituta. Ex quibus perſpicitur effectus vel Solis vel Lunæ in ambo hemiſphæria, ſuperius ſcilicet DAE & inferius DBE, inter ſe eſſe ferè ſimiles; quæ ſimilitudo quoque in ipſo æſtu Maris obſervatur.



§. 29. Ponamus nunc particulam M in ipsâ Terræ ſuperficie eſſe conſtitutam, eritque $\sqrt{(xx+yy)} = 1$ ob Terræ ſemidiametrum $= 1$. Quare ſi particula M fuerit poſita in M, exiſtente anguli ACM ſinu $= y$ & coſinu $= x$, ejus gravitas naturalis accelerarrix à Sole Lunâve in S augebitur vi $= \frac{3(yy-2xx)}{a^3}$, ſecùndum horizontem autem in directione

tione MR urgebitur vi $= \frac{3Sxy}{a^3}$. Gravitas igitur maximè augebitur, si particula M posita fuerit in D vel E, quibus in locis punctum S in horizonte apparet; ibi verò gravitatis augmentum erit $= \frac{S}{a^3}$. In punctis autem A & B, quæ punctum S vel in suo zenith vel nadir positum habent, maximum deprehendetur gravitatis decrementum, quod scilicet erit $= \frac{2S}{a^3}$: ita ut maximum gravitatis decrementum duplò majus sit quàm maximum incrementum. Vis autem horizontalis $\frac{3Sxy}{a^3}$ maxima evadet, si angulus ACM fuerit semirectus, id quod accidit in iis Terræ regionibus, in quibus punctum S conspicitur vel 45° gradibus supra horizontem elevatum, vel tantundem sub horizonte depressum laret: his igitur casibus ob $xy = \frac{1}{2}$ fiet vis horizontalis $= \frac{3S}{2a^3}$. Hujus ergo vis effectus in hoc consistet, ut directio gravitatis mutetur, atque versùs rectam SC inclinetur angulo cujus tangens est $= \frac{3S}{2a^3}$, existente sinu toto $= 1$, quia gravitatem unitate designamus.

§. 30. Hæ itaque vires si satis essent magnæ, in ponderibus utique sentiri deberent, ac prior quidem gravitatem naturalem vel augens vel diminuens in oscillationibus pendulorum animadverti deberet, eorum motum vel accelerando vel retardando; posterior verò vis situm pendulorum quiescentium verticalem de hoc situ deflecteret, atque ad horizontem inclinatum efficeret. Quoniam autem hujusmodi perturbationes non observamus, operæ pretium erit dilucidè monstrare vires illas tam esse exiguas, ut hi effectus sensus nostros omninò effugiant. Primùm igitur cùm pro Sole sit $S = 227512$ atque $a = 20620$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{38535570}$; pro Luna autem quia est $S = \frac{1}{40}$ & $a = 60$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{8640000}$; ex quo vis Lunæ plus quàm quater major est vi Solis, ceteris paribus; atque si Solis & Lunæ vires prorsùs conspirent, erit ex iis conjunctim $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{7057700}$. seu proximè $= \frac{1}{7000000}$. Hinc maxima gravitatis diminutio, quæ quidem oriri poterit, erit $= \frac{1}{3500000}$, maximum verò incrementum $= \frac{1}{7000000}$; unde numerus oscillationum ejusdem penduli eodem tempore editarum, illo casu erit ut $\sqrt{(1 - \frac{1}{3500000})}$ seu $1 - \frac{1}{7000000}$, hoc verò casu ut $\sqrt{(1 + \frac{1}{7000000})}$ seu $1 + \frac{1}{14000000}$. Numeri ergo oscillationum ab eodem pendulo eodem tempore absolutarum, cùm gravitas maximè est diminuta;

& cùm maximè eſt aucta, tenebunt rationem ut 13999998 ad 14000001, hoc eſt ut 4666666 ad 4666667; ex quo ſatis perſpicitur differentiam hanc minimè percipi poſſe. Similis autem omninò eſt ratio alterius Phænomeni declinationis ſcilicet à ſitu verticali comparata, quæ nunquam ad 5^{m} exſurgere poteſt.

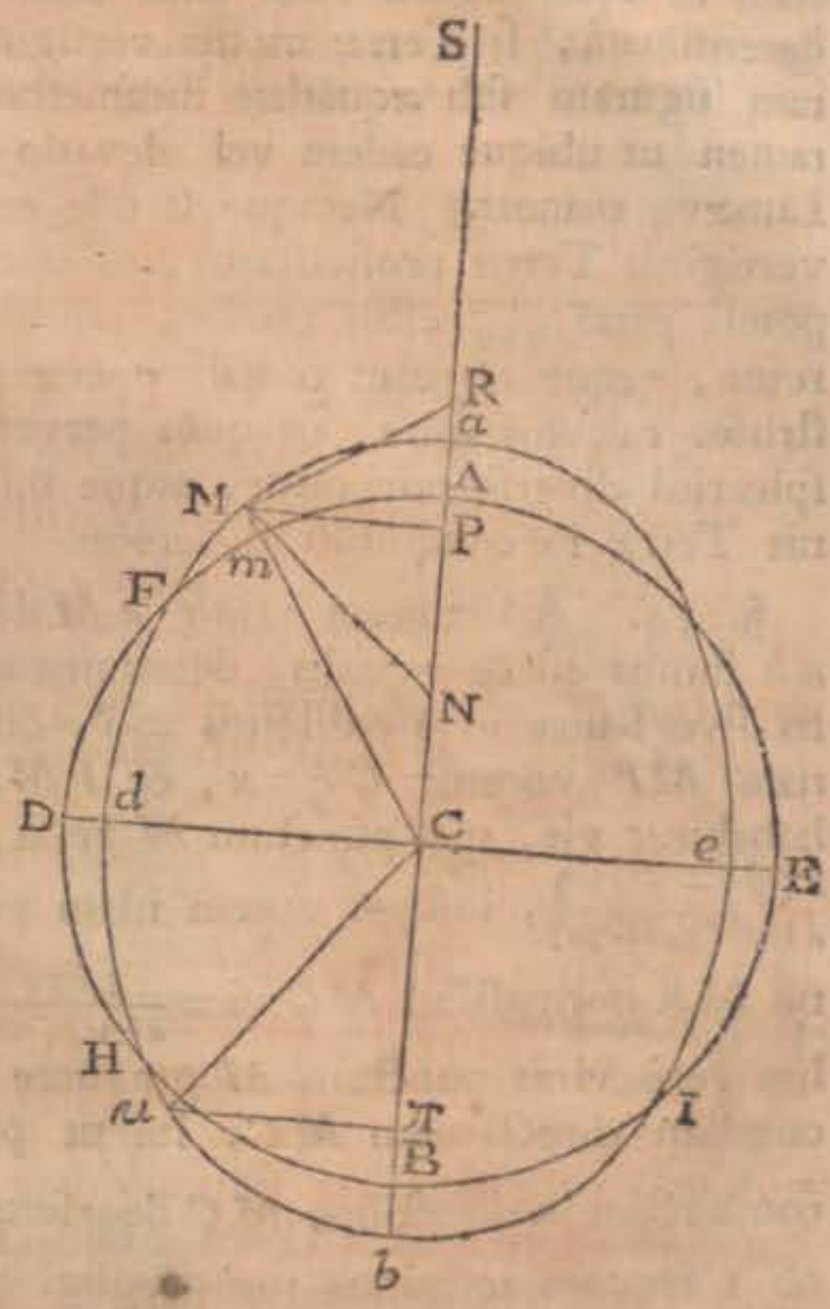
CAPUT TERTIUM.

De Figurâ, quam vires cùm Solis tùm Lunæ Terræ inducere conantur.

§. 31. CUM igitur in capite præcedente vires tàm à Sole quàm à Lunâ oriundas determinaverimus, quibus ſingulæ Terræ particulæ ad ſitum relativum cùm inter ſe tùm reſpectu centri, quod in hoc negotio tanquam quieſcens conſideratur, immutandum ſollicitantur; ordo requireret, ut jam in ipſum motum, quo ſingulæ particulæ inter ſe commoveri debeant, inquireremus. Verùm cùm hæc inveſtigatio ſit altioris indaginis, atque opus habeat principiis mechanicis ad motum partium inter ſe reſpicientibus, qualia vix uſquam adhuc reperiuntur; in hoc capite rem ſecundùm principia ſtatica ulteriùs perſequi pergamus, ac figuram determinemus, quam vires Solis & Lunæ cùm ſeorſim tùm etiam conjunctim inducere conantur. Hunc in finem Terram undequaque materiâ fluidâ ſeu aquâ cinctam contemplabimur, quò ſollicitationibus obedire ac figuram iis convenientem actu induere queat. In hoc ſcilicet negotio Solem & Lunam pariter ac ipſam Terram quieſcentes concipimus, ita ut inter ſe perpetuò eundem ſitum relativum conſervent, quo pacto Terræ ab actionibus Solis ac Lunæ figura permanens mox induetur, quam tamdiu retinebit, quoad idem ſitus relativus duret. Perſpicuum autem eſt cognitionem hujus figuræ magno futuram eſſe adjumento ad ejuſdem figuræ tranſmutationem definiendam, ſi tàm Soli quàm Lunæ motus tribuatur.

§. 32. Conſideremus igitur primùm Terram in ſtatu ſuo naturali, in quem ſe ſola vi gravitatis compoſuit; in quo, cùm habitura ſit figuram ſphæricam, repræſentet circulus *ADBE* ſeu potiùs globus ejus rotatione ortus Terram, quam præterea undique aquâ circumfuſam ponimus. Verſetur jam Sol vel Luna in *S*, à cujus vi cùm gravitas naturalis tam in *A* quàm in *B* diminuatur, in *D* verò & *E* augeatur, manifeſtum eſt Terram ſeu potiùs aquam illi circumfuſam elevatum iri in *A* & *B*, contrà verò in *D* & *E* deprimi, idque eouſque, quoad ſollicitationes à Sole Lunâve in *S* oriundæ cum vi gravitatis ad æquilibrium fuerint redactæ.

Sit



Sit itaque curva *adbe* ea figura, quæ circa axem *ab* rotata generet Terræ formam, quam à vi ad *S* directâ tandem recipiet, atque cùm aquæ nunc ponantur in æquilibrio constitutæ, necesse est ut directio media omnium sollicitationum, quibus singulæ Terræ particulæ in supremâ superficie sitæ urgentur, ad ipsam superficiem sit normalis. Quare si particulam quamcunque *M* spectemus; ea primùm à gravitate naturali in directione *MC* urgetur deorsùm, idque vi, quam constanter ponimus = 1; quippe quæ est ipsa gravitas in superficie Terræ, eò quòd elevatio vel depressio particulæ distantiam ejus à centro Terræ, à quâ variatio gravitatis pendet, sensibiliter non immutet. Deinde verò eadem particula *M* à vi in *S* existente sollicitatur duplici vi, quarum alterius directio in ipsam *MC* incidit, alterius verò in *MR* normalem ad *MC*. Quocirca trium harum virium mediam directionem incidere oportet in rectam *MN* normalem ad curvam *aMd*, quo ipso natura hujus curvæ determinabitur.

§. 33. Dubium hîc subnasci posset, quod cùm ad præsens institutum omnium virium, quibus singulæ particulæ sollicitantur, ratio haberi debeat, eam hîc negligamus, quæ à vi centrifugâ motûs Terræ diurni oritur, quippe quæ non solùm non est infinitè parva, sed multis vicibus major, quàm vires quæ vel à Sole vel Lunâ resultant: sed quia hæc vis constantem producit effectum, Terræ scilicet figuram sphæroidicam ad polos compressam, mutationem, quæ in Fluxu ac Refluxu Maris observatur, sensibiliter afficere nequit. Deinde quamvis hîc figuram Terræ sphæricam ponamus, tamen in aberrationem præcipuè ab hac figurâ tam à Sole quàm Lunâ oriundam inquirimus: manifestum autem est, quantum figura aquæ ob vires Solis Lunæve à sphæricâ recedat, tantundem aquæ figuram admisso motu diurno Terræ à figurâ sphæroidicâ esse discrepaturam. Quâpropter in hoc negotio sufficere potest, si, Terrâ instar sphæræ perfectæ consideratâ, definiamus quantam differen-

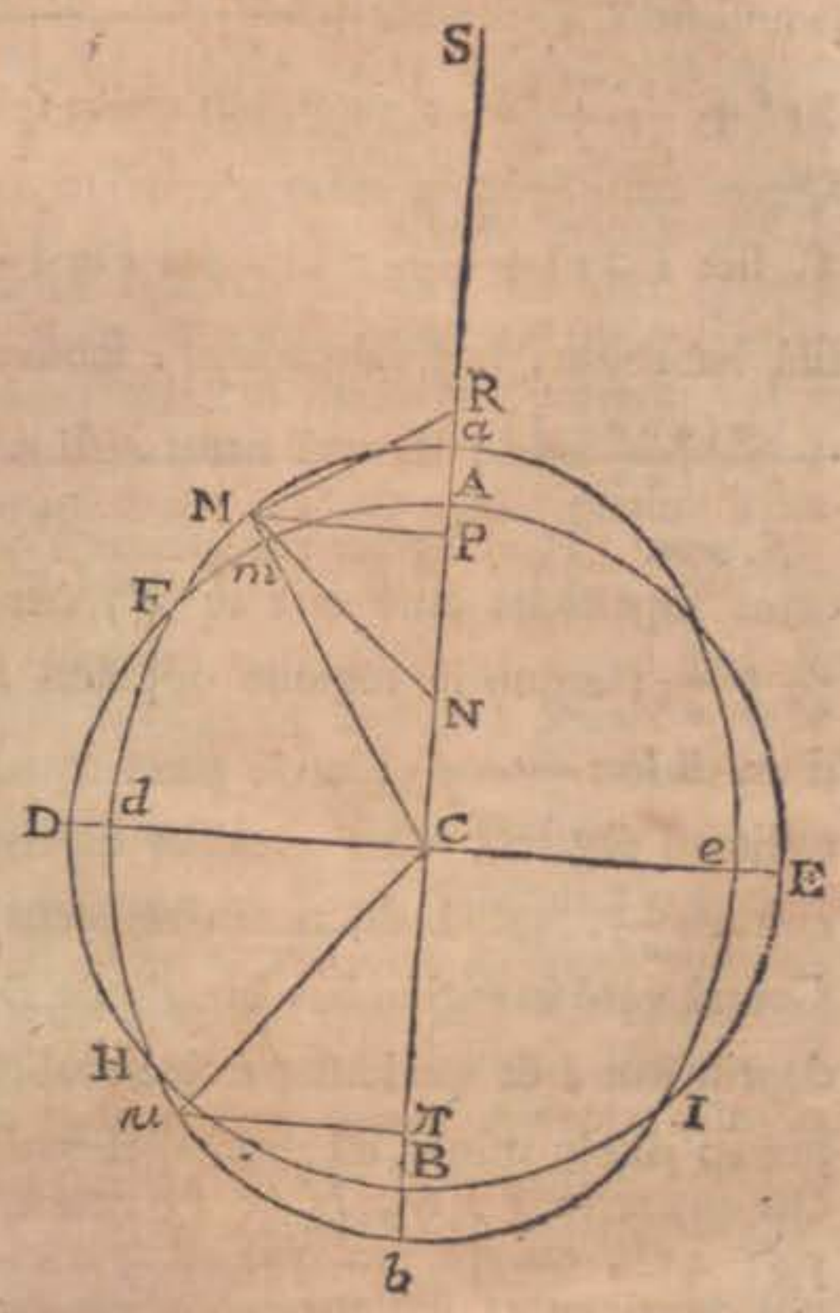
tiam in aquæ figurâ vires cùm Solis tùm Lunæ producant: hac enim determinatâ, si Terræ motus vertiginis restituatur, perspicuum erit totam figuram sub æquatore intumescere, sub polis autem subsidere; ita tamen ut ubique eadem vel elevatio vel depressio aquæ à viribus Solis Lunæve maneat. Namque si ulla etiam varietas in æstu Maris à motu vertiginis Terræ proficiscatur, ea calculo monstrante nusquam major esse potest parte $\frac{1}{289}$ æstûs totalis; tantilla autem differentia notari non meretur, neque ob eam causam operæ pretium est tam complicatos & abstrusos calculos inire, ad quos perveniretur, si Terræ figura naturalis à sphæricâ diversa poneretur, atque insuper vis centrifuga à motu vertiginis Terræ in computum duceretur.

§. 34. Ad curvam igitur $aMdb$, cui ea quæ ex alterâ parte axis ab similis est & æqualis, determinandam, ponatur vis absoluta sive Solis sive Lunæ in S existentis $= S$, distantia $CS = a$, ac ducta semiordinata MP vocetur $CP = x$, & $PM = y$. Ex præcedenti igitur capite habebitur vis, quâ punctum M vel à Sole vel Lunâ versùs C urgebitur $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}$, insuper autem idem punctum M sollicitabitur in directione MR normali ad MC vi $= \frac{3Syx}{a^3\sqrt{(xx-yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$. Præter has verò vires punctum M gravitate naturali deorsum pellitur vi $= 1$ secundùm directionem MC, ita ut punctum M ab omnibus his viribus conjunctim in directione MC deorsum urgeatur vi $= 1 + \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}$ ubi ob 1 sequens terminus tutò negligi potest, & in directione MR vi $= \frac{3Syx}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$; quarum duarum virium si MN ponatur media directio, prodibit per regulas compositionis motus anguli CMN tangens $= \frac{3Sy(2ax+4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}+12Sa(yy-2xx)}$, quæ divisione actu institutâ, iisque terminis neglectis in quorum denominatoribus a plures quàm quatuor obtinet dimensiones, abit in hanc expressionem $\frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$, quæ est ea ipsa formula, quâ vis MR exprimebatur. Quocirca angulus CMN prorsùs non pendet ab auctâ minutâve gravitate, sed tantùm à vi horizontali singulis particulis in Terræ superficie sitis impressâ.

§. 35. Quoniam verò hæc ipsa media directio MN debet esse ad curvam aMd in puncto M normalis, erit subnormalis $PN = -\frac{ydy}{dx}$ & $CN = \frac{xdx+ydy}{dx}$. Cùm igitur sit anguli MNP tangens $= \frac{-dx}{dy}$ & anguli MCP tangens $= \frac{y}{x}$, erit horum angulorum differentiæ, hoc est anguli CMN tangens $= \frac{ydy+xdx}{ydx-xdy}$, quæ superiori expressioni, quâ

hæc

hæc eadem tangens designabatur, æqualis posita pro curvâ quæsitâ $aMdb$ sequentem præbebit æquationem $\frac{y dy + x dx}{y dx - x dy} = \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$, ad quam integrandam ponimus $\sqrt{(xx+yy)} = z = MC$, & anguli MCA cosinum $\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} = u$, unde fiet $x = uz$ & $y = z\sqrt{(1-uu)}$, atque $y dx - x dy = \frac{zz du}{\sqrt{(1-uu)}}$, itemque $x dx + y dy = z dz$. Hac autem factâ substitutione, æquatio inventa abit in hanc $\frac{dz}{zz} = \frac{3Sudu}{a^3} + \frac{3Szdu(5uu-1)}{2a^4}$, cujus postremus terminus, qui ob parvitatem præ reliquis ferè evanescit, si abesset, foret integrale $\frac{1}{c} - \frac{1}{z} = \frac{3Suu}{2a^3}$ seu $z = c + \frac{3Sccuu}{2a^3}$ proximè. Ponamus itaque completum integrale esse $z = c + \frac{3Sc^2u^2}{2a^3} + \frac{3Sc^3V}{2a^4}$, ac factâ applicatione reperietur $V = \frac{5u^3-3u}{3}$, ita ut habeatur $z = c + \frac{3Sccuu}{2a^3} + \frac{Sc^3u(5uu-3)}{2a^4}$, quod autem integrale proximè tantùm satisfacit; at mox aliâ viâ aperietur verum ipsius z valorem per u commodiùs & propiùs definiendi.



§. 36. Cùm autem soliditas sphæroidis, quod generatur ex conversione curvæ adb circa axem ab, æqualis esse debeat soliditati Sphæræ radio $CA = 1$ descriptæ, hinc constans quantitas c quæ per integrationem est ingressa, definietur: id quod commodissimè præstabitur, si utraque sphæroidis semissis, superior scilicet versùs S directa, atque inferior seorsim investigetur. Quoniam igitur pro semissi superiori est $CP = x = zu = cu + \frac{3Sccu^3}{2a^3} + \frac{Sc^3u^2(5uu-3)}{2a^4}$ & $MP^2 = y^2 = z^2(1-uu) = (1-uu)\left(cc + \frac{3Sc^3u^2}{a^3} + \frac{Sc^4u(5uu-3)}{a^4}\right)$, erit $\int yy\,dx$, cui soliditas genita conversione spatii $dCPM$ est proportionalis, $= c^3u - \frac{c^3u^3}{3} + \frac{5Sc^4u^3}{2a^3}$

$-\frac{3Sc^4u^5}{2a^3}-\frac{3Sc^5u^2}{a^4}+\frac{21Sc^5u^4}{4a^4}-\frac{5Sc^5u^6}{2a^4}$. Posito igitur $u=1$, prodibit superioris semissis ut $\frac{2}{3}c^3+\frac{Sc^4}{a^3}-\frac{Sc^5}{4a^4}$. Simili modo cùm pro inferiori semissi sit $Cac=z=c+\frac{3Sc^2u^2}{2a^3}-\frac{Sc^3u(5u^2-3)}{2a^4}$, erit ejus soliditas ut $\frac{2}{3}c^3+\frac{Sc^4}{a^3}+\frac{Sc^5}{4a^4}$; ex quibus totius sphæroidis soliditas erit ut $\frac{4}{3}c^3+\frac{2Sc^4}{a^3}$. Quare cùm Sphæræ radio $=1$ descriptæ soliditas pari modo definita, sit ut $\frac{4}{3}$, fiet $1=c^3+\frac{3Sc^4}{2a^3}$; hincque $c=1-\frac{S}{2a^3}$. Quamobrem pro curvâ quæsitâ habebitur, hoc valore loco c substituto, ista æquatio $z=1+\frac{S(3u^2-1)}{2a^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$; ex quâ natura istius curvæ luculenter cognoscitur.

§. 37. Hinc igitur perspicitur à Sole vel Lunâ in S existente aquam, cujus superficies antè erat in A, attolli in a, ita ut sit elevatio $Aa=\frac{S}{a^3}+\frac{S}{a^4}$; atque in regione oppositâ B, aquam pariter elevari per spatium $Bb=\frac{S}{a^3}-\frac{S}{a^4}$: unde patet aquas in A & B, ad eandem ferè altitudinem elevari, cùm excessus superioris elevationis super inferiorem sit tantum $\frac{2S}{a^4}$, quod discrimen respectu totius elevationis vix est sensibile. Contrà verò in regionibus lateralibus D & E, aqua circumquaque æqualiter deprimetur, & quidem per intervallum $Dd=Ee=\frac{S}{2a^3}$; ex quo ista depressio duplo minor est, quàm elevatio quæ in A & B accidit. In punctis præterea F, G, H & I, quæ à cardinalibus A & B distant angulo $54^\circ\ 45'$, quippe pro quo est $3uu-1=0$, neque elevabitur aqua neque deprimetur, sed naturalem tenebit altitudinem. In loco autem Terræ quocumque M cognoscetur aquæ vel elevatio vel depressio ex angulo ACM, cujus cosinus u est sinus altitudinis sub quâ Sol vel Luna in S existens super horizonte conspicitur ab observatore in M constituto; hoc enim in loco aqua elevata erit supra naturalem altitudinem intervallo $=\frac{S(3uu-1)}{2a^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$: quæ expressio si fit negativa, Maris depressionem indicat. Hîc autem annotare non est opus, quòd si punctum S sub horizonte lateat, tum sinus depressionis maneat quidem u, sed negativè accipi debeat.

§. 38. Definiamus igitur primùm cùm elevationem tùm depressionem, quæ à solâ vi Solis ubique terrarum produci deberet, si uti ponimus, omnia in statu æquilibrii essent constituta. Quoniam itaque est $S=227512$ atque $a=20620$ semid. Terræ, si una Terræ semidiameter assumatur

19695539

19695539 pedum Pariſ. erit $\frac{S}{a^3} = 0{,}5072$ ped. ſeu pauxillum excedet ſemipedem: valor autem $\frac{S}{a^4}$ omnino erit quantitas evaneſcens & imperceptibilis. Hanc ob rem in regionibus ſub Sole verticaliter ſitis, quæ habeant Solem vel in Zenith vel Nadir, aqua ultra altitudinem naturalem attolletur ad ſemipedem cum pollicis parte decimâ circiter; depreſſio autem maxima cadet in loca, quæ Solem in horizonte conſpicient; ubi aqua ad quadrantem pedis tantum deprimetur; ex quo totum diſcrimen, quod à Sole in altitudine aquæ naturali oritur, ad tres quartas pedis partes circiter aſſurget. Iſte Solis effectus autem diſtantiæ tantum mediocri Solis à Terra eſt tribuendus: quòd ſi enim Sol verſetur vel in apogæo, vel perigæo, ejus effectus vel diminui vel augeri debebit in ratione reciprocâ triplicatâ diſtantiarum Solis à Terra, quia pendet à valore $\frac{S}{a^3}$. Cùm igitur orbitæ Terræ excentricitas ſit $= \frac{1681}{10000}$, erit intervallum Aa vel Bb, dum Sol in perigæo verſatur, $= 0{,}5332$ ped. ſin autem Sol in apogæo ſit conſtitutus, $= 0{,}4825$ pedum; quorum differentia ad viceſimam pedis partem aſcendit: valor autem medius eſt $= 0{,}5072$, quem pro mediocri diſtantiâ Solis à Terra invenimus.

§. 39. Problema hoc, quod hucuſque dedimus ſolutum, quodque maximi eſt momenti ad effectus cùm Solis tùm Lunæ in Mari elevando & deprimendo definiendos, Newtonus ne attigit quidem, ſed aliam viam ſecutus, non ſolùm indirectam ſed etiam erroneam, invenit Mare à ſolâ vi Solis ad altitudinem duorum ferè pedum elevari debere; cùm tamen tam eandem vim Soli abſolutam quàm eandem diſtantiam à Terra aſſumſiſſet, quibus nos ſumus uſi. Concluſit autem hunc enormem effectum ex comparatione vis Solis ſeu valoris $\frac{S}{a^3}$ cum vi Terræ centrifugâ à motu diurno ortâ, quâ Terra ſub æquatore extenditur ac craſſior redditur quàm ſub polis; atque aſſumit elevationem aquæ à vi Solis ortam eandem tenere debere rationem ad incrementum Terræ ſub æquatore à vi centrifuga factum, quàm teneat vis Solis ad vim centrifugam. Sed præterquam quòd hoc ratiocinium nimis infirmo ſuperſtructum fundamento, noſtrâ viâ directâ, quâ ſumus uſi, ſtatim evertitur: ex ipsâ enim rei naturâ, nullis precariis aſſumtis principiis, elevationem aquarum à vi Solis oriundam directè & luculenter determinavimus; ac ſi ullum etiam dubium ob integrationem per approximationes tantum inſtitutum reſtaret, id mox tolletur, cùm infrà idem problema aliâ methodo prorſus diversâ ſumus reſoluturi, congruentemque ſolutionem exhibituri.

§. 40. Quamvis autem iſte Solis effectus in Mari tam elevando quàm deprimendo non adeò certus & planus eſſe videatur ob parallaxin Solis;

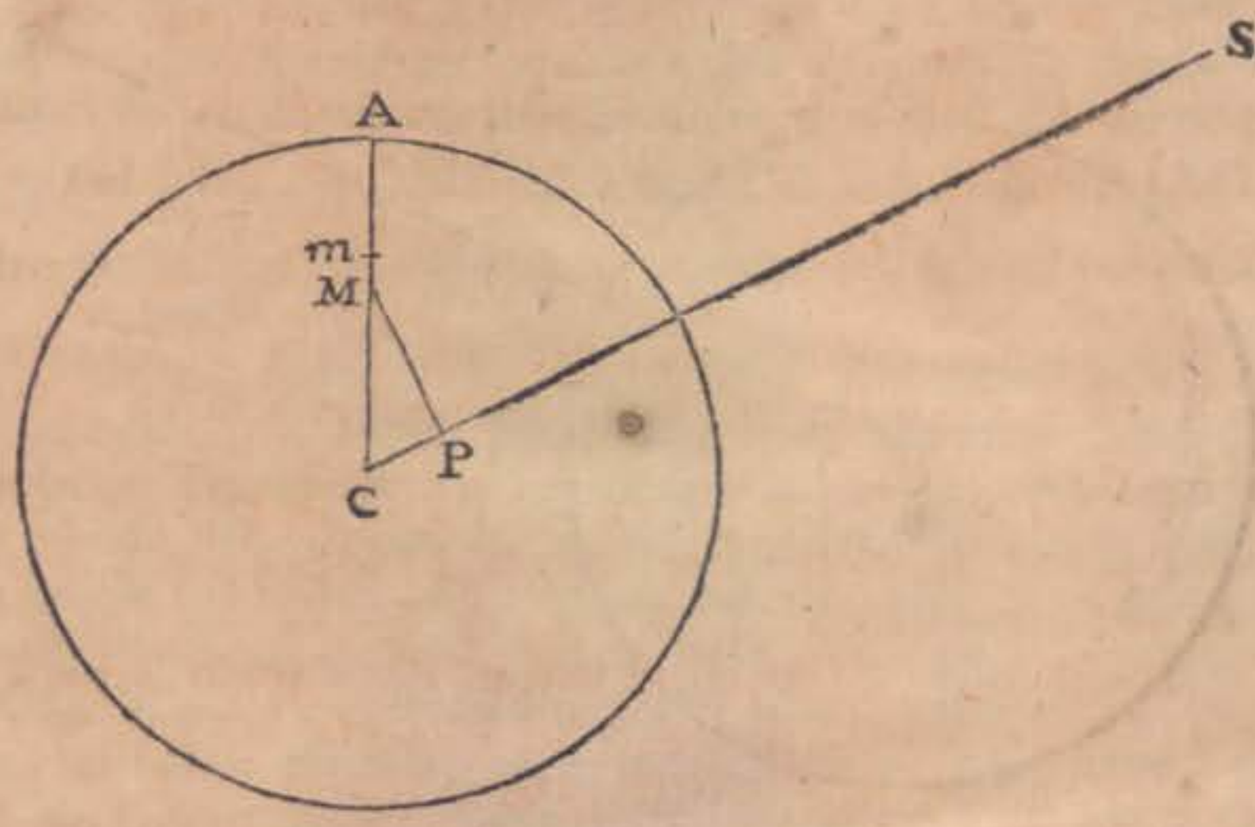
Solis, quam 10″ assumsimus, nondum accuratissimè definitam; à quâ tam distantia Solis à Terra a, quàm æstimatio vis absolutæ S, pendet: tamen si rem attentiùs perpendamus, comperiemus expressionem $\frac{S}{a^3}$ perpetuò eundem retinere valorem, quæcumque Soli parallaxis tribuatur: mutatâ enim parallaxi, valor litteræ S præcisè in eadem ratione, in quâ cubus distantiæ a^3, mutabitur. Per leges enim motûs firmissimè stabilitas patebit quantitatem $\frac{S}{a^3}$ à solo tempore periodico Terræ circa Solem determinari, cujus quantitas accuratissimè est definita. Quod ut clariùs appareat, considerabimus planetam quemcunque circa Solem in orbitâ ellipticâ revolventem, cujus semiaxis transversus seu distantia à Sole media sit $= a$, vis autem Solis absoluta $= S$, erit tempus periodicum semper ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; quòd si igitur tempus periodicum sit $= t$, erit t ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$ & $\frac{S}{a^3}$ uti $\frac{1}{tt}$.

Ad valorem autem fractionis $\frac{S}{a^3}$ absolutè inveniendum, exprimatur a in semidiametris Terræ, atque in minutis secundis dato tempore periodico t, erit semper $t = \frac{5064\frac{1}{2}\, a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; ex quo prodit $\frac{S}{a^3} = \frac{5064\frac{1}{2} \times 5064\frac{1}{2}}{tt}$, positâ unitate cùm pro gravitate naturali, tùm pro unâ Terræ semidiametro. At si tempus Terræ periodicum seu annus sidereus in minutis secundis exponatur, fiet $t = 31558164$, atque $\frac{S}{a^3} = 0{,}50723$ ped. positâ semidiametro Terræ per observationes exactissimas 19695539 ped. Paris. Reg. omnino uti antè invenimus.

§. 41. Simili modo ex superiori æquatione elevatio aquæ à vi Lunæ oriunda determinabitur; positâ enim vi Lunæ absolutâ $= L$, poni oportet $S = L$, ejusque valor proximè erit $= \frac{1}{40}$, quem à Newtono repertum tantisper retinebimus, quoad verus valor per alia Phænomena accuratiùs definiatur. Quoniam itaque Lunæ à Terrâ mediocris distantia est $= 60\frac{1}{2}$ semid. Terræ, erit $\frac{S}{a^3} = L \times 88{,}94$ ped. $= 2{,}223$ ped. & $\frac{S}{a^4}$ $= L \times 1{,}47 = 0{,}037$ ped. Cùm autem Lunæ excentricitas sit quasi $\frac{550}{10000}$, erit dum Luna in perigæo versatur $\frac{S}{a^3} = L \times 104{,}44$ ped. $= 2{,}611$ ped. & $\frac{S}{a^4}$ $= L \times 1{,}82 = 0{,}045$. pedum. At si Luna fuerit in apogæo, prodibit $\frac{S}{a^3}$ $= L \times 75{,}74$ ped. $= 1{,}893$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}19 = 0{,}030$ pedum. Ex his igitur si Luna à Terrâ mediocriter distet, erit aquæ elevatio $Aa = L \times 90{,}41$ ped. $= 2{,}260$ ped. elevatio autem $Bb = L \times 87{,}47$ ped. $= 2{,}187$ pedum: ac depressio ad latera $Dd = Ee = L \times 44{,}47$ pedum $= 1{,}112$ ped. Pro perigæo verò Lunæ fiet $Aa = L \times 106{,}26$ ped. $= 2{,}656$ pedum

dum; $Bb = L.\ 102,\ 62$ ped. $= 2,565$ pedum; atque $Dd = Ee = L.\ 52,22 = 1,305$ pedum. Pro apogæo denique Lunæ habebitur $Aa = L.\ 76,93$ ped. $= 1,923$ pedum, & $Bb = L.\ 74,55$ ped. $= 1,864$ pedum, atque $Dd = Ee = L.\ 37,87$ ped. $= 0,947$ pedum.

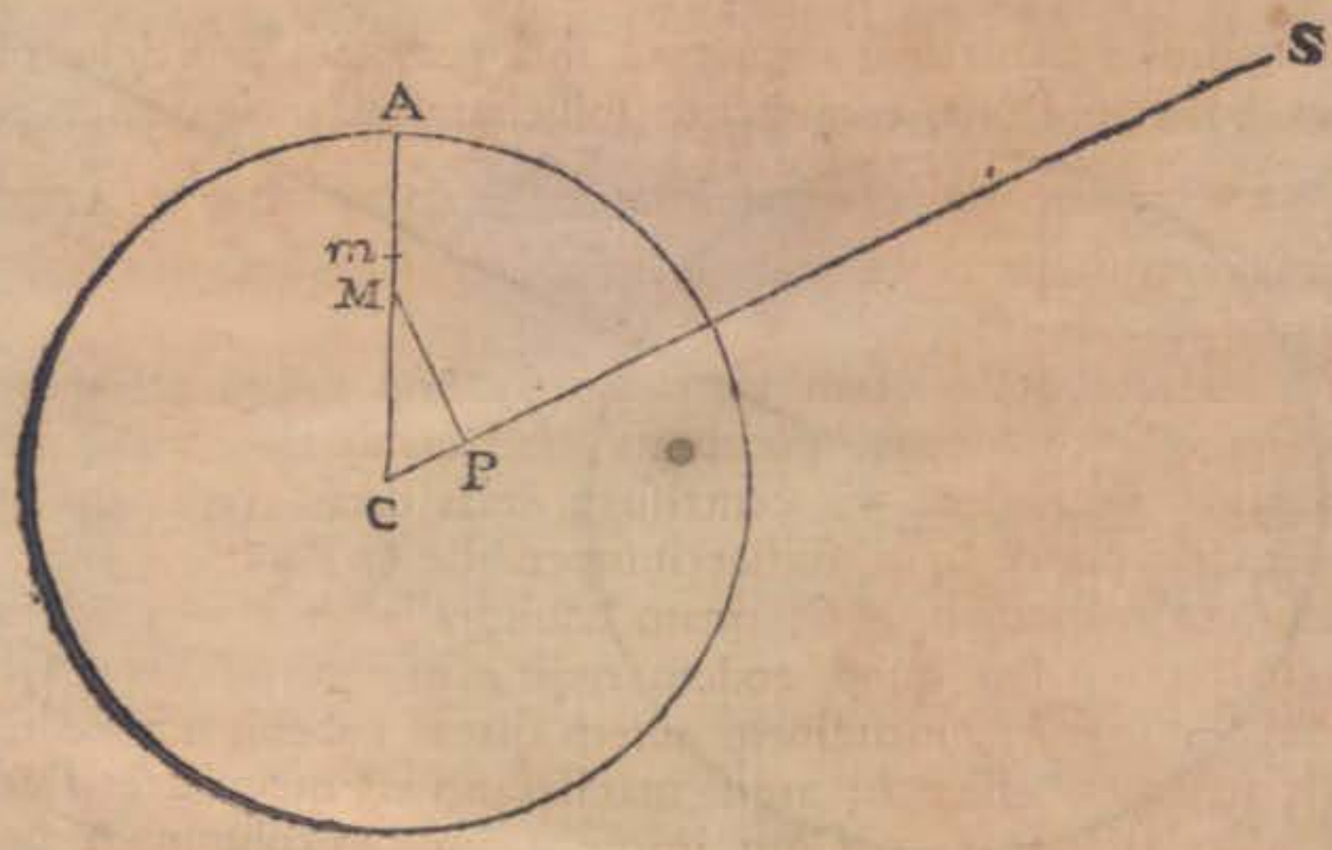
§. 42. Tametsi autem hac methodo non difficulter tam elevatio Maris quàm depressio quæ vel à Sole vel Lunâ seorsum gignitur, sit determinata, si quidem omnia ad statum quietis redacta concipiantur; tamen nimiùm foret difficile ejusdem methodi ope easdem res definire, si Sol & Luna conjunctim agant. Quamobrem aliam methodum exponamus, cujus usus pro utroque casu æquè pateat; quæ cùm à priori penitùs sit diversa, simul ea, quæ jam sunt eruta atque à Newtonianis diversa deprehensa, maximè confirmabit. Petita verò est hæc altera methodus ex eâ æquilibrii proprietate, quâ requiritur, ut omnes columnæ



aqueæ à superficie Terræ ad centrum pertingentes sint inter se æquiponderantes. Existente igitur vel Sole vel Lunâ in S, cujus vis absoluta ponatur $= S$, & distantia $SC = a$, sit AC columna aquea à superficie Terræ A ad centrum C usque pertingens, quæ altitudo AC sit $= b$. Ponatur anguli ACS cosinus $= u$, qui simul erit sinus altitudinis sub quâ punctum S à spectatore in A constituto super horizonte elevatum conspicitur; sumaturque intervallum quodcunque $CM = z$, & consideretur totius columnæ elementum $Mm = dz$. Hoc igitur elementum primò à gravitate deorsum versùs C urgebitur, cujus effectus, cùm intra Terram pro variis distantiis non satis constet, ponatur dignitati cuicunque distantiarum à centro putà ipsi z^n proportionalis: mox enim planum fiet exponentem n nil omnino determinationes esse turbaturum. Urgebitur er-

go elementum Mm versùs centrum C vi $= z^n dz$; ex quo totius columnæ AC nisus deorsum à gravitate oriundus, erit $= \frac{h^{n+1}}{n+1}$.

§. 43. Præterea autem elementum $Mm = dz$ à vi S sollicitabitur duplici modo, altero deorsum in directione MC, altero in directione ad illam MC normali, quæ posterior vis, cùm pondus columnæ nequaquam afficiat, tutò negligetur, solaque prior considerabitur. Demisso autem ex M in CS perpendiculo MP, positisque $CP = x$ & $PM = y$, erit $\sqrt{(x^2+y^2)} = z$, & $x = uz$ atque $y = z\sqrt{(1-uu)}$. At ex §. 27. vis, quâ particulâ Mm deorsum sollicitatur, est $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sx(2yy-2xx)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$ $= \frac{Sz(1-3uu)}{a^3} + \frac{3Suz^2(3-5uu)}{2a^4}$. Quæ expressio per dz multiplicata,



tumque integrata facto $z = h$, præbebit totius columnæ AC nisum à vi S oriundum $= \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$. Quocirca totus columnæ AC nisus deorsum tendens erit $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1-2uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$; qui cùm in omnibus columnis debeat esse idem, æquabitur conatui, quo columna æqualis semidiametro Terræ 1 in statu naturali à solâ gravitate deorsum nititur, quæ vis est $= \frac{1}{n+1}$. Hinc igitur sequens emergit æquatio, $1 = h^{n+1} + \frac{(n+1)Sh^2(1-2uu)}{2a^3} + \frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$; ex quâ elicitur $h = 1 + \frac{S(2uu-1)}{2.3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$, quæ est ea ipsa expressio, quam suprà §. 36. alterâ methodo invenimus.

§. 44.

§. 44. Agant nunc vires ambæ ad Solem Lunamque directæ conjunctim; ac primò quidem designet S Solis vim absolutam, a ejus distantiam à Terra, & u sinum anguli, quo Sol suprà horizontem est elevatus. Deinde sit simili modo pro Luna L ejus vis absoluta, b ejus distantia à Terrâ, atque v sinus altitudinis Lunæ super horizonte. Ex his igitur columna aquea $AC=h$ tam vi propriæ gravitatis quàm à viribus Solis ac Lunæ conjunctim in centrum C urgebitur vi $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Lh^2(1-3vv)}{2b^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$, quæ æqualis esse debebit vi $\frac{1}{n+1}$. Ex hac autem æquatione resultat $h = 1 + \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$. Quocirca aqua in A supra situm naturalem, quem à solâ gravitate sollicitata obtineret, à viribus Solis ac Lunæ conjunctim sollicitantibus, elevabitur per intervallum $= \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, ex quâ expressione status aquæ vel elevationis vel depressionis ubique terrarum cognoscetur.

§. 45. Hanc posteriorem viam secuti, non solùm actiones Solis ac Lunæ commodè conjungere potuimus, sed etiam nunc nobis licebit motûs vertiginis Terræ, & vis centrifugæ inde ortæ, rationem habere; id quod methodo priore opus fuisset insuperabile. Ponamus enim altitudinem columnæ naturalem AC, quam habitura esset à vi gravitatis & vi centrifugâ simul, seu quod eodem redit, in figurâ Terræ sphæroidicâ compressâ, esse $=f$, altitudinem autem quam habebit accedentibus viribus Solis ac Lunæ esse $=h$; atque manifestum est quantitates f & h quàm minimè ab 1 discrepare. Cùm igitur utriusque columnæ f & h idem debeat esse nisus deorsùm, columnæ autem f in quam sola gravitas & vis centrifuga agunt nisus sit $= \frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha ff$, denotante α quantitatem à vi centrifugâ in A pendentem, columnæ verò h nisus sit $= \frac{h^{n+1}}{n+1} - \alpha h^2 + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Lh^2(1-3vv}{2b^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5v^2)}{2b^4}$; erit æqualitate factâ $f^{n+1} - (n+1)\alpha ff = h^{n+1} - (n+1)\alpha h^2 + \frac{(n+1)Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{(n+1)Lh^2(3-1vv)}{2b^3} + \frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$. Ponatur $h=f+s$, erit ob α quantitatem vehementer parvam, a verò & b maximas, $0 = f^n s + \frac{Sf^2(1-uu)}{2a^3} + \frac{Lf^2(1-3vv)}{2b^3} - 2\alpha fs + \frac{Sfs(1-3uu)}{a^3} + \frac{Lfs(1-3vv)}{b^3} + \frac{Sf^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lf^3v(3-5vv}{2a^4}$, neglectis terminis in

quibus s plures obtinet dimensiones, ob summam ipsius s parvitatem respectu ipsius f. Hinc itaque fiet $s = \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Sfu(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lfv(5vv-3)}{2b^4}$ / $f^{n-2} - \frac{2\alpha}{f} + \frac{S(1-3uu)}{a^3 f} + \frac{L(1-3vv)}{b^3 f}$.

Quòd si porrò ponatur semiaxis Terræ per polos transiens $= 1$, erit ob æquilibrium $\frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha ff = \frac{1}{n+1}$ & $f = 1 + \alpha$, ex quo denominator præcedentis fractionis ab unitate quàm minimè discrepabit; sub ipso enim æquatore est $\alpha = \frac{1}{578}$, ubi quidem est maximum: unde omnino ut antè elevatio aquæ à viribus Solis ac Lunæ orta supra altitudinem naturalem $s = \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$; discrimen enim quod revera aderit, sensus omnino effugiet, pendebitque simul à valore exponentis n.

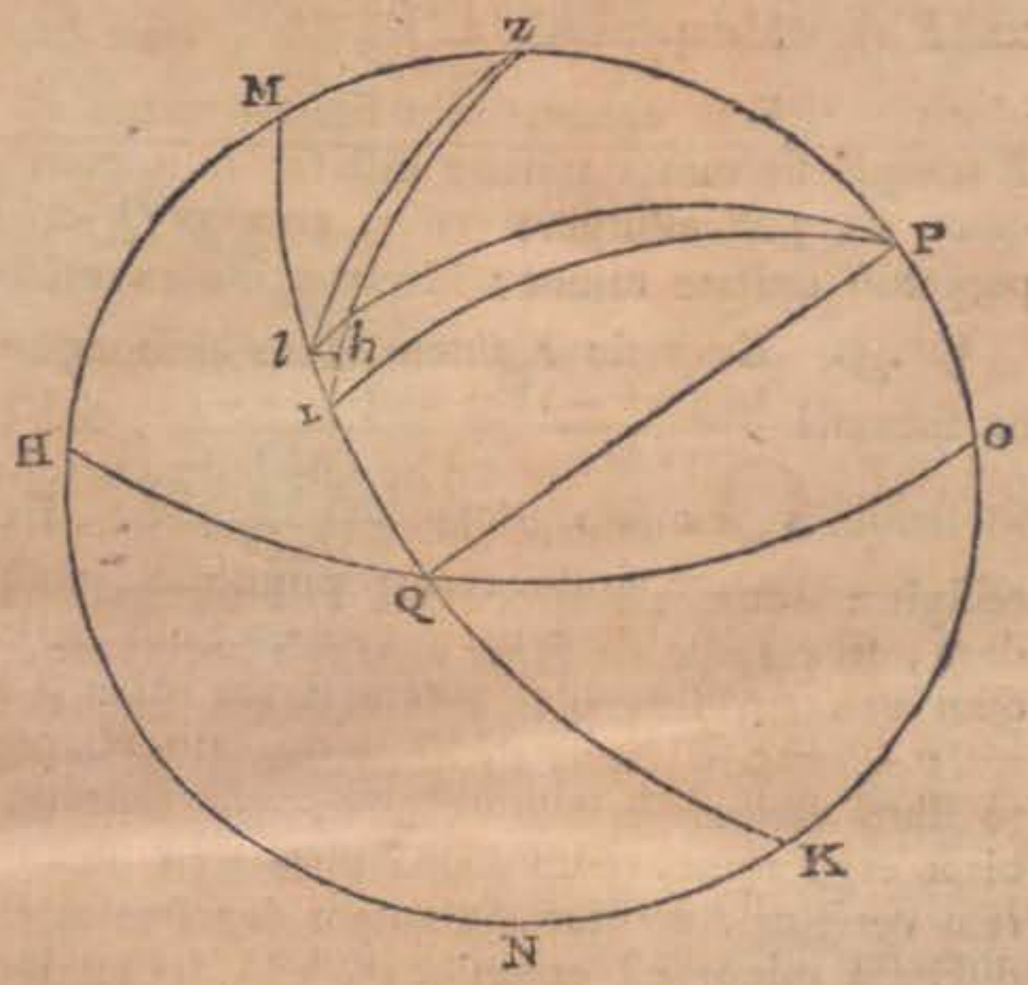
CAPUT QUARTUM.

De Fluxu ac Refluxu Maris si aqua omni inertiâ careret.

§. 46. QUÆ in capite præcedente sunt tradita respiciunt hypothesin assumtam, quâ Solem ac Lunam respectu Terræ perpetuò eundem situm tenere posuimus; ibique præcipuè statum æquilibrii, ad quem Oceanus à viribus Solis & Lunæ perducatur, determinavimus. Longè aliter autem se res habet, si tam Luna & Sol quàm Terra in motum collocentur, quo casu ob perpetuam sitûs relativi mutationem nunquam æquilibrium adesse poterit; cùm enim tempore opus sit, quo data vis datum corpus ad motum perducat, duplici modo status oceani assignatus à vero discrepabit. Namque primò aqua quovis momento in eum æquilibrii situm, quem vires sollicitantes intendunt, pervenire non poterit, sed tantum ad eum appropinquabit continuò; deinde etiamsi in ipsum æquilibrii situm perveniat, in eo tamen non acquiescet, sed motú jam concepto ulteriùs feretur, uti ex naturâ motûs abundè constat. Hujus autem utriusque aberrationis ratio in inertiâ aquæ est posita, quâ fit ut aqua nec subitò in eum situm se conferat, in quo cum viribus datur æquilibrium, nec cùm hunc æquilibrii situm attigerit, ibi quiescat. Quocirca ne difficultatum multitudine obruamur, aquam omni inertiâ carentem assumamus, hoc est istius indolis, ut non solùm quovis momento se in statum æquilibrii subitò recipiat, sed ibi etiam omnem motum insitum deponendo permaneat, quamdiu iste situs viribus sol-

ſollicitantibus conveniat. Hâc itaque factâ hypotheſi, perſpicuum eſt aquam quovis temporis momento in eo ipſo ſtatu fore conſtitutam, qui ſecundùm præcepta capitis præcedentis poſitioni cùm Solis tùm Lunæ reſpondeat.

§. 47. Ut igitur in hâc hypotheſi, quâ Mare vis inertiæ expers ponimus, pro quovis loco ad quodvis tempus ſtatum Maris quàm commodiſſimè definiamus, primùm ſolam Lunam conſiderabimus, cùm in eâ præcipua æſtûs Maris cauſa contineatur, atque tam Fluxus quam Refluxus Maris à tranſitu Lunæ per meridianum computari ſoleat: quòd ſi enim Lunæ effectus innotuerit, non ſolùm Solis effectus quoque mutatis mutandis colligetur, ſed etiam effectus, qui ab ambobus luminaribus ſimul agentibus proficiſcitur. Propoſitus igitur ſit Terræ locus quicunque, cujus in cœlo Zenith ſit Z, horizon HQO & P polus borealis, ita ut arcus PO ſit hujus loci elevatio poli, & circulus $PZHNO$ meridianus. Sit porrò MLK parallelus æquatori, in quo Luna jam motu diurno circumferatur, atque hoc momento reperiatur Luna in L; eritque tempus, quo Luna vel ex L ad meridianum M appellet, vel viciſſim à meridiano ad L pertigit, ut angulus MPL, ſive hoc tempus ſe habebit ad tempus unius revolutionis Lunæ, quod eſt 24. horarum 48′, uti ſe habet angulus MPL ad quatuor rectos. Sit igitur anguli MPL coſinus $= t$, ſinus elevationis poli PO ſeu ſinus arcûs $PZ = p$, coſinus $= P$, ac ſinus declinationis Lunæ borealis $= Q$, qui idem eſt ſinus diſtantiæ Lunæ à polo PL, hujus verò ipſius arcûs ſinus ſit $= q$, cui ſimul coſinus declinationis Lunæ æquatur, atque ob ſinum totum conſtanter poſitum $= 1$, erit $Q^2 + q^2 = 1$. Cùm jam in triangulo ſphærico ZPL dentur arcus PZ & PL cum angulo ZPL, reperietur per Trigonometriam ſphæricam arcûs ZL coſinus $= tpq + PQ$, qui ſimul eſt ſinus altitudinis Lunæ ſupra horizontem, quem antè poſuimus $= v$. Ex quibus erit $v = tpq + PQ$, & $3vv - 1 = 3(tpq + PQ)^2 - 1$, atque $5vv - 3 = 5(tpq +$



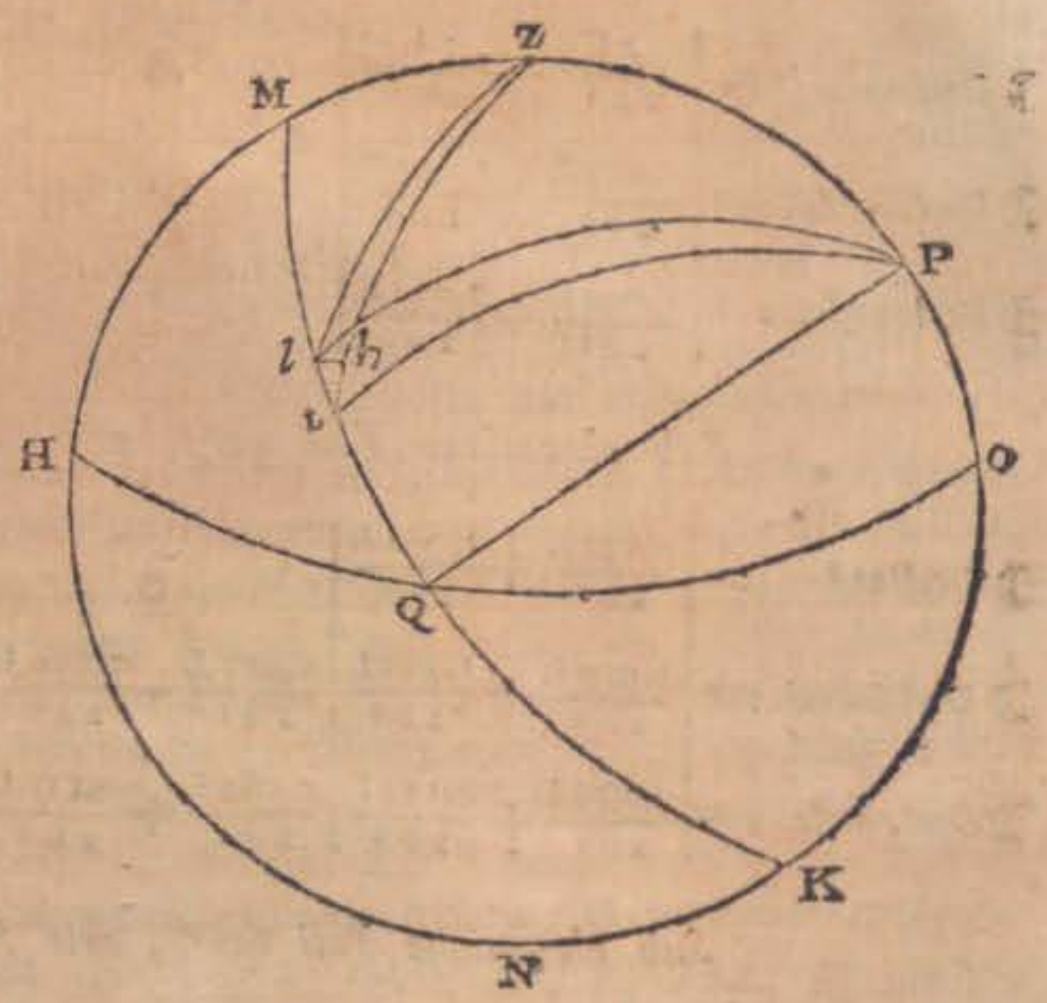
$(3pq+PQ)^2-3$; qui valores in formulis præcedentis capitis ſubſtituti præbebunt ſtatum Maris, hoc eſt vel elevationem vel depreſſionem, pro loco propoſito ad tempus aſſignatum.

§. 48. Quòd ſi ergo Lunæ vis abſoluta ponatur $= L$, ejuſque à Terra diſtantia $= b$, erit intervallum, quo aqua ſupra ſtatum naturalem elevabitur, $= \frac{L(3(3pq+PQ)^2-1)}{2b^3} + \frac{L(3pq+PQ)(5(3pq+PQ)^2-3)}{2b^4}$, quæ expreſſio ſi fit negativa, indicat aquam infra ſtatum naturalem eſſe depreſſam. Ponamus Lunam horizonte ſeu versùs auſtrum per meridianum tranſire, quo caſu erit $t=1$; hoc igitur tempore aqua ſupra ſtatum naturalem erit elevata intervallo $= \frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3} + \frac{L(pq+PQ)(5(pq+PQ)^2-3)}{2b^4}$. Contrà verò dum Luna ſub horizonte vel versùs boream ad meridianum appellit, fiet elevatio aquæ ſupra ſtatum naturalem per intervallum $= \frac{L(3P^2Q^2-1)}{2b^3} + \frac{LPQ(5P^2Q^2-3)}{2b^4}$; quæ expreſſio ſemper eſt negativa; ideoque indicat aquam infra ſtatum naturalem conſiſtere. Namque cùm P ubique ſit minor unitate niſi ſub ipſis polis, ac declinatio Lunæ nunquam ad 30° aſſurgere poſſit, ex quo $Q < \frac{1}{2}$ & $QQ < \frac{1}{4}$, erit $3P^2Q^2$ perpetuò unitate minor; ideoque illa expreſſio negativa.

§. 49. De ratione autem elevationis aquæ in genere judicare licebit ex formulâ $\frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, ſeu cùm poſterior terminus vix ſit ſenſibilis, ex ſolo priore $\frac{L(3vv-1)}{2b^3}$. Ex hâc autem expreſſione intelligitur aquæ elevationem à ſolâ elongatione Lunæ ab horizonte pendere, ſive Luna ſit ſuper ſive ſub horizonte, retinet enim $3vv-1$ eundem valorem ſive v ſit affirmativum ſive negativum. Deinde quia fit $3vv-1=0$ ſi Luna ab horizonte diſtet arcu 35° 16′, tum aqua in ipſo ſtatu naturali erit conſtituta, neque elevata neque depreſſa. Elevabitur ergo aqua, cùm Luna ultra 35° 16′ vel ſupra vel infra horizontem verſetur, è contrario autem deprimetur quando Lunæ ab horizonte diſtantia minor eſt quàm 35°. 16′. Omnino autem aqua maximè erit depreſſa dum Luna ipſum horizontem occupat, hocque tempore infra ſtatum naturalem ſubſidet intervallo $\frac{L}{2b^3} = 1,111$ pedum (§. 41.); atque de hoc ſitu elevabitur recedente Lunâ ab horizonte ſive ſuper ſive ſub Terra. Hinc iis in regionibus, in quibus Luna oritur & occidit, tempore 24. hor. 48′ Mare bis maximè erit depreſſa, biſque elevata; ſtatus ſcilicet depreſſionis incidet in appulſus Lunæ ad horizontem, ſtatus autem elevationis in appulſus Lunæ ad meridianum. At quibus in regionibus Luna nec oritur nec occidit, quoniam ibi Luna altero appulſu ad meridianum maximè, altero minimè ab horizonte diſtat, ſpatio 24 h. 48′ aqua

ſemel tantum elevabitur, ſemelque deprimetur: ſub ipſis autem polis æſtus Maris omnino erit nullus, diurnus ſcilicet; nam variatio declinationis ſola ſtatum Maris turbabit.

§. 50. Cùm igitur ſub polis Terræ nullus ſit Fluxus ac Refluxus Maris, ſed aqua tantum aliquantulum aſcendat deſcendatque, prout Luna vel magis ab æquatore recedit vel ad eum accedit; videamus etiam quomodo æſtus Maris in aliis Terræ regionibus ſecundùm noſtram hypotheſin debeat eſſe comparatus. Conſiderabimus autem præcipuè tres regiones, quarum prima poſita ſit ſub ipſo æquatore, ſecunda habeat elevationem poli 30 graduum, tertia verò 60 graduum. Quia igitur in his omnibus regionibus Luna oritur atque occidit, maxima depreſſio aquæ ubique erit eadem, ſcilicet per intervallum $\frac{L}{2b^3}$ infra ſitum naturalem, eaque continget bis, quando nimirum Luna in ipſo horizonte verſatur. Ab hoc itaque ſtatu maximæ depreſſionis elevationes Maris indicabimus & computabimus, ſpatiis aſſignandis, per quæ aqua attolletur dum Luna vel ſupra horizontem in *M* vel infra in *K* ad meridianum appellit, itemque dum ab utroque meridiano æqualiter diſtat, qui locus ſit *L* exiſtente angulo *M P L* recto. Præterea tres quoque Lunæ ſitus in ſuâ orbitâ contemplabimur, quorum primus ſit, cùm Luna in ipſo æquatore verſatur, ſecundus cùm Luna habet declinationem borealem 20 graduum, tertius verò cùm Luna declinationem habet auſtralem pariter 20 graduum. Denique in tabellâ ſequente adſcripſimus quantitatem anguli *M P Q*, ex quo tempus tam ortûs quàm occaſûs Lunæ, quo aqua maximè eſt depreſſa, atque elevatio exiſtit nulla, innoteſcit.



In locis ſub Æquatore ſitis, eſt elevatio Maris, dum Luna verſatur in

		M	*L*	*K*	*ang. MPQ.*
☽ *Declinatio*	0°	$\frac{3L}{2b^3}+\frac{2L}{2b^4}$	0	$\frac{3L}{2b^3}-\frac{2L}{2b^4}$	90°, 0′
☽ *Decl. boreal.*	20°	$\frac{2,649\,L}{2b^3}+\frac{1,549\,L}{2b^4}$	0	$\frac{2,649\,L}{2b^3}-\frac{1,549\,L}{2b^4}$	90°, 0′
☽ *Decl. auſtr.*	20°	$\frac{2,649\,L}{2b^3}+\frac{1,549\,L}{2b^4}$	0	$\frac{2,649\,L}{2b^3}-\frac{1,549\,L}{2b^4}$	90°, 0′

Sub elevatione Poli 30°; *erit Maris elevatio*

☽ *Declinatio*	0°	$\frac{2,250\,L}{2b^3}+\frac{1,082\,L}{2b^4}$	0	$\frac{2,250\,L}{2b^3}-\frac{1,082\,L}{2b^4}$	90°, 0′
☽ *Decl. boreal.*	20°	$\frac{2,909\,L}{2b^3}+\frac{1,880\,L}{2b^4}$	$\frac{0,087\,L}{2b^3}-\frac{0,156\,L}{2b^4}$	$\frac{1,239\,L}{2b^3}-\frac{0,154\,L}{2b^4}$	102°, 8′
☽ *Decl. auſtr.*	20°	$\frac{1,239\,L}{2b^3}+\frac{0,154\,L}{2b^4}$	$\frac{0,087\,L}{2b^3}+\frac{0,156\,L}{2b^4}$	$\frac{2,909\,L}{2b^3}-\frac{1,880\,L}{2b^4}$	77°, 52′

Sub elevatione Poli 60°, *erit Maris elevatio*

☽ *Declinatio*	0°	$\frac{0,740\,L}{2b^3}-\frac{0,125\,L}{2b^4}$	0	$\frac{0,740\,L}{2b^3}+\frac{0,125\,L}{2b^4}$	90°, 0′
☽ *Decl. boreal.*	20°	$\frac{1,760\,L}{2b^3}+\frac{0,582\,L}{2b^4}$	$\frac{0,263\,L}{2b^3}-\frac{0,514\,L}{2b^4}$	$\frac{0,092\,L}{2b^3}+\frac{0,158\,L}{2b^4}$	129°, 5′
☽ *Decl. auſtr.*	20°	$\frac{0,092\,L}{2b^3}-\frac{0,158\,L}{2b^4}$	$\frac{0,263\,L}{2b^3}+\frac{0,514\,L}{2b^4}$	$\frac{1,760\,L}{2b^3}-\frac{0,582\,L}{2b^4}$	50°, 55′

§. 51. Si quis jam ex hâc tabulâ elevationem Maris ſupra ſtatum maximæ depreſſionis in menſuris cognitis definire voluerit, is loco fractionum $\frac{L}{b^3}$ & $\frac{L}{b^4}$ earum valores in pedibus Pariſinis ex §. 41. ſubſtituat, habitâ ratione diſtantiæ Lunæ à Terrâ, prout ibidem eſt expoſitum. Conſequuntur autem ex hac tabulâ multa egregia conſectaria, quæ verò nondum ſummo cum rigore ad experientiam examinari poſſunt, etiamſi jam inſignis convenientia deprehendatur. Aquam enim adhuc omnis inertiæ expertem ponimus, perſpicuum autem eſt, ſi aquæ inertia tribuatur, tum diverſa omnino Phænomena oriri oportere. Quòd ſi igitur hi aſſignati effectus jam cum obſervationibus planè conſentirent, id potiùs theoriam everteret quàm confirmaret, cùm aquam extra ſtatum ſuum naturalem

turalem ſimus contemplati. Interim tamen ſatis tutò jàm ſtatus Maris ub ipſis polis poterit definiri, qui etſi ad experientiam examinari non poteſt, tamen ipsâ ratione confirmabitur. Ac primò quidem ſub polis nulla erit Maris mutatio diurna, cùm Luna per totum diem eandem teneat ab horizonte diſtantiam, id quod ipſa quoque ratio dictat, quia ibi non datur meridianus, à cujus appulſu æſtus Maris alibi æſtimari ſolet. Dabitur tamen his locis mutatio menſtrua, atque aqua maximè erit humilis cùm Luna in ipſo æquatore verſatur, quo quippe tempore perpetuò horizontem occupabit. Hinc porrò aqua ſenſim elevabitur prout Lunæ declinatio ſive versùs boream ſive versùs auſtrum augetur, donec tandem ſi declinatio fit maxima, per ſpatium 10 pollicum tantum elevetur; quæ mutatio cùm ſit perquàm lenta, ab inertia aquæ vix turbabitur.

§. 52. Ex his verò iiſdem formulis effectus à Sole oriundus non difficulter colligetur; tantum enim quantitates S & a, loco L & ſubſtitui oportet, quo facto effectus Solis circiter quater minor reperietur quàm is qui à Lunâ oritur. Seorſim autem cùm Solis tùm Lunæ effectibus definitis, per conjunctionem ſimplicem effectus, quem ambo luminaria conjunctim producunt, determinabitur. Ponamus itaque primùm Solem Lunamque in conjunctione verſari, id quod fit tempore novilunii; tum igitur neglectâ Lunæ latitudine, Sol & Luna in eodem eclipticæ loco verſabuntur, atque ſimul ad meridianum æquè ac ad horizontem appellent. Quocirca manentibus ſuperioribus denominationibus, erit quoque Solis declinationis ſinus $= Q$, coſinus $= q$, ac pro angulo MPL cujus coſinus eſt $= t$, erit ſinus altitudinis Solis pariter uti Lunæ $= tpq + PQ$. Ex quo dum ambo luminaria per meridianum versùs auſtrum tranſeunt, aquæ elevatio, quæ tum erit maxima, altitudinem naturalem ſuperabit intervallo $= \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)\left(3(pq+PQ)^2-1\right) + \frac{L(pq+PQ)}{2b^4}\left(5(pq+PQ)^2-3\right)$, neglecto altero termino à vi Solis oriundo, cùm ſenſus omnino effugiat. At dum ambo luminaria infra horizontem ad meridianum pertingunt, erit elevatio aquæ $= \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)(3(PQ-pq)^2-1) + \frac{L(PQ-pq)}{2b^4}(5(PQ-pq)^2-3)$. Maxima denique aquæ depreſſio incidet, quando luminaria vel oriuntur vel occidunt, eaque minor erit quàm altitudo aquæ naturalis intervallo $= \frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}$. Cùm igitur $\frac{S}{2a^3}$ ſit circiter ſubquadruplum ipſius $\frac{L}{2b^3}$, in novilunio omnes effectus Lunæ ſuprà recenſiti, quartâ ſui parte augebuntur.

§. 53. In plenilunio omnia eodem ſe habere modo deprehenduntur, quo in novilunio, quia enim tum Sol & Luna in oppoſitione verſantur, erit declinatio Solis æqualis & contraria declinationi Lunæ, unde quidem pro Sole fit $-Q$, quod in novilunio erat $+Q$; at cùm Sol ſecun-

dùm aſcenſionem rectam à Lunâ diſtet 180°, erit hoc caſu $-t$, quod antè erat $+t$, ex quo pro plenilunio habetur ſinus altitudinis Solis $=-tpq-PQ$, qui pro novilunio erat $=tpq+PQ$, ex quo quadratum hujus ſinûs utroque caſu eſt idem, ideoque etiam eadem Phænomena in novilunio atque plenilunio. Deinde etiam hoc tempore aqua maximè deprimetur, cùm luminaria ambo in horizonte verſantur, tumque aqua humilior erit quàm in ſtatu naturali intervallo $= \frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}$. Ex hoc itaque ſitu donec Luna ad meridianum ſupra Terram appellit, aqua elevabitur per intervallum $= 3(PQ+pq)^2\left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right)$, tantoque iterum ſubſidet uſque ad Lunæ obitum; tum verò rurſus elevabitur uſque ad appulſum Lunæ ad meridianum infra horizontem, idque per ſpatium $3(PQ-pq)^2\left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right)$, neglecto termino ſequente quippe ferè inſenſibili. Cùm igitur ſint $PQ+pq$ & $PQ-pq$ ſinus diſtantiæ Lunæ ab horizonte dum in meridiano verſatur, erunt ſpatia per quæ aqua tempore pleniluniorum ac noviluniorum ſupra ſtatum maximè depreſſum elevatur, in ratione duplicatâ ſinuum diſtantiarum Lunæ ab horizonte, dum per meridianum tranſit. Niſi ergo vel Luna in ipſo æquatore exiſtat, vel Terræ locus ſub æquatore ſit ſitus, Fluxus Maris diurni ac nocturni erunt inæquales; luminaribus autem in æquatore extantibus, utraque aquæ elevatio fiet per ſpatium $= 3pp\left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right)$.

§. 54. Ut nunc in effectus, quos Sol & Luna in quadraturis ſiti conjunctim producunt, inquiramus; ponamus, ne calculus nimium fiat prolixus, Solem in ipſo æquatore verſari, quoniam tum plerumque minimus æſtus obſervatur. Hoc itaque caſu Solis declinatio erit nulla, Lunæ verò maxima, quam neglectâ latitudine aſſumamus 23° 29′, cujus ſinus ſit $= Q$, coſinus $= q$, poſitâ hac declinatione boreali. Jam ponamus Lunam in meridiano in M verſari, quo tempore Sol erit in horizonte; unde cùm aqua ſupra ſtatum naturalem elevetur à Lunâ intervallo $\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3}$, à Sole verò deprimatur intervallo $\frac{S}{2a^3}$, ab utrâque vi conjunctim elevabitur per ſpatium $\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3}-\frac{S}{2a^3}$: at dum Luna ſub horizonte ad meridianum appellit, aqua elevabitur per ſpatium $\frac{L(3(PQ-pq)^2-1)}{2b^3}-\frac{S}{2a^3}$. Sumatur inter has ambas elevationes inæquales more ſolito medium, eritque elevatio aquæ mediâ hac quadraturâ eveniens $= \frac{L(3p^2q^2+3P^2Q^2-1)}{2b^3}-\frac{S}{2a^3}$. Refluxus verò continget, cùm Luna horizontem attinget, quo tempore Sol in meridiano proximè verſabitur, ex quo depreſſio totalis aquæ in Refluxu infra ſtatum naturalem pro-

proximè erit $= \frac{L}{2b^3} - \frac{S(3pp-1)}{2a^3}$: quare à Fluxu uſque ad ſubſequentem Refluxum aqua ſubſidet per intervallum $= \frac{3L(p^2q^2+p^2Q^2)}{2b^3} - \frac{3Spp}{2a^3}$.

§. 55. Quamvis motus Maris hoc modo aſſignatus ab inertiâ aquæ multum immutetur, tamen quia eandem ferè mutationem tam majoribus æſtibus quàm minoribus infert, ſatis tutò aſſumere poſſe videmur ſpatia, per quæ aqua circa æquinoctia cùm tempore plenilunii ſive novilunii, tùm etiam tempore quadraturarum actu aſcendit, expreſſionibus inventis eſſe proportionalia. Quamobrem ſi in dato Terræ loco ex pluribus obſervationibus determinetur ſpatium medium, per quod Mare à Refluxu ad Fluxum aſcendit, tempore æquinoctiorum, tam in pleniluniis noviluniiſve quàm in quadraturis, eorum ratio ad eam quæ ex formulis conſequitur, proximè accedere debebit. Atque hinc ex definitâ hac ratione per obſervationes ratio poterit inveniri inter vires Solis & Lunæ abſolutas S & L, quæ eſt ipſa via quâ Newtonus eſt uſus ad vim Lunæ abſoluram definiendam, cùm vis Solis ſit cognita: quod negotium, cùm à Newtono non ſatis accuratè ſit pertractatum, nos id ex iſtis principiis expediemus. Exprimat igitur $m:n$ rationem intervallorum eorum, per quæ Oceanus in dato Terræ loco, cum in ſyzygiis luminarium quùm quadraturis tempore æquinoctiorum, aſcendendo deſcendendoque oſcillatur; eritque $m:n = 3pp\left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right) : \frac{3L(p^2q^2+p^2Q^2)}{2b^3} - \frac{3Spp}{2a^3}$; ex quâ elicitur iſta proportio $m\left(q^2+\frac{p^2Q^2}{p^2}\right) - n : m+n = \frac{S}{a^3} : \frac{L}{b^3}$; ex quâ cùm data ſit vis à Sole orta $\frac{S}{a^3}$, deducitur vis à Lunâ oriundâ $\frac{L}{b^3}$ ſaltem proximè. Inſtituamus calculum pro obſervationibus in Portu Gratiæ (*Havre de Graces*) factis, ex quibus diligenter inter ſe collatis pro ratione $m:n$ prodit iſta 17:11. Cùm igitur hujus loci elevatio poli ſit circiter 50°, erit P = ſin. 50°, & Q = ſin. 23°, 29'; hincque $qq + \frac{p^2Q^2}{pp} = 1{,}0668$: ex quo prodibit $\frac{S}{a^3} : \frac{L}{b^3} = 7{,}1356:28$; ita ut vis Lunæ $\frac{L}{b^3}$ ſit ferè quadrupla vis Solis $\frac{S}{a^3}$, ut jam Newtonus ex aliis obſervationibus concluſit: atque hanc ob rem ipſius determinationem vis Lunæ abſolutæ L retinuimus.

§. 56. Si hæc, quæ de combinatione virium Lunam Solemque reſpicientibus ſunt allata, attentiùs conſiderentur, mox patebit maximos æſtus menſtruos in novilunia ac plenilunia incidere debere; his enim temporibus tam elevatio aquæ quàm depreſſio à Luna oriunda à vi Solis maximè adjuvatur, cùm eodem tempore, quo Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, ſimul quoque Solis vis aquam maximè vel elevet vel deprimat. In quadraturis autem hæ duæ vires ferè perpetuò diſ-

ſentiunt, ac dum Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, eodem tempore Sol contrarium exerit effectum, aquamque maximè vel deprimit vel elevat, ex quo minimum diſcrimen inter quemque Fluxum ac ſubſequentem Refluxum obſervabitur, æſtuſque erunt minimi. Quamobrem circa alias Lunæ phaſes æſtus Maris medium teneat inter maximum minimumque neceſſe eſt, quia tum vires Solis ac Lunæ nec omninò conſpirant, nec ſibi invicem adverſantur. Per totum autem annum quibus noviluniis pleniluniiſque maximus eveniat æſtus, quibuſque quadraturis minimus æſtus reſpondeat, abſolutè ſine reſpectu ad ſitum loci habito definiri nequit. Sub æquatore quidem ubi Luna, cùm eſt in æquatore, maximâ vi gaudet, dubium eſt nullum, quin æſtus maximi in æquinoctia incidat, quando ambo luminaria in æquatore ſunt poſita, quæ eadem proprietas etiam in loca ab æquatore non multum diſſita competit: at in locis ab æquatore magis remotis æſtus Maris, cùm Luna maximam habet declinationem, dantur quidem majores ex Tabula §. 50, verùm æſtus mox ſubſequentes multo ſunt minores. Quòd ſi autem inter binos æſtus à Lunâ oriundos conſequentes medium capiatur, patebit in regionibus 30°. ab æquatore remotis, quibus æſtus eſt $\frac{2,250}{2b^3} L$ ſi Lunæ declinatio ſit nulla, æſtum Maris medium, cùm Luna habet declinationem 20 graduum, fore $= \frac{2,074}{2b^3} L$, ideoque adhuc minorem quàm cùm Luna æquatorem tenet. Contrà verò ſub elevatione poli 60 graduum, eſt æſtus Maris, Lunâ verſante in æquatore, $= \frac{0,740}{2b^3} L$, æſtus autem medius, cùm Lunæ declinatio eſt 20°, eſt $= \frac{0,926}{2b^3} L$, ideoque major. Ex quo conſequitur in regionibus polis vicinioribus æſtus maximos, non in æquinoctia, ſed potius circa ſolſtitia, incidere debere, quâ quidem in re theoria noſtra per experientiam mirificè confirmatur.

CAPUT QUINTUM.

De tempore Fluxûs ac Refluxûs Maris in eâdem hypotheſi.

§. 57. QUANQUAM in præcedenti capite, quo in quantitatem æſtûs Maris præcipuè inquiſivimus, etiam tempora, quibus tam Fluxus quàm Refluxus eveniat, jam indicavimus; tamen hoc capite iſtud argumentum fuſiùs atque ad obſervationes accommodatè perſequemur. Obſervationes enim, quæ circa æſtum Maris inſtitui ſolent, ad tria genera commodiſſimè referuntur; ad quorum

rum primum pertinet Maris cùm elevatio maxima tùm maxima depreſſio, atque indicatur quantum quovis æſtu aqua cùm aſcendat tùm deſcendat. Ad ſecundum obſervationum genus numerari convenit eas, quæ ad tempus reſpiciunt, quibuſque definitur, quonam temporis momento ubivis terrarum aqua cùm ſummam teneat altitudinem tùm minimam. Tertium denique genus obſervationum ad ipſum motum Maris reciprocum ſpectat, iiſque determinatur quantâ celeritate quovis temporis momento alterna Maris elevatio ac depreſſio abſolvatur, ſive momentanea mutatio, dum Mare à Fluxu ad Refluxum tranſit & viciſſim, inveſtigatur. Quibus tribus rebus cùm obſervationes convenientiſſimè inſtituantur, iiſdem theoria atque explicatio phænomenorum commodiſſimè tractabitur. Ac primæ quidem & tertiæ parti pro noſtrâ hypotheſi in præcedentibus capitibus abundè ſatisfactum videtur.

§. 58. Quoniam autem à Maris inertiâ aliiſque circumſtantiis Maris motum turbantibus omnes cogitationes adhuc abſtrahimus, manifeſtum eſt ubique terrarum, ſi ſola Lunæ vis Mare agitaret, aquam maximè elevari debere cùm Luna ab horizonte longiſſimè fuerit remota, hoc eſt iis ipſis momentis quibus Luna per meridianum dati loci tam ſupra quàm infra Terram tranſit: ſunt enim elevationes aquæ in duplicatâ ratione ſinuum diſtantiarum Lunæ ab horizonte, ex quo ſimul ſucceſſiva Maris commotio cognoſcitur. Excipiuntur autem hinc, ut jam notavimus, loca polis Terræ proxima, quibus Luna vel non oritur vel non occidit; ibi enim altero Lunæ ad meridianum appulſu aqua debet eſſe ſumma, altero ima. Verùm de his locis non admodum erimus ſolliciti; cùm tam obſervationes ſufficientes, quibus theoria probetur, deficiant, quàm ipſe Maris motus indicatus rationi ſit conſentaneus, neque confirmatione indigeat. In Terræ locis ergo à polis ſatis remotis ſeu extra circulos polares ſitis, quibus Luna intervallo 24 h. 48′ tam oritur quàm obit, elevabitur Mare eodem temporis intervallo bis, totieſque deprimetur; atque utraque maxima Maris altitudo continget, cùm Luna ad meridianum illius loci pervenit, minima verò cùm Luna horizontem attingit. Hinc igitur temporis intervallum inter binos aquæ Fluxus ſeu ſummas elevationes interjectum conſtanter erit 12 h. 24′, ab anomaliis Lunæ mentem abſtrahendo; at tempus ſummæ depreſſionis, cùm reſpondeat appulſui Lunæ ad horizontem, inter binas elevationes æqualiter non interjacebit, ſed alteri elevationi eò erit propiùs, quò major fuerit cùm loci propoſiti elevatio poli tum Lunæ declinatio, hoc eſt quò majus fuerit diſcrimen inter ortum obitumve Lunæ & circulum horarium ſextum.

§. 59. Sed conjungamus cum Lunâ vim Solis, ut noſtræ concluſiones magis ad obſervationes perducantur. Ac primò quidem manifeſtum eſt tempore tam novilunii quàm plenilunii aquam maximè fore elevatam, quando Luna per meridianum loci tranſit, quippe quo momento etiam

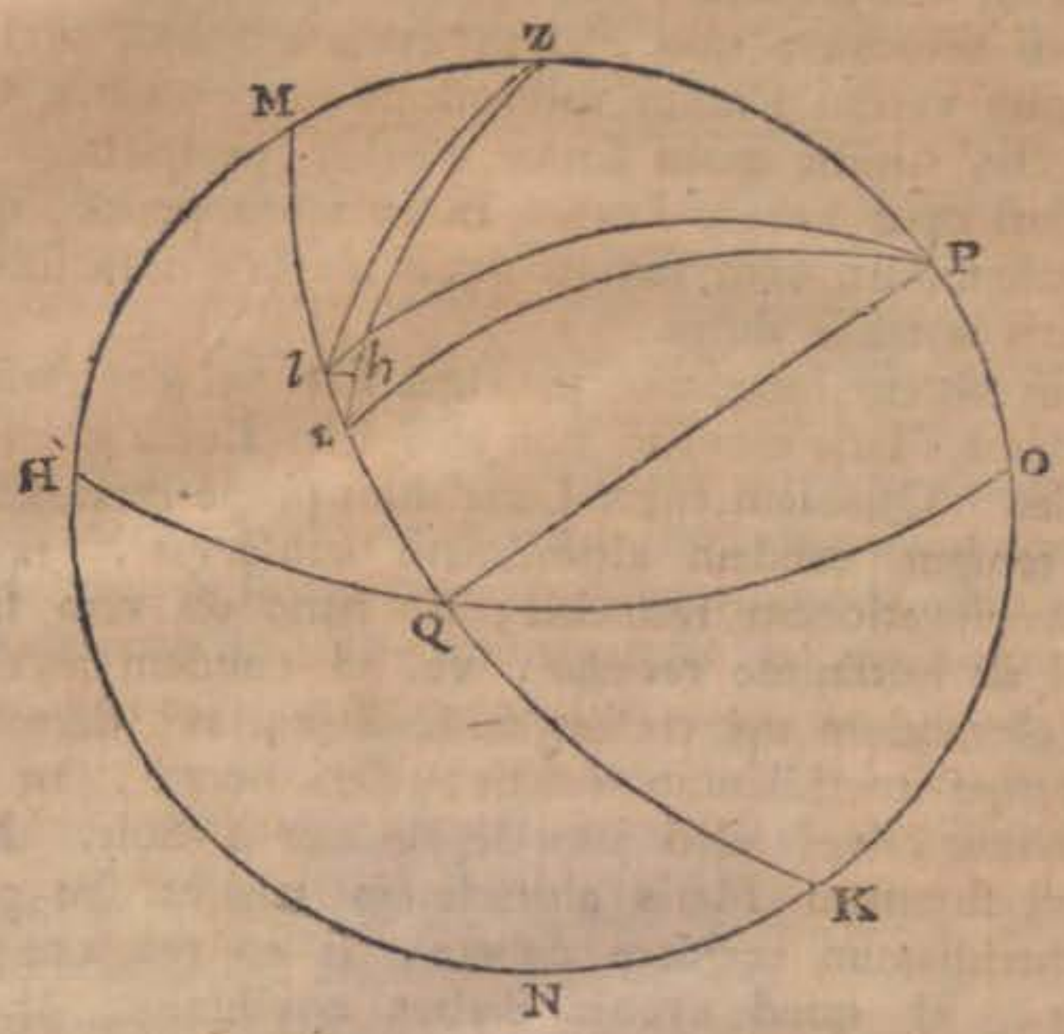
Sol ad eundem meridianum appellit, ſi quidem ſyzygia ipſo meridie vel mediâ nocte celebratur. Quamobrem ſi novilunium pleniluniumve in ipſum meridiem incidat; ipſo quoque meridiei momento maxima habebitur aquæ elevatio; pariterque ſi id eveniat mediâ nocte, eodem ipſo momento aqua maximam obtinebit elevationem. Verùm ſi conjunctio vel oppoſitio luminarium meridiem vel præcedat vel ſequatur, tum Fluxus non in ipſum meridiem incidet, ſed vel tardiùs vel citiùs veniet, quia Luna his caſibus tanquam primaria æſtûs cauſa vel poſt vel ante meridiem ad meridianum pertingit. Atque hinc eo die, in quem ſive plenilunium ſive novilunium incidit, facilè poterit definiri acceleratio vel retardatio Fluxûs reſpectu meridiei. Ponamus enim novilunium ſeu plenilunium celebrari n horis ante meridiem, unde cùm motus Lunæ medius à Sole diurnus ſit 12°. circiter, ipſo meridie Luna à meridiano jam diſtabit angulo horario $\frac{n}{2}$ grad. versùs ortum, ex quo Luna poſt meridiem demum per meridianum tranſibit, elapſis $\frac{n}{30}$ horis ſeu $2n$ minutis primis. Sin autem novilunium pleniluniumve accidat n horis poſt meridiem, tum Maris maxima elevatio $2n$ minutis ante meridiem eveniet. Hæc autem momenta accuratiſſimè cognoſcentur, ſi ad ſingulos dies tranſitus Lunæ per meridianum computentur; ac præterea tam ortus quàm occaſus notetur, quippe quibus momentis maxima aquæ depreſſio reſpondet; majorem autem hujuſmodi tabula afferet utilitatem, ſi inſuper quovis die diſtantia Lunæ à Terrâ inducetur, quippe à quâ Lunæ effectus præcipuè pendet.

§. 60. Congruunt hæc jam apprimè cum obſervationibus, quibus conſtat, diebus novilunii vel plenilunii æſtum Maris accelerari ſi novilunium pleniluniumve poſt meridiem accidat, contrà verò retardari. Quamvis enim ob aquæ inertiam maxima Maris elevatio non reſpondeat appulſui Lunæ ad meridianum, ſed tardiùs eveniat, uti poſt docebitur, tamen ſimilibus caſibus æqualiter retardabitur; pro termino igitur fixo, ſi ad obſervationes reſpiciatur, non ſumi debet momentum meridiei, ſed id momentum, quo ſi Lunæ cum Sole conjunctio vel oppoſitio in ipſum meridiem incidit, ſumma aquæ elevatio obſervatur. Hoc igitur momento notato, uti ab iis qui hujuſmodi obſervationes inſtituunt fieri ſolet, ſi plenilunium noviluniumve vel ante vel poſt meridiem incidat, ſumma Maris elevatio vel tardiùs vel citiùs continget: & quidem ſyzygia vera n horis vel ante meridiem eveniat vel poſt, tum Fluxus $2n$ minutis vel tardiùs vel citiùs obſervari debebit. Atque hæc eſt ea ipſa regula quam Celeb. Caſſini in Mem. Academiæ Regiæ pro An. 1710, ex quamplurimis obſervationibus inter ſe comparatis derivavit; jubet ſcilicet numerum horarum, quibus conjunctio ſive oppoſitio luminarium verum meridiem

diem vel præcedit vel ſequitur, duplicari, totidemque minuta prima ad tempus medium notatum, quo Fluxus evenire ſolet, vel addi vel ab eo ſubtrahi, quo verum Fluxus momentum obtineatur. Quoniam autem hæc correctio nititur motu Lunæ medio, perſpicuum eſt eam correctione ulteriori opus habere à vero Lunæ motu petitâ, quæ verò plerumque erit inſenſibilis, cùm ſumma aquæ elevatio non ſubitò adſit, ſed per tempus ſatis notabile duret.

§. 61. Niſi autem luminaria proxima ſint vel conjunctioni vel oppoſitioni, maxima Maris elevatio non in ipſum Lunæ tranſitum per meridianum incidet. Quoniam enim Luna dum prope meridianum verſatur, per aliquod tempus eandem altitudinem conſervat, tantiſper etiam Mare eandem elevationem retinebit; & hanc ob rem ſi Sol interea ſenſibiliter vel ab horizonte recedat, vel ad eundem accedat, vis Solis ad Mare elevandum vel creſcet ſenſibiliter, vel decreſcet; ex quo dum Luna prope meridianum exiſtit, fieri poteſt, ut tamen mare etiamnum elevetur, vel adeò jam deprimatur à Sole. Ex his igitur perſpicuum eſt ſummam Maris altitudinem tardiùs ſeu poſt tranſitum Lunæ per meridianum accidere debere, ſi eo tempore Sol ab horizonte accedat, id quod evenit diebus novilunium & plenilunium præcedentibus. Contrà autem ſi Luna poſt Solem per meridianum tranſeat, idque vel ante Solis ortum vel ante occaſum; tum, quia Mare in tranſitu Lunæ per meridianum à vi Solis deprimitur, maximam habuit altitudinem ante appulſum Lunæ ad meridianum, id quod contingit diebus novilunium pleniluniumve ſequentibus. Quando autem Sol ipſum horizontem occupat, dum Luna in meridiano verſatur, tum etiamſi diſtantia Solis ab horizonte perquam ſit mutabilis, tamen cùm elevationis vis quadrato ſinûs altitudinis Solis ſit proportionalis, quod omnino evaneſcit, etiam hoc caſu maxima aquæ elevatio in ipſum Lunæ per meridianum tranſitum incidet, hicque caſus circa quadraturas luminarium locum habet.

§. 62. Ut



§. 62. Ut igitur innoteſcat, quantum vires cùm Solis tùm Lunæ ad Mare elevandum dato tempore vel creſcant vel decreſcant, dum ab horizonte aliquantillum vel recedunt, vel ad eundem accedunt, ponamus Solem Lunamve in L verſari, atque inde ad punctum meridiani M progredi. Tempuſculo ergo per angulum $LPl = d\theta$ repræſentato progredietur Luna vel Sol ex L in l atque ab horizonte removebitur intervallo Lh: ad quod inveniendum ſit ut antè anguli MPL coſinus $= t$, & ſinus $= T$, eritque ipſe angulus $LPl = d\theta = \frac{\sqrt{(1-tt)}}{+dt} = \frac{dt}{T}$, ex quo orietur anguli MPl coſinus $= t + dt = t + T d\theta$. Si jam ponatur ſinus elevationis poli $= P$, ſinus declinationis borealis puncti $L = Q$, nam ſi declinatio ſit auſtralis, ſinus Q ſumi debet negativè, coſinus verò reſpondentes ſint p & q, reperietur ſinus altitudinis L ſupra horizontem $= v = tpq + PQ$: punctique l ſinus altitudinis $v + dv = tpq + PQ + Tpq\,d\theta$. Quocirca ſi Luna ponatur in L, cùm ejus vis ad Mare attollendum ſit $= \frac{L(3vv-1)}{2b^3}$, erit hujus vis incrementum tempuſculo $d\theta$ ortum $= \frac{3Lv\,dv}{b^3} = \frac{3L(tpq+PQ)Tpq\,d\theta}{b^3}$. At ſi Sol ponatur in L, ejus vis ad Mare elevandum tempuſculo $d\theta$ capiet incrementum $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpq\,d\theta}{a^3}$.

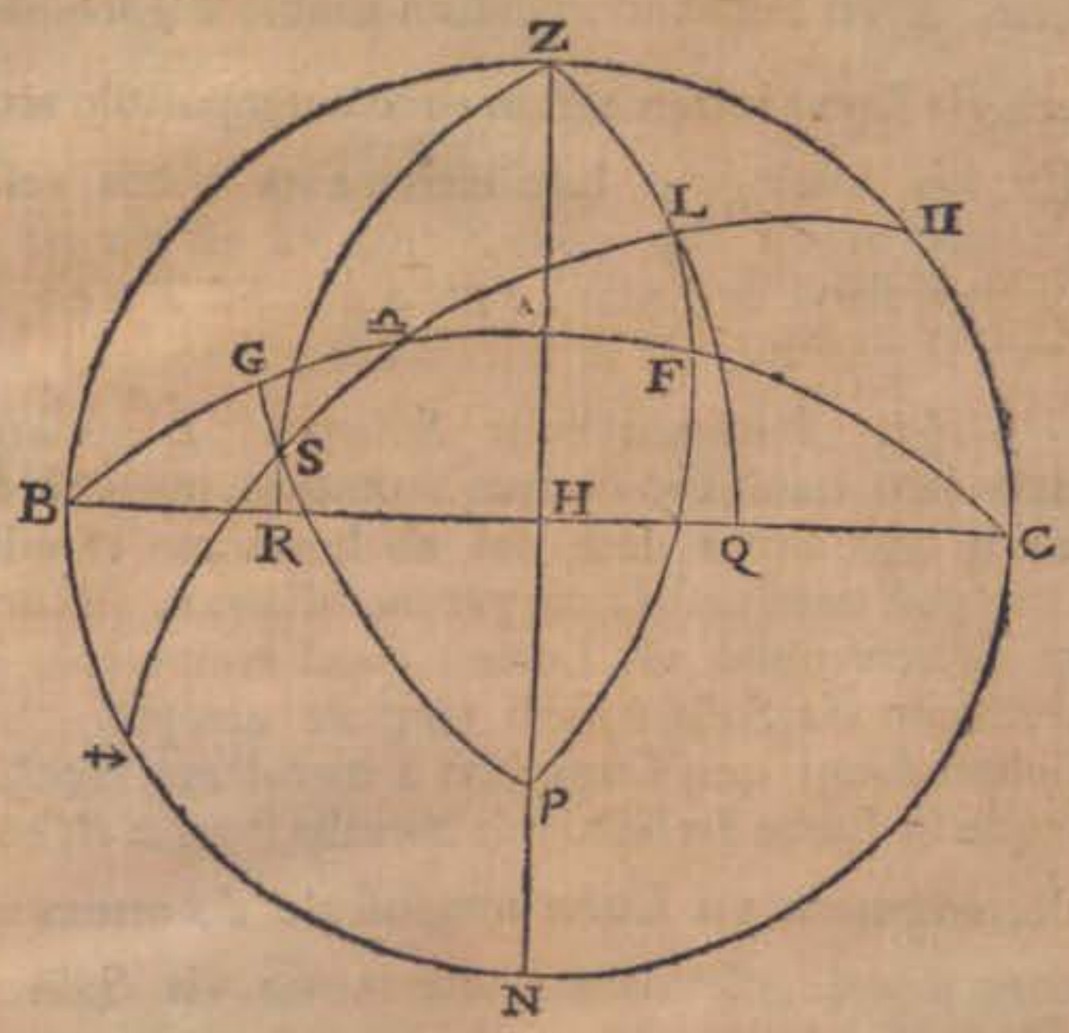
Quamvis autem pro Sole & Lunâ eidem angulo $d\theta$ non æqualia tempora reſpondeant, tamen quia ea proximè ad rationem æqualitatis accedunt,

dunt, ſunt enim ut 24 ad 24 $\frac{3}{4}$ ſeu ut 32 ad 33, ſine ſenſibili errore pro æqualibus haberi poterunt. Interim tamen ſi res accuratè definiri debeat, & vis Solis incrementum angulo $d\theta$ acquiſitum ſit $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$, erit vis Lunæ incrementum eodem tempuſculo acceptum $= \frac{3\,2L(tpq+PQ)Tpqd\theta}{11\,b^3}$. Ex his intelligitur hæc incrementa tribus caſibus evaneſcere, quorum primus evenit ſub polis, quia ibi eſt $p=0$; ſecundus, ſi punctum L in meridiano ſit ſitum, tum enim fit $T=0$; tertius denique locum habet, ſi punctum L in horizonte exiſtat, ubi eſt $tpq+PQ=0$.

§. 63. Ponamus nunc Solem in L verſari ac Lunam per meridianum jam tranſiiſſe, hocque momento maximè aquam eſſe elevatam; jam enim oſtendimus dum Sol ab horizonte recedit, aquam ſummam incidere poſt tranſitum Lunæ per meridianum. Hoc ergo momento neceſſe eſt, ut decrementum vis Lunæ, quod tempuſculo $d\theta$ patitur, æquale ſit incremento vis Solis eodem tempore accepto. Sit igitur anguli horarii ad polum ſumti quo Luna jam à meridiano receſſit, coſinus $= n$, ſinus $= N$, atque ſit Lunæ declinationis borealis ſinus $= R$, coſinus $= r$, ex quibus orietur decrementum vis Lunæ tempuſculo $d\theta$ ortum $= \frac{3L(npr+PR)Nprd\theta}{b^2}$, quod cùm æquale eſſe debeat incremento vis Solis eodem tempuſculo nato $= \frac{3S(tpp+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$, denotante Q ſinum declinationis borealis Solis, & q ejus coſinum, habebitur hæc æquatio $\frac{L(npr+PR)Nr}{b^3} = \frac{S(tpq+PQ)Tq}{a^3}$, neglectâ fractione $\frac{33}{55}$, per quam incrementum vis Lunæ multiplicari deberet. Quoniam autem Luna à meridiano non procul diſtabit, poni poterit $n=1$, atque cùm ſit proximè $\frac{L}{b^3} = \frac{4S}{a^3}$, obtinebitur iſte valor $N = \frac{Tq(tpq+PQ)}{4r(pr+PR)}$; qui in tempus converſus dabit temporis ſpatium, quo aqua poſt tranſitum Lunæ per meridianum maximam altitudinem attingit. Sub æquatore ergo erit $N = \frac{Ttqq}{4rr}$, ob $P=0$ & $p=1$; quare ſi declinationes Luminarium vel negligantur vel æquales aſſumantur, ita ut ſit $qq=rr$, fiet $N = \frac{Tt}{4}$, cujus expreſſionis valor extat maximus ſi angulus MPL ſit 45°, quo caſu erit $N = \frac{1}{8}$, & angulus reſpondens $= 7^\circ,11'$, qui indicat aquam ſummam 30 minutis poſt tranſitum Lunæ per meridianum contingere debere: totidemque minutis aqua ante tranſitum Lunæ per meridianum maximè erit elevata, ſi Sol tum versùs occaſum verſetur angulo $MPL =$ ſemirecto. Quamobrem ſi Luna ad meridianum appellat horâ nonâ ſive matutinâ ſive pomeridianâ, Fluxus demum poſt ſemihoram eveniet; at ſi horâ tertiâ appellat Luna ad meridianum, aqua ſumma 30′ antè obſervabitur

vabitur: in aliis verò Terræ regionibus iſta aberratio magis eſt irregularis; interim tamen ſatis prope ex formulâ datâ per ſolam æſtimationem poteſt definiri.

§. 64. Quòd ſi autem hanc rem curatiùs inveſtigare velimus, amborum Luminarium declinationes non pro arbitrio fingere licet, pendent enim à ſe mutuò maximè ob angulum horarium *MPL* inter ea interjectum datum: ut igitur pro datâ Lunæ phaſi aberrationem maximæ aquæ elevationis à tranſitu Lunæ per meridianum determinemus, repræſentet nobis circulus *Z B N C* verticalem primarium, *B C* horizontem, *Z N* meridianum per dati loci Zenith *Z* & Nadir *N* ductum, atque Æquator ſit *B A C*, polus auſtralis *p*, & ecliptica ♈ ♎ ♑. Conſtiturus nunc ſit Sol in *S* & Luna in *L*, quæ modò per meridianum tranſierit, quo tempore ponimus aquam maximè eſſe elevatam. Ponamus porrò longitudinis Solis ab æquinoctio verno computatæ ſinum eſſe = *F*, coſinum = *f*; Lunæ verò longitudinis ſinum eſſe = *G*, coſinum = *g*; ſitque inclinationis eclipticæ *B* ♎ ♑ ſinus = *M*, coſinus = *m*. Ex his definientur declinationes cùm Solis tùm Lunæ, quarum ſinus antè erant poſiti *Q* & *R*; erit ſcilicet *Q* = *F M*, *R* = *G M*; hincque $q = \sqrt{(1 - F^2 M^2)}$ & $r = \sqrt{(1 - G^2 M^2)}$. Deinde angulus *Sp L* æqualis eſt angulo cujus tangens eſt $\frac{m F}{f}$ demto angulo cujus tangens eſt $\frac{m G}{g}$; hujus verò ejuſdem anguli ob angulos *S p Z* & *L p Z* datos, quorum ſinus ſunt poſiti *T* & *N*, tangens quoque eſt $\frac{nT + Nt}{nt - NT}$, quæ tangens propter ſinum *N* valde parvum proximè eſt = $\frac{T}{t} + \frac{N}{tt}$. Ponatur autem *K* pro ſinu anguli qui exceſſus eſt anguli habentis tangentem = $\frac{m P}{f}$ ſuper angulum cujus tangens eſt $\frac{m G}{g}$, & *k* pro coſinu, reperietur *T* = *K* − *N k* & *t* = *k* + *N K* ſcripto *t* pro *n*: quibus valoribus ſubſtitutis prodibit *N* =



$\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)+(2k^2-1)pq^2+kPQq}$ ex æquatione $N=\frac{Tq(2pq+PQ)}{4r(pr+PR)}$; paragr. præced.

§. 65. Ponamus nunc Lunam in quadraturis verſari ac primò quidem in primo poſt novilunium quadrante, ita ut arcus LS futurus ſit 90°., erit $G=f$, & $g=-F$, unde $Q=MF$ & $R=Mf$, ex quibus prodibit $K=$ ſin. $(\text{Atang.}\frac{mF}{f}-\text{Atang.}\frac{-mf}{F})$ atque k ejuſdem anguli coſinui æquabitur. Quare his tempeſtatibus aqua maximè elevata poſt tranſitum Lunæ per Meridianum, intervallo temporis quod in arcum æquatoris converſum dabit angulum cujus ſinus erit $N=\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)+(2k^2-1)pq^2+kPQq}$. Pro poſteriore verò quadraturâ poſt novilunium, erit $G=-f$ & $g=F$; unde erit $Q=MF$ & $R=-Mf$, ex quibus fit ut antè $K=$ ſin. $(\text{Atang.}\frac{mF}{f}-\text{Atang.}\frac{-mf}{F})$ & $k=$ coſinui reſpondenti. Ne autem hic ſigna + & − calculum confundant, notari convenit K eſſe ſinum arcûs, qui reſtat, ſi aſcenſio recta Lunæ ſubtrahatur ab aſcenſione rectâ Solis; atque k eſſe ejuſdem arcûs coſinum. Ponamus exempli causâ Solem in initio Arietis verſari, erit longitudo Solis = 0°, ſeu 360°, & longitudo Lunæ = vel 90° vel 270°, unde fiet $F=0$, $f=1$, $G=\mp 1$, & $g=0$, atque $Q=0$. Præterea aſcenſio recta Solis eſt 360°, & aſcenſio recta Lunæ vel 90° vel 270°; utroque caſu ergo fit $k=0$, unde etiam prodit $N=0$; quod idem evenit, ſi Sol verſetur in initio Libræ. In utroque igitur æquinoctio, dum Luna in quadraturis verſatur, aqua maximè erit elevata eo ipſo momento, quo Luna ad meridianum appellit.

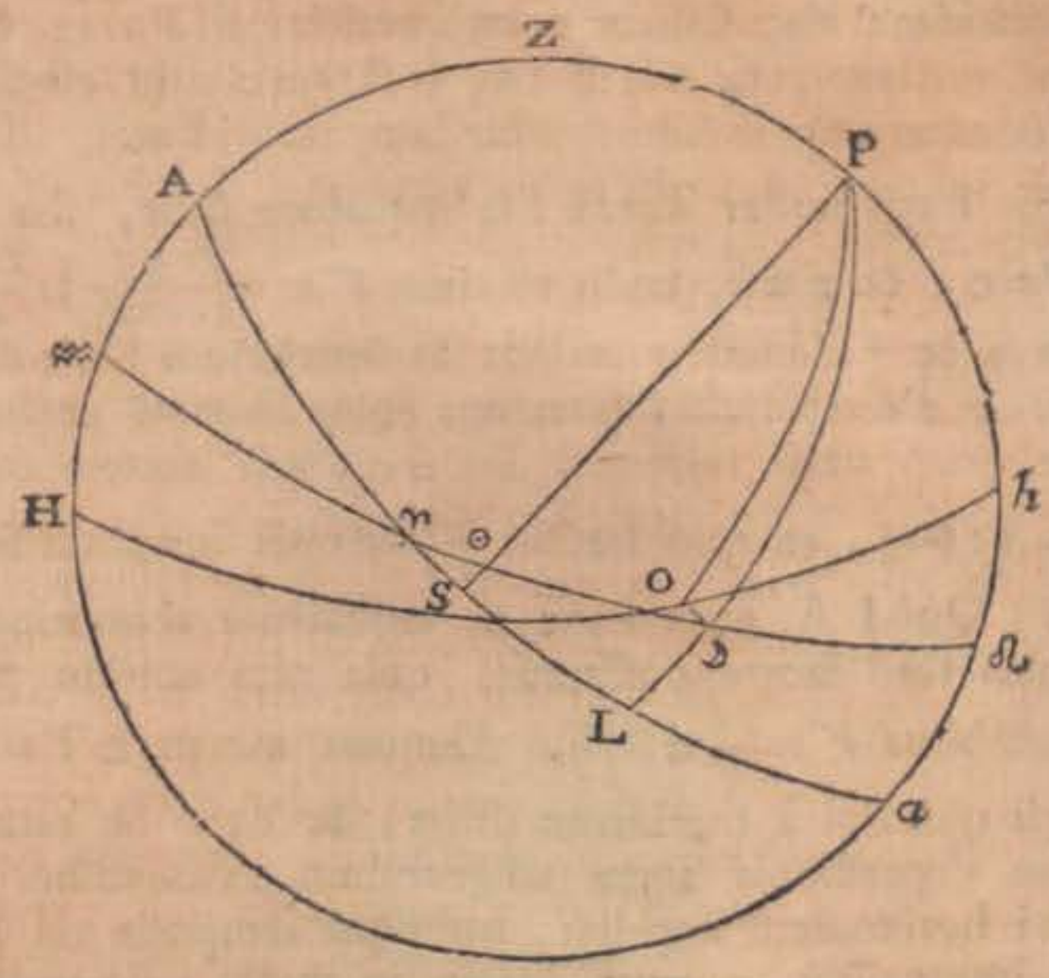
§. 66. Sit porrò Sol in ſolſtitio æſtivo, Luna verò in ultimo quadrante, erit longitudo Solis 90°, Lunæ verò = 0°, unde fit $F=1$, $f=0$; $G=0$, $g=1$, indeque $Q=M$ & $R=0$; itemque $q=m$ & $r=1$. Solis verò aſcenſio recta habebitur 90°, Lunæ verò = 0°, ex quo $K=1$ & $k=0$. Hinc ergo fit $N=\frac{mMP}{(4-m^2)p}$. Pro primâ autem quadraturâ eſt longitudo Lunæ 180°, unde $G=0$, $g=-1$, at ut antè $F=1$, $f=0$; ergo $Q=M$, $R=0$, itemque $q=m$ & $r=1$. Cùm igitur Lunæ aſcenſio recta ſit 180°, erit $K=$ ſin. $-90°=-1$, & $k=0$, ex quibus fit $N=\frac{-mMP}{(4-m^2)p}$. Quoniam autem eſt $4>m^2$, dum Sol in ſolſtitio æſtivo verſatur maxima aquæ elevatio in ultimâ quadraturâ continget poſt Lunæ tranſitum per meridianum ſupra Terram, priore verò quadraturâ ante hunc tranſitum, hæcque æquatio eò erit major, quò major fuerit elevatio poli; ſub æquatore enim omnino evaneſcit. Sit poli elevatio 45°, fietque his regionibus $N=\pm\frac{Mm}{4-m^2}$; quare cùm ſit M ſinus 23°,29′, prodibit $N=$

ſinui anguli $6°,33'$, qui in tempus converſus dat 26^{l}. In primâ igitur quadraturâ totidem minutis ante tranſitum Lunæ per meridianum aqua maximè erit elevata, in ultimâ verò quadraturâ tot minutis poſt tranſitum. Contrarium evenit ſi vel Luna ſub Terra ad meridianum appellat, vel Sol in ſolſtitio hyemali verſetur. Ex his igitur formulis, ſi tabulæ adhibeantur, non erit difficile pro quovis loco Terræ ad quodvis tempus definire, quantum maxima aquæ elevatio tranſitum Lunæ per meridianum vel præcedere vel ſequi debeat; cujuſmodi ſupputationes maximam etiam afferent utilitatem, quando etiam inertiæ aquæ ratio habebitur.

§. 67. Quoniam igitur ſatis eſt expoſitum, quo momento Mare maximè ſit elevatum, maximam quoque Maris depreſſionem definire aggrediamur. Ac primò quidem manifeſtum eſt, ſi ſola Luna Mare agitaret, tum minimam aquæ altitudinem obſervatum iri, eo ipſo momento, quo Luna in horizonte verſetur: atque hinc perſpicuum eſt, idem uſu venire debere, ſi Sol eodem momento quoque in horizonte exiſtat, id quod accidit cùm noviluniis tùm pleniluniis. Præterea verò etiam ima aqua reſpondebit ſitui Lunæ in horizonte, ſi eo tempore Sol meridianum occupet, quia tum vis Solis per notabile temporis intervallum neque augetur nec diminuitur, etiamſi tum aqua non tantum deprimatur, quàm circa novilunia ac plenilunia. Ponamus igitur, quò reliquos caſus evolvamus, dum Luna horizontem occupat, Solem ab horizonte removeri; hoc ergo caſu aqua jam elevabitur, ex quo neceſſe eſt imam aquam ante adventum Lunæ ad horizontem extitiſſe, contrà verò ſi dum Luna in horizonte verſatur, Sol ad horizontem appropinquet, aqua tardiùs ſcilicet poſt appulſum Lunæ ad horizontem continget. Ponamus itaque Lunam ante ortum ſub horizonte Hh in ☽ adhuc verſari, Solemque in ☉ eſſe poſitum, unde ad meridianum PZH progrediatur; hocque ipſo momento aquam maximè eſſe depreſſam. Neceſſe igitur eſt, ut decrementum momentaneum vis Lunæ ad Mare movendum æquale ſit incremento momentaneo vis Solis. Ad hanc æqualitatem declarandam ſit anguli ☽ PO ad polum ſumti, diſtantiam Lunæ à ſuo ortu O indicantis, ſinus $= V$ & coſinus $= v$, qui ob angulum ☽ PO valde parvum tutò ſinui toti 1 æqualis concipi poteſt. Invento ergo angulo hoc ☽ PO ſeu arcu æquatoris illi reſpondente, eoque in tempus converſo, conſtabit quanto temporis intervallo ima aqua appulſum Lunæ ad horizontem præcedat: idem verò calculus tam ad Lunæ occaſum quàm ad acceſſionem Solis ad horizontem facilè accommodabitur.

§. 68. Poſitis nunc $A\,\Upsilon\,a$ æquatore ac ♒ ♈ ♎ *ecliptica*, ſit elevationis poli Pb ſinus $= P$, coſinus $= p$; ſinus declinationis Lunæ borea-

lis

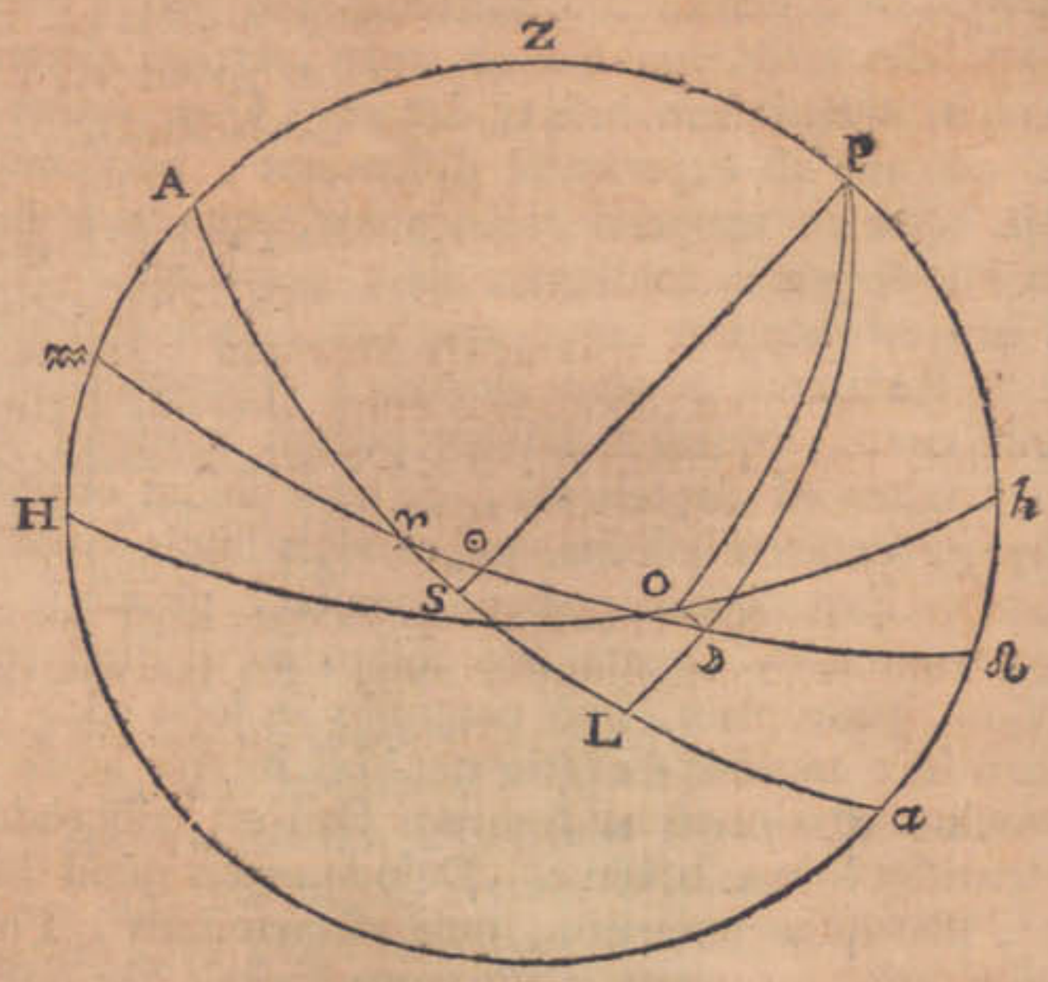


lis ☽ $L = R$, cosinus $= r$; ex quibus fiet anguli APO cosinus $= \frac{-PR}{pr}$, quia Lunæ, cùm in horizontem O pervenit, altitudo evanescit. Cùm igitur anguli APO sinus sit $= \frac{\sqrt{(p^2r^2 - P^2R^2)}}{pr} = \frac{\sqrt{(1 - P^2 - R^2)}}{pr} = \frac{\sqrt{(pp - RR)}}{pr}$, erit anguli AP☽ sinus $= \frac{v\sqrt{(pp - RR)} - VPR}{pr}$, & cosinus $= \frac{-vPR - V\sqrt{(pp - RR)}}{pr}$, unde emergit decrementum momentaneum vis Lunæ $= \frac{3LV\sqrt{(pp - RR)}(\sqrt{(pp - RR)} - VPR)\,d\theta}{b^3} = \frac{3LV(pp - RR)\,d\theta}{b^3}$, ob $v = 1$ & V valde exiguum. Sit porrò Solis declinationis borealis ☉ S sinus $= Q$ & cosinus $= q$, atque anguli AP☉ sinus $= T$, cosinus $= t$, erit vis Solis incrementum momentaneum $= \frac{3S(tpq + PQ)\,1pq\,d\theta}{a^3}$, quod illi vis Lunæ decremento æquale est ponendum, siquidem Maris altitudo hoc tempore est minima. Quare cùm sit ferè $\frac{L}{b^3} = \frac{4S}{a^3}$, ista habebitur æquatio $4V(pp - RR) = Tpq(tpq + PQ)$, quæ præbet $V = \frac{Tpq(tpq + PQ)}{4(pp - RR)}$: cùm igitur hoc pacto innotescat angulus OP☽, is in tempus conversus dabit temporis spatium, quo summa Maris depressio ante ortum Lunæ contingit. At si punctum O designet Lunæ occasum, idem angulus præbebit tempus post Lunæ occasum, quo Mare maximè deprimetur. Intelligitur ex

formulâ inventâ quibus casibus ima aqua in ipsum appulsum Lunæ ad horizontem incidat; hoc scilicet primò evenit, si $T=0$, hoc est si Sol in meridiano versetur, deinde si $tpq+PQ=0$, id est si Sol quoque horizontem occupet; quos binos casus jam notavimus.

§. 69. Sit locus noster Terræ sub æquatore situs, seu elevatio poli nulla, erit $P=0$, & $p=1$, unde efficitur $V=\frac{Ttqq}{4(1-RR)}=\frac{Ttqq}{4rr}$; in quâ formulâ cùm q & r denotent cosinus declinationum Solis ac Lunæ, non multum inter se discrepabunt; ponamus enim alteram declinationem esse maximam, alteram verò minimam seu $=0$, erit tamen cosinuum ratio minor quàm $1:\sqrt{\frac{3}{4}}$, ex quo fractio $\frac{qq}{rr}$ semper intra hos limites $\frac{4}{5}$ & $\frac{3}{4}$ continebitur. Quòd si ergo hanc ab æqualitate aberrationem negligamus, id quod tutò facere possumus, quia rem tantùm prope definire conamur, habebitur $V=\frac{Tt}{4}=\frac{2Tt}{8}$. Denotat autem $2Tt$ sinum dupli anguli horarii quo Sol à meridiano distat, & hanc ob rem ad momentum maximæ depressionis aquæ assignandum, videndum est quâ diei horâ Luna ad horizontem appellat, hujusque temporis vel à meridie vel mediâ nocte intervallum capiatur, atque in arcum æquatoris convertatur. Hujus deinde arcûs vel anguli sumatur duplum, hujusque dupli sinus, cujus pars octava præbebit sinum anguli, qui in tempus conversus dabit temporis intervallum, quo ima aqua Lunæ appulsum ad horizontem vel præcedit vel sequitur; id quod ex notatis circumstantiis discernere licet. Sic si Luna horâ 9 matutinâ adoriatur, erit tempus usque ad meridiem 3 horarum, angulusque respondens 45°, cujus dupli sinus est ipse sinus totus, cujus pars octava sit sinus anguli 7°, 11′, cui tempus respondet ferè 30 minutorum, tantum itaque ima aqua ortum Lunæ præcedet.

§. 70. Ut hæc ad datum Lunæ cum Sole aspectum accommodari queant, ponamus longitudinis Solis ☉ sinum esse $=F$, cosinum $=f$ longitudinis verò Lunæ ☽ sinum esse $=G$, cosinum $=g$; atque inclinationis eclipticæ ☊ ♈ a sinum $=M$, cosinum $=m$. His positis erit $Q=MF$, & $R=MG$; atque ascensionis rectæ Solis ♈ S tangens reperietur $=\frac{mF}{f}$, Lunæ verò ascensionis rectæ ♈ L tangens $=\frac{mG}{g}$. Subtrahatur ascensio recta Solis ab ascensione rectâ Lunæ, & differentiæ sinus sit $=K$, cosinus $=k$. Cùm igitur anguli ☉ P ☽ sit sinus $=K$ & cosinus $=k$, aguli verò APD sinus $=\frac{\sqrt{(pp-RR)}-VPR}{pr}$ ob $v=1$, & cosinus $=\frac{-PR-V\sqrt{(pp-RR)}}{pr}$, erit anguli APD sinus $=T=\frac{(k+KV)\sqrt{(pp-RR)}-kPRV+KPR}{pr}$ & cosinus $t=\frac{(K-kV)\sqrt{(pp-RR)}-KPRV-kPR}{tr}$; quibus



bus valoribus ſubſtitutis, ſimulque ſinu V tanquam valde parvo conſiderato, reperietur ſinus $V = \frac{(KPR + k\sqrt{(pp-RR)})\ q\ (Kq\sqrt{(pp-RR)} - kPRq + PQr)}{4rr\,(pp-RR)}$. Sub æquatore autem, quo fit $P = 0$, $V = \frac{Kkqq}{4rr}$: ex quo pro æquatore regula ſuperior à diſtantiâ Solis à meridiano petita ſimul ad differentiam aſcenſionalem Solis & Lunæ poteſt accommodari, ita ut maneat invariata. Sed ad præſens inſtitutum, quo tantum veritatem cauſæ Fluxûs ac Refluxûs Maris exhibitæ declarare annitimur, non opus eſt hæc pluribus perſequi, quippe quæ potiſſimum ad accuratiſſimas æſtûs marini tabulas ſupputandas pertinent, quæ res in propoſitâ quæſtione Illuſtriſſimæ Academiæ non contineri videtur.

CAPUT SEXTUM.

De vero æſtu Maris, quatenus à Terris non turbatur.

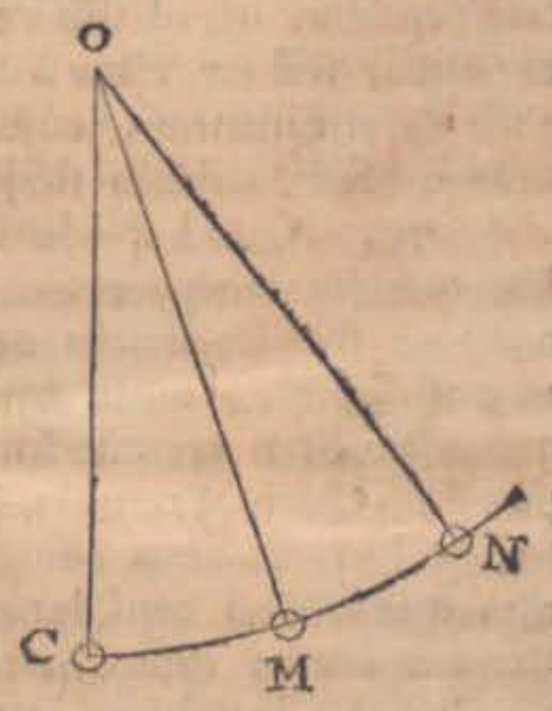
§. 71. QUÆ hactenus ex viribus Solis ac Lunæ circa æſtum Maris fuſiùs deduximus, eâ hypotheſi nituntur aſſumtâ, quâ aquam inertiæ expertem poſuimus: quamobrem non eſt mirandum ſi plerique effectus aſſignati cum Phænomenis minùs congruant, atque adeo

adeo pugnare videantur; quòd si enim inter se prorsus convenirent, theoria non solùm non eo consensu confirmaretur, sed potiùs omnino subverteretur, cùm quilibet facilè agnoscat ob aquæ inertiam determinationibus exhibitis ingentem mutationem inferri debere. Quæ autem ex deductis conclusionibus maximè ab experientiâ dissentiunt, potissimum quantitatem elevationis aquæ ac temporis momentum, quo tam summa Maris elevatio quàm ima depressio contingere solet, respiciunt. Nusquam enim ubi quidem Mare est liberum atque apertum, tam exiguum discrimen inter Fluxum ac Refluxum in aquæ altitudine observatur, quale in præcedentibus definivimus, quatuor scilicet pedum tantum; quæ elevatio insuper tamen maxima est deprehensa, ac tum solùm oriunda, quando tam regio prope æquatorem est sita, quàm vires luminarium inter se maximè conspirant. Experientiâ namque constat, plerisque in locis, si æstus contingat maximus, aquam non solùm ad altitudinem duplo majorem, sed etiam quadruplam, imò nonnullis in locis adeo decuplam attolli; quanquam hæc enormis elevatio non soli inertiæ aquæ, sed maximam partem vicino continenti ac littorum situi est tribuenda, uti in sequenti capite clarissimè monstrabitur. Deinde etiam quod ad tempus attinet, nusquam illis ipsis momentis, quæ assignavimus, Fluxus ac Refluxus unquam contingunt, nec etiam tempestatibus hìc definitis Fluxus maximi vel minimi, sed ubique tardiùs evenire constanter observantur; cujus quidem retardationis causa in ipsâ aquæ inertiâ posita esse primâ etiam fronte perspicitur.

§. 72. Quantumvis autem agitatio Maris in præcedentibus capitibus determinata ab observationibus dissentiat, tamen complures circumstantiæ sese jam præbuerunt experientiæ tantopere consentaneæ, ut ampliùs dubitare omnino nequeamus, quin in viribus Solem Lunamque respicientibus, quas non temerè assumsimus, sed aliunde existere demonstravimus, vera & genuina æstûs Maris causa contineatur. Hanc ob rem jam meritò suspicari licet, dissensiones quæ inter theoriam nostram, quatenus eam assumtæ hypothesi superstruximus, & experientiam intercedunt, ab aquæ inertiâ aliisque circumstantiis, quarum nullam adhuc rationem habuimus, proficisci. Quocirca si omnia inertiæ ratione habitâ ad observationes propiùs accedant, id quidem nostræ theoriæ maximum afferet firmamentum, atque simul omnes alias causas, quæ præter has vel sunt prolatæ vel proferri possunt, excludet, irritasque reddet. Cùm igitur consensum hujus theoriæ cum Phænomenis, mox simus evidentissimè ostensuri, quæstioni ab Inclytâ Academiâ propositæ ex asse satisfeciisse jure nobis videbimur: cùm non solum nullas vires imaginarias effinxerimus, sed etiam virium Lunam Solemque respicientium existentiam aliunde dilucidè evicerimus. Neque verò in hoc negotio cum plerisque Anglorum ad qualitates occultas sumus delapsi, verùm potius causam istarum

rum virium modo rationali & legibus motûs consentaneo in vorticibus constituimus, quorum formam atque indolem luculenter explicare posse-mus; idque feciſſemus, nisi ab aliis cùm jam satis esset expositum, tùm etiam ab Illustrissimâ Academiâ in præsente quæstione non requiri videatur.

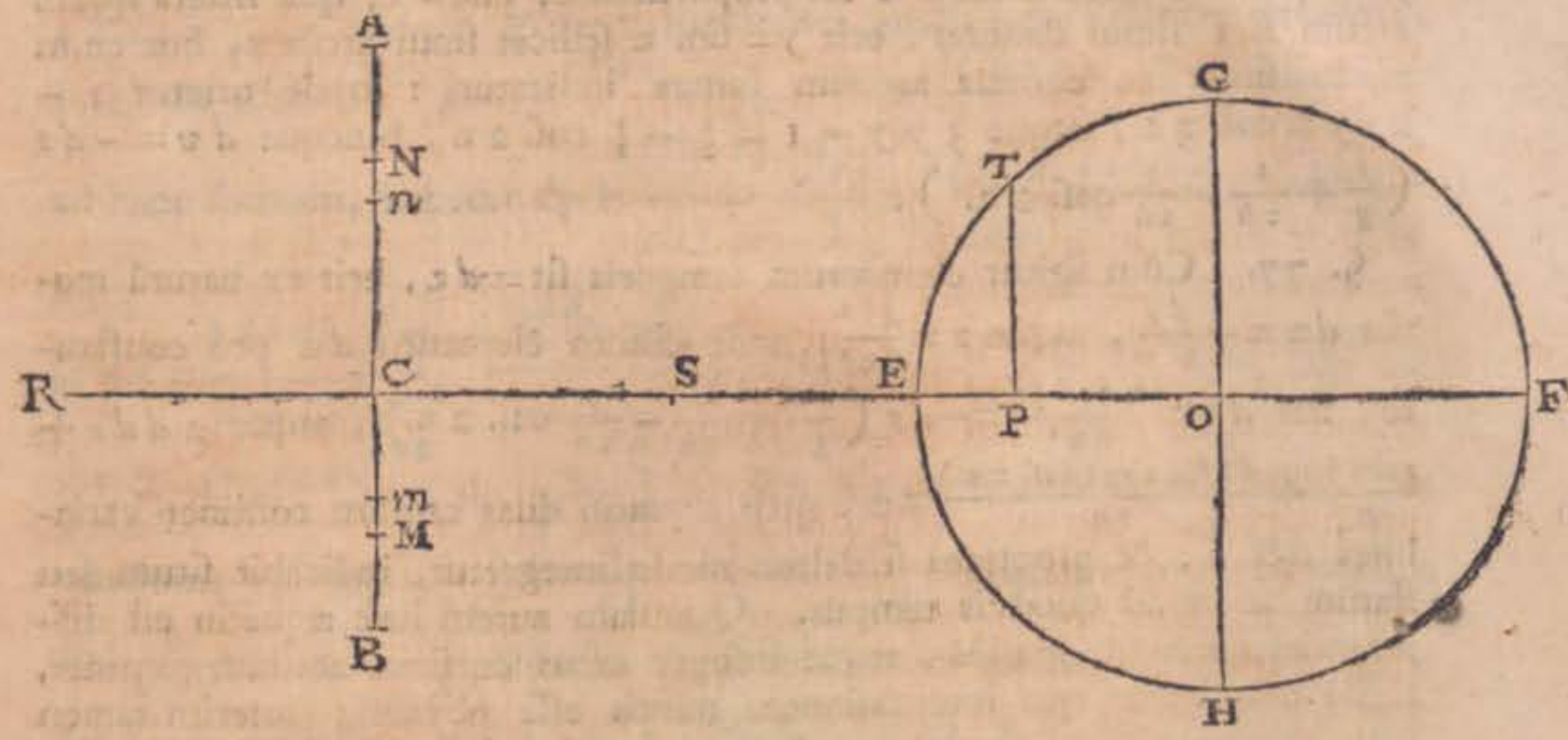
§. 73. Dum igitur hactenus aquæ omnem inertiam cogitatione ademimus, ipsi ejusmodi qualitatem affinximus, quâ viribus sollicitantibus subitò obsequeretur, seque in instanti in eum statum reciperet, in quo cum viribus in æquilibrio consisteret; hocque pacto aquam non solùm subitò omnis motûs capacem posuimus, sed etiam ita comparatam, ut quovis momento omnem pristinum motum amittat. Longè aliter autem res se habet, si inertiæ ratio in computum ducatur; hæc enim efficit ut primò aqua non subitò se ad eum situm componat, quem vires intendunt, sed pedetentim per omnes gradus medios ad eum accedat; deinde verò eadem inertia in causa est, quòd aqua, cùm in statum æquilibrii pervenerit, ibi non acquiescat, sed ob motum insitum ultrà progrediatur, quoad omnem motum à potentiis renitentibus amittat. Ex quo perspicuum est, admissâ inertiâ aquæ, à potentiis sollicitantibus motum omninò diversum actu imprimi debere ab eo, quem reciperet, si inertiâ privata esset; cujus discriminis ratio exemplo corporis penduli commodè ob oculos poni potest. Ponamus enim corpus pendulum *OC* ob gravitatem situm tenens verticalem, à vi quâpiam in latus secundùm directionem *CM* sollicitari. Si nunc hoc pendulum inertiâ careret, seu ejusmodi esset indolis, cujus aquam hactenus sumus contemplati, tum subitò situm *OM* acciperet, in quo hæc vis cum gravitate æquilibrium teneret. At cùm pendulum inertiâ præditum consideratur, post aliquod demum tempus elapsum ad situm *OM* perveniet: ac deinde quia motu accelerato eò pertingit, ibi non quiescet, sed ultrà excurret, putà in *N* usque, ita ut spatium *CN* ferè sit duplo majus spatio *CM*, prouti calculus clarè indicat. Propter inertiam igitur pendulum primùm tardiùs vi sollicitanti obtemperat; atque à situ æquilibrii recedit; deinde verò etiam magis recedit, majoremque excursionem conficit, quàm si inertiâ careret; quæ sunt eæ ipsæ duæ res, in quibus theoria antè exposita ab experientiâ maximè dissentire deprehensa est.



§. 74. Si nunc istud penduli exemplum ad nostrum casum æstûs Maris transferamus, primò ingens similitudo in situ penduli verticali ac sta-

tu Maris naturali, quem obtinet remotis potentiis externis, obſervatur. Nam quemadmodum pendulum, ſi in quamcunque plagam de ſitu verticali declinetur, propriâ vi gravitatis ſe in eundem recipit, ita etiam aqua, ſi ex ſitu ſuo æquilibrii depellatur, vi gravitatis ſe ad eundem componit, ac præterea pariter ac pendulum oſcillationes peragit, cujuſmodi oſcillationum caſus in aqua obſervati paſſim inveniuntur expoſiti. Deinde etiam ſimili modo, quo pendulum, Mare quò magis ex ſitu ſuo naturali fuerit deturbatum, eò majorem habebit vim ſeſe in ſitum æquilibrii reſtituendi. Quòd ſi igitur Mare à viribus externis, Solis ſcilicet ac Lunæ, mox elevetur mox deprimatur, neceſſe eſt ut inde motus oſcillatorius ſeu reciprocus oriatur æſtui Maris omnino ſimilis, qui autem per leges motûs difficulter definiri queat accuratè quidem; nam vero proximè, hoc non adeo erit difficile. Duæ autem ſunt res, quæ abſolutam ac perfectam totius motûs determinationem ſummoperè reddunt difficilem, quarum altera phyſicam ſpectat, atque in ipsâ fluidorum naturâ conſiſtit, quorum motus difficulter ad calculum revocatur, præcipuè ſi quæſtio ſit de ampliſſimo Oceano, qui aliis in locis elevetur, aliis verò deprimatur. Altera autem difficultas in ipsâ analyſi eſt poſita, eò quòd iſte motus Maris reciprocus prorſus ſit diverſus ab omnibus oſcillationibus à Mathematicis adhuc conſideratis: vires enim Lunæ ac Solis Mare ſollicitantes neque à ſitu corporis oſcillantis, neque ab ejus celeritate pendent, uti id uſu venit in omnibus oſcillationum caſibus etiam nunc expoſitis, ſed eæ vires à ſitu luminarium reſpectu Terræ, ideoque à tempore determinantur, cujuſmodi oſcillationes nemo adhuc, quantum quidem conſtat, calculo ſubjecit.

§. 75. Quod quidem ad priorem difficultatem phyſicam attinet, res hoc quidem tempore ferè deſperata videtur; quamquam enim ab aliquo tempore theoria motûs aquarum ingentia ſit aſſecuta incrementa, tamen ea potiſſimum motum aquarum in vaſis & tubis fluentium reſpiciunt, neque vix ullum commodum inde ad motum Oceani definiendum derivari poteſt. Quamobrem in hoc negotio aliud quicquam præſtare non licet, niſi ut hypotheſibus effingendis, quæ à veritate quàm minimè abludant, tota quæſtio ad conſiderationes purè geometricas & analyticas revocetur: alteram autem difficultatem mathematicam, etiamſi difficillimis integrationibus ſit involuta, tamen feliciter ſuperare confidimus. Conſidero ſcilicet ſuperficiem aquæ RS, quæ hoc in ſitu æquilibrium teneat cum reliqua aqua, remotis viribus externis; his verò accedentibus alternis vicibus attollatur in A, deprimaturque in B. Quòd ſi igitur aqua in M uſque ſit depreſſa, atque externæ vires Solis ac Lunæ ſubitò ceſſarent, tum vi gravitatis propriæ conaretur ſeſe elevare uſque in ſitum RS naturalem, iſteque conatus eò erit major, quò majus fuerit ſpatium CM quo à ſitu naturali diſtat. A veritate itaque non multum recedemus,



rius, si hanc vim ipsi spatio MC ponamus proportionalem: quamobrem posito spatio $MC = s$, erit vis, quæ aquæ superficiem in M usque depressam attollet $= \frac{s}{g}$, quæ hypothesis ad veritatem eò propiùs accedit, quòd sponte indicat, si aquæ superficies supra C jam sit elevata, tum vim fieri negativam, adeoque aquam deprimere. Præterea verò eadem hypothesis confirmatur pluribus phænomenis aquæ nisum respicientibus, ita ut de ejus veritate ampliùs nullum dubium superfit.

§. 76. Ponamus jam aquam in M constitutam urgeri à solâ Lunâ, atque ut calculus per se molestus minus habeat difficultatis, sit locus C sub ipso æquatore situs, Lunæque declinatio nulla, ex quo Luna in circulo maximo per loci zenith transeunte æquatore scilicet circumferetur: sit $EGFH$ iste circulus, cujus radius ponatur $= 1$, atque EF repræsentet horizontem, & G zenith. Positis his, sit Luna in T dum Maris superficies versatur in M, ita ut $PT = y$ exprimat sinum altitudinis Lunæ super horizonte; unde vis Lunæ Mare attollens erit $= \frac{L(3yy-1)}{2b^3} = \frac{3yy-1}{h}$, posito brevitatis gratiâ h pro $\frac{2b^3}{L}$. Hanc ob rem ergo superficies Maris in M duplici vi attolletur, scilicet vi $= \frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}$. Quòd si ergo ponamus aquam in M jam habere motum sursum directum, cujus celeritas tanta sit quanta acquiritur lapsu gravis ex altitudine v, atque spatium $Mm = -ds$ tempusculo infinitè parvo absolvatur, habebitur per principia motûs $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$. Ponamus porrò tempus ab ortu lunæ in E

jam elapſum, quod arcui ET eſt proportionale, eſſe $= z$, quæ littera ipſum arcum ET ſimul denotet, erit $y = \text{ſin. } z$ ſcilicet ſinui arcûs z, hoc enim modo ſinus ac coſinus arcuum ſumus indicaturi: unde orietur $1 - 2yy = \text{coſ. } 2z$, atque $3yy - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ coſ. } 2z$, hincque $dv = -ds \left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h} \text{ coſ. } 2z. \right)$.

§. 77. Cùm igitur elementum temporis ſit $= dz$, erit ex naturâ motûs $dz = -\frac{ds}{\sqrt{v}}$, atque $v = \frac{ds^2}{dz^2}$; unde ſumto elemento dz pro conſtante, fiet $dv = \frac{2\,ds\,dds}{dz^2} = -ds \left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h} \text{ coſ. } 2z \right)$, atque $2\,dds + \frac{s\,dz^2}{g} + \frac{dz^2(1 - 3\,\text{coſ. } 2z)}{2h} = 0$, quæ æquatio duas tantum continet variabiles s & z, & propterea ſi debito modo integretur, indicabit ſitum ſeu ſtatum aquæ ad quodvis tempus. Quoniam autem hæc æquatio eſt differentialis ſecundi gradûs, atque inſuper arcus & ſinus arcuum continet, facilè intelligitur ejus integrationem minus eſſe obviam; interim tamen cùm alterius variabilis s plus unâ dimenſione nuſquam adſit, ea per methodos mihi familiares tractari poterit. Soleo autem, quoties ejuſmodi occurrunt, initio eos terminos in quibus altera variabilis s omnino non ineſt, rejicere; unde hæc conſideranda venit æquatio $2\,dds + \frac{s\,dz^2}{g} = 0$, quæ per ds multiplicata fit integrabilis, exiſtente integrali $ds^2 + \frac{ss\,dz^2}{2g} = c\,dz^2$ ob dz conſtans. Hinc porrò elicitur $dz = \frac{ds\sqrt{2g}}{\sqrt{(2cg - ss)}}$, atque $\frac{z}{\sqrt{2g}} =$ arcui cujus ſinus eſt $\frac{1}{\sqrt{2cg}}$, ex quo obtinetur $s = \sqrt{2cg}. \text{ ſin. } \frac{z}{\sqrt{2g}}$. Cognito autem hoc valore, idonea naſcitur ſubſtitutio facienda pro æquatione propoſitâ $2dds + \frac{s\,dz^2}{g} + \frac{dz^2(1 - 3\,\text{coſ. } 2z)}{2h} = 0$; fiat enim $s = u \text{ ſin. } \frac{z}{\sqrt{2g}}$, erit $ds = du \text{ ſin. } \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{u\,dz}{\sqrt{2g}} \text{ coſ. } \frac{z}{\sqrt{2g}}$, atque $dds = ddu \text{ ſin. } \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{2\,du\,dz}{\sqrt{2g}} \text{ coſ. } \frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{u\,dz^2}{2g} \text{ ſin. } \frac{z}{\sqrt{2g}}$. Quibus valoribus ſubſtitutis emerget iſta æquatio $2\,ddu \text{ ſin. } \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{4\,du\,dz}{\sqrt{2g}} \text{ coſ. } \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{dz^2(1 - 3\,\text{coſ. } 2z)}{2h} = 0$, in quâ hoc commodè accidit, ut ipſa variabilis u non inſit, ſed tantùm ejus differentialia.

§. 78. Quòd ſi ergo ponatur $du = p\,dz$, erit $ddu = dp\,dz$, & æquatio noſtra tranſibit in ſequentem differentialem primi gradûs tantum, $2\,dp \text{ ſin. } \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{4p\,dz}{\sqrt{2g}} \text{ coſ. } \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{dz(1 - 3\,\text{coſ. } 2z)}{2h} = 0$: quæ integrabilis reddi invenitur, ſi multiplicetur per quantitatem quampiam ex z & conſtantibus compoſitam, eò quòd p plures unâ dimenſiones habet nuſquam. Ad

inte

integrationem autem absolvendam notandum est hujus æquationis $dp + pZdz = \Sigma dz$, in quâ Z & Σ functiones quascunque ipsius z denotent, integrale esse $e^{\int Z dz} p = \int e^{\int Z dz} \Sigma dz$. Reductâ autem nostrâ æquatione ad hanc formam, habetur $dp + \frac{2pdz\,cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sqrt{2g}.sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}} = \frac{dz(3\,cos.2z-1)}{4h\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}}$, ideoque

$Zdz = \frac{2dz\,cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sqrt{2g}.sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}} = \frac{2\,diff.sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}}$; atque hinc $\int Z\,dz = 2$ log. sin. $\frac{z}{\sqrt{2g}}$; & $e^{\int Z dz} = \left(sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2$. Ex his sequitur integrale nostræ æquationis $p\left(sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2 = \frac{1}{4h}\int dz\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}(3\,cos.2z-1) = \frac{3}{4h}\int dz\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\,cos.2z - \frac{1}{4h}\int dz\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}$, ad quas integrationes perficiendas notetur esse $\int dz\,sin.\alpha z = C - \frac{1}{\alpha}\,cos.\alpha z$, atque $\int dz\,sin.\alpha z.\,cos.\beta z = C - \frac{\beta\,sin.\alpha z.\,sin.\beta z - \alpha\,cos.\alpha z.\,cos.\beta z}{\alpha^2-\beta^2}$: ex his itaque conficietur $p\left(sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2 = C + \frac{\sqrt{2g}}{4h}\,cos.\frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{\left(2\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}.sin.2z + \frac{1}{\sqrt{2g}}\,cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}.cos.2z\right).3}{\left(\frac{1}{2g}-4\right)4h}$ atque $p = \frac{C}{\left(sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2} + \frac{\sqrt{2g}.cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{4h\left[sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2} - \frac{\left(4g\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}sin.2z + \sqrt{2g}.cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}cos.2z\right).3}{4h(1-8g)\left[sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2}$.

§. 59. Cùm autem posuissemus $du = p\,dz$, erit $u = \int p\,dz = \int \frac{C\,dz}{\left[sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2} + \int \frac{dz\sqrt{2g}.cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{4h\left[sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2} - \frac{3}{4h}\int dz \frac{\left[4g\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\,sin.2z + \sqrt{2g}.cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}\,cos.2z\right]}{(1-8g)\left[sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2}$. Hæ autem formulæ omnes sunt absolutè integrabiles, prodibitque $u = D - \frac{C\,cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}} - \frac{g}{2h\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}} + \frac{3g\,cos.2z}{2h(1-8g)\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}}$; ex quo tandem resultat $s = u\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}} = D\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}} + C\,cos.\frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{g}{2h} + \frac{3g\,cos.2z}{2h(1-8g)}$, quæ est æquatio generalis ad quodvis tempus z statum aquæ, seu distantiam ejus

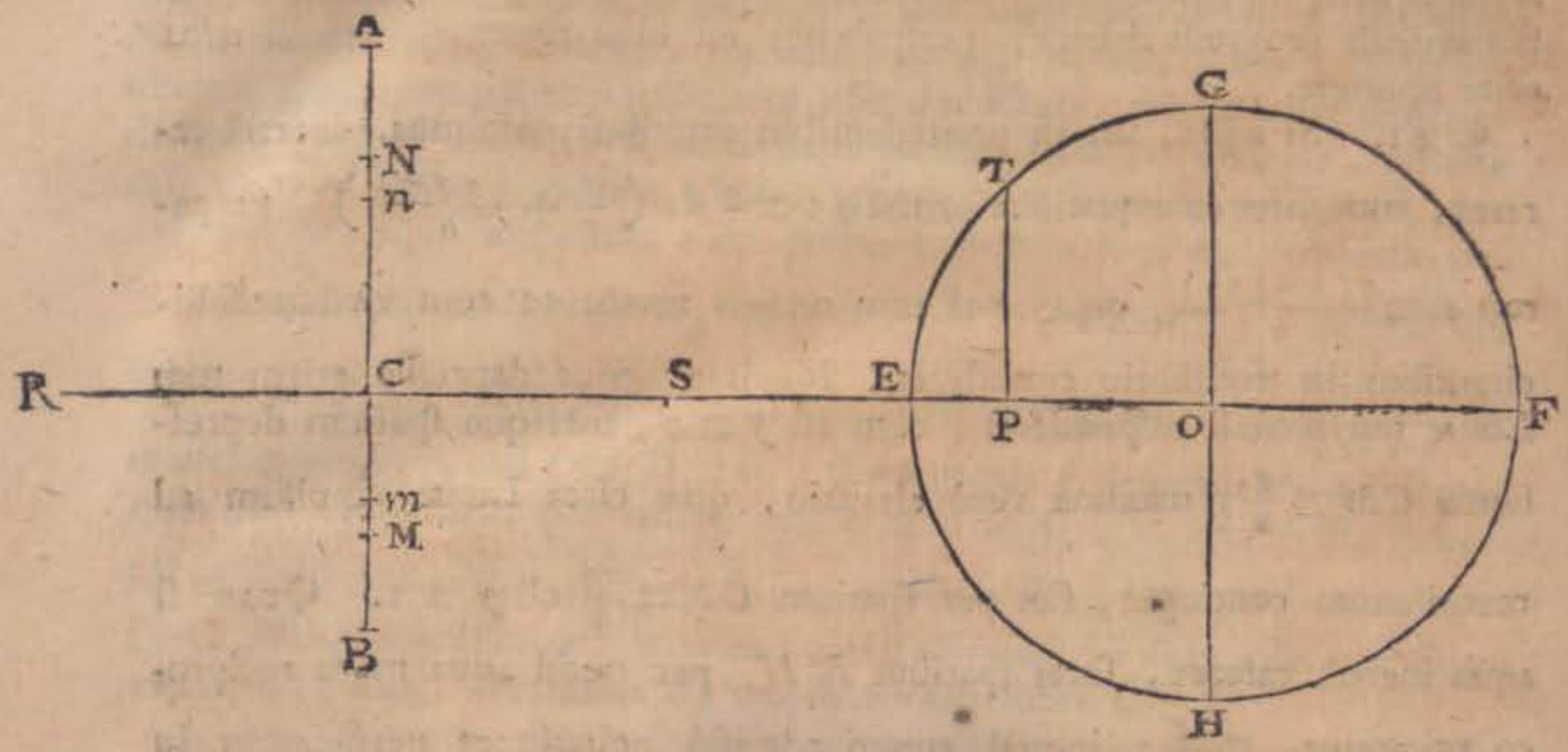
ejus ſupremæ ſuperficiei à C indicans, ubi conſtantes C & D ex dato Maris ſtatu ad datum tempus definiri oportet. Quòd ſi igitur ponamus motum aquæ jam ad uniformitatem eſſe deductum, ita ut aqua omnibus diebus, quando Luna in T verſatur in eodem loco M verſetur, neceſſe erit ut valor ipſius s maneat idem, etſi arcus z integrâ peripheriâ 2π vel ejus multiplo augeatur. At poſito $z + 2\pi$ loco z, terminus cof. $2z$ manet quidem invariatus, at D ſin. $\frac{z}{\sqrt{2g}} + C$ cof. $\frac{z}{\sqrt{2g}}$ fit $= D$ ſin. $\frac{z+2\pi}{\sqrt{2g}} + C$ cof. $\frac{z+2\pi}{\sqrt{2g}}$, quæ æqualitas adeſſe non poteſt niſi vel $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ ſit numerus integer, vel C & $D = 0$. Cùm itaque g determinari non liceat, quia jam eſt datum, ponendum erit $C = 0$ & $D = 0$, ita ut iſta habeatur æquatio $s = \frac{-g}{2h} + \frac{3g \text{ cof. } 2z}{2h(1-8g)}$, ex quâ facillimè ad quodvis tempus ſtatus Maris cognoſcetur: valores ſcilicet affirmativi ipſius s dabunt ſitum aquæ infra ſitum naturalem C, negativi verò ſupra C.

§. 80. Cognito autem ſpatio s per tempus z, celeritas quoque Maris quâ in M aſcendit reperietur ex æquatione $dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}}$ erit enim $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} = \frac{3g \text{ ſin. } 2z}{h(1-8g)}$, quæ expreſſio ipſi celeritati, quâ aquæ ſuperficies, dum in M verſatur, elevatur, eſt proportionalis: hæc ergo celeritas aquæ ſemper eſt ut ſinus dupli arcûs ET, vel etiam ut ſinus dupli temporis, quo Luna à tranſitu per meridianum abeſt, tempore ſcilicet in arcum æquatoris converſo. Hinc igitur celeritas aquæ erit nulla ſi Luna fuerit vel in E vel in G vel in F vel in H; hoc eſt, vel in horizonte vel in meridiano: quare cùm his temporibus aqua vel maximè ſit elevata vel maximè depreſſa, unâ Lunæ revolutione aqua bis elevabitur, biſque deprimetur, ideoque bini Fluxus binique Refluxus contingent. Aqua quidem maximè erit depreſſa iis ipſis momentis, quibus Luna ad horizontem appellit, tum enim fit cof. $2z = 1$; atque ſpatium CB erit $= s = \frac{g(1+4g)}{2(1-8g)}$; at maxima elevatio incidet in ipſos Lunæ tranſitus per meridianum, quibus eſt cof $2z = -1$: ac tum altitudo CA erit $= -s = \frac{g(2+4g)}{h(1-8h)}$. Quanquam autem hæc momenta cum experientiâ non ſatis conveniunt, tamen ea hypotheſi aſſumtæ planè congruunt, quâ poſuimus Lunam ſolam agere, ac perpetuò in ipſo æquatore verſari, ex quo æſtus ſe tandem ad ſummam regularitatem componat neceſſe eſt. Quòd ſi enim Lunæ declinatio ponatur variabilis, atque Sol inſuper agat, æſtus jam formati perpetuò turbabuntur, ex quo ob æquabilitatem continuò ſublatam effectus tardiores neceſſariò conſequi debebunt. Præterea quoque nullam adhuc motûs Maris horizontalis

zontalis habuimus rationem, cùm enim aqua ad æſtum formandum motu horizontali progredi debeat, perſpicuum eſt hinc retardationem in æſtu oriri oportere.

§. 81. Si aqua, uti in præcedentibus capitibus poſuimus, inertiâ careret, tum foret ex æquatione primâ $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$ perpetuò $s = \frac{g(1-3yy)}{h}$, quia aqua tum quovis momento cum viribus ſollicitantibus in æquilibrio conſiſteret. Maxima igitur depreſſio etiam tum Lunæ horizontali reſponderet, cùm eſt $y = 0$, foretque ſpatium depreſſionis $CM = \frac{g}{h}$; maxima verò elevatio, quæ circa Lunæ appulſum ad meridianum continget, fiet per ſpatium $CN = \frac{2g}{h}$ ob $y = 1$: Quare ſi aqua inertiâ careret, foret ſpatium MN, per quod aqua motu reciproco agitaretur, $= \frac{3g}{h}$; inertiâ autem admiſsâ agitationes perficientur in ſpatio majore $AB = \frac{3g}{h(1-8g)}$, cujus exceſſus ſuper ſpatium MN erit $= \frac{24gg}{h(1-8g)}$. Quantitas itaque æſtûs pendet à valore litteræ g; qui quidem ſemper eſt affirmativus; nam ſi foret $g = 0$, quod evenit ſi gravitatis vis eſſet infinitè magna reſpectu virium Lunæ & Solis, tum etiam nullus æſtus oriretur; deinde quò magis $8g$ ad 1 accedit, eò major prodibit æſtus, qui adeo in infinitum excreſcere poſſet ſi foret $8g = 1$; hoc quippe caſu vis Lunæ gravitatem ſuperaret, omneſque aquas ad Lunam attraheret; quod autem fieri non poteſt, multo minus autem eſſe poteſt $8g > 1$, quod tamen ſi eveniret, maxima elevatio appulſui Lunæ ad horizontem, maximaque depreſſio Lunæ meridianum occupanti reſponderet.

§. 82. Cùm igitur aqua, ſi inertiâ careret, agitetur per ſpatium $MN = \frac{3g}{h}$, ſuprà autem §. 41. eâdem hâc hypotheſi, quâ tam locus quàm Luna in æquatore ponitur, aquam elevari ſupra libellam per ſpatium 2,260 pedum, infra eam verò deprimi ſpatio 1,112 pedum, erit $\frac{3g}{h} = 3{,}372$ pedum, ideoque $\frac{g}{h} = 1{,}124$ pedum $= 1\frac{1}{8}$ pedum. Quoniam verò valor ipſius g cum unitate comparatur, ideo venit, quod tempus per ipſum arcum circuli cujus radius eſt $= 1$ expreſſimus: hinc itaque valor ipſius g reſpectu unitatis definietur tempore eodem modo expreſſo, quo aqua in M uſque depreſſa ſolâ vi gravitatis ſe in C reſtitueret, quod tem-



tempus ex circumſtantiis facilè poterit æſtimari: prodibit autem per calculum tempus hujus reſtitutionis $= \frac{\pi}{2}\sqrt{2g}$, denotante π ſemiperipheriam circuli radium $= 1$ habentis, ſeu tempus duodecim horarum Lunarium. Quòd ſi igitur reſtitutio ponatur actu fieri tempore $\frac{12}{n}$ horarum, erit $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi\sqrt{2g}}{2}$ & $g = \frac{2}{nn}$, ex quo perſpicuum eſt, quò citiùs aqua ſe propriâ ſuâ vi reſtituere valeat, eò minùs exceſſurum eſſe ſpatium AB ſpatium MN. Cùm autem de hâc reſtitutione non ſatis tutò judicare queamus, præſtabit ex obſervationibus rationem ſpatii AB ad MN proximè aſſumere. Si enim ponamus eſſe $AB = 2MN$, erit $\frac{3}{1-8g} = 6$, erit $g = \frac{2}{16}$; ſin autem ſit $AB = 3MN$, fiet $\frac{3}{1-8g} = 9$ & $g = \frac{2}{12}$: at poſito $AB = 4MN$, erit $g = \frac{2}{32}$. Quoniam igitur aqua ob inertiam ferè duplo majus ſpatium abſolvere poni poteſt, aſſumamus $g = \frac{2}{36}$ ſeu $n = 6$, ita ut aqua propriâ vi gravitatis tempore circiter 2 horarum in ſtatum naturalem ſe reſtituere valeat. Poſito autem $g = \frac{1}{18}$, fiet $\frac{3}{1-8g} = 5,4$; ſpatiumque $AB = 6$ ped. proximè. Ne autem tractatio nimis fiat ſpecialis, retineamus litteram n, cujus valorem eſſe circiter 6 vel 5 notaſſe ſufficiet, qui valor ſatis propè ad æſtimationem accedit: ita ut ſit $g = \frac{2}{nn}$ & $AB = \frac{3nn}{nn+16}$. $\frac{9}{8}$ pedum: unde ſatis patet n neceſſariò eſſe debere > 4, eritque adeo vel 5 vel 6.

§. 83.

§. 83. Tentemus nunc idem hoc problema in ſenſu latiori, ac ponamus regionis C elevationis poli ſinum eſſe $= P$, coſinum $= p$; Lunæ verò declinationis borealis ſinum eſſe $= Q$, coſinum $= q$; Lunamque ſuper Terra jam per meridianum tranſiiſſe, ab eoque diſtare angulo horario $= z$, ita ut z ut antè tam tempus quàm arcum circuli radii $= 1$ deſignet; quòd ſi nunc arcûs z coſinus ponatur $= t$, erit ſinus altitudinis Lunæ ſuper horizonte $= tpq + PQ$; ideoque vis Lunæ Mare elevans $= \frac{L}{2b^3}$ $(3(tpq+PQ)-1) = \frac{3p^2q^2tt+6pqPQt+3P^2Q^2-1}{h}$, poſito ut antè $\frac{L}{2b^3} = \frac{1}{h}$. Quoniam verò eſt $t = $ coſ. z erit $2tt-1 =$ coſ. $2z$ & $tt = \frac{1+\text{coſ. } 2z}{2}$, ex quo vis Lunæ ad Mare elevandum habebitur $= \frac{3p^2q^2\text{coſ. } 2z}{2h} + \frac{6pqPQ\text{coſ. } z}{h} + \frac{3p^2q^2+6P^2Q^2-2}{2h}$. Ponamus nunc ſuperficiem aquæ in M verſari, exiſtente $CM = s$, & celeritatem ejus quâ actu aſcendit debitam eſſe altitudini v, erit $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \text{vi Lunæ}\right)$, cùm verò ſit $dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}}$ ſeu $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} =$ ipſi celeritati aſcensûs erit $v = \frac{2dsddz}{dz}$, poſito dz conſtante: hinc igitur emerget iſta æquatio $2ddz + dz^2\left(\frac{s}{g} + \frac{3p^2q^2+6P^2Q^2-2}{2h} + \frac{6pqPQ\text{coſ. } 2z}{h} + \frac{3p^2q^2\text{coſ. } 2z}{2h}\right)$ relationem inter tempus z & ſtatum Maris s continens.

§. 84. Quòd ſi nunc hæc æquatio eodem modo tractetur, quo ſuperior, ea pariter bis integrari poſſe deprehendetur, integrationibus autem ſingulis debito modo abſolutis, & conſtantibus ita determinatis ut motus aquæ fiat uniformis, reperietur $s = \frac{-g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} - \frac{6gpqPQ\text{coſ. } z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2\text{coſ. } 2z}{2h(1-8g)}$ ac celeritas aſcensûs $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} = \frac{-6gpqPQ\text{ſin. } z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2\text{ſin. } 2z}{h(1-8g)}$. Cùm autem ſit ſin. $2z = 2$ ſin. z coſ. z, celeritas duobus caſibus evaneſcit, quorum primus eſt ſi ſin. $z = 0$, alter ſi coſ. $z = \frac{-PQ(1-8g)}{pq(1-2g)}$; illi caſus dabunt aquam ſummam, hi verò imam. Hinc igitur patet aquam ſummam contingere debere iis ipſis momentis, quibus Luna per meridianum tranſit, imam verò non tum, cùm Luna horizontem attingit; namque Luna horizontem attingit, ſi eſt coſ. $z = \frac{-PQ}{pq}$, aqua verò eſt ima ſi eſt coſ. $z = \frac{-PQ(1-8g)}{pq(1-2g)} = \frac{-5PQ}{8pq}$ poſito $g = \frac{1}{18}$. Hìc autem idem eſt notandum quod ſuprà, ſcilicet nos poſuiſſe motum aquæ eſſe uniformem ſeu quotidie ſui ſimilem, Lunamque in ecliptica locum tenere fixum, ſeu ſaltem ſuam declinationem non variare. Quoniam verò ob va-

riabilitatem declinationis Lunæ, itemque ob actionem Solis, iſte motus perpetuò turbatur, atque inſuper motûs Maris horizontalis nulla adhuc habita eſt ratio, facilè intelligitur, tàm Fluxus quàm Refluxus tardiùs venire debere, quàm quidem ex his formulis ſequitur.

§. 85. Bini ergo unâ Lunæ revolutione contingent Fluxus, alter ſi Luna ſuper horizonte ad meridianum appellit, alter ſi ſub Terra; priori caſu eſt cof. $z = 1$, & cof. $2z = 1$, hoc itaque tempore Mare ſupra libellam C elevabitur per ſpatium $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} + \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$. Dum autem Luna ſub horizonte meridianum attingit, tum aqua elevabitur per ſpatium $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3p^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$, propter cof. $z = -1$ ac cof. $2z = 1$ hoc caſu: harum igitur altitudinum differentia eſt $= \frac{12pqPQ}{h(1-2g)}$: atque Mare in tranſitu Lunæ per meridianum ſupra horizontem altiùs elevatur, ſi declinatio Lunæ ſit borealis; contrà verò ſi declinatio fuerit auſtralis, major Maris elevatio reſpondebit appulſui Lunæ ad meridianum infra horizontem. Lunâ verò in ipſo æquatore verſante, ambo Fluxus inter ſe erunt æquales. Ratione autem elevationis poli, horum binorum Fluxuum ſucceſſivorum inæqualitas erit maxima ſub elevatione poli 45°, pro his enim regionibus fit pP maximum; atque in aliis regionibus eò minor erit inæqualitas, quò magis fuerint à latitudine 45° remotæ. Mare autem maximè deprimetur, ſi fuerit cof. $z = \frac{-PQ(1-8)}{pq(1-2g)}$; quo valore ſubſtituto, reperietur aqua infra libellam C ſubſidere per ſpatium $= \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$; omnino igitur aqua in æſtu movebitur per ſpatium $= \frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, quorum ſignorum ambiguorum ſuperius + valet ſi Luna ſuper horizonte, alterum verò − ſi Luna ſub horizonte in Fluxu meridianum attingit.

§. 86. Si aqua inertiâ careret, tum ſuperiore Lunæ tranſitu per meridianum elevaretur ſupra libellam C per ſpatium $= \frac{3(pq+PQ)^2-1}{h}g$, inferiori verò tranſitu per meridianum elevaretur ad altitudinem $\frac{3(pq-PQ)^2-1}{h}g$, quarum altitudinum diſcrimen eſt $= \frac{12gpqPQ}{h}$; ita ut diſcrimen admiſsâ inertiâ majus ſit parte circiter octava, quàm idem diſcrimen ſi inertia tollatur. Maximè autem deprimetur aqua ſublatâ inertiâ, ſi fuerit cof. $z = \frac{-PQ}{pq}$, tumque infra libellam erit conſtituta intervallo $= \frac{g}{h}$; ex quo

ſpatium,

ſpatium, per quod æſtus Maris ſit ſublatâ inertiâ, prodit $= \frac{3t^2q^2+3P^2Q^2 \pm 6pqPQ}{h} g$; cùm igitur idem ſpatium conceſsâ inertiâ, ſit $\frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6grpPQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, erit exceſſus hujus ſpatii ſuper illud $= \frac{24g^2p^2q^2}{h(1-8g)} - \frac{12g^2P^2Q^2(1+g)}{h(1-2g)^2} \pm \frac{12g^2pqPQ}{h(1-2g)}$. Fieri ergo poteſt ut ſpatium, in quo æſtus Maris continetur, majus ſit ſublatâ inertiâ, quàm ſi ea aquæ tribuatur, id quod eveniet ſi $\frac{P^2Q^2(1+g)}{(1-2g)^2} > \frac{2p^2q^2}{1-8g}$ vel $\frac{PQ}{pq} > \frac{(1-2g)\sqrt{2}}{\sqrt{(1+g)(1-8g)}}$, hoc eſt $\frac{PQ}{pq} > \sqrt{\frac{256}{95}}$, poſito $g = \frac{1}{18}$; quod verò ſi evenit, Luna ne quidem horizontem in curſu diurno attingit, ac propterea aquam non deprimit. Ex quo ſequitur æſtum ubique ab inertiâ aquæ augeri: erit autem ad uſum magis accommodatè ſpatium AB, per quod Mare agitatur, ita expreſſum ut ſit $AB = \frac{3g}{h(1-8g)} \left(pq \pm \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, ubi ſignorum ambiguorum ſuperius tranſitum Lunæ per meridianum ſuper horizonte, inferius verò ſub horizonte reſpicit.

§. 87. Cùm ſit $\frac{3g}{h} = 3,372$ pedum, Lunâ mediocrem à Terrâ diſtantiam tenente, atque g ſit circiter $\frac{2}{25}$ vel $\frac{1}{18}$; erit poſito $g = \frac{2}{25}$ ſpatium $AB = \frac{25}{9}(pq \pm \frac{1}{7}PQ)^2$, 3,372 ped. at facto $g = \frac{1}{18}$ erit ſpatium $AB = \frac{9}{5}(pq \pm \frac{5}{8}PQ)^2$. 3,372 ped. Ex his colligitur æſtum fore maximum pro eadem elevatione poli, ſi fuerit tangens declinationis Lunæ $= \frac{3}{7}\frac{P}{p}$ caſu $g = \frac{2}{25}$, vel $= \frac{5}{8}\frac{P}{p}$ caſu $g = \frac{1}{18}$: horum autem caſuum prior veritati magis videtur conſentaneus, atque hanc ob rem valorem $g = \frac{2}{25}$ retineamus: hinc igitur ſequitur ſub æquatore æſtum fore maximum ſi Luna nullam habeat declinationem, atque ſimul pro quaque regione declinatio Lunæ poterit aſſignari, cui maximus æſtus reſpondeat: uti ex adjecto laterculo apparet:

Elevatio Poli.	*Declinatio* ☽	*Elevatio Poli.*	*Declinatio* ☽	*Elevatio Poli.*	*Declinatio* ☽
0°.	0°, 0′	30°.	13°, 54′	60°.	——
5°.	2°, 8′	35°.	16°, 42′	65°.	——
10°.	4°, 19′	40°.	19°, 46′	70°.	——
15°.	6°, 33′	45°.	23°, 11′	75°.	——
20°.	8°, 52′	50°.	27°, 3′	80°.	——
25°.	11°, 18′	55°	maxima.	85°.	——

In locis ergo ultra 45°. ab æquatore remotis æſtus erit maximus, ſi Luna maximam obtineat declinationem, ſi quidem fuerit $g = \frac{2}{25}$: ac ſi per obſervationes conſtet cuinam Lunæ declinationi maximus æſtus reſpondeat, tum inde valor litteræ g innoteſcet: quoniam autem ſub elevatione poli 50°. æſtus maximi nondum maximæ declinationi reſpondere obſervantur, ponamus id evenire ſub elevatione poli 60°, reperietur $\frac{1-8g}{1-2g} = \frac{1}{4}$ atque $g = \frac{1}{10}$, unde ipſius g tutò hi limites conſtitui poſſe videntur $\frac{1}{10}$ & $\frac{1}{18}$; ex hâc verò hypotheſi valor $\frac{1}{10}$ multo propiùs ad veritatem accedit; interim tamen etiamnum nil definimus, ſed obſervationes hunc in finem ſollicitè inſtitutas expectamus.

§. 88. Quòd ſi autem ponamus $g = \frac{1}{10}$, tum bini æſtus ſucceſſivi, dum Luna in maximâ declinatione verſatur, eò magis ad æqualitatem perducentur, quò ipſo theoria ad experientiam propiùs accedit; cùm enim ſit horum binorum æſtuum major ad minorem uti $\left(pq + \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$ ad $\left(pq - \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)$, hæc ratio eò propiùs ad æqualitatem accedet, quò minor fuerit fractio $\frac{1-8g}{1-2g}$, fit autem hæc fractio $= \frac{1}{4}$ ſi ponatur $g = \frac{1}{10}$. Hâc itaque hypotheſi erit quantitas æſtûs majoris $= (pq \mp \frac{1}{4}PQ)^2 . 16,86$ ped. minoris verò $= (pq - \frac{1}{4}PQ)^2 . 16, 86$ ped. At inter hos binos æſtus aqua humillima non medium interjacet, ſed minori eſt vicinior, neque tamen tantâ inæqualitate binos Fluxus dirimit, quàm fieret, ſi ima aqua Lunæ horizontali reſponderet. Si enim tempus medium inter binos Fluxus ponatur z, erit cof. $z = 0$, at temporis, quo Refluxus Fluxum majorem inſequitur, coſinus eſt $= \frac{-PQ}{4pq}$, ejuſque ergo intervalli à tempore medio ſinus eſt $= \frac{PQ}{4pq}$, quæ expreſſio adeo ſub elevatione poli 60°, pro maxima Lunæ declinatione 28°, tantum fit $= 13°$, unde Refluxus

fluxus à tempore inter Fluxus medio circiter 54' aberrabit: minor verò erit aberratio, quò propiùs cùm regio Terræ tùm Luna ad æquatorem verſentur, id quod cum experientiâ mirificè convenit. Quoniam autem hæc ex valore ipſius g aſſumto conſequuntur, imprimis notari oportet, litteram g non poſſe abſolutè determinari, ſed ejus quantitatem, quippe quæ mobilitatem totius Oceani ſpectat, cùm ab extenſione tùm etiam profunditate Maris pendere; ex quo variis in locis hæc eadem littera g, varias ſignificationes ſortietur.

§. 89. Ex ſolutione horum duorum problematum, quæ quidem in ſe ſpectata non ſolum ſunt attentione digna, ſed etiam cùm analyſin tùm etiam motûs ſcientiam amplificant, quamvis ea caſum propoſitum non penitus exhauriant, tamen motus in præcedentibus capitibus definitus multò magis cum experientiâ conciliatur, id quod theoriæ noſtræ jam inſigne addit firmamentum. Simili autem modo vis à Sole profecta cum inertiâ aquæ poteſt conjungi, atque æſtus Maris definiri, quâtenus à ſolâ vi Solis oritur, quibus duobus effectibus conjungendis judicare licebit, quantus æſtus quovis tempore & quovis loco debeat evenire. In hoc quidem capite cogitationes adhuc ab omnibus obſtaculis à Terrâ & littoribus oriundis prorſus abſtrahimus, atque univerſam Terram undiquaque aquâ circumfuſam ponimus; ex quo regulas hinc natas præcipuè ejuſmodi obſervationibus, quæ in ampliſſimo Oceano apud exiguas inſulas ſunt inſtitutæ, conferri conveniet. Quoniam autem nondum motûs aquæ progreſſivi, quo alternativè ad loca, in quibus Fluxus & Refluxus accidit, progreditur & recedit, rationem habuimus, neceſſe eſt ut etiam hunc motum & Phænomena inde orta contemplemur. Ac primò quidem facilè intelligitur, cùm ob inertiam aquæ tùm etiam alia impedimenta motui oppoſita, aquam tam tardiùs elevari quàm deprimi oportere, quàm ex allatis hactenus conſequitur: unde Fluxus non ad tranſitus Lunæ per meridianum contingent, ſed aliquanto ſeriùs evenient, omnino uti experientia teſtatur.

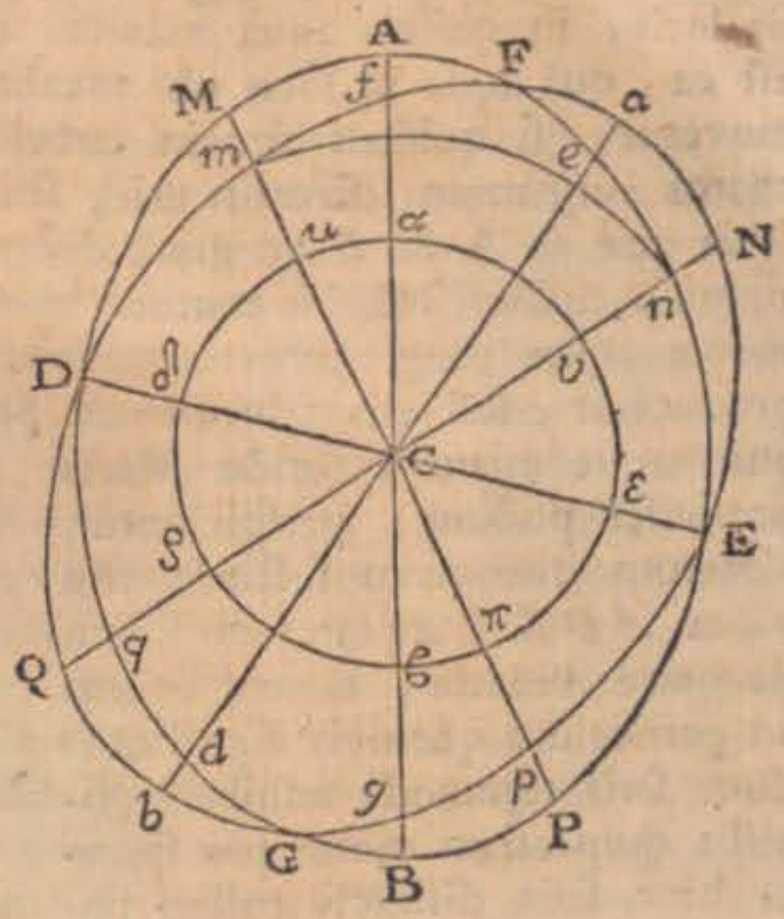
§. 90. Hæc autem retardatio præcisè ad calculum revocari non poteſt, quia à motu aquæ ejuſque profunditate plurimum pendeat, prouti etiam videmus in diverſis locis eam vehementer eſſe diverſam, atque aliis locis Fluxum contingere poſt Lunæ culminationem tribus horis nondum elapſis, aliis verò locis plus quàm duodecim horis tardiùs venire, quæ quidem inſignis retardatio terrarum poſitioni eſt adſcribenda; interim tamen hinc ſufficienter conſtat motum Maris admodum poſſe impediri. Pro eodem verò loco ſatis luculenter perſpicitur, quò major atque altior Fluxus evenire debeat, eò tardiùs eundem accidere oportere. Quòd ſi enim æſtus contingat infinitè parvus, dubium eſt nullum, quin is ſtato tempore adveniat, cùm impedimentis hoc caſu ne locus quidem concedatur agendi: unde dilucidè ſequitur æſtus eò tardiùs advenire debere, quò

ſint majores. Atque hoc ipſum experientia confirmat, quâ conſtat æſtus majores, qui circa novilunia ac plenilunia contingunt, tardiùs inſequi tranſitum Lunæ per meridianum, quàm æſtus minores, qui circa quadraturas contingunt. Cùm enim Luna in quadraturis circiter 6 horis tardiùs reſpectu Solis per meridianum tranſeat, quàm in ſyzygiis, æſtus tamen non 6 horis tardiùs, ſed tantum circiter 5 $\frac{1}{4}$ horis tardiùs accidit. Videtur verò etiam calculus, qui pro utraque vi Solis ac Lunæ conjunctim inſtitui poteſt ſimili modo, quo pro ſolâ vi Lunæ fecimus, ejuſmodi retardationem majorem in ſyzygiis quàm in quadraturis indicare, etiamſi eum ob ſummas difficultates ad finem perducere non valuerimus; interim tamen ſatis planum eſt præcipuam ejus cauſam in ipsâ naturâ aquæ eſſe quærendam. Hæc autem allata ratio retardationis à Flamſtedio maximè probatur, quippe qui obſervavit maximam retardationem non tam ſyzygiis luminarium, neque minimam quadraturis reſpondere, ſed iis tempeſtatibus, quibus æſtus ſoleant eſſe maximi & minimi, id quod demum poſt ſyzygias & quadraturas contingit.

§. 91. Ad hanc autem Fluxuum à ſyzygiis ad quadraturas acceleratationem, reſpectu tranſitûs Lunæ per meridianum, ac retardationem à quadraturis ad ſyzygias, plurimùm quoque vis Solis conferre videtur. Suprà enim jam indicavimus poſt ſyzygias Fluxum tranſitum Lunæ per meridianum antecedere debere, ob Solem tum jam versùs horizontem declinantem; unde etiam, ſtabilitâ inertiâ, diebus novilunia ac plenilunia ſequentibus æſtus Maris citiùs inſequi debet tranſitum Lunæ per meridianum, quàm in ipſis ſyzygiis, id quod etiam obſervationes mirificè confirmant; inter Fluxum enim quintum & ſextum poſt ſyzygias retardatio reſpectu Solis tantum 17 minut. deprehenditur, cùm tamen Luna 24′ retardetur. Hanc ob rem à Sole determinatur æſtus ad actionem virium magis exactè ſequendam, quæ determinatio cùm duret uſque ad quadraturas, mirum non eſt, quòd æſtus tùm reſpectu Lunæ citiùs contingant, magiſque ad calculum accedant. Contrarium evenit in progreſſu à quadraturis ad ſyzygias, quo tempore æſtus à Sole continuò retardantur; hocque neceſſariò efficitur, ut tandem in ipſis ſyzygiis Fluxus tardiùs inſequatur Lunæ culminationem quàm in quadraturis. Hanc autem rationem cum magnitudine æſtûs conjungendam eſſe putamus ad hæc phænomena perfectè explicanda, ſæpiſſimè enim in hâc quæſtione plures cauſæ ad eundem effectum producendum concurrunt; hoc autem eſt id ipſum quod calculus ille ſummoperè implicatus & moleſtus quaſi per tranſennam oſtendere viſus eſt.

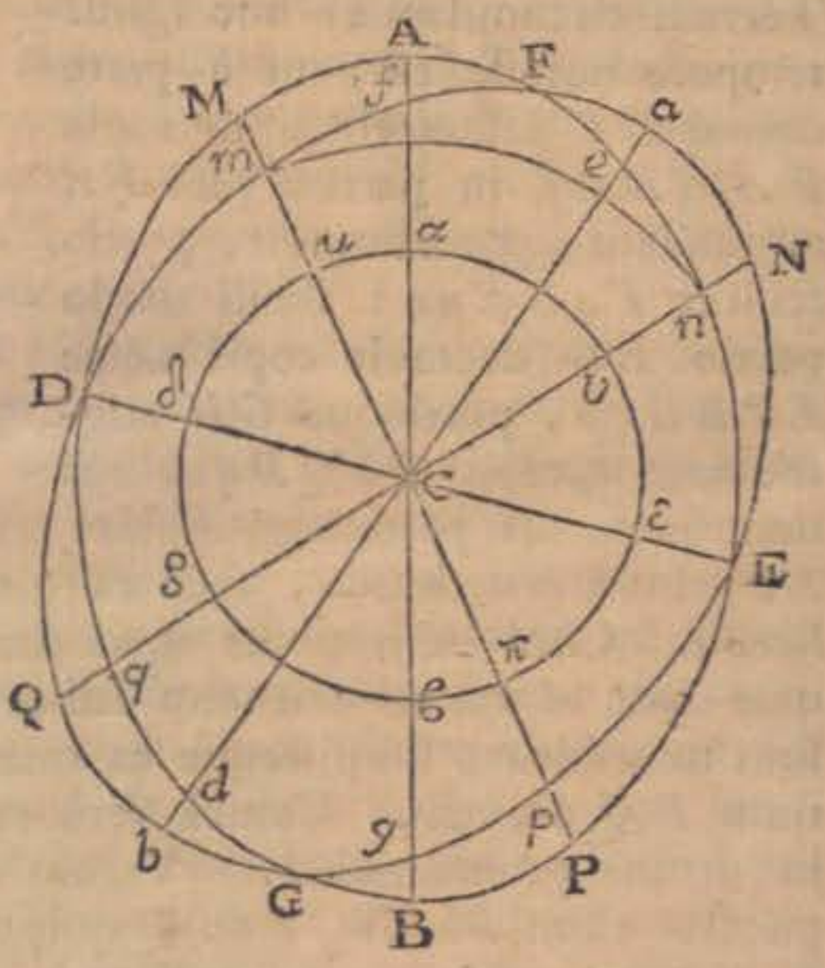
§. 92. Quò autem tam de his Phænomenis quàm reliquis certiùs & ſolidiùs judicare queamus, ipſum motum progreſſivum, quem aqua ab æſtu recipit, inveſtigabimus. Cùm enim aqua eodem loco nunc elevetur nunc ſubſidat, neceſſe eſt ut priori caſu aqua aliunde affluat, poſteriori

riori verò ab eodem loco defluat, unde nomina Fluxûs ac Refluxûs originem traxerunt. Repræsentet igitur tempore quocunque figura *A D B E* ſtatum aquæ totam Terram ambientis, ita ut in locis *A* & *B* aqua maximè ſit elevata, in locis verò mediis ab *A* & *B* æquidiſtantibus, maximè depreſſa. Poſt aliquod tempus transferatur æſtus ſummus ex *A* & *B* in *a* & *b*, ſitque *a D b E* figura aquæ Terram circumdantis: hoc igitur tempore neceſſe eſt, ut à parte oceani *D F* defluxerit aquæ copia *F A M D m f*, in partem verò *F E* tantundem aquæ affluxerit, portio ſcilicet *F a N E n e*: ſimili modo portio *E G* decrevit copiâ aquæ *E P B G g p*, portioque *G D* augmentum accepit *G b Q D q d*. Si nunc ponamus portionem *F M m* tranſire in locum *F N n*, ac portionem *E P p* in *E N n* deferri, ſatis clarè motum aquæ progreſſivum intelligere licebit. Cùm enim motus aquæ ſummæ *A* fiat ab ortu in occaſum, aqua quæ circa *A* versùs orientem ſcilicet ab *M* ad *N* uſque eſt ſita, in occaſum movebitur; ſimiliterque ea quæ huic è diametro eſt oppoſita & ſpatium *P Q* occupat. Contrà verò reliqua aqua in *M Q* & *N P* contenta in ortum promovebitur. Verùm celeritas ubique non erit eadem; in punctis enim *M*, *N*, *P* & *Q* quippe limitibus inter motus versùs ortum & obitum, celeritas erit nulla, deinde ab *M* uſque ad *F* creſcet ubique ita ut incrementa celeritatis in punctis mediis ut *A* ſint differentiis *A f* proportionalia: ab *F* verò uſque ad *N* celeritas decreſcere debet, & decrementum celeritatis in *e* erit ut *a e*; ſimilique modo comparatus erit motus in reliquis portionibus figuræ propoſitæ.



§. 93. Si hæc diligentiùs proſequamur ac punctum *a* ipſi *A* proximum ponamus, reperiemus in loco quocunque *M* fore intervallum *M m* ſinui dupli anguli *M C A* proportionale. Quare ſi anguli *A C M* ſinus ponatur $= x$, coſinus $= y$, ac celeritas quam aqua in *M* habet, versùs occaſum $= u$ erit du ut $2xy$. Cùm autem elementum arcûs *AM* ſit ut $\frac{dx}{g}$; nam figuram inſtar circuli conſiderari licet: erit du ut $2x\,dx$, atque u proportionale erit ipſi $2xx-1$ ejuſmodi adjecta conſtante, ut ubi *M m* eſt maximum, ibi celeritas evaneſcat. Hanc ob rem erit celeritas in loco quo-

quocunque *M*, quam aqua versùs occidentem habebit, uti cosinus dupli anguli *MCA*. Maxima igitur aquæ celeritas versùs occidentem erit in iis locis, in quibus aqua maximè est elevata; huicque celeritati æqualis est ea, quâ aqua in locis ubi maximè est depressa, versùs orientem promovetur; si quidem hæc in circulo fieri concipiamus, nam in sphæra motus aliquantum diversus erit, sed tamen hinc intelligi poterit. At in locis quæ ab A & *B* 45 grad. distant, ob cosinum dupli anguli = 0, aqua omnino nullum habebit motum horizontalem. Ex his igitur non solum motus aquæ progressivus cognoscitur, quo alterna elevatio ac depressio producitur, sed etiam luculenter perturbationes, quæ à Terris, littoribus atque etiam à fundo Maris proficisci possunt, perspiciuntur. Ceterum quanquam sectio nostra plana *ADBE* æquatorem solum denotare videtur, tamen eadem ad parallelum quemvis significandum satis commodè adhiberi potest: quin etiam motus pro sphæra hinc satis distinctè colligi poterit, operæ enim pretium non judicamus, per solidorum introductionem hanc rem cognitu tantò difficiliorem reddere.



§. 94. Eò minus autem hujus accuratæ inquisitioni insistemus, quòd celeritas progressiva insuper à profunditate maris pendeat. Quòd si enim ponamus *mn* jam esse Maris fundum, ita ut profunditas Maris in *M* major non esset quàm *Mm*; tum isti aquæ tantus motus inesse deberet, quo ea, dum Fluxus ex *A* in *a* transit, ex situ *nFMm* in situm *mFNn* transferri posset. Hic autem motus quamvis sit difformis & per totam massam inæquabilis, tamen si tota translatio spectetur, totus motus ex spatio à centro gravitatis interea percurso est æstimandus. Hoc igitur casu, quo Terræ superficiem solidam ad *mn* usque pertingere ponimus, reperietur centrum gravitatis massæ *nFMm* ferè æquè celeriter promoveri debere ac punctum *A*, ex quo ejus celeritas tanta esse deberet, quâ tempore unius horæ spatium ferè 15 graduum percurrere posset, quæ celeritas undique foret enormis ac stupenda. At si Mari profunditatem majorem tribuamus, scilicet ad $\mu\nu$ usque, tum illa celeritas multò fiet minor, decrescet namque in eadem ratione in qua profunditas crescit. Cùm igitur celeritas Maris, quæ antè in se spectata

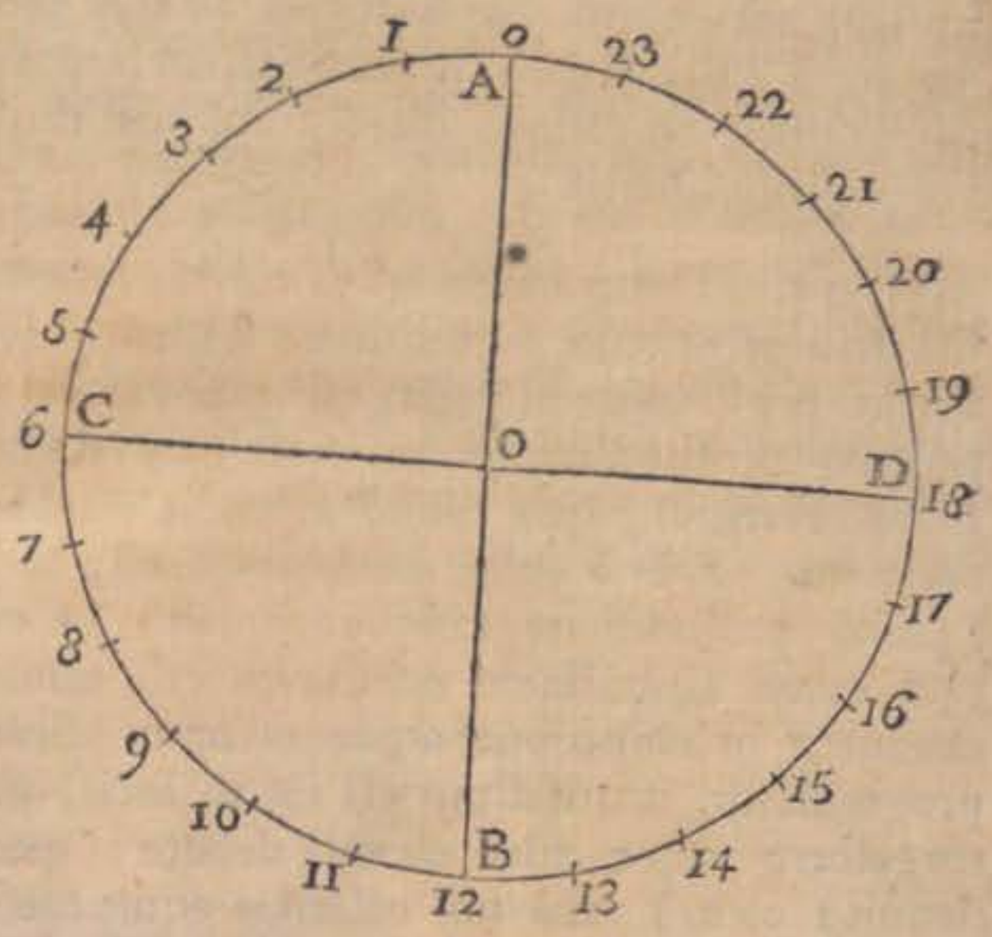
inventa

inventa est cosinui dupli anguli MCA proportionalis, eò fiat minor, quò majorem Mare habeat profunditatem, tenebit ea in quoque loco rationem compositam ex ratione directâ cosinûs dupli anguli MCA atque ex inversâ profunditatis.

§. 95. Datur autem alius modus celeritatem Maris horizontalem, positâ scilicet ubique profunditate eâdem, determinandi, qui tamen ad diversas profunditates patet, si cum ratione inveniendâ conjungamus reciprocum profunditatum uti fecimus; deduciturque hic modus ex motu Maris verticali, quo modò ascendit modò descendit, qui jam suprà est definitus. Primò enim manifestum est, si Mare ubique eâdem celeritate, (positâ profunditate ubique æquali) in eandem plagam promoveretur, tum etiam altitudinem mansuram esse eandem ubique, neque ullam mutationem in elevatione aquæ orturam esse. At si aqua motu inæquabili progrediatur, manifestum est iis in locis, ubi celeritas diminuitur, aquam turgescere atque adeo elevari debere, quoniam plus aquæ affluit quàm defluit; contrà verò ubi celeritas aquæ crescat, ibi aquam subsidere oportere. Quare cùm elevatio & depressio Maris à motûs progressivi horizontalis inæqualitate pendeat, licebit pro quovis loco hanc inæqualitatem definire, ex motu ascensûs & descensûs cognito. Cùm enim celeritas ascensûs sit decremento celeritatis progressivæ æqualis, celeritas descensûs verò incremento celeritatis progressivæ, ex dato motu verticali ratio motûs horizontalis definiri poterit. Invenimus autem suprà §. 84, si Luna à meridiano versùs occasum jam recessit angulo z, hoc est cùm regio proposita ab eâ, in quâ aqua est summa, versùs orientem secundùm longitudinem distet angulo z, fore celeritatem quâ aqua ascendit $= \frac{-6gpqPQ \sin. z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2 \sin. 2z}{h(1-8g)}$. Quare cùm huic celeritati ascensûs proportionale sit decrementum motûs horizontalis, erit ipsa celeritas horizontalis versùs occasum ut $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-1)}{2h} + \frac{6gpqPQ \cos. z}{h(1-2g)} + \frac{3gp^2q^2 \cos. 2z}{2h(1-8g)}$; hujus enim differentiale negativè sumtum & per dz divisum dat ipsam celeritatem ascensûs. Quoniam autem hæc expressio simul exhibet spatium, quo Mare supra libellam elevatur, erit celeritas Maris in quovis loco versùs occidentem proportionalis elevationi supra libellam, & inversè profunditati Maris, quæ est vera regula pro motu Maris, tam verticali quàm horizontali, definiendo; atque ita priori modo insufficienti supersedere potuissemus.

§. 96. Consideremus ergo motum, quo aqua tàm verticaliter quàm horizontaliter promovetur à Fluxu usque ad Refluxum, indeque ad sequentem Fluxum, idque sub æquatore, dum Luna pariter in æquatore versatur: erit itaque celeritas ascensûs

ut − sin. 2z, celeritas autem horizontalis versùs occasum ut 15 cos. 2z + 1 posito $g = \frac{1}{10}$, cui expressioni simul altitudo aquæ supra libellam est proportionalis. Quòd si ergo superficies Terræ seu perimeter æquatoris in 24 partes æquales dividatur, atque in locis *A* & *B* aqua sit maximè elevata, in *C* & *D* verò minimè, numeri 1, 2, 3, &c. designabunt ea Terræ loca in quibus ante unam vel duas vel tres vel &c. horas lunares aqua maximè fuit elevata, tribuendo uni horæ Lunari 62 minuta. In Tabulâ ergo annexâ exhibetur motus tam verticalis, quàm horizontalis, ad singulas horas post Fluxum elapsas.



Horæ post Fluxum.	*Celeritas Maris verticalis.*		*Celeritas Maris horizontalis.*	
0	0,000	descendit.	1,067	in occasum.
1	0,500	descendit.	0,927	in occasum.
2	0,860	descendit.	0,567	in occasum.
3	1,000	descendit.	0,067	in occasum.
4	0,860	descendit.	0,432	in ortum.
5	0,500	descendit.	0,792	in ortum.
6	0,000	ascendit.	0,932	in ortum.
7	0,500	ascendit.	0,792	in ortum.
8	0,860	ascendit.	0,432	in ortum.
9	1,000	ascendit.	0,067	in occasum.
10	0,860	ascendit.	0,567	in occasum.
11	0,500	ascendit.	0,927	in occasum.
12	0,000	descendit.	1,067	in occasum.

Facilè autem intelligitur pro regionibus ab æquatore remotis, præcipuè si Luna habeat declinationem, tum utrumque motum magis fore irregularem, atque mox ascensum citiùs absolvi mox verò descensum; totus autem motus faciliùs ex ipsis formulis datis cognoscetur. Hìc denique profunditatem ubique eandem posuimus; quòd si enim esset diversa,

ſa, motus horizontalis ſimul rationem inverſam profunditatis tenebit.

§. 97. Denique antequam hoc caput finiamus, notari oportet, neque maximos æſtus iis ipſis temporibus evenire poſſe, quibus vires Solis & Lunæ maximè vigent, nec minimos æſtus tum, cùm vis à Luna & Sole nata eſt debiliſſima, ſed aliquanto tardiùs. Æſtûs enim magnitudo non ſolum à quantitate virium ſollicitantium pendet, uti id uſuveniret, ſi aqua inertiâ careret, ſed inſuper à motu jam antè concepto. Quòd ſi enim antè Mare omnino quieviſſet, tum primus certè æſtus oriundus admodum futurus eſſet exilis, etiamſi vires ſollicitantes eſſent maximæ; ſequentes verò æſtus continuò creſcerent, donec tandem poſt tempus infinitum magnitudinem aſſignatam obtinerent, ſi quidem vires ſollicitantes idem robur perpetuò ſervarent: atque hoc idem evenire debet, ſi æſtus præcedentes tantum fuerint minores, quàm is qui viribus ſollicitantibus convenit. Quare cùm æſtus novilunia ac plenilunia præcedentes ſint minores, ii quidem his temporibus ab auctis viribus augebuntur, non verò ſubitò totam ſuam quantitatem conſequentur, atque hanc ob rem æſtus etiamnum poſt ſyzygias augmenta accipient, donec ob tum ſecutura virium decrementa, æſtus iterum decreſcere incipiant. Ita tempore noviluniorum & pleniluniorum non tam ipſi æſtus quàm incrementa eorum cenſenda ſunt maxima, quatenus ſcilicet æſtus præcedentes maximè deficiunt, ab iis qui ſequi deberent; ex quo manifeſtum eſt non illos æſtus, qui in ipſis ſyzygiis luminarium contingunt, eſſe maximos, ſed ſequentes eſſe majores. Hocque idem intelligendum eſt de æſtibus minimis, qui non in ipſas quadraturas incidunt, ſed tardiùs ſequuntur: unde ratio luculenter perſpicitur, cur æſtus tàm maximi quàm minimi non ipſis ſyzygiarum & quadraturarum tempeſtatibus reſpondeant, ſed ſeriùs obſerventur, tertii ſcilicet demum vel quarti poſt hæc tempora.

CAPUT SEPTIMUM.

Explicatio præcipuorum Phænomenorum circa Æſtum Maris obſervatorum.

§. 98. IN præcedentibus capitibus fuſiùs expoſuimus effectus, qui in Mari à viribus illis duabus, quarum altera versùs Lunam eſt directa, altera versùs Solem, produci debent; eoſque cùm per calculum analyticum, tùm per ſolida ratiocinia ita determinavimus, ut de eorum exiſtentiâ dubitari omnino non liceat, ſi quidem illæ vires admittantur. At verò iſtas vires in mundo exiſtere non ſolum per alia phæ-

nomena evidentiſſimè probavimus, ſed etiam earum cauſam phyſicam aſſignavimus, quam in binis vorticibus, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam ſit conſtitutus, poſuimus, quippe quæ eſt unica ratio cùm gravitatem tùm etiam vires, quibus planetæ in ſuis orbitis circa Solem continentur, explicandi. Quin etiam hæc ipſa phænomena internam vorticum ſtructuram & indolem commonſtrarunt; ob eaque vortices ita comparatos eſſe ſtatuimus, ut vires centrifugæ decreſcant in duplicatâ ratione diſtantiarum à centris eorumdem. Quare cùm in his viribus nihil gratuitò aſſumſerimus, ſi effectus ex iis oriundi cum phænomenis æſtûs Maris conveniant, certiſſimè nobis perſuadere poterimus, in aſſignatis viribus veram æſtûs Maris cauſam contineri; abſonumque omninò fore, ſi cauſam æſtûs Maris in aliis viribus imaginariis anquirere vellemus. Quamobrem in hoc capite conſtituimus omnes effectus, qui in ſuperioribus capitibus ſparſim ſunt eruti, conjunctim & ordine proponere, ſummumque eorum conſenſum cum experientiâ declarare. Quoniam autem nondum impedimentorum à littoribus terriſque oriundorum rationem habuimus, facilè intelligitur, hinc excludi adhuc debere ejuſmodi anomalias æſtûs Maris, quæ evidentiſſimè à Terris contingentibus ortum habeant, cujuſmodi ſunt æſtus vel vehementer enormes vel vix ſenſibiles, uti in Mari Mediterraneo, vel inſignes retardationes eorum, quibus rebus explicandis ſequens caput ultimum deſtinavimus: ita in hoc capite tantum ea æſtûs Maris phænomena explicanda ſuſcipimus, quæ in portubus ampliſſimum Oceanum reſpicientibus vel inſulis obſervari ſolent in Oceano ſitis.

§. 99. Si omnes proprietates, quibus Fluxus ac Refluxus Maris præditus eſſe obſervatur, diſtinctè enumerare atque exponere velimus, deprehendemus eas ad tres claſſes revocari debere. Ad primam ſcilicet claſſem referenda ſunt phænomena, quæ in uno æſtu in ſe ſpectato conſpiciuntur, cùm ratione temporis tùm etiam ratione quantitatis; hæcque phænomena commodiſſimè ſub varietatibus diurnis comprehendi poſſunt, quâtenus ea ſe offerunt obſervatori, qui per integrum tantum diem obſervationes inſtituit, neque ea cum aliis phænomenis aliis temporibus occurrentibus comparat. Secunda claſſis complectitur varietates menſtruas, quæ ſeſe obſervatori per integrum menſem æſtum Maris contemplanti offerunt, quorſum pertinent æſtus maximi minimique, item retardationes modò majores modò minores. Tertia denique claſſis comprehendit varietates annuas ac pluſquam annuas, quæ ſequuntur vel varias Lunæ à Terra diſtantias, vel Solis; vel etiam luminarium declinationem. Hanc ob rem phænomena uniuſcujuſque claſſis recenſebimus, atque quomodo ſingula cum theoriâ traditâ congruant, oſtendemus. Hìc verò, ut jam eſt monitum, à perturbationibus quæ à Terris ac littoribus provenire poſſunt, animum prorſus abſtinemus, eas ſequenti capiti reſervantes. Multò minùs

nùs verò ad ventum hìc reſpicimus, quo æſtus Maris cùm ratione magnitudinis tùm temporis plurimum affici obſervatur; ſed tantùm ejuſmodi phænomena explicare hìc conabimur, quæ memoratis perturbationibus minimè ſint obnoxia.

§. 100. Quod igitur ad primam claſſem attinet, præcipuum Phænomenum in hoc conſiſtit, quòd ubique in ampliſſimo Oceano quotidie bini Maris Fluxus ſeu elevationes, binique Refluxus ſeu depreſſiones obſerventur, atque tempus inter binos Fluxus ſucceſſivos circiter 12. h. 24′. deprehendatur. Huic verò Phænomeno, ſi ulli alii, per theoriam noſtram pleniſſimè eſt ſatisfactum, ubi oſtendimus maximam aquæ elevationem deberi tranſitui Lunæ per meridianum tam ſupra quàm infra Terram: ex quo cùm Luna unâ revolutione diurnâ bis ad ejuſdem loci meridianum appellat intervallo temporis circiter 12. hor. 24′, neceſſariò ſequitur unâ revolutione Lunæ circa Terram binos Fluxus tanto tempore à ſe invicem diſſitos oriri debere, quemadmodum hoc ipſum calculus tam pro hypotheſi aquæ inertiâ carentis, quàm admiſsâ inertiâ, clariſſimè indicavit. Simul autem ex iiſdem determinationibus intelligitur ſub ipſis polis nullum omnino æſtum dari diurnum, in regionibus verò à polis non procul remotis, ubi luminaria vel non oriuntur vel non occidunt; quotidie unum tantum Fluxum unicumque Refluxum contingere debere; quæ conſequentia theoriæ, etſi obſervationibus nondum ſatis eſt comprobata, tamen quia ex iiſdem principiis ſequitur quæ inſtitutis obſervationibus ſatisfaciant, nulli ampliùs dubio ſubjecta videtur. In locis autem æquatori propioribus, quibus quotidie bini Fluxus totidemque Refluxus eveniunt, momentum, quo aqua maximè deprimitur non ſatis exactè medium interjacere obſervatur inter Fluxuum momenta, ſed mox priori mox poſteriori eſt propius, quod Phænomenum cum noſtrâ theoriâ apprimè congruit; oſtendimus enim momentum Refluxûs non exactè tempori medio inter Fluxus reſpondere, niſi vel locus ſitus ſit ſub æquatore, vel Lunæ declinatio fuerit nulla, ſed modò priori modò poſteriori Fluxui eſſe propius.

§. 101. Secundum Phænomenum huc redit, ut ubique locorum Fluxus poſt tranſitum Lunæ per meridianum venire obſervetur, idque aliquot horarum ſpatio, in portubus versùs apertum Oceanum patentibus. Nam in regionibus quæ cum Oceano non liberrimè communicantur, ſed ad quas aqua juxta littora deferri debet, multo tardiùs æſtus advenit, quæ retardatio ſi ferè ad 12 horas aſcendit, in cauſa eſſe ſolet, ut hujuſmodi in locis Fluxus ante tranſitum Lunæ per meridianum venire videatur. Ita ad Portum Gratiæ videri poſſet Fluxus 3 horis Lunæ culminationem antecedere, cùm tamen, re benè conſideratâ, à præcedente culminatione oriatur, atque adeo eam 9 ferè horis demum ſequatur, uti apparebit ſi æſtuum momenta, quæ ſucceſſivè ad littoræ Britannia minoris

& Normanniæ obſervantur continuóque magis retardantur, attentiùs inſpiciantur. Deberet quidem ubique Fluxus in ipſos Lunæ tranſitus per meridianum incidere, imò quandoque ob Solem præcedere, non ſolùm demtâ inertiâ, ſed etiam eâ poſitâ, ſi tantum aquæ motus verticalis ſpecterur; at ſi etiam motûs horizontalis ratio habeatur, tum dilucidè oſtendimus Fluxum perpetuò retardari, ac demum poſt Lunæ tranſitum per meridianum evenire debere. Tempus quidem hujus retardationis, cùm ſit admodum variabile pluribuſque circumſtantiis ſubjectum, non definivimus, interim tamen id ex §. 82. colligi poterit, remotis externis impedimentis: cùm enim invenerimus aquam propriâ vi gravitatis ſeſe in ſitum æquilibrii recipere tempore $\frac{12}{n}$ horarum, ac numerum n eſſe circiter 5, vel 6, manifeſtum eſt tanto etiam tempore opus eſſe, quo aqua eum ſitum quem vires intendunt, induat, ex quo Fluxus circiter 2 horas vel $2\frac{1}{2}$ hor. poſt tranſitum Lunæ per meridianum contingere debebit, id quod cum obſervationibus in Oceano libero inſtitutis egregiè convenit; hancque idcireo præcipuam hujus retardationis cauſam meritò aſſignamus.

§. 102. Tertium Phænomenon ſuppeditat æſtûs magnitudo, quæ autem tam diverſis locis quàm diverſis tempeſtatibus maximè eſt mutabilis. Interim tamen exceptis enormibus illis æſtubus, qui nonnullis in portubus obſervari ſolent, reliqui cum noſtrâ Theoriâ egregiè conſentiunt; inertiâ enim ſublatâ, invenimus ſub æquatore maximum æſtum fore per ſpatium circiter 4 pedum, ab inertia autem hoc intervallum augeri ita ut duplo, vel triplo, vel etiam quadruplo & plus fiat majus, prout valor ipſius g (vid. §. 82.) minor fuerit vel major, quippe qui à facultate Oceani ſeſe propriâ ſuâ vi in ſtatum æquilibrii reſtituendi pendet; ex quo ſub æquatore ſpatium per quod maximus æſtus agitatur ad 8., 12, 16 & plures pedes exſurgere poteſt. In regionibus autem ab æquatore remotis invenimus magnitudinem æſtûs tenere rationem duplicatam coſinuum elevationis poli, unde ſub elevatione poli 45°., magnitudo æſtûs circiter duplo erit minor quàm ſub ipſo æquatore; cujus veritas in locis à littoribus aliquot milliaria remotis per experientiam eximiè comprobatur. Deprehenditur enim ubique in locis à littoribus remotis æſtus multò minor quàm ad littora; cujus diſcriminis cauſa in ſequenti capite dilucidè indicabitur. Quinetiam in medio Mari plerumque æſtus adhuc minor obſervatur, quàm hæc regula requirit; id autem oſtendetur à non ſatis amplâ Oceani extenſione ſecundùm longitudinem proficiſci, quemadmodum in Oceano Atlantico qui versùs Occidentem littoribus Americæ; versùs Orientem verò littoribus Africæ & Europæ terminatur, quæ amplitudo non eſt ſatis magna, ut integram æſtûs quantitatem ſuſcipere queat.

§. 103.

§. 103. Quartum Phænomenon varietates menſtruas reſpicit, atque oſtendit æſtus, qui circa plenilunia & novilunia contingunt, inter reliquos ejuſdem menſis eſſe maximos, æſtus verò circa quadraturas luminarium minimos; quæ inæqualitas cum theoriâ noſtrâ ad amuſſim quadrat. Cùm enim æſtus Maris non ſolum ab eâ vi, quæ vortici Lunam ambienti competit, oriatur, ſed etiam à vi Solem ſpectante pendeat, quæ ceteris paribus circiter quadruplo minor eſt vi Lunæ, manifeſtum eſt æſtum Maris maximum eſſe debere, ſi ambæ vires inter ſe conſpirent, atque aquam ſimul vel elevent vel deprimant, id quod accidere oſtendimus tam pleniluniis quàm noviluniis. Deinde ſimili modo, quoniam iſtæ vires inter ſe maximè diſcrepant in quadraturis, quibus temporibus dum aqua à Lunâ maximè elevatur, ſimul à Sole maximè deprimitur ac viciſſim, perſpicuum eſt iiſdem temporibus æſtum minimum eſſe debere. Præterea verò ipſum diſcrimen cum theoriâ exactè convenit; in pluribus enim portubus æſtus maximos & minimos ad calculum revocavimus, atque ex relatione eorum relationem inter vires Lunæ ac Solis inveſtigavimus; hincque perpetuò eandem ferè rationem inter vires Solis ac Lunæ abſoluras elicuimus, quemadmodum id fecit Newtonus ex obſervationibus Briſtolii & Plymouthi, nos verò in Portu Gratiæ inſtitutis, concluſionibus mirificè inter ſe congruentibus: qualis conſenſus profectò expectari non poſſet, ſi theoria veritati non eſſet conſentanea. Neque etiam aliæ theoriæ adhuc productæ, cujuſmodi ſunt Galilæi, Walliſii atque Carteſii, qui cauſam in preſſione Lunæ collocavit, huic phænomeno perfectè ſatisfaciunt, ſed potiùs prorsùs evertuntur.

§. 104. Quintum Phænomenon in hoc conſiſtat, quòd unius menſis intervallo maximi æſtus non ſint ii, qui novilunia ac plenilunia proximè inſequuntur, ſed ſequentes tertii ſcilicet circiter vel quarti, ſimilique intervallo æſtus minimi demum poſt quadraturas contingunt. Hujus autem Phænomeni ratio in §. 97. fuſiùs eſt expoſita, ubi oſtendimus, cùm æſtus ante ſyzygias incidentes eſſent minores, maximam vim à Sole & Lunâ ortam non ſubitò æſtum maximum producere valere, ſed tantùm Mare ad eum ſtatum ſolicitare. Cùm igitur poſt ſyzygias vis æſtum efficiens ſenſibiliter non decreſcat, æſtus etiamnum poſt hoc tempus incrementa capiet, atque ideo demum poſt ſyzygias fiet maximus; ſimiliſque eſt ratio diminutionis æſtuum, quæ etiamnum poſt quadraturas contingere debet, ita ut æſtus minimi demum poſt quadraturas eveniant. Hujuſmodi autem retardationes effectuum à viribus in mundo exiſtentibus proventium quotidie abundè experimur: ob ſimilem enim rationem ſingulis diebus maximum calorem non in ipſo meridie ſentimus, etiamſi hoc tempore vis Solis calefaciens ſine dubio ſit maxima, ſed demum aliquot horis poſt meridiem, atque propter eandem cauſam neque ſolſtitii æſtivi momento maximus calor annuus ſentitur, neque tempore ſolſtitii hyberni frigus ſummum, ſed utrumque notabiliter tardiùs. §. 105.

§. 105. Sextum Phænomenon in hoc ponimus, quòd momenta Fluxuum tempore ſyzygiarum multo ſtrictiùs ordinem tenere obſervantur, quàm circa quadraturas. Hìc verò ante omnia animadvertendum eſt præcipuam ſenſibilem anomaliam in momentis æſtuum inde originem trahere, quòd hæc momenta ex tempore ſolari atque à vero meridie ſeu tranſitu Solis per meridianum ſoleant computari, cùm ea potiùs à tranſitu Lunæ per meridianum pendeant. Quòd ſi autem ad has obſervationes tempus lunare à tranſitu Lunæ per meridianum computandum adhibeatur, irregularitates apparentes maximam partem evaneſcent, hoc verò multo magis in fluxubus circa ſyzygias quàm quadraturas: in quadraturis enim quoniam, dum Luna per meridianum tranſit, Sol non ſemper in horizonte verſatur, ſed vel ad horizontem demum accedit vel jam ab eo recedit, neceſſe eſt ut illo caſu Fluxus citiùs, hoc verò tardiùs contingat: quod diſcrimen cùm partim ab elevatione poli partim à declinatione luminarium pendeat, momenta Fluxuum in quadraturis magis irregularia reddit: interim tamen habitâ harum circumſtantiarum ratione ſatis propè definiri poteſt. Circa tempora Fluxuum autem, qui in noviluniis ac pleniluniis incidunt, hæc ſola correctio ſeu reductio ad tranſitum Lunæ per meridianum omnem ferè anomaliam tollit, quorſum ſpectat regula à celeb. Caſſino in Mem. 1710. tradita, quâ pro totidem horis, quibus plenilunium ſeu novilunium vel ante meridiem vel poſt incidit, totidem bina minuta ad tempus Fluxûs medium vel addere vel ab eo ſubtrahere jubet, quippe quæ ex motu Lunæ eſt petita. Interim tamen hâc correctione adhibitâ aliqua anomalia ſupereſſe deprehenditur, cujus autem ratio ex noſtrâ theoriâ ſponte ſequitur. Quando enim ſyzygia ante meridiem celebratur, tum dum Luna per meridianum tranſit, Sol jam ante eum eſt tranſgreſſus, atque ideo jam horizonti appropinquat, ex quo neceſſe eſt ut Fluxus citiùs eveniat, quàm prima regula ſola adhibita indicat. Atque etiam idem in tabulis Fluxuum Dunkerquæ & in Portu Gratiæ obſervatorum, Mem. 1710. inſertis, manifeſtò conſpicitur: quando enim novilunium pleniluniumve pluribus horis ante meridiem accidit, tum Fluxus citiùs adveniſſe obſervatur, quàm calculus Caſſinianus indicabat; contrà verò tardiùs ſi ſyzygiæ demum pluribus horis poſt meridiem inciderint, cujus majoris retardationis cauſa in Sole tum adhuc ab horizonte recedente eſt quærenda.

§. 106. Septimum Phænomenon ſuppeditat diverſa retardatio Fluxuum in ſyzygiis luminarium & quadraturis reſpectu appulsûs Lunæ ad meridianum; tardiùs ſcilicet ubique locorum Fluxus, qui in ſyzygiis contingunt, inſequuntur culminationem Lunæ, quàm ii, qui circa quadraturas veniunt. Hujus autem Phænomeni duplex cauſa poteſt aſſignari, quarum prima à ſolâ quantitate æſtuum petitur, quia enim æſtus ſyzygiarum multò ſunt majores quàm æſtus quadraturarum, conſentaneum vide-

videtur illos tardiùs venire quàm hos. Altera verò cauſa quæ hoc Phænomenon multò diſtinctiùs explicat, nullique dubio locum relinquit, noſtræ theoriæ omnino eſt propria, priorique longè eſt præferenda. Ponamus enim t eſſe tempus, quo in noviluniis ac pleniluniis Fluxus poſt appulſum Lunæ ad meridianum venire ſolet; ſequentibus igitur diebus hoc tempus t continuò diminuetur, quia tum Sol, dum Luna in meridiano verſatur, Mare jam deprimit; quæ diminutio cùm duret ferè uſque ad quadraturas, neceſſe eſt ut his temporibus Fluxus multò citiùs poſt culminationem Lunæ ſequantur, viribuſque ſollicitantibus magis obtemperent, utì hoc fuſiùs §. 91. explicavimus, unde tempus retardationis in quadraturis tantum erit $t - \theta$. Poſt quadraturas autem Sol exerit contrarium effectum, atque adventum Fluxûs continuò magis retardat, idque æquali modo, quo antè acceleraverat, ex quo uſque ad ſequentem ſyzygiam intervallum $t - \theta$ iterum ad t uſque augebitur. Hujuſque Phænomeni ſolius explicatio ſufficere poſſet ad veritatem theoriæ noſtræ evincendam, cùm id omnibus aliis theoriis explicatu ſit inſuperabile; neque à nemine adhuc ſaltem probabilis ejus cauſa ſit aſſignata.

§. 107. Octavum Phænomenon petamus ex inæqualitate duorum Fluxuum ſeſe immediatè inſequentium, quorum alter tranſitui Lunæ ſuperiori per meridianum reſpondet, alter inferiori, quæ inæqualitas maximè obſervatur in regionibus ab æquatore multum remotis, ac tum cum Lunæ declinatio eſt maxima. Theoria quidem declarat Lunam, etiamſi in ipſo æquatore verſetur, tamen majori vi gaudere ad Mare movendum, quando ſuper horizonte meridianum attingit, quàm infra horizontem; at diſcrimen ſub æquatore tam eſt exiguum, ut vix in ſenſus occurrere queat, integrum enim digitum non attingit (§. 41.); atque in regionibus ab æquatore remotis fit multò minus. Vera igitur hujus Phænomeni ratio in altitudine Lunæ meridianâ ſeu diſtantiâ ab horizonte continetur; hinc enim ſequitur quò major fuerit differentia inter diſtantias Lunæ ab horizonte, dum per meridianum tranſit tum ſuper horizonte tum ſub horizonte, eò majorem eſſe debere differentiam inter binos Fluxus ſucceſſivos, ex quo perſpicuum eſt iſtam differentiam versùs polos continuò creſcere debere, ſi quidem Luna habeat declinationem. Quòd ſi ergo Luna habuerit declinationem borealem, tum in regionibus ſeptentrionalibus Fluxus erit major qui tranſitum Lunæ per meridianum ſuperiorem ſequitur, alter verò ſequens, qui tranſitui inferiori reſpondet, minor. Contrà autem ſi Lunæ declinatio fuerit auſtralis, appulſui Lunæ ad meridianum ſuperiori Fluxus ſuccedet minor, inferiori verò major; hancque differentiam Flamſtedius obſervavit diligenter, nullumque eſt dubium, quin ea per copioſiſſimas obſervationes, quas Academia Celeberrima Regia Pariſina collegit, omnino confirmetur. In hoc autem negotio indoles Fluxuum probè eſt inſpicienda, quoniam aliquibus in

portibus tantopere retardantur, ut ſequentibus Lunæ tranſitibus per meridianum ſint propiores, quàm illi, cui ſuam originem debent; ita Dunkerquæ circa ſyzygias Fluxus circiter meridie obſervari ſolet, neque verò illi ipſi tranſitui Lunæ per meridianum eſt tribuendus qui eodem tempore fit, ſed præcedenti, prouti ſucceſſiva retardationis incrementa ad littora Galliæ & Belgii borealia evidentiſſimè teſtantur. Quare ſi verbi gratiâ Dunkerquæ quis hujuſmodi obſervationes perluſtrare voluerit, is quemque Fluxum non cum tranſitu Lunæ per meridianum proximo comparet, ſed cum eo qui propemodum 12 horis antè contigit; alioquin enim contraria Phænomena eſſet deprehenſurus.

§. 108. Commodus hîc nobis præbetur locus explicandi tranſitum à binis æſtubus, qui quotidie in regionibus extra circulos polares ſitis eveniunt, ad ſingulos æſtus, qui ſecundùm theoriam noſtram in regionibus polaribus contingere debent. Quoniam enim theoria noſtra monſtrat, in zonis temperatis & torridâ quotidie duos Fluxus obſervari debere, in zonis frigidis autem unum tantum, tranſitio ſubitanea à binario ad unitatem maximè mirabilis ac paradoxa videri poſſet. Sed quia ſi Fluxus bini ſucceſſivi inter ſe ſunt inæquales, Refluxus aquæ ſeu maxima depreſſio Fluxui minori eſt vicinior, bini æſtus quoque ſucceſſivi ratione temporis inter ſe erunt inæquales, ſi quidem voce æſtûs intelligamus motum aquæ à ſummâ elevatione ad imam depreſſionem uſque, ac viciſſim. Quò magis itaque ab æquatore versùs polos recedatur, eò major deprehendetur inter binos æſtus ſucceſſivos inæqualitas, cùm ratione magnitudinis tùm temporis, major enim diutiùs durabit quàm minor, ambo verò ſimul ubique abſolventur tempore 12 horarum, cum 24′ circiter: quòd ſi itaque in eas regiones uſque perveniatur, in quibus Luna utrâque vice vel ſuper horizonte vel ſub horizonte meridianum attingit, æſtus minor omnino evaneſcet, ſoluſque major ſupererit, qui tempus 12 h. 24′. adimplebit. Ex quibus perſpicuum eſt, ſi Luna habeat declinationem, inæqualitatem binorum æſtuum ſucceſſivorum ad polos accedendo continuò fieri majorem, atque tandem minorem omnino evaneſcere debere, quod cùm evenit, bini æſtus in unum coaleſcunt.

§. 109. Explicatis anomaliis æſtûs Maris menſtruis, pervenimus ad anomalias annuas vel pluſquam annuas, ac nonum quidem Phænomenon deſumimus ex variatione æſtûs, quæ à diverſis Lunæ à Terra diſtantiis proficiſcitur. Obſervantur enim æſtus ubique majores ceteris paribus, in iiſdem ſcilicet luminarium aſpectibus iiſdemque declinationibus, ſi Luna in ſuo perigæo verſetur, minores verò, Lunâ in apogæo exiſtente. Egregiè autem hæc conveniunt cum noſtrâ theoriâ, quâ demonſtravimus Lunæ vires ad Mare movendum decreſcere in triplicatâ ratione diſtantiarum Lunæ à Terra: quòd ſi igitur Luna verſetur in perigæo Fluxus debebunt eſſe majores, quàm ſi Luna apogæum occupat. Præterea etiam

tabula

tabula quam Celeb. Caſſini in Mem. 1713. pro diverſis Lunæ à Terrâ diſtantiis ex plurimis obſervationibus Breſtiæ inſtitutis collegit, ſatis accuratè cum theoriâ noſtrâ conſpirat, etiamſi enim pro Luna perigæa minorem elevationem aquæ tribuat, quàm iſta ratio requireret, tamen diſcrimen valde eſt exiguum: quin etiam facilè concederetur Lunam perigæam totum ſuum effectum non tam citò conſequi poſſe, quem conſequeretur, ſi Luna perpetuò in perigæo verſaretur. Aliter autem Luna apogæa eſt comparata, quæ ad diminuendum æſtum Maris tendit, cùm enim Mare ob inertiam & impedimenta ipſum ad diminutionem æſtûs ſit proclive, ſine ullâ reſiſtentiâ Luna in apogæo conſtituta effectum ſuum exeret. Huc etiam pertinet, quod pariter Celeb. Caſſini ſe obſervaſſe teſtatur, ſimilem differentiam etſi multò minorem à variis Solis à Terrâ diſtantiis produci, id quod noſtræ theoriæ non ſolum eſt conſentaneum, ſed inde etiam ipſa quantitas hujus differentiæ poteſt definiri.

§. 110. Denique decimum Phænomenon ſeſe nobis contemplandum offert, quo vulgò ſtatui ſolet æſtus tam noviluniorum quàm pleniluniorum, qui contingunt circa æquinoctia, cæteris eſſe majores, etiamſi obſervationes hanc regulam non penitùs confirment; quamobrem videamus quomodo æſtus cæteris paribus comparatus eſſe debeat pro diverſis Lunæ declinationibus. Ac primò quidem ex noſtrâ theoriâ (§. 87.) æſtus dum Luna in æquatore verſatur, maximos eſſe non poſſe, niſi in locis ſub ipſo æquatore ſitis; atque eodem loco tabellam adjecimus, ex quâ patet, cuinam Lunæ declinationi maximi æſtus reſpondeant. Ita pro elevatione poli 50°, æſtus maximi incidunt Lunæ declinationi 27°, ſi quidem g ponatur $= \frac{2}{25}$; at poſito $g = \frac{1}{10}$, quod probabilius videtur, prodit Lunæ declinatio maximum æſtum producens circiter 16°, id quod mirificè convenit cum obſervationibus ad Littora Galliæ Septentrionalia inſtitutis, quibus conſtat maximos ſyzygiarum æſtus menſibus Novembri & Februario accidere ſolere, quibus temporibus Luna ferè aſſignatam obtinet declinationem. At quod fortè illi regulæ, quâ Lunæ in æquatore verſanti maximi æſtus adſcribi ſolet, anſam præbuiſſe videtur, eſt modus æſtuum quantitates definiendi peculiaris ac ſatis perverſus; cùm enim crederent plerique obſervatores cauſis alienis tribuendam eſſe inæqualitatem, quæ inter binos æſtus ſucceſſivos intercedat, veram aquæ elevationem accuratiùs definire ſunt arbitrari, ſi ſumerent medium inter binos Fluxus ſucceſſivos. Quòd ſi autem hoc modo quique æſtus æſtimentur, tum utique maximi æſtus in æquinoctia incidere obſervabuntur, id quod etiam noſtræ theoriæ maximè eſt conforme, exceptis tantum regionibus polis vicinioribus. Cùm enim poſitis ſinu elevationis poli $= P$, coſinu $= p$, ſinu declinationis Lunæ $= Q$, coſinu $= q$, major æſtus fiat per ſpatium $\frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq+\frac{PQ(1-8g)^2}{1-2g}\right)$, minor verò per ſpatium $=$

$\frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq-\frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, §. 86.) erit per hunc æſtum Maris menſurandi modum quantitas æſtûs $=\frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2q^2+\frac{(1-8g)^2P^2Q^2}{(1-2g)^2}\right)=\frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2-p^2Q^2+\frac{(1-8g)^2P^2Q^2}{(1-2g)^2}\right)$; ex quâ expreſſione perſpicitur maximos æſtus ubique, ſi quidem modo recenſito menſurentur, Lunæ in ipſo æquatore degenti reſpondere, niſi ſit $\frac{(1-8g)^2P^2}{(1-2g)^2} > p^2$, hoc eſt niſi tangens elevationis poli major ſit quàm $\frac{1-2g}{1-8g}$: his ſcilicet regionibus etiam Luna declinans ab æquatore majores æſtus producet. At ſi ponatur $g=\frac{2}{25}$, prodit elevatio poli, ubi regula prolata fallere incipit, 66°; ſin autem ponatur $g=\frac{1}{58}$, fit elevatio poli major quàm 58°; at poſito $g=\frac{1}{10}$, provenit poli elevatio 76°. Cùm igitur in locis polis tam vicinis obſervationes inſtitui non ſoleant, ſatis tutò affirmare licet, maximos æſtus menſtruos accidere circa æquinoctia, ſi quidem quantitas æſtûs quotidie menſuretur per medium arithmeticum inter ſpatia, quæ duo æſtus ſucceſſivi conficiunt.

§. 111. Quid nunc aliud de theoriâ noſtrâ ſit ſentiendum, niſi eam veram & genuinam æſtûs Maris cauſam, qualis ab Illuſtriſſima Academia Regia in propoſitâ quæſtione deſideratur, in ſe complecti, non videmus? Non ſolum enim omnia Phænomena, quæ in æſtu Maris obſervantur, clarè & diſtinctè explicavimus, ſed etiam exiſtentiam actualem earum virium, quibus hos effectus adſcribimus evidentiſſimè demonſtravimus; ex quo efficitur cauſam à nobis aſſignatam, non tantum omnibus Phænomenis ſatisfacere, ſed etiam eſſe unicam quæ cum verâ conſiſtere queat. Quòd ſi enim quiſpiam alias vires excogitet, quibus æquè omnia Phænomena explicare poſſet, etiamſi hoc fieri poſſe minimè concedamus, ejus certè explicatio ſubitò concideret & everteretur à viribus noſtræ theoriæ, quas aliunde in mundo exiſtere abundè conſtat; quoniam ab illis viribus imaginariis hiſque realibus conjunctim effectus duplicatus conſequi deberet, quem experientia averſatur. Nunc igitur nobis ſummo jure aſſerere poſſe videmur, veram æſtûs Maris cauſam in duobus vorticibus eſſe poſitam, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam agitetur, atque uterque ejus ſit indolis, ut vires centrifugæ decreſcant in duplicatâ ratione diſtantiarum à centris utriuſque vorticis: quæ proprietas obtinetur, ſi celeritas materiæ ſubtilis gyrantis in quoque vortice teneat rationem reciprocam ſubduplicatam diſtantiarum. Neque verò hi duo vortices ad libitum ſunt excogitati, ſed ille qui Solem circumdat eſt is ipſe, qui omnes planetas in ſuis orbitis continet; alter verò Lunam circumdans, etſi ejus vis niſi in æſtu Maris non ſentitur, tamen ſine ullâ hæſitatione admitti poteſt, cùm certò conſter

Ter-

Terram, Jovem ac Saturnum ſimilibus vorticibus eſſe cinctos, unde ejuſmodi vortices nulli omnino corpori mundano denegari poſſe videntur. Parciùs quidem hîc materiam de vorticibus tractavimus, etiamſi in illis veram æſtûs Maris cauſam ponamus; hoc autem de induſtriâ fecimus, cùm hoc argumentum jam toties ſit tractatum ac ferè exhauſtum; neque nobis perſuadere poſſumus, ſi hâc occaſione doctrinam de vorticibus etiam meliùs, quam etiamnum à quoquam eſt factum, expediremus, ob eam rem præmium nobis tributum iri.

CAPUT OCTAVUM.

De Æſtûs Maris perturbatione à Terris ac littoribus oriundâ.

§. 112. PERVENIMUS tandem ad ultimam noſtræ diſquiſitionis partem, quæ præcipua eſt, in quâ Theoriam expoſitam ad ſtatum telluris, in quo reverâ reperitur, debito modo accommodabimus. Hactenus enim, quò ardua iſta diſquiſitio facilior redderetur, ab omnibus circumſtantiis externis quibus effectus à viribus Solis ac Lunæ oriundis vel turbari vel determinatu difficiliores reddi poſſent, cogitationem abſtraximus. Primò ſcilicet non ſolum totam Terram ex aquâ conflatam poſuimus, ſed etiam inertiam aquæ mente ſuſtulimus, ut eò pauciores res in computum ducendæ ſupereſſent. Deinde inertiæ quidem habuimus rationem, ac præcedentes determinationes debito modo correximus; verùm totam Terram aquâ undiquaque circumfuſam aſſumſimus, ſeu etiamnum anomalias à Terris neglexímus. Nunc itaque noſtra theoria eò eſt perducta, ut nihil ampliùs adjicere neceſſe foret, ſi quidem æſtus Maris à Terris littoribuſque ſenſibiliter non afficeretur; niſi fortè anomaliæ quædam à ventis oriundæ commemorari deberent, quæ autem motu aquæ perſpecto facilè adjudicantur, atque ad omnes theorias æquè pertinent. Quamobrem ultimum hoc caput deſtinavimus explicationi Phænomenorum quorumdam ſingularium, quorum cauſa non tam in ipsâ aquâ viribuſque eam ſollicitantibus, quàm in Terrâ continenti littoribuſque eſt quærenda: hac enim parte abſolutâ nihil ampliùs reſtare videtur, quod vel ad Theoriæ noſtræ confirmationem, vel ad omnium Phænomenorum adæquatam explicationem deſiderari queat. Quamvis enim Illuſtriſſima Academia totum hoc argumentum non penitùs exhauriri jubeat, cùm adhuc nonnullas quæſtiones de eodem in poſterum proponere conſtituiſſet, tamen quia hoc tempore vera cauſa phyſica deſideratur, veritatem noſtræ theoriæ non ſatis confirmari arbitramur, niſi ejus convenientiam cum omnibus Phænomenis dilucidè oſtenderemus, cùm ſi vel

unicum Phænomenon refragaretur, eo ipso tota theoria subverteretur; quam ob causam prolixitatem nostræ tractationis, atque transgressionem limitum præscriptorum nobis sine difficultate condonatum iri confidimus.

§. 113. Primùm autem perspicuum est motum Maris horizontalem quo vel versùs orientem vel occidentem progreditur, ob Terram interpositam non solum perturbari, verùm etiam quandoque prorsus impediri debere. Suprà enim ostendimus, si tota Terra aquâ esset circumfusa, tum ubique ad Fluxum formandum aquam ab oriente advehi debere, ante refluxum autem versùs ortum defluere. Quòd si ergo Oceanus versùs orientem Terris terminetur, fieri omnino nequit tempore Fluxûs ad hæc littora aqua ab oriente affluat, quo ipso cursus aquæ naturalis penitùs impedietur. Quoniam autem vires Solis ac Lunæ nihilominùs his in regionibus Mare attollere conantur, effectum consequi non poterunt, nisi aqua ab Occidente afferatur: sic quando ad littora Europæ aqua à viribus Solis ac Lunæ elevatur, aqua ab Occidente eò deferatur necesse est, ab iis scilicet regionibus, ubi aqua eodem tempore deprimetur; quod idem fieri debet ad littora Africæ & Americæ occidentalia. Contrà verò ad littora Asiæ & Americæ orientalia aqua naturali motu feretur, atque in Fluxu ab oriente adveniet, in Refluxu verò versùs orientem recedet. Vires namque Solis ac Lunæ motum aquæ horizontalem non per se determinant, sed eâtenus tantum, quâtenus aliis in locis aquam attollunt, aliis verò eodem tempore deprimunt; atque aqua ob propriam gravitatem eum seligit motum, quo facillimè à locis quibus deprimitur, ad loca quibus attollitur promoveatur: quamobrem iste motus maximè à Terris oceanum includentibus determinetur necesse est. Hinc igitur perspectâ positione littorum cujusvis Maris facilè definiri poterit, à quanam plagâ aqua in Fluxu venire, quorsumque in Refluxu decedere debeat, si modò elevationes & depressiones aquæ per totum Mare attentè considerentur: tota enim hæc quæstio pertinebit ad hydrostaticam.

§. 114. Cùm igitur ad littora Europæ aqua elevari nequeat, nisi affluxus ab occidente fiat copiosus, ad littora quæ versùs occidentem respiciunt aqua directè ab occidente adveniet, quæ autem littora ad aliam plagam sunt dispositа, aquæ cursus versùs orientem directus inflectetur juxta littora, priusquam eò pertingat, omnino uti inspectio mapparum docebit. Quoniam verò iste aquæ juxta littora Fluxus tantam celeritatem, quantam habet Luna, recipere nequit, necesse est, ut Fluxus ad littora magis ad orientem sita tardiùs advehatur. Hæc autem versùs littora orientaliora retardatio maximè perspicua est in portubus Galliæ, Belgii, Angliæ & Hiberniæ; cùm enim ad ostia fluviorum Garumnæ & Ligeris, quæ versùs Oceanum ampliſſimum patent, tempore pleniluniorum

niorum ac noviluniorum Fluxus adveniunt horâ tertiâ pomeridianâ, quæ retardatio naturalis cenſeri poteſt, neque littoribus adhuc turbata; hinc aqua demum ad littora Britanniæ minoris ac Normanniæ progreditur; atque idcirco his in regionibus Fluxus tardiùs evenire obſervantur. Sic ad Portum S. Malo tempore ſyzygiarum Fluxus demum horâ ſextâ ſequitur, ad oſtia verò Sequanæ uſque ad horam nonam retardatur: atque ita porro retardatio augetur, donec tandem in freto Gallico Dunkerquæ & Oſtendæ mediâ nocte incidat. Ex hac verò retardatione innoteſcit celeritas aquæ, quâ juxta littora progreditur, eaque tanta deprehenditur quâ unâ horâ ſpatium circiter (†) 8. milliarium conficiat. Denique aqua tantam fere viam abſolvere debet uſque ad Dublinum, quantam ad fretum Gallicum, ex quo Fluxus etiam Dublini horâ circiter decimâ pomeridianâ obſervari ſolet. Atque ſimili modo retardatio Fluxuum ad littora aliarum regionum ſine ullâ difficultate explicari poterit.

§. 115. Quod autem ad quantitatem æſtûs Maris ad littora attinet; facilè intelligitur æſtum Maris ad littora majorem eſſe debere, quàm in medio mari. Primò enim aqua cum impetu ad littora allidit, ex quo allapſu ſolo jam intumeſcentia oriri debet. Deinde quoniam aqua eâdem celeritate, quam habebat Oceano, ubi maxima eſt profunditas, progredi conatur, ad littora locaque vadoſa vehementer inturgeſcet, tantum enim fere aquæ ad littora affertur, quantum ſufficeret ad ſpatium, quod Terra occupat, inundandum. Tertiò iſte aquæ affluxus in ſinibus vadoſis multò adhuc magis increſcere debet, eò quòd aqua his in locis jam multum appulſa ad latera diffluere nequit, ſi quidem ſinus directè versùs eam plagam pateat, unde aqua advehitur. Ex his igitur non ſolum ratio patet, cur aqua fere ubique ad littora ad multo majorem altitudinem elevetur, quàm in medio Mari, ſed etiam cur Briſtolii tam enormis Fluxus circa ſyzygias luminarium obſervetur; cùm enim in hâc regione littus ſit valdè ſinuoſum ac vadoſum, aqua maximâ vi appellitur, neque ob ſinuoſitatem tam citò diffluere poteſt. Atque ex his principiis non erit difficile rationem inconſuetorum æſtuum, qui paſſim in variis portubus animadvertuntur, indicare atque explicare; quamobrem hujus generis Phænomenis explicandis diutiùs non immoramur, cùm conſideratio littorum & Fluxûs aquæ eò ſponte quaſi manuducat.

§. 116. Quamvis autem tam Affluxus aquæ ex Oceano Atlantico; quàm Refluxus per fretum Galliam ab Anglia dirimens, ingenti fiat celerita-

(†) Ita legitur in exemplari Pariſino, procul dubio mendosè, ſed locum reſtituere non ſumus auſi; ab oſtio Garumnæ ad Dublinum quingenta circiter Italica milliaria numerantur via rectiſſima, quæ horis 7 à fluxu percurruntur qui ideo 70 milliaria ſingulis horis ad minimum emetiretur, unde 80 milliaria pro 8 milliaribus ſcribenda conjectamur.

leritate, tamen cùm versùs Belgium fœderatum Mare mox vehementer dilatetur, ab isto alterno Fluxu ac Refluxu altitudo Maris in Oceano Germanico sensibiliter mutari nequit. Atque hanc ob causam statui oportet, in hoc Mari æstum proficisci maximam partem ab affluxu & refluxu aquæ circa Scotiam, ubi communicatio hujus Maris cum Oceano Atlantico multo major patet; quam sententiam magnopere confirmat ingens æstuum retardatio ad littora Belgii & Angliæ orientalia observata, ad Ostia scilicet Thamisis pertingit Fluxus elapsis jam duodecim horis post transitum Lunæ per meridianum, atque Londinum usque tribus ferè horis tardiùs defertur; quod Phænomenon consistere non posset si aqua per fretum Gallicum solùm moveretur, cùm jam in ipso freto duodecim horis retardetur Fluxus. Interim tamen negari non potest quin communicatio Maris Germanici cum Oceano Atlantico per fretum Gallicum æstum quoadmmodo afficiat, atque Fluxum qui circa Scotiam advehitur vel adjuvet vel turbet, prout hi ambo motus ad Mare elevandum ac deprimendum vel magis inter se conspirent vel minus. Simul autem hinc intelligitur æstum Maris ex Oceano Atlantico neque cum Mari Mediterraneo neque cum Mari Baltico communicari posse, cùm intervallo sex horarum per freta Herculea & Oresundica tantum aquæ in hæc maria neque affluere queat neque inde reffluere, ut sensibilis mutatio in altitudine aquæ oriri queat. Quamobrem in istiusmodi maribus quæ à vasto Oceano tantum angustis fretis separantur, æstus omnino nullus contingere potest, nisi forte talia maria Terris inclusa ipsa tam sint ampla, ut vires Solis ac Lunæ æstum peculiarem in iis producere queant; quâ de re mox videbimus.

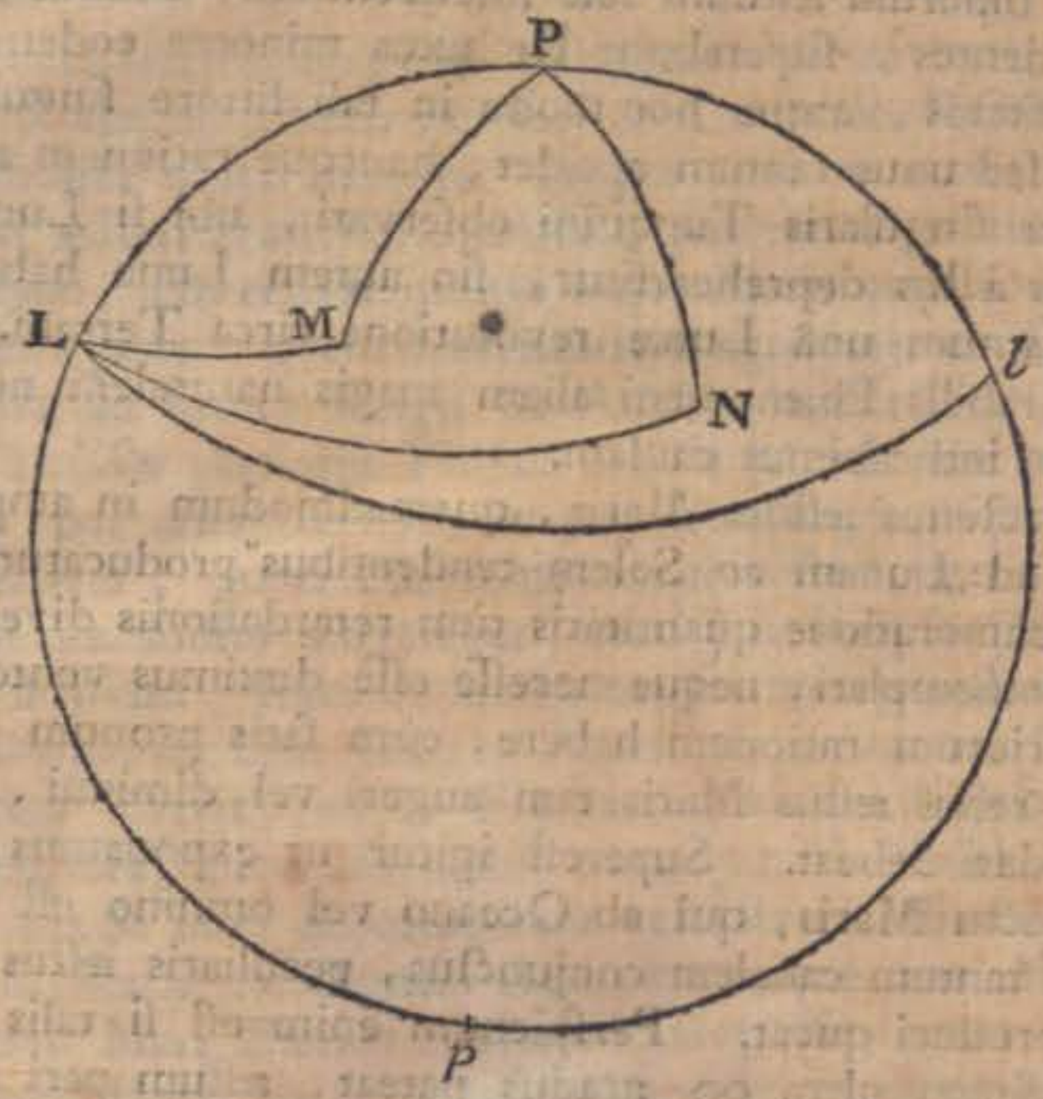
§. 117. Quemadmodum autem vidimus in Mari Germanico duplicem æstum, quorum alter, qui quidem longè est minor, per fretum Gallicum, alter circa Scotiam advehitur ex eodem Oceano Atlantico: ita propter singularem littorum quorumdam situm mirabilia Phænomena in æstu Maris evenire possunt. Quòd si enim littus quodpiam ita fuerit comparatum, ut æstus in id duplici viâ vel ex eodem Oceano, vel ex diversis communicetur, ratione temporis, quo bini isti æstus adveniunt insignes discrepantiæ oriri poterunt. Nam si per utramque viam Fluxus eodem tempore advehatur, atque adeo simul Refluxus congruant, æstus multo majores existere debebunt. Sin autem eo tempore, quo per alteram viam Fluxus advenit, ex alterâ viâ Refluxus incidat, tum æstus omnino destruetur si quidem per utramque viam aqua æquali vel affluat vel defluat. Ad hoc verò non sufficit ambæ viæ sint æquales, sed etiam requiritur ut bini æstus successivi sint æquales, id quod evenit si Luna vel non habeat declinationem, vel littus in æquatore fuerit positum. Quòd si autem eadem duplici communicatione positâ, tam Luna habeat declinationem, quàm littus notabiliter ab æquatore sit motum, tum ob

inæ-

inæqualitatem binorum æſtuum ſeſe inſequentium, Fluxus majores ex alterâ viâ advenientes, ſuperabunt Refluxus minores eodem tempore per alteram viam factos, atque hoc modo in tali littore ſingulis diebus non bini Fluxus, ſed unus tantum accidet; hancque rationem allegat Newtonus æſtûs illius ſingularis Tunquini obſervati, ubi ſi Luna in æquatore verſatur nullus æſtus deprehenditur, ſin autem Luna habeat declinationem unicus tantum unâ Lunæ revolutione circa Terram. Nos autem mox hujus mirabilis Phænomeni aliam magis naturalem noſtræque theoriæ conformem indicabimus cauſam.

§. 118. Hactenus æſtum Maris, quemadmodum in ampliſſimo Oceano à viribus ad Lunam ac Solem tendentibus producatur, atque vario littorum ſitu cùm ratione quantitatis tùm retardationis diverſimodè turbetur, ſumus contemplati, neque neceſſe eſſe duximus ventorum Mariſque curſuum propriorum rationem habere, cùm ſatis pronum ſit perſpicere, quomodo his rebus æſtus Maris tam augeri vel diminui, quàm accelerari vel retardari debeat. Supereſt igitur ut exponamus, quomodo in ſatis amplo tractu Maris, qui ab Oceano vel omnino eſt ſejunctus, vel per anguſtum tantum canalem conjunctus, peculiaris æſtus à viribus Lunæ ac Solis produci queat. Perſpicuum enim eſt ſi talis tractus ſecundùm longitudinem ultra 90 gradus pateat, æſtum pari modo generari debere, ac in ampliſſimo Oceano, qui totam tellurem ambire ponitur. Nam quoniam extenſio tanta eſt, ut vires Lunæ & Solis in eo tractu ſimul maximam ac minimam aquæ altitudinem inducere queant, neceſſe eſt etiam, ut aqua alio in loco tantum elevetur, inque alio tantum deprimatur, quantum fieret, ſi iſte tractus omnino non eſſet terminatus. At ſi iſte tractus tam fuerit parvus ut ſingulæ partes æqualibus fere viribus ſimul vel attollantur vel deprimantur, nulla ſenſibilis mutatio oriri poterit. Aqua enim uno in loco attolli nequit niſi in alio ſubſidat & contrà, ſi quidem eadem aquæ copia in eo tractu perpetuò conſervetur. Atque hæc eſt ratio ut in Mari Baltico, Caſpio, Nigro, aliiſque minoribus lacubus nullus omnino æſtus deprehendatur.

§. 119. Quòd ſi autem iſtiuſmodi Maris tractus tantum ſpatium occupet, ut vires attollentes & deprimentes in extremitatibus ſenſibiliter differant, tum neceſſe eſt ut non ſolum aqua in altero extremo elevetur in alteroque deprimatur, ſed etiam ut differentia inter aquæ altitudines tanta ſit, quanta in aperto Oceano eidem virium differentiæ reſpondet. Quamobrem definiri conveniet, quanta in diverſis Terræ locis eodem tempore in altitudinibus aquæ à viribus Lunæ ac Solis produci queat. Ne autem calculus nimium fiat prolixus, ſolam Lunæ vim in computum ducemus, quippe quæ vim Solis multum excedit; & quoniam effectu Lunæ cognito facile eſt Solis effectum æſtimando vel adjicere vel auferre.



Repræsentet ergo *P L p l* superficiem Terræ cujus poli sint *P* & *p*, atque *M* & *N* sint duo termini in eodem Maris tractu assumti, in quibus quantum Maris altitudo quovis tempore differat, sit investigandum. Repræsentet porro *L l* parallelum, in quo Luna moveatur hoc tempore, sitque Luna in *L*; atque exprimet angulus *L P M* tempus, quod post Lunæ transitum per meridianum termini *M* est præterlapsum, angulus verò *L P N* tempus post transitum Lunæ per meridianum alterius termini *N*. Ductis autem circulis maximis *P M* & *P N*, erit arcus *P M* complementum latitudinis loci *M*, arcus *P N* verò loci *N*; angulus verò *M P N* dabit differentiam longitudinis locorum *M* & *N*; quæ proinde omnia ponuntur cognita.

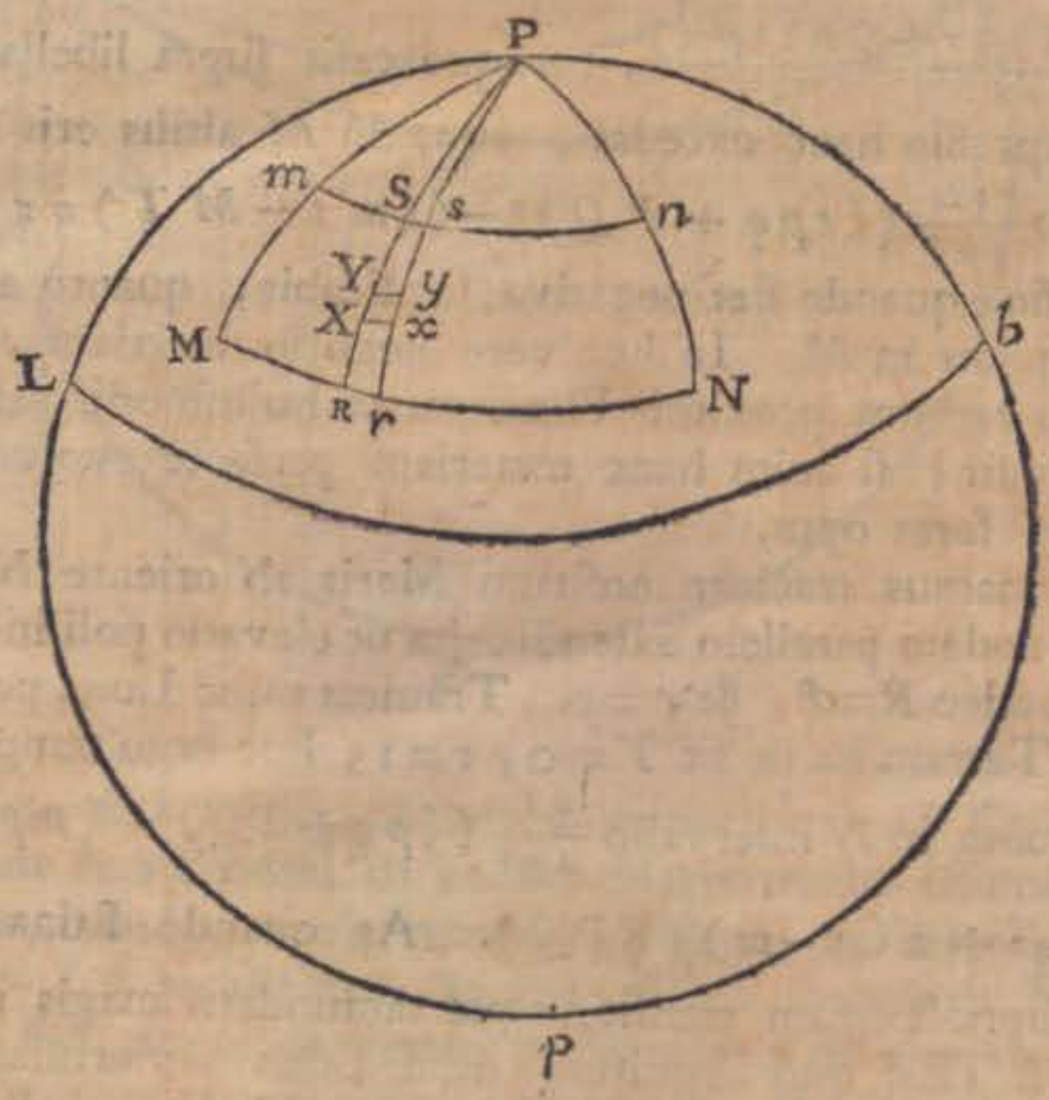
§. 120. Ducantur jam ex loco Lunæ *L* ad terminos *M* & *N* circuli maximi *L M* & *L N*, exhibebuntque isti arcus complementa altitudinum, quibus hoc tempore Luna in locis *M* & *N* supra horizontem elevata conspicitur. Ponatur arcûs *P L* sinus = *q*, cosinus = *Q*, erit *Q* sinus declinationis borealis Lunæ, si quidem *Q* habeat valorem affirmativum, ac *P* polum borealem denotet. Deinde ponatur arcûs *P M* sinus = *p*, cosinus = *P*, erit *P* sinus elevationis poli pro loco *M*; similique modo sit arcûs *P N* sinus = *r* & cosinus = *R*, ita ut *R* sit sinus elevationis poli loci *N*: denique sit anguli *M P N* sinus = *M* & cosinus = *m*, anguli verò *L P M* sinus = *T*, cosinus = *t*; unde erit anguli *L P N* cosinus = *m t* − *M T*.

Ex

Ex his per trigonometriam ſphæricam reperietur ſinus altitudinis Lunæ ſupra horizontem loci M ſeu coſinus arcus $LM = tpq + QP$: pro loco N verò erit altitudinis Lunæ ſinus $= (mt - MT)\,qr + QR$. Quare ſi, ut ſuprà, vis abſoluta ad Lunam urgens ponatur $= L$ & diſtantia Lunæ à Terra $= b$, erit altitudo ad quam aqua in M elevari deberet $= \frac{L(3(tpq+PQ)^2-1)}{2b^3}$, & altitudo ad quam aqua in N elevari deberet $= \frac{L(3((mt-MT)qr+QR)^2-1)}{2b^3}$, utroque caſu ſupra libellam naturalem. Si ergo illa expreſſio hanc excedat, aqua in M altiùs erit elevata quàm in N intervallo $\frac{3L}{2b^3}((tpq+PQ)^2-((mt-MT)qr+QR)^2)$, hæcque expreſſio, quando fiet negativa, indicabit, quantò aqua in N altiùs conſiſtat quàm in M. In hoc verò negotio inertiam aquæ negligimus, quoniam tantum proximè Phænomena hujuſmodi caſibus oriunda indicare annitimur; ſi enim hanc materiam perfectè evolvere vellemus, integro tractatu foret opus.

§. 121. Ponamus tractum noſtrum Maris ab oriente N versùs occidentem M ſub eodem parallelo extendi, ita ut elevatio poli in locis M & N ſit eadem; erit adeo $R = P$, & $r = p$. Tranſeat nunc Luna per meridianum loci M ſupra Terram ita ut ſit $T = 0$, $t = 1$; hoc ergo tempore magis erit elevata in M quàm in N intervallo $\frac{3L}{2b^3}((pq+PQ)^2-(mpq+PQ)^2) = \frac{3L}{2b^3}(M^2p^2q^2+2(1-m)pqPQ)$. At quando Luna per meridianum loci N ſupra Terram tranſit, aqua tantundem magis erit elevata in N quàm in M. Ex quo ſequitur, dum Luna à meridiano loci N ad meridianum loci M progreditur, aquam in M ſenſim elevari per ſpatium $\frac{3Lpq}{2b^3}(M^2pq+2(1-m)PQ)$ interea verò in N tantundem ſubſidere. Sin autem Luna infra Terram à meridiano loci N ad meridianum loci M progrediatur, aqua in M elevabitur interea per ſpatium $= \frac{3Lpq}{2b^3}(M^2pq-2(1-m)PQ)$, per tantumque ſpatium aqua in N ſubſidet. Ponamus nunc angulum LPM eſſe 90 graduum, ſeu quæſtionem inſtitui, cùm Luna jam ante ſex horas meridianum loci M ſit tranſgreſſa, atque obtinebitur differentia inter aquæ altitudines in locis M & $N = \frac{3L}{2b^3}(P^2Q^2-(PQ-Mpq)) = \frac{3Lpq}{2b^3}(2MPQ-M^2pq)$. Sex autem horis, antequam Luna ad meridianum loci M appellit, aqua in N magis erit elevata quàm in M intervallo $= \frac{3Lpq}{2b^3}(2MPQ+M^2pq)$. Sequuntur hæc ſi inertia aquæ negligatur; at inertiâ admiſsâ ex præcedentibus ſatis clarum eſt, cùm has differentias majores eſſe debere, tùm tempora mutationum tardiùs ſequi debere.

§. 122. Quoniam verò in hoc Maris tractu perpetuò eadem aquæ quantitas contineri debet, neceſſe ut quantùm aquæ unâ parte ſupra libellam attollatur, tantundem ea in reliquâ parte infra libellam deprimatur. Quò igitur hinc altitudinem Maris quovis loco exactè determinemus, ponamus tractum noſtrum ſecundùm longitudinem terminari binis



meridianis PM & PN, ſecundùm latitudinem verò binis parallelis MN & mn, poſitâque Lunâ in L ſit ſinus $PL = q$, coſinus $= Q$; ſinus $LPM = T$, coſinus $= t$. Porro ſit ſinus arcus $PM = p$, coſinus $= P$, ſinus $Pm = r$, coſinus $= R$, atque anguli MPN ſinus $= M$ & coſinus $= m$. Præterea ſit elevatio in M dum Luna in L verſatur, ſupra libellam $= \alpha$, ita ut hoc loco ſuprema aquæ ſuperficies à centro Terræ diſtet intervallo $= 1 + \alpha$, unde cùm ſinus altitudinis Lunæ in M ſit $= tpq + PQ$, erit gravitatio totius columnæ aqueæ ab M ad centrum Terræ $= \frac{(1+\alpha)^{n+3}}{n+1} + \frac{L(1-3(tpq+PQ)^2)}{2b^3} = \frac{1}{1+n} + \alpha + \frac{L(1-3(tpq+PQ)^2)}{2b^3}$, prouti ſuprà §. §. 43. & 44. demonſtravimus. Conſideretur jam locus quicunque X in noſtro tractu, in quo aqua ſupra libellam ſit elevata ſpatio $= \varphi$; ac ducto per hunc locum meridiano PR, ſit anguli LPR ſinus $= X$, coſinus $= x$; arcûs PX ſinus $= z$ & coſinus $= Z$, unde gravitatio columnæ aqueæ ex X ad centrum Terræ pertingentis erit $=$

$\frac{2}{1+n}+\varphi+\frac{L(1-3(xqz+QZ)^2)}{2b^3}$. Cùm igitur hæc gravitatio æqualis eſſe debeat illi, orietur $\varphi=\alpha+\frac{3L}{2b^3}((xqz+QZ)^2-(tpq+PQ)^2)$, ex quâ formulâ ſi modò conſtaret elevatio aquæ in M, ſimul innoteſceret elevatio vel depreſſio in quovis loco X.

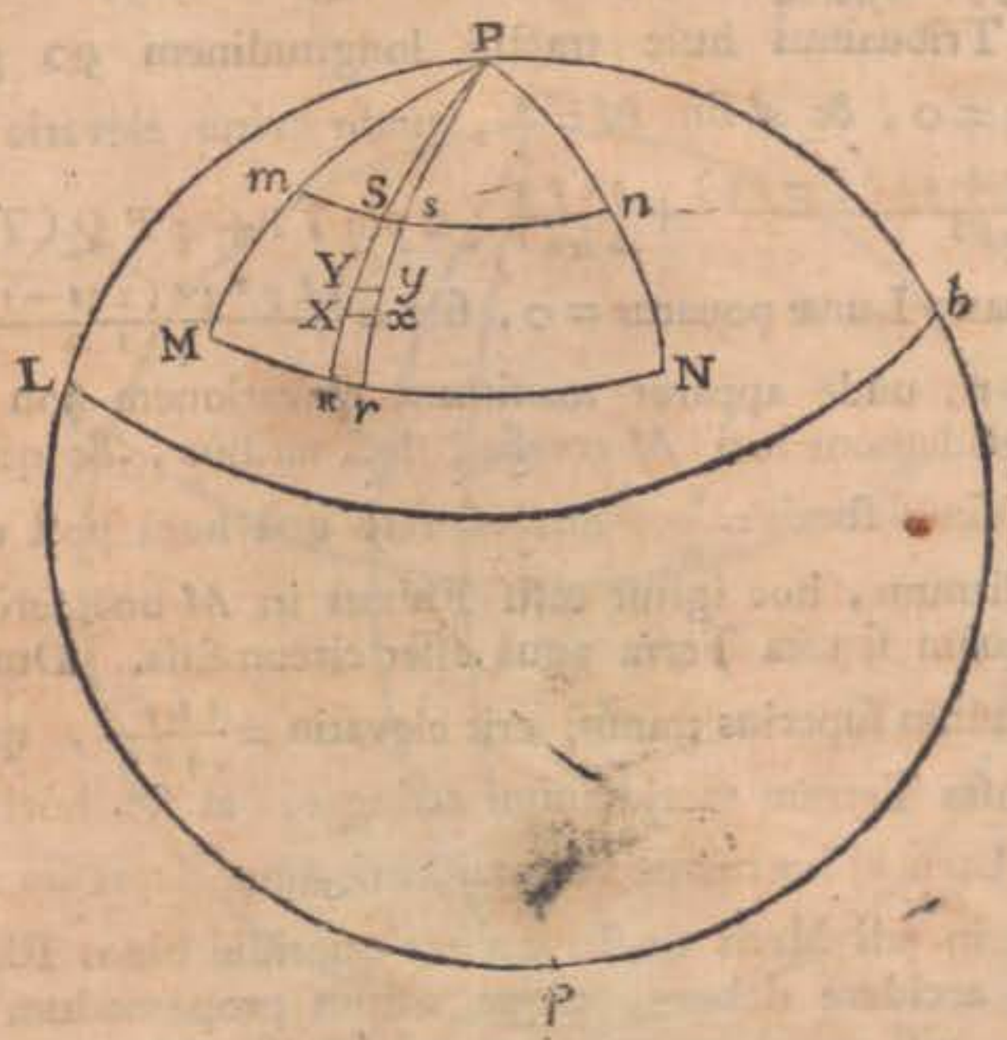
§. 123. Cùm ergo in X aqua ſupra libellam elevetur ſpatio φ; in elemento tractûs infinitè parvo $XYyx$, plus inerit aquæ, quàm in ſtatu naturali, & quidem quantitas $XY.Xx.\varphi$, cujus elementi integrale per totum tractum ſumtum debet eſſe $=0$, ex quo valor ipſius α innoteſcet. Erit autem angulus $RPr=\frac{dY}{x}$, hincque arculus $Xx=\frac{z\,dX}{x}$, at elementum $XY=\frac{dZ}{z}$, ex quo infinitè parvum rectangulum $XYyx=\frac{dX\,dZ}{x}$, in quo ergo exceſſus aquæ ſupra ſtatum naturalem eſt $=\frac{\varphi\,dX\,dZ}{x}=\frac{dX}{x}(\alpha\,dZ+\frac{3L\,dZ}{2b^3}((xqz+QZ)^2-(tpq+PQ)^2))$, quæ formula bis debet integrari. Ponatur primò X conſtans, & integratione abſolutâ reperietur in elemento $RSsr$ exceſſus aquæ ſupra ſtatum naturalem $=\frac{dX}{x}(\alpha(R-P)+\frac{3L}{2b^3}(q^2x^2(R-P)-\frac{x^2q^2}{3}(R^3-P^3)-\frac{2xQq}{3}(r^3-p^3)+\frac{Q^2}{3}(R^3-P^3)-(tpq+PQ)^2(R-P)))$. Integretur hæc formula denuo ut integrale ad totum tractum $MNnm$ extendatur, prodibitque incrementum aquæ, quod toti tractui acceſſiſſe oporteret, $=\alpha(R-P)A\,\text{ſin.}\,M+\frac{3L}{2b^3}(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(Mm(1-2TT)-2M^2Tt)+\frac{2Qq(r^3-p^3)}{3}(T-Mt-mT)+\frac{q^2(R-P)}{2}A\,\text{ſin.}\,M+\frac{(3Q^2-1)(R^3-P^3)}{6}A\,\text{ſin.}\,M-(tpq+PQ)^2(R-P)A\,\text{ſin.}\,M)$, quæ adeo quantitas debet eſſe $=0$: unde oritur $\alpha=\frac{3L(tpq+PQ)^2}{2b^3}+\frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3}-\frac{3Lq^2}{4b^3}+\frac{3L}{2b^3(R-P)A\,\text{ſin.}\,M}(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(2M^2Tt-Mm(1-2TT))+\frac{2Qq(p^3-r^3)}{3}(T-Mt-mT))$.

§. 124. Cognitâ igitur verâ elevatione aquæ in M ſupra libellam; quam antè poſuimus $=\alpha$, hinc intelligetur vera aquæ elevatio ſupra libellam in loco quocunque X. Ponatur enim ſinus anguli $MPX=S$ & coſinus $=s$, erit ſin. $LPR=X=Ts+tS$ & $x=ts-TS$, manentibuſque arcûs PX ſinu $=z$ & coſinu $=Z$, erit elevatio aquæ in $X=\varphi=\alpha+\frac{3L}{2b^3}((ts-TS)qz+QZ)^2-\frac{3L}{2b^3}(tpq+PQ)^2$; quare loco α valore invento ſubſtituto, reperietur aqua in X ſupra libellam attolli actu per ſpa-

ſpatium $= \frac{3L}{2b^3}((ts-TS)qz+QZ)^2+\frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3}$
$-\frac{3Lq^2}{4b^3}+\frac{3L}{2b^3(R-P)\cdot A\,\text{ſin. }M}\left(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(2M^2Tt-Mm\right.$
$\left.(1-2TT))+\frac{2Qq(p^3-r^3)}{3}(T-Mt-mT)\right)$. Quòd ſi ergo ponatur tractus noſter ita augeri ut totam tellurem ambiat, orietur caſus jam ſuprà tractatus; quoniam enim fit $MN=360°$, ſeu A ſin. $M=2\pi$ denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $M=0$ & $m=1$: præterea verò quia M in polum auſtralem p, m verò in borealem P incidit, erit $p=0$, $P=-1$, $r=0$ & $R=+1$: ſi hi valores ſubſtituantur, prodibit elevatio aquæ in $X=\frac{L}{2b^3}(3((ts-TS)qz+QZ)^2-1)$, quæ, expreſſio, quia $ts-TS$ denotat coſinum anguli LPX atque $(ts-TS)qz+QZ$ ſinum altitudinis Lunæ ſupra horizontem in X, cum ſuperioribus formulis exactiſſimè convenit: ſi quidem terminus $\frac{L}{b^4}$ negligatur. Hæc verò eadem ipſa expreſſio quoque emergit, ſi tantum alterum hemiſphærium vel boreale vel auſtrale ponatur aquâ totum circumfuſum, manent enim omnia ut antè, niſi quòd fiat $p=1$ & $P=0$: utroque enim caſu fit $R^2+PR+P^2=1$; ultimuſque terminus ob $M=0$ utroque caſu evaneſcit.

§. 125. Ponamus nunc tractum Maris ſecundùm longitudinem MN uſque ad 180 gradus extendi, erit $M=0$ & $m=-1$ & A ſin. $M=\pi$; denotat enim A ſin. M ſemper arcum circuli, qui menſura eſt anguli MPN: hinc ſi brevitatis gratiâ ponatur ſinus anguli, quo Luna in X ſupra horizontem elevata apparet, $=v$, erit aquæ elevatio in X ſupra libellam $= \frac{3Lv^2}{2b^3}+\frac{L(1-3QQ)(R^2+PR+P^2)}{4b^3}-\frac{3Lqq}{4b^3}+\frac{2LTQq(p^3-r^3)}{(R-P)b^3\pi}$. Ponamus porro integrum hemiſphærium $LPlp$ aquâ eſſe circumfuſum, fiet $p=0$, $P=-1$, $r=0$ & $R=1$; unde elevatio aquæ in X erit $=\frac{L(3v^2-1)}{2b^3}$, omnino ac ſi tota Terra aquâ cincta eſſet, uti in præcedentibus capitibus poſuimus, vel quod eodem redit, dummodo omnis aqua ſuper Terra mutuam habeat communicationem ſatis amplam. Quòd ſi autem tractus noſter Maris tantum ad æquatorem uſque porrigatur à polo P, ita ut quartam ſuperficiei terreſtris partem ſolum obtegat, tum erit $p=1$, $P=0$, $r=0$ & $R=1$, hoc itaque caſu aqua in X elevabitur ad altitudinem $=\frac{L(3v^2-1)}{2b^3}+\frac{2LTQq}{\pi b^3}$: ex quo perſpicitur hoc caſu elevationem in X majorem, quàm ſi tota Terra aquâ eſſet circumdata, ſi expreſſio TQq habeat valorem affirmativum, minorem verò ſi TQq habeat valorem negativum. Sed limites huic quæſtioni præſcripti non permittunt hinc plura conſectaria deducere, cùm debita evolutio ſatis amplum tractatum requirat,

quirat, neque theoria ulteriori confirmatione indigeat. Quocirca coronidis loco duos tantum casus evolvemus, quorum altero latitudo tractûs ponetur infinitè parva, altero verò longitudo: quippe qui ad phænomena quædam singularia explicanda inservire poterunt.



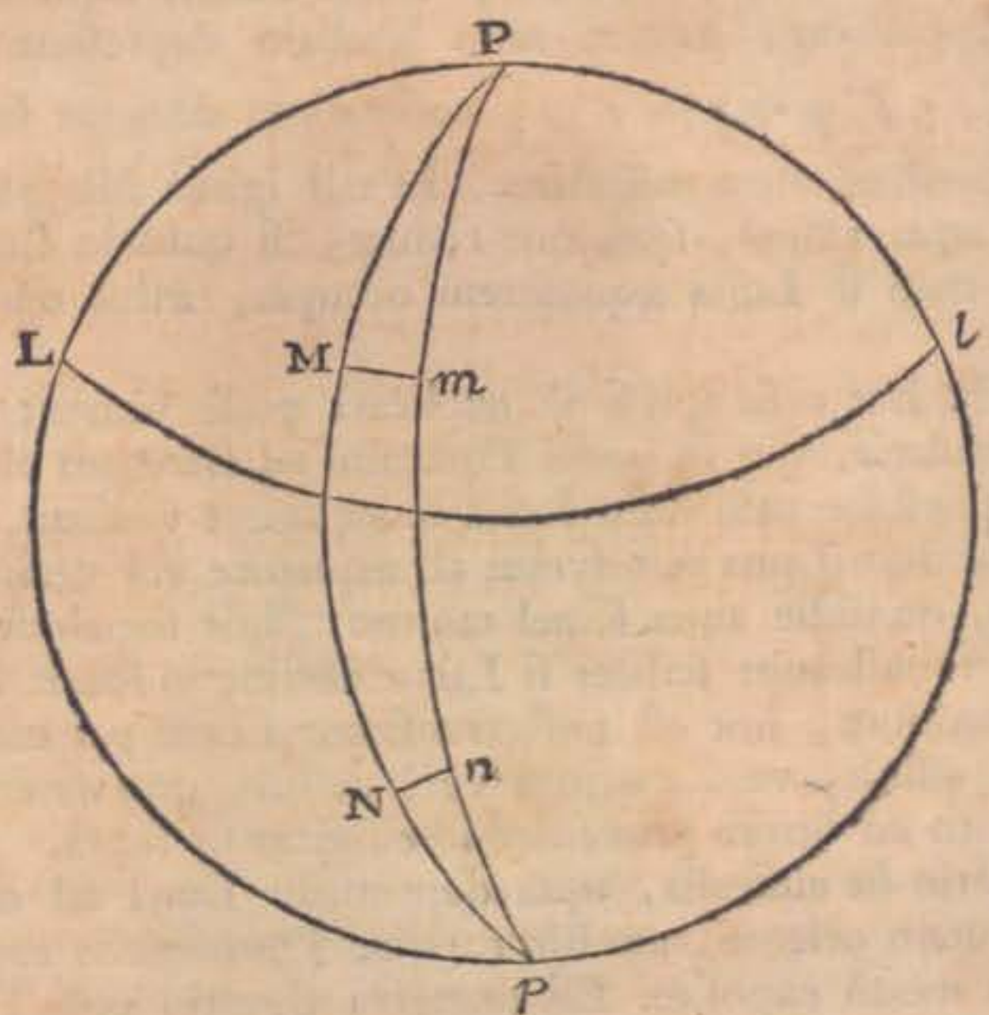
§. 126. Ponamus igitur latitudinem Mm infinitè esse parvam, seu $R = P$ & $r = p$, reperietur aquæ in X elevatio supra libellam $= \frac{3Lv^2}{2b^3} + \frac{3L(P^2-q^2-3P^2Q^2)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3 A \sin. M}\left(\frac{pq}{2}(2M^2Tt - Mm(1-2TT)) + 2PQ(T-Mt-mT)\right)$. Consideremus autem elevationem in M, ubi cùm sit $v = tpq + PQ$, erit ea $= \frac{3Lpq(2tpq+4PQ-pq)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{4b^3 A \sin. M}(pq(2M^2Tt - Mm(1-2TT)) + 4PQ(T-Mt-mT))$. Transeat nunc Luna per meridianum loci M supra Terram, erit $T = 0$, & $t = 1$, atque elevatio in M prodibit $= \frac{3Lpq(pq+4PQ)}{4b^3} - \frac{3Lpq}{4b^3 A \sin. M}(Mmpq + 4MPQ)$; at si per eundem meridianum infra Terram transeat, erit aquæ elevatio $= \frac{3Lpq(pq-4PQ)}{4b^3} - \frac{3Lpq}{4b^3 A \sin. M}(Mmpq - 4MPQ)$. Quòd si autem Luna versùs ortum à meridiano distet angulo horario 90° graduum, seu circiter 6 horis ante appulsum Lunæ ad meridianum in M superio-

periorem, erit $T=-1$ & $t=0$, unde elevatio erit $=\frac{-3Lp^2q^2}{4b^3}+\frac{3Lpq}{2b^3\ A\ sin.\ M}$ $(pqMm-2PQ(1-m))$; sex verò horis post transitum Lunæ per meridianum loci M versùs occasum, erit altitudo aquæ in M supra libellam $=-\frac{3Lp^2q^2}{4b^3}+\frac{3Lpq}{2b^3\ A\ sin.\ M}$ $(2pqMm-2PQ(1+m))$.

§. 127. Tribuamus huic tractui longitudinem 90 graduum, ut sit $M=1$, $m=0$, & A sin. $M=\frac{\pi}{2}$, unde oritur elevatio aquæ in $M=\frac{3Lpq(2tpq+4tPQ-pq)}{4b^3}+\frac{3Lpq}{2\pi b^3}(2pqTt+4PQ(T-t))$. Quæ si etiam declinatio Lunæ ponatur $=0$, fiet $=\frac{3Lp^2q^2(2tt-1)}{4b^3}+\frac{3Lp^2q^2Tt}{\pi b^3}$ existente $q=1$, unde apparet maximam elevationem non accidere cùm Luna per meridianum loci M transit, sed tardiùs, & quidem si dupli anguli LPM sinus fuerit $=\frac{2}{\pi}$, hoc est ferè unâ horâ post transitum Lunæ per meridianum, hoc igitur casu Fluxus in M unâ ferè horâ tardiùs observetur, quàm si tota Terra aquâ esset circumfusa. Dum autem Luna per meridianum superius transit, erit elevatio $=\frac{3Lpp}{4b^3}$, quæ etiam valet si Luna infra Terram meridianum attingat; at sex horis vel antè vel post, quando Luna in horizonte versatur, erit aquæ depressio $=\frac{-3Lpp}{4b^3}$. Unde intelligitur in tali Maris tractu pariter quotidie binos Fluxus totidemque Refluxus accidere debere, atque æstum propemodum fore similem æstui generali, nisi quòd majoribus anomaliis sit obnoxius, præcipuè si Luna habeat declinationem.

§. 128. Hinc explicari potest ratio æstûs, qui in Mari Mediterraneo observatur, & qui in ipso hoc Mari generatur. Cùm enim longitudo hujus Maris ne 60 quidem gradus attingat, æstus erunt multò minores; decrescunt enim si cùm longitudo diminuatur, tum elevatio poli augeatur. Quòd si ergo in his formulis angulus MPN ponatur fere 60 graduum, atque elevatio poli debita introducatur, reperientur quidem æstus bini quotidie evenire debere, qui autem futuri sint multò minores, quàm in medio Mari, & pluribus anomaliis subjecti, quas quidem omnes ex formulis definire licebit. Quoniam ergo tam exigui æstus à ventis & cursu aquæ, qui in hoc Mari notabilis deprehenditur, vehementer turbantur, ad pleraque Littora hujus Maris vix usquam æstus regularis observabitur. Excipi autem debet Mare Adriaticum, quod cùm sinum formet amplum, advenientem aquam meliùs colliget, atque elevationem multò sensibiliorem parietur, à quo æstus Maris Venetiis observatus originem habet. Tametsi enim Mare Mediterraneum non solum,

lum ſatis amplam habeat latitudinem, ſed etiam vehementer inæqualem, tamen ejuſmodi marium æſtus admodum exquiſitè ex præſenti caſu, quo latitudinem omnino negligimus, colligi poteſt, quia extenſio Maris in longitudinem præcipuam cauſam æſtuum binorum ſingulis diebus evenientium continet, neque extenſio latitudinis multum conferat.



§. 129. Ponamus nunc tractûs noſtri Maris longitudinem evaneſcere, totumque tractum in eodem meridiano Pp ab M uſque ad N extendi, ita ut ſit $M=0$, $m=1$; ſinus autem elevationis poli in M ſit $=P$, coſinus $=p$, in N verò ſit ſinus elevationis poli $=R$, coſinus $=r$. Ex his ſi Luna in L verſetur, ob A ſin. $M=M$, erit in M elevatio aquæ ſupra libellam $= \frac{3L(tpq+PQ)^2}{2b^3} + \frac{L(1-3Q^2)}{4b^3}\frac{(P^2+PR+R^2)}{} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{L}{4b^3}$ $(q^2(3-P^2-PR-RR)(2TT-1) - \frac{4Qqt(t^3-r^3)}{R-P}) = \frac{L}{2b^3}((ttqq-QQ)$ $(R^2+PR-2P^2) + \frac{2Qqt(3PpR+r^3-3P^2p-p^3)}{R-P}$. Quòd ſi nunc ponatur alter terminus N ultra æquatorem versùs auſtrum ſitus, ita ut ſinus elevationis poli auſtralis in N duplo major ſit quàm ſinus elevationis borealis in M, ſeu $R=-2P$ & $r=\sqrt{(1-4P^2)}$, erit $R^2+PR-2P^2=0$, atque elevatio aquæ in M ſupra libellam erit $= \frac{LQqt}{3b^3P}(9P^2$

$(9P^2p+p^3-r^3)$. Ex hâc igitur formulâ ſequitur, ſi Lunæ declinatio ſit nulla ſeu $Q=0$, tum nullum omnino æſtum in M obſervari debere. Quòd ſi autem Luna habeat borealem, tum ad tranſitum Lunæ per meridianum ſuperiorem aquam attolli ad ſpatium $=\frac{LQq}{2b^3p}(9P^2p+p^3-r^3)$; at dum Luna in alterutro circulo horario ſexto verſetur, tum aquam ad libellam naturalem fore conſtitutam; Lunâ autem infra horizontem ad meridianum appellente, aquam infra libellam depreſſum iri per ſpatium $=\frac{LQq}{2b^3p}(9P^2p+p^3-r^3)$; contrarium denique fore æſtum, ſi Luna habeat declinationem auſtralem. In tali igitur Maris tractu quotidie ſemel tantum aqua affluet, ſemelque refluet, ſi quidem Luna habeat declinationem; nam ſi Luna æquatorem occupat, æſtus omnino erit nullus.

§. 130. Ex hoc caſu aptiſſimè explicari poſſe videtur Phænomenon illud æſtûs ſingularis, qui in portu Tunquini ad Batsham obſervatur, ubi omninò ut in præſente caſu dum Luna in æquatore verſatur, Mare nullum æſtum ſentit, at dum Luna removetur ab æquatore vel versùs boream vel versùs auſtrum, quotidie aqua ſemel tantum affluit ſemelque refluit, prorſus ut calculus monſtravit; ſcilicet ſi Lunæ declinatio fuerit borealis, aqua versùs Lunæ occaſum, hoc eſt poſt tranſitum Lunæ per meridianum ſuper horizonte, affluit, versùs ortum verò defluit, quæ retardatio ab inertiâ aquæ & motu ad littora provenire intelligitur ut ſuprà. Contrà verò ſi Lunæ declinatio ſit auſtralis, aqua deprimitur Lunâ ad occaſum inclinante, Lunâ autem oriente, attollitur: quæ Phænomena apprimè conveniunt cum caſu modò expoſito. Eſt præterea elevatio poli Tunquini 20° 50′, borealis, atque Mare utrinque cùm peninſulis tùm inſulis ab utroque Oceano Pacifico & Indico fere prorſus ſeparatur, ſaltem ut libera communicatio non adſit: præterea hic idem Maris tractus, qui versùs boream ad littora regni Tunquini terminatur extenditur ultra æquatorem ad gradus circiter 45, cujus latitudinis ſinus circiter duplo major eſt, quàm ſinus latitudinis borealis 20°, 51′: Quocirca ex his circumſtantiis per noſtram Theoriam eadem ipſa ſingularia Phænomena æſtûs Maris obſervari debent, quæ actu obſervantur: atque hoc modo ſi ullum adhuc dubium circa noſtram theoriam reliquum fuiſſet, id reſolutione hujus mirabilis Phænomeni funditùs ſublatum iri confidimus.

FINIS I. Part. TOMI III.