Max Planck Research Group
Epistemes of Modern Acoustics

Sound & Science: Digital Histories

Newton, Isaac. Philosophiae naturalis principia mathematica, Vol. 3. Geneva: Barrillot & Filii, 1742.

https://acoustics.mpiwg-berlin.mpg.de/node/627

Scan licensed under: CC BY-SA 3.0 DE | Max Planck Institute for the History of Science

MAX PLANCK INSTITUTE
FOR THE HISTORY OF SCIENCE

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUTORE ISAACO NEWTONO Eq. Aurato.

TOMI TERTII CONTINUATIO.

CONTINENS

LUNÆ THEORIAM NEWTONIANAM.

Lara N5635p-3,2

Archiv
(531x)

MAX-PLANCK-INSTITUT
FÜR WISSENSCHAFTSGESCHICHTE
Bibliothek

04-664

INTRODUCTIO
AD
LUNÆ THEORIAM
NEWTONIANAM.

TRia ſunt in Lunæ Theoriâ ſpectanda, in quibus verſatur omnis quæſtio Aſtronomica quæ de ipſâ inſtitui poteſt; Primum ejus motus quâtenus è terrâ obſervatur; 2do. Figura Lunaris orbitæ à circulo plùs minuſve recedens & apſidum ejus poſitio; ac tertiò ejus orbitæ ad Eclipticam inclinatio.

Si extrà Solis actionem Luna motus ſuos ageret; Luna Ellipſim quamlibet circa Terram deſcribere poſſet in Plano quovis, & ea Ellipſis perpetuò eadem maneret conſtantemque angulum cum Ecliptica efficeret; Itaque tota Theoria Lunæ circa hæc verſaretur Elementa, Primò, ut ex tempore quod Luna conſumeret ut à quâdam ſtellâ diſcedens ad eamdem rediret, obtineatur duratio ejus menſis Periodici ſiderei ſicque motus ejus medius determinetur, unde facile obtinebitur via quam Luna dato tempore per eum motum medium emetiri poteſt, ita ut, datâ Epochâ, hoc eſt, dato loco Cœli in quo Luna aliquando obſervata fuiſſet, inde quem in locum migrare debuiſſet, dato tempore, per medii motus calculum inveniri poſſet.

Poſtea; locus Apogæi Lunæ, quod in Cœlis eidem puncto ſemper reſponderet, foret requirendus, tum excentricitas ejus orbitæ; ſic enim figura Ellipſeos quam Luna deſcribit obtineretur, & quia, citra Solis actionem, Luna moveretur ſecundùm Legem Keplerianam, hoc eſt, ita ut tempora quibus durantibus Luna moveretur, non quidem ſint proportionalia angulis è Terrâ ſpectatis, ſed areis deſcriptis, hinc fiet ut differentia loci Lunæ per motum medium computati ab ejus loco vero, obtineatur ex orbitæ Lunaris figurâ per Methodos notas, quæ differentia dicitur Æquatio Lunæ ſoluta, hoc eſt, æquatio à Sole non pendens, & intelligetur quibus in locis illa æquatio ſit adhibenda ex ſitu cognito Apogæi Lunæ, pendet enim omninò ea differentia ex ſitu Lunæ in Orbe ſuo reſpectu Apogæi ſui.

Tertiò, Quærendum foret obſervationibus, quibus in locis Luna Eclip-

Eclipticam ſecet, cui nempe Cœli loco reſpondeant ejus Nodi, qui in hac hypotheſi fixi forent, & quonam angulo Orbita Lunæ foret inclinata ad Eclipticam, unde, quoniam ea inclinatio conſtans eſſet, diſtantiâ Lunæ à plano Eclipticæ per perpendiculum menſurata, foret ſemper proportionata diſtantiæ perpendiculari Lunæ à Linea nodorum, itaque ex cognito loco Lunæ & Nodorum cognoſci poterit quonam ſub Angulo Luna ab Ecliptica diſtare videatur ex ipſâ terrâ; & ad quodnam punctum Eclipticæ referri debeat.

Si itaque Lunæ mõtus citra actionem Solis conſiderentur tabulæ Aſtronomicæ Lunares hæc continere debebunt

1°. Epocham Loci Lunæ dato aliquo tempore; tum obſervationem loci Apogæi quod fixum maneret, & obſervationem loci Nodorum pariter fixorum.

Poſtea continere debebunt tabulam motus medii, tum tabulam Æquationis Lunæ ſecundum ejus diſtantiam mediam ab Apogæo; tabulam latitudinis Lunæ ſecundùm variam diſtantiam Lunæ à Nodo & denique tabulam reductionis Lunæ ad Eclipticam, ſecundùm eam diſtantiam Lunæ à Nodo.

Poſſunt his addi, tabula diſtantiarum Lunæ à Terra ſecundum ejus diſtantiam ab ejus Apogæo, tabula Diametrorum ejus apparentium ſecundùm eamdem diſtantiam ab Apogæo, & denique Tabula Parallaxeos quâ deprimitur Luna reſpectu ſpectatoris in ſuperficie telluris collocati, prout diverſa eſt ejus à Terra diſtantia, & prout altitudo ſupra horizontem eſt diverſa.

Talis foret tota de Lunâ Theoria, citra Solis actionem; ſed jam à longo tempore intellexerunt Aſtronomi Lunares motus à Lunæ ſitu reſpectu Solis plurimum turbari, unde varias correctiones, ſive Æquationes variis titulis concinnare ſunt conati.

Quam luculenter ex Gravitatis Theoriâ, hæc non modò explicentur ſed etiam accurato calculo determinentur demonſtrare aggreſſus eſt Newtonus, & eas omnes Æquationes quæ ex Sole pendent, calculis ex Theoriâ ſuâ deductis ¡ita feliciter ſtatuit ut motus Lunæ ejuſve Æquationes ex calculo repertæ in minuto ſecundo aut propè cum iis quæ ab accuratioribus obſervatoribus dererminari potuerunt conſentiant, quod autoritatem integram illi Theoriæ conciliat. Calculi autem illi, nec faciles ſunt, nec compendioſi, nec ſemper commodè ad ſyntheticam formam reducendi; Quos Newtonus hâc ultimâ ratione Lectori ſuo ſiſtere potuit eos enucleatè tradit, cæteros omittit & quod ex iis obtinetur ſtrictim in Scholio indicat, & primo quales ſint illæ æquationes juxta Aſtronomorum obſervationes dicit & quibuſnam Legibus ſecundum

ipſos

ipſos obſervatores ſint adſtrictæ, mox tradit quales æquationes ex ſuis calculis emergant & quænam ſint earum Leges.

Ipſum tam obſervationibus ante ipſum inſtitutis, quam obſervationibus Flamſtedianis uſum eſſe conſtat, imo & ipſum exinde Tabulas Lunares ſibi conſtruxiſſe liquet, ex quibus multa profert quarum pleraque in Rudolphinis, aut in Ludoviceis Tabulis facile non comperiuntur, ſed quæ maximè conſentiunt cum novis Ill. Caſſini Tabulis, ita ut quo perfectiùs Cœli motus dignoſcunt Aſtronomi eo propiùs ad Newtonianas Theorias accedere deprehendantur.

Ut itaque Solis actionis in Lunam & ejus orbitam habeatur ratio; Primum fiat abſtractio excentricitatis Orbitæ tam Telluris quam Lunæ, deprehenditur quod ex Solis actione menſis Periodicus Lunæ longior evadat & ejus Orbita ex circulari in Ellipſim mutetur cujus axes per Prop. XXVIII. ſunt determinati.

Secundò, tam ex eâ figurâ quam Orbita Lunæ induit quam ex acceleratione Lunæ per eam partem actionis Solis quæ ſecundum Tangentem orbitæ Lunaris dirigitur, naſcitur Variatio quam Tycho primus obſervavit, & maximam in Octantibus $40'\frac{1}{2}$ ſtatuit, illam Ill. Caſſinus facit $33'. 40''.$ in Elementis Aſtronomiæ, eam verò ipſe Newtonus in hypotheſi orbitas Telluris & Lunæ eſſe circulares $35'. 10''.$ calculavit Prop. XXIX.

Tertiò ex eâ Solis actione naſcitur motus Apogæi Lunaris in conſequentia, cujus motus fundamentum indicat Newtonus Prop. XLV. Lib. I.

Quartò inde deducitur motus medius nodorum Prop. XXXII. obſervationibus proximè congruus; Quinto denique Inclinationis Orbitæ Lunaris mutatio explicatur Prop. XXXIV. & XXXV.

Nunc verò adjungatur conſideratio Excentricitatis Orbitæ Telluris, eâ fit ut actio Solis major ſit cum terra eſt in Perihelio ſuo quam in Aphelio; Inde orientur correctiones variæ his omnibus Lunæ erroribus adjungendæ; Primùm cùm menſis Periodicus Lunæ per Actionem Solis longior evadat & motus ejus medius augeatur, id incrementum quando terra eſt in Perihelio majus eſt quam cum eſt in Aphelio, hinc ea tardatio inæqualiter in motum Lunæ diſtributa, efficit ut hoc nomine locus ejus per medium motum inventus ab ejus vero loco diſſentiat, hinc itaque notis noſtris ad initium Scholii ad calcem Prop. XXXV. adjecti quod ad totam Lunæ Theoriam pertinet incrementum medium motus medii ex actione Solis ortum aſſignamus, tum poſtea aperimus rationem quâ obtineri poteſt æquatio ceu correctio motus medii adhibenda propter inæqualem Terræ à Sole diſtantiam, quæ quidem æquatio continetur in eâ quam Ill. Caſſinus, titulo *Primæ Æquationis Solaris*, tradit.

Eâ-

Eâdem ratione, variationes motus Apogæi & motus nodorum ex ſitu diverſo Terræ ad aphelium aut Perihelium ſuum ex utriuſque motu medio dato in ſecundo Paragrapho derivare docetur.

His ex Excentricitate orbitæ Telluris deductis adjungatur conſideratio Excentricitatis Orbitæ Lunaris, aut ejus inclinationis ad Eclipticam inde novæ irregularitates prioribus adnaſcuntur.

Primò menſis Periodicus paulo major fit cum Linea Apſidum per Solem tranſit quam cum ipſi eſt perpendicularis, hinc correctio nova Æquationi motus medii quæ in primo Scholii Paragrapho exponitur eſt facienda, hanc novam Æquationem Ill. Caſſinus exhibet in Tabella cujus titulus eſt *ſecunda Æquatio Solaris* & tertio Paragrapho Scholii traditur.

Itidem ſi linea nodorum per Solem tranſeat paulo major erit Solis actio & correctio nova exinde naſcetur eidem motui medio, hanc quarto Paragrapho Scholii indicat Newtonus.

Præterea excentricitas ipſa orbitæ Lunaris ex diverſo ſitu Apogæi reſpectu Solis mutatur, nunc major nunc minor evadit idque etiam inæqualiter pro diſtantiâ telluris à Sole.

Rurſus ipſe motus Apogæi prout Apogæum diverſimodè ſitum eſt reſpectu Solis mutatur, hinc Æquatio Apogæi naſcitur eaque duplex; prima ſupponendo telluris à Sole diſtantiam conſtantem, altera verò pendet ex mutatione diſtantiæ telluris à Sole.

Hinc tandem cum orbitæ Lunaris forma, excentricitas & Apogæi poſitio mutetur, omninò mutantur correctiones illæ quæ deducebantur ex Lunæ excentricitate mediocri, quæ æquationem ſolutam conſtituebant; ultimo autem Scholii Paragrapho Newtonus docet quâ ratione novæ illæ correctiones ſint inſtituendæ: Omnia verò in hoc Scholio ſine demonſtratione tradit nec indicato ſuorum calculorum artificio, ideoque noſtri putavimus officii, eam indagare viam cui Newtonus in iis reperiendis inſiſtere debuit, labore quidem non parvo, ſucceſſu qualicumque, utinam Lectoribus non ingrato.

SERENISSIMO PRINCIPI

ARMANDO GASTONI DE ROHAN DE SOUBISE

S. R. E. CARDINALI AMPLISSIMO

EPISCOPO & PRINCIPI ARGENTINO

&c. &c. &c.

COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC

CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM

D. D. D.

Thomas LE SEUR *& Franciſcus* JACQUIER,

MONITUM.

PRINCIPIORUM MATHEMATICORUM Libros tres totidem voluminibus complecti meditabamur, idque jam in alterâ operis noſtri parte fueramus polliciti. Cur tertium Newtoni Librum in duas dividamus partes datamque fidem non liberemus, in causâ ſunt præclara de fluxu & refluxu maris opera quæ anno 1740. à Celeberrimâ Pariſienſi Academiâ præmio fuere condecorata. Tot & tam eximia in hiſce operibus continentur quæ non ad fluxum refluxumque maris duntaxat, ſed etiam ad generales attractionis leges univerſamque Aſtronomiam referuntur ut Clariſſ. Vir D. J. L. CALANDRINUS cujus conſilia impensè veneramur, nos optimè facturos judicaverit, ſi prædicta opuſcula iis adjungeremus propoſitionibus quas de fluxu & refluxu maris habet Newtonus; quod quidem commodè fieri non poterat, niſi tertium librum in duas partes divideremus. Quamvis eam religiosè ſervemus legem, ſinè quâ honeſtus ſcriptor nemo eſſe poteſt, ut ſcilicet nihil inſigne ex aliquo Autore in uſum noſtrum convertamus quin ei quod ſuum eſt, dùm locus occurrit, tribuatur, ſpecialem nihilominùs grati animi ſignificationem profiteri volumus Clariſſimis omnique lau-

laude noſtrâ majoribus Viris DD. Caſſini, De Mairan, De Maupertuis, quorum præclaris inventis plurimùm debent hæc noſtra Commentaria. Sed tanta ſunt in univerſum hocce noſtrum opus prælaudati Clariſſ. D. J. L. CALENDRINI beneficia, ut huic Doctiſſimo Viro pares meritis gratias referre non poſſimus.

Jam ſub prælo eſt altera & ultima commentariorum noſtrorum pars; quia verò nullus eſt tam mediocris ingenii, quem uſus & exercitatio non edoceant, hinc factum eſt ut aliqua nobis in mentem venerint quæ brevi collecta appendice ſimul cum reliquâ tertii Libri parte juſti voluminis molem component.

Datum Romæ
in Conᵗᵘ. SSᵃ. Trinitatis
Anno 1742.

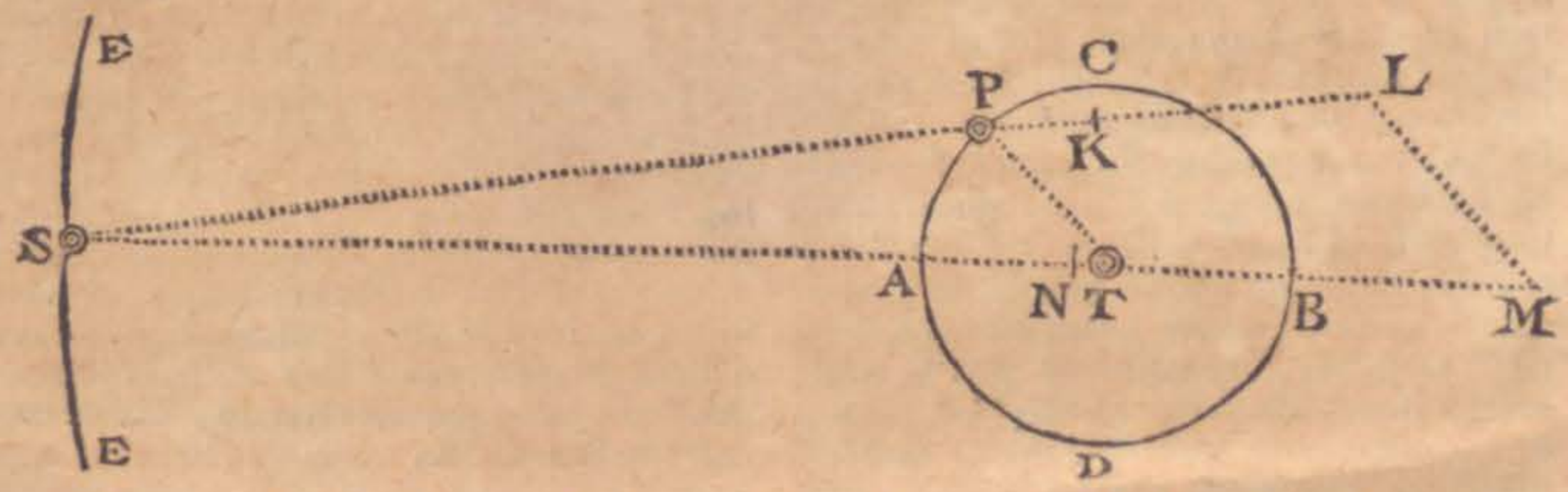
P P.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

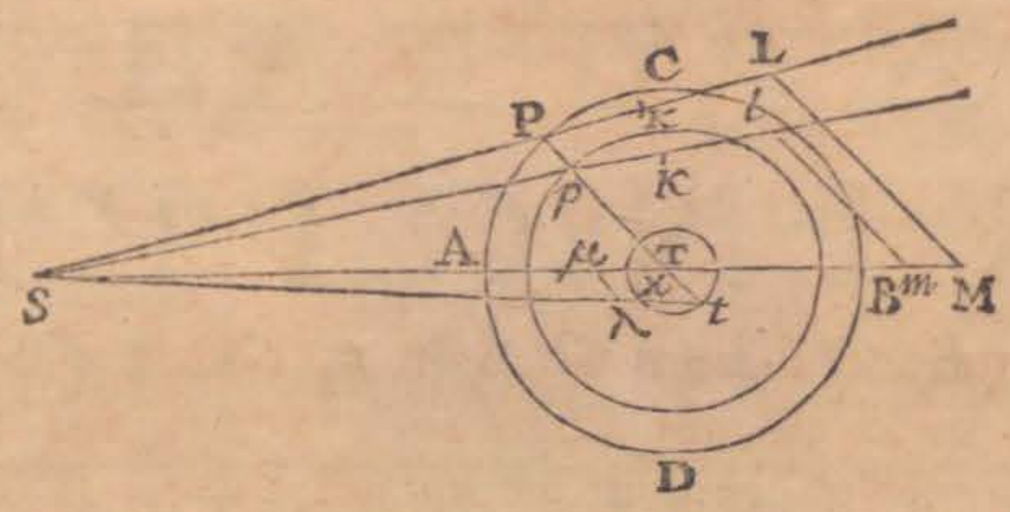
INvenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.



Designet *S* solem, *T* terram, *P* lunam, *CADB* orbem lunæ. In *SP* capiatur *SK* æqualis *ST*; sitque *SL* ad *SK* in duplicatâ ratione *SK* ad *SP*, & ipsi *PT* agatur parallela *LM*, & si gravitas acceleratix terræ in solem exponatur per

DE MUNDI SYSTEMATE.

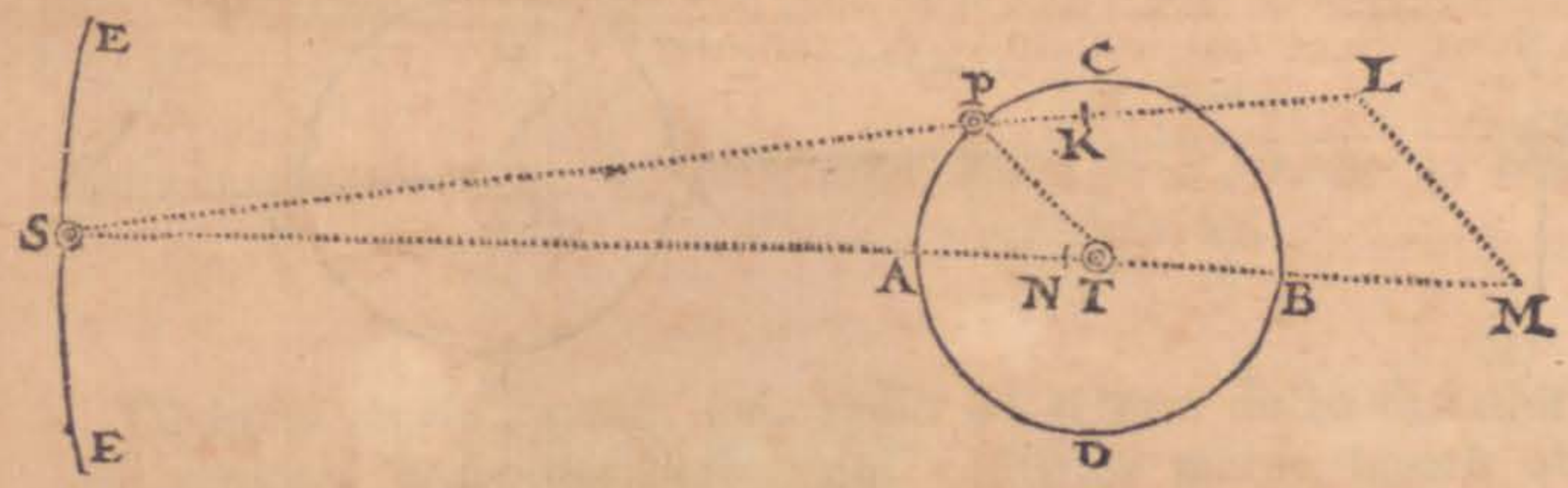
distantiam ST vel SK, erit SL gravitas acceleratrix lunæ in solem. Ea componitur ex partibus SM, LM, quarum LM & ipsius SM pars TM perturbat motum lunæ, ut in libri primi prop. LXVI. & ejus corollariis expositum est. (q) Quâtenus terra & luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud à viribus consimilibus; sed summas tam virium quam motuum referre licet ad lunam, & summas virium per lineas ipsis analo-



109. (q) * *Quâtenus Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvuntur perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud a viribus consimilibus;* Designet ut prius S solem, sed sit T centrum commune gravitatis terræ & lunæ; sit itaque p luna & t terra circum commune gravitatis centrum revolventes, ita ut distantia p t sit æqualis P T, ductisque S p, S t, sumptisque in eis lineis productis si opus sit S k, S π æqualibus S T, secatisque S l & S λ ita ut sint ad S T in duplicatâ ratione S T ad S p & ad S t, actisque l m, $\lambda\mu$ Parallelis ad p t, si exponat S T vim acceleratricem centri communis gravitatis T in solem, exponent S l & S λ vires accelerantes lunam & terram in solem, & perturbabuntur utriusque motus respectu centri communis gravitatis per vires l m & $\lambda\mu$, T m & T μ; Quæ vires consimiles sunt viribus L M & T M quibus lunam solam perturbari dictum fuit in suppositione terram esse immotam; nam ob maximam distantiam puncti S, lineæ P L, p l, T M, t λ pro parallelis sunt habendæ, ideoque figuræ T P L M, T p l m, T t $\lambda\mu$ pro Parallelogrammis sunt habendæ, quæ angulum æqualem in T habent, præterea latera P T, T M; p T, T m; T t, T μ, eamdem habent inter se rationem, demonstratur enim in notâ 500. lib. 1. (quæ ad majorem facilitatem repetitur in notâ (u) subsequente) esse P T ad T M, p T ad T m, T t ad T μ ut Radius ad triplum Cosinus anguli A T P qui Cosinus cum idem sit in tribus hisce casibus, latera Parallelogrammorum circa æqualem angulum posita erunt proportionalia, ea verò latera designant tam vires quibus Luna circa terram immotam revolvendo perturbatur quam eas quibus perturbarentur luna & terrâ circa centrum commune revolvendo, illæ *Vires ergo sunt consimiles.*

Sed summas tam virium quam motuum referre licet ad Lunam. Quippe in observationibus motus Lunæ respectu terræ quasi hæc immota esset consideratur, tunc autem summæ virium acceleratricium, ex quibus velocitates respectivæ nascuntur ipsi tribui debent, *& summas virium per lineas*

analogas TM & ML designare. Vis ML in (r) mediocri suâ quantitate est ad vim centripetam, quâ luna in orbe suo circa terram quiescentem ad distantiam PT revolvi posset, in duplicatâ ratione temporum periodicorum lunæ circa terram & terræ circa solem (per corol. 17. prop. LXVI. lib. 1.) hoc est, LIBER TERTIUS. PROP. XXV. PROB. VI.



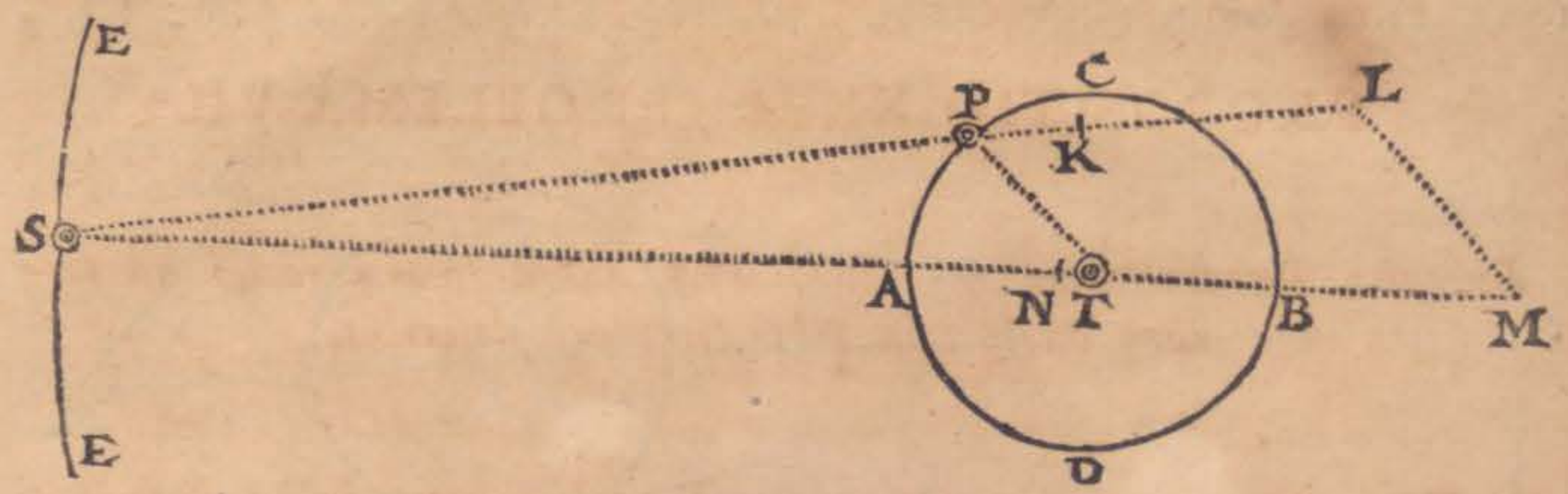
in duplicatâ ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est, ut 1000 ad 178725, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in propositione quartâ quod, si terra & luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum distantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum mediocrium terræ

neat TM & ML ipsis analogas designare. Vires enim acceleratrices pT & Tt simul junctæ æquales sunt soli vi PT & similem effectum edunt, admovent utique corpora p & t, secundum directionem pTt, si ergo vis acceleratrix PT summæ utriusque æqualis admoveat corpus P versus immotum T, planè idem erit effectus ex corpore t vel T spectatus: Vires MT, $T\mu$ divellunt corpora à se mutuo secundum directionem ST, idem verò præstat vis TM quæ summæ ambarum est æqualis, nam est $pT : Tt :: mT : T\mu$ :: ergo $pT : pT+Tt :: mT : mT+T\mu$ & altermando $pT : mT :: (PT : MT) :: pT+Tt : mT+T\mu$. Sed est $pT+Tt = PT$ ergo etiam $mT+T\mu = MT$.

(r) * *Vis ML in mediocri suâ quantitate* &c. Ob magnam Solis distantiam figurâ PTML est parallelogrammum ideoque ML est proximè æqualis lineæ PT, ergo vis ML erit ad vim quâ Sol agit in punctum T, ut PT ad SK sive ST, sed vires centrales qualescumque sunt inter se directè ut Radii circulorum qui per eas describuntur & inverse ut quadrata temporum Periodicorum, ergo ea vis quâ sol agit in punctum T, est ad vim quâ Lunâ in orbe suo retinetur (posito illam revolvi circa terram quiescentem) ut ST ad PT directè & ut quadratum temporis Periodici Lunæ circa terram ad quadratum temporis Periodici Terræ circa Solem; Ergo compositis rationibus, vis ML est ad vim quâ Lunâ in orbe suô retinetur ut quadratum temporis Periodici Lunæ ad quadratum temporis Periodici Terræ circa Solem hoc est in duplicatâ ratione dierum 27, hor. 7, 43′ ad 365 dies, 6 hor. 9′ quæ est duratio anni siderei. 109.

DE MUNDI SYSTEMATE.

terræ quamproximè. Et (f) vis quâ luna in orbem circa terram quiescentem, ad distantiam *PT* semidiametrorum terrestrium $60\frac{1}{2}$ revolvi posset, est ad vim, quâ eodem tempore ad distantiam



semidiametrorum 60 revolvi posset, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & (t) hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60 × 60 quamproximè. Idcoque vis mediocris *ML* est ad vim gravitatis in superficie terræ,

109. (f) * *Et vis quâ Luna ad distantiam* $60\frac{1}{2}$ *semid. revolvi posset est ad vim quâ ad distantiam* 60 *semid. revolvi posset eodem tempore ut* 60 $\frac{1}{2}$ *ad* 60. Vires enim centrales sunt ut distantiæ directè & tempora Periodica inverse (Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) cum ergo hîc tempora Periodica æqualia ponantur, Vires Centrales sunt ut distantiæ. Newtonus autem loco distantiæ $60\frac{1}{2}$ semid. terræ quæ revera intercedit inter terram & lunam, assumit distantiam 60 semid. tantùm, quia in præcedente ratiocinio vim qua Lunâ in orbe suo retinetur æstimaverat quasi terra immota esset & Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. à terrâ tempore 27. dier. 7 hor. 43. min. circa terram revolveretur; Verum cum terra reverâ circa centrum gravitatis commune Lunæ & Terræ revolvatur, ea vis quâ Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. tempore illo revolvi apparet, minor est ea quâ ad eamdem distantiam eodemque tempore circa terram immotam revolveretur, & est æqualis illi quâ, eodem quidem tempore Periodico, sed ad distantiam 60 semid. circa terram immotam revolveretur, ut constat ex Prop. LX. Lib. I. Eâ enim Propositione statuitur quod si duo corpora revolvantur circa centrum commune gravitatis, axis Ellipseos quam unum circa alterum motum describit est ad axem Ellipseos quam circa illud quiescens eodem tempore Periodico & eâdem vi describere posset, ut summa corporum amborum ad primam duarum medieproportionalium inter hanc summam & corpus alterum, quare cum Telluris corpus sit ad corpus Lunæ ut 42 ad 1, & prima duarum medieproportionalium inter 43 & 42 fit $42\frac{2}{3}$ sitque 43 ad $42\frac{2}{3}$ ut $60\frac{1}{2}$ ad 60 proximè, Vis quâ Luna in orbe suo retinetur, ea est quâ ad distantiam 60 semid. terræ eodem *ipso* tempore Periodico quod observatur circa terram immotam revolvi posset.

(t) * *Et hæc vis &c.* Per hujusce Libri Prop. IV.

terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, seu 1 ad 638092,6. Inde verò & ex proportione linearum TM, ML, datur etiam vis TM (u): & hæ sunt vires solis quibus lunæ motus perturbantur. *Q. E. I.* LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROBL. VII.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam luna, radio ad terram ducto, in orbe circulari describit.

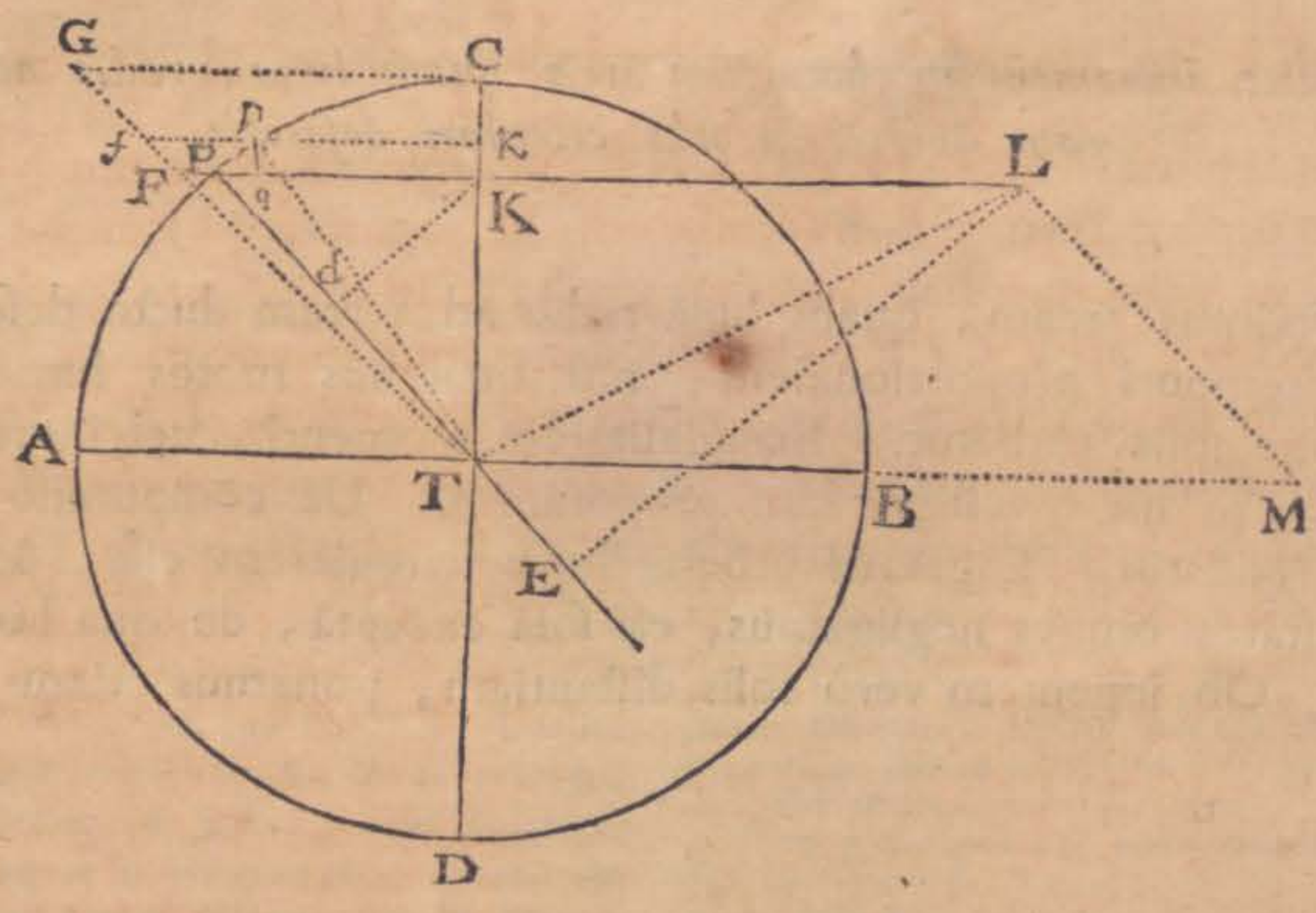
Diximus aream, quam luna radio ad terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quâtenus motus lunaris ab actione solis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hic investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, eâ solâ exceptâ, de quâ hic agitur. Ob ingentem verò solis distantiam, ponamus etiam lineas

S P

(u) * *Datur etiam vis TM.* Ob parallelas P T, L M & ingentem puncti S distantiam, P L & T M sunt parallelæ, & figura PTLM est parallelogrammum, ideoque T M sumitur ut proxime æqualis P L; Est autem P L triplum Cosinus anguli A T P existente T P sive L M radio; Nam quia S K est æqualis S T, si centro S radio S T describatur arcus T K, erunt S T & S K in eum arcum perpendiculares, sed is arcus proxime coincidit cum rectâ T C perpendiculari lineæ S T in T (ob distantiam centri S) ergo punctum K in ea recta T C occurret & S K sive P K illi rectæ T C erit perpendicularis, ideoque P K erit Cosinus Anguli A T P; sed, per constructionem, est SP^2 ad $SK^2 - SP^2$ (sive quia $SK = SP + PK$) ad $2SP \times PK + PK^2$ ut S K (sive S P + S K) ad S L − S K (sive K L) ideoque est $KL = 2PK + \frac{3PK^2}{SP} + \frac{PK^3}{SP^2}$, sed omittendi sunt ultimi termini propter ingentem divisorem S P, ergo est K L = 2 P K, & P K + K L sive P L = 3 P K. Q. E. D. 105

DE MUNDI SYSTEMATE.

SP, *ST* ſibi invicem parallelas eſſe. (x) Hoc pacto vis *LM* reducetur ſemper ad mediocrem ſuam quantitatem *TP*, ut & vis *TM* ad mediocrem ſuam quantitatem $3PK$. Hæ vires (per legum corol. 2.) componunt vim *TL*; & hæc vis, ſi in radium *TP* demittatur perpendiculum *LE*, reſolvitur in vires *TE*, *EL*, quarum *TE*, agendo ſemper ſecundum radium *TP*, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ *TPC* radio illo *TP*



factam; & *EL* agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantum accelerat vel retardat lunam. Acceleratio illa lunæ, in tranſitu ipſius à quadraturâ *C* ad conjunctionem *A*, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut (y) ipſa vis accelerans *EL*, (z) hoc eſt, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Exponatur tempus

109. (x) * *Hoc pacto.* Vide notam (u) præcedentem.

(y) * *Ut ipſa vis accelerans* (13. lib. 1.).

(z) * *Hoc eſt ut* $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Nam Triangula PTK, PLE ſunt ſimilia propter angulum communem in P & angulos rectos K & E, ergo eſt TP : TK :: PL : EL $= \frac{PL \times TK}{TP}$, (ſed per notam u) eſt PL $= 3$ PK ergo eſt EL $= \frac{3PK \times TK}{TP}$.

tempus per motum medium lunarem, (a) vel (quod eodem ferè recidit) per angulum CTP, vel etiam per arcum CP. Ad CT erigatur normalis CG ipsi CT æqualis. Et diviso arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi possint, ductâque pk perpendiculari ad CT, jungatur TG ipsis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit FK æqualis TK, & (b) Kk erit ad PK ut Pp ad Tp, (c) hoc est in datâ ratione, (d) ideoque $FK \times Kk$ seu area $FKkf$, erit ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id est, ut EL; & compositè, area tota $GCKF$ ut summa omnium virium EL tempore toto CP impressarum in lunam, (e) atque ideo etiam ut velocitas hâc summâ genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ CTP, seu incrementum momenti. (f) Vis quâ luna circa terram quiescentem ad distantiam TP; tempore

LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROB. VII.

110 (a) * *Quod eodem ferè recidit.* In hypothesi orbem Lunarem esse circularem, angulus C T P vel arcus C P forent proportionales tempori, semotâ considerationc perturbationis motus Lunæ ex Solis actione productæ; hæc vero perturbatio respectu ipsius motus Lunæ est exigua, itaque anguli C T P vel arcus C P tempori fere proportionales censeri possunt.

(b) * *Kk erit ad PK ut Pp ad Tp* sive T P; Ex notissimâ circuli proprietate fluit hæc proportio, nam si ex puncto p ducatur lineola p q perpendicularis ad P K, ea erit parallela & æqualis lineæ K k, formabiturque Triangulum fluxionale P p q simile Triangulo P K T, nam cum anguli p P K & K P T rectum simul efficiant, & pariter anguli K P T & P T K, æquales sunt anguli p P K & P T K unde est p q sive K k ad P K ut P p ad T P.

(c) * *Hoc est in datâ ratione.* Ratio enim P p ad T p est data, quia singulæ partes P p sumuntur æquales, sunt itaque singulæ in eâdem ratione ad radium T P.

(d) * *Ideoque F K × K k seu area F K k f ut* $\frac{3PK \times TK}{TP}$; Cum ratio K k ad P K sit data, data etiam erit ratio K k ad 3 P K, & hæc ratio manebit etiamnum data si consequens 3 P K per quantitatem constantem T P dividatur, erit ergo data ratio K k ad $\frac{3PK}{TP}$, denique non mutabitur hæc ratio si ambo termini per quantitates æquales F K & T K multiplicentur, ergo ratio K k × F K (seu areæ F K k f) ad $\frac{3PK \times TK}{TP}$ est etiam data, hoc est, est area F K k f ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. 110.

(e) * *Atque ideo etiam ut velocitas* (13. lib. 1.).

(f) * *Vis quâ Lunâ circa terram ad distantiam T P tempore suo Periodico C A D B revolvi posset efficeret ut corpus liberè cadendo tempore C T describeret longitudinem* $\frac{1}{2}$ *C T* &c. Si corpus gyretur in circulo per vim ad ejus centrum tendentem, primum uniformiter girabitur; tum, quadratum arcûs quovis tempore descripti erit æquale circuli Diametro ducto in altitudinem quam corpus liberè cadendo tempore eodem percurreret si uniformiter acce-

DE MUNDI SYSTEMATE.

re ſuo periodico $CADB$ dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi poſſet, efficeret ut corpus, tempore CT cadendo, deſcriberet longitudinem $\frac{1}{2}CT$, & velocitatem ſimul acquireret æqualem velocitati, quâ luna in orbe ſuo movetur. Patet hoc per corol. 9. prop. IV. lib. 1. Cum autem perpendiculum Kd in TP demiſſum (g) ſit ipſius EL pars tertia, & (h) ipſius TP ſeu ML in octantibus pars dimidia, vis EL in octantibus, (i) ubi maxima

110 acceleraretur per vim centripetam quâ circulus deſcribitur.

Nam ſi ſumatur arcus quam minimus altitudo quæ per vim centralem liberè percurreretur dum ille arcus quamminimus deſcriberetur, foret ejus arcus minimi ſinus verſus; ſed ex natura circuli, factum Diametri ducti in ſinum verſum arcûs, eſt æquale quadrato chordæ illius arcus, ſive quadrato arcus ipſius ſi adeo ſit exiguus ut pro ſuâ chordâ ſumi poſſit.

Spatia verò liberè cadendo per vim uniformiter accelerantem deſcripta, ſunt ut quadrata temporum, arcus verò interea percurſi ſunt ut tempora, quia corpus uniformi celeritate giratur, ergo ſpatium minimum per vim centripetam liberè deſcriptum eſt ad aliud quodvis ſpatium per eamdem vim centrifugam liberè deſcriptum (ideoque etiam facta horum ſpatiorum per Diametrum circuli) ſunt ut quadrata arcuum correſpondentibus temporibus deſcriptorum: ſed prius factum eſt æquale quadrato arcus correſpondentis, ergo & alterum factum erit æquale quadrato arcus correſpondentis, hoc eſt altitudo quæcumque cadendo liberè deſcripta in Diametrum ducta efficit factum æquale quadrato arcus eodem tempore revolvendo uniformiter percurſi.

Quod cum ita ſit, cadat liberè corpus per $\frac{1}{2}CT$ h. e. per radii ſemiſſem, ducaturque hæc longitudo per Diametrum ſeu $2CT$ factum CT^2 ſive quadratum ipſius radii æquale erit quadrato arcus eodem tempore deſcripti, erit ergo is arcus æqualis radio CT, ſed velocitas acquiſita liberè cadendo per Radii ſemiſſem $\frac{1}{2}CT$ talis eſt ut corpus movendo uniformiter eâ celeritate acquiſitâ duplum ejus altitudinis Radium nempe integrum CT eodem tempore deſcribere poſſet, quæ eſt ipſa longitudo arcus quam corpus uniformiter revolvens deſcripſiſſet eodem tempore, ergo velocitas acquiſita lapſu per $\frac{1}{2}$ CT ea eſt quâ corpus in orbe ſuo revolvitur.

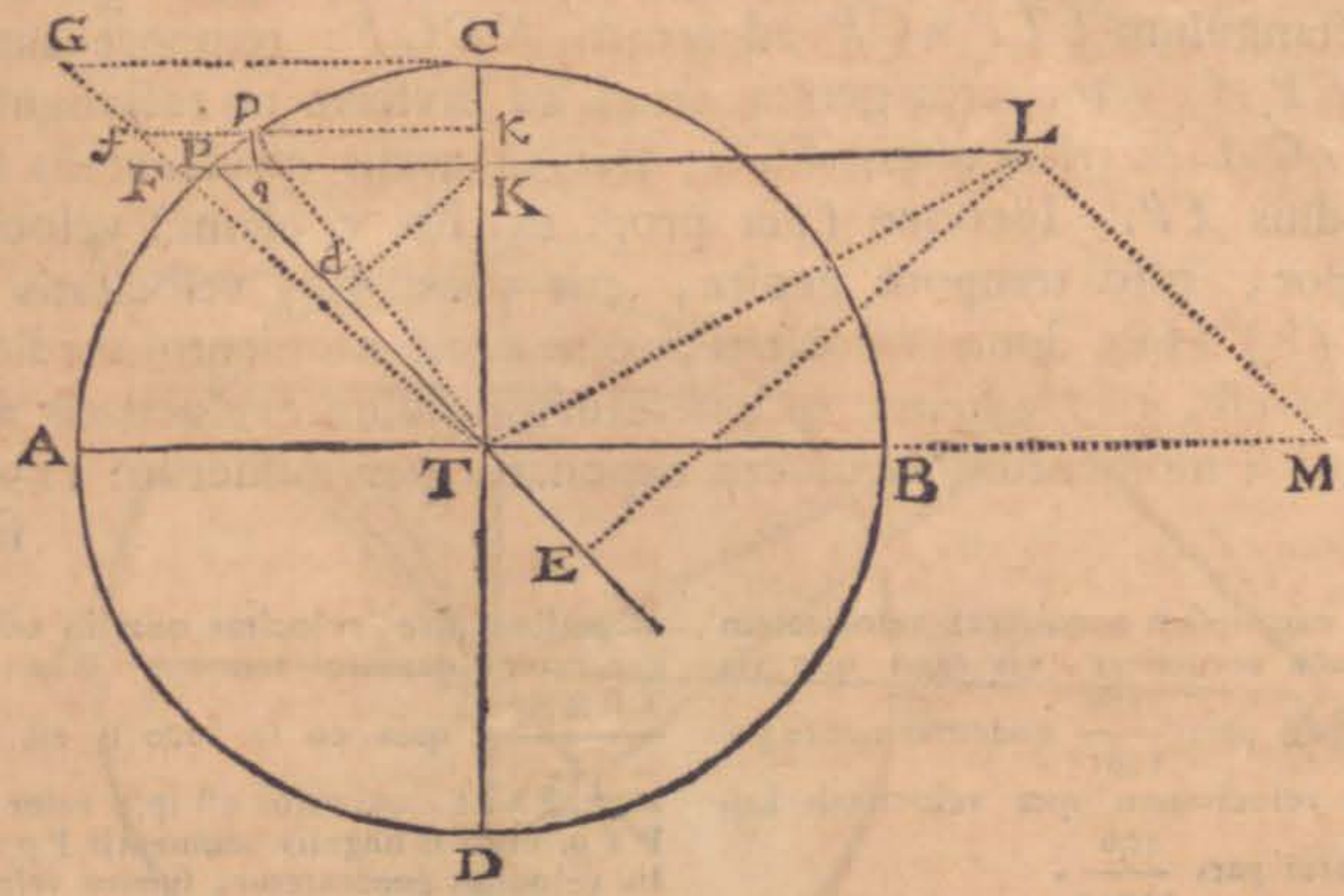
Ea denique longitudo $\frac{1}{2}$ CT percurretur tempore quod erit ad totum tempus Periodicum ut CT ad circumferentiam $CADB$, nam tempora ſunt ut arcus uniformiter deſcripti, ſed tempus quo corpus per $\frac{1}{2}$ CT labitur eſt æquale tempori quo arcus æqualis CT percurritur ergo eſt illud tempus ad totum tempus Periodicum ut CT ad totam peripheriam $CADB$.

(g) * *Kd ſit ipſius EL pars tertia.* Ob Triangula ſimilia PLE, PKd eſt EL ad Kd ut PL ad PK, ſed (per notam (u)) eſt PK tertia pars lineæ PL, eſt itaque pariter Kd tertia pars lineæ EL.

(h) * *Kd ipſius TP ſeu ML in octantibus pars dimidia*; Nam in octantibus anguli KTd, PKd, KPd ſunt omnes 45 grad. eſt itaque $Td = Kd = dP$ eſt ergo Td ſive Kd ipſius TP pars dimidia in octantibus.

111 (i) * *Ubi maxima eſt.* Ut inveniatur punctum in quod vis EL ſive $\frac{3PK \times TK}{TP}$ eſt maxima, ſit $TP = r$, $TK = x$, $PK = y$ erit $EL = \frac{3yx}{r}$ cujus fluxio eſt $\frac{3ydx + 3xdy}{r}$, maxima eſt ergo EL ubi hæc fluxio æquatur nihilo, ideoque ubi $ydx = -xdy$, ſed cum in circulo

maxima eſt, ſuperabit vim ML in (k) ratione 3 ad 2, ideoque erit ad vim illam, quâ luna tempore ſuo periodico circa terram quieſcentem revolvi poſſet, (l) ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ ſeu 11915, & tempore CT velocitatem generare deberet quæ (m) eſſet pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunaris, tempore autem CPA velocitatem majorem generaret in ratione CA ad CT ſeu TP. Expo-



Fit $y = \sqrt{rr - xx}$, & $dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{rr - xx}}$ unde ſubſtitutis valoribus æquatio $ydx = -xdy$ in hanc mutatur $dx\sqrt{rr - xx} = \frac{xx\,dx}{\sqrt{rr - xx}}$ & reductis terminis fit $rr = 2xx$, unde eſt $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ & $dy = -dx$, & $y = x$; Ideoque in Triangulo P T K angulus T debet eſſe 45 grad. & P debet eſſe in octante Circuli.

(k) * *In ratione 3 ad 2.* Eſt E L ad K d ut 3 ad 1 (not. g) eſt K d ad T P ſive M L ut 1 ad 2 (not. h) ergo E L ad M L ut 3 ad 2, ex æquo.

(l) * *Ut 100 ad* $\frac{2}{3}$ 17872 $\frac{1}{2}$. Vis E L eſt ad vim M L ut 3 ad 2; vis M L eſt ad vim quâ Lunâ in orbe ſuo circa terram quieſcentem revolvi poſſet tempore ſuo Periodico ut 1000 ad 178725 (Prop. XXV. hujuſce) ſive ut 100 ad 17872 $\frac{1}{2}$; Ergo compoſitis rationibus vis E L eſt ad eam vim quâ Luna revolvitur ut 100×3 ad 2×17872 $\frac{1}{2}$ ſive ut 100 ad $\frac{2}{3}$ 17872 $\frac{1}{2}$ hoc eſt ad 11915, ideoque vis E L eſt $\frac{100}{11915}$ vis Lunæ. 111.

(m) *Quæ eſſet pars* $\frac{100}{11915}$ *velocitatis Lunaris.* Patet ex notâ (f) vim quâ Lunâ revolvitur efficere ut corpus ab eâ vi uniformiter acceleratum cadendo tempore

DE MUNDI SYSTEMATE.

Exponatur vis maxima EL in octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo (n) $\frac{1}{2} TP \times Pp$ æqualem. Et (o) velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2} TP \times CP$ ad aream $KCGF$: tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2} TP \times CA$ & triangulum TCG, sive ut arcus quadrantalis CA & radius TP. Ideoque (per prop. IX. lib. V. elem.) velocitas posterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunæ. (p) Huic lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, (q) addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & si momentum mediocre exponatur per numerum 11915, sum-

XII. re CT eam ipsam acquireret velocitatem quâ Luna revolvitur, vis ergo quæ vis Lunaris est pars $\frac{100}{11915}$ eodem tempore generaret velocitatem quæ velocitatis Lunaris foret pars $\frac{100}{11915}$.

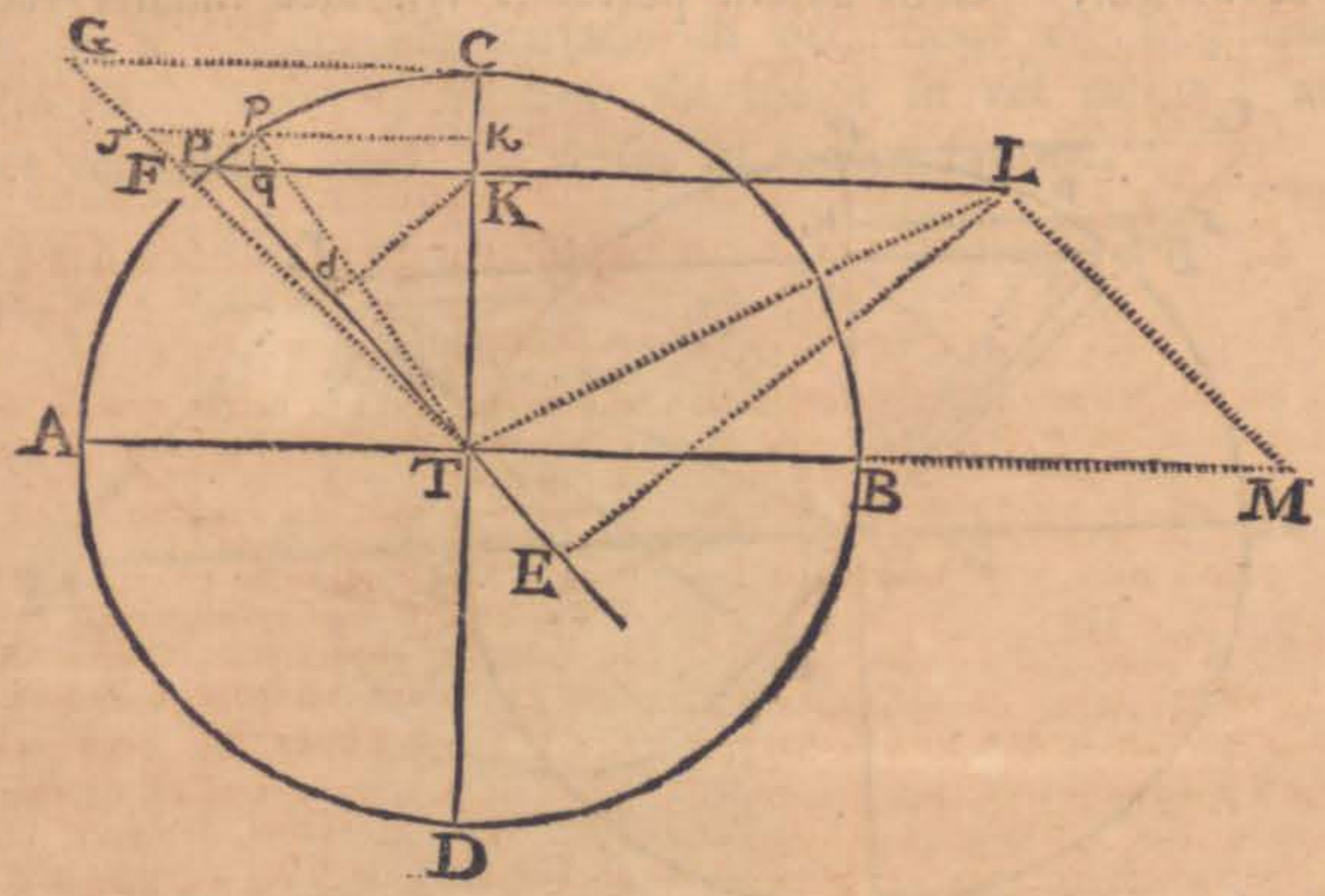
(n) * *Exponatur vis maxima EL in octantibus per aream FK × Kk rectangulo* $\frac{1}{2} TP \times Pp$ *æqualem*, vis EL semper est proportionalis areæ FK × Kk ex demonstratis, sed in octantibus ubi ea vis est maxima est FK sive $TK = \frac{TP}{\sqrt{2}}$ & $Kk = \frac{Pp}{\sqrt{2}}$ ergo $FK \times Kk = \frac{TP \times Pp}{2}$.

(o) * *Et velocitas quam vis maxima tempore quovis CP generat ad velocitatem quam generant* vires veræ EL *eodem tempore agentes ut* $\frac{1}{2}$ TP × CP *ad aream KCGF;* Velocitates genitæ sunt ut vires quibus generantur ductæ in tempus per quod generantur, cum itaque supponatur omnes arcus Pp temporibus quamproximè æqualibus describi, si ii arcus Pp æquales inter se sumantur (vid. not. a præced.) velocitates genitæ dum arcus Pp percurruntur sunt ut ipsæ vires sive ut areæ FKkf, ideoque summa velocitatum genitarum tempore CP, sive dum arcus CP describitur, est ut tota area KCGF, sed vis in octantibus sive velocitas quæ in octante generatur durante tempore Pp, est $\frac{TP \times Pp}{2}$, quia eo in loco is est valor areæ FKkf, qui valor est ipse valor areæ PTp, ergo si singulis momentis Pp similis velocitas generaretur, summa velocitatum genitarum tempore CP foret area CTP sive $\frac{1}{2}$ TP × CP, ergo velocitas quam vis maxima generat est ad eam quam vires veræ generant, tempore utrinque eodem CP, ut $\frac{1}{2}$ TP × CP ad KCGF.

(p) *Huic Lunæ velocitati quæ areæ momento mediocri est analoga.* Areæ momentum mediocre illud est quod Luna dato exiguo tempore verreret si uniformi velocitate toto suo tempore ferretur, cumque Luna per vim EL certis in locis plus minusve acceleretur, areæ momentum, seu ea areæ particula quæ dato exiguo tempore describitur, nunc major nunc minor est; sed cum orbis Lunaris circularis censeatur, areæ momenta sunt ut arcus qui sunt eorum bases, cumque iisdem temporibus illa momenta illique arcus describantur, sunt ut velocitates quibus describuntur. Hinc pro arearum momentis ipsæ velocitatum rationes assumuntur.

(q) * *Addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius.* Hic assumit Newtonus velocitatem mediocrem eam nempe quâ orbita Lunaris tempore suo Periodi-

ſumma 11915+50 ſeu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in ſyzygiâ *A*, ac differentia 11915−50 ſeu 11865 ejuſdem momentum minimum in quadraturis. Igitur areæ tempo- LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROBL. VII.



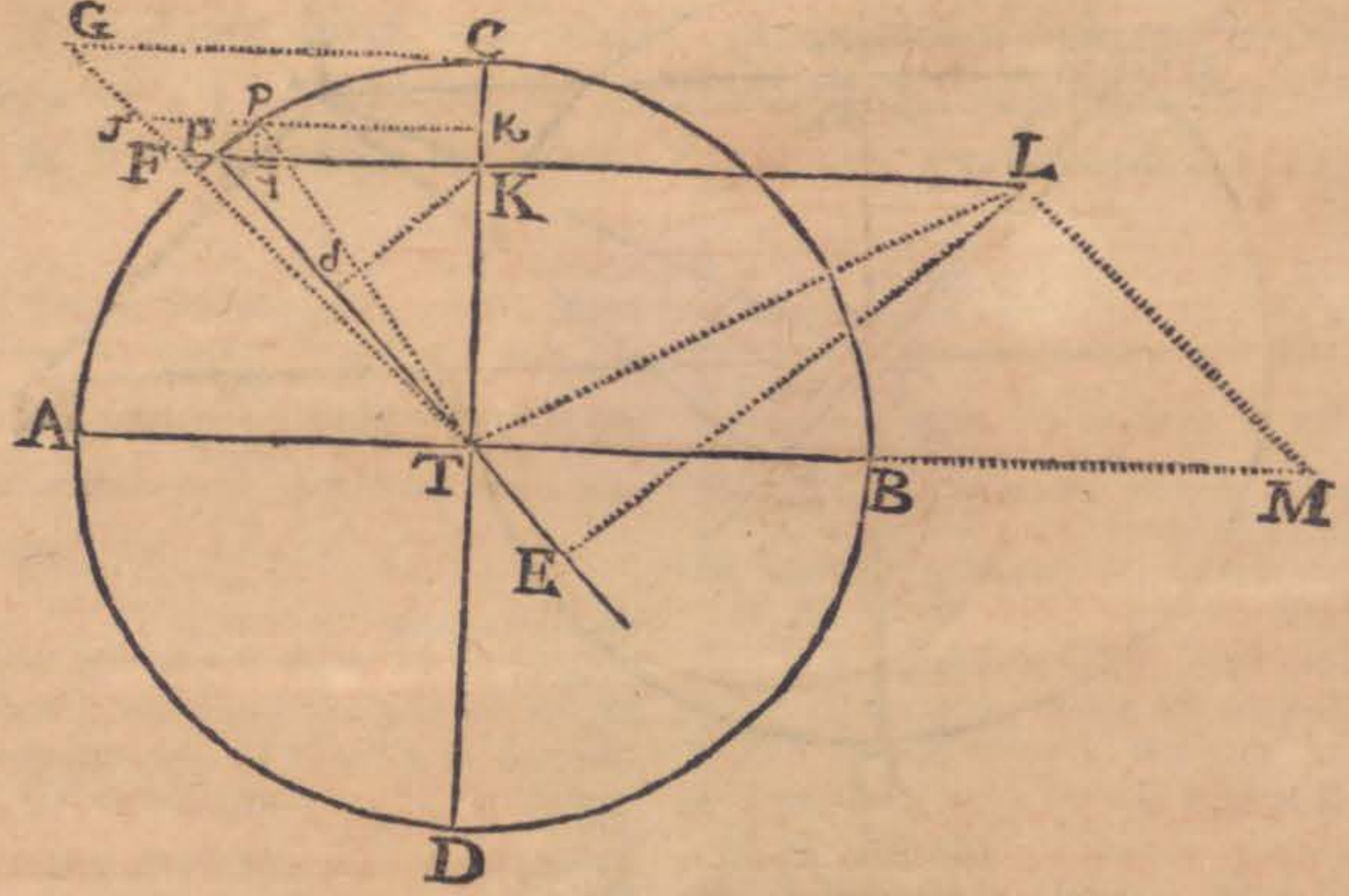
ribus æqualibus in ſyzygiis & quadraturis deſcriptæ, ſunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod ſit ad momentorum differentiam 100 ut

co uniformiter deſcriberetur eſſe mediam proportionalem Arithmeticè inter velocitatem minimam & maximam. Hanc tamen propoſitionem quaſi evidentem aſſumere non licuit, ſi enim v. gr. diutius durarent parvæ velocitates quam magnæ, velocitas mediocris propior foret parvis velocitatibus quam magnis, hinc exponenda eſt prius ratio quâ creſcunt illæ velocitates, ut poſſimus aſſerere mediocrem velocitatem Lunæ eſſe mediam Arithmeticè inter extremas. Quod quidem efficere conabimur Problemate huic propoſitioni mox ſubjungendo. 111

DE MUNDI SYSTEMATE.

ut trapezium $FKCG$ ad triangulum TCG vel (r) quod perinde eſt, ut quadratum ſinus PK ad quadratum radii TP, id (f) eſt, ut Pd ad TP) & ſumma exhibebit momentum areæ, ubi luna eſt in loco quovis intermedio P.

Hæc omnia ita ſe habent, ex hypotheſi quod ſol & terra quieſcunt, & luna tempore ſynodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cum autem periodus ſynodica lunaris verè ſit



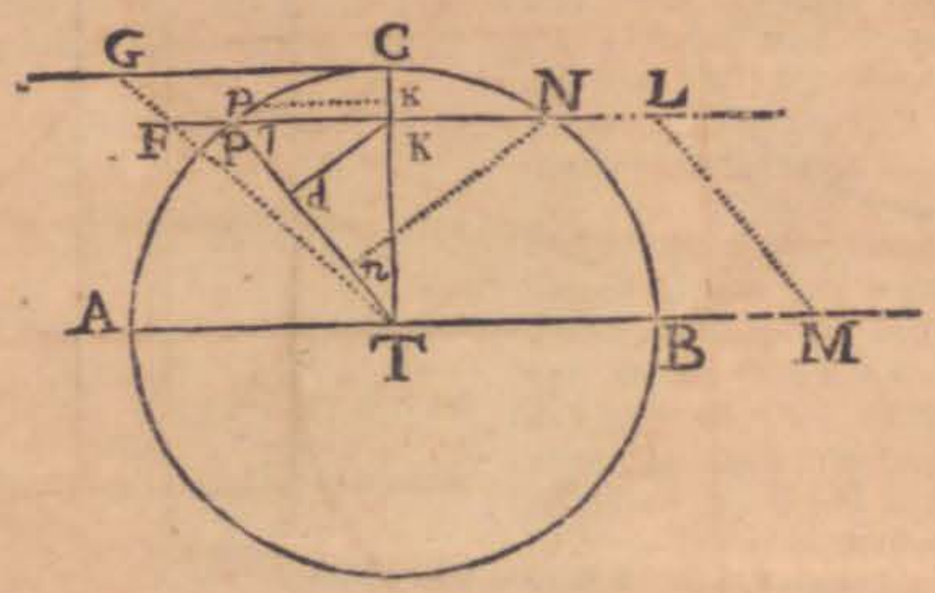
dierum 29. hor. 12. & min. 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id eſt, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{1200}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejuſdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in quadraturâ lunæ erit ad ejus momentum in ſyzygiâ ut 11023−50 ad 11023+50, ſeu 10973 ad 11073,

112. (r) * *Vel quod perinde eſt ut quadratum ſinus PK ad quadratum radii TP* area TCG eſt ream TKF ut quad. TC ad quad. TK & dividendo TCG−TKF (ſive FKCG) ad TCG ut TC^2-TK^2 (ſive PK^2) ad TC^2.

(f) * *Id eſt ut Pd ad TP* eſt Pd ad PK ut PK ad TP propter ſimilitudinem Triangulorum PKd, PTK, ergo per compoſitionem rationum eſt Pd ad TP ut PK^2 ad TP^2.

11073, & ad ejus momentum, ubi luna in alio quovis loco intermedio P verſatur, ut 10973 ad $10973+Pd$, (t) exiſtente videlicet TP æquali 100.

Area igitur, quam luna radio ad terram ducto ſingulis temporis particulis æqualibus deſcribit, eſt quam proximè ut ſumma numeri 219,46 & ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturâ proximâ, in (u) circulo cujus radius eſt unitas. Hæc ita ſe habent ubi variatio in octantibus eſt magnitudinis mediocris. Sin (x) variatio ibi major ſit vel minor, augeri debet vel minui ſinus ille verſus in eâdem ratione.

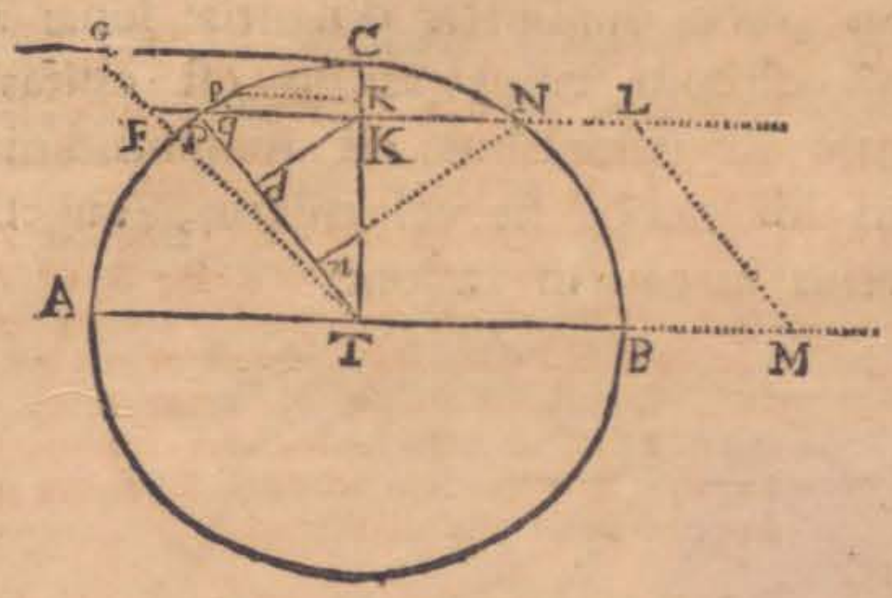


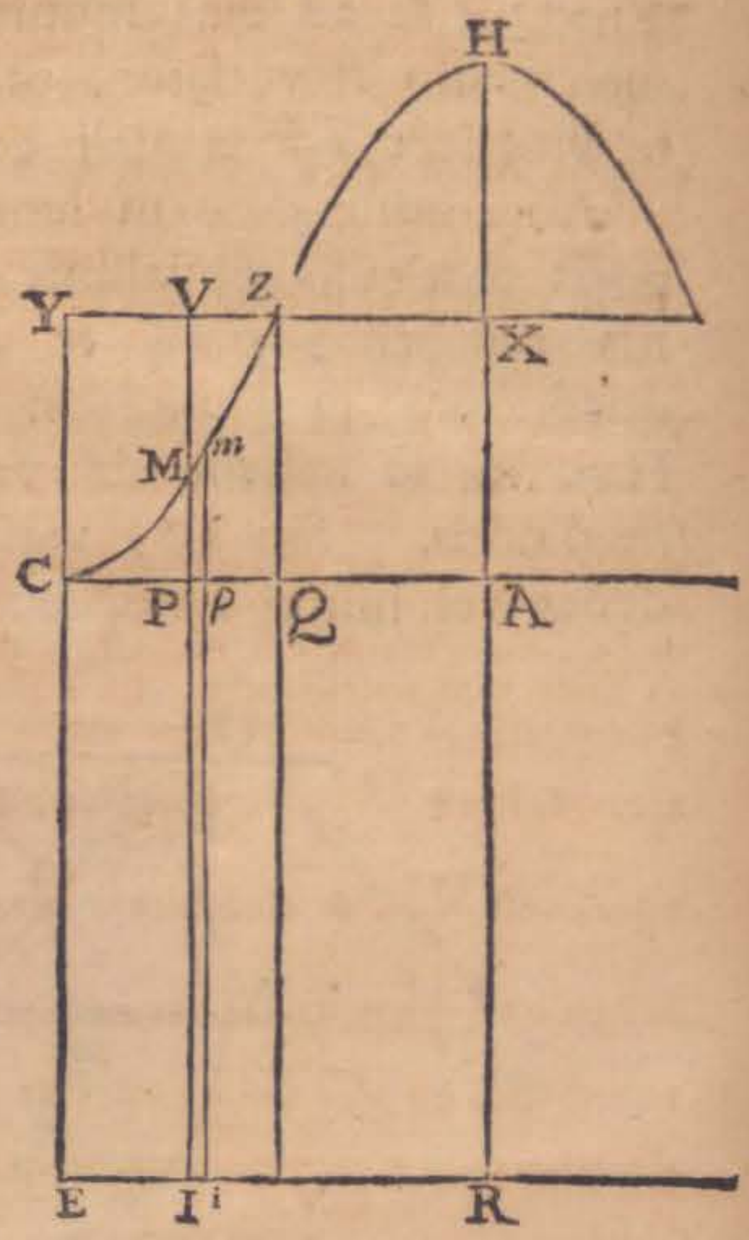
(t) * *Exiſtente videlicet TP æquali* 100, ſequitur ex præcedentibus quod illud quod debet addi ad momentum minimum 10973 eſt ad 100 ut eſt Pd ad PT, ſi ergo PT ſit æqualis numero 100 erit Pd æqualis illi numero qui debet addi ad momenti minimi valorem.

(u) * *Ut ſumma numeri 219.46 & ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ in circulo cujus radius eſt unitas*; Areæ momentum in puncto P eſt ut 10973 + Pd, eſt autem Pd dimidium ſinus verſus duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, nam dicatur N punctum in quo linea PKL ſecat circulum erit arcus PCN duplus diſtantiæ PC à quadraturâ proximâ ductaque Nn perpendiculari in radium PT erit Pn ſinus verſus duplicatæ illius diſtantiæ, ſed cum Nn & Kd ſint perpendiculares in eamdem lineam ideoque Parallelæ, & ſit punctum K medium lineæ PN erit etiam d medium lineæ Pn, eritque $Pd = \frac{1}{2}Pn$, ſive erit Pd dimidium ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, eſt ergo momentum areæ ut ſumma numeri $10973 + \frac{1}{2}Pn$ exiſtente Radio 100, ſeu ut hujus quantitatis duplum $21946 + Pn$ ideoque ſi Radius ſit 1 ut $219{,}46 + Pn$.

(x) * 112. *Sin variatio ibi major ſit* &c. Manente eâdem Hypotheſi, Lunæ orbem eſſe circularem & Lunam aliam non pati irregularitatem præter eam quæ ab eâ parte actionis Solis naſcitur quæ per lineam EL deſignatur, variatio Lunæ erit arcus interceptus inter locum in quo Luna eſſe deberet ſi velocitate ſuâ mediocri moveretur tempore dato CP, & locum in quo reverâ eſt tunc temporis, cujus quidem variationis conditiones ex Problemate ſequenti exponere facile erit.

DE MUNDI SYSTEMATE.





PROBLEMA.

112 Ex hypotheſibus & demonſtratis in Propoſitione hâc XXVI. exponere rationem ſecundum quam deſcribuntur areæ CTPA momenta.

Deſignet recta CA (in 2da. figurâ) tempus quo arcus CA deſcribitur, erigantur per ſingula puncta P rectæ PM perpendiculares in CA & proportionales velocitati tempore CP per vim EL genitæ; Per ea quæ in hâc Propoſitione demonſtrantur independenter ab his, illæ velocitates in punctis P arcus CP ſunt ut Trapezia FKCG correſpondentia, illa vero Trapezia ſunt ut ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, ſive ut ſinus verſus arcus dupli CP, (ut mox in notis explicabitur) fiant ergo illæ perpendiculares PM æquales ſinui verſo arcus 2 CP; ultima perpendicularis AH erit æqualis ipſi Diametro AB, quia eſt ſinus verſus dupli quadrantis; ducatur curva CMH per omnium perpendicularium vertices tranſiens, ducatur etiam AR perpendicularis ad CA, ſitque AH ad AR ut velocitas ultimò acquiſita in A ad velocitatem uniformem quâ Lunâ ferretur ſi vis EL, omninò non ageret, abſolvaturque Parallelogrammum AREC, productâque lineâ MP uſque ad lineam RE tota linea IM erit ut velocitas Lunæ tempore CP, & ducta linea quamproxima mpi erit area MPImpi ut area deſcripta tempore Pp, & tota area RECMH repræſentabit totam aream tempore CA deſcriptam; Denique ſecetur AH in X & ducatur XY parallela CA quæ ſecet curvam CMH in Z & ex puncto Z ducatur ordinata ZQ. Liquet quod ſi punctum X ita ſit aſſumptum ut Parallelogrammum XREY ſit æquale mixtilineo HARECMH, erit XR velocitas Lunæ mediocris, & CQ tempus quo Luna à quadraturâ profecta

ad

ad eam velocitatem mediocrem perveniet, quod quidem ex ipsâ constructione liquet. Jam autem dico quod illud punctum X incidet in medio lineæ AH, ita ut hæc velocitas mediocris XR sit media proportionalis Arithmetica inter RA & RH & præterea quod punctum Q cadet in medio inter A & C ita ut ea celeritas mediocris in octante obtineatur, (saltem si medium arcus medio temporis respondeat quod proximè verum est juxta notam 110 præcedentem).

Ut obtineatur itaque area HAPCMH, dicatur v arcus CP & dicatur mv recta CP quæ arcui CP est proportionalis (saltem quam proximè per not. 110.) & Pp sit $m\,dv$, sinus rectus PK arcus CP dicatur y, sinus verò totalis sit r. Ex notis Trigonometriæ Principiis sinus versus dupli arcus CP est $\frac{2yy}{r}$, ergo ordinata PM ei æqualis est $\frac{2yy}{r}$, & elementum areæ sive MPpm est $\frac{2yy}{r}m\,dv$, sed ex notâ proprietate circuli est $\sqrt{rr-yy}$ ad r ut dy ad dv est ergo $dv=\frac{r\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ itaque areæ elementum evadit $\frac{2myy\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ conferatur illud elementum cum elemento areæ circuli radio TC descripti dicatur CK, z, Kk, dz, Elementum PpkK est $y\,dz$, sed est TK $(\sqrt{rr-yy})$ ad PK (y) ut Pq (dy) ad qp (dz) hinc $dz=\frac{y\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ & elementum areæ circuli fit $\frac{yy\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ quod Elementum est ad Elementum correspondens areæ HAPCMH ut 1 ad $2m$, hinc tota hæc area est ad aream quadrantis TCPA ut $2m$ ad 1, sive si totus arcus CPA dicatur c & recta CPA dicatur mc, area HAPCMH erit mrc. Ergo si linea AR quæ designat velocitatem uniformem Lunæ cum nulla foret vis EL, dicatur l, area AREC erit mlc & tota area HARECH erit $mlc+mrc$, sive æqualis Parallelogrammo cujus unum latus foret mc alterum $l+r$, sed RE ex constructione est æqualis mc, ergo si sumatur $RX=l+r$ Parallelogrammum XREZ erit æquale mixtilineo HARECMH, ideoque erit RX sive $l+r$ velocitas Lunæ mediocris, sed erat $AH=2r$, ideoque $RH=l+2r$ est ergo RX $(l+r)$ media proportionalis Arithmeticè inter RA (l) & RH $(l+2r)$, ergo velocitas mediocris Lunæ est media proportionalis Arithmeticè inter minimam velocitatem Lunæ (l) & maximam $(l+2r)$. 112

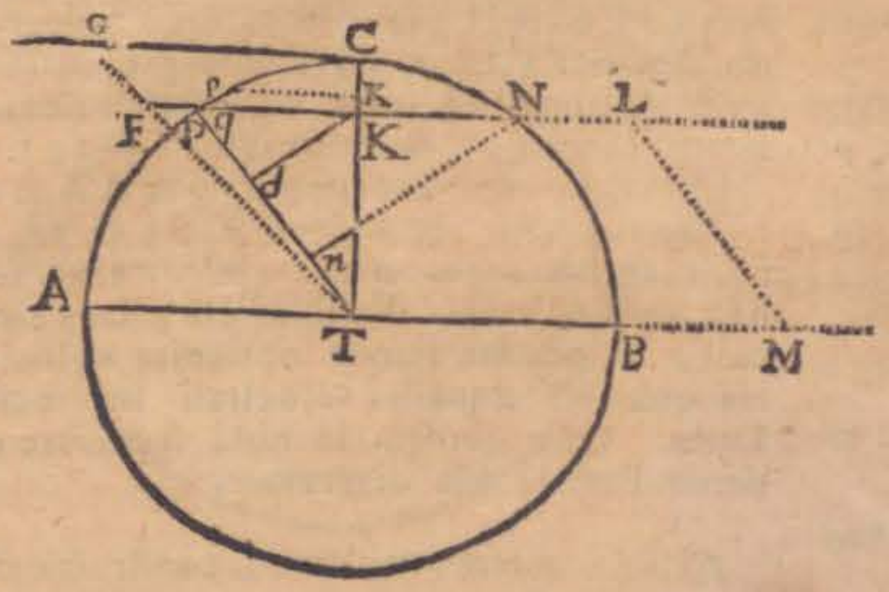
Quoniam verò ordinata $ZQ=AX=r$ est sinus versus arcus dupli CP, & est r sinus versus arcus quadrantalis, ergo in hoc casu CP ejus dimidius est octans circuli, in octante itaque obtinetur velocitas quæ est æqualis velocitati mediocri Lunæ. Quæ quidem in notâ superiore q demonstranda esse dixeramus.

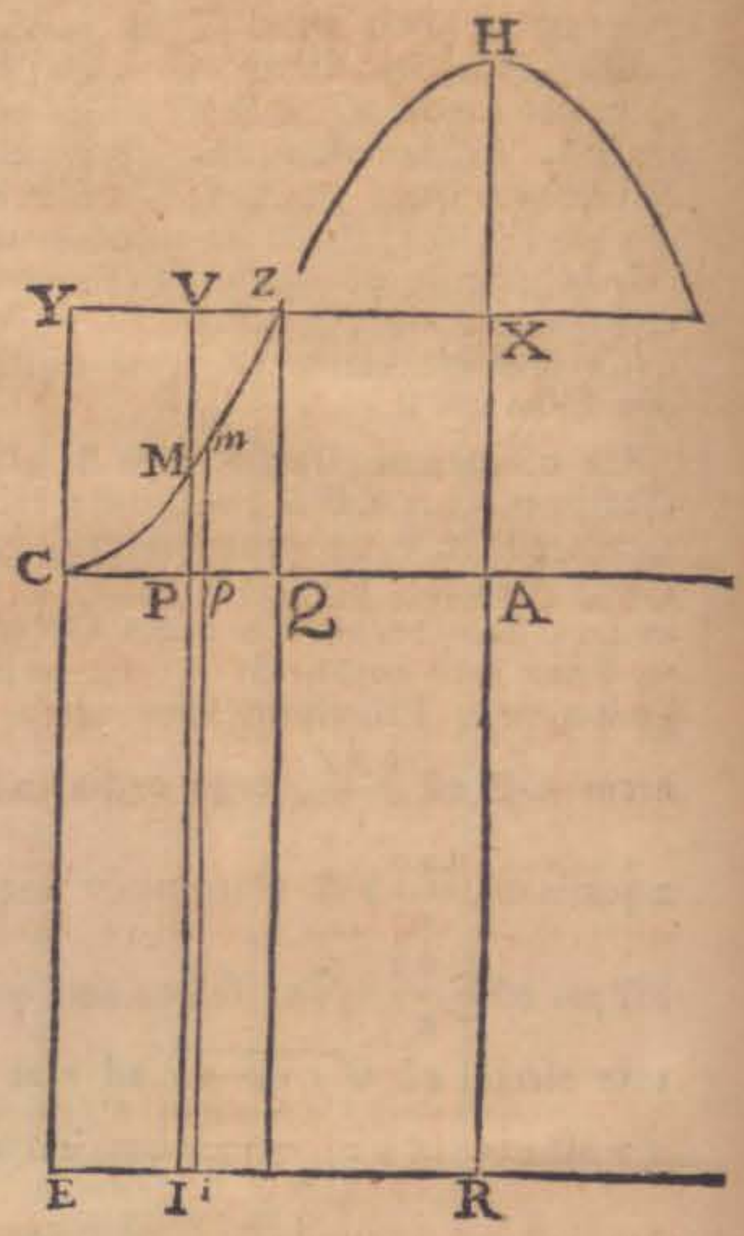
Ex hujus autem Problematis constructione liquet aream per velocitatem mediocrem Lunæ descriptam tempore CP, exprimi per aream YEIV, & ejus valorem esse $mlv+mrv$, dum area verè per Lunam descripta exprimetur per spatium mixtilineum CEIM; spatium CEIP est mlv, spatium verò CPM, est ad aream CPK ut $2m$ ad 1; tota area CTP est $\frac{rv}{2}$, spatium PKT est $\frac{y\times KT}{2}$, ergo area CPK est $\frac{rv-y\times KT}{2}$, est itaque spatium $CPM=mrv-my\times KT$ & tota area CEIM est $mlv+mrv-my\times KT$; Unde liquet differentiam inter aream per velocitatem mediocrem descriptam & aream reverâ descriptam esse $my\times KT$, quâ deficit area reverâ descripta, ab eâ quæ per mediocrem motum percursa censetur.

Hinc 1°. liquet variationem debere subtrahi ex motu medio à quadraturâ ad syzygiam, illam evanescere in syzygia A, quia illic $my\times KT=0$, à syzygiâ variationem addi debere motui medio, ut patet ex figuræ continuatione.

2°. Ut

DE MUNDI SYSTEMATE.





a 13. 2°. Ut quantitas $mlc+mrc$ est ad Rectangulum $yK \times TK$, ita est quadrans circuli CPAT ad aream quæ (propter variationem) detrahenda est ex areâ CTP motu mediocri descriptâ sive, quoniam CPAT est dimidium facti radii in arcum CPA, & ea area detrahenda est etiam dimidium facti radii in arcum variationis, erit etiam ut $mlc+mrc$ ad $my \times TK$ ita arcus quadrantalis CPA sive c ad arcum variationis qui itaque erit $\frac{y \times TK}{l+r}$ sive $\frac{PK \times TK}{l+r}$.

3°. Quoniam quantitates $lc+rc$, & arcus quadrantalis CPA sunt quantitates constantes, manifestum est quod variationes in omnibus punctis P, sunt ut $PK \times TK$, sive ut factum sinus arcus CP in ejus Cosinum.

4°. Rectangulum $TK \times PK$ est maximum ubi punctum P est in octante, quod demonstratur eo modo quem in notâ 111. præcedente videre licet, hinc variatio maxima, est in octantibus, unde fluit hoc Paradoxum, ubi vis EL maxima est, illic maximè retardatur Luna respectu motus sui medii.

5°. *Si variatio maxima mutetur, augeri debet vel minui sinus ille versus, qui velocitatem genitam in* singulis punctis exprimit *in eâdem ratione;* Nam velocitas quæ generatur exprimitur per aream CKFG (vide figuram textus) in octantibus autem punctum F coincidit cum puncto P, & area CKFG illic evadit æqualis areæ PKT, ergo velocitas in octantibus genita est ut TK per PK, sed area quæ variationem illic exprimit est etiam ut TK per PK, (per hujusce notæ corol. 3.) ergo velocitas in octantibus est ut ipsa variatio in octantibus, sed velocitas in octanti-

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario lunæ invenire ipsius distantiam à terrâ.

(y) Area, quam luna radio ad terram ducto singulis temporis momentis describit, est ut motus horarius lunæ & quadratum distantiæ lunæ à terrâ conjunctim; & propterea distantia lunæ à terrâ est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione areæ directè & subduplicatâ ratione motus horarii inversè. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciprocè ut ipsius distantiâ à terrâ. (z) Tentent astronomi quam probè hæc regula cum phænomenis congruat.

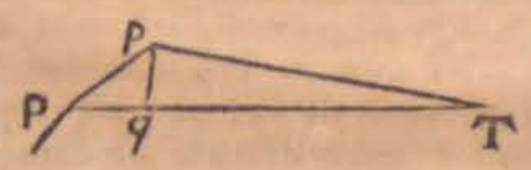
Corol. 2. (a) Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs ex phænomenis quàm antehac definiri potest.

PRO-

octantibus est ad velocitatem in quovis alio puncto in ratione datâ Radii ad sinum versum duplicatæ distantiæ ejus dati puncti à quadraturâ proximâ, ergo hæc velocitas crescit ut velocitas in octantibus ideoque etiam ut variatio maxima, *ergo sinus ille versus* illi velocitati proportionalis debet augeri vel minui in eâdem ratione.

Verum ex actione TM aliam variationis portionem oriri ostenditur Prop. XXIX., illam autem portionem etiam futuram ut TK×PK per not. 114. mox adjiciendam constabit, ergo tota variatio erit ut TK×PK, sive, in octantibus, ut velocitas, quare manet hujus Corollarii veritas si agatur de totâ variatione.

(y) 113. *Area quam Luna singulis momentis describit est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiæ Lunæ à terrâ.* Designet TPp aream descriptam à Lunâ quovis



tempusculo, sitque Pp arcus curvæ cujuslibet; centro T radio Tp describatur arcus circularis Pq qui pro rectâ perpendiculari in lineam TP assumi potest ideoque area à Lunâ descripta erit ut TP×pq, gradus autem, aut minuta in arcu pq contenta mensurabunt motum angularem Lunæ dato tempore qui æqualis est motui horario Lunæ, ideoque longitudo absoluta ejus arcus pq erit ut ejus radius TP & motus horarius Lunæ conjunctim hinc area TP×pq erit ut TP² & motus horarius Lunæ conjunctim. 113.

(z) * *Tentent Astronomi.* Observando nempe motum horarium Lunæ in variis temporibus ejus Periodi & simul angulum inter Solem & Lunam interceptum ut inde habeatur ejus distantia PTC à quadraturâ proximâ C, inde enim poterunt colligi numeri proportionales distantiis PT Lunæ à Terrâ, nam, per præced. Prop. area à Lunâ descripta est ut summa numeri 219.46 &| sinus versi dupli anguli PTC quæ si dividatur per motum horarium qui observatione obtinetur, radix quadrata ejus quotientis erit ut distantiæ PT, & inversè ut Lunæ Diametri apparentes; Quare si hi etiam observati fuerint, collatio observationum cum numeris sic inventis Regulam Newtonianam illustrabit.

(a) * *Hinc etiam orbis Lunaris accuratiùs quam antehac definiri potest.* Orbis

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA IX.

Invenire diametros orbis in quo luna, ſine eccentricitate, moveri deberet.

Curvatura trajectoriæ, quam mobile, ſi ſecundum trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, deſcribit, eſt ut attractio directè & quadratum velocitatis inversè. ([b]) Curvaturas linearum pono eſſe inter ſe in ultimâ proportione ſinuum vel tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem lunæ in terram in ſyzygiis eſt exceſſus gravitatis ipſius in terram ſupra ([c]) vim ſolarem $2PK$ quâ gravitas acceleratrix lunæ in ſolem ſuperat gravitatem acceleratricem terræ in ſolem vel

2 I 3. bis Lunaris figura definiri poteſt per obſervationes Diametrorum apparentium Lunæ in datis angulis à puncto quodam fixo, ſicque cum diſtantiæ Lunæ ſint his Diametris apparentibus reciprocæ, longitudines diſtantiis Lunæ proportionales in lateribus eorum angulorum ſecari poſſunt & per eas extremitates duci poteſt curva orbi Lunari ſimilis: Sed obſervatio Diametri cujuſlibet corporis lucidi eſt nimis lubrica ut ſatis tuta eſſe poſſit hæc Methodus, facilius tutiuſque obſervabuntur motus horarius Lunæ ejuſque diſtantia à quadraturâ proxima, hinc itaque accuratius cognita ratione diſtantiarum Lunæ à terrâ in datis angulis accuratius definietur quam antehac orbis Lunaris.

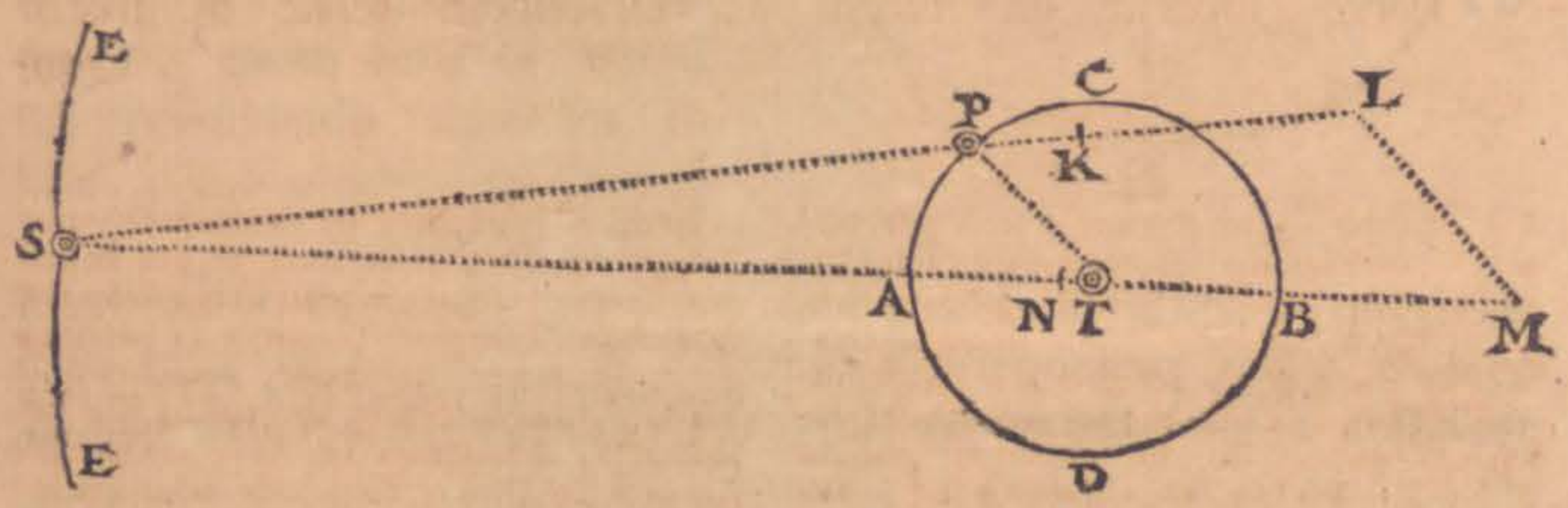
(b) *Curvaturas linearum* &c. Curvatura lineæ eſt ejus deflexio à Tangente, & æſtimari debet per Angulum inter Tangentem curvæ & curvam naſcentem interceptum; illi anguli ſunt ſemper quamminimi, ideoque, juxta principia Trigonometrica, ſuis ſinubus, ſuiſve Tangentibus ſunt proportionales, hinc Newtonus ponit curvaturas linearum eſſe in ultimâ proportione Tangentium angulorum contactus, ſi Tangentes illæ ad æquales radios referantur.

Radii illi æquales ad quos referuntur Tangentes illæ, deſcriberentur per continuationem velocitatis corporis uniformis ſecundum Tangentem curvæ, ideoque quantulicumque ſumantur tempora quibus deſcribentur erunt inversè ut illæ velocitates, Tangentes verò anguli contactus quæ ad illos radios æquales referuntur ſunt attractionis effectus ſiquidem ſupponitur illam attractionem agere ſecundum perpendiculum ad curvam, is verò attractionis effectus eſt ſemper ut ipſa vis & quadratum temporis per quod agere concipitur ſaltem ſi tempus exiguum intelligatur in quo attractio uniformiter ad modum gravitatis agere cenſenda ſit; Ergo illæ Tangentes ſunt ut attractio directe & quadratum velocitatis inversè, & in eâdem ratione ſunt anguli contactus ſive curvaturæ linearum.

(c) *Attractio lunæ in terram in ſyzygiis eſt exceſſus gravitatis ſupra vim ſolarem* $2PK$. Ex iis quæ in Propoſitione XXV. demonſtrata ſunt, liquet per actionem Solis, Lunam à terrâ diſtrahi ubicumque ſita ſit per vim TM, ad illam verò attrahi per vim LM, vis TM ſive PL eſt ſemper æqualis $3PK$ (vid. not. (u) ad Prop. XXV.) & eſt PL Coſinus anguli ATP qui

vel ab eâ ſuperatur. In (d) quadraturis autem attractio illa eſt ſumma gravitatis lunæ in terram & vis ſolaris KT, quâ luna in terram trahitur. Et hæ (e) attractiones, ſi $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, ſunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{CTq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quam proximè; ſeu ut $178725\,N \times CTq - 2000\,ATq \times CT$ & $178725\,N \times ATq + 1000\,CTq \times AT$. Nam ſi gravitas acceleratrix lunæ in terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in quadraturis eſt PT vel TK & lunam trahit in terram, erit 1000, & vis mediocris TM in ſyzygiis erit

LIBER TERTIUS. PROP. XXVIII. PROBL. IX.



qui Coſinus in ſyzygiis eſt æqualis Radio, ita ut PT ſive LM eo in caſu ſit æqualis PK, ergo Luna attrahitur ad terram in ſyzygiis per vim gravitatis & per vim LM ſive PK, & diſtrahitur ab ea per vim 2PK, ſupereſt itaque attractioni Lunæ in terram in ſyzygiis exceſſus gravitatis ſupra vim Solarem 2PK.

(d) *In quadraturis* autem evaneſcit vis TM, attractio ergo Lunæ in terram eſt ſumma ejus gravitatis & vis LM ſive CT ſive KT quia in quadraturis puncta K & C coincidunt.

(e) * *Et hæ attractiones ſi* $\frac{AT+CT}{2}$ *dicatur* N &c. Ex Propoſitione XXV conſtat vim gravitatis quâ Luna retinetur in orbe ſuo in mediocri ſua diſtantia N eſſe ad vim ſolarem mediocrem TM ut 178725 ad 1000, ideoque ad vim 2PK in ſyzygiis æqualem 2TM ut 178725 ad 2000, ſed diſtantiis AT, CT inæqualibus evadentibus variant iſtæ vires, eſt enim vis gravitatis in diſtantia N ad vim gravitatis in diſtantia AT ut $\frac{1}{N^2}$ ad $\frac{1}{AT^2}$ ideoque ſi prior exprimatur per 178725 erit poſterior $\frac{178725\,N^2}{AT^2}$, & ſimili ratiocinio vis gravitatis in diſtantia CT erit $\frac{178725N^2}{CT^2}$; Vires verò Solares 2PK, KT, creſcunt ut ipſæ diſtantiæ quare ſi vis 2PK in diſtantia N ſit 2000 in diſtantiâ AT erit $\frac{2000AT}{N}$, & ſi vis TM in quadraturis ſit 1000 in eâ diſtantiâ N, erit ea vis in diſ- 1132

DE MUNDI SYSTEMATE.

erit 3000; de quâ, ſi vis mediocris ML ſubducatur, manebit vis 2000 quâ luna in ſyzygiis diſtrahitur à terrâ, quamque jam ante nominavi $2PK$. Velocitas (f) autem lunæ in ſyzygiis A & B eſt ad ipſius velocitatem in quadraturis C & D, ut CT ad AT & momentum areæ quam luna radio ad terram ducto deſcribit in ſyzygiis ad momentum ejuſdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut $11073\,CT$ ad $10973\,AT$. (g) Sumatur hæc ratio bis inversè & ratio prior ſemel directè, & fiet curvatura orbis lunaris in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725\,ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000\,ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725\,ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000\,CTqq \times AT$, i. (h) e. ut $2151969\,AT \times CT \times N - 24081\,AT$ *cub.* ad $2191371\,AT \times CT \times N + 12261\,CT$ *cub.*

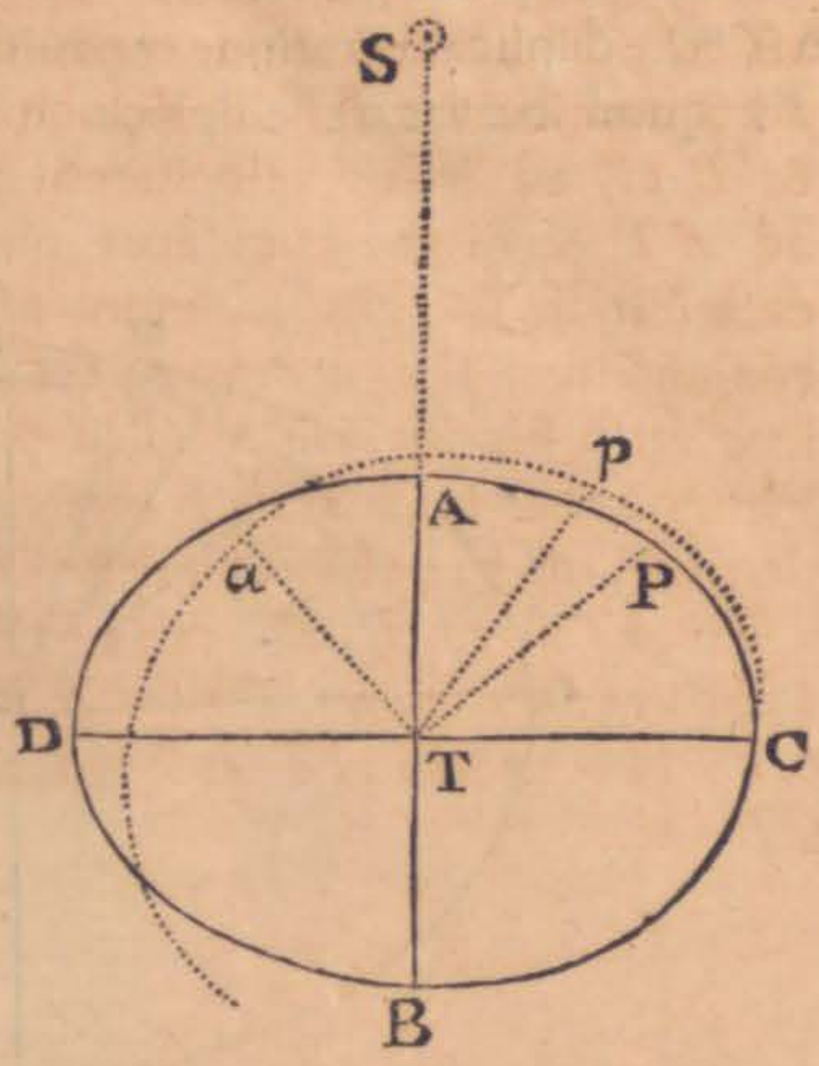
Quo-

113. tantia CT, $\frac{1000\,CT}{N}$; hinc attractio in ſyzygiis fit $\frac{178725\,N^2}{N} - \frac{2000\,AT}{N}$, & in quadraturis $\frac{178725\,N^2}{CT^2} + \frac{1000\,CT}{N}$, ſive omnia dividendo per N^2 eſt attractio in ſyzygiis $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000\,AT}{N^2 \times N}$ & in quadraturis $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000\,CT}{N^2 \times N}$; quoniam verò N eſt medium Arithmeticum inter AT & CT quorum differentia eſt exigua, pro medio Geometrico inter eas quantitates proximè ſumi poteſt, ita ut ſit $N^2 = AT \times CT$, quo valore ſubſtituto loco N^2 fit attractio in ſyzygiis $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \times N}$ & in quadraturis $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \times N}$ & reductione facta ad eoſdem denominatores fiunt iſtæ quantitates ut $178725\,N \times CT^2 - 2000\,AT^2 \times CT$ ad $178725\,N \times AT^2 + 1000\,CT^2 \times AT$.

(f) * *Velocitas Lunæ* &c. Quoniam in ſyzygiis & quadraturis arcus quos Luna deſcribit ſunt perpendiculares radiis AT, CT, areæ momenta dato tempore illic deſcripta ſunt ut illi arcus & Radii AT, CT conjunctim, ii arcus dato tempore deſcripti ſunt ut velocitates, ergo velocitates in ſyzygiis & quadraturis ſunt ut arearum deſcriptarum momenta & Radii inversè.

(g) * *Sumatur* ratio duplicata velocitatum *inversè & ratio* ſimplex attractionum *directè*, factâque multiplicatione ut fractiones deleantur *fiet curvatura orbis Lunaris in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis* &c.

(h) * *i. e. ut.* Dividendo per $AT \times CT$, numeros ſigno × conjunctos in ſe invicem multiplicando neglectiſque quatuor ultimis productorum cifris.



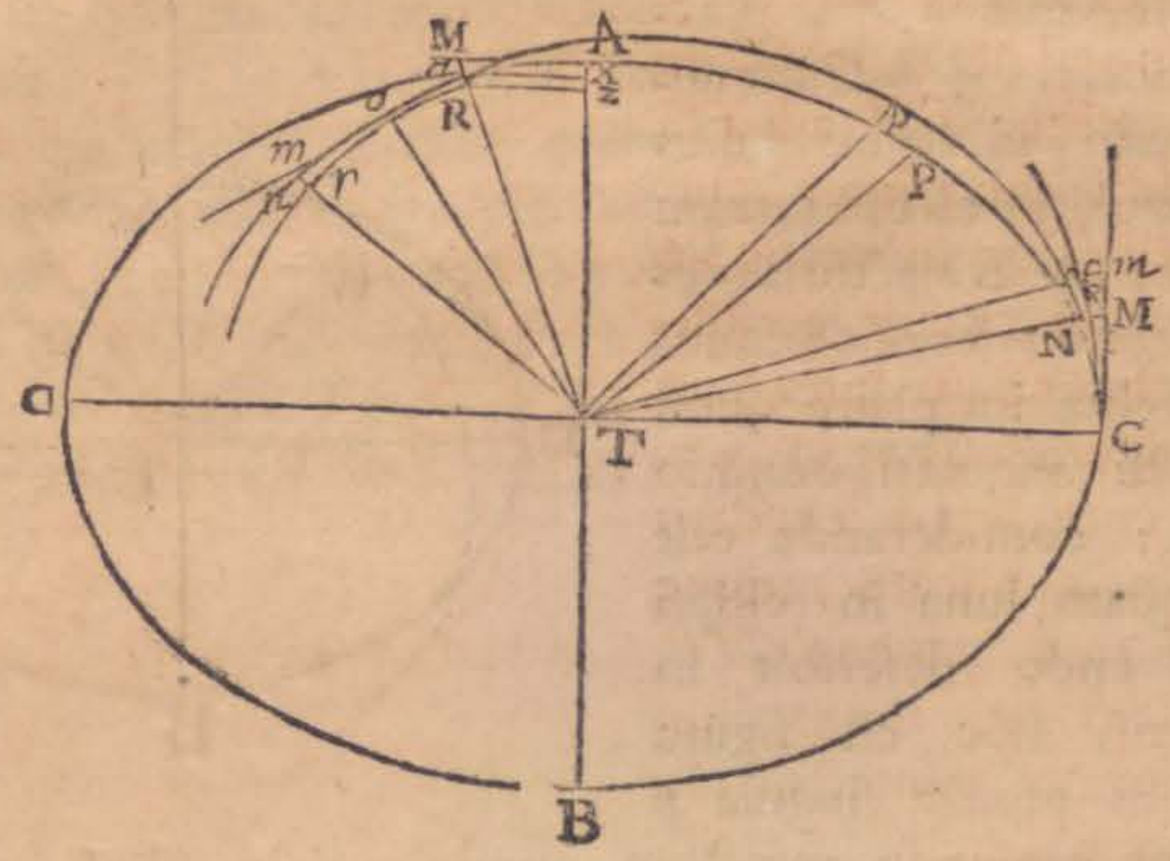
Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice assumamus ellipsin *DBCA*, in cujus centro *T* terra collocetur, & cujus axis major *DC* quadraturis, minor *AB* syzygiis interjaceat. (i) Cum autem planum ellipseos hujus motu angulari circa terram revolvatur, & trajectoria cujus curvaturam consideramus describi debet in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit figura, quam luna in ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est figura *Cpa*, cujus puncta singula *p* inveniuntur capiendo punctum quodvis *P* in ellipsi, quod locum lunæ repræsentet, & ducendo *Tp* æqualem *TP*, eâ lege ut angulus *PTp* æqualis sit motui apparenti solis à tempore quadraturæ *C* confecto; vel (quod (1) eodem ferè recidit) ut angulus *CTp* sit ad angulum *CTP* ut tempus revolutionis synodicæ lunaris ad tempus revolutionis periodicæ seu $29^d. 12^h. 44'$, ad $27^d. 7^h. 43'$. Capiatur igitur angulus *CTa* in eâdem ratione ad angulum rectum *CTA*; & sit longitudo *Ta* æqualis longitudini *TA*; & erit *a* apsis ima & *C* apsis summa orbis hujus *Cpa*. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis *Cpa* in vertice *a*, & curvaturam circuli centro *T* intervallo *TA* descripti, sit ad differentiam inter curva

(i) * *Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa terram revolvatur.* Axis enim minor hujus Ellipseos ad Solem perpetuò dirigitur, ideoque eodem motu quo sol circa terram revolvitur axis iste sive planum Ellipseos circa terram fertur. 1136

(1) * *Quod eodem ferè recidit* quia Lunæ motus medius ab ipsius motu vero non multùm discrepat.

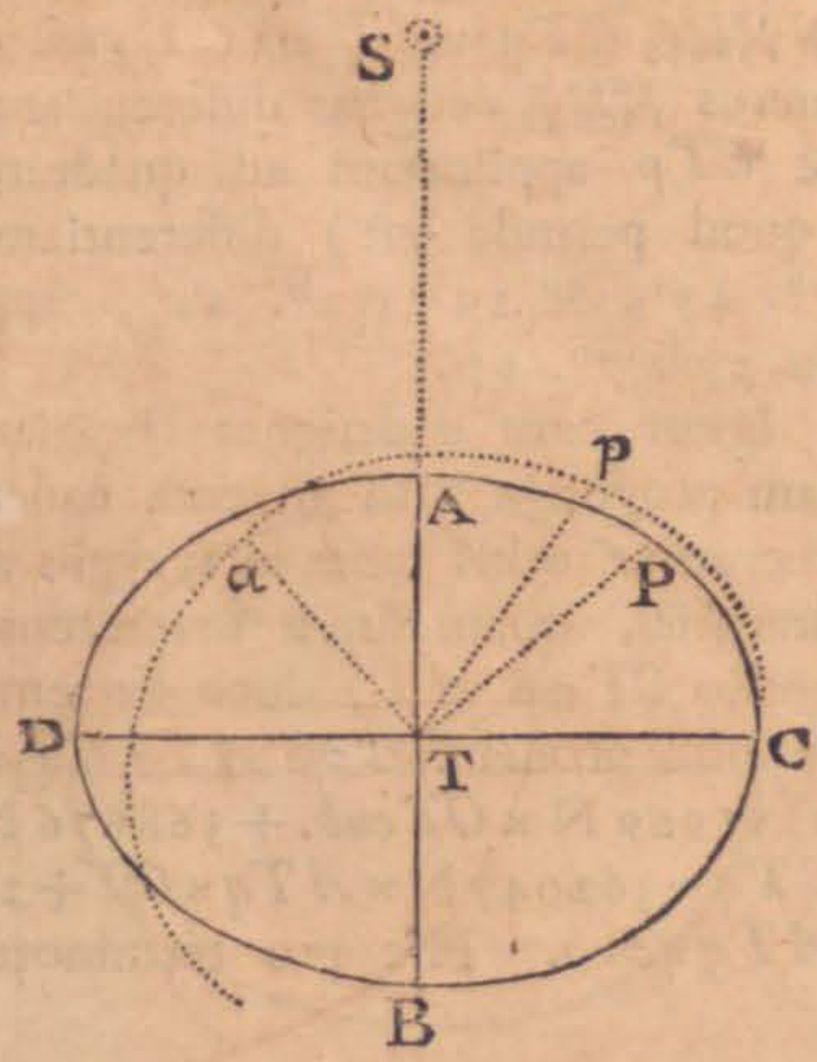
DE MUNDI SYSTEMATE.

vaturam ellipseos in vertice A & curvaturam ejusdem circuli; in (m) duplicatâ ratione anguli CTP ad angulum CTp; & (n) quod curvatura ellipseos in A sit ad curvaturam circuli illius,



213. (m) * *In duplicatâ ratione anguli CTP ad angulum CTp.* Centro T intervallo TA describatur circuli arcus ARar, sit arcus AR ad arcum ar in ratione datâ anguli CTP ad angulum CTp, ducantur Radii TR, Tr & producantur ita ut Tangentibus in A & a ductis occurrant in M & m, occurrant vero Ellipsi in N, & curvæ Cpa in n; erit NR = nr, quia ex constructione Tn sumitur æqualis TN, & radii TR, Tr sunt æquales; Evanescentibus autem arcubus ra & RA curvatura orbis Cpa in a erit ad curvaturam circuli radio TA descripti, ut mn ad mr, & ideo differentia inter curvaturam orbis Cpa in a & curvaturam circuli radio TA descripti est ad curvaturam ejusdem circuli ut mr − mn sive nr aut RN ad mr, simili modo patet quod curvatura circuli radio TA descripti est ad differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice A & curvaturam ejusdem circuli ut MR ad NR. Ideoque compositis rationibus differentia inter curvaturam orbis Cpa in a & curvaturam circuli radio TA descripti, est ad differentiam inter curvaturam Ellipseos in A & curvaturam ejusdem circuli ut MR ad mr, hoc est, (Cor. I. Lem. XI. Lib. I.) in ratione duplicatâ arcus RA ad arcum ra, sive (per const.) in ratione duplicata anguli CTP ad angulum CTp.

(n) * *Et quod curvatura Ellipseos in A &c.* Curvatura Ellipseos in A est ad curvaturam circuli radio TA descripti in ratione MN ad MR; Ducatur verò NX tangenti parallela, & axi occurrens in X, & pariter RZ, erit per proprietatem Ellipseos $AX \times XB$ ad NX^2 ut TA^2 ad TC, & per proprietatem circuli erit $AZ \times ZB = RZ^2$, sed quia sumuntur quantitates nascentes est $AX = MN$, $AZ = MR$, $XB = AB = ZB$ & $NX = RZ$, quibus valoribus suo loco substitutis prima proportio evadit $MN \times AB : MR \times AB :: TA^2 : TC^2$ ideoque est MN ad MR, sive curvatura Ellipseos ad curvaturam circuli in duplicatâ ratione TA ad TC.



lius, in duplicatâ ratione TA ad TC; & (°) curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro T intervallo TC descripti, ut TC ad TA; (P) hujus autem curvatura ad curvaturam ellipseos in C, in duplicatâ ratione TA ad TC; & (q) differentia inter curvaturam ellipseos in vertice C & curvaturam circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ Cpa in vertice C & curvaturam ejusdem circuli, in duplicatâ ratione anguli CTp ad angulum CTP. Quæ quidem rationes ex sinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His (r) autem inter se collatis, prodit curvatura figuræ

(o) * *Curvatura circuli* &c. Nam circulorum curvaturæ sunt inverse ut eorum radii (not. 121. lib. 1.).

(p) * *Hujus autem curvatura*, potest demonstrari eo ipso modo quo demonstravimus rationem curvaturæ Ellipseos in A ad curvaturam circuli radio TA descripti (not. n).

(q) * *Et differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice* C &c. Demonstratio ferè eadem est ac in notâ (m): Centro C intervallo TC describatur circuli arcus CRr, sit arcus CR ad arcum Cr, in ratione anguli CTP ad angulum CTp ducatur Tangens CMm, & Radii TRM, Trm quorum prior occurrat Ellipsi in N, posterior curvæ Cpa in n, erit NR = nr propter æquales TN, Tn per curvæ const. & Radios æquales TR, Tr; Evanescentibus arcubus CN, Cn, curvatura Ellipseos in C est ad curvaturam circuli radio TC descripti ut MN ad MR, ideoque curvaturarum Ellipseos & circuli differentia est ad curvaturam circuli ut RN ad MR, simili modo curvatura circuli est ad curvaturam orbis Cpa ut mr ad mn, ideoque curvatura circuli ad differentiam curvaturarum orbis Cpa & circuli ut mr ad rn: itaque compositis rationibus erit curvaturarum Ellipseos & circuli differentia ad curvaturarum orbis Cpa & circuli differentiam ut mr ad MR hoc est in ratione duplicata arcus rC ad arcum RC, sive in ratione duplicatâ anguli CTp ad angulum CTP. 113.

(r) *His autem inter se collatis* &c. Ut pateat ordo quo istæ rationes componuntur, dicatur s tempus revolutionis Synodicæ, & t tempus revolutionis Periodicæ, eritque angulus CTP ad angulum CTp ut t ad s.

DE MUNDI SYSTEMATE.

guræ $C\,p\,a$ in a ad ipsius curvaturam in C, ut AT *cub.* $+\frac{16824}{100000}\,CTq\times AT$ ad CT *cub.* $+\frac{16824}{100000}\,ATq+CT$. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ designat differentiam quadratorum angulorum CTP & CTp applicatam ad quadratum anguli minoris CTP, seu (quod perinde est) differentiam quadratorum temporum $27^d.\ 7^h.\ 43'$, & $29^d.\ 12^h.\ 44'$, applicatam ad quadratum temporis $27^d.\ 7^h.\ 43'$.

Igitur cum a designet syzygiam lunæ, & C ipsius quadraturam proportio jam inventa eadem esse debet cum proportione curvaturæ orbis lunæ in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CT ad AT, duco extrema & media in se invicem. Et termini prodeuntes ad $AT\times CT$ applicati, fiunt $2062{,}79\,CTqq-2151969\,N\times CT$ *cub.* $+368676\,N\times AT\times CTq+36342\,ATq\times CTq-362047\,N\times ATq\times CT+2191371\,N\times AT$ *cub.* $+4051{,}4\,ATqq=0$. Hic pro terminorum AT & CT semisumma N scri-

113. (1) Differentia curvaturarum orbis C p a in a & circuli radio T A descripti, est ad differentiam curvaturarum Ellipseos in A & ejusdem circuli ut *t t* ad *s s* (not. m).

(2) Curvatura Ellipseos in A ad curvaturam circuli radio T A descripti ut TA^2 ad TC^2 (not. n).

(3) Hinc dividendo, differentia curvaturarum Ellipseos in A & circuli est ad curvaturam ejusdem circuli ut TC^2-TA^2 ad TC^2: & per compositionem $1^{æ}$. & $3^{æ}$. proportionis

(4) Est differentia curvaturarum orbis C p a in a & circuli radio T A descripti ad curvaturam ejusdem circuli ut $st\times\overline{TA^2-TC^2}$ ad $ss\times TC^2$.

(5) Hinc, convertendo curvatura orbis C p a in a ad curvaturam circuli radio T A descripti ut $ss\,TC^2-st\times\overline{TC^2-TA^2}$ ad $ss\times TC^2$.

(6) Curvatura circuli radio T A descripti, ad curvaturam circuli radio T C descripti ut T C ad T A.

(7) Curvatura circuli radio T C descripti ad curvaturam Ellipseos in C ut TA^2 ad TC^2.

(8) Hinc, convertendo curvatura circuli radio T C descripti ad differentiam curvaturarum ejus circuli & Ellipseos in C ut TA^2 ad TC^2-TA^2.

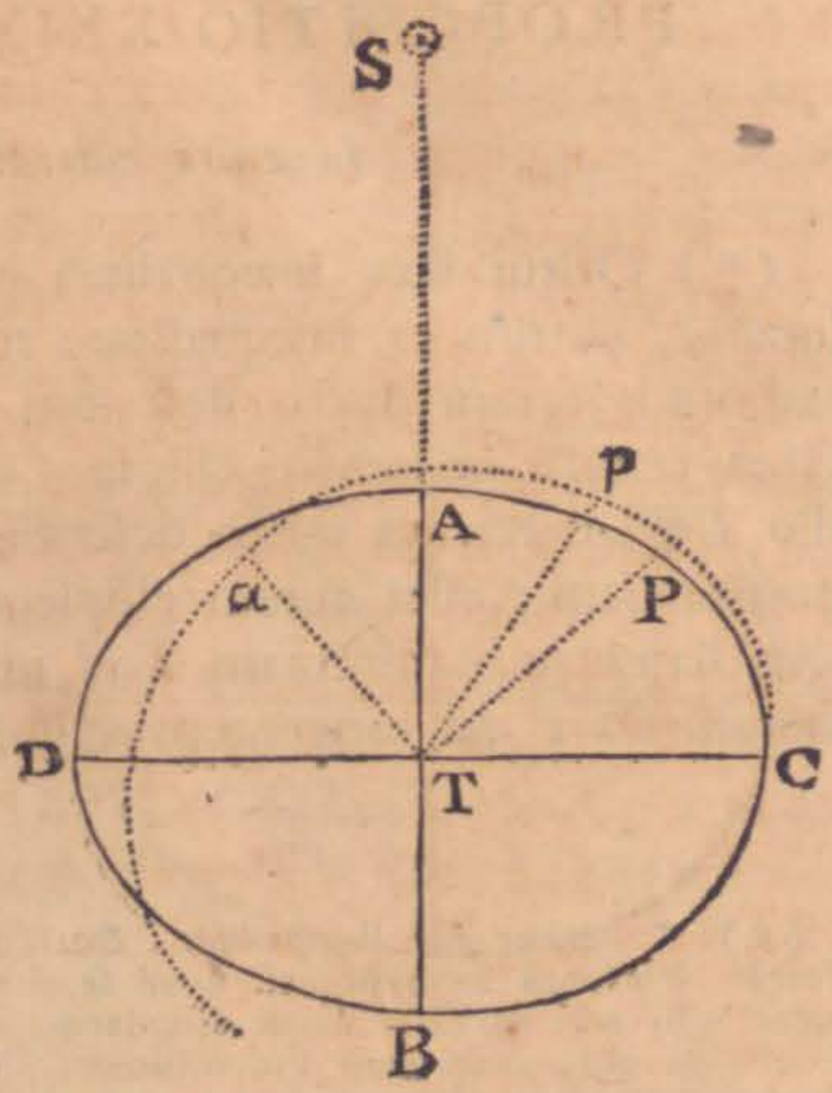
(9) Differentia curvaturarum ellipseos in C & ejus circuli radio T C descripti ad differentiam curvaturarum figuræ C p a in C & ejusdem circuli ut *s s* ad *t t*; & per compositionem $8^{æ}$., & $9^{æ}$. proportionis est

(10) Curvatura circuli radio TC descripti ad differentiam curvaturarum figuræ C p a in C & ejusdem circuli ut $TA^2\times s^2$ ad $tt\times\overline{TC^2-TA^2}$.

(11) Et convertendo curvatura circuli radio T C descripti ad curvaturam figuræ C p a in C ut $TA\times s^2$ ad $TA^2\times s^2+tt\times\overline{TC^2-TA^2}$.

Hinc tandem ex æquo & per compositionem $5^{æ}$. $6^{æ}$. & hujus $11^{æ}$. proportionis, est curvatura orbis C p a in a, ad ejus curvaturam in C ut $s^2\times TC^2-tt\times\overline{TC^2-TA^2}\times TC$

scribo 1 ; & pro eorundem semidifferentia ponendo x, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: (f) quibus in æquatione scriptis, & æquatione prodeunte resolutâ, obtinetur x æqualis 0,00719, & inde semidiameter CT fit 1,00719, & semidiameter AT 0,99281, qui numeri sunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quam proximè. (t) Est igitur distantia lunæ à terrâ in syzygiis ad ipsius distantiam in quadraturis (sepositâ scilicet eccentricitatis consideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.



PRO-

$\times TC \times TA^2 \times s^2$ ad $s^2 \times TC^2 \times TA \times (TA^2 \times s^2 + tt \times (TC^2 - TA^2))$ quæ divisa per $s^2 \times TC \times TA$ fiunt ut $s^2 - tt \times TC^2 \times TA + t^2 \times TA^3$ ad $s^2 - tt \times TA^2 \times TC + tt \times TC^3$, omnibusque divisis per tt & inverso terminorum ordine fiunt ut $TA^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TC^2 \times TA$ ad $TC^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TA^2 \times TC$. Q. E. I.

(f) *Quibus in æquatione scriptis.* Hæc æquatio fit $42456.19\ x^4 - 5082017.44\ x^3 + 148262.14\ x^2 - 12307251.44\ x + 88487.19 = 0$, sed cum x debeat esse quantitas exigua omnes terminos præter duos ultimos negligit, & ex æquatione $12307251.44\ x = 88487.19$ valorem obtinet $x = \frac{88487.19}{12307251.44} = 0.00719$.

(t) * *Est igitur distantia Lunæ à Terrâ &c.* Astronomis est cognitum, quod si distantia mediocris Lunæ à Terra incidat in tempus syzygiarum, ea distantia mediocris minor erit quam si incidat in tempus quadraturarum; Clar. Halleius ex observationibus Astronomicis deduxit distantiam mediocrem Lunæ à Terrâ in Syzygiis esse ad ipsius distantiam mediocrem in quadraturis ut $44\frac{1}{2}$ ad $45\frac{1}{2}$; quod si vel tantillùm propter observationum lubricitatem de hoc ultimo numero detrahatur facile accedit hæc ratio ad eam quam Newtonus deprehendit suo calculo.

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire variationem lunæ.

(u) Oritur hæc inæqualitas partim ex formâ ellipticâ orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam luna radio ad terram ducto describit. Si luna *P* in ellipsi *DBCA* circa terram in centro ellipseos quiescentem moveretur, & radio *TP* ad terram ducto describeret aream *CTP* tempori proportionalem; esset autem ellipseos semidiameter maxima *CT* ad semidiametrum minimam *TA* ut 70 ad 69: (x) foret tangens anguli *CTP* ad tangentem anguli motus medii à quadraturâ *C* com-

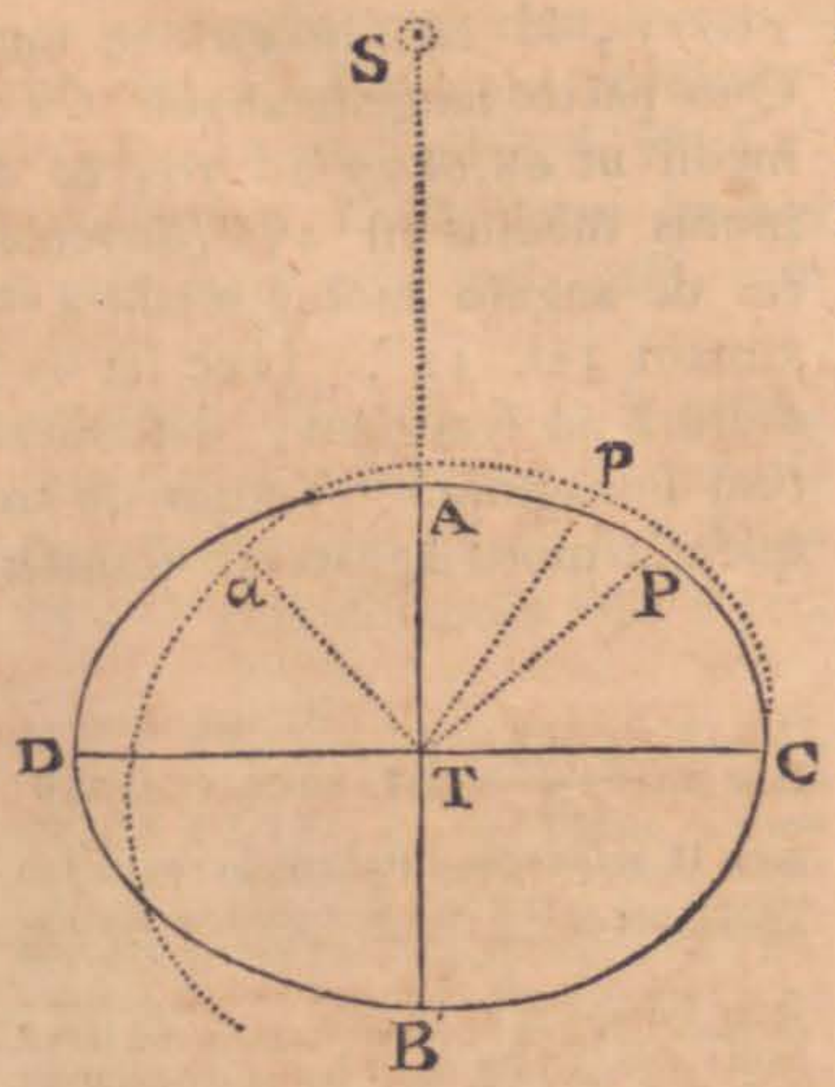
113. (u) * *Oritur hæc linæqualitas*, &c. Pergit Newtonus in hypothesi quod semotâ Solis actione orbis Lunæ circularis foret; in præcedenti verò Propositione, determinavit quamnam mutationem induceret illi circulo vis Solis, quâtenus ea ejus portio assumitur quæ ad centrum terræ spectat & cum gravitate Lunæ versus terram sociatur; itaque, sumpto novam figuram orbis Lunaris ad Ellipsim posse revocari, demonstrat in Prop. præcedente eam Ellipsim talem esse ut axis major sit ad minorem ut 70 ad 69; Motus autem Lunæ in tali Ellipsi debet fieri ita ut areæ descriptæ circa centrum terræ sint temporibus proportionales, quia vires quæ assumuntur ad id centrum diriguntur; cumque areæ illæ Ellipticæ, angulis in centro factis proportionales non sint, sequitur illos angulos in centro factos temporibus proportionales non esse, ideoque aliquid corrigendum esse motui medio Lunæ, in quo Anguli in centro terræ facti proportionales temporibus assumuntur, ut habeatur Lunæ motus Verus; & hæc correctio constituet partem variationis, quæ est, in hâc hypothesi, arcus interceptus inter locum medium Lunæ & locum ejus verum & hæc pars variationis *ex formâ ellipticâ* quam assumit *orbis Lunaris* per Solis actionem *oritur*.

Altera pars variationis oritur ex eâ actionis Solis parte quam consideravit Newtonus Prop. XXVI. & quâ fit ut ipsæ areæ à Lunâ descriptæ temporibus non sint proportionales, area itaque tempori proportionalis corrigenda est, idque detrahendum vel addendum quod debetur illi actioni, quodque per constructionem Probl. nostri n. 110. determinare facillimum erit, quam quidem constructionem non dedit Newtonus, quasi mediocribus uteretur quantitatibus ex æquo, ut aiunt, & bono assumptis, verum vix dubitandum quin ad hanc vel similem constructionem respexerit, ii enim non erant casus quibus hæc media sine demonstratione assumi possent à Viro summè accurato & perspicace.

(x) * *Foret Anguli Tangens.* Sit CADB ellipsis quam Luna describit, ita ut areæ circa centrum T sint temporibus proportionales, describatur circulus eodem centro, radio TC, in ejus circuli circumferentia moveatur Luna motu medio, sumaturque in eo circulo arcus CΠ tempori cuivis dato proportionalis, ducta ordinata ΠPK, dico quod area Elliptica TCP erit tempori proportionalis hoc est quod tota area Elliptica erit ad eum sectorem TCP ut est tempus Periodicum Lunæ ad tempus datum.

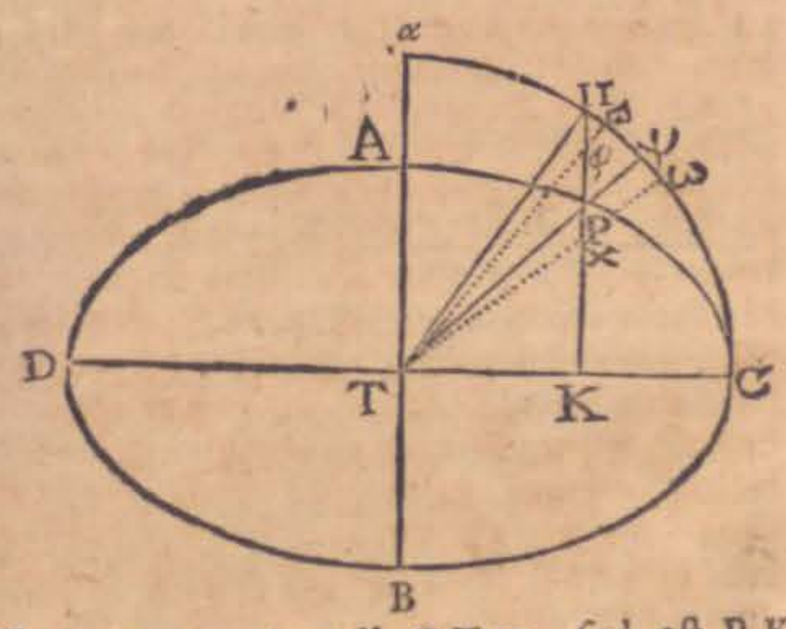
Est enim tota circuli circumferentia ad arcum CΠ, sive totus circulus ad aream CT

computati, ut ellipſeos ſemidiameter TA ad ejuſdem ſemidiametrum TC ſeu 69 ad 70. (y) Debet autem deſcriptio areæ CTP, in progreſſu lunæ à quadraturâ ad ſyzygiam, eâ ratione accelerari, ut ejus momentum in ſyzygiâ lunæ ſit ad ejus momentum in quadraturâ ut 11073 ad 10973, utque exceſſus momenti in loco quovis intermedio P ſupra momentum in quadraturâ ſit ut quadratum ſinus anguli CTP. Id quod ſatis accuratè fiet, ſi tangens anguli diminuatur in ſubduplicatâ ratione numeri 10973 ad numerum 11073,



CTΠ, ut tempus Periodicum totum ad tempus datum ex conſtructione, ſed ex notâ circuli & Ellipſeos proprietate, eſt tota area elliptica ad totam aream circuli ut TA ad CT, & pariter eſt ſector CTP ad CTΠ ut TA ad CT (nam Triangula Rectilinea TPK, TΠK ſunt ut baſes PK, ΠK; areæ curvilineæ CPK, CΠK ſunt etiam, ex notâ Ellipſeos & circuli proprietate ut PK ad ΠK, ergo toti ſectores CTP, CTΠ ſunt ut PK ad ΠK, quæ ſunt ut TA ad CT,) ergo tota area Elliptica eſt ad aream circuli ut ſector CTP ad CTΠ, & alternando, tota area Elliptica ad ſectorem CTP, ut eſt circuli area ad CTΠ, ſeu ut eſt Tempus Periodicum, ad tempus datum.

Si ergo area CTP ſit tempori proportionalis, motus Lunæ qui à terrâ videri debuiſſet ſub angulo CTΠ ſi Luna motu medio fuiſſet lata, videbitur ſub angulo CTP, & ſi linea TK pro radio aſſumatur erit KP tangens anguli CTP, &



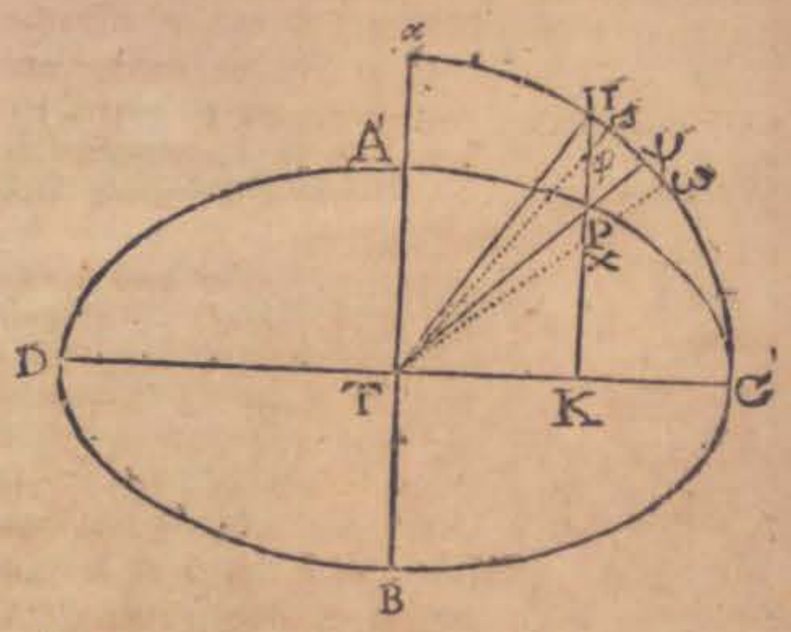
KΠ tangens Anguli CTΠ, ſed eſt PK ad ΠK ut TA ad CT, ergo *tangens anguli CTP eſt ad tangentem anguli motus medii ut TA ad TC ſeu 69 ad 70.* 11½

(y) * *Debet autem deſcriptio areæ* &c. Manentibus iis omnibus quæ in notis 112. & 113., expoſita fuerunt, arcus variationis erit $\frac{PK \times TK}{l+r}$ (per cor. 2. not. 113.) ſumatur ergo in arcu CΠ verſus C arcus

DE MUNDI SYSTEMATE.

11073, id eſt, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli *CTP* jam erit ad tangentem motus medii ut 68,6877 ad 70, & angulus *CTP* in octantibus, ubi motus medius eſt 45gr. invenietur 44gr. 27′. 28″. qui ſubductus de angulo motus medii 45gr. relinquit (z) variationem maximam 32′. 32″. Hæc ita ſe haberent ſi luna, pergendo à quadraturâ ad ſyzygiam, deſcriberet angulum *CTA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum terræ, quo ſol in conſequentia motu apparente transfertur, luna, priuſquam ſolem aſſequi-

114 $\Pi\varpi = \frac{PK \times TK}{l+r}$ ſive (quia in hâc figura Π reſpondet litteræ P in not. 110 aſſumptæ) $= \frac{\Pi K \times TK}{l+r}$, ducatur ϖT quæ ſecet lineam ΠK in ϕ Triangulum $\Pi\varpi\phi$ ſimile erit Triangulo $TK\phi$, ſive propter exiguitatem anguli $\Pi T\varpi$ Triangulum $\Pi\varpi\phi$ ſimile erit Triangulo $TK\Pi$, hinc erit TK ad $T\Pi$ (r) ſicut $\Pi\varpi$ $\left(\frac{\Pi K \times TK}{l+r}\right)$ ad $\Pi\phi$ quod erit itaque $\frac{r \times \Pi K}{l+r}$, ideoque erit $K\phi\,(=\Pi K - \Pi\phi)$ $= \frac{l+r \times \Pi K - r \times \Pi K}{l+r} = \frac{l \times \Pi K}{l+r}$, unde habetur hæc proportio $l+r : l :: \Pi K : \phi K$; ſi verò ſumatur TK pro radio, erit ΠK Tangens motus medii & ϕK Tangens motus medii imminuti hac variationis portione; Debet minui in eadem ratione quam proximè, Tangens PK motus Lunæ in Ellipſi ſpectatæ aut ſaltem in ratione paulo minore; cum itaque $l+r$, ſit medium Arithmeticum inter $l+2r$ ſive 11073 & l ſive 10973, & ratio medii Arithmetici ad minimum extremorum ſit paulo major quam medii Geometrici ad eum extremum, ſatis accuratè fieri dicit ſi ſumatur Tangens PK ad Tangentem anguli motus veri Lunæ ut medium Geometricum inter 11073 & 10973 ad 10973, ſive in ſubduplicatâ ratione 11073 ad 10973; quæ eſt æqualis rationi 69 ad 68.6877 cum ergo ſit ΠK ad PK ut 70 ad 69, & cum ſit PK ad Tangentem motus Lunæ ultimò correcti ut 69 ad 68.6877 erit ex æquo Tangens motus medii ad Tangentem motus veri ut 70 ad 68.6877. Q. E. D.



(z) 114. *Relinquit variationem maximam.* Ex Cor. 4. not. 113. arcum variationis quæ pendet ex inæqualitate momentorum areæ, maximum eſſe in octantibus conſtat; Eam autem variationis portionem quæ pendet ex formâ Elliptica orbis Lunaris etiam maximam eſſe in octantibus hoc modo patet, producatur TP in Ψ & cum arcus $\Pi\Psi$ vix excedat ſemigradum ubi maximus eſt pro recta ſumatur, erit Triangulus $\Pi\Psi P$ ſimilis Triangulo TKP, ſive $TK\Pi$ ideoque eſt $T\Pi$ ad TK ut ΠP ad $\Pi\Psi$ qui erit ergo ubivis æqualis $\frac{\Pi P \times TK}{T\Pi}$, ſed quoniam eſt ubivis 70 ad 69 ut ΠK ad PK, erit dividendo 70 ad 1 ut ΠK ad

quitur, describit angulum *CTa* angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis lunaris synodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id est, in ratione $29^d.\ 12^h.\ 44'.$ ad $27^d.\ 7^h.\ 43'.$ Et hoc pacto anguli omnes circa centrum *T* dilatantur in eâdem ratione, & variatio maxima quæ secus esset $32'.\ 32''$, jam aucta in eâdem ratione fit $35'.\ 10''$.

Hæc est ejus magnitudo in mediocri distantiâ solis à terrâ, (a) neglectis differentiis quæ à curvaturâ orbis magni majorique solis actione in lunam falcatam & novam quam in gibbosam & plenam, oriri possint. In (b) aliis distantiis solis à ter-

ad $II\,P$ ideoque est $II\,P = \frac{II\,K}{70}$ & arcus $II\,\Psi$ erit $\frac{II\,K \times T\,K}{70\,T\,II}$, jam autem demonstratum est nota 111. quod maximum hujus quantitatis $II\,K \times T\,K$ est in octantibus, ergo arcus $II\,\Psi$ sive ea variationis portio quæ pendet ex formâ Elliptică orbis Lunaris est maxima in Octantibus sicut & altera portio; ergo Variatio tota est maxima in Octantibus.

(a) * *Neglectis differentiis quæ à curvatura orbis magni oriri possint.* Hactenus suppositum est, lineam $D\,T\,C$ repræsentare orbis magni portionem, & fieri quadraturas in punctis D & C; quod quidem absolutè verum non est, quippe semi-Diameter orbis Lunaris sub Angulo 10 circiter minutorum à Sole videtur, unde arcus $D\,C$ est 20′ circiter & aliquam habet curvaturam, hinc revera utraque quadratura est circiter 20′ propior conjunctioni quam oppositioni, quæ consideratio hic neglecta est.

Majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in gibbosam & plenam, si vis Solis in punctum T exprimatur per $\frac{1}{S\,T^2}$ erit vis in Lunam novam & falcatam ut $\frac{1}{(S\,T - T\,A)^2}$ & vis in Lunam plenam & gibbosam ut $\frac{1}{(S\,T + T\,A)^2}$ revocentur omnia ad communem denominationem erit vis in punctum T ut $\overline{S\,T - 1\,A^2} \times \overline{S\,T + T\,A^2}$ sive $S\,T^4 - 2\,S\,T^2 \times T\,A^2 + T\,A^4$, vis in Lunam novam $S\,T^4 + 2\,S\,T^3 \times T\,A + T\,A^2 \times S\,T^2$, vis in Lunam plenam $S\,T^4 - 2\,S\,T^3 \times T\,A + S\,T^2 \times T\,A^2$; Hinc excessus vis in Lunam novam supra vim mediocrem est $2\,S\,T^3 \times T\,A + 3\,S\,T^2 \times T\,A^2 - T\,A^4$; Et excessus vis mediocris supra vim in Lunam plenam est $2\,S\,T^3 \times T\,A - 3\,S\,T^2 \times T\,A^2 + T\,A^4$, qui quidem excessus differunt, & prior posteriorem superat quantitate $6\,S\,T^2 \times T\,A^2 - 2\,T\,A^4$; Verum propter magnitudinem lineæ S T præ linea T A, evanescit ferè hæc excessuum differentia respectu quantitatis communis $2\,S\,T^3 \times T\,A$, ideo pro æqualibus fuerunt habiti. 114.

(b) *In aliis distantiis Solis à Terrâ.* Duplex est causa quæ errores ab actione Solis pendentes mutet, primum vis solis mediocris mutatur inverse ut quadrata distantiarum & præterea cum Sol celerior vel tardior fiat prout propior est vel remotior à Terra, Luna é converso ipsum tardius vel celerius attingit, unde mensis Synodicus in Perigæo Solis fit longior quam idem mensis Synodicus in Apogæo; ex hac ultimâ causâ, si sola consideretur, fiet ut variatio maxima in ratione duplicatâ temporis revolutionis Synodicæ crescat, quod quidem separatim demonstrandum de utrâque variationis portione $II\,\Psi$ & $\Psi\,\infty$; Et quidem in octantibus cum Triangulum $II\,P\,\Psi$ sit Rectangulum Isosceles, est $II\,\Psi = \frac{II\,P}{\sqrt{2}}$, est verò $II\,P = \frac{\alpha\,A}{\sqrt{2}}$, nam ex naturâ circuli & Ellipseos

DE MUNDI SYSTEMATE.

râ, variatio maxima eſt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione temporis revolutionis ſynodicæ lunaris (dato anni tempore) directè, & triplicatâ ratione diſtantiæ ſolis à terrâ inversè. (c) Ideoque in apogæo ſolis, variatio maxima eſt $33'.\ 14''$, & in ejus perigæo $37'.\ 11''$, ſi modo eccentricitas ſolis ſit ad orbis magni ſemidiametrum tranſverſam ut $16\frac{15}{16}$ ad 1000.

Hac-

114. eſt αT ad AT ut IIK ad PK & dividendo αT ad αA ut IIK ad IIP $= \frac{\alpha A \times IIK}{\alpha T}$ ſed in octante eſt IIK $= \frac{\alpha T}{\sqrt{2}}$ ergo IIP $= \frac{\alpha A \times \alpha T}{\alpha T \sqrt{2}} = \frac{\alpha A}{\sqrt{2}}$ hinc II$\Psi = \frac{\alpha A}{2}$, eſt autem αA effectus virium Solis Lunam retrahentium à ſuo circulo, durante quartâ parte temporis revolutionis Synodicæ Lunæ, ergo ſi id tempus creſcat manentibus iiſdem viribus ſimiliter agentibus, effectus totus αA erit ut quadratum temporis per quod illæ vires egerunt per Cor. I. Lem. X. lib. I. ideoque IIΨ creſcit ſecundum quadrata temporum.

Idem demonſtrabitur de portione variationis $\Psi\omega$ quæ pendet ex acceleratione deſcriptionis areæ; Quippe manentibus omnibus ut in not. 111. & fig. 3ª. recta CA majus tempus deſignare cenſeatur, & partes Pp tempuſcula in eadem ratione longiora, lineæ PM deſignant velocitates genitas durante momento Pp, ſi ergo id momentum creſcat viribus generatricibus iiſdem manentibus, velocitates genitæ PM creſcent in proportione temporis, & quia Pp Mm deſignat ſpatiolum illâ velocitate percurſum, creſcuntque & PM & Pp in ratione temporum, creſcet PM m p in ratione duplicatâ temporum, cumque ſingula elementa curvæ in eâ proportione creſcant, & tota area CAH, & ei æqualis CAXY, ejuſque dimidia CQZY in eâdem proportione creſcent; ex quâ ſi detrahatur CQZ quod in eâdem proportione crevit, reliquum CZY quod areæ variationi maximæ ΨTω eſt proportionale creſcet etiam in eâdem duplicatâ ratione temporum, manente itaque radio Tω, ipſe arcus $\Psi\omega$ creſcet in duplicatâ ratione temporum.

Hinc cum IIΨ creſcat in duplicatâ ratione temporum tum etiam $\Psi\omega$, ſumma itaque IIω ſive tota variatio creſcet in eâdem duplicatâ temporum ratione.

Dico præterea quod ſi ſpectetur imminutio actionis Solis propter auctam diſtantiam variatio maxima decreſcet in ratione triplicatâ diſtantiarum, nam deſignetur vis mediocris Solis per $\frac{1}{SK^2}$, eſt ex conſtructione SK ad TM ut vis Solis ſive ut $\frac{1}{SK^2}$ ad vim TM ergo ea vis TM eſt ut $\frac{TM}{SK^3}$ manente ergo TM quæ eſt æqualis PT; vis TM ex actione Solis pendens decreſcit ut diſtantiarum cubus augetur, Manente ergo tempore, ſed vi mutatâ ſecundum rationem triplicatam, eadem ferè ratione ac prius oſtendetur utramque variationis maximæ partem II$\Psi\omega$ & $\Psi\omega$ forè inversè in ratione triplicatâ diſtantiarum Solis; *Hinc que in variis Solis à terrâ diſtantiis quæ in* datis anni temporibus recurrunt *variationes maximæ erunt inter ſe in ratione duplicatâ durationis menſis Synodici eo tempore, & triplicatâ inversè diſtantiæ ſolis à terrâ.*

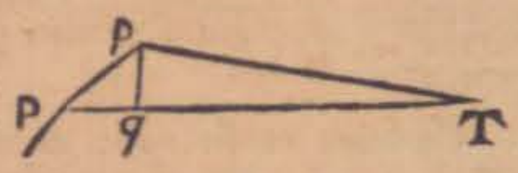
(c) * *Ideoque* &c. Ex his & præcedentibus facile intelligitur Newtoni calculus, ſi prius hæc Principia revocentur.

1°. Si dicatur *m* diſtantia mediocris Solis, ſit $\pm e$ exceſſus vel defectus ejus diſtantiæ à mediocri diſtantiâ in loco quovis dato; denique dicatur *s* ſolis motus horarius mediocris, dico quod ſolis motus

Hactenus variationem inveſtigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique luna in octantibus ſuis ſemper eſt in mediocri ſuâ diſtantiâ à terrâ. Si luna propter eccentricitatem ſuam, magis vel minus diſtat à terrâ quam ſi locaretur in hoc orbe, variatio

tus horarius in loco quovis ſuæ orbitæ exprimetur per quantitatem $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e^2}}$.

Sit enim T Terra; P, Sol; T P p area horæ tempore deſcripta, ejus areæ valor ubivis erit ſemper idem, ſit p q arcus ra-



dio T p deſcriptus, qui ob exiguitatem ſumi poteſt ut ipſum perpendiculum in baſim P T demiſſum, ideoque ob areas ubivis æquales is arcus erit ubivis inverſe ut baſis T P, ſed numerus graduum ejus arcus p q eſt directe ut is ipſe arcus & inverſe ut ejus radius T p ſive T P, ergo numerus graduum ejus arcus p q eſt in ratione duplicatâ inverſa radii T P, is verò numerus exprimit motum Solis horarium, ergo Solis motus horarius, eſt inverſe ut quadratum radii T P; cum ergo in diſtantiâ mediocri eſt T P $= m$, in quâvis aliâ diſtantiâ eſt T P $= m \pm e$, ergo eſt $\frac{1}{m^2}$ ad $\frac{1}{(m \pm e)^2}$ ut s ad $\frac{s m^2}{(m \pm e)^2}$ quod exprimit motum horarium Solis in quâvis diſtantiâ T P.

In diſtantiâ mediocri evaneſcit quantitas $\pm e$ ideoque motus horarius illic evadit $\frac{m^2 s}{m^2} = s$ ſecundum hypotheſim.

2°. Poſito Lunam ſemper moveri motu ſuo horario mediocri, qui dicatur l, ſitque p ejus tempus Periodicum inter fixas, Duratio menſis Synodici quovis in loco orbitæ telluris circa Solem, exprimetur per quantitatem $\frac{\overline{m \pm e^2} \times l p}{\overline{m \pm e^2} l - m^2 s}$ ſive diviſâ hâc quantitate per conſtantem $\frac{l p}{m^2}$ fiet menſis Synodicus ut $\frac{\overline{m \pm e^2}}{l - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ 114.

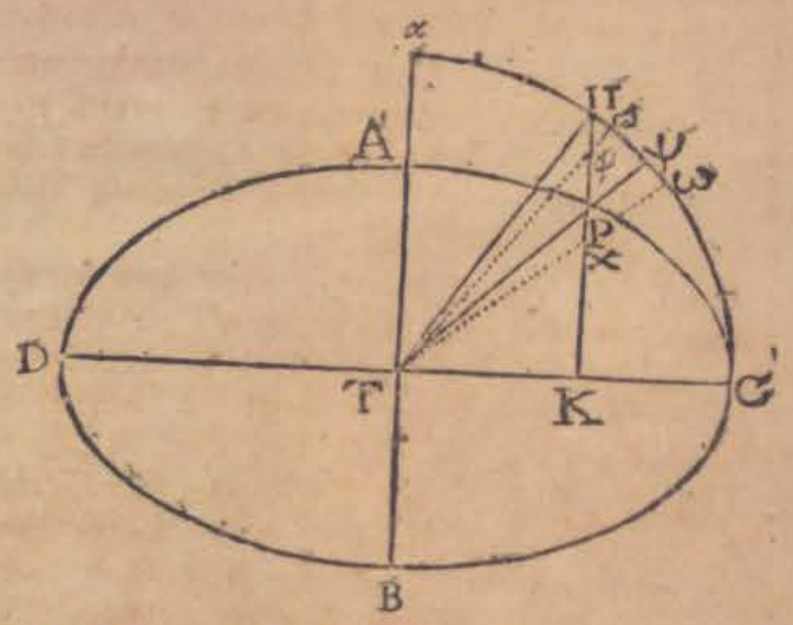
Nam dicatur x numerus graduum quem Sol emetitur durante quovis menſe Synodico, numerus graduum quem Luna eodem tempore emetietur erit $360 + x$, erit ergo motus horarius Lunæ l ad motum horarium Solis $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e^2}}$ ut $360 + x$ ad x, & dividendo $m^2 l \pm 2mel + e^2 - m^2 s$ ad $m^2 s$ ut 360 ad x, itaque erit $x = \frac{360 m^2 s}{m^2 l \pm 2mel + e^2 l - m^2 s}$. Hinc cùm Lunâ percurrat 360 gr. tempore p, abſolvet 360gr. $+ \frac{360 m^2 s}{m^2 l \pm 2mel + e^2 - m^2 s}$ tempore $p + \frac{m^2 s p}{m^2 l \pm 2mel + e^2 l - m^2 s}$ ſive reductione facta, tempore $\frac{m^2 l p \pm 2mel p + e^2 l p - m^2 s p + m^2 s p}{m^2 \pm 2mel + e^2 l - m^2 s}$ ſive $\frac{\overline{m \pm e^2}}{l - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}} \times \frac{l p}{m^2}$ quæ quantitas diviſa per conſtantem $\frac{l p}{m^2}$, relinquit quantitatem $\frac{\overline{m \pm e^2}}{l - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ quæ erit ut duratio menſis Synodici in diſtantiâ quavis $m \pm e$. Q. E. D.

In diſtantia mediocri evaneſcente quantitate $\pm e$ menſis Synodicus erit $\frac{m^2 l p}{m^2 l - m^2 s} = \frac{l p}{l - s}$ & erit ad menſes Synodicos in aliis

DE MUNDI SYSTEMATE.

11073, id est, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli *CTP* jam erit ad tangentem motus medii ut 68,6877 ad 70, & angulus *CTP* in octantibus, ubi motus medius est 45gr. invenietur 44gr. 27′. 28″. qui subductus de angulo motus medii 45gr. relinquit (z) variationem maximam 32′. 32″. Hæc ita se haberent si luna, pergendo à quadraturâ ad syzygiam, describeret angulum *CTA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum terræ, quo sol in consequentia motu apparente transfertur, luna, priusquam solem assequi-

114 $\Pi\varpi = \frac{PK \times TK}{l+r}$ sive (quia in hâc figura Π respondet litteræ P in not. 110 assumptæ) $= \frac{\Pi K \times TK}{l+r}$, ducatur ϖT quæ secet lineam ΠK in φ Triangulum $\Pi\varpi\varphi$ simile erit Triangulo TKφ, sive propter exiguitatem anguli $\Pi T\varpi$ Triangulum $\Pi\varpi\varphi$ simile erit Triangulo TKΠ, hinc erit TK ad TΠ (*r*) sicut $\Pi\varpi$ $\left(\frac{\Pi K \times TK}{l+r}\right)$ ad Πφ quod erit itaque $\frac{r \times \Pi K}{l+r}$, ideoque erit Kφ $(= \Pi K - \Pi\varphi)$ $= \frac{l+r \times \Pi K - r \times \Pi K}{l+r} = \frac{l \times \Pi K}{l+r}$, unde habetur hæc proportio $l+r : l :: \Pi K : \varphi K$; si verò sumatur TK pro radio, erit ΠK Tangens motus medii & φK Tangens motus medii imminuti hac variationis portione; Debet minui in eadem ratione quam proximè, Tangens PK motus Lunæ in Ellipsi spectatæ aut saltem in ratione paulo minore; cum itaque $l+r$, sit medium Arithmeticum inter $l+2r$ sive 11073 & l sive 10973, & ratio medii Arithmetici ad minimum extremorum sit paulo major quam medii Geometrici ad eum extremum, satis accurate fieri dicit si sumatur Tangens PK ad Tangentem anguli motus veri Lunæ ut medium Geometricum inter 11073 & 10973 ad 10973, sive in subduplicatâ ratione 11073 ad 10973; quæ est æqualis rationi 69 ad 68,6877 cum ergo sit ΠK ad PK ut 70 ad 69, & cum sit PK ad Tangentem motus Lunæ ultimò correcti ut 69 ad 68,6877 erit ex æquo Tangens motus medii ad Tangentem motus veri ut 70 ad 68,6877. Q. E. D.



(z) 114. *Relinquit variationem maximam.* Ex Cor. 4. not. 113. arcum variationis quæ pendet ex inæqualitate momentorum areæ, maximum esse in octantibus constat; Eam autem variationis portionem quæ pendet ex formâ Elliptica orbis Lunaris etiam maximam esse in octantibus hoc modo patet, producatur TP in Ψ & cum arcus ΠΨ vix excedat semigradum ubi maximus est pro recta sumatur, erit Triangulus ΠΨP similis Triangulo TKP, sive TKΠ ideoque est TΠ ad TK ut ΠP ad ΠΨ qui erit ergo ubivis æqualis $\frac{\Pi P \times TK}{T\Pi}$, sed quoniam est ubivis 70 ad 69 ut ΠK ad PK, erit dividendo 70 ad 1 ut ΠK ad

quitur, describit angulum *CTa* angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis lunaris synodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id est, in ratione $29^d.\ 12^h.\ 44'.$ ad $27^d.\ 7^h.\ 43'.$ Et hoc pacto anguli omnes circa centrum *T* dilatantur in eâdem ratione, & variatio maxima quæ secus esset $32'.\ 32''$, jam aucta in eâdem ratione fit $35'.\ 10''$.

Hæc est ejus magnitudo in mediocri distantiâ solis à terrâ, (a) neglectis differentiis quæ à curvaturâ orbis magni majorique solis actione in lunam falcatam & novam quam in gibbosam & plenam, oriri possint. In (b) aliis distantiis solis à ter-

ad ΠP ideoque est $\Pi P = \frac{\Pi K}{70}$ & arcus $\Pi \Psi$ erit $\frac{\Pi K \times TK}{70 T \Pi}$, jam autem demonstratum est nota 111. quod maximum hujus quantitatis $\Pi K \times TK$ est in octantibus, ergo arcus $\Pi \Psi$ sive ea variationis portio quæ pendet ex formâ Elliptică orbis Lunaris est maxima in Octantibus sicut & altera portio; ergo Variatio tota est maxima in Octantibus.

(a) * *Neglectis differentiis quæ à curvatura orbis magni oriri possint.* Hactenus suppositum est, lineam DTC repræsentare orbis magni portionem, & fieri quadraturas in punctis D & C; quod quidem absolutè verum non est, quippe semi-Diameter orbis Lunaris sub Angulo 10 circiter minutorum à Sole videtur, unde arcus DC est 20′ circiter & aliquam habet curvaturam, hinc revera utraque quadratura est circiter 20′ propior conjunctioni quam oppositioni, quæ consideratio hic neglecta est.

Majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in gibbosam & plenam, si vis Solis in punctum T exprimatur per $\frac{1}{ST^2}$ erit vis in Lunam novam & falcatam ut $\frac{1}{(ST-TA)^2}$ & vis in Lunam plenam & gibbosam ut $\frac{1}{(ST+TA)^2}$ revocentur omnia ad communem denominationem erit vis in punctum T ut $\overline{ST-TA^2} \times \overline{ST+TA^2}$ sive $ST^4 - 2ST^2 \times TA^2 + TA^4$, vis in Lunam novam $ST^4 + 2ST^3 \times TA + TA^2 \times ST^2$, vis in Lunam plenam $ST^4 - 2ST^3 \times TA + ST^2 \times TA^2$; Hinc excessus vis in Lunam novam supra vim mediocrem est $2ST^3 \times TA + 3ST^2 \times TA^2 - TA^4$; Et excessus vis mediocris supra vim in Lunam plenam est $2ST^3 \times TA - 3ST^2 \times TA^2 + TA^4$, qui quidem excessus differunt, & prior posteriorem superat quantitate $6ST^2 \times TA^2 - 2TA^4$; Verum propter magnitudinem lineæ ST præ linea TA, evanescit ferè hæc excessuum differentia respectu quantitatis communis $2ST^3 \times TA$, ideo pro æqualibus fuerunt habiti. 114.

(b) *In aliis distantiis Solis à Terrâ.* Duplex est causa quæ errores ab actione Solis pendentes mutet, primum vis solis mediocris mutatur inverse ut quadrata distantiarum & præterea cum Sol celerior vel tardior fiat prout propior est vel remotior à Terra, Luna é converso ipsum tardius vel celerius attingit, unde mensis Synodicus in Perigæo Solis fit longior quam idem mensis Synodicus in Apogæo; ex hac ultimâ causâ, si sola consideretur, fiet ut variatio maxima in ratione duplicatâ temporis revolutionis Synodicæ crescat, quod quidem separatim demonstrandum de utrâque variationis portione $\Pi\Psi$ & $\Psi\infty$; Et quidem in octantibus cum Triangulum $\Pi P \Psi$ sit Rectangulum Isosceles, est $\Pi\Psi = \frac{\Pi P}{\sqrt{2}}$, est verò $\Pi P = \frac{\propto A}{\sqrt{2}}$, nam ex naturâ circuli & Ellipseos

DE MUNDI SYSTEMATE.

râ, variatio maxima eſt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione temporis revolutionis ſynodicæ lunaris (dato anni tempore) directè, & triplicatâ ratione diſtantiæ ſolis à terrâ inversè. (c) Ideoque in apogæo ſolis, variatio maxima eſt $33'.\ 14''$, & in ejus perigæo $37'.\ 11''$, ſi modo eccentricitas ſolis ſit ad orbis magni ſemidiametrum tranſverſam ut $16\frac{15}{16}$ ad 1000.

Hac-

114. eſt αT ad AT ut IIK ad PK & dividendo αT ad αA ut IIK ad IIP $= \frac{\alpha A \times IIK}{\alpha T}$ ſed in octante eſt $IIK = \frac{\alpha T}{\sqrt{2}}$ ergo $IIP = \frac{\alpha A \times \alpha T}{\alpha T \sqrt{2}} = \frac{\alpha A}{\sqrt{2}}$ hinc $II\Psi = \frac{\alpha A}{2}$, eſt autem αA effectus virium Solis Lunam retrahentium à ſuo circulo, durante quartâ parte temporis revolutionis Synodicæ Lunæ, ergo ſi id tempus creſcat manentibus iiſdem viribus ſimiliter agentibus, effectus totus αA erit ut quadratum temporis per quod illæ vires egerunt per Cor. I. Lem. X. lib. I. ideoque $II\Psi$ creſcit ſecundum quadrata temporum.

Idem demonſtrabitur de portione variationis $\Psi\omega$ quæ pendet ex acceleratione deſcriptionis areæ; Quippe manentibus omnibus ut in not. 111. & fig. 3ª. recta CA majus tempus deſignare cenſeatur, & partes Pp tempuſcula in eadem ratione longiora, lineæ PM deſignant velocitates genitas durante momento Pp, ſi ergo id momentum creſcat viribus generatricibus iiſdem manentibus, velocitates genitæ PM creſcent in proportione temporis, & quia Pp Mm deſignat ſpatiolum illâ velocitate percurſum, creſcuntque & PM & Pp in ratione temporum, creſcet PM m p in ratione duplicatâ temporum, cumque ſingula elementa curvæ in eâ proportione creſcant, & tota area CAH, & ei æqualis CAXY, ejuſque dimidia CQZY in eâdem proportione creſcent; ex quâ ſi detrahatur CQZ quod in eâdem proportione crevit, reliquum CZY quod areæ variationi maximæ $\Psi T\omega$ eſt proportionale creſcet etiam in eâdem duplicatâ ratione temporum, manente itaque radio $T\omega$, ipſe arcus $\Psi\omega$ creſcet in duplicatâ ratione temporum.

Hinc cum $II\Psi$ creſcat in duplicatâ ratione temporum tum etiam $\Psi\omega$, ſumma itaque $II\omega$ ſive tota variatio creſcet in eâdem duplicatâ temporum ratione.

Dico præterea quod ſi ſpectetur imminutio actionis Solis propter auctam diſtantiam variatio maxima decreſcet in ratione triplicatâ diſtantiarum, nam deſignetur vis mediocris Solis per $\frac{1}{SK^2}$, eſt ex conſtructione SK ad TM ut vis Solis ſive ut $\frac{1}{SK^2}$ ad vim TM ergo ea vis TM eſt ut $\frac{TM}{SK^3}$ manente ergo TM quæ eſt æqualis PT; vis TM ex actione Solis pendens decreſcit ut diſtantiarum cubus augetur, Manente ergo tempore, ſed vi mutatâ ſecundum rationem triplicatam, eadem ferè ratione ac prius oſtendetur utramque variationis maximæ partem $II\Psi\omega$ & $\Psi\omega$ forè inversè in ratione triplicatâ diſtantiarum Solis; *Hinc*que *in variis Solis à terrâ diſtantiis quæ in* datis anni temporibus recurrunt *variationes maximæ erunt inter ſe in ratione duplicatâ durationis menſis Synodici eo tempore, & triplicatâ inversè diſtantiæ ſolis à terrâ.*

(c) * *Ideoque* &c. Ex his & præcedentibus facile intelligitur Newtoni calculus, ſi prius hæc Principia revocentur.

1°. Si dicatur *m* diſtantia mediocris Solis, ſit $\pm e$ exceſſus vel defectus ejus diſtantiæ à mediocri diſtantiâ in loco quovis dato; denique dicatur *s* ſolis motus horarius mediocris, dico quod ſolis motus

Hactenus variationem inveſtigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique luna in octantibus ſuis ſemper eſt in mediocri ſuâ diſtantiâ à terrâ. Si luna propter eccentricitatem ſuam, magis vel minus diſtat à terrâ quam ſi locaretur in hoc orbe, variatio

tus horarius in loco quovis ſuæ orbitæ exprimetur per quantitatem $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e^2}}$.

Sit enim T Terra; P, Sol; T P p area horæ tempore deſcripta, ejus areæ valor ubivis erit ſemper idem, ſit p q arcus ra-



dio T p deſcriptus, qui ob exiguitatem ſumi poteſt ut ipſum perpendiculum in baſim P T demiſſum, ideoque ob areas ubivis æquales is arcus erit ubivis inverſe ut baſis T P, ſed numerus graduum ejus arcus p q eſt directe ut is ipſe arcus & inverſe ut ejus radius T p ſive T P, ergo numerus graduum ejus arcus p q eſt in ratione duplicatâ inverſa radii T P, is verò numerus exprimit motum Solis horarium, ergo Solis motus horarius, eſt inverſe ut quadratum radii T P; cum ergo in diſtantiâ mediocri eſt T P $= m$, in quâvis aliâ diſtantiâ eſt T P $= m \pm e$, ergo eſt $\frac{1}{m^2}$ ad $\frac{1}{(m \pm e)^2}$ ut s ad $\frac{s m^2}{(m \pm e)^2}$ quod exprimit motum horarium Solis in quâvis diſtantiâ T P.

In diſtantiâ mediocri evaneſcit quantitas $\pm e$ ideoque motus horarius illic evadit $\frac{m^2 s}{m^2} = s$ ſecundum hypotheſim.

2°. Poſito Lunam ſemper moveri motu ſuo horario mediocri, qui dicatur l, ſitque p ejus tempus Periodicum inter fixas, Duratio menſis Synodici quovis in loco orbitæ telluris circa Solem, exprimetur per quantitatem $\frac{\overline{m \pm e^2} \times l p}{\overline{m \pm e^2} l - m^2 s}$ ſive divisâ hâc quantitate per conſtantem $\frac{l p}{m^2}$ fiet menſis Synodicus ut $\frac{\overline{m \pm e^2}}{l - s \pm \frac{2 l e}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ 114.

Nam dicatur x numerus graduum quem Sol emetitur durante quovis menſe Synodico, numerus graduum quem Luna eodem tempore emetietur erit $360 + x$, erit ergo motus horarius Lunæ l ad motum horarium Solis $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e^2}}$ ut $360 + x$ ad x, & dividendo $m^2 l \pm 2mel + e^2 - m^2 s$ ad $m^2 s$ ut 360 ad x, itaque erit $x = \frac{360 m^2 s}{m^2 l \pm 2mel + e^2 l - m^2 s}$. Hinc cùm Lunâ percurrat 360 gr. tempore p, abſolvet $360^{gr}. + \frac{360 m^2 s}{m^2 l \pm 2mel + e^2 - m^2 s}$ tempore $p + \frac{m^2 s p}{m^2 l \pm 2mel + e^2 l - m^2 s}$ ſive reductione facta, tempore $\frac{m^2 l p \pm 2mel p + e^2 l p - m^2 s p + m^2 s p}{m^2 \pm 2mel + e^2 l - m^2 s}$ ſive $\frac{\overline{m \pm e^2}}{l - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}} \times \frac{l p}{m^2}$ quæ quantitas diviſa per conſtantem $\frac{l p}{m^2}$, relinquit quantitatem $\frac{\overline{m \pm e^2}}{l - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ quæ erit ut duratio menſis Synodici in diſtantiâ quavis $m \pm e$. Q. E. D.

In diſtantia mediocri evaneſcente quantitate $\pm e$ menſis Synodicus erit $\frac{m^2 l p}{m^2 l - m^2 s} = \frac{l p}{l - s}$ & erit ad menſes Synodicos in aliis

tio paulo major esse potest vel paulo minor quam pro regulâ hic allatâ: sed excessum vel defectum ab astronomis per phænomena determinandum relinquo.

514. aliis quibusve distantiis ut $\frac{m^2}{l-s}$ ad $\frac{\overline{m \pm e}^2}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$

3°. Variatio maxima erit ubivis ut $\frac{m \pm e}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$: Nam ex hâc ipsâ Propositione variatio maxima est directè ut quadratum temporis Synodici & inverse ut cubus distantiæ sive in ratione compositâ quantitatum $\frac{\overline{m \pm e}^4}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$ & $\frac{1}{m \pm e}$ ideoque ut $\frac{m \pm e}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$.

Coroll. In distantiâ mediocri variatio maxima exprimitur per quantitatem $\frac{m}{\overline{l-s}^2}$ & eam superius determinavit Newtonus fere 35″ 10‴ sive 2110‴; Hinc itaque ut habeatur variatio maxima in quovis orbitæ Solaris puncto fiat ut $\frac{m}{\overline{l-s}^2}$ ad $\frac{m \pm e}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$ ita 2110‴ ad variationem maximam quæsitam, quæ itaque erit $\frac{\overline{l-s}^2}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}} \times \frac{m \pm e}{m} \times 2110‴$, (sive accuratius × 2109‴.8.)

Ratio autem motus horarii Lunæ l ad motum horarium Solis s obtinetur ex tempore Periodico utriusque inter stellas fixas, itaque cum tempus Periodicum Lunæ sit $27^d. 7^h. 43'$ & annus fidereus Solis $365^d. 6^h. 9'$ & velocitates mediocres sive motus horarii mediocres sint inverse ut ista tempora Periodica erit l ad s ut 1.081 ad 0.81 ideoque erit $l - s = 1$, & Variationis maximæ expressio fiet $\frac{1}{\overline{1 \pm \frac{2.162\,e}{m} + \frac{1.081\,e^2}{m^2}}^2} \times \frac{m \pm e}{m} \times$ 2109.8‴. Cumque m sit 1000 & in Apogæo $\frac{m+e}{m}$ sit $1.016\frac{15}{16}$ in Perigæo vero sit $\frac{m-e}{m} = .983\frac{15}{16}$ hæc ducta in 2109.8‴ efficiunt in Apogæo 2145.5‴ & in Perigæo 2074‴, sed cum sit $e = 16\frac{15}{16}$ quantitas $\frac{2.162\,e}{m}$ evadit .036618375 & $\frac{1.081\,e}{m^2}$ est .00031027. Unde quantitas $1 + \frac{2.162e^2}{m} + \frac{1.081\,e^2}{m^2}$ fit 1.03665 & $1 - \frac{2.162e}{m} + \frac{1.081e^2}{m^2}$ fit .9637.

Dividatur ergo bis 2145'.5‴ per 1.037 quotiens dabit variationem maximam in Apogæo 1994‴ sive 33′. 14‴, & dividatur bis 2074‴ per .964 quotiens dabit variationem maximam in Perigæo quam proximè 2231 sive 37″ 11‴.

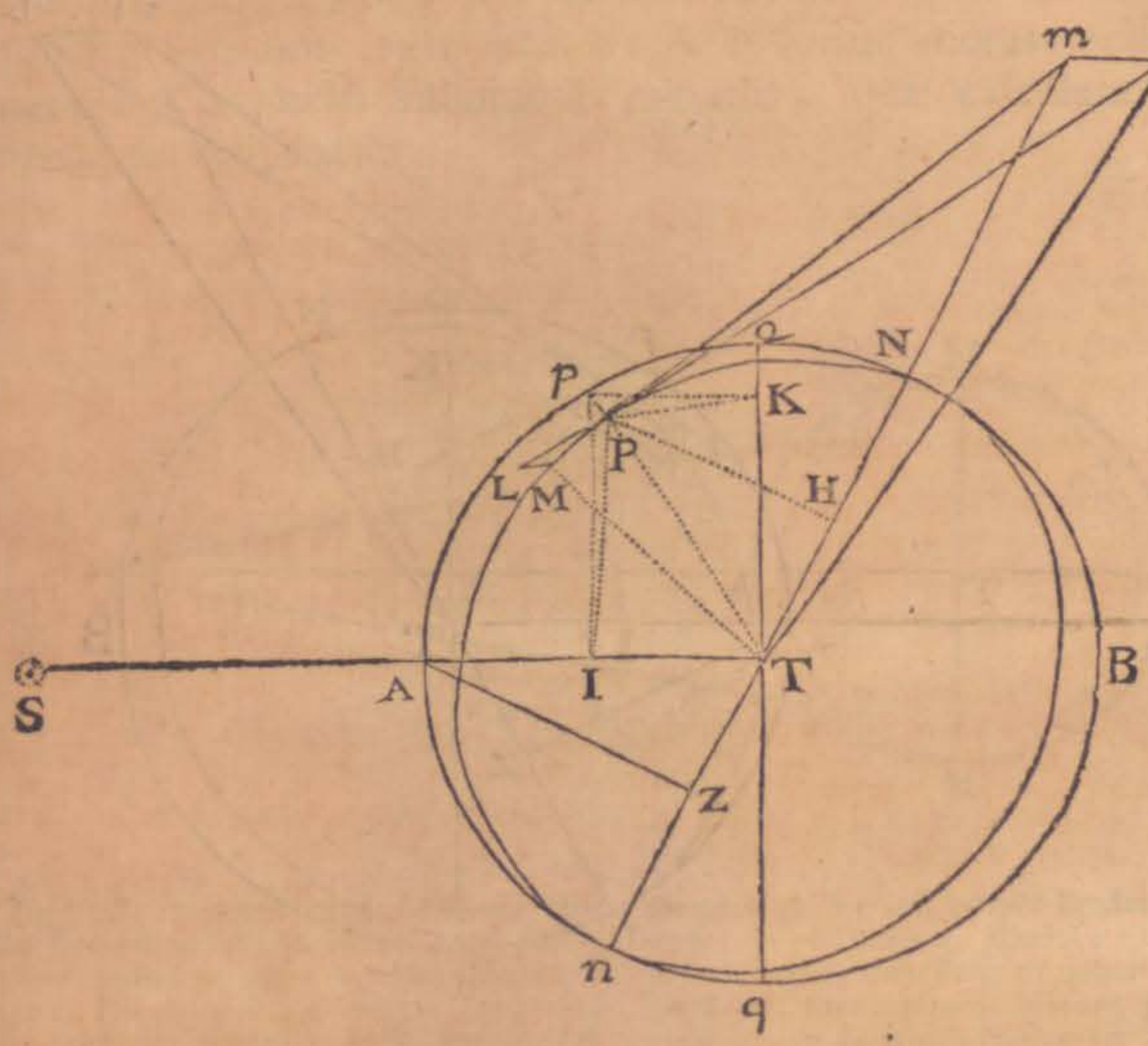
PRO-

LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROBL. XI.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe circulari.

Defignet *S* ſolem, *T* terram, *P* lunam, *NPn* orbem lunæ, *Npn* (d) veſtigium orbis in plano eclipticæ; *N*, *n* nodos,



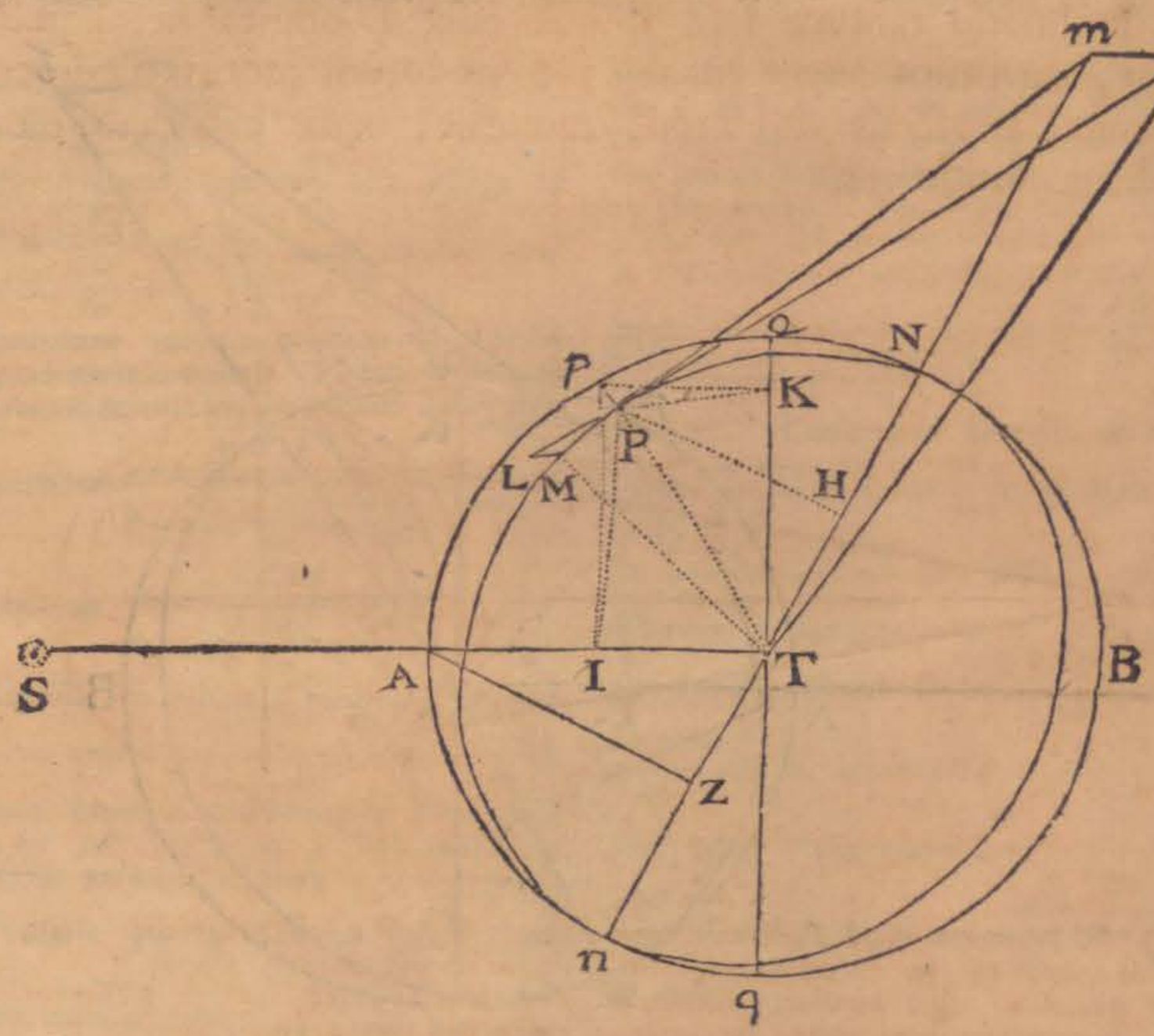
nTNm lineam nodorum infinitè productam; *PI*, *PK* perpendicula demiſſa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demiſſum in planum eclipticæ; *A*, *B* ſyzygias lunæ in plano eclipticæ; *AZ* perpendiculum in lineam nodorum *Nn*; *Q*, *q* quadraturas lunæ in plano eclipticæ, & *pK* perpendiculum in lineam

Qq

(d) * *Veſtigium orbis in plano Eclipticæ.* Hoc eſt orbis genitus demittendo ex ſingulis punctis orbitæ Lunaris perpendicula ad planum Eclipticæ.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Q q quadraturis interjacentem. Vis ſolis ad perturbandum motum (per prop. xxv.) duplex eſt, altera lineæ *L M* in ſchemate propoſitionis illius, altera lineæ *MT* proportionalis. Et luna vi priore in terram, poſteriore in ſolem ſecundum lineam rectæ *ST* à terrâ ad ſolem ductæ parallelam trahitur. Vis prior



L M agit ſecundum planum orbis lunaris, & propterea ſitum plani nil mutat. Hæc igitur negligenda eſt. Vis poſterior *MT* quâ planum orbis lunaris perturbatur eadem (e) eſt cum vi 3 *P K* vel 3 *IT*. Et (f) hæc vis (per prop. xxv.) eſt ad vim

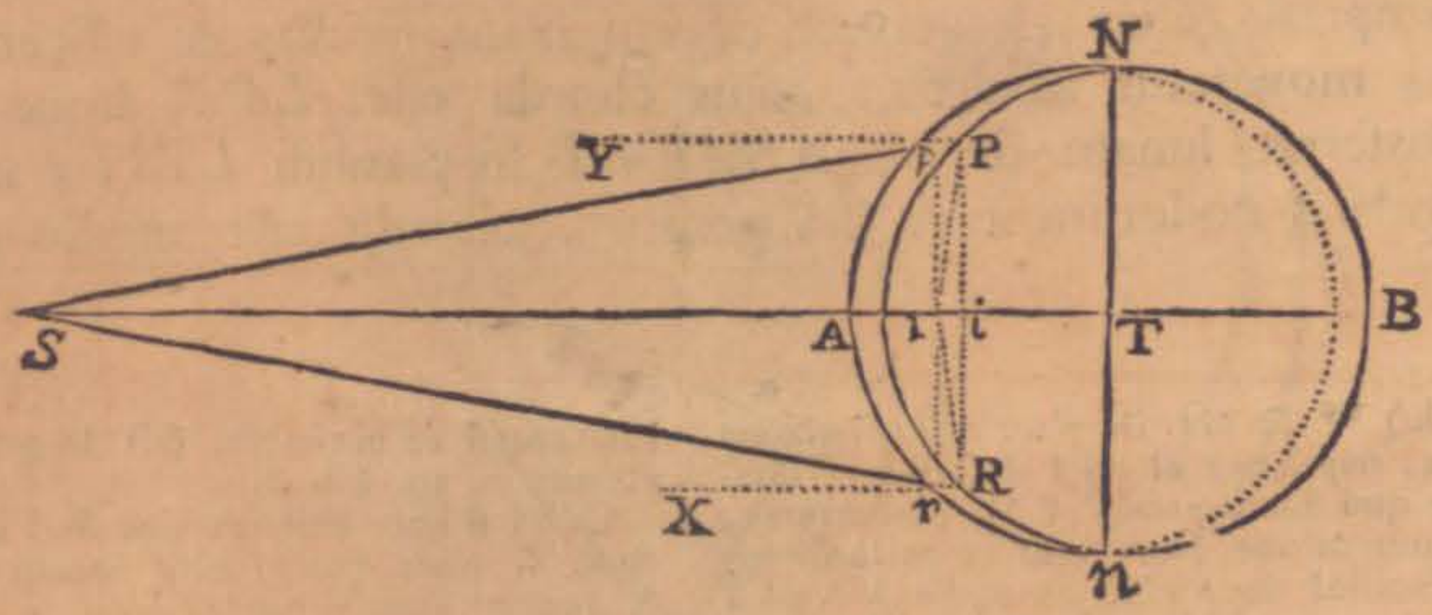
214. (e) * *Eadem eſt cum vi 3 P K* (Prop. XXV. not. u).

(f) * *Et hæc vis eſt ad vim qua Lunâ in circulo circa terram quieſcentem tempore ſuo periodico uniformiter revolvi poſſet.* Vis T M T eſt ad vim M L ut eſt 3 P K ſive 3 I T ad Radium, (Prop XXVI. not. x); vis M L eſt ad vim quâ Luna circa terram tempore ſuo Periodico revolvi poſſet ut 1 ad 178.725 (Prop. XXV. not. r). Ergo, ex æquo, & conjunctis rationibus, eſt vis M T ad vim quâ Luna circa terram tempore ſuo Periodico revolvi poſſet ut eſt 3 I T ad Radium circuli multiplicatum per 178.725.

quâ lunâ in circulo circa terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset, ut $3\,IT$ ad radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, sive ut IT ad radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo, & eo omni qui sequitur, considero lineas omnes à lunâ ad solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ à terrâ ad solem ducitur, (g) propterea quod inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantùm auget in aliis; & nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROBL. XL.

Designet



(g) * *Propterea quod Inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus quantùm auget in aliis.* Exempli gratiâ, sint nodi in quadraturis, spectetur-que Luna in punctis P & R æqualiter à quadraturis N & n distantibus & vis obliqua Solis S P, S R in ipsam agere concipiatur, quæ in duas dividatur, unam Parallelam lineæ S T, secundum directiones P Y, R X agentem, alteram huic perpendicularem secundum directiones P I, R I; de effectu vis secundum directiones P Y, R X agentis in hoc Problemate actum est; directiones verò P I, R I sese mutuo compensant; dividatur enim rursus vis P I, R I in duas vires unam P i, R i secundum planum orbitæ Lunaris agentem ideoque nodorum positionem non turbantem, alteram P p, R r ipsi perpendicularem; hæc nodorum positionem, planique inclinationem afficiet, sed cum de plani inclinatione hic non agatur, manere plani inclinationem fingatur, itaque vis P p, R r dum admovet puncta P & R ad Ecliptícam efficit ut nodis viciniores videantur seu ut nodi versus puncta illa moveri censeantur, ideoque actio in punctum P efficit ut nodus N in consequentia feratur & actio in punctum R efficit ut nodus n in antecedentia fertur, ideoque, Solis actio obliqua in punctum P motum retrogressivum nodi natum ex vi P Y parallela lineæ S T tantùm minuit quantùm eadem actio obliqua in punctum R auget eum motum retrogressivum natum ex vi R X. 114

DE MUNDI SYSTEMATE.

Designet jam PM arcum, quem luna dato tempore quam minimo describit, & ML lineolam cujus dimidium luna, impellente vi præfatâ $3IT$, eodem tempore describere posset. (h) Jungantur PL, MP, & producantur eæ ad m & l, ubi secent planum eclipticæ; inque Tm demittatur perpendiculum PH. Et quoniam recta ML parallela est plano eclipticæ, ideoque cum rectâ ml quæ in plano illo jacet concurrere non potest, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi $LMPml$; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea similia erunt triangula LMP, lmP. Jam cum MPm sit in plano orbis, in quo luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam Nn per orbis illius nodos N, n ductam. Et quoniam vis quâ dimidium lineolæ LM generatur, si tota simul & semel in loco P impressa esset, generaret lineam illam totam; & efficeret ut luna moveretur in arcu, cujus chorda esset LP, atque ideo transferret lunam de plano $MPmT$ in planum $LPlT$; motus angularis nodorum à vi illâ genitus, æqualis erit angulo mTl.

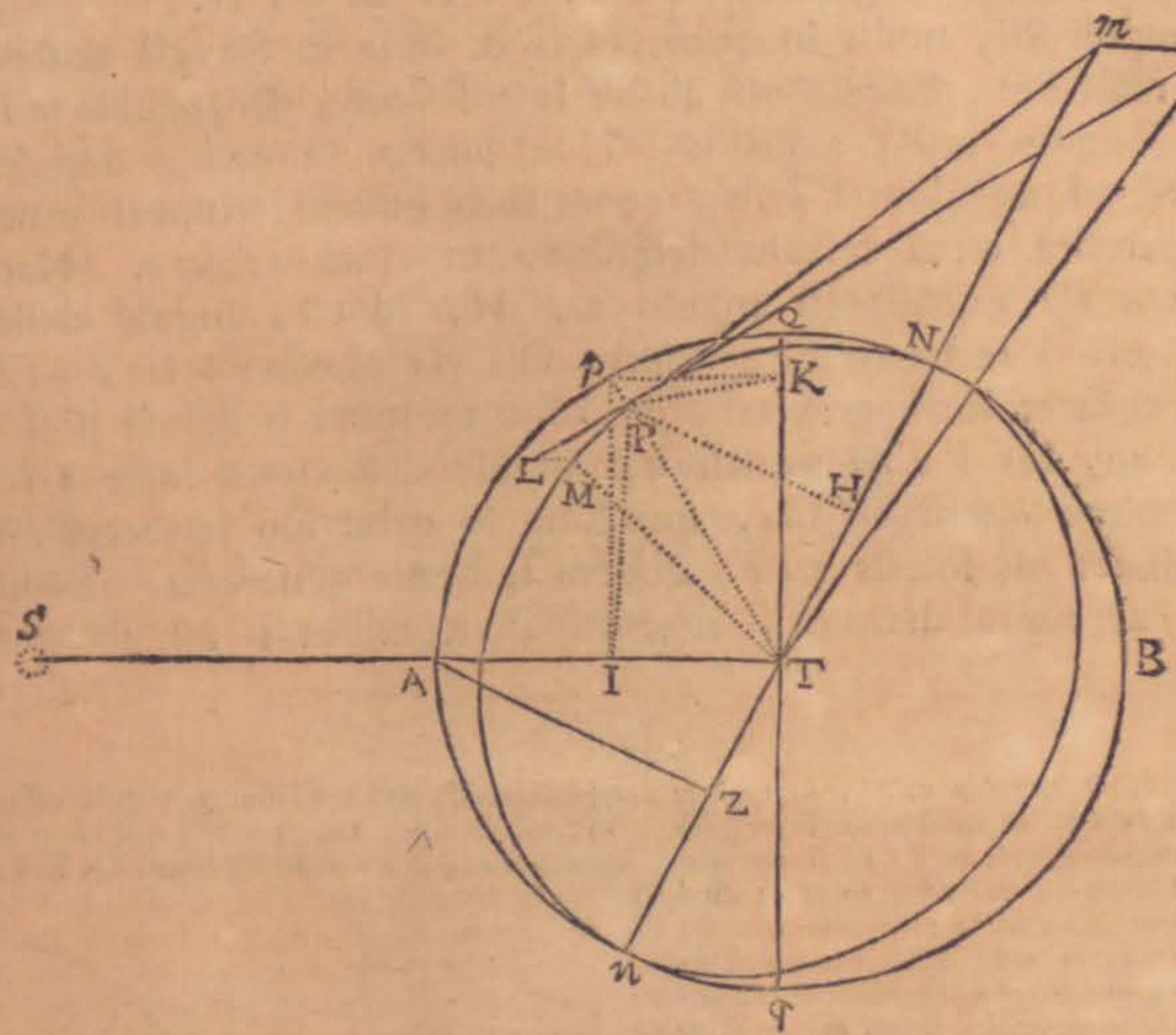
Est

114. (h) * *Et ML lineolam cujus dimidium Luna, impellente vi 3IT* describeret tempore quo Luna arcum PM percurreret; Assumit utique Newtonus ut rei conceptus facilior fiat, actiones omnes vis 3IT quæ exercitæ fuerunt dum arcus PM percurritur *simul & semel in loco P impressas esse*, sicque motum Lunæ ex P motæ, esse compositum ex velocitate acquisitâ secundum Tangentem, & ex velocitate ultimo genitâ per actionem vis 3IT agentem tempore æquali illi quo describitur arcus PM, ita ut Lunâ sequatur Diagonalem Parallelogrammi cujus unum latus sit PM alterum vero Parallelum & æquale lineæ LM; cum autem vis 3IT exiguo temporis intervallo sensibiliter non mutetur, toto tempore quo describeretur lineola PM ea vis pro uniformi adsumi potest, hinc via quæ describitur per velocitatem uniformiter crescentem ab eâ vi 3IT genitam est dimidia ejus viæ quæ describeretur per ultimam velocitatem in fine temporis PM genitam, & uniformem manentem toto tempore PM, quod eâdem ratione probari potest ac probatum fuit de gravitatis actione n. 30. Lib. I.

Quod si quis objiciat hinc fieri ut punctum L male repræsentet locum Lunæ, & locum ejus veriorem fore in medio inter M & L, respondemus solutionem hujus Problematis ex eâ positione Lunæ neutiquam pendere, hæc enim solutio duabus constat partibus, priori statuitur ratio motus nodorum in quibusvis punctis P orbitæ Lunaris, & hæc ratio eadem est sive ubique sumatur tota ML aut ubique ejus dimidium, dimidia enim sunt totis proportionalia; In secunda solutionis parte determinatur quantitas motus nodorum in syzygiis ipsis, respectu motus Lunæ in suâ orbita, & in hâc determinatione nihil deducitur ex magnitudine lineæ LM, sed tota hæc solutionis pars pendet ex proportione ipsius vis 3IT ad vim centripetam Lunæ, unde nullus error metuendus est in hoc calculo ex hâc falsâ suppositione Lunam in puncto L versari cum in medio inter L & M collocanda fuisset.

Eſt autem ml ad mP ut ML ad MP, ideoque cum MP ob datum tempus data ſit, eſt ml ut rectangulum $ML \times mP$, id eſt, (i) ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus mTl, ſi (k) modo angulus TMl rectus ſit, eſt ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, id eſt (ob proportionales Tm & mP, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, ideo-

LIBER TERTIUS, PROP. XXX. PROBL. XI.



(i) * *Ut Rectangulum IT × mP.* Linea ML eſt duplum viæ quæ dato tempore per actionem 3IT percurritur, vis illa 3IT dato illo tempore uniformis manere cenſetur, itaque in diverſis punctis P, viæ eodem dato tempore per actiones 3IT percurſæ ſunt ut illæ vires 3IT, ſive ut IT, ergo ML ejus viæ duplum eſt etiam ut IT, & MI × mP eſt ut IT × mP.

(k) * *Si modo angulus TmI ſit rectus* cum angulus mTl ſit admodum exiguus, ſi angulus Tml ſit rectus, uſurpari poterit recta ml pro arcu circuli cujus radius eſt Tm ideoque (154. lib. 1.) angulus mTl eſt ut $\frac{ml}{Tm}$.

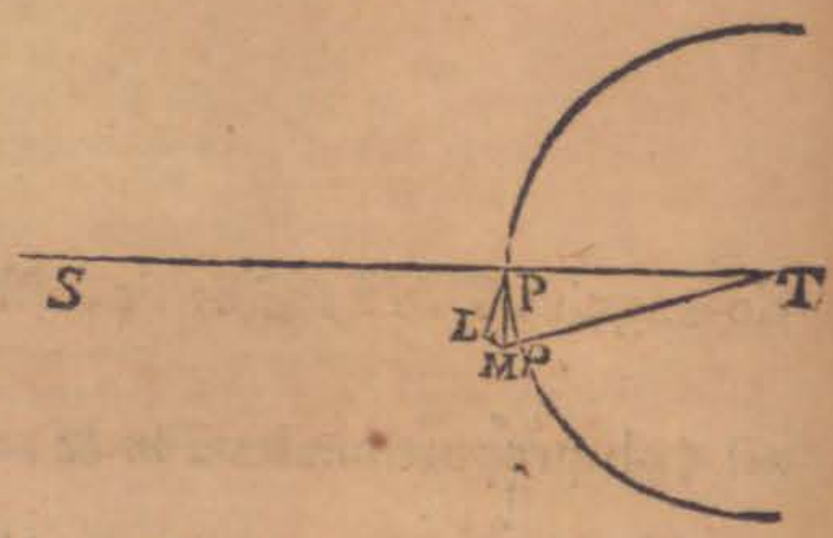
DE MUNDI SYSTEMATE.

que ob datam TP, ut $IT \times PH$. Quod ſi angulus Tml, ſeu STN obliquus ſit, (l) erit angulus mTl adhuc minor, in ratione ſinus anguli STN ad radium, ſeu AZ ad AT. Eſt igitur velocitas nodorum ut $IT \times PH \times AZ$, ſive ut contentum ſub ſinubus trium angulorum TPI, PTN & STN.

Si anguli illi, nodis in quadraturis & luna in ſyzygiâ exiſtentibus, recti ſint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in caſu, angulus mPl eſt ad angulum PTM, quem luna eodem tempore motu ſuo apparente circa terram deſcribit, ut 1 ad 59,575. Nam angulus mPl æqualis eſt angulo LPM, id eſt, angulo deflexionis lunæ à recto tramite, quem ſola vis præfata ſolaris $3IT$, ſi tum ceſſaret lunæ gravitas, dato illo tempore generare poſſet; (m) & angulus PTM æqualis eſt angulo deflexionis lunæ à recto tramite, quem vis illa, quâ luna in orbe ſuo retinetur, ſi tum ceſſaret vis ſolaris $3IT$, eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut ſupra diximus, ſunt ad invicem ut 1 ad 59,575.

Ergo

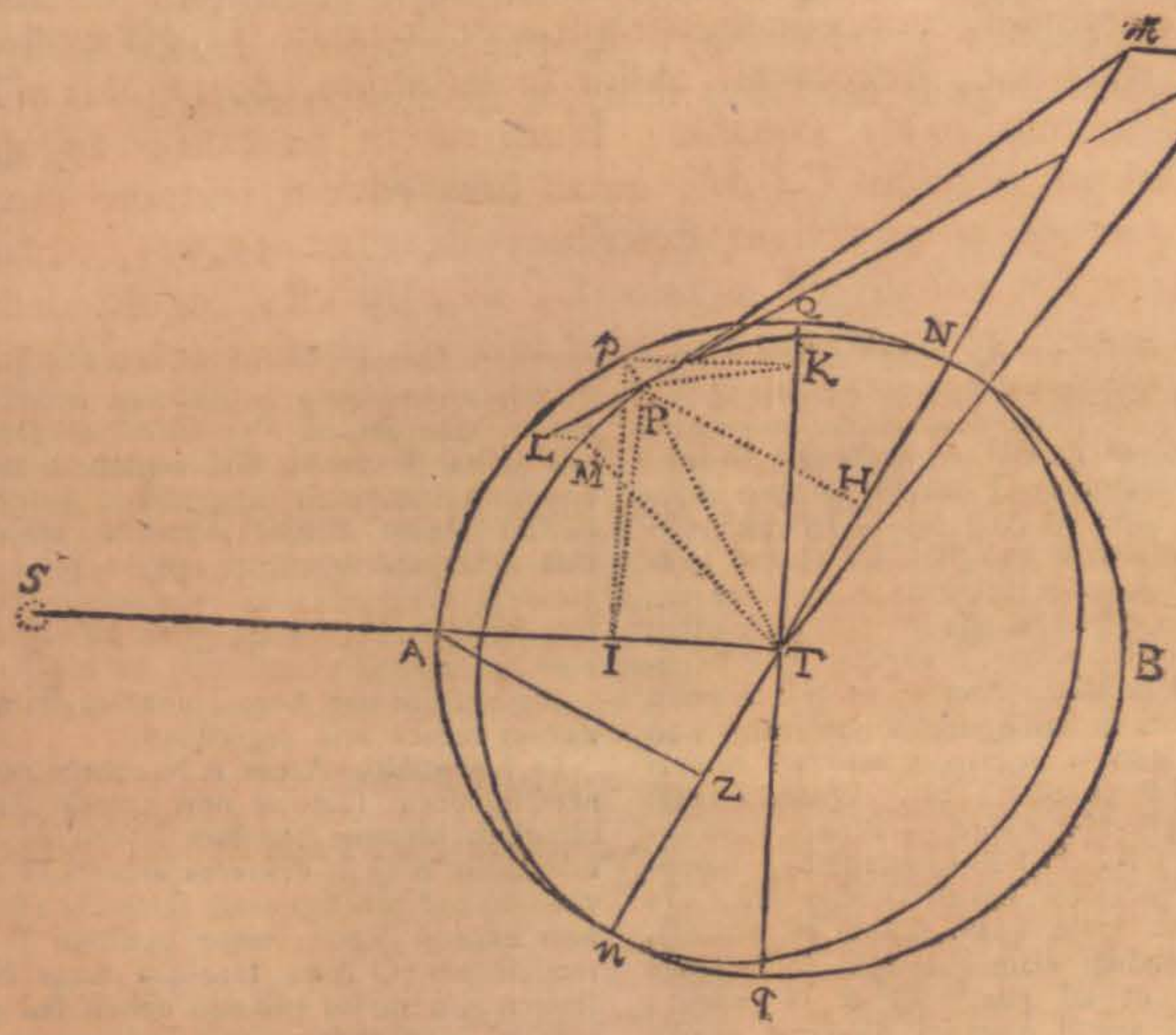
114. (l) * *Erit angulus mTl, in ratione ſinus anguli STN ad radium* in Triangulo T m l, eſt ſinus anguli m T l ad ſinum Anguli T m l ut latus m l ad latus T l; Sed propter exiguitatem lateris m l reſpectu lateris T l, ratio m l ad T l eadem ſemper manere cenſetur qualiſcumque ſit angulus T m l, manentibus lineis m l & T m; in angulo enim maximo linea T l evadit T m + m l, in minimo T m − m l, eſt verò m l quantitas evaneſcens reſpectu T m, hinc illius incrementi aut decrementi m l ratio nulla eſt habenda; Itaque manente quantitate m l qualiſcumque ſit angulus T m l, ratio m l ad T l eadem eſt, itaque etiam manet ratio ſinus anguli m T l ad ſinum anguli T m l, ſive etiam, cum anguli minimi, ſint ut eorum ſinus, anguli m T l in variâ inclinatione lineæ datæ m l ad lineam datam T m ſunt inter ſe ut ſinus Angulorum T m l, eſt ergo angulus m T l, in quâvis magnitudine anguli T m l ad eum angulum m T l quando angulus T m l eſt rectus ut ſinus anguli T m l (vel, ut ſinus anguli I T n ipſi æqualis ob parallelas S T, m l) ad ſinum anguli recti, hoc eſt ut ſinus anguli S T N qui idem eſt cum ſinu anguli S T n ad Radium. Q. E. O.



(m) * *Et angulus PTM æqualis eſt angulo deflexionis.* Angulus M P p eſt angulus deflexionis de quo nunc agitur Triangula verò M P p, M P T ſunt ſimilia ob angulum communem P M T, & angulos rectos T P M & P p M, hinc anguli reſidui P T M, M P p ſunt æquales.

(n) Ergo cum motus medius horarius lunæ reſpectu fixarum ſit $32^{I}. 56^{II}. 27^{III}. 12^{IV\frac{1}{2}}$, motus horarius nodi in hoc caſu erit $33^{II}. 10^{III}. 33^{IV}. 12^{V}$. Aliis autem in caſibus motus iſte horarius erit ad $33^{II}. 10^{III}. 33^{IV}. 12^{V}$. ut contentum ſub ſinubus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (ſeu diſtantiarum lunæ à quadraturâ, lunæ à nodo, & nodi à ſole) ad cubum radii.

LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROB. XI.



(n) * *Ergo* &c. Iſti anguli deflexionis debent eſſe ut vires illas deflexiones producentes, in hoc enim caſu, utrâque vis agit perpendiculariter ad Tangentem P M hinc lineolæ M p, M L per eas vires genitæ tempore eodem, eo nempe quo percurretur Tangentis portio P M, debent eſſe ut ipſæ illæ vires; ex verò lineolæ ſumpto P M pro radio ſunt Tangentes angulorum deflexionis p P M, MPL, & anguli quam minimi ſunt ut ipſorum Tangentes, ergo anguli illi deflexionis ſunt ut vires illas producentes, motus autem horarii lunæ & nodorum ſunt ipſi anguli P T M & m T l, qui ſunt ex demonſtratis æquales angulis deflexionum M P p, M P L, ergo motus horarii ſunt ut vires illas deflexiones producentes. Q. E. O. 114.

DE MUNDI SYSTEMATE.

(°) Et quoties ſignum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari. Unde fit ut nodi progrediantur quoties luna inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum verſatur. Aliis in caſibus regrediuntur, & per exceſſum regreſſus ſupra progreſſum ſingulis menſibus feruntur in antecedentia.

Co-

114. (o) * *Et quoties ſignum alicujus Anguli de affirmativo* &c. Angulos QTP & NTP, poſitivos vocat Newtonus, quando punctum P eſt in conſequentia reſpectu punctorum Q vel N ad quæ referuntur, hoc eſt Angulus QTP eſt poſitivus quoties arcus QP, ab ultimâ quadraturâ Q numeratus in conſequentia non excedit 180gr. negativus verò cum arcus QP excedit 180gr.; angulus NTP pariter eſt poſitivus cum arcus NP à nodo aſcendente in conſequentia numeratus non excedit 180gr. negativus verò eſt cum is arcus NP excedit 180gr. Quando enim arcus QP, NP excedunt 180gr. tunc anguli QTP, NTP non amplius numerantur ſecundum Lunæ directionem, ſeu ſecundum viam quam Luna eſt emenſa, ſed ſecundum viam quæ ipſi deſcribenda ſupereſt ut ad puncta Q & N redeat, hinc illi anguli negativi dicuntur, eorum reſpectu qui ſecundum viam à Lunâ deſcriptam menſurantur.

Angulus verò STN poſitivus dicitur quando arcus AN à loco conjunctionis Lunæ cum Sole uſque ad nodum contra ordinem ſignorum numeratus, eſt minor 180gr., negativus verò dicitur cum excedit 180gr., quia, cum nodi moveantur contra ordinem ſignorum ſive in antecedentia, angulus STN primo caſu exprimit viam nodi à ſyzygia, ſecundo caſu viam quam emetiri debet ut ad ſyzygiam redeat.

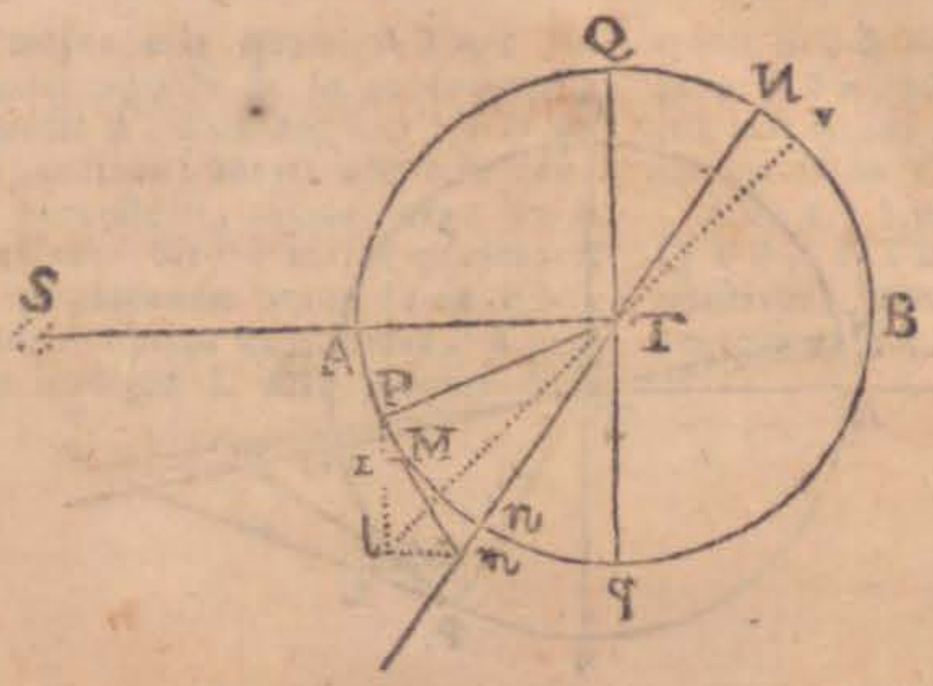
Probandum autem 1°. quod ſi tres illi Anguli QTP, NTP, STN ſint poſitivi motus nodorum eſt regreſſivus: 2°. Quod ſi unus eorum ſit negativus reliqui poſitivi motus nodorum eſt progreſſivus. 3°. Quod ſi unus eorum ſit poſitivus duo negativi, motus nodorum eſt regreſſivus. 4°. Denique quod ſi omnes ſint negativi motus nodorum iterum ſit progreſſivus, ſic enim *quoties ſignum alicujus anguli de affirmativo in negativum deque affirmativo in negativum mutatur debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari.*

Art. 1. Si tres Anguli ſint Poſitivi nodorum motus erit regreſſivus.

In hoc caſu, Arcus AN contra ordinem ſignorum ſumptus non excedit ſemicirculum ideoque punctum N erit in ſemicirculo AQB; Præterea arcus QP ſecundum ordinem ſignorum ſumptus, 180gr. non excedit, erit itaque punctum P in ſemicirculo QAq; Denique arcus NP ſemicirculo major eſſe non debet, ſed poteſt vel quadrante minor vel quadrante major, ſit NP quadrante minor ut in figurâ Textus, in quâ reliquæ hujus caſus conditiones occurrunt, ex ipsâ hujuſce propoſitionis conſtructione liquet quod ductâ ML quæ exprimit actionem Solis, productâ MP quæ lineæ nodorum occurrit in m, productâ LP quæ occurrit plano Eclipticæ in l, ita ut ml ſit parallela lineæ ML, cum L ſit verſus Solem reſpectu puncti M & lineæ MPm, LPl ſeſe decuſſent punctum l erit remotius à Sole quam punctum m, ideoque angulus ATl major erit quam angulus ATm ergo nodus promotus eſt contra ordinem ſignorum, hoc eſt ejus motus eſt regreſſivus.

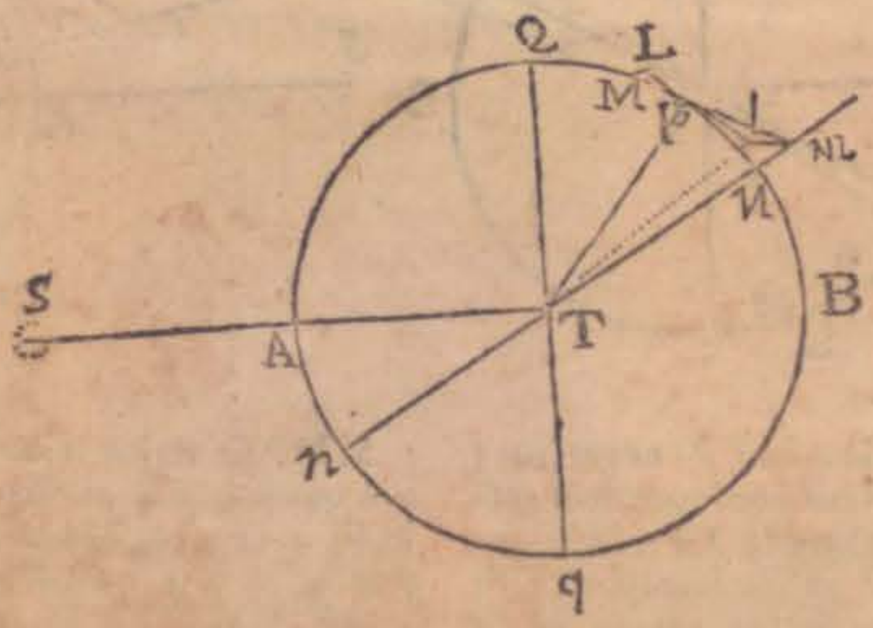
Sic

LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROBL. XI.



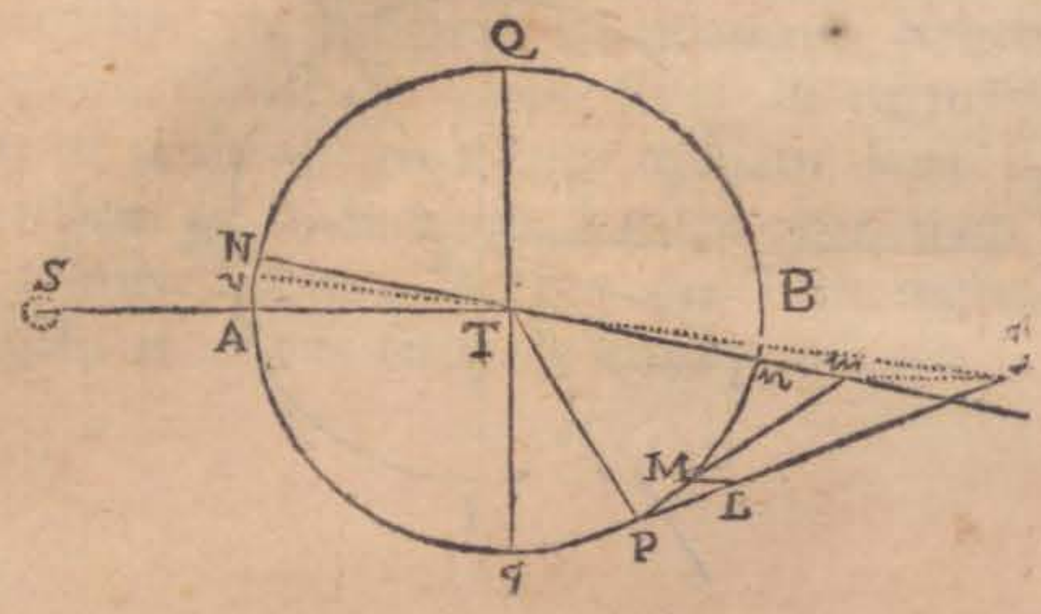
Sit NP quadrante major, tum lineæ PM, PL non amplius erunt retroproducendæ ut cum lineâ TN concurrant, sed antrorsum productæ concurrent cum ejus productione Tn, & quoniam sese non decussant, manebit punctum l propius Soli quam punctum m, & angulus ATl minor erit angulo ATm, ideoque productâ lineâ lT in V, angulus ATV complementum ad duos rectos anguli ATl, major erit angulo ATN complemento ad duos rectos anguli ATm, ergo nodus N promotus est contra ordinem signorum ut prius; Ergo ubicumque sit punctum P si tres anguli QTP, NTP, STN sint positivi motus nodi est regressivus. 114

Art. 2. Mutetur horum Angulorum quivis ex positivo in negativum manentibus positivis angulis duobus reliquis motus nodorum ex regressivo progressivus fiet.

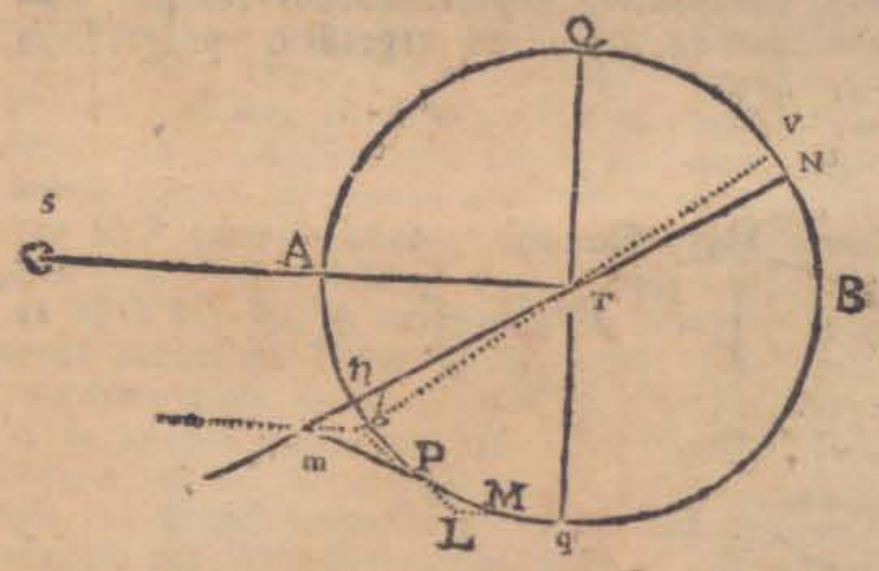


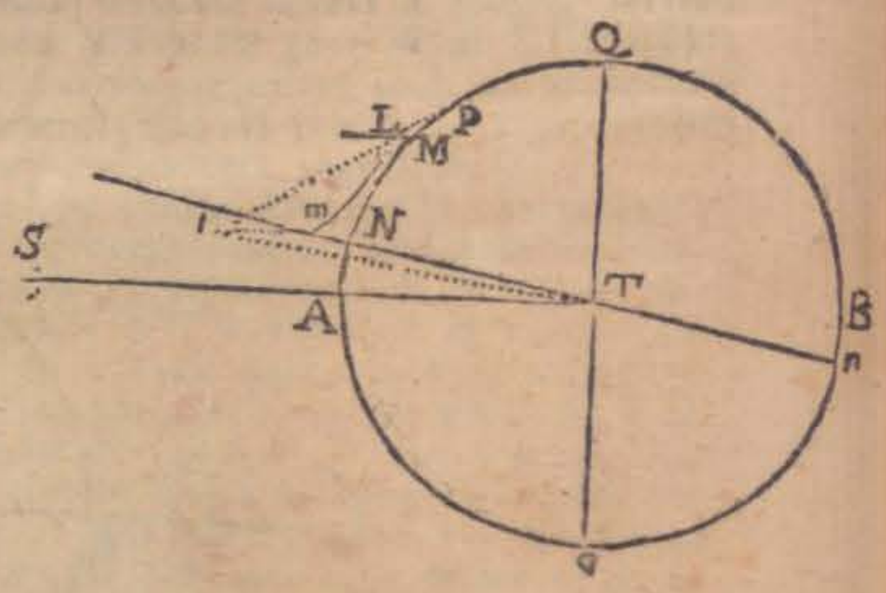
Cas. 1. Fiat angulus QTP negativus, hoc est, punctum P sit in semicirculo QBq, manente positivo angulo STN ita ut N sit in semicirculo AQB, & pariter manente positivo angulo NTP; observandum quod lineolâ ML in semicirculo QBq positionem habet oppositam illi quam habebat in semicirculo QAq ut constat ex Prop. LXVI. lib. 1. ita ut punctum L sit à Sole remotius quam punctum M; Itaque si PN sit minor quadrante, lineæ LP retroproducendæ erunt, & punctum l erit propius Soli quam punctum m, ideoque angulus ATl minor erit angulo ATm, ergo (cum diminuatur angulus ATN qui sumitur contra ordinem signorum) nodus secundum ordinem signorum est promotus ejusque motus progressivus est.

DE MUNDI SYSTEMATE



112. Si verò NP sit major quadrante antrorsum productis lineis PM, PL punctum l manebit remotius à Sole quam punctum m, ideoque angulus ATl major erit angulo ATm, productâ itaque lT in V, angulus ITV anguli AT lcomplementum minor erit angulo ATN, nodus ergo ab N versus A in consequentia processerit itaque motus nodi est ut prius progressivus.





Cas. 2. Sit angulus NTP negativus; hoc est sit punctum N in consequentia respectu puncti P, sit vero QTP positivus hoc est sit punctum P in semicirculo QAq & pariter sit STN positivus ita ut N sit in semicirculo AQB, si NP (secundum consequentia) sit minor tribus quadrantibus, P distabit à puncto n minus quadrante, ideoque retroproductis lineis MP, LP in m & l, cum L sit soli propius quam M, erit l à sole remotius quam m, ideoque angulus ATl major erit angulo ATn, & angulus ATV prioris complementum minor erit angulo ATN qui est anguli ATm complementum; processit ergo nodus ab N versus A, motus ergo nodi est progressivus.

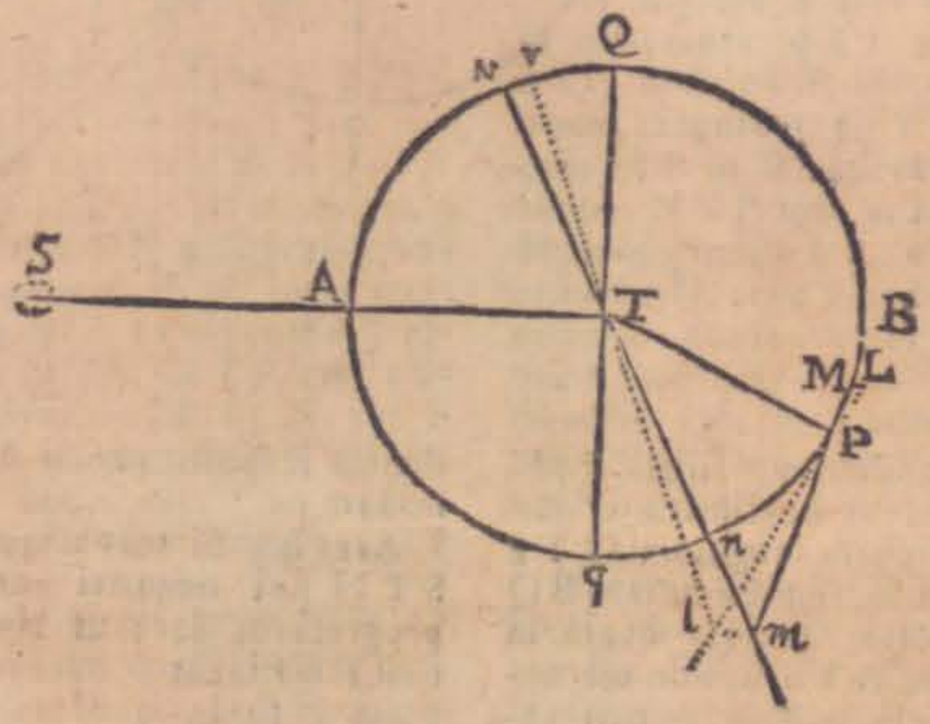
Si NP sit major tribus quadrantibus, P minus quadrante à puncto N distabit, cumque N sit in consequentia respectu puncti P ut & puncta M & L antrorsum producendæ sunt lineæ PM, PL ut plano Ecliptica occurrant in m & l, & cum L sit Soli vicinius quam M pariter l erit Soli vicinius quam m, hinc angulus ATl minor erit angulo ATN, nodus ergo ab N versus A processit & motus nodi est progressivus.

Cas. 3. Sit angulus STN negativus positivis existentibus angulis QTP, NTP. Sit NP minor quadrante, retroproducendæ sunt lineæ PM, PL ideoque l erit remotior à Sole quam m, & angulus

LIBER III. PROP. XXX. PROBL. XL.

ſus ATI major erit quam ATm; vel ATN, cum ergo N ſit in conſequentia reſpectu puncti A, quia angulus STN eſt negativus, punctum I magis adhuc in conſequentia proceſſerit, motus ergo nodi erit progreſſivus. Sit NP major quadrante, antrorſum producendæ erunt lineæ PM, PL ut cum Ecliptica concurrant, à parte nodi n ideoque L erit propius Soli quam m, & angulus ATI minor erit angulo ATn; ideoque angulus ATV major erit quam ATN, ergo proceſſit nodus ex N in V, ſecundum conſequentia.

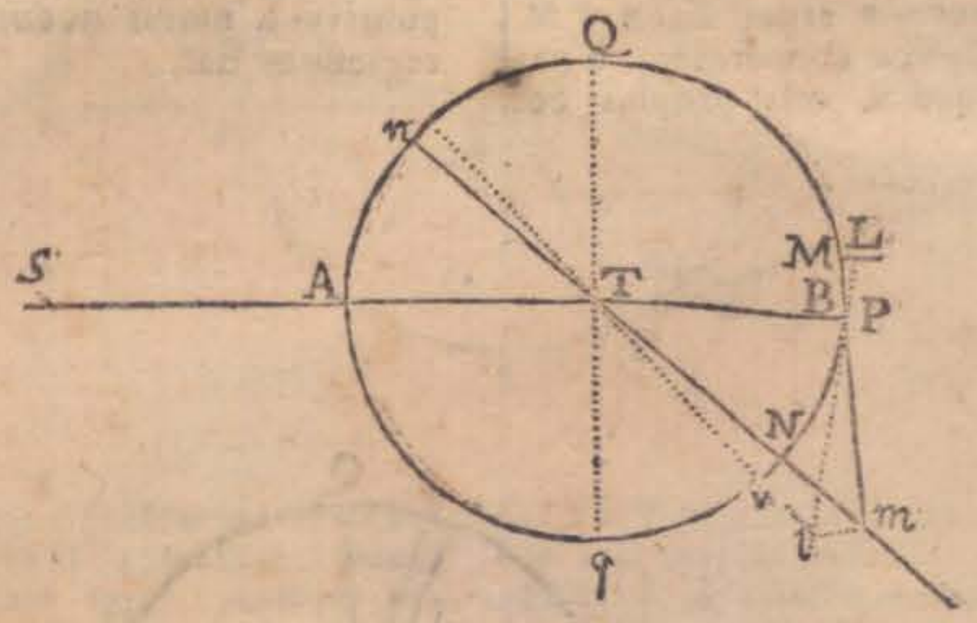
Art. 3. Sint duo ex tribus Angulis QTP, NTP, STN negativi, tertius poſitivus, motus nodorum ex progreſſivo regreſſivus fiet.



Caſus 1us. Sint QTP & NTP negativi, ſolus STN ſit poſitivus, diſtet P à nodo N minus tribus quadrantibus, ſive minus quadrante à puncto n, idque in conſequentia, retro producendæ erunt lineæ PM, PL, ut PM lineæ nodorum occurrat in m, & LP in l vicinius Soli, hinc ATl minor erit ATm & ideo ATV major quam ATN ſed punctum N eſt in antecedentia reſpectu puncti A, ergo V eſt in antecedentia reſpectu puncti N, ergo nodus regreditur; Diſtet P ab N plus tribus quadrantibus, antrorſum producendæ ſunt lineæ PM, PL ut occurrant lineæ nodorum & l manebit à Sole remotius quam m & angulus ATl major erit angulo ATN regreditur ergo Nodus.

Caſ. 2. Sint QTP & STN negativi, ſolus vero NTP poſitivus, ſit NP minor quadrante, retroproductis lineis, cum L ſit remotius à Sole quam M, erit l ob decuſſationem linearum propius Soli & angulus ATl ſive ATV minor angulo ATN, ſed quia hic angulus eſt negativus, complementa ad quatuor rectos erunt ſumenda, & arcus AQPV major erit arcu AQPN ergo nodus regreditur.

DE MUNDI SYSTEMATE.



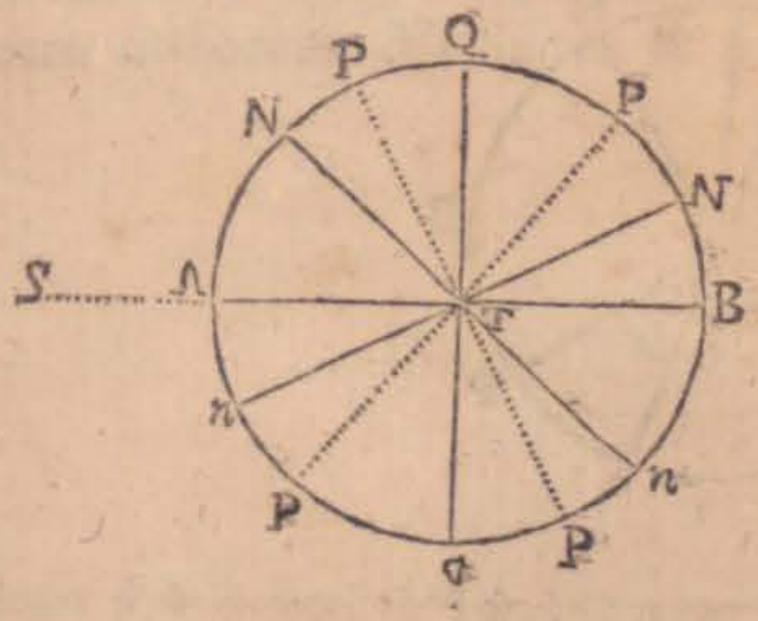
214. Sit N P major quadrante, lineis P M, P L productis occurrent Ecclipticæ à parte puncti n, & propter angulum Q T P negativum cum P sit in semicirculo q B Q erit l ut & L remotius à Sole quam m & M, ideo angulus A T n minor est angulo A T l & complementum prioris anguli A T N major est angulo A T V, sed A est in antecedentia respectu puncti N, ergo etiam V est in antecedentia respectu puncti N regreditur ergo nodus.

Cas. 3. Sint S T N & N T P negativi, Q T P vero positivus, punctum L est ubivis propius Soli quam M, si P minus tribus quadrantibus distet ab N retro producendæ sunt lineæ P M, P L, à parte puncti n & erit A T l majus quam A T n, sed quia S T N est negativus, n est in semicirculo superiori A Q B, & n est in antecedentia respectu A, ideoque l est in antecedentia respectu n, ut etiam V respectu N, regreditur ergo nodus; sit N P tribus quadrantibus major, lineæ P M, P L antrorsum sunt producendæ, l erit propius soli quam m & A T l sive A T V minor quam A T N, sed quia A T N est negativus, ideoque A est in Antecedentia respectu puncti N erit etiam V in Antecedentia respectu puncti N, regreditur ergo nodus.

Art. 4. Si tres anguli Q T P, N T P, S T N sint negativi motus ex regressivo progressivus fiet; ut Hypothesis hujus articuli obtineat, oportet ut nodus N & Luna P sit in quadrante q B; nam cum angulus Q T P sit negativus, P debet esse in semicirculo q B Q; cum S T N sit negativus, N debet esse in semicirculo A q B, & cum N T P sit negativus N debet esse in consequentia respectu P; ergo, N non potest versari in quadrante A q, nec P in quadrante B Q: Antrorsum ergo erunt producendæ lineæ P M, P L ut Ecclipticæ occurrant, erit l remotius à Sole quam m, & angulus A T V major angulo A T N, sed hic angulus est negativus, sive est N in consequentia respectu A, erit ergo etiam V in consequentia respectu puncti N, nodus itaque progreditur.

His positis dico, quod motus nodi progressivus evadit dum Luna versatur inter alterutrum nodum & quadraturam ipsi proximam; quadraturam nodo proximam vocat Newtonus, si quadraturæ à nodo distantia quadrante major non sit.

Sic



Sit enim angulus A T N positivus, quoniam Luna sive punctum P est inter puncta Q & N vel q & n ex Hypothesi, alteruter ex angulis Q T P, N T P erit positivus alter negativus; nam sit N vel n in semicirculo Q B q, tum quia P est inter Q vel q & N vel n, erit P in eodem semicirculo Q B q, ideoque angulus Q T P erit negativus, sed angulus N T P erit positivus, nam quia P est inter N & Q aut q & n, & Q est in consequentia respectu N, erit etiam P in consequentia respectu puncti N, & pariter dum n versatur in semicirculo Q B q, n est in consequentia respectu puncti q & arcus N q in consequentia sumptus nec non arcus N P singuli minores erunt arcu N n sive minores semicirculo, ergo utroque casu angulus N T P erit positivus.

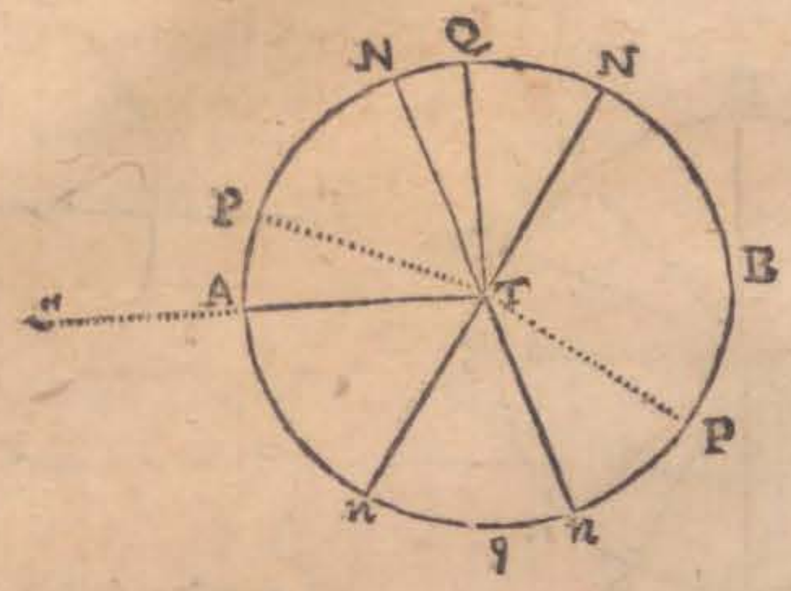
Manente A T N positivo sint N vel n in semicirculo Q A q, tum quia P est inter Q & N aut n & q, erit etiam P in semicirculo Q A q, ideoque angulus Q T P erit positivus, sed angulus N T P erit negativus, nam quia Q est in antecedentia respectu puncti N, P inter Q & N positum erit in antecedentia respectu N; & in casu quo P foret inter n & q quia q est in hac Hypothesi in consequentia respectu n, P foret etiam in consequentia respectu n, ideoque plus semicirculo à puncto N distaret utroque ergo casu angulus N T P negativus foret.

Sit angulus A T N negativus, sitque N in quadrante q A, vel n in quadrante A Q, & Luna P inter N & q vel n & Q, liquet angulum Q T P fore positivum, quia est P in semicirculo Q A q; angulus autem N T P erit etiam positivus, nam sit N in quadrante q A, q est in consequentia respectu N, ergo P quod est inter N & q est etiam in consequentia respectu N; sit n in quadrante A Q, cum n sit in consequentia respectu Q, erit etiam in consequentia respectu P, hinc arcus N P in consequentia minor erit semi-circulo, utroque ergo casu angulus N T P est positivus. 114

Itaque si angulus A T N sive S T N sit positivus, ubivis sit N in semicirculo A Q B & si angulus S T N sit negativus sed ita ut sit N in quadrante q A, quando Luna erit posita inter Nodum utrumvis N vel n, & quadraturam proximam unus è tribus angulis duntaxat erit negativus duo reliqui erunt positivi, itaque per articulum 2um. motus nodi progressivus erit.

Existente verò angulo S T N negativo, & N in quadrante q B vel n in quadrante B Q Luna verò posita inter utrumvis nodum & quadraturam proximam reliqui duo anguli Q T P, N T P negativi erunt; liquet enim facile punctum P in hâc hypothesi versari in semicirculo q B Q ideoque angulum Q T P esse negativum, præterea quia q est in antecedentia respectu N ex hypothesi, P est etiam in antecedentia respectu N, & quia Q est in consequentia respectu n, erit etiam P in consequentia respectu n, ideoque punctum N plus semicirculo à puncto P distabit, itaque sive sit P inter q & N sive inter n & Q in semicirculo q B Q tres anguli erunt negativi, sed per

DE MUNDI SYSTEMATE.



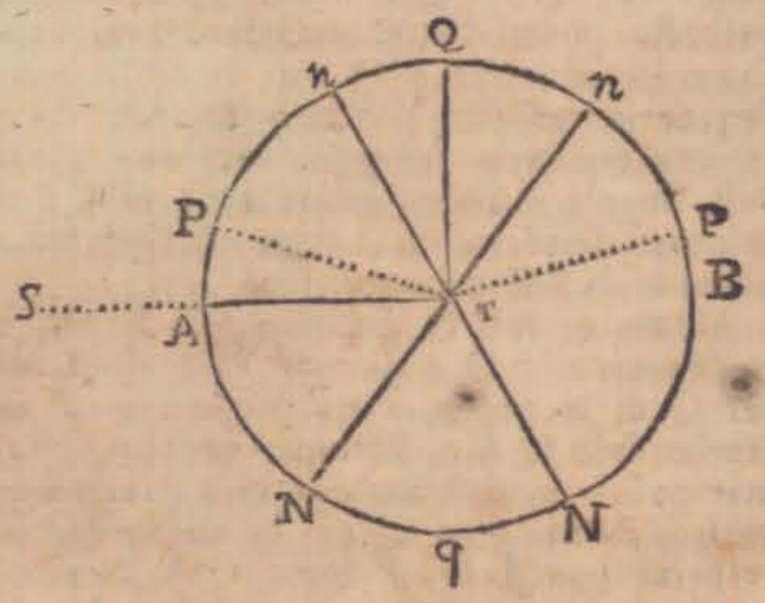
114. Art. 4. eō caſu motus nodi eſt progreſſivus; Ergo in omni caſu, ſi Luna ſit inter nodum & quadraturam proximam nodi progrediuntur.

In omnibus aliis caſibus motus nodi eſt regreſſivus; Nam quando omnes anguli ſunt poſitivi, vel quando duo anguli ſunt negativi & tertius poſitivus motus nodi regreſſivus eſt per Art. 1. & 3., alterutrum autem evenire neceſſe eſt cum P non eſt inter nodum & quadraturam proximam; Hoc enim poſito, ſit ut prius angulus STN poſitivus & N in quadrante QTA, & P ubivis inter N & remotiorem quadraturam q, vel inter n & remotiorem quadraturam Q; ſi P ſit inter N & q angulus QTP eſt poſitivus ſiquidem P eſt in ſemicirculo QAq, & quia N eſt nunc inter P & Q, & N eſt in conſequentia reſpectu Q, erit P in conſequentia reſpectu N ergo angulus NTP eſt poſitivus; ſi P ſit inter n & Q angulus QTP eſt negativus, ſed & pariter angulus NTP, nam cum P ſit in conſequentia reſpectu n plus ſemicirculo à puncto N diſtabit.

Sit N ubivis in quadrante BTQ, & P inter Q & n vel inter q & N primo caſu omnes angulos fore poſitivos, altero angulos QTP & NTP fore negativos ut in præcedenti demonſtrabitur.

Denique angulus STN ſit negativus, & P non ſit inter quadraturam & nodum ſed alibi ubivis, alteruter ex angulis QTP, NTP poſitivus erit negativus alter; ſit N in quadrante ATq & P in arcu QAN (quadrante major) erit QTP poſitivus & NTP negativus, ſiquidem P eſt in antecedentia reſpectu N, ſit P in arcu qBn erit QTP negativus, ſed NTP poſitivus nam arcus NP in conſequentia ſumptus ſemicirculo minor erit.

Sit N in quadrante qTB, ſi P ſit in arcu nq, angulus QTP poſitivus eſt ſed angulus NTP negativus quia arcus Nn+nP ſemicirculo major eſt, ſi P ſit in arcu NQ angulus QTP eſt quidem negativus, ſed quia P eſt in conſequentia reſpectu N minuſque ſemicirculo diſtat, ergo angulus NTP eſt poſitivus; Hinc ubivis ſit P ſi modo non ſit inter nodum & quadraturam proximam, vel omnes anguli

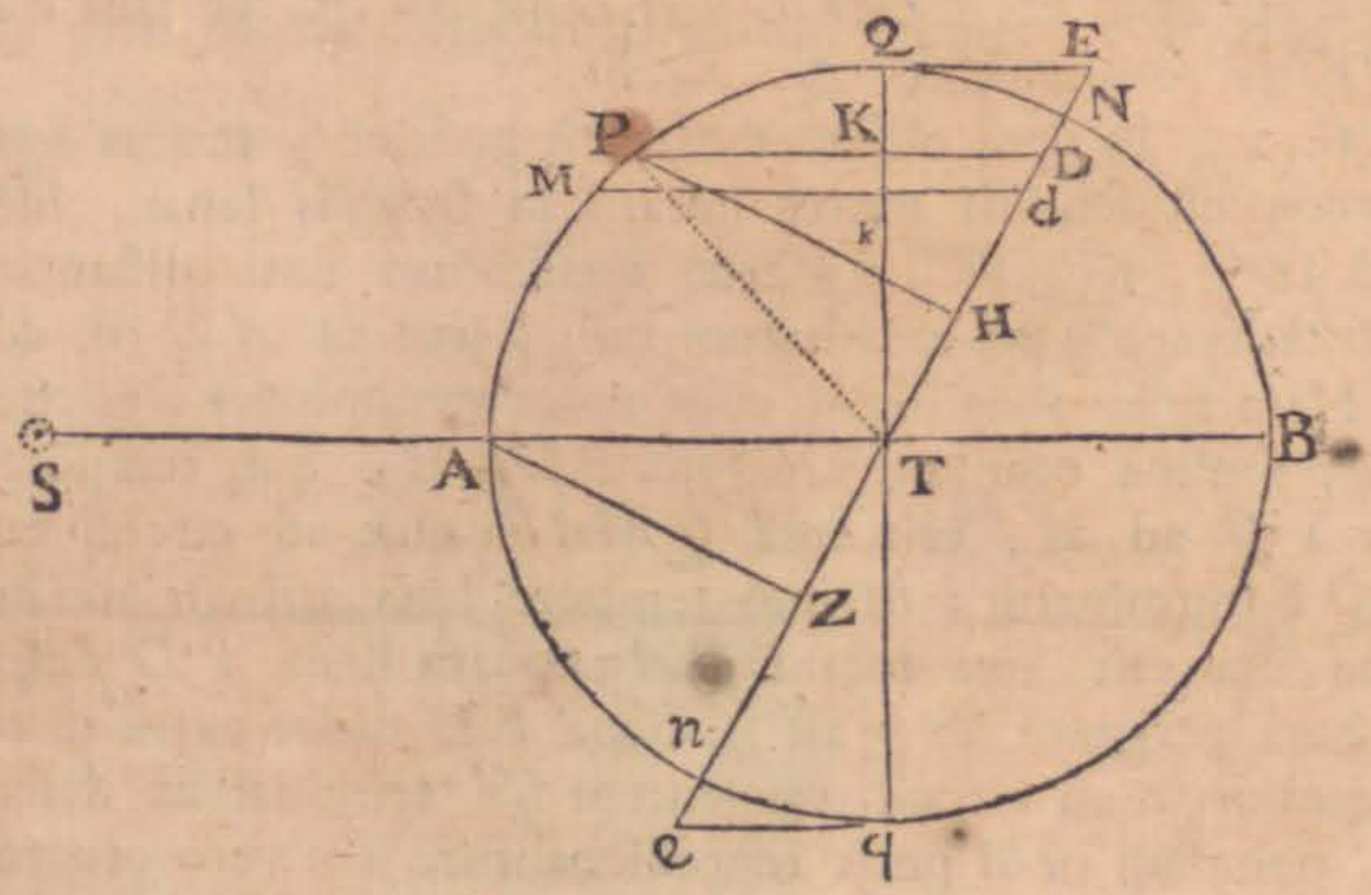


erunt Poſitivi, vel duo ſimul negativi alter verò poſitivus.

Cum ergo arcus inter N vel n & quadraturam proximam, numquam excedat quadrantem, eoque ſit ſæpe minor; è contra verò, arcus inter N vel n & quadratu-

Corol. 1. Hinc si à dati arcus quam minimi PM terminis P & M ad lineam quadraturas jungentem Qq demittantur perpendicula PK, Mk, eademque producantur donec secent lineam nodorum Nn in D & d; erit motus horarius nodorum

LIBER TERTIUS PROP. XXX. PROBL. XI.



ut area $MPDd$ & quadratum lineæ AZ conjunctim. Sunto enim PK, PH & AZ prædicti tres sinus. Nempe PK sinus distantiæ lunæ à quadraturâ, PH sinus distantiæ lunæ à nodo, & AZ sinus distantiæ nodi à sole: & erit velocitas nodi ut con-

draturam remotiorem numquam sit minor quadrante & sæpe eo major, majori parte revolutionis Lunæ, Nodi regrediuntur & per excessum regressus supra progressum, singulis mensibus nodi feruntur in Antecedentia.

Potuissent Articuli 4. supra demonstrati, ex solâ vi signorum Algebricorum deduci, eamque demonstrationis speciem adhibere videtur Newtonus; at alicui negotium facessere potuissent horum signorum mutationes in angulis spectatæ, in quibus cum angulus ad semicirculum creverit & maximus sit, mox negativus evadit, quod sane non eveniisset si viæ descriptæ, non verò anguli considerati fuissent; Juvant Algebricæ illæ consequentiæ, in retegendis prompte Propositionibus iisque ad generalissimas expressiones revocandis, sed in nonnullis quæstionibus ad certitudinem plenam idearumque claritatem requiritur ut, per casuum enumerationem, illæ Algebricæ consequentiæ, velut ad lapidem Lydium explorentur. Cæterum, quamvis figuras unicuique casui proprias non delineaverimus, facile erit ex iis quæ sculptæ sunt, figuras deficientes imaginari aut describere. 1141.

DE MUNDI SYSTEMATE.

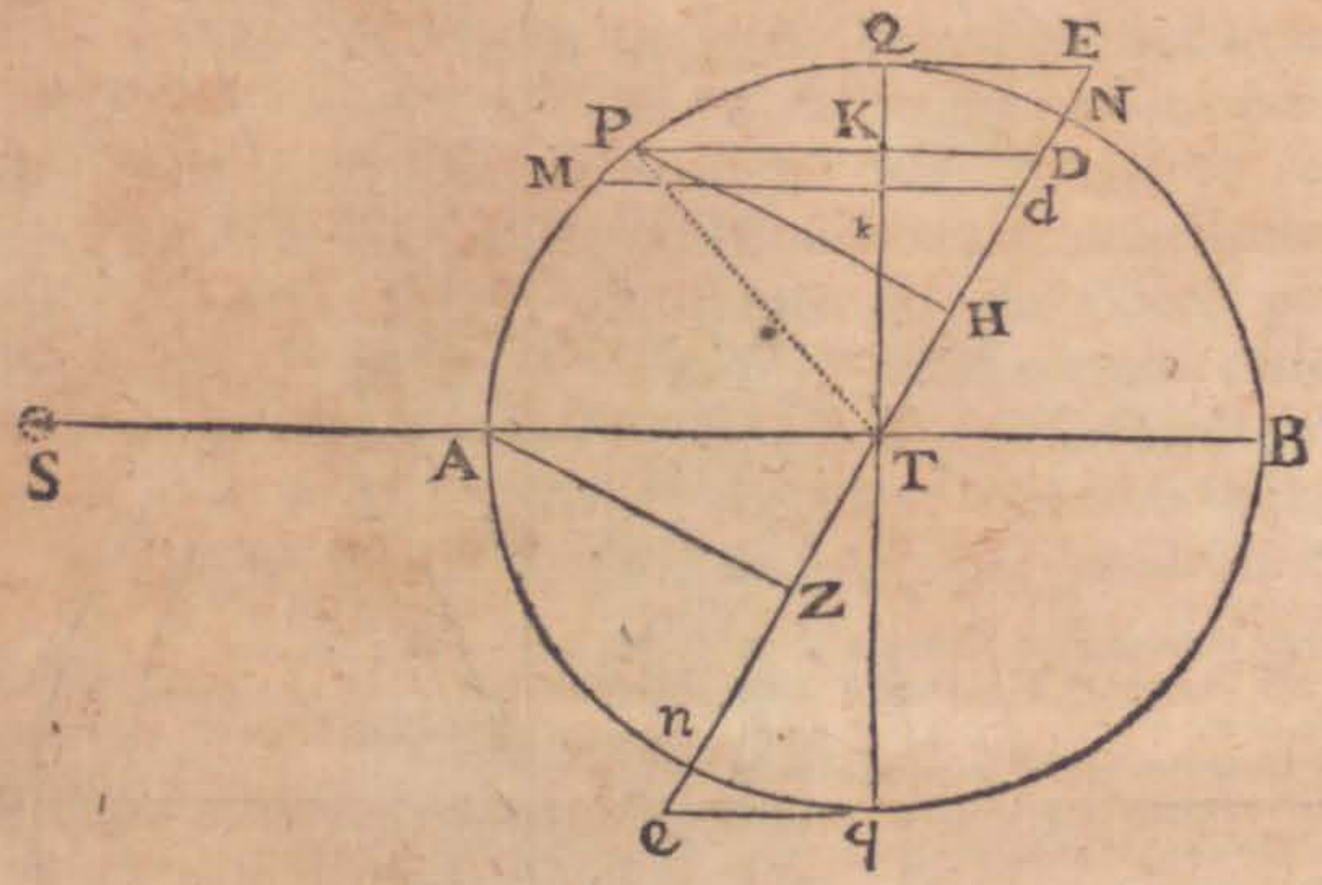
contentum $PK \times PH \times AZ$. Eſt (P) autem PT ad PK ut PM ad Kk, ideoque ob datas PT & PM eſt Kk ipſi PK proportionalis. Eſt & AT ad PD ut AZ ad PH, & propterea PH rectangulo $PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus $PK \times PH$ eſt ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ *qu.* id eſt, ut area $PDdM$ & AZ *qu.* conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 2. In datâ quâvis nodorum poſitione, motus horarius mediocris eſt ſemiſſis motus horarii in ſyzygiis lunæ, ideoque eſt ad $16^{II}.\ 35^{III}.\ 16^{IV}.\ 36^{V}.$ ut quadratum ſinus diſtantiæ nodorum à ſyzygiis ad quadratum radii, ſive ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Nam ſi luna uniformi cum motu perambulet ſemicirculum QAq, ſumma omnium arearum $PDdM$, quo tempore luna pergit à Q ad M, erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore luna attingit punctum n, ſumma illa erit area tota $EQAn$ quam linea PD deſcribit, dein lunâ pergente ab n ad q, linea PD cadet extra circulum, & aream nqe ad circuli tangentem qe terminatam deſcribet; quæ, quoniam nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, ſubduci debet de areâ priore, & cum æqualis ſit areæ QEN, relinquet ſemicirculum $NQAn$. Igitur ſumma omnium arearum $PDdM$, quo tempore luna ſemicirculum deſcribit, eſt area ſemicirculi; & ſumma omnium quo tempore luna circulum deſcribit eſt area circuli totius. At area $PDdM$, ubi luna verſatur in ſyzygiis, eſt rectangulum ſub arcu PM & radio PT; & ſumma omnium huic æqualium arearum, quo tempore luna circulum deſcribit, eſt rectangulum ſub circumferentiâ totâ & radio circuli; & hoc rectangulum, cum ſit æquale duobus circulis, duplo majus eſt quam rectangulum prius. Proinde nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in ſyzygiis lunaribus, ſpatium duplo majus deſcriberent quam reverâ deſcribunt; & propterea motus mediocris quocum, ſi

114. (P) * *Eſt autem PT ad PK ut PM ad Kk* ex notiſſimâ circuli proprietate Radium eſſe ad ordinatam ut eſt fluxio arcus ad fluxionem abſciſſæ.

si uniformiter continuaretur, spatium à se inæquabili cum motu reverâ confectum describere possent, est semissis motus quem habent in syzygiis lunæ. Unde cum motus horarius maximus, si nodi in quadraturis versantur, sit $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{IV}.\ 12^{V}$, motus mediocris horarius in hoc casu erit $16^{II}.\ 35^{III}.\ 16^{IV}.\ 36^{V}$. Et (q) cum motus horarius nodorum semper sit ut *AZ qu.* &

LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROBL. XI.



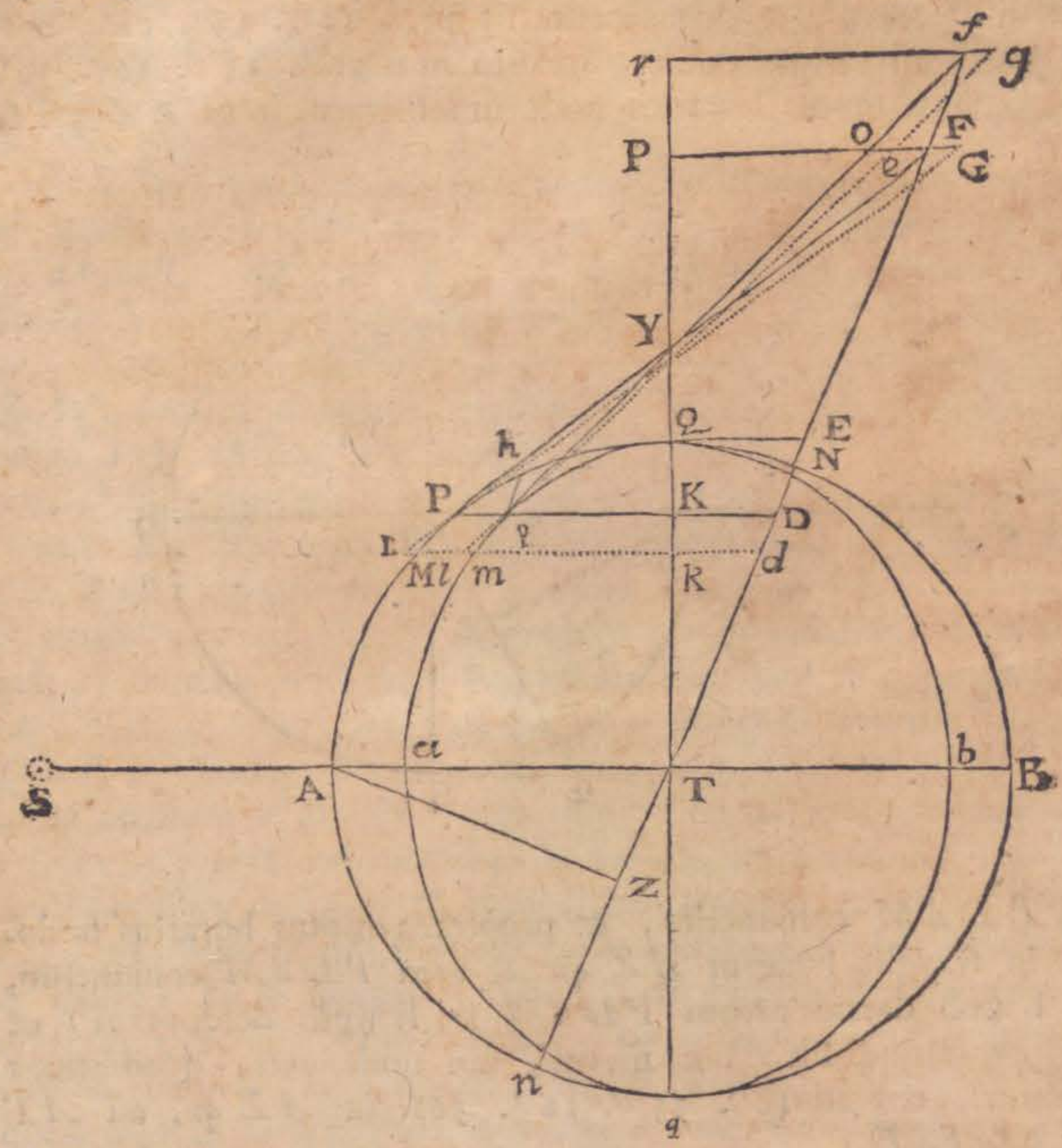
area *PDdM* conjunctim, & propterea motus horarius nodorum in syzygiis lunæ ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, id est (ob datam aream *PDdM* in syzygiis descriptam) ut *AZ qu.* atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas versantur, erit ad $16^{II}.\ 35^{III}.\ 16^{IV}.\ 36^{V}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* *Q. E. D.*

(q) * *Et cum motus horarius nodorum sit &c.* per Corollarium præcedentem.

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe elliptico (r).



Defignet $Qpmaq$ ellipfin, axe majore Qq, minore ab defcriptam, $QAqB$ circulum circumfcriptum, T terram in utriufque centro communi, S folem, p lunam in ellipfi moram, & pm

1.1.4. (r) * *In orbe Elliptico* illo nempe orbe in quem figura circularis orbitæ Lunaris mutatur per actionem Solis, quique axem habet majorem ad axem minorem in ratione 70. ad 69. per Prop. XXVIII. hujufce.

pm arcum quem datâ temporis particulâ quam minimâ describit, N & n nodos linea Nn junctos, pK & mk perpendicula in axem Qq demissa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in P & M, & lineæ nodorum in D & d. (f) Et si luna, radio ad terram ducto, aream describat tempori proportionalem, erit motus horarius nodi in ellipsi ut area $pDdm$ & AZq conjunctim.

Nam si PF tangat circulum in P, & producta occurrat TN in F & pf tangat ellipsin in p & producta occurrat eidem TN in f, (t) conveniant autem hæ tangentes in axe TQ ad Y; & si ML designet spatium quod luna in circulo revolvens, interea dum describit arcum PM, urgente & impellente vi prædictâ $3IT$, seu $3PK$ motu transverso describere posset, & ml designet spatium quod luna in ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$ seu $3pK$, describere posset; & producantur LP & lp donec occurrant plano ecliptiæ in G & g; & jungantur FG & fg, quarum FG producta secet pf,

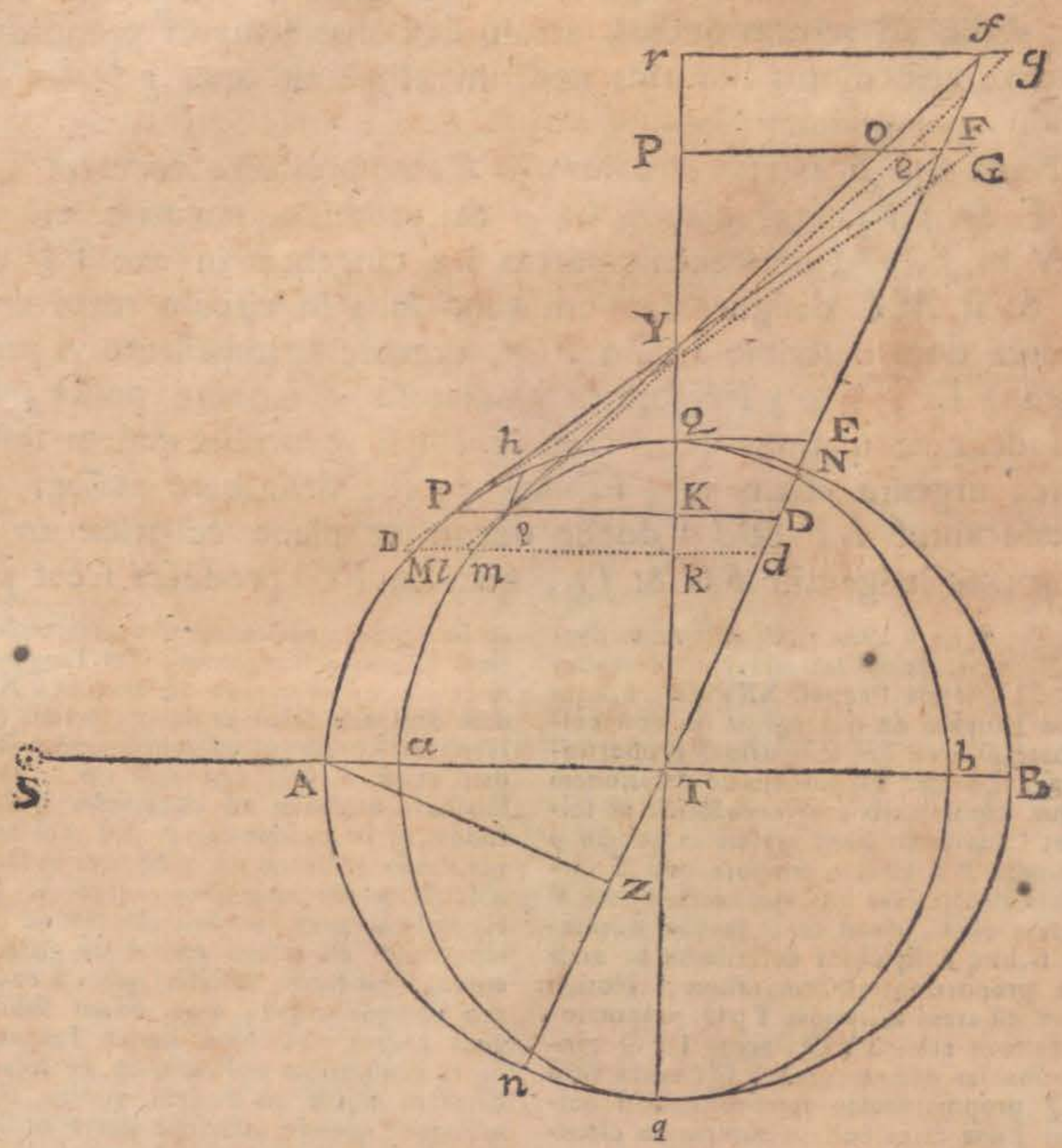
(f) * *Et si Luna radio ad terram ducto describat aream tempori proportionalem* &c. Liquet ex Propos. XXVIII. Lunam hanc Ellipsim de quâ agitur ita non describere ut areæ sint temporibus proportionales, sed hæc Hypothesis ad solutionem hujus Problematis erat necessaria, ut scilicet Luna possit fingi versari in puncto p ordinatæ P K eodem tempore quo si circulum describeret in ejus extremitate P versata esset, quod tunc tantùm obtineret si hæc Ellipsis ita describatur ut areæ sint proportionales temporibus; Notum enim est areas Ellipticas T p Q proportionales fore areis T P Q, areas T P Q proportionales esse arcubus P Q, arcus verò P Q proportionales temporibus, si quidem Luna citra Solis actionem in circulo lata, uniformiter moveretur.

Verum hæc falsa Hypothesis corrigitur in eâ solutionis hujus Problematis parte quæ post Corollarium adjicitur.

(t) * *Conveniant autem hæ Tangentes in axe T Q ad Y.* Liquet ex not. 257. Lib. I. Quod si duæ curvæ communem axem habentes, sint tales ut ipsarum ordinatæ datam inter se rationem servent, & in summo ordinatarum correspondentium ducantur Tangentes, illæ Tangentes in eodem axeos puncto concurrunt; Nam cum ordinatæ datam rationem servent (ex Hypoth.) oportet ut ipsarum fluxiones eamdem etiam servent rationem ita ut ratio fluxionis ordinatæ ad ordinatam ipsam, eadem sit in utrâque curvâ. Est verò semper fluxio ordinatæ ad ordinatam ut fluxio abscissæ ad subtangentem, ergo in hâc Hypothesi, ratio fluxionis abscissæ ad subtangentem est etiam eadem in utraque curva, sed fluxio abscissæ ipsa est eadem pro utrâque curvâ, ergo etiam subtangens eadem est, hinc itaque Tangentes in extremitatibus ordinatarum correspondentium ductæ in eodem puncto axem attingunt quando utriusque curvæ ordinatæ ad eadem axeos puncta pertinentes, constantem rationem servant: Notum autem est, ex not. 247. Lib. I, Quod si circulus describatur super axim Ellipseos, ordinatæ circuli & Ellipseos erunt inter se in ratione datâ axeos communis circulo & Ellipsi ad alterum axem, sive esse P K ad p K ut A T ad a T, hinc ergo Tangentes in punctis P & p ductæ axi occurrent in eodem puncto Y. 1142

DE MUNDI SYSTEMATE.

pg & TQ in c, e & R respectivè, & fg producta secet TQ in r. Quoniam vis $3IT$ seu $3PK$ in circulo est ad vim $3IT$ seu $3pK$ in ellipsi, ut PK ad pK, seu AT ad aT; erit spatium ML vi priore genitum, ad spatium ml vi posteriore genitum, ut PK ad pK, id est, ob similes figuras $PYKp$ & $FYRc$, ut FR ad cR. Est autem ML ad FG (ob similia triangula PLM, PGF) ut PL ad PG, hoc est (ob parallelas Lk, PK, GL) ut pl ad pe, id est (ob similia triangula plm, cpe) ut lm ad ce; & inversè ut LM est ad lm, seu FR ad cR, ita est FG ad ce. Et propterea si fg esset ad ce ut fY ad cY, id est, ut fr ad cR (hoc est, ut fr ad FR



& FR ad cR conjunctim, id est, ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & fT ad FT, foret fg ad FG ut fT ad FT; atque ideo anguli, quos FG & fg subtenderent ad terram T, (u) æquarentur inter se. [Sed anguli illi (per ea quæ in præcedonte propositione expositimus) sunt motus nodorum, quo tempore luna in circulo arcum PM, in ellipsi arcum pm percurrit: & propterea motus nodorum in circulo & ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo fg esset ad ce ut fY ad cY, id est, si fg æqualis esset $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verùm ob similia triangula fgp, cep, est fg ad ce ut fp ad cp; ideoque fg æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$; & (x) propterea angulus, quem fg reverâ subtendit, est ad angulum priorem quem FG subtendit, hoc est, motus nodorum in ellipsi ad motum nodorum in circulo, ut hæc fg seu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg seu $\frac{ce \times fY}{cY}$, id est, ut $fp \times cY$ ad $fY \times cp$, seu fp ad fY & cY ad cp, hoc est, si ph ipsi TN parallela occurrat FP in h, ut Fh ad FY & FY ad FP; hoc est, ut Fh ad FP seu Dp ad DP, (y) ideoque ut area $Dpmd$ ad aream $DPMd$. Et propterea, cum (per corol. 1. prop. xxx.) area posterior & AZq conjunctim proportionalia sint motui horario nodorum in circulo, erunt area prior & AZq conjunctim proportionalia motui horario nodorum in ellipsi. *Q. E. D.* *Co-*

LIBER TERTIUS. PROP. XXXI. PROB. XII.

(u) * *Atque ideo anguli quos FG & fg subtenderent ad terram T æquarentur inter se*, nam cum lineæ FG & fg sint inter se Parallelæ & proportionales lineis TF, Tf, recta TG producta transibit etiam per g, ideoque per eundem angulum videbuntur lineæ FG & fg ex terrâ T.

(x) * *Et propterea angulus quem fg reverâ subtendit est ad angulum priorem ut hæc fg ad priorem fg.* Cum enim linea fg sit minima, respectu lineæ Tg linea Tg eadem manere censenda est in utrâque magnitudine lineæ fg hic assumpta; sed in Triangulo utroque Tfg. Sinus anguli f est ad lineam Tg, ut sinus anguli fTg ad lineam fg; ergo cum maneat angulus f, & linea Tg; ratio sinus anguli fTg ad lineam fg erit data, sive quia anguli minimi sunt ut sui sinus, erit angulus quem fg reverâ subtendit ad angulum quem ficta fg subtendebat, ut vera fg ad fictam fg. 1144.

(y) * *Ideoque ut area Dpmd ad aream DPMd* nempe propter communem altitudinem Kk, nam Trapezia pDdI, PDdL, pro Parallelogrammis assumi possunt quæ sunt ut Bases Dp, DP, & altitudines Kk conjunctim.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Corol. Quare cum, in datâ nodorum positione, summa omnium arearum $pDdm$, quo tempore luna pergit à quadraturâ ad locum quemvis m, fit area $mpQEd$, quæ ad ellipseos tangentem QE terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integrâ, fit area ellipseos totius: motus mediocris nodorum in ellipsi erit ad motum mediocrem nodorum in circulo, ut ellipsis ad circulum; id est, ut Ta ad TA, seu 69 ad 70. Et propterea, cum (per corol. 2. prop. xxx) motus mediocris horarius nodorum in circulo sit ad $16^{II}.\ 53^{III}.\ 16^{iv}.\ 36^{v}$. ut $AZ\ qu.$ ad $AT\ qu.$ si capiatur angulus $16^{II}.\ 21^{III}.\ 3^{iv}.\ 30^{v}$. ad angulum $16^{II}.\ 35^{III}.\ 16^{iv}.\ 36^{v}$. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in ellipsi ad $16^{II}.\ 21^{III}.\ 3^{iv}.\ 30^{v}$. ut APq ad ATq; hoc est, ut quadratum sinus distantiæ nodi à sole ad quadratum radii.

([z]) Cæterum luna, radio ad terram ducto, aream velocius describit in syzygiis quam in quadraturis, & eo nomine tempus in syzygiis contrahitur, in quadraturis producitur; & unà cum tempore motus nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis lunæ ad ejus momentum in syzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in octantibus est ad excessum in syzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50. Unde cum tempus lunæ in singulis orbis particulis æqualibus sit reciprocè ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad excessum temporis in quadraturis, ac defectum in syzygiis, ab hâc causâ oriundum, ut 11023 ad 50 quam proximè. ([a]) Pergendo autem à quadraturis ad syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in quadraturis, sit ut quadratum sinus distantiæ lunæ à quadraturis quam proximè; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque

114. (z) * *Cæterum Luna*, &c. Hæc omnia ex Prop. 26. hujusce deducuntur.

(a) * *Pergendo autem à quadraturis.* Ville not. 1 Prop. 26. & locum ad quem refertur.

que & momentum mediocre in octantibus, eſt ut differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ lunæ à quadraturis & quadratum ſinus graduum 45, ſeu ſemiſſem quadrati radii; & incrementum temporis in locis ſingulis inter octantes & quadraturas, & decrementum ejus inter octantes & ſyzygias, eſt in eâdem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore luna percurrit ſingulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicatâ ratione temporis. Eſt enim (b) motus iſte, dum luna percurrit *PM* (cæteris paribus) ut *ML*, & *ML* eſt in duplicatâ ratione temporis. Quare (c) motus nodorum in ſyzygiis, eo tempore confectus quo luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicatâ ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque (d) decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut

100

(b) * *Eſt enim motus iſte (cæteris paribus) ut ML, & ML eſt in duplicatâ ratione temporis*, motus nodorum generatur per actionem vis Solaris 3 I T quæ uniformis manere cenſetur dum deſcribitur arcus P M, hinc creſcit L M in duplicatâ ratione temporis Lem. X. Lib. I., expreſſit autem Newtonus motum nodorum fingendo in puncto ipſo P, à Sole ſimul & ſemel eam actionem imprimi quæ toto tempore quo arcus P M deſcribitur ab ipſo exercita fuiſſet, & lineam L M eſſe ſpatium quod velocitate ita productâ ipſo eo tempore quo arcus P M percurritur deſcriberetur, hinc itaque conſtat eam lineam fore in duplicatâ ratione temporis, (vid. not. 28. & 30. lib. 1.) hæc autem linea L M eſt proportionalis verò effectui actionis Solis (vid. not. h Prop. XXX. hujuſce).

(c) * *Quare motus nodorum.* Momentum areæ in ſyzygiis ſive velocitas Lunæ in ſyzygiis eſt ad velocitatem mediocrem in octantibus ut 11073 ad 11023 ergo tempus quo Luna æquales arcus P M deſcribet in ſyzygiis eſt ad tempus quo eos arcus P M deſcribere cenſebatur velocitate mediocri ut 11023 ad 11073, motus ergo nodorum in ſyzygiis fit minor quàm adſumptus fuerat in ratione duplicatâ numerorum 11023 & 11073. 114.

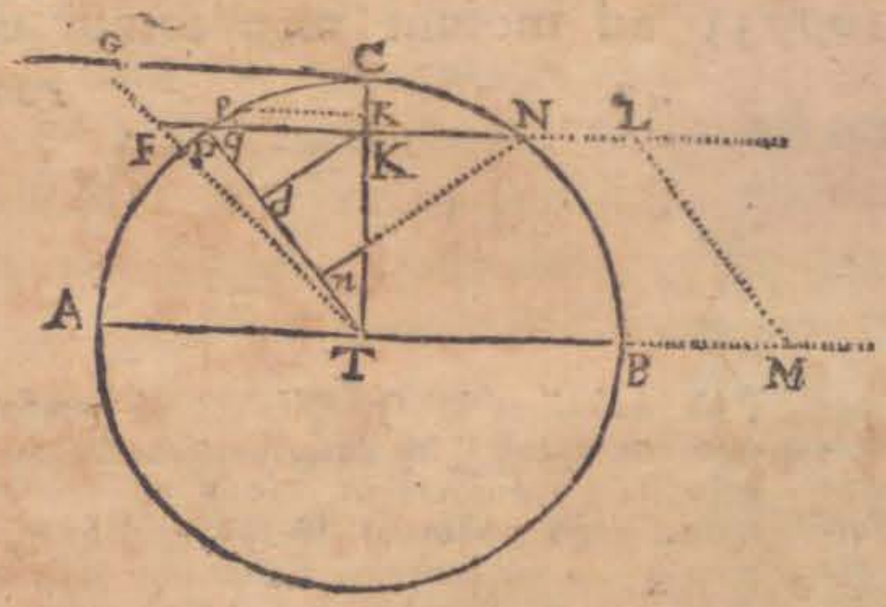
(d) * *Eſtque decrementum ad motum reliquum ut* 100 *ad* 10973, *ad motum totum ut* 100 *ad* 11073. Motus reliquus eſt ad motum totum ut $\overline{11023}^2$ ad $\overline{11073}^2$ ſive ut $11073-50^2$ ad $\overline{11073}^2$; ſive priorem quantitatem ad quadratum evehendo ſecundum formulam vulgarem dignitatum ut $\overline{11073}^2-2\times50\times11073+50^2$ ad $\overline{11073}^2$, negligatur terminus 50^2, cæterorum enim reſpectu evaneſcit fiet motus reliquus ad totum ut $\overline{11073}^2-2\times50\times11073$ ad $\overline{11073}^2$, & dividendo per 11073, ut $11073-2\times50$ ad 11073.

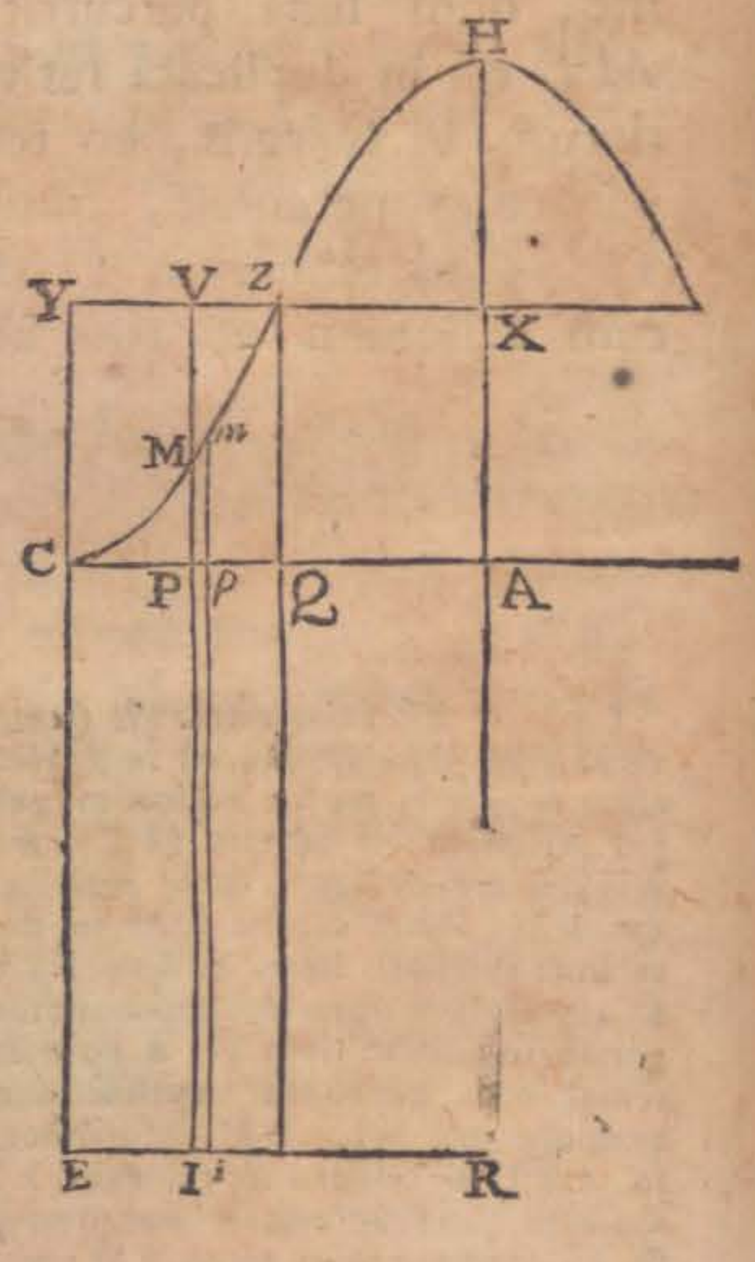
Eſt ergo differentia motûs reliqui & motus totius h. e. motûs decrementum ad motum totum, ut 2×50 ſive 100 ad 11073, ideoque etiam eſt motus decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973.

DE MUNDI SYSTEMATE.

100 ad 1107; quam proximè. (e) Decrementum autem in locis inter octantes & syzygias, & incrementum in locis inter octantes & quadraturas, est quam proximè ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in syzygiis & differentia inter quadratum sinus distantiæ lunæ à quadraturâ & semissem quadrati radii ad semissem quadrati radii conjunctim.

Unde





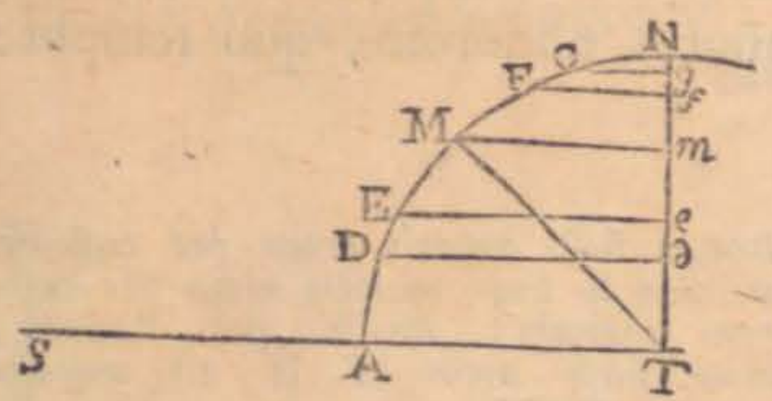
(e) * *Decrementum inter octantes & syzygias & incrementum inter octantes & quadraturas est quam proximè &c.* Resumptis iis quæ in Prop. XXVI. not. 112. sunt dicta, designet CP distantiam Lunæ à quadraturâ, lineâ IM exprimet ejus velocitatem & IV exprimet velocitatem mediocrem, idcircò tempus quo describitur arcus PM hâc velocitate IM, est ad tempus quo velocitate mediocri IV describeretur, ut IV ad IM, ideoque motus nodorum verus foret ad eorum motum si Luna mediocri suâ velocitate ferretur ut $\overline{IV}^2$ ad $\overline{IM}^2$ sive ut IV^2 ad $\overline{IV \pm VM}^2$ aut ut IV^2 ad $IV^2 \pm 2IV \times VM + VM^2$ & neglectâ quantitate $\overline{VM}^2$ divisisque terminis per IV ut IV ad $IV \pm 2VM$; & convertendo differentia motus veri nodorum & motus inventi, est ad motum inventum ut $\pm 2VM$ ad $IV \pm 2VM$, hinc illa differentia, sive incrementum

aug

(f) Unde ſi nodi in quadraturis verſentur, & capiantur loca duo æqualiter ab octante hinc inde diſtantia, & alia duo à ſyzygiâ & quadraturâ iiſdem intervallis diſtantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter ſyzygiam & octantem, ſub-

aut decrementum motus nodorum eſt ſemper æquale motui nodorum qualis inventus fuerat ducto in 2VM & diviſo per JV±VM, ideoque cum JV±2VM pro conſtanti aſſumi poſſit quia 2VM ferè evaneſcit reſpectu quantitatis JV, eſt illud incrementum aut decrementum ut motus nodorum qualis inventus fuerat & VM conjunctim; eſt verò VM differentia inter ZQ & MP, & ſunt ZQ & MP ut quadrata ſinuum arcuum CQ & CP, arcus verò CQ eſt 45gr. ex demonſtratis ad Prop. XXVI. & quadratum ejus ſinus eſt ſemiſſis quadrati radii; CP verò eſt diſtantia Lunæ à quadraturâ; Ergo, incrementum aut decrementum motus nodorum eſt ut motus nodorum qualis inventus fuerat & differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſemiſſem quadrati radii conjunctim: In ſyzygiis quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ à quadratura eſt ipſum quadratum radii, unde differentia quadrati ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſemiſſis quadrati radii, eſt in hoc caſu ipſe ſemiſſis quadrati radii, hinc erit decrementum aut incrementum motus nodorum in loco quovis ad decrementum ejus motus in ſyzygiis ut ſunt motus nodorum iis in locis ad motum nodorum in ſyzygiis (quales citra hanc correctionem inventi fuerant,) & ut differentiæ quadratorum ſinuum diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſemiſſis quadrati radii ad eum ſemiſſem quadrati radii conjunctim. Q. E. O.

(f) * *Unde ſi nodi* &c. Verſentur nodi in Quadraturis, capiantur loca F & E ab octante M hinc inde æqualiter diſtantia, & alia duo D & G à ſyzygiâ A & quadraturâ N diſtantia intervallis DA, GN quæ æqualia ſint inter ſe, & eadem ac intervalla ME, MF, ſumantur decrementa motus nodorum in punctis E & D & ex ſumma eorum decrementorum ſubducatur ſumma incrementorum in punctis G & F, & reſiduum erit ipſum decrementum in ſyzygia A. 114.



Etenim, per præcedentia, decrementa ſive incrementa; ſunt ut motus totus nodorum & differentia quadrati ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſemiſſis radii conjunctim; eſt verò motus totus nodorum, ut contentum ſub ſinubus diſtantiarum Lunæ à quadraturâ, Lunæ à nodo, & nodi à Sole (per Prop. XXX.) ſinus autem diſtantiæ nodi à Sole, in hoc caſu eſt ipſe Radius, eſtque conſtans pro omnibus incrementis decrementiſque aſſumendis, diſtantia verò Lunæ à nodo eadem eſt ac diſtantia Lunæ à quadraturâ, cum nodi ſint in quadraturis; Ergo motus totus nodorum eſt ut quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ, & decrementa ſive incrementa ſunt ut contentum ſub quadrato ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſub differentiâ ejuſdem quadrati & ſemiſſis radii.

Dicatur itaque Radius r, ſinus arcus NG dicatur s, erit incrementum motus nodorum in G ut $ss \times \frac{1}{2}rr - ss$ ſive $\frac{1}{2}r^2 s^2 - s^4$.

Ut obtineatur incrementum motus nodorum in F, obſervandum, quod ſiquidem arcus FM eſt æqualis arcui NG cujus ſinus eſt s, & NF + FM eſt æqualis octanti cujus ſinus eſt $r\sqrt{\frac{1}{2}}$ & per Principia Trigonometrica, ſinus arcus qui eſt differentia duorum arcuum quorum ſinus ſunt dati, eſt æqualis differentiæ factorum

DE MUNDI SYSTEMATE.

ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter octantem & quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in ſyzygiâ: uti rationem ineunti facile conſtabit. (g) Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in ſyzygia. Motus totus horarius nodorum in ſyzygiis, ubi luna radio ad terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur, erat $32^{II}. 42^{III}. 7^{iv}$. Et decrementum motus nodorum, quo tempore luna jam velocior deſcribit idem ſpa-

§ 24. ctorum ſinûs majoris arcus per coſinum minoris & ſinus minoris arcus per coſinum majoris, diviſæ per Radium, hinc ſinus arcus F N eſt æqualis $\frac{r\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{rr-ss}-sr\sqrt{\frac{1}{2}}}{r}=\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{rr-ss}-s\sqrt{\frac{1}{2}}$, itaque incrementum nodorum in F erit $\frac{1}{2}\times\overline{\overline{rr-ss}-s}\sqrt{rr-ss}+\frac{ss}{2}\times\frac{1}{2}rr-\frac{1}{2}\overline{rr-ss}+s\sqrt{\overline{rr-ss}}-\frac{ss}{2}$ ſive deletis terminis æqualibus & oppoſitis $\frac{1}{2}\overline{rr-s\sqrt{\overline{rr-ss}}}\times s\sqrt{\overline{rr-ss}}$, & multiplicatione factâ $\frac{1}{2}r^2s\sqrt{\overline{rr-ss}}-r^2s^2+s4$. Ideoque ſumma incrementorum in G & F eſt $\frac{1}{2}r^2s\sqrt{\overline{rr-ss}}-\frac{1}{2}r^2s^2$.

Sinus autem in E & D ſunt coſinus arcuum F & G, ergo quadratum ſinus arcus NE eſt $rr-\frac{1}{2}\times\overline{rr-ss}+s\sqrt{\overline{rr-ss}}-\frac{1}{2}ss=\frac{1}{2}rr+s\sqrt{\overline{rr-ss}}$; Ideoque decrementum motus nodorum in E eſt $\frac{1}{2}rr+s\sqrt{\overline{rr-ss}}\times\frac{1}{2}rr+s\sqrt{\overline{rr-ss}}-\frac{1}{2}rr=\frac{1}{2}r^2s\sqrt{\overline{rr-ss}}+r^2ss-s4$.

Quadratum ſinus arcus N D eſt $rr-ss$, ideoque decrementum motus nodorum in D eſt $rr-ss\times rr-ss-\frac{1}{2}rr=\frac{1}{2}r^4-\frac{3}{2}r^2s^2+s4$; Sicque ſumma decrementorum eſt $\frac{1}{2}r4+\frac{1}{2}r^2s\sqrt{\overline{rr-ss}}-\frac{1}{2}r^2s^2$.

Denique in ipſâ ſyzygiâ quadratum ſinus arcus ND eſt rr, ideoque decrementum motus nodorum in ſyzygia eſt $r^2\times r^2-\frac{1}{2}r^2=\frac{1}{2}r4$.

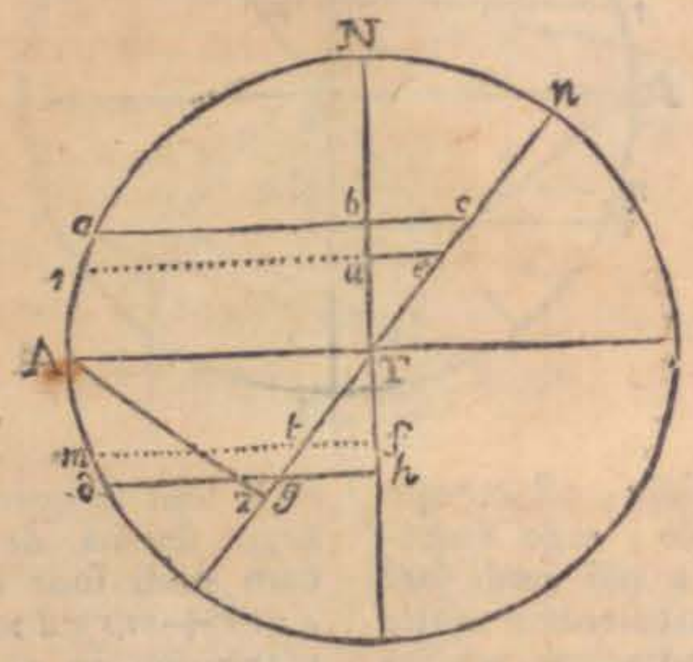
Si ergo ex ſumma decrementorum quæ inventa eſt $\frac{1}{2}r4+\frac{1}{2}r^2s\sqrt{\overline{rr-ss}}-\frac{1}{2}r^2s^2$ detrahatur ſumma incrementorum quæ inventa eſt $\frac{1}{2}r^2s\sqrt{\overline{rr-ss}}-\frac{1}{2}r^2s^2$ decrementorum reſiduum eſt ipſum $\frac{1}{2}r4$ quod decrementum motus nodorum in ſyzygia exprimet. Q. E. D.

(g) * *Proindeque decrementum mediocre* &c. In toto arcu N A, puncta aſſumantur quam proxima quotquot lubebit quæ quaternatim ſumantur, ita ut quatuor quæ ſimul aſſumuntur ita diſponantur ut duo ab octante æqualiter diſtent hinc inde & alia duo tantumdem à ſyzygia & quadratura diſtent; Decrementum motus nodorum in duobus punctis quæ ſunt inter ſyzygiam & octantem ſuperat incrementum ejus motus in aliis duobus punctis quantitate æquali decremento in ipſâ ſyzygiâ; ſi itaque motus mediocris aſſumendus ſit, id decrementum quadrifariam dividi debet & de motu mediocri ſingula quarta pars detrahi debet, ſic enim motus mediocris ille æquipollebit motui vero peracto in illis quatuor punctis ſimul ſumptis; ille decrementi exceſſus idem eſt pro quibuſvis punctis ita quaternatim ſumptis itaque motus mediocris nodorum in omnibus punctis adjectâ conſideratione inæqualitatis motus Lunæ ex actione Solis ortæ erit motus mediocris nodorum prius inventus, multatus quartâ parte illius decrementi.

Cum

ſpatium, diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073; ideoque decrementum illud eſt $17^{III}. 43^{iv}. 11^{v}$, cujus pars quarta $4^{III}. 25^{iv}. 48^{v}$ motui horario mediocri ſuperius invento $16^{II}. 21^{III}. 3^{iv}. 30^{v}$ ſubducta, relinquit $16^{II}. 16^{III}. 37^{iv}. 42^{v}$ motum mediocrem horarium correctum. LIBER TERTIUS. PROP. XXXI. PROBL. XII.

(h) Si nodi verſantur extra quadraturas, & ſpectentur loca bina à ſyzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum nodorum, ubi luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi luna in iiſdem locis & nodi in quadraturis verſantur, ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Et (i) decrementa motuum, à cau-



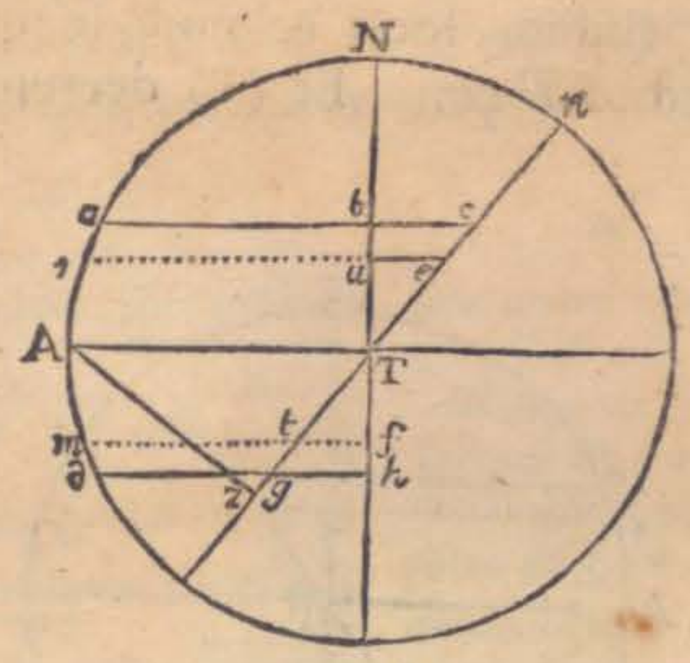
Cum ergo ille exceſſus decrementorum ſuper incrementa ſit ipſum decrementum motus in ſyzygiâ Seorſim conſideratâ, & id decrementum in ſyzygiâ ſeorſim inventum ſit, *decrementum mediocre quod de nodorum motu mediocri ſubduci debet eſt pars quarta decrementi in ſyzygiâ.*

(h) * *Si nodi verſantur extra quadraturas* putà in locis n *&* *ſpectentur loca bina a & d à ſyzygiâ A hinc inde diſtantia* erit motus nodorum in loco *a* ut Elementum *acer* & quadratum lineæ AZ conjunctim (cor. 1. prop. 30.); ſimiliter motus nodorum in loco *d* erit ut elementum *mtgd* & quadratum lineæ AZ conjunctim; ſi verò nodi verſentur in quadraturis erit (ibid.) ſumma motuum in binis locis *a* & *d* ut $abru + mfdh$, vel $2abrv$ & quadratum radii AT conjunctim; ſed ob æqualia intervalla Tb, Th ſumma arearum $acer + mtgd = 2abru$. Quare ſumma motuum nodorum ubi Luna verſatur in locis *a*, *d* nodis exiſtentibus extra quadraturas, erit ad ſummam motuum ubi Luna in iiſdem locis & nodi in quadraturis verſantur ut $2abru \times AZ^2$ ad $2abru \times AT^2$ hoc eſt ut AZ^2 ad AT^2. 1141

(i) * *Et decrementa motuum* in loco *a* quando nodi ſunt extra quadraturas, & quando nodi ſunt in quadraturis, ſunt ut ipſi motus; Nam cum arcus *ar* in utroque caſu æquali tempore percurratur, differentia ejus temporis à tempore mediocri utrinque eadem erit, ac per conſequens error nodi, à loco in quo eo tempore

DE MUNDI SYSTEMATE.

cauſis jam expoſitis oriunda, erunt ad invicem ut ipſi motus, ideoque motus reliqui erunt ad invicem ut *AZ qu.* ad *AT qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Eſt itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque nodorum ſitu, ad 16^{II}. 16^{III}. 37^{iv}. 42^{v}. ut *AZ qu.* ad *AT qu.*; id eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ nodorum à ſyzygiis ad quadratum radii.



114. mediocri procedere debuiſſet, eſt ut ejus motus horarius in eo loco; ergo decrementum motus nodi in *a* ubi nodi ſunt in quadraturis eſt ad decrementum motus in *a* cum nodi extra quadraturas verſantur ut $abru \times AT^2$ ad $acer \times AZ^2$, & pariter decrementum motus nodi in *d* ubi nodi ſunt in quadraturis eſt ad decrementum motus in *d* cum nodi ſunt extra quadraturas, ut $mfhd \times AT^2$ ad $mtgd \times AZ^2$; decrementa autem motus in *a* & *d* æqualia ſunt quando nodi ſunt in quadraturis, ob æquales diſtantias à ſyzygiâ, & $mfhd = abru$; hinc decrementum motus in *a* cum nodi extra quadraturas verſantur eſt ad $acer \times AZ^2$ ut decrementum motus in *d* cum nodi extra quadraturas verſantur eſt ad $mtgd \times AZ^2$, & etiam ut decrementum in *a*, aut *d* cum nodi ſunt in quadraturis ad $abru \times AT^2$; Ergo ſumma decrementorum in *a* & *d* cum nodi ſunt extra quadraturas eſt ad $acer + mtgd \times AZ^2$ ut ſumma decrementorum in *a* & *d* cum nodi ſunt in quadraturis ad $2abru \times AT^2$, ſed $acer + mtgd = 2abru$ per notam præcedentem, ergo, ſumma decrementorum in binis locis à ſyzygiis hinc inde æqualiter diſtantibus cum nodi ſunt extra quadraturas eſt ad ſummam decrementorum in iiſdem locis cum nodi ſunt in ſyzygiis, ut AZ^2 ad AT^2, cum ergo ſummæ motuum ipſorum in eâ ſint ratione, reliqui motus erunt in eâ ipſâ ratione ideoque & motus mediocres; *Eſt itaque &c.*

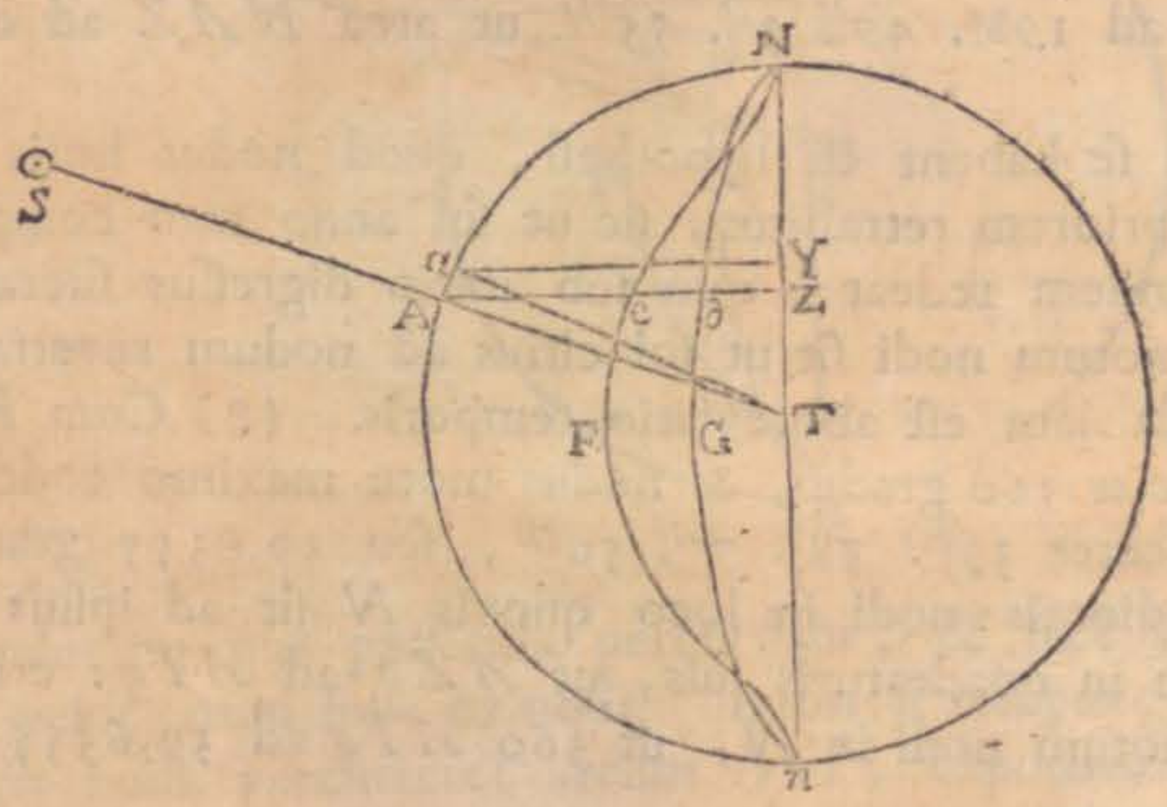
PRO-

LIBER TERTIUS. PROP. XXXII. PROBL. XIII.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

Invenire motum medium nodorum lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe nodum verſari in *N*, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad ſtellas fixas. Interea verò ſolem *S*, per motum terræ, progredi



à nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad ſolem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli *NAn*, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut *AZq*, id eſt (ob (1) proportionales *AZ*, *ZY*) ut rectangulum ſub *AZ* & *ZY*, hoc eſt, ut area *AZYa*. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium

(1) * *Ob proportionales AZ, ZY* eſt enim TA:Aa::AZ:ZY, ideoque ob conſtantes TA & Aa, quantitates AZ, ZY ubique eamdem habent inter ſe rationem, ducatur utraque in AZ facta AZ×AZ, & ZY×AZ datam rationem ubique habebunt, erit itaque *AZq ut rectangulum ſub AZ & ZY.* 1141

DE MUNDI SYSTEMATE.

crium ab initio, ut ſumma omnium arearum $aYZA$, id eſt, ut area NAZ. Eſt (m) autem maxima $AZYa$ æqualis rectangulo ſub arcu Aa & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentiâ totâ & radio, id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, (n) erat $16''$. $16'''$. 37^{iv}. 42^{v}. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. hor. 6. min. 9. fit 39^{gr}. $38'$. $7''$. $50'''$. Ideoque hujus dimidium 19^{gr}. $49'$. $3''$. $55'''$. eſt motus medius nodorum circulo toti reſpondens. Et motus nodorum, quo tempore ſol pergit ab N ad A eſt ad 19^{gr}. $49'$. $3''$. $55'''$. ut area NAZ ad circulum totum.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quod nodus horis ſingulis in locum priorem retrahitur, ſic ut ſol anno toto completo ad nodum eundem redeat à quo ſub initio digreſſus fuerat. Verùm per motum nodi fit ut ſol citius ad nodum revertatur, & computanda jam eſt abbreviatio temporis. (o) Cum ſol anno toto conficiat 360 gradus, & nodus motu maximo eodem tempore conficeret 39^{gr}. $38'$. $7''$. $50'''$, ſeu 39,6355 gradus; & motus mediocris nodi in loco quovis N ſit ad ipſius motum mediocrem in quadraturis ſuis, ut AZq ad ATq: erit motus ſolis ad motum nodi in N, ut 360 ATq ad 39,6355 AZq; id

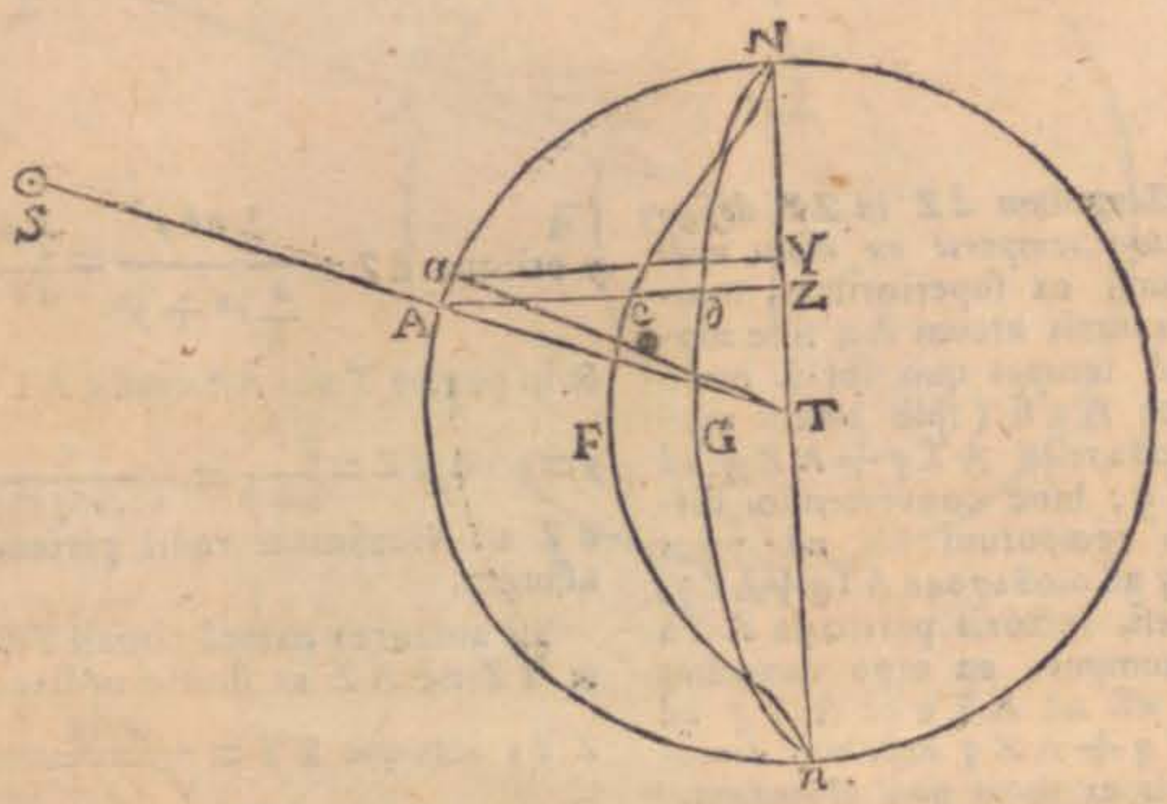
214. (m) * *Eſt autem maxima AZYa* &c. Nam quando TA eſt perpendicularis in Nn, AZ evadit TA & ZY evadit æqualis Aa, ſicque AZY = AT × Aa, in omnibus autem aliis punctis TA eſt major quam AZ, & Aa major quam ZY, maxima itaque AZY*a* eſt *æqualis rectangulo ſub arcu Aa & radio circuli.*

(n) * *Erat* $16''$ $16'''$ 37^{iv} 42^{v}, is enim erat motus horarius mediocris, cum nodi erant in Quadraturis, per Prop. præced. ideoque in hâc Propoſ. cum SAT eſt perpendicularis in Nn.

(o) * *Cum Sol* &c. Velocitas ſolis eſt ad velocitatem nodi cum nodi ſunt in quadraturis ut 360^{d}. quæ eſt via ſolis toto anno ad 39. 38'. 7". 50'" ſeu 39.6355 gradus quos nodus toto anno conficeret, ſi toto anno maximâ ſua celeritate moveretur; Velocitas nodi cum nodi ſunt in quadraturis, eſt ad nodi velocitatem cum nodi diſtant à Sole arcu AN ut ATq ad AZq per Prop. præced. Ergo ex æquo & compoſitis rationibus, velocitas ſolis eſt ad velocitatem nodi cum nodi diſtant à Sole arcu AN ut 360 ATq ad 39.6355 AZq; id eſt, dividendo 360 per 39.6355 ut 9.0827667 ATq ad AZq. Sed dividendo 360 per 39^{gr}. 38' 7" 50'" prodit numerus 9.0827646 loco hujuſce 9.0827667 collocandus.

id eſt, ut 9,0827646 ATq ad AZq. Unde ſi circuli totius circumferentia NAn dividatur in particulas æquales Aa, tempus quo ſol percurrat particulam Aa, ſi circulus quieſceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, ſi circulus unà cum nodis circa centrum T revolvatur, reciprocè ut 9,0827646 ATq ad 9,0827646 $ATq+AZq$. Nam tempus eſt reciprocè ut velocitas quâ particula percurritur, & hæc velocitas eſt ſumma velocitatum ſolis & nodi. Igitur ſi tempus, quo ſol ſine motu nodi percurreret arcum NA, exponatur per ſectorem NTA, & particula temporis quo percurreret arcum quàm minimum Aa, exponatur per ſectoris particulam ATa; & (perpendiculo aY in Nn demiſſo) ſi in AZ capiatur dZ, ejus longitudinis (P) ut ſit rectangulum dZ in ZY ad ſectoris parti-

Lib. III. Prop. XXXII. Probl. XIII.



(p) * *Ut ſit Rectangulum dZ in ZY ad ſectoris particulam ATa.* Sectoris particula ATa eſt ſemper æqualis dimidio Rectanguli AT in Aa, eſt verò ZY ad Aa ut AZ ad AT, ducantur antecedentes in dZ & conſequentes in $\frac{1}{2}$ AT erit rectangulum dZ in ZY ad $\frac{1}{2}$ AT × Aa ſive ad ſectoris particulam ATa ut dZ in AZ ad $\frac{1}{2}$ ATq ſive ut dZ in 2AZ ad ATq, ſed ſumitur eſſe dZ in ZY ad ATa ut AZq ad 9.0827646 ATq+AZq ergo etiam dZ in 2AZ eſt ad ATq ut AZq ad 9.0827646 ATq+AZq & viciſſim dZ in 2AZ eſt ad AZq ut ATq ad 9.0827646 ATq+AZq & dividendo duos priores terminos per 2AZ eſt dZ ad $\frac{1}{2}$ AZ ut ATq ad 9.0827646 ATq+AZq. 1214;

DE MUNDI SYSTEMATE.

particulam ATa ut AZq ad 9,0827646 $ATq+AZq$, id est, ut sit dZ ad $\frac{1}{2}AZ$ ut ATq ad 9,0827646 $ATq+AZq$; (q) rectangulum dZ in ZY designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d (r) tangit curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA per-

114. (q) * *Rectangulum dZ in ZY designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum*; Nam, ex superioribus, tempus quo sol percurrit arcum A a sine motu nodi, est ad tempus quo sol à nodo discedet eo arcu A a si (ipse nodus moveatur) ut 9.0827646 A T q + A Z q ad 9.0827646 A T q; hinc convertendo, differentia eorum temporum est ad prius tempus ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q, sed, ex hypothesi, sectoris particula A T a designat prius tempus, ea ergo quantitas d Z × Z Y quæ est ad A T a ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q *exprimet decrementum temporis ex motu nodi oriundum.*

(r) * *Et si punctum d tangit curvam N d G n.* Numerus 360 designetur per a numerus 39.6355 dicatur b, ideoque 9.0827646 sit $\frac{a}{b}$, A T dicatur r, & A Z, y eritque $dZ=\frac{\frac{1}{2}r^2y}{\frac{a}{b}r^2+y^2}=\frac{\frac{1}{2}br^2y}{ar^2+by^2}$ & in puncto T ubi A Z evadit A T sive ubi fit $y=r$ est $dZ=\frac{\frac{1}{2}br}{a+b}=\frac{r}{20.1655292}$; ita ut d Z ad vicesimam radii partem nusquam assurgat.

Est autem ex naturâ circuli $TZ=\sqrt{rr-yy}$, & T Z ad A Z ut fluctio ordinatæ A Z ad Z Y, ideoque $ZY=\frac{ydy}{\sqrt{rr-yy}}$, hinc elementum $dZ\times ZY=\frac{\frac{1}{2}br^2y^2dy}{(ar^2+by^2)\sqrt{rr-yy}}$ & elementum segmenti N A Z est $\frac{y^2dy}{\sqrt{rr-yy}}$.

Est verò $\sqrt{rr-yy}$ æqualis seriei $r-\frac{y^2}{2r}-\frac{y^4}{8r^3}-\frac{y^6}{16r^5}-\frac{5y^8}{128r^7}-\frac{7y^{10}}{256r^9}$ &c.

& $\frac{y^2}{\sqrt{rr-yy}}$ æqualis ferei $\frac{y^2}{r}+\frac{y^4}{2r^3}+\frac{3y^6}{8r^5}+\frac{5y^8}{16r^7}+\frac{35y^{10}}{128r^9}+\frac{63y^{12}}{256r^{11}}$ &c.

quæ series parùm convergit quando y accedit ad valorem r unde prudenter est adhibenda.

Multiplicetur verò hæc series per dy & fiat integratio, obtinetur sequens series quæ exprimit segmentum N A Z, $\frac{y^3}{3r}+\frac{y^5}{10r^3}+\frac{3y^7}{56r^5}+\frac{5y^9}{144r^7}+\frac{35y^{11}}{1408r^9}$ &c.

quæ series parum convergit quando $y=r$ sed tunc segmentum N A Z est quadrans circuli qui per alias commodiores approximationes obtinetur.

Dividatur $\frac{1}{2}br^2$ per ar^2+by^2, fit series $\frac{b}{2a}\times 1-\frac{by^2}{ar^2}+\frac{b^2y^4}{a^2r^4}-\frac{b^3y^6}{a^3r^6}+\frac{b^4y^8}{a^4r^8}$ &c.

quæ plurimum convergit propter dignitates crescentes fractionis $\frac{b}{a}$ quæ est circiter $\frac{1}{9}$.

Mul-

DE MUNDI SYSTEMATE.

pore minore minor est in ratione temporis, debebit etiam area $AaYZ$

115. Termini variabiles primæ lineæ hujusce seriei, seriem ipsam illam constituunt quæ est valor segmenti NAZ, ejus itaque primæ lineæ valor est $\frac{b}{2a}$ NAZ.

Si dividantur omnes termini secundæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, observabitur quotientes hanc habere relationem ad terminos correspondentes primæ lineæ, ut, si exponens litteræ y in termino quovis primæ lineæ dicatur 6, quantitas eadem quæ in prima linea dividitur per 6, in secunda linea dividatur per $6+2$; sic termino primo secundæ lineæ diviso per $\frac{y^2}{r^2}$ ut evadat $\frac{y^3}{5r}$, quantitas communis $\frac{y^3}{r}$ in prima linea dividitur per 3, in secunda per 5, sicque in omnibus terminis utriusque lineæ, ut facile constabit ex ipsâ origine istius seriei, & Integrationis lege; hinc si ad communem denominatorem reducantur termini utriusque lineæ, ducendus erit numerator primæ lineæ in $6+2$, numerator secundæ in 6, & denominator communis erit $6\times 6+2$; quare subductis terminis secundæ lineæ à terminis primæ differentia exprimetur per terminos primæ seriei ductos in $\frac{2}{6+2}$ quod seriei convergentiam plurimum augebit; ideoque termini variabiles secundæ lineæ erunt

$$\frac{y^2}{r^2}\times \text{NAZ} - \frac{y^2}{r^2}\times\frac{2y^3}{15r} + \frac{2y^5}{70r^3} + \frac{6y^7}{504r^5} + \frac{10y^9}{1584r^7}$$ &c. dicatur

ad brevitatem series horum terminorum D & valor verus istius secundæ lineæ est $-\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}$ NAZ $+\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}\times D$.

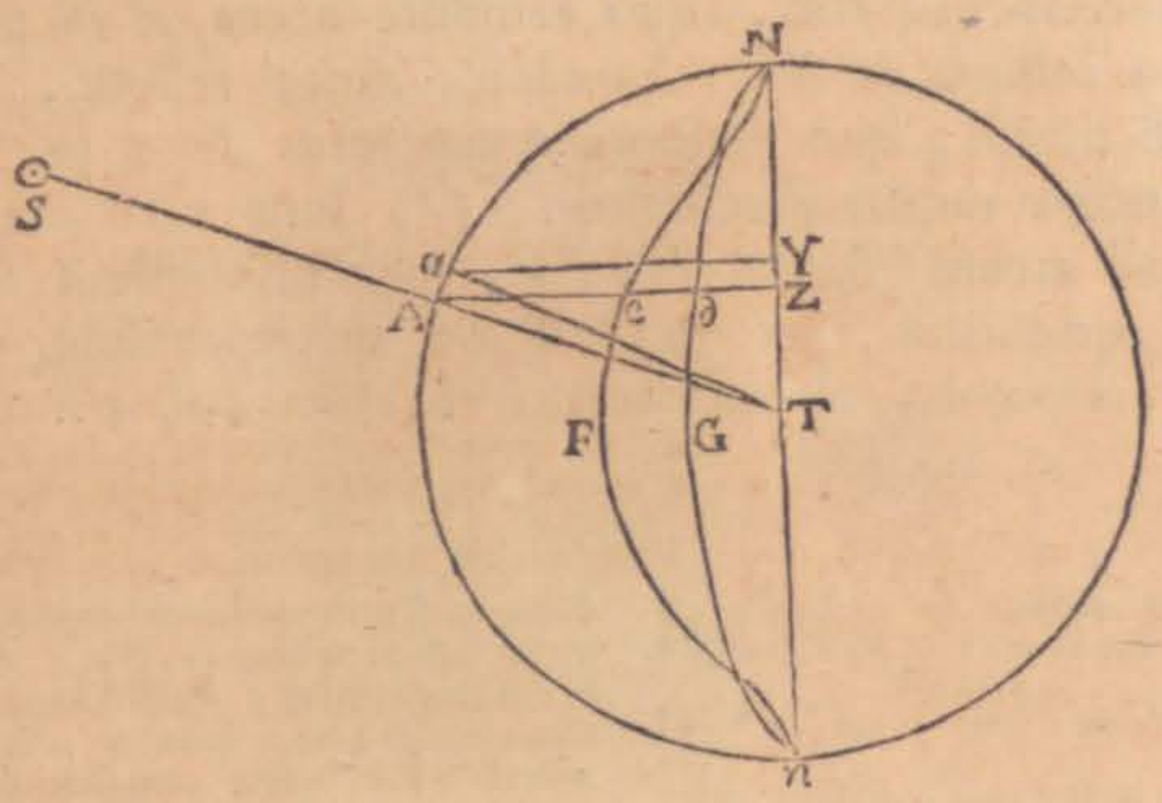
Simili ratiocinio, ut referantur termini variabiles tertiæ lineæ ad secundam, dividantur omnes termini tertiæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, & si dicantur y exponentes terminorum, differentia terminorum secundæ & tertiæ lineæ exprimetur per terminos secundæ seriei ductos in $\frac{2}{y+2}$, ideoque termini variabiles tertiæ lineæ erunt $\frac{y^4}{r^4}\times \text{NAZ} - \frac{y^4}{r^4}\times D - \frac{y^2}{r^2}\times\frac{2y^5}{35r^3} + \frac{2y^7}{126r^5} + \frac{6y^9}{792r^7}$ dicatur E series horum terminorum & valor verus tertiæ lineæ erit $+\frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times \text{NAZ} - \frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times D - \frac{b^3y^2}{2a^2r^2}$ E

ex quibus facile intelligitur valorem areæ NdZ exprimi posse hac ratione

$$\frac{b}{2a}\times \text{NAZ}.$$
$$-\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}\times \text{NAZ} + \frac{b^2y^2}{2a^2r^2}\,D$$
$$+\frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times \text{NAZ} - \frac{b^3y^2}{2a^3r^4}\,D - \frac{b^3y^2}{2a^3r^2}\,E$$
$$-\frac{b^4y^6}{2a^4r^6}\times \text{NAZ} + \frac{b^4y^6}{2a^4r^6}\,D + \frac{b^4y^4}{2a^4r^4}\,E + \frac{b^4y^2}{2a^4y^2}\,F \text{ &c.}$$

Unde

$AaYZ$ diminui in eâdem ratione. Id quod fiet ſi capiatur in AZ longitudo eZ, quæ ſit ad longitudinem AZ ut AZq ad AZ. LIBER TERTIUS. PROP. XXXII. PROB. XIII.



Unde ſummæ coefficientium quantitatum NAZ, D, E, F, qui progreſſiones Geometricas formant juxta regulas vulgares obtineri poſſunt, ideoque tandem area NdZ eſt $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2}NAZ+\frac{\frac{1}{2}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2}D-\frac{\frac{1}{2}b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}E+\frac{\frac{1}{2}b^4y^2}{a^4r^4+a^3by^2}F$ &c. 115

Cor. 1. Primus terminus ſeriei quæ exprimitur per D eſt $\frac{2}{5}$ primi termini ſeriei quæ exprimit ſegmentum NAZ, & reliqui termini ſeriei D ſunt minores reſpectu reliquorum terminorum ſeriei quæ exprimit id ſegmentum, ergo D minor eſt quam $\frac{2}{5}$ NAZ, & pariter E minor eſt quam $\frac{3y^2}{7r^2}$ D, & F minor quam $\frac{5y^2}{9r^2}$ &c. hinc valor NdZ major eſſe nequit quantitate $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2}NAZ+\frac{\frac{1}{5}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2}NAZ$, = $\frac{bNAZ}{ar^2+by^2}\times\frac{1}{2}r^2+\frac{b}{5a}y^2$ nec minor eſſe poteſt quantitate $\frac{bNAZ}{ar^2+by^2}\times\frac{1}{2}r^2$.

Cor. 2. Hinc ubi $r=y$ & NAZ eſt quadrans circuli valor areæ NdZ major non eſt quantitate $NAZ\times\frac{b}{a+b}\times\frac{1}{2}+\frac{b}{5a}$, nec minor quam $NAZ\times\frac{b}{a+b}\times\frac{1}{2}$; ſive major non eſt quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}+\frac{1}{457.80688865}$ ſive quadrantis $\frac{1}{19.3147492}$ nec minor quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ad 9,08276 $ATq + AZq$. (f) Sic enim rectangulum eZ in ZY erit ad aream $AZYa$ ut decrementum temporis, quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, si nodus quiesceret: & propterea rectangulum illud respondebit decremento motus nodi. Et si punctum e tangat curvam $NeFn$, area tota NeZ, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NAe respondebit motui reliquo, qui verus est nodi motus, quo tempore arcus totus NA per solis & nodi conjunctos motus percurritur. (t) Jam vero area semicirculi est ad aream figuræ $NeFn$, per methodum serierum infinitarum quæsitum, ut 793 ad 60 quamproximè. Motus autem qui respondet circulo toti erat $19^{gr}. 49^{l}. 3^{ll}. 55^{lll}.$ & prop-

116. Cor. 3. In casibus in quibus y est quam minima, ita ut $ar^2 + by^2$ pro ar^2 sumi possit, valor $\frac{b\,NAZ}{ar^2} \times \frac{1}{2} r^2$ ad verum valorem satis accedet fietque valor areæ $NdZ = \frac{1}{18.1655292}$ segmenti NAZ, unde habentur velut limites valoris areæ NdZ in variis punctis curvæ.

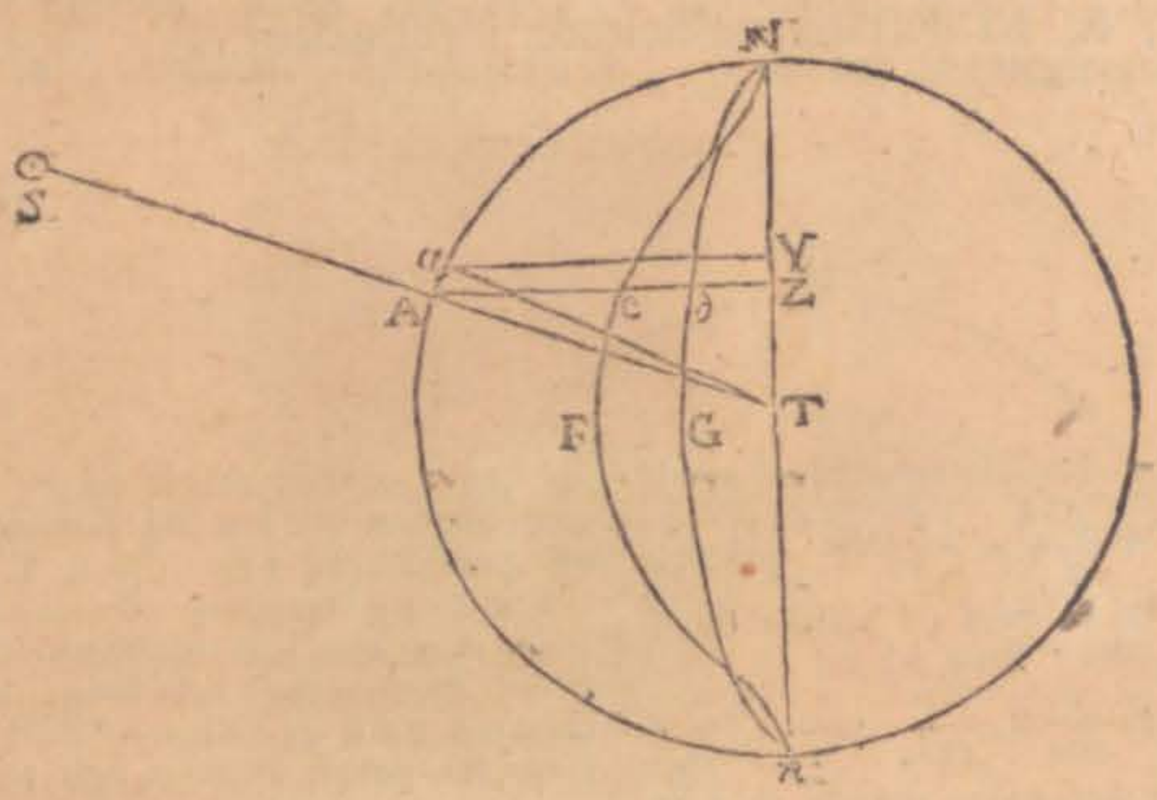
(f) * *Sic enim rectangulum e Z in ZY erit ad aream AZYa*, &c. Ex præcedentibus, area AZYa motum nodorum mediocrem exprimit posito solem sine motu nodi percurrere arcum Aa, si itaque cæteris manentibus celerius percurratur is arcus, motus nodorum sive spatium à nodis percursum minus erit, prout tempus erit brevius; cum ergo tempus quo sol percurrit Aa sine motu nodi, sit ad tempus quo percurreretur Aa posito motu nodi ut $9.0827646\ ATq + AZq$ ad $9.0827646\ ATq$ si fiat AZ ad Ae in eâ ratione & utrumque ducatur in ZY, erunt areæ $AZ \times ZY$, ad $Ae \times ZY$ ut motus nodorum in Hypothesi priori ad eorum verum motum; & convertendo erit $eZ \times ZY$ ad $AZ \times ZY$ ut differentiâ motuum ad motum priorem sive ut AZq ad $9.0827646\ ATq + AZq$.

(t) 116. * *Jam verò area semicirculi est ad aream NeFn.* Commodius calculi ducentur si prius quæramus aream NAneN inter semiperipheriam NAn & curvam Nen contentam, quàm detrahemus ex semicirculi area; tumque residuum erit area NeFn, quam cum semicirculi area conferre licebit.

Sit ergo ut prius $360^{g} = a$, $39^{g}.6355 = b$, $AT = r$ & ATr & $AZ = y$; erit ex notâ præcedenti $9.0827646\ ATq + AZq$ (sive $\frac{ar^2}{b} + y^2$ ad $9.0827646\ ATq$ (sive $\frac{ar^2}{b}$) ut AZ (sive y) ad Ae quod erit itaque $\frac{ar^2y}{ar^2+by^2}$; est verò $ZY = \frac{y\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$; hinc Elementum areæ aAe est $\frac{ar^2y^2dy}{ar^2+by^2\sqrt{rr-yy}}$ sed elementum areæ curvæ NdGn notâ superiore 115 inventum erat $\frac{\frac{1}{2}br^2y^2dy}{(a^2+by^2)\sqrt{rr-yy}}$ ergo elementum areæ curvilineæ NAnFN est ad elementum areæ NdGn in ratione datâ a ad $\frac{1}{2}b$; Unde si valor hujus areæ NdGn in notâ r inventus per $\frac{1}{2}$ dividatur & multiplicetur per a habebitur valor areæ NAnFN qui itaque prodibit ar^2.

propterea motus, qui figuræ *NeFn* duplicatæ respondet, est $1^{gr}.\ 29'.\ 58''.\ 2'''$. Qui de motu priore subductus relinquit $18^{gr}.\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. motum totum nodi respectu fixarum inter sui ipsius conjunctiones cum sole; & hic motus de solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit $341^{gr}.\ 40'.\ 54''.\ 7'''$. motum solis inter easdem conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum 360^{gr}. ut nodi motus jam inventus $18^{gr}.\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. ad ipsius motum annuum, qui propterea erit $19^{gr}.\ 18'$.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXII. PROBL. XIII.



$$\frac{ar^2}{ar^2+by^2}\,NAZ+\frac{by^2}{ar^2+by^2}\,D-\frac{b^2y^2}{a^2r^2+by}\,E+\frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}\,F\ \&c.$$

Tollatur verò hæc area ex segmento NAZ, sive ex $\frac{ar^2+by^2}{ar^2+by^2}\,NAZ$ residuum erit $\frac{by^2}{ar^2+by^2}\,NAZ-\frac{by^2}{ar^2+by^2}\,D+\frac{b^2y^2}{a^2r^2+bay^2}\,E-\frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}\,F\ \&c.$

idque residuum est area quæsita NeZ, quod brevius expressum fit $\frac{by^2}{ar^2+by^2}\times NAZ-D+\frac{b^4}{a}\,E-\frac{b^2}{a^2}\,F\ \&c.$ 116

Jam autem ut habeatur ratio semicirculi ad aream NeFn, sive quod idem est quadrantis circuli ad NFT ejus areæ NeFn dimidium; dicatur *c* quadrans peripheriæ cujus radius est *r*; sitque *m* ad *n* ut *c* est ad *r*; valor quadrantis est $\frac{rc}{2}$, & cum NAZ est quadrans tum

DE MUNDI SYSTEMATE.

18′. 1″. 23‴. Hic eſt motus medius nodorum in anno ſidereo. (u) Idem per tabulas aſtronomicas eſt 19ˢʳ. 21′ 21″. 50‴. Differentia minor eſt parte trecenteſimâ motus totius, & ab orbis lunaris eccentricitate & inclinatione ad planum ecliptiæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, & per ejus inclinationem viciſſim retardatur aliquantulum, & ad juſtam velocitatem reducitur.

PRO-

116. $y = r$ ergo valor dimidii areæ N e F n eſt $\frac{b}{a+b} \times \frac{rc}{2} - D + \frac{b}{a}E - \frac{b^2}{a^2}F + \frac{b^3}{a^3}G$ &c. ex iis autem quæ in notâ (r) dicta ſunt, valor D (ponendo r loco y) eſt $r^2 \times \frac{2}{15} + \frac{2}{70} + \frac{6}{504} + \frac{10}{1584} + \frac{70}{18304}$; qui termini ad decimales reducti faciunt $.184\, r^2$ Omittantur reliqui termini quantitatis D ut & quantitates E, F de quâ omiſſione poſtea dicemus, & quoniam eſt $r = \frac{nc}{m}$ ideoque $r^2 = \frac{nrc}{m} = \frac{2n}{m} \times \frac{rc}{2}$.

Valor areæ evadit $\frac{b}{a+b} \times \frac{rc}{2} - \frac{rc}{2} \times \frac{2n}{m} \times .184$ qui valor eſt ad valorem quadrantis $\frac{rc}{2}$, ut $\frac{b}{a+b} \times 1 - \frac{2n}{m} \times .184$ ad 1, ſubſtituendo autem loco b & a, eorum valores, eſt $\frac{b}{a+b} = .099$; & ex naturâ circuli eſt $2n$ ad m, ſive Diameter ad quartam peripheriæ partem ut 1.274 ad 1 ideoque $\frac{2n}{m} \times .184 = 1.27 \times .184 = .23$, quod detractum ex unitate relinquit .766; Quod tandem ductum in $\frac{b}{a+b}$ ſive .099 efficit .0758 qui valor eſt ad 1; ut area quæſita ad quadrantem; manebit eadem ratio ſi uterque terminus per 793 ducatur ſed .0758 in 793 efficit 60.10. Ergo eſt area quæſita N e F n ad ſemicirculum ut 60. proximè ad 793. Q. E. I.

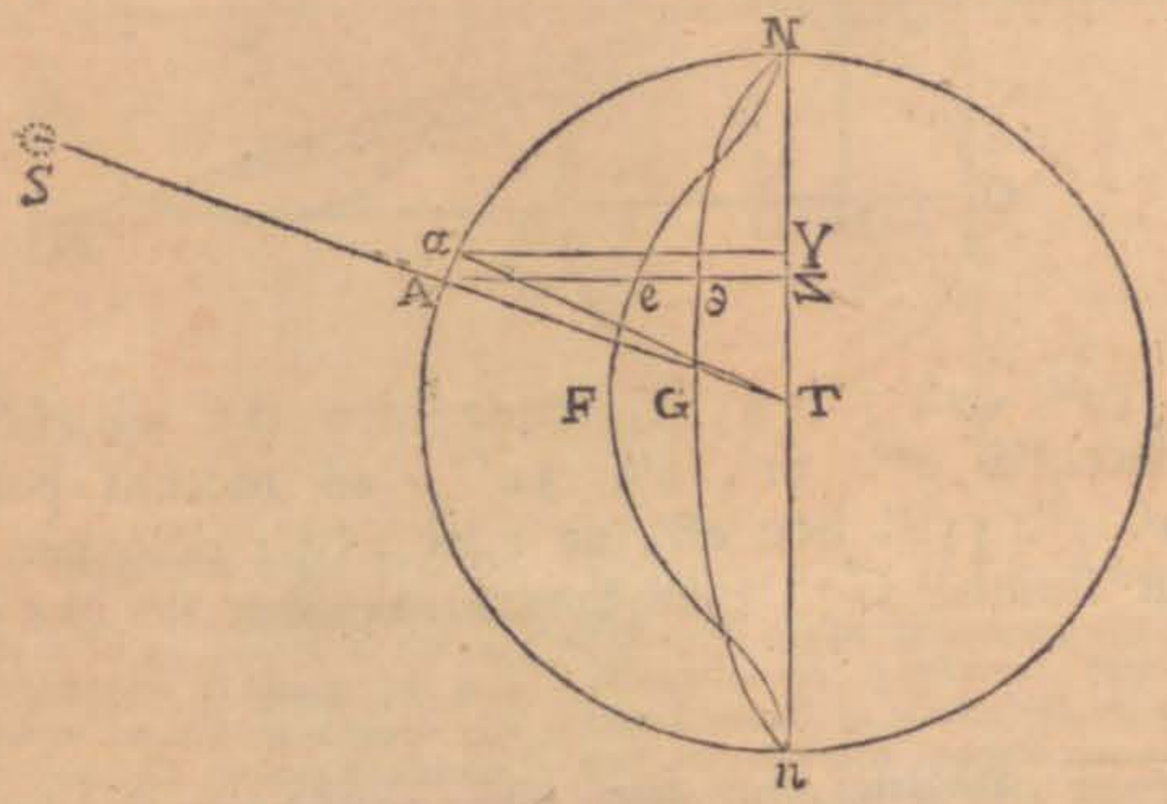
Omiſimus terminos ſeriei D præter quinque priores, & terminos ſerierum E, F &c. facile enim deprehenditur ex Corollariis notæ (r) ultimos illos terminos ſeriei D, prope æquales fieri terminis ſeriei E ductæ in $\frac{a}{b}$ qui termini negativi ſunt, ſicque mutuò deſtrui reliquæ verò ſeries cum per dignitates fractionis $\frac{b}{a}$ ducantur brevi evaneſcunt ut quidem exploravimus calculo ad plures terminos producto.

(u) * *Idem per tabulas Aſtronomicas.* Caſſinus ex antiquis obſervationibus nodorum motum determinat in anno communi 19°. 19′. 45″. quibus additis 49″ pro motu nodi per 6ʰ. 10′ 54‴ quibus annus ſidereus excedit annum communem, motus ergo nodorum in anno ſidereo eſt 19°. 20′. 34″., ita ut exiguâ duntaxat quantitate differat motus nodorum per calculum inventus, ab eo qui ex obſervationibus deducitur, & is diſſenſus eſt adeo parvus, ut neutiquam turbet argumentum quo confirmetur Newtoniana Theoria ex calculo motus nodorum cum obſervationibus collato; imo diſſenſus iſtius cauſas ex orbis Lunæ excentricitate & inclinatione fluere indicat Newtonus, ſed hæc hujus non ſunt loci.

PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

Invenire motum verum nodorum lunæ.

In tempore quod eſt ut area $NTA - NdZ$, motus iſte eſt ut area NAe, & inde datur. (x) Verum ob nimiam calculi difficultatem, præſtat ſequentem problematis

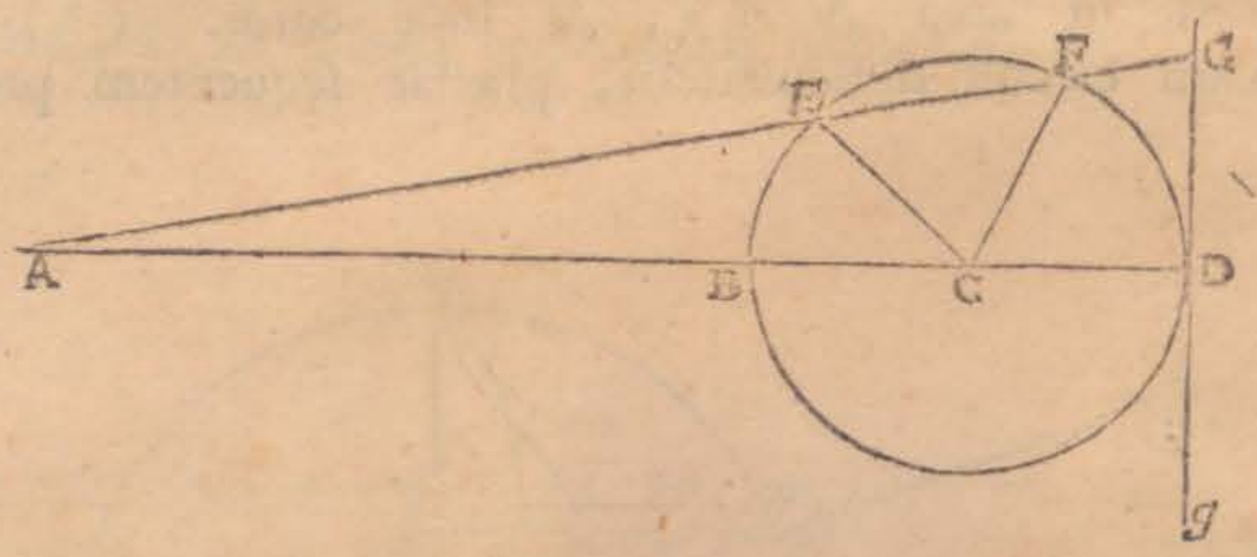


(x) 117. * *Verum ob nimiam calculi difficultatem.* Satis liquet maximam futuram calculi difficultatem ex ipſis ſeriebus in notis 115 & 116 adhibitis, quæ cum parum convergant, regreſſum non tantùm difficilem, ſed etiam parùm tutum habent; hinc alia artificia commodiora adhibet Newtonus quæ ut intelligantur duas Hypotheſes aſſumere liceat quibus pedetentim ad ipſam conſtructionem Newtonianam deveniemus.

Prior ergo Hypotheſis ea ſit quam in Prop. XXXII. fingit Newtonus, ſingulis horis retrahi nodum in locum ſuum priorem, ut nonobſtante motu ſuo proprio datum ſervet ſitum ad fixas, interea verò ſolem progredi à nodo: Eâ quippe in Hypotheſi, ex Prop. XXXII. tota area circuli repræſentat totum nodorum motum integro anno ſidereo, ideoque ſectores NAT repræſentabunt motum medium eo tempore quo Sol diſcedit à nodo arcu NA & ſegmenta NAZ repræſentabunt motum verum eo ipſo tempore, ideoque Triangulum ATZ repræſentabit differentiam motus medii à motu vero, quæ debebit ſubſtrahi à motu medio ut verus motus habeatur in primo quadrante, & tertio ut ex ipsâ figurâ liquet; addi autem in ſecundo & quarto: Cum itaque tota area circuli ſive factum totius Peripheriæ in $\frac{1}{2}r$, deſignet totum motum nodorum durante anno ſidereo, repræſentabit ATZ eam æquationem, quæ æquatio cum AZ ſit y & $TZ = \sqrt{rr - yy}$ eſt 117.

DE MUNDI SYSTEMATE.

tis conſtructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis CD, deſcribatur circulus $BEFD$. Producatur DC ad A, ut ſit AB ad AC ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris, ubi nodi ſunt in quadraturis, id eſt, ut $19^{gr}. 18'. 1''$.

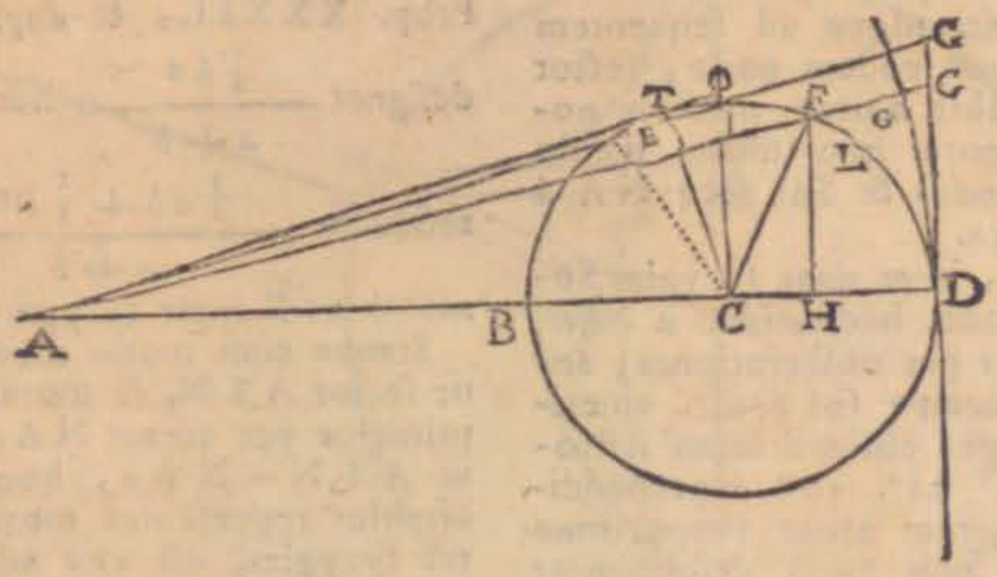


$23'''$. ad $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$, atque ideo BC ad AC ut motuum differentia $0^{gr}. 31'. 2''. 32'''$, ad motum poſteriorem $19^{gr}.$, $49'. 3''. 55'''$. hoc eſt, ut 1 ad $38\frac{1}{10}$; dein per punctum D ducatur infinita Gg, quæ tangat circulum in D; & ſi capiatur

117. eſt $\frac{1}{2}y\sqrt{rr-yy}$: Dividatur ergo tam circuli valor quam areæ ATZ valor per $\frac{1}{2}r$, erit Peripheria tota ad $\frac{y\sqrt{rr-yy}}{r}$ ut totus motus nodi anno ſidereo ad Æquationem quæſitam, ſive primum conſequentem duplicando & ſecundi antecedentis dimidium ſumendo quod proportionem non turbat, erit Peripheria tota ad $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ut motus ſemeſtris nodi ad Æquationem quæſitam; Sed ex Principiis Trigonometricis, ſinus ejus arcus qui foret duplus arcus NA cujus ſinus eſt y foret $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$; Ergo ſi deſcribatur circulus radio quocumque CB, & ſumatur arcus BF duplus, arcus NA, hoc, eſt duplus diſtantiæ Solis à nodo (quæ diſtantia per motus medios Solis & nodi haberi poteſt) erit Peripheria tota ad FH ſinum ejus arcus BF ut motus ſemeſtris nodi ad æquationem quæſitam; ideo producatur DCB in A, ita ut radius AD ſit ad radium CD ut Peripheria tota ad motum ſemeſtrem nodi ſive ut a ad $\frac{1}{4}b$, & centro A radio AD deſcribatur arcus DG & ſumatur ejus arcus longitudo quæ ſit æqualis ſinui FH, numerus graduum ejus arcus DG erit ipſa æquatio quæſita; nam ſi ſumeretur in circulo cujus radius eſt CD arcus DL cujus longitudo eſſet æqualis FH, foret tota Peripheria ſeu 360g. ad numerum graduum in eo arcu DL contentorum ut numerus graduum motus ſemeſtris nodi ad numerum graduum æquationis quæſitæ, ſive alternando tota Peripheria ad numerum graduum motus ſemeſtris ut numerus graduum arcus DL ad numerum graduum æquationis quæſitæ; ſed ex conſtru-

piatur angulus BCE vel BCF æqualis duplæ distantiæ solis à loco nodi, per motum medium invento; & agatur AE vel AF secans perpendiculum DG in G; & capiatur angulus qui sit ad motum totum nodi inter ipsius syzygias (id est, ad $9^{gr}.\ 11'.\ 3''.$) ut tangens DG ad circuli BFD circumferentiam totam; atque angulus iste (pro quo angulus DAG usurpari potest) ad

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIII. PROBL. XIV.



structione cum longitudo arcus DG sumatur æqualis sinui FH, sive arcui DL, numerus graduum in eo arcu DL contentorum est ad numerum graduum in arcu DG contentorum inverse ut eorum circulorum radii, hoc est ex constructione, ut $360°$ ad numerum graduum motus semestris nodi, ergo numerus graduum arcus DG est ipse numerus graduum æquationis quæsitæ; Satis liquet autem arcum DG paucorum graduum esse debere, & à lineâ rectâ parum differre, hinc si in puncto D erigatur tangens ad circulum cujus radius est CD, sumaturque DG in tangente æqualis ipsi sinui FH, perinde prope erit ac si sumeretur ea longitudo secundum arcum circuli radio AD descripti, & punctum G sive in Tangente sive in arcu sumatur eodem in loco ocurret quam proximè; ita ut ex hâc constructione, angulus GAD cujus arcus DG est mensura sit ipsa æquatio quæsita, substractiva in $1°$. & $3°$. quadrante, additiva in $2°$. & 4to. & obtinebitur juxta Trigonometriæ Principia, dicendo ut AC, sive $360^{gr} - 9^{gr}.\ 54'.\ 31''.\ 57'''$, ad CF sive CB, nempe $9^{d}.\ 54'.\ 31''\ 57'''$. hoc est, ut $a - \frac{1}{4}b$ ad $\frac{1}{4}b$, sive ut $35\ \frac{1}{5}$ ad 1. 117.

Ita sinus duplæ distantiæ Solis à nodo ad Æquationem quæsitam: Maxima autem erit æquatio in octantibus, quia area ATZ quæ æquationem repræsentat est major in octantibus quam in ullo alio loco.

His probè intellectis facile inde ad veriorem computum procedere licebit.

$2°$. Hyp. In constructione Newtonianâ Prop. XXXII. circulus integer $NAnN$ designat annum sidereum, simulque motum nodorum in Hypothesi quòd Sol ipse describit id spatium quo nodi revera ab ipso discedunt; in hâc autem Hypothesi motus nodorum est $19^{gr}.\ 49'\ 3''.\ 55'''$. & in calculis nostris per quantitatem $\frac{1}{2}b$ fuit expressum.

Si autem revera arcus AN repræsentet recessum Solis à nodo, tàm per motum proprium Solis quàm per medium motum nodi, tempus quo tota circumferentia $NAnN$ describetur non erit annus sidereus, sed tempus elapsum inter syzygiam Solis Nodique & syzygiam sequentem Solis cum eodem nodo, cumque uniformi-

DE MUNDI SYSTEMATE.

ad motum medium nodorum addatur ubi nodi transeunt à quadraturis ad syzygias, & ab eodem motu medio subducatur ubi tran-

117. ter describatur ea circumferentia siquidem ad motus medios solis & nodorum refertur, sectores circuli N A n N erunt proportionales motui medio nodorum; itaque si totus circulus repræsentet motum nodorum à tempore quo sol & nodus fuere conjuncti usque ad sequentem Solis syzygiam cum eodem nodo, sector A T N repræsentabit motum medium nodorum eo tempore quo motu medio Solis & nodi, nodus & Sol arcu N A à se mutuo recessêre.

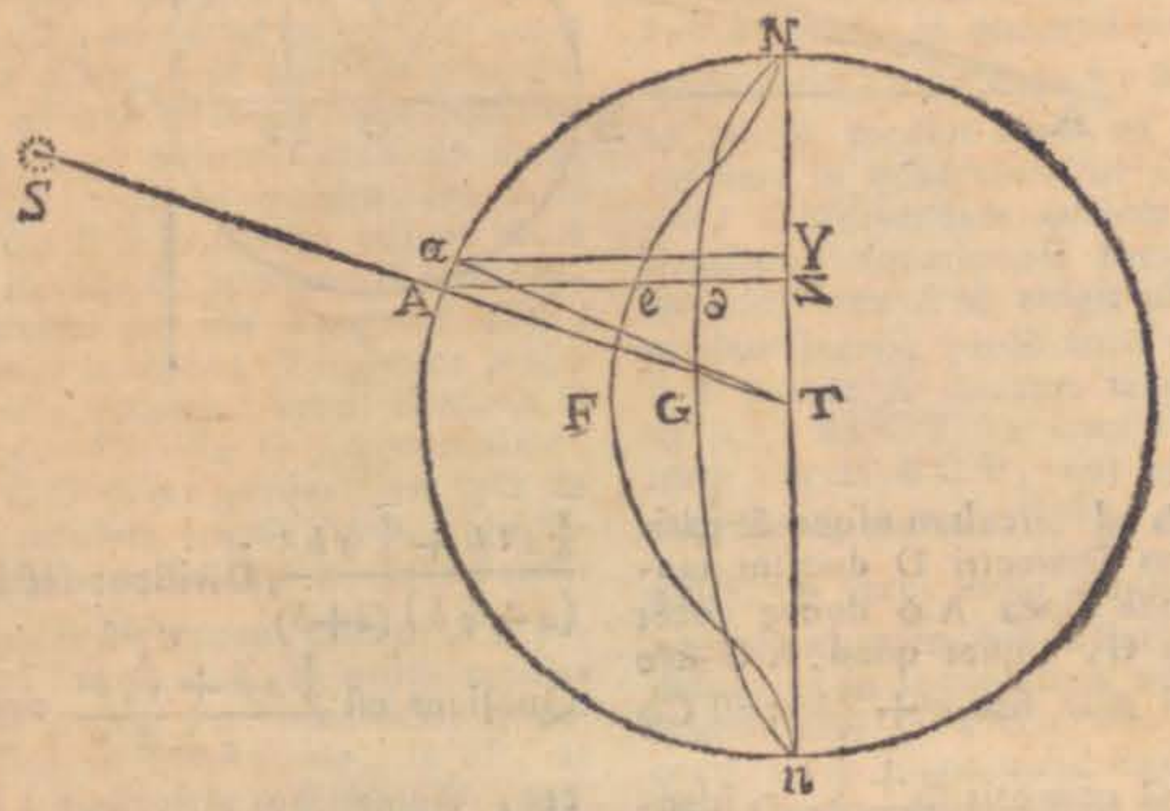
Tempus autem, inter duas syzygias Solis cum eodem nodo, hâc ratione à Newtono determinatur per observationes; anno sidereo dum nempe sol 360gr. emetitur motus nodi per observationes Astronomicas 19gr. 21′ 21″. 50‴ deprehenditur, in eâdem autem erunt proportione viæ Solis & nodi quæ simul describuntur quocumque tempore, ideoque via Soli & via nodi inter duas syzygias Solis cum eodem nodo, erunt inter se ut 360 ad 19gr. 21′ 21″ 50‴, sed illæ duæ viæ simul sumptæ 360gr. efficiunt, itaque 360 gradus dividantur in duas partes quarum una sit ad alteram ut 360gr. ad 19gr. 21′ 21″ 50‴. Hæc ultima pars quæ est 18gr. 22′. 6ª circiter, erit motus nodi inter duas syzygias Solis cum eodem nodo.

Idem motus ex calculo Prop. XXXII., hoc modo determinabitur, si ex toto circulo N A n N duplum areæ N F n tollatur residuum est verus motus nodi inter syzygias; sed valor areæ N F T erat ad quadrantem ut $\frac{b \times 766}{a+b}$ ad 1. sive proximè ut $\frac{\frac{3}{4}b}{a+b}$ ad 1. In eâdem vero erit ratione duplum areæ N F n (quod est quadruplum areæ N F T) ad totum circulum, ut itaque 1. ad $\frac{\frac{3}{4}b}{a+b}$ ita $\frac{1}{2}b$ qui est numerus graduum quem area circuli designat, ad numerum graduum designatum per duplum areæ N F n, qui erit itaque $\frac{\frac{3}{8}b^2}{a+b}$; Cum ergo totus circulus numerum graduum $\frac{1}{2}b$ designet in Prop. XXXII., & duplum areæ N F n designet $\frac{\frac{3}{8}b^2}{a+b}$, hoc ex $\frac{1}{2}b$ tollatur, residuum $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ est verus motus nodi inter syzygias.

Itaque cum motus medius nodorum sit ut sector A T N, & motus verus nodi exprimatur per aream N A e; Æquatio est ut A T N − N A e, hoc est, cum totus circulus repræsentet motum nodorum inter syzygias, est $2rc$ ad A T N − N A e ut $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ ad Æquat. $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (A T N − N A e), sed in not. 116. valor areæ N A e fuit inventus $\frac{ar^2}{ar^2+by^2}$ N A Z (omissis cæteris terminis qui per D, E &c. multiplicantur ut pote minimis). Itaque fiet æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (N T A − $\frac{ar^2}{ar^2+by^2}$ N A Z):

Eum autem casum sumamus in quo A N est peripheriæ octans, quia in primâ Hypothesi liquet eo in casu Æquationem fieri maximam, fiet $y^2 = \frac{1}{2}r^2$, & eâ substitutione factâ & loco N T A posito ejus valore T A Z + N A Z factâque reductione, evadet æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (T A Z + $\frac{\frac{1}{2}b\,\text{N A Z}}{a+\frac{1}{2}b}$) & cum area circuli sit .785 dum quadratum Diametri est 1, & octans circuli N T A sit ad ejus quadrati octantem cujus dimidium est T A Z in eâdem ratione, est N T A ad T A Z ut .785 ad .5, ideo-

eranſeunt à ſyzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus ve- LIBER TERTIUS. PROP. XXXIII. PROBL. XIV.
rus. Nam motus verus ſic inventus congruet quam proximè cum

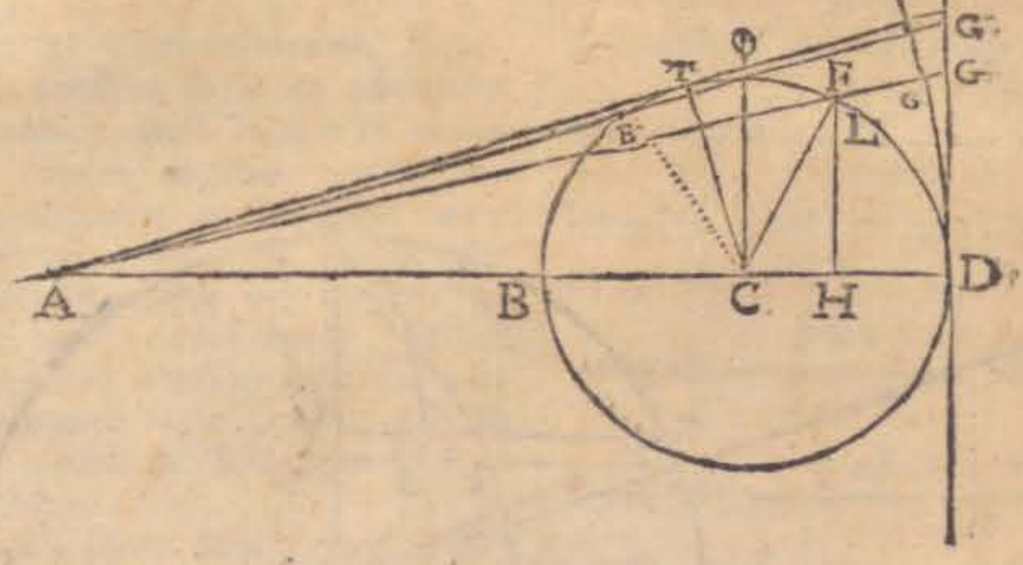


ideoque dividendo eſt NAZ ad TAZ ut .285 ad .5, & eſt NAZ = .57 TAZ unde tandem æq. evadit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc\,(a+b)}\left(\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}\right)$ TAZ

Sed in hâc hypotheſi eſt TAZ $=\frac{1}{4}r^2$; hinc æquatio fit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{4c\times 2(a+b)}\left(\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}\right)r$ & ad hanc proportionem revocatur, 4c ſive tota circumferentia eſt ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2\,(a+b)}$ quod eſt dimidium motus nodi inter ſyzygias ut $\frac{a+.78\,b^2}{a+\frac{1}{2}b}r$ ad Æquationem; hoc modo autem conſtruitur quantitas $\frac{a+.78\,b}{a+\frac{1}{2}b}r$, ſive ſimplicius $\frac{a+\frac{3}{4}b}{a+\frac{1}{2}b}r$, deſcribatur circulus B C D cujus radius B C $= r = \frac{1}{4}b$; producatur C B in A ut ſit A B $= a+\frac{1}{4}b$, ideoque A C $= a+\frac{1}{2}b$ & A D $= a+\frac{3}{4}b$, centro C erigatur per- 1173

DE MUNDI SYSTEMATE.

cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream NTA



pendicularis Φ ad circulum usque & pariter in extremo Diametri D ducatur tangens, ductaque linea A Φ donec secet Tangentem in G, liquet quod A C sive $a+\frac{1}{2}b$ est ad A D sive $a+\frac{3}{4}b$ ut est CΦ sive r ad D G quæ erit $\frac{a+\frac{3}{4}b}{a+\frac{1}{2}b}r$, ideoque erit tota circumferentia ad dimidium motus inter syzygias ut D G ad Æquationem quæsitam: sive invertendo terminos omnes & alternando ut Newtoni expressio habeatur, est Æquatio ad motum nodi inter Syzygias proximas ut D G ad circuli B E D circumferentiam.

Illa autem Æquatio quæsita erit prope æqualis angulo D A G; nam in Triangulo D A G est D G ad sinum anguli D A G sive ad ipsum angulum D A G (nam in parvis angulis, angulos pro sinubus sumere licet) ut est A G vel A D, quod est $a+\frac{3}{4}b$, ad sinum totum sive ad radium C D quod est $\frac{1}{4}b$; sed si $a+\frac{3}{4}b$, & $\frac{1}{4}b$ dividantur per $a+b$, quod rationem non mutat, fiatque $\frac{a+\frac{3}{4}b}{a+b}$ ad $\frac{\frac{1}{4}b}{a+b}$ ita a sive gradus 360 ad quartum, invenitur is quartus terminus $\frac{\frac{3}{4}aab+\frac{1}{4}abb}{(a+\frac{3}{4}b)(a+b)}$; Divisione factâ per $a+\frac{3}{4}b$ Quotiens est $\frac{\frac{1}{4}ab+\frac{1}{16}bb}{a+b}$ omissis, ut licet, dignitatibus altioribus $\frac{1}{4}b$, is verò quotiens est ipsa quantitas $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}bb}{2(a+b)}$ quæ exprimit dimidium motus nodi inter syzygias; Ergo resumendo cum sit D G ad angulum D A G ut $a+\frac{3}{4}b$ ad $\frac{1}{4}b$ sive ut circumferentia tota ad dimidium motus nodi inter syzygias in eâque ratione sit D G ad Æquationem, ipse angulus DAG est æqualis æquationi.

Idem alio modo constabit; In ipsâ Peripheriâ D Φ B D, sumatur arcus D L æqualis D G, erit ut 360gr. ad dimidium motus nodi, ita numerus graduum in arcu D L contentorum ad numerum graduum æquationis; centro A radio A D describatur arcus & in eo sumatur longitudo D G æqualis D L, erit ut radius A D sive $a+\frac{3}{4}b$ ad radium CD sive $\frac{1}{4}b$; ita numerus graduum arcus DL ad numerum graduum arcus D G, numeri enim graduum in arcubus æqualibus sunt inverse ut eorum radii

NTA-NdZ, & motum nodi per aream *NAe*; ut rem perpenden-

radii ſed $a+\frac{3}{4}b$ eſt ad $\frac{1}{4}b$ ut 360gr. ſive a ad dimidium motus nodi ſive ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$; Eſt ergo 360 ad dimidium motus nodi inter ſyzygias ut numerus graduum arcus DL ad numerum gradum arcus DG ſed ita etiam erat numerus graduum arcus DL ad numerum graduum æquationis quæſitæ, ergo numerus graduum arcus DG eſt ipſa æquatio quæſita, ſed AG ſecabit arcum DG in puncto tali ut arcus inter eam lineam & punctum D interceptus ſit proximè æqualis Tangenti DG, nam in parvis arcubus, Tangentes prope æquantur ſuis arcubus, ergo linea AG ſecabit arcum DG in G quamproximè, ſed arcus DG cujus gradus ſunt ipſa æquatio, eſt menſura anguli DAG, ergo angulus DAG pro æquatione uſurpari poteſt.

Dicit autem Newtonus lineam AB debere eſſe ad lineam AC ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris quando nodi ſunt in quadraturis, id eſt, ut 198gr. 18'. 1". 23". ad 108gr. 49'. 3". 55"'. In hâc autem conſtructione fecimus $AB=a+\frac{1}{4}b$ & $AC=a+\frac{1}{2}b$, res autem eodem redit, cum enim motus nodi inter ſyzygias ſit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ dematur ex a habebitur motus Solis inter ſyzygias $\frac{aa+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{8}b^2}{a+b}$; iſte motus Solis erit ad ejus motum annuum 360gr. ſive a ut motus nodi inter ſyzygias $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ ad motum annuum nodi qui itaque erit $\frac{\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{8}ab^2}{aa+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{8}ab^2}$ is itaque motus erit ad $\frac{1}{2}b$ quod exprimit ſemiſſem motus veri mediocris ubi nodi ſunt in quadraturis ut $\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{8}ab^2$ ad $\frac{1}{2}aab+\frac{1}{4}abb-\frac{1}{16}b^3$; ſive omiſſo termino $\frac{1}{16}b^3$, diviſis reliquis terminis per ab & duplicatis ut $a+\frac{1}{4}b$ ad $a+\frac{1}{2}b$; Ergo in conſtructione noſtra eſt AB ſive $a+\frac{1}{4}b$ ad AC ſive $a+\frac{1}{2}b$ ut motus annuus nodi, ad ſemiſſem ejus quod toto anno deſcriberetur eo motu quem habent nodi in quadraturis; Itaque erit etiam $a+\frac{1}{4}b$ ad $a+\frac{1}{2}b$ ſive AB ad AC ut motus medius nodi ad ſemiſſem motus veri in quadraturis ut ſtatuit Newtonus; Obſervandum quidem ex hâc conſtructione æquationem futuram maximam quando linea AG tangit circulum, quod quidem incidit paulò ante punctum Φ, & ſi à puncto A ducatur tangens AT erit ut AC ad CT ita ſinus totus ad Coſinum anguli BCT, qui angulus, BCT deprehendetur eſſe $88^{0}\frac{1}{2}$. cujus dimidium $44\frac{1}{4}^{0}$. eſt verus locus medius in quo maxima fit æquatio, ab Octante adeo parum diſſitus ut in ſequentibus æquationem maximam fieri in Octantibus ſupponere liceat, tanto magis quod hæc æquatio quæ verè maxima foret ab ea quæ fit in Octantibus inſenſibiliter differret.

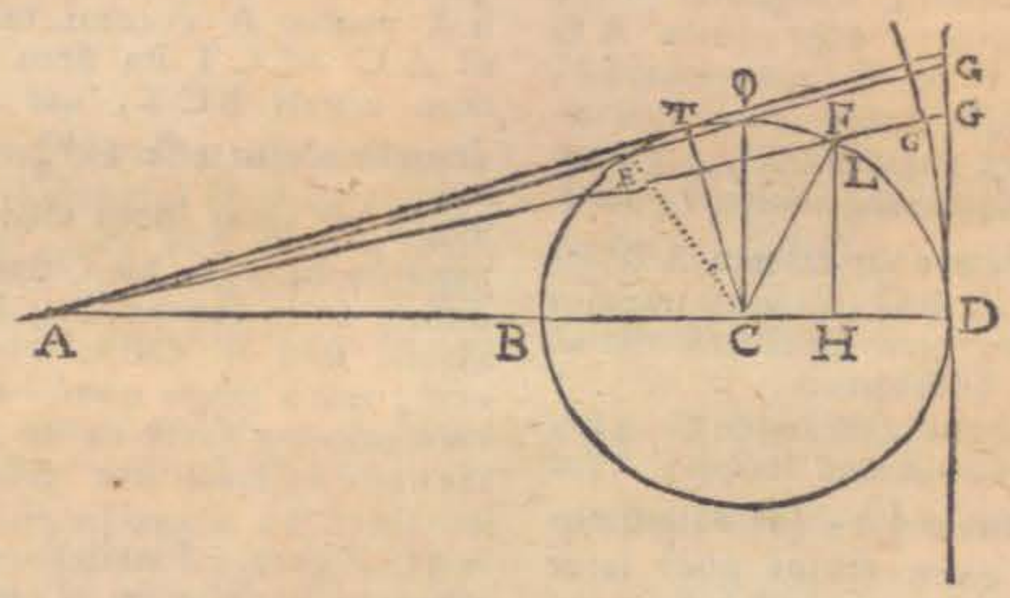
117.

3ª. *Hypoth.* Finximus arcum AN eſſe octantem Peripheriæ, & eo in caſu oſtendimus conſtructionem Newtonianam exhibere æquationem illi loco debitam, in aliis diſtantiis Solis à nodo paulo minus accurata eſt conſtructio, ſed errore exiguo; ubivis enim, æquatio erit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ $(TAZ+NAZ-\frac{ar^2}{ar^2+by^2}NAZ)=$ $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ $(TAZ+\frac{by^2}{ar^2+by^2}NAZ)$ ſumatur NAZ eſſe ad TAZ ut $r-\sqrt{rr-yy}$ ad $\sqrt{rr-yy}$, quod quidem verum eſt de ſpatio Rectilineo NAZ non vero de curvilines NAZ, ſed propter exiguitatem fractionis $\frac{by^2}{ar^2+by^2}$ erro-

DE MUNDI SYSTEMATE.

ti & computationes inſtituenti conſtabit. *Hæc eſt æquatio ſemeſtris*

117. rofem non magnum pariet, fit æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}\left(\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\right)$ TAZ ſive numeratore & denominatore quadruplicato quod valorem non mutat, fit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{4c\times 2(a+b)}\left(\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\right)\frac{4TAZ}{r}$, quæ quantitas ad hanc proportionem revocatur, $4c$ ſive tota circumferentia eſt ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$ quod eſt dimidium motus nodi inter ſyzygias ut $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+2by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$ ad Æquationem quæſitam.

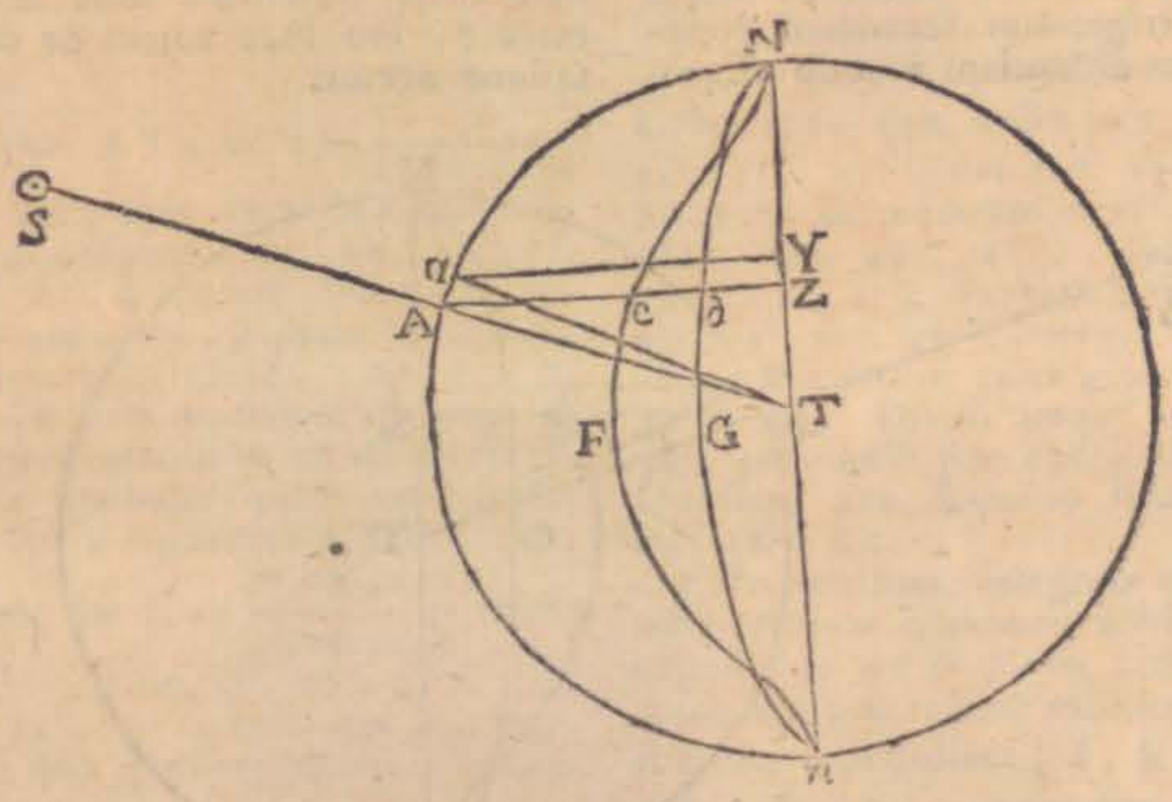


Ut conſtruatur hæc quant. $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$, fiat ut prius circulus BFD cujus radius $BC=r=\frac{1}{4}b$, ideoque $b=4r$, producaturque CB in A ita ut ſit $AB=a+\frac{1}{4}b$, ſumatur arcus BF duplus arcus AN, ductoque perpendiculo FH, & tangente erectâ in D ductâque AFG erit DG prope æqualis quantitati $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$; eſt enim ex conſtructione AH ad AD ut FH ad DG ideoque $DG=\frac{AD}{AH}FH$ eſt autem $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}=\frac{AD}{AH}\times FH$, nam poſitō $4r$ loco b & utroque termino diviſo per r^2, fit $\frac{a+\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}}{a+\frac{4y^2}{r}}$; Valor mediocris quadrati y^2 eſt $\frac{1}{2}r^2$, unde $\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}=\frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}}$ eſt paulo major quam $\frac{2}{3}$ hinc $\frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{6y^2}{r}=3r$; Præterea

$4y^2$

meſtris motus nodorum. Eſt & (y) æquatio menſtrua, ſed quæ

$\frac{2y^2}{r}$ valore ſuo medioci eſt r, eſt etiam $\frac{2y^2}{r}$ ſinus verſus arcus dupli ejus cujus ſinus eſt y, ideoque $\frac{2y^2}{r}$ eſt accuratè æquale BH unde $a+\frac{4y^2}{r}$ eſt $a+r+$BH, ſed $a+r$ per conſtructionem eſt AB, ergo $a+\frac{4y^2}{r}$ eſt AH, ideoque $\frac{a+\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}}{a+\frac{4y^2}{r}}=\frac{a+3r}{AH}$ abſque errore ſenſibili, quia ſi $\frac{2y^2}{r}$ minus ſit aut majus quam r, quoniam idem valor in numeratore ac denominatore occurrit, & ea quantitas non eſt magna reſpectu totius AH, manebit idem fractionis valor; ſed $a+3r=$AD ideoque fractio $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-y^2}}}{ar^2+by^2}$ eſt proximè æqualis fractioni $\frac{AD}{AH}$.



Eſt vero accuratè $\frac{4TAZ}{r}$=FH, namTrian- gulum $TAZ=\frac{AZ\times TZ}{2}$, eſt $AZ=y$, $TZ=\sqrt{rr-yy}$, ergo $\frac{4TAZ}{r}=\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$; Sed, ex Principiis Trigonometricis, ſinus arcus dupli ejus cujus ſinus eſt y, eſt $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ergo ſinus arcus BF qui duplus eſt arcus AN cujus ſinus eſt y eſt $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ſed ſinus arcus BF eſt FH ex conſtructione, ideoque $FH=\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}=\frac{4TAZ}{r}$, & quantitas $\frac{AD}{AH}\times FH=\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$.

Quibus expoſitis, cætera, nempe angulum DAG pro æquatione ſumi poſſe, lineas AB ad AC ſumendas eſſe ut motus medius nodi ad ſemiſſem ejus motus in quadraturis, cætera, inquam, patent ut in Hypotheſi ſecundâ.

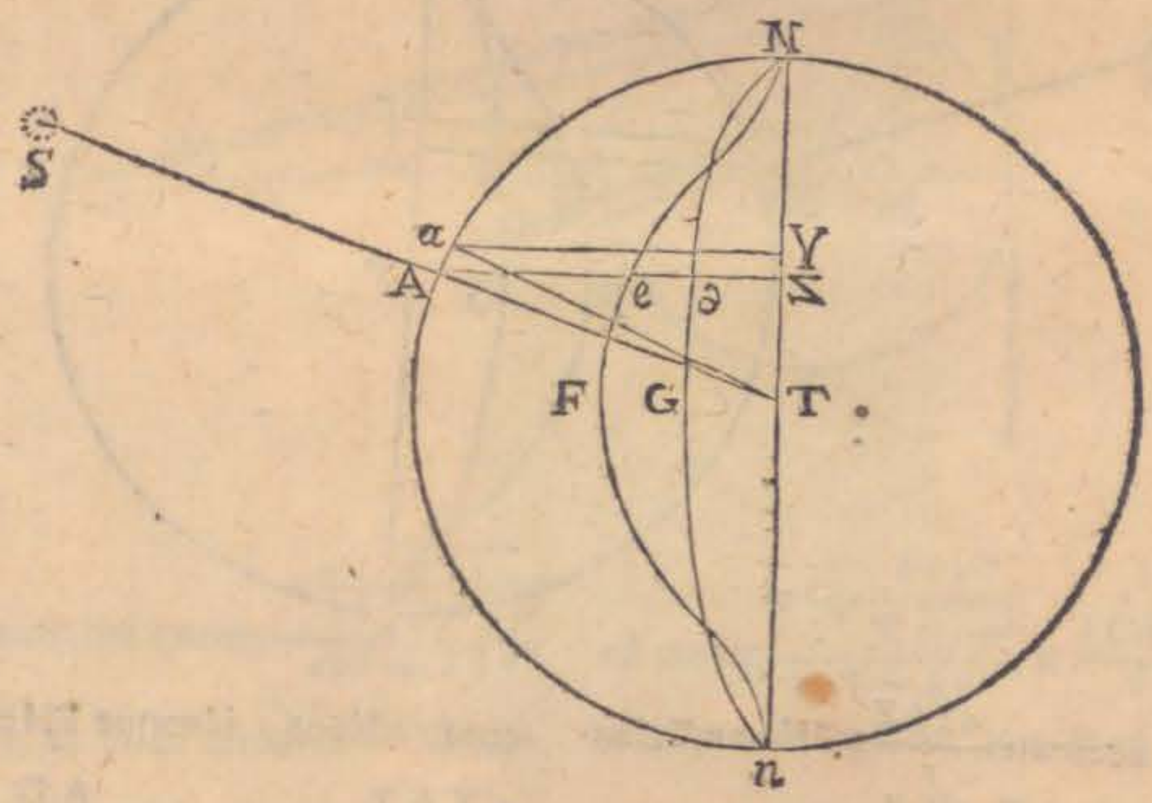
(y) * *Eſt & æquatio menſtrua*, ex iis quæ

DE MUNDI SYSTEMATE.

quæ ad inventionem latitudinis lunæ minime neceſſaria eſt. Nam cum variatio inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia ſit, alteri ſemeſtri, alteri autem menſtruæ; inæqualitas & æquatio menſtrua nodorum ita ſe mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda latitudine lunæ negligi poſſunt.

Corol. Ex hac & præcedente propoſitione liquet quod nodi in (z) ſyzygiis ſuis quieſcunt, in quadraturis autem regrediuntur

117. quæ in Prop. XXX. & XXXI. dicta ſunt, liquet quod dum Luna motu menſtruo circa terram fertur, nodi ſatis inæqualiter feruntur hinc ſi locus nodorum ex eorum motu medio æſtimaretur, locus ille medius à vero nonnihil differret, idque quod eſſet corrigendum ſecundum diverſam Lunæ ipſius diſtantiam à nodo Æquatio menſtrua meritò diceretur, ſed cum totus motus menſtruus Lunæ non ſit 28r. & compenſetur latitudinis error qui ex falsâ nodi poſitione oriretur per inclinationis Lunæ inæqualitates, operæ pretium non duxit Newtonus hanc Æquationem tradere, ſuo loco autem de eâ compenſatione agetur.



(z) * *Liquet quod nodi in ſyzygiis quieſcunt.* Etenim motus nodorum eſt ut area AZYa dempta area eZY, ubi verò nodi ſunt in ſyzygiis ideoque ubi punctum A incidit in N, evaneſcit linea AZ ac per conſequens area AZYa—eZY nullus itaque eſt nodorum motus. *In quadraturis autem regrediuntur motu horario* 16″ 19‴ 26iv. Si nodi diſtent 90gr. à Sole, AZ ſit æqualis AT, & ZY=Aa, ideoque area AZYa quæ eſt Parallelogrammum ejuſdem altitudinis ac baſeos ac Triangulum ATa eſt ejus duplum, cumque eZ ſit ad AZ ut AZ *q* ad 9.0827646 AT *q* + AZ *q* ſitque AZ = AT in hoc caſu, ſit eZ = $\frac{AT}{10.08276}$ & area eZY eſt $\frac{AT \times Aa}{10.0827646}$ ſive duplum Trianguli ATa diviſum per 10.0827646 hinc motus nodi qui exprimitur per aream AZYa—eZY, eſt in hoc caſu

tur motu horario 16^{II}. 19^{III}. 26^{IV}. (a) Et quod æquatio motus nodorum in octantibus sit 1^{gr}. $30'$. Quæ omnia cum phænomenis cœlestibus probè quadrant.

Scholium.

Aliâ ratione motum nodorum *J. Machin Astron. Prof. Greshamensis* & *Hen. Pemberton* M. D. seorsum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta est. Et utriusque chartæ, quas vidi, duas propositiones continebant, & inter se in utrisque congruebant. Chartam vero D. *Machin*, cum prior in manus meas venerit, hic adjungam.

De

casu ad aream A T a ut $2 - \frac{2}{10.0827646}$ ad 1, sed quia tota area N A n N motum annuum designat 19^{sr}. $49'$. $3''$. $55'''$. Triangulus A T a motum horarium repræsentans numerum graduum designabit qui obtineretur dividendo 19^{sr}. $49'$. $3''$. $55'''$. per numerum horarum in anno sidereo comprehensarum & ea divisione factâ numerus graduum quem repræsentat Triangulus A T a invenietur $8''$. $8'''$. 18^{IV}. 51^{V}. si itaque fiat 1. ad $\frac{18.0827646}{10.0827646}$ ita iste numerus ad quartum $8''$. $8'''$. 18^{V}. 51^{V}. invenietur $16''$. $19'''$. 26^{IV}. qui erit motus horarius quo nodi regrediuntur in quadraturis.

(a) * *Et quod Æquatio motus nodorum in octantibus sit* 1^{gr}. $30'$. Ex secundâ hypothesi notæ 117. Æquatio in Octantibus per hanc proportionem invenitur, ut tota circumferentia circuli B F D B ad dimidium motus nodi inter syzygias quod est 9^{sr}. $11'$. $3''$. ita $\frac{a + .78\,b}{a + \frac{1}{2}b}\,r$ ad Æquationem quæsitam; est autem b ad a ut 1 ad 9 0827646, itaque $a + .78\,b$ est ut 9.8627646 & $a + \frac{1}{2}b$ ut 9.5827646 itaque fractio $\frac{a + .78b}{a + \frac{1}{2}b} = \frac{9.8627646}{9.5827646} =$ 1.0292191, quæ ducta in $r = \frac{1}{4}b = 9^{sr}$. $54'$. $31''$. $57'''$. dat 10^{d}. $11'$. $54''$. $15'''$. 8^{v}. 11^{v}., ducta iterum in 9^{sr}. $11'$. $3''$, dat 93^{sr}. $39'$. $49''$. $48'''$., sed si radius r circuli B F D B exprimatur per numerum 9^{sr}. $54'$. $31''$. $57'''$., longitudo circumferentiæ continebit tales gradus 628^{gr}. $13'$. $39''$. $50'''$. Diviso itaque numero 93^{gr}. $39'$. $49''$. $48'''$ per 62^{gr}. $13'$. $39''$. $50'''$. Quotiens sive Æquatio quæsita est 1^{gr}. $30'$. $18''$. &c. 117.

Calculum hunc integrum exhibuimus ut ostenderemus quomodo adhibendæ forent quantitates $4c$ & r quæ circumferentiam totam ejusque radium exhibent, cum enim is radius æquipolleat $\frac{1}{4}b$, & $\frac{1}{4}b$ sit 9^{sr}. $54'$. $31''$. $57'''$., cavendum ne $4c$ sive circumferentia tota, 360^{gr}. assumatur, sed debet assumi ejus numeri graduum qui sit ad 9^{sr}. $54'$. $31''$. $57'''$. ut est circumferentia ad Radium.

De hâc autem Æquatione semestri non agunt De la Hirius & Cassinus in Tabulis Astronomicis, nullius enim usus est ad calculum Eclipsium ad quem potissimum accommodantur pleræque Lunares Tabulæ; hanc autem Æquationem habent Tabulæ Rudolphinæ (pag. 87. Tabul.) & in Octantibus distantiæ Solis à nodo hanc faciunt 1^{gr}. $39'$. $46''$., utrum accuratioribus Tabulis hæc æquatio ad 1^{gr}. $30'$. $18''$. magis accederet ignoramus, at, qui pro-

DE MUNDI SYSTEMATE.

DE MOTU NODORUM LUNÆ.

PROPOSITIO I.

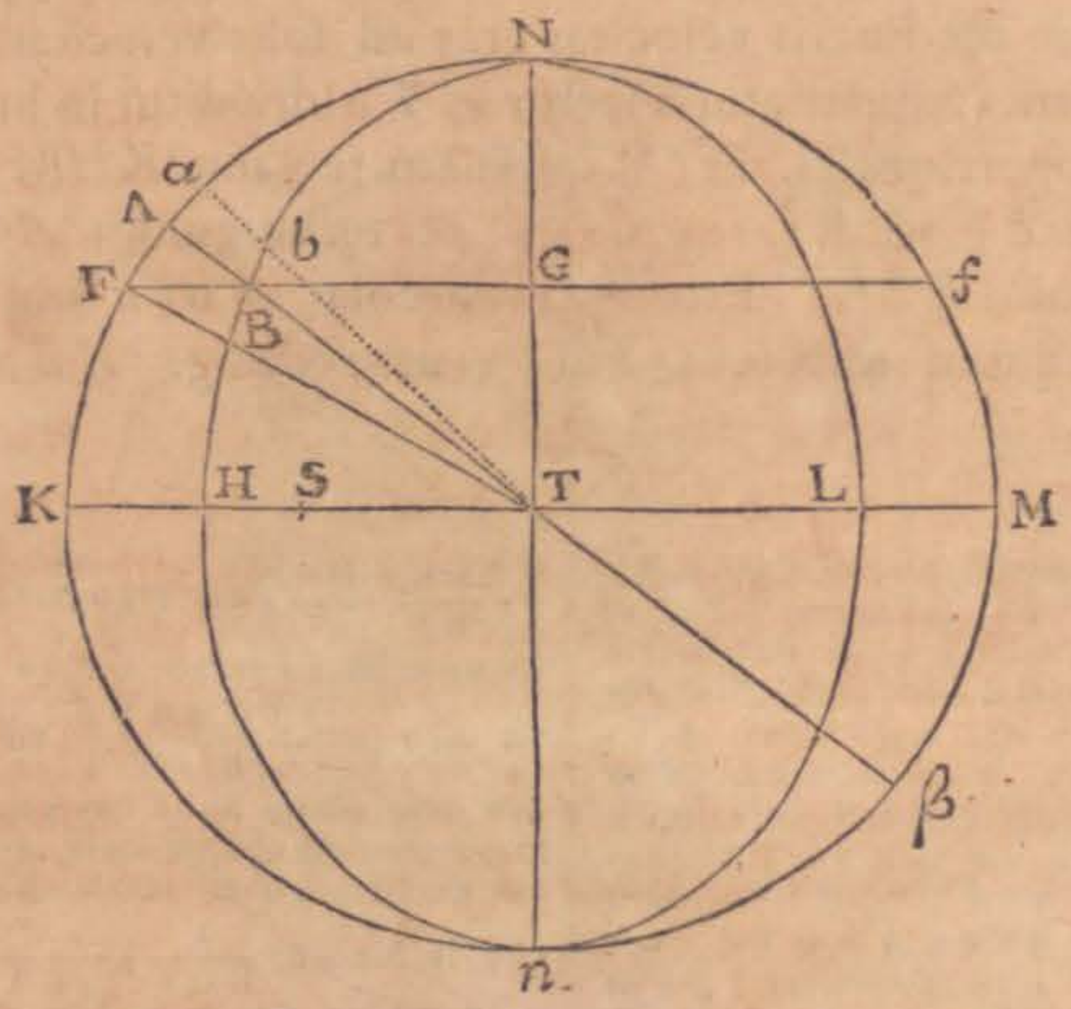
„*Motus ſolis medius à nodo, definitur per medium proportio-*
„*nale geometricum, inter motum ipſius ſolis medium, & motum*
„*illum mediocrem quo ſol celerrimè recedit à nodo in quadraturis.*

„Sit *T* locus ubi terra, *Nn* linea nodorum lunæ ad tempus „quodvis datum, *KTM* huic ad rectos angulos ducta, *TA* „recta circum centrum revolvens eâ cum velocitate angulari „quâ ſol & nodus à ſe invicem recedunt, ita ut angulus inter „rectam quieſcentem *Nn* & revolventem *TA*, ſemper fiat æ- „qualis diſtantiæ locorum ſolis & nodi. Jam ſi recta quævis „*TK* dividatur in partes *TS* & *SK* quæ ſint ut motus ſolis „horarius medius ad motum horarium mediocrem nodi in qua- „draturis, & ponatur recta *TH* media proportionalis inter par- „tem *TS* & totam *TK*, hæc recta inter reliquas proportiona- „lis erit motui medio ſolis à nodo.

„Deſcribatur enim circulus *NKnM* centro *T* & radio *TK*, „eodemque centro & ſemiaxibus *TH* & *TN* deſcribatur ellip- „ſis *NHnL*, & in tempore quo ſol à nodo recedit per ar- „cum *Na*, ſi ducatur recta *Tba*, area ſectoris *NTa* exponet „ſummam motuum nodi & ſolis in eodem tempore. Sit igitur „arcus *aA* quam minimus quem recta *Tba* præfatâ lege revol- „vens in datâ temporis particulâ uniformiter deſcribit, & ſector „quam minimus *TAa* erit ut ſumma velocitatum quâ ſol & „nodus tum temporis ſeorſim feruntur. Solis autem velocitas „ferè uniformis eſt, utpote cujus parva inæqualitas vix ullam „indu-

117. bè norunt quam difficile ſit obſervationes loci Nodi accuratiſſimas habere extrà Eclipſes, & quantùm parvus error in latitudine Lunæ & in verâ inclinatione orbitæ aſſignandâ locum nodi mutet, non invenient hoc diſcrimen 9' obeſſe, quominus dici poſſit æquationem ita inventam cum Phænomenis cœleſtibus probè quadrare, & facile ſuſpicabuntur errorem hunc obſervationi potius quam calculo eſſe tribuendum„

„inducit in medio nodorum motu varietatem. Altera pars hu- „jus ſummæ nempe velocitas nodi in mediocri ſuâ quantitate, „augetur in receſſu à ſyzygiis in duplicatá ratione ſinus diſtan- „tiæ ejus à ſole; per Coroll. Prop. 31. Lib 3^tii. Princip. & „cum maxima eſt in quadraturis ad ſolem in *K*, (b) eandem „rationem obtinet ad ſolis velocitatem ac ea quam habet *SK*



„ad *TS* hoc eſt (c) ut (differentia quadratorum ex *TK* & *TH* „vel) (d) rectangulum *KHM* ad *TH* quadratum. Sed ellip- „ſis *NBH* dividit ſectorem *ATa* ſummæ harum duarum ve- „locitatum exponentem, in duas partes *ABba* & *BTb* ipſis „velocitatibus proportionales. Producatur enim *BT* ad circu- „lum in β, & à puncto *B* demittatur ad axem majorem per- „pen-

(b) * *Eamdem rationem obtinet* per conſtructionem.

(c) * *Ut differentia quadratorum ex TK & TH — ad TH quadratum.* Eſt ex conſtructione TK ad TH ut TH ad TS, eſt ergo TK^2 ad TH^2 ut TK ad TS, & dividendo $TK^2 - TH^2$ ad TH^2 ut TK — TS ſive SK ad TS. 117.

(d) * *Ut differentia quadratorum ex TK & TH vel rectangulum KHM.* Eſt enim $TK^2 - TH^2 = KH \times HM$, per 5^am. Lib. 2^i. Elem. Euclidis.

DE MUNDI SYSTEMATE.

„pendicularis *BG*, quæ utrinque producta occurrat circulo in „punctis *F* & *f*, & (e) quoniam ſpatium *ABba* eſt ad ſecto„rem *TBb* ut rectangulum *ABβ* ad *BT* quadratum (rectangulum „enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex *TA* & *TB* „ob rectam *Aβ* æqualiter & inæqualiter ſectam in *T* & *B*.) „Hæc igitur ratio ubi ſpatium *ABba* maximum eſt in *K*, ea„dem erit ac ratio rectanguli *KHM* ad *HT* quadratum, ſed „maxima nodi mediocris velocitas erat ad ſolis velocitatem in hâc „ratione. Igitur in quadraturis ſector *ATa* dividitur in partes velo„citatibus proportionales. Et (f) quoniam rectang. *KHM* eſt ad *HT* „quadr. ut *FBf* ad *BG* quad. (g) & rectangulum *ABβ* æqua„tur rectangulo *FBf*. Erit igitur areola *ABba* ubi maxima „eſt ad reliquum ſectorem *TBb*, ut rectang. *ABβ* ad *BG* „qua-

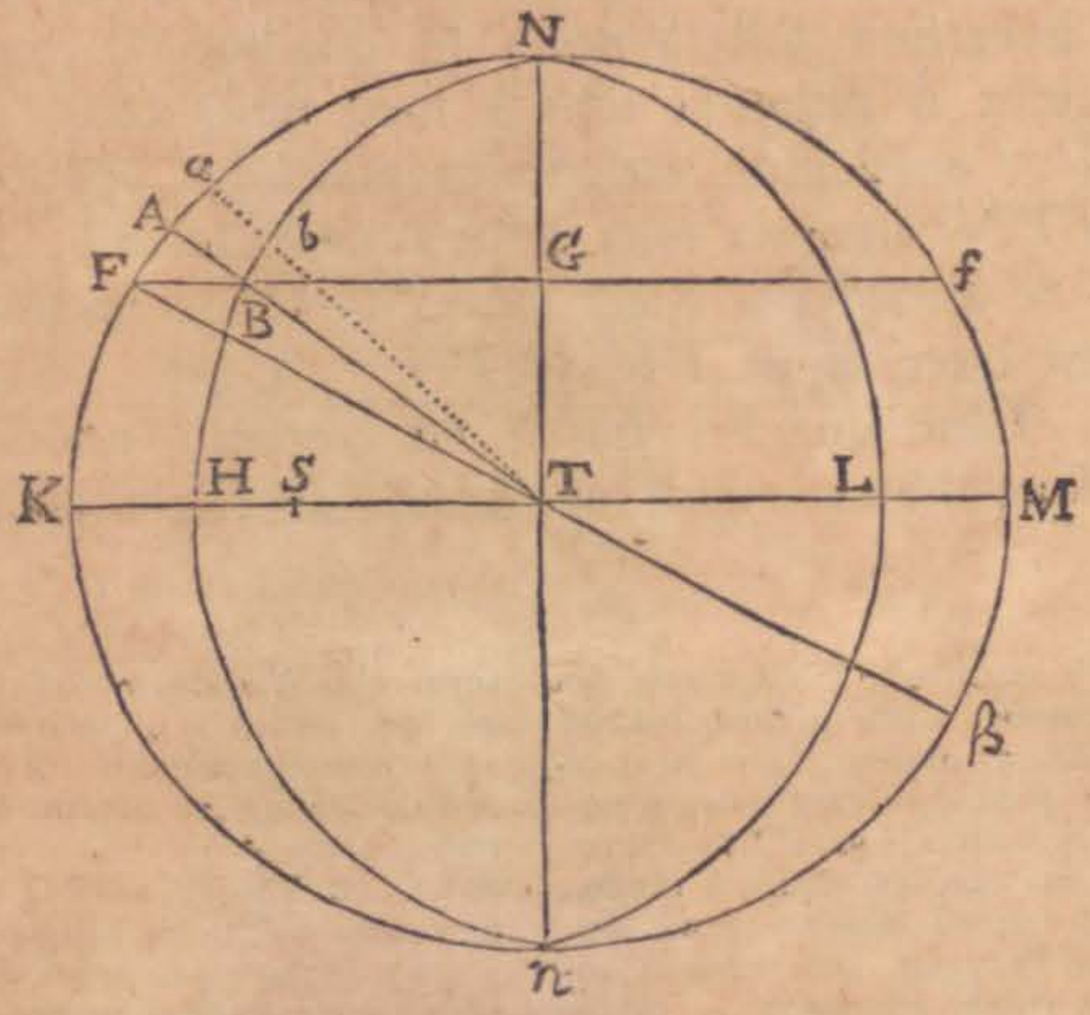
117. (e) * *Et quoniam ſpatium ABba* &c. Sector TAa eſt ad ſectorem TBb ut AT^2 ad BT^2, (quia propter parvitatem anguli ATa, non differt ſenſibiliter ſector BTb ab eo qui inter lineas AT, aT interciperetur & terminaretur arcu circuli centro T, radio TB deſcripti): Dividendo autem eſt $TAa - TBb$ ſive ABba ad TBb ut $AT^2 - BT^2$ ad BT^2; eſt verò $AT^2 - BT^2 = AB \times B\beta$ (per 5. 2^i. Lib. El.) ergo *ABba ad TBb ut ABβ ad BT quadratum.*

(f) * *Et quoniam rectangulum KHM eſt ad HT quad. ut FBf ad BG quad.* Ex natura Ellipſeos & circuli circumſcripti, eſt KT ad HT ut FG ad BG, & quadrando KT^2 ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2, & dividendo $KT^2 - HT^2$ ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2, ſed (per 5^am. Lib. 2^i. Elem.) $KT^2 - HT^2 = KH \times HM$ & $FG^2 - BG^2 = FB \times Bf$ ergo KHM ad HT^2 ut FBf ad BG^2.

(g) * *Et rectangulum ABβ = FBf* (per 25. 3^i. Elem.) hoc ratiocinium ita exprimi poteſt, area ABba ubi maxima eſt, eſt ad TBb ut ABβ ad BG^2 ergo ubi maxima eſt ABba eſt $\frac{TB \times AB\beta}{BG^2}$, in aliis verò locis area ABba eſt ad TBb ut ABβ ad BT^2, ergo illis in locis eſt $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$, eſt ergo area ABba ubi maxima eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut $\frac{TBb \times AB\beta}{BG^2}$ ad $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$ ſive quia motus Solis qui per aream TBb exprimitur eſt ubique idem, eſt area ABba ubi maxima eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut $\frac{1}{BG^2}$ ad $\frac{1}{BT^2}$ ſive ut BT^2 ad BG^2, ſed in Triangulo BTG eſt BT ad BG ut ſinus anguli recti G ad ſinum anguli BTG per Principia Trigonom. & diſtantia Solis à nodo ubi area ABba eſt maxima, nempe in K, menſuratur per angulum rectum, & ubi eſt in loco quovis A per angulum BTG, ergo area ABba ubi maxima eſt, eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut quadrata ſinuum diſtantiæ Solis à nodo in utrovis loco, ſed in eâ ſunt ratione motus nodorum in iis diſtantiis; Ergo ut eſt area ABba ubi maxima eſt ad motum nodi in eo loco, ita eſt area ABba in alio quovis loco ad motum nodi in eo loco, ſed ubi area ABba maxima eſt, eſt ad motum nodi ut BTb ad motum Solis, ergo cum areæ BTb & motus Solis ubique eadem maneant, eſt etiam in quovis loco area ABba ad motum nodi ut area BTb

ad

„quadr. Sed ratio harum arcolarum ſemper erat ut $ABβ$ re-
„ctang. ad BT quadratum; & propterea areola $ABba$ in lo-
„co A minor eſt ſimili areola in quadraturis, in duplicatâ ra-
„tione BG ad BT hoc eſt in duplicatâ ratione ſinus diſtantiæ
„ſolis à nodo. Et proinde ſumma omnium areolarum $ABba$
„nempe ſpatium ABN erit ut motus nodi in tempore quo ſol
„digreditur à nodo per arcum NA. Et ſpatium reliquum nem-



„pe ſector ellipticus NTB erit ut motus ſolis medius in eodem
„tempore. Et propterea quoniam annuus motus nodi medius,
„is eſt qui fit in tempore quo ſol periodum ſuam abſolverit,
„motus nodi medius à ſole erit ad motum ipſius ſolis medium,
„ut area circuli ad aream ellipſeos, hoc eſt ut recta TK ad re-
„ctam TH mediam ſcilicet proportionalem inter TK & TS; vel
„quod eodem redit ut media proportionalis TH ad rectam TS.

PRO-

ad motum Solis ſive alternando eſt ubique AB,ba ad BTb ut motus nodi ad motum Solis. *Et proinde ſumma omnium* $ABba$ *&c.* XXXIV.

DE MUNDI SYSTEMATE.

„pendicularis *BG*, quæ utrinque producta occurrat circulo in „punctis *F* & *f*, & (e) quoniam ſpatium *ABba* eſt ad ſecto„rem *TBb* ut rectangulum *ABβ* ad *BT* quadratum (rectangulum „enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex *TA* & *TB* „ob rectam *Aβ* æqualiter & inæqualiter ſectam in *T* & *B*.) „Hæc igitur ratio ubi ſpatium *ABba* maximum eſt in *K*, ea„dem erit ac ratio rectanguli *KHM* ad *HT* quadratum, ſed „maxima nodi mediocris velocitas erat ad ſolis velocitatem in hâc „ratione. Igitur in quadraturis ſector *ATa* dividitur in partes velo„citatibus proportionales. Et (f) quoniam rectang. *KHM* eſt ad *HT* „quadr. ut *FBf* ad *BG* quad. (g) & rectangulum *ABβ* æqua„tur rectangulo *FBf*. Erit igitur areola *ABba* ubi maxima „eſt ad reliquum ſectorem *TBb*, ut rectang. *ABβ* ad *BG* „qua-

K 17.

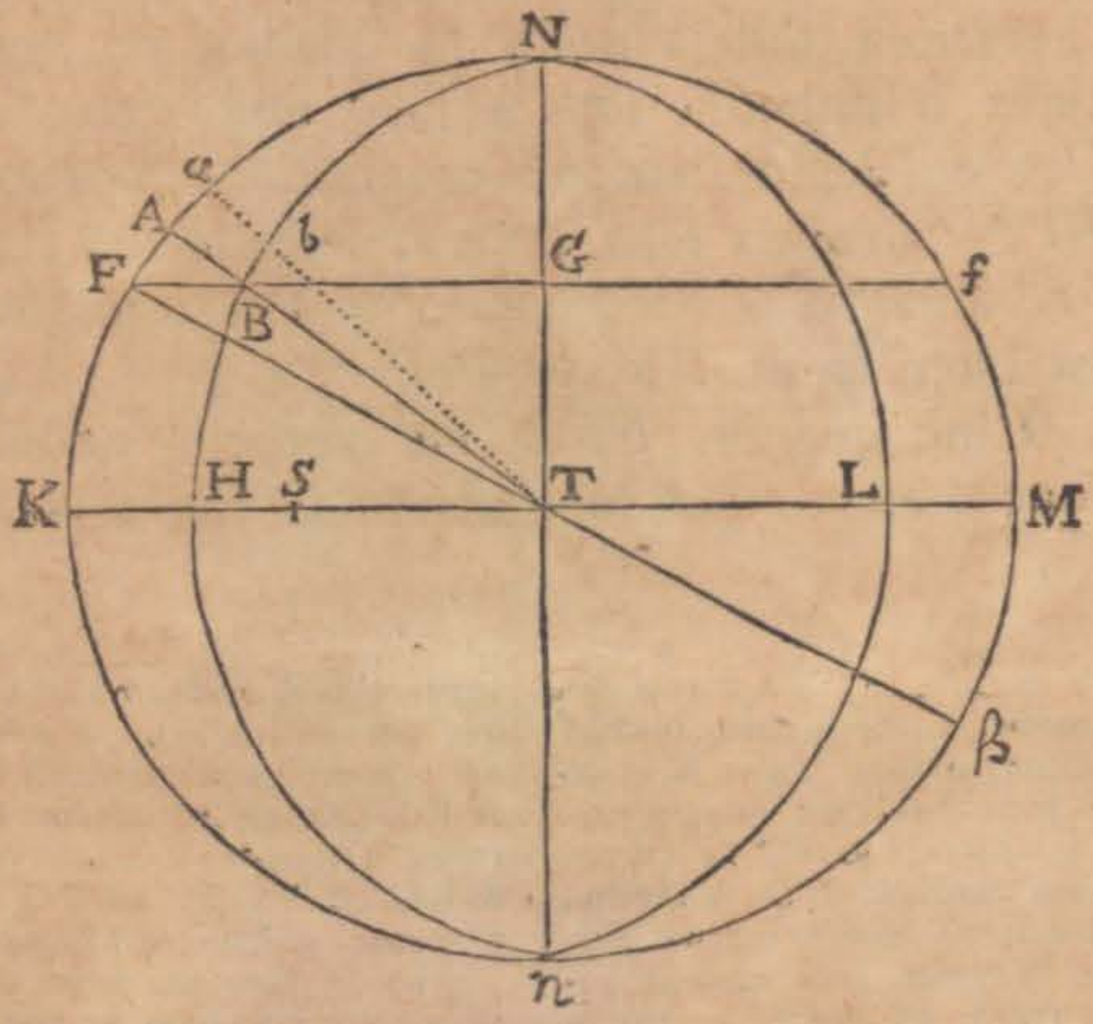
(e) * *Et quoniam ſpatium ABba* &c. Sector TAa eſt ad ſectorem TBb ut AT^2 ad BT^2, (quia propter parvitatem anguli ATa, non differt ſenſibiliter ſector BTb ab eo qui inter lineas AT, aT interciperetur & terminaretur arcu circuli centro T, radio TB deſcripti): Dividendo autem eſt TAa − TBb ſive ABba ad TBb ut $AT^2 - BT^2$ ad BT^2; eſt verò $AT^2 - BT^2 = AB \times B\beta$ (per 5. 2^i. Lib. El.) ergo *ABba ad TBb ut ABβ ad BT quadratum.*

(f) * *Et quoniam rectangulum KHM eſt ad HT quad. ut FBf ad BG quad.* Ex natura Ellipſeos & circuli circumſcripti, eſt KT ad HT ut FG ad BG, & quadrando KT^2 ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2, & dividendo $KT^2 - HT^2$ ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2, ſed (per 5^am. Lib. 2^i. Elem.) $KT^2 - HT^2 = KH \times HM$ & $FG^2 - BG^2 = FB \times Bf$ ergo KHM ad HT^2 ut FBf ad BG^2.

(g) * *Et rectangulum ABβ = FBf* (per 25. 3^i. Elem.) hoc ratiocinium ita exprimi poteſt, area ABba ubi maxima eſt, eſt ad TBb ut ABβ ad BG^2 ergo ubi maxima eſt ABba eſt $\frac{TB \times AB\beta}{BG^2}$, in aliis verò locis area ABba eſt ad TBb ut ABβ ad BT^2, ergo illis in locis eſt $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$, eſt ergo area ABba ubi maxima eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut $\frac{TBb \times AB\beta}{BG^2}$ ad $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$ ſive quia motus Solis qui per aream TBb exprimitur eſt ubique idem, eſt area ABba ubi maxima eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut $\frac{1}{BG^2}$ ad $\frac{1}{BT^2}$ ſive ut BT^2 ad BG^2, ſed in Triangulo BTG eſt BT ad BG ut ſinus anguli recti G ad ſinum anguli BTG per Principia Trigonom. & diſtantia Solis à nodo ubi area ABba eſt maxima, nempe in K, menſuratur per angulum rectum, & ubi eſt in loco quovis A per angulum BTG, ergo area ABba ubi maxima eſt, eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut quadrata ſinuum diſtantiæ Solis à nodo in utrovis loco, ſed in eâ ſunt ratione motus nodorum in iis diſtantiis; Ergo ut eſt area ABba ubi maxima eſt ad motum nodi in eo loco, ita eſt area ABba in alio quovis loco ad motum nodi in eo loco, ſed ubi area ABba maxima eſt, eſt ad motum nodi ut BTb ad motum Solis, ergo cum areæ BTb & motus Solis ubique eadem maneant, eſt etiam in quovis loco area ABba ad motum nodi ut area BTb

ad

„quadr. Sed ratio harum areolarum ſemper erat ut ABb re-
„ctang. ad BT quadratum; & propterea areola $ABba$ in lo-
„co A minor eſt ſimili areola in quadraturis, in duplicatâ ra-
„tione BG ad BT hoc eſt in duplicatâ ratione ſinus diſtantiæ
„ſolis à nodo. Et proinde ſumma omnium areolarum $ABba$
„nempe ſpatium ABN erit ut motus nodi in tempore quo ſol
„digreditur à nodo per arcum NA. Et ſpatium reliquum nem-



„pe ſector ellipticus NTB erit ut motus ſolis medius in eodem
„tempore. Et propterea quoniam annuus motus nodi medius,
„is eſt qui fit in tempore quo ſol periodum ſuam abſolverit,
„motus nodi medius à ſole erit ad motum ipſius ſolis medium,
„ut area circuli ad aream ellipſeos, hoc eſt ut recta TK ad re-
„ctam TH mediam ſcilicet proportionalem inter TK & TS; vel
„quod eodem redit ut media proportionalis TH ad rectam TS.

PRO-

ad motum Solis ſive alternando eſt ubique $ABba$ ad BTb ut motus nodi ad motum Solis. *Et proinde ſumma omnium* $ABba$ *&c.* XXIV.

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO II.

„*Dato motu medio nodorum lunæ invenire motum verum.*

„Sit angulus *A* distantia solis à loco nodi medio, sive motus „medius solis à nodo. Tum si capiatur angulus *B* cujus tangens „sit ad tangentem anguli *A* ut *TH* ad *TK*, hoc est in subdu„plicatâ ratione motus mediocris horarii solis ad motum me„diocrem horarium solis à nodo in quadraturis versante; erit „idem angulus *B* distantia solis à loco nodi vero. Nam jun„gatur *FT* & ex demonstratione propositionis superioris (h) erit „angulus *FTN* distantia solis à loco nodi medio, angulus au„tem *ATN* distantia à loco vero, & tangentes horum angu„lorum sunt inter se ut *TK* ad *TH*.

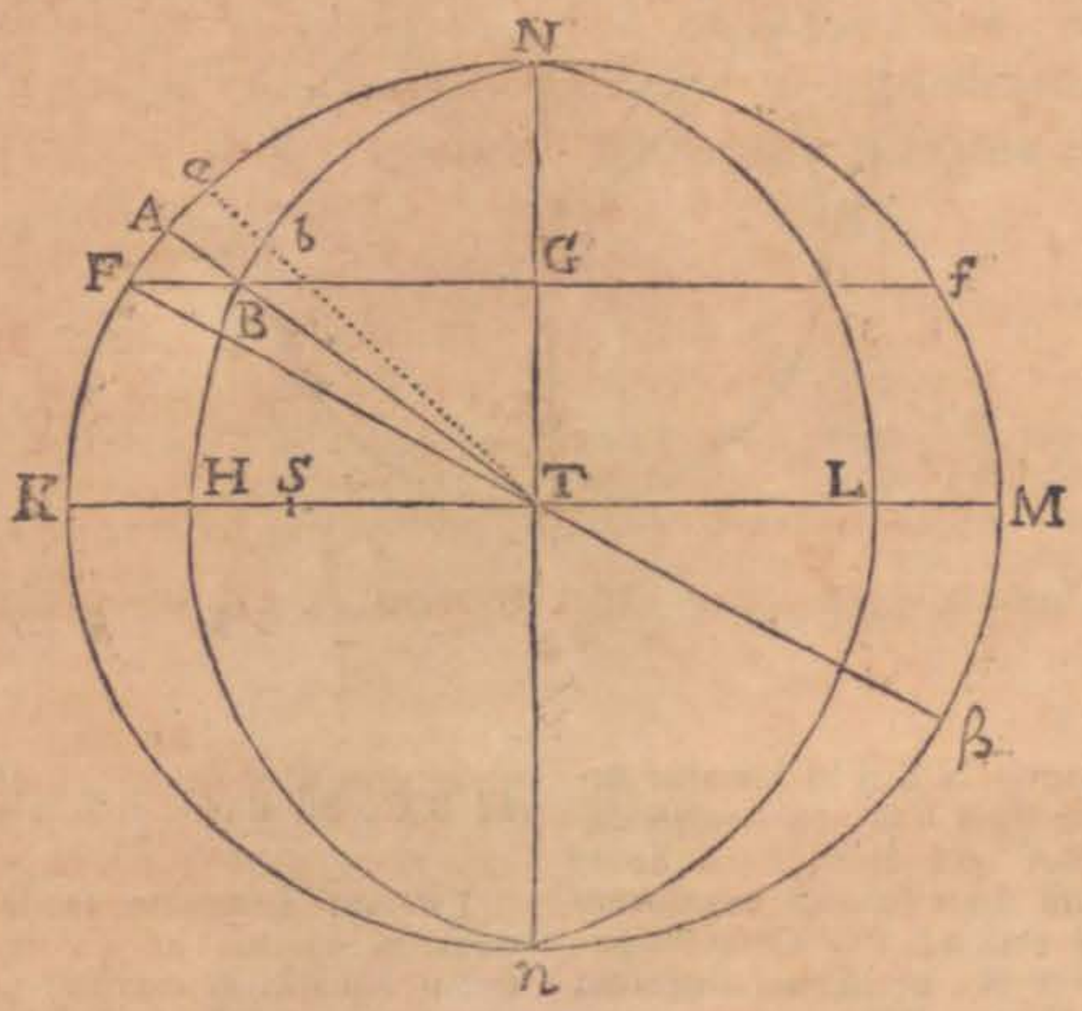
„*Coroll.* Hinc angulus *FTA* est æquatio nodorum lunæ, „(i) sinusque hujus anguli ubi maximus est in octantibus, est „ad

(h) * *Erit angulus FTN distantia Solis à loco nodi medio.* Cum circulus NKnM repræsentet totum motum Solis à nodo inter syzygias proximas cum eodem nodo, sectores ejus circuli ut FTN repræsentabunt motum medium Solis à Nodo, tempore quod erit ad totum tempus motus Solis inter syzygias cum eodem nodo, ut erit is sector assumptus ad totum circulum. 117.

Ducatur verò FG quæ occurrat Ellipsi in B, cumque sectores Elliptici BTN repræsentent Solis motum qui uniformis supponitur, ii sectores BTN sunt proportionales tempori; sed sector Ellipticus BTN erit, ex natura Ellipseos & circuli circumscripti, ad totam Ellipsim ut sector circularis FTN ad totum circulum, ideoque tempus quo Solis motus repræsentabitur per BTN erit idem ac tempus quo Sol à nodis recesserit motu medio repræsentato per FTN, sed dum Sol describit sectorem BTN, vero motu recedit à nodo sectore NTA, per dem. prop. super. ergo sector FTN repræsentat medium motum Solis à nodo eo tempore quo verus ejus à nodo motus repræsentari debet per NTA, ergo medius motus est ad verum ut angulus TN ad angulum ATN, Tangentes autem horum angulorum, sumendo TG pro radio, sunt FG & BG, & FG est ad BG ut KT ad KH ex naturâ circuli & Ellipseos.

(i) * *Sinusque hujus anguli in octantibus est ad Radium ut KH ad TK+TH.* Ex Principiis Trigonometricis, est sinus hujus anguli FTA qui est æquatio nodorum Lunæ ad sinum anguli TFG, qui in hoc casu est 45gr. (cujus ergo sinus est $TA\sqrt{\frac{1}{2}}$) ut est FB ad BT, sive omnes terminos quadrando; est quad. sinus Æquationis ad $\frac{TA^2}{2}$ ut FB^2 ad BT^2 sive tollendo fractionem, est quadr. sinus Æquationis quæsitæ ad TA^2 ut FB^2 ad $2BT^2$, sed $BT^2 = BG^2 + TG^2$ & in octantibus est $TG = FG$ sive $BG + BF$ cujus quad. est $BG^2 + 2BG \times BF + BF^2$ hinc $BT^2 = 2BG^2 + 2BG \times DF + BF^2$ & $2BT^2 = 4BG^2 + 4BG \times BF + 2BF^2$, cujus Radix quadrata (negligendo BF^2) est

„ad radium ut KH ad $TK+TH$. Sinus autem hujus æqua-
„tionis in loco (k) quovis alio A eſt ad ſinum maximum, ut
„ſinus ſummæ angulorum $FTN+ATN$ ad radium: hoc eſt
„ferè ut ſinus duplæ diſtantiæ ſolis à loco nodi medio (nempe
„$2FTN$) ad radium.



Scholium.

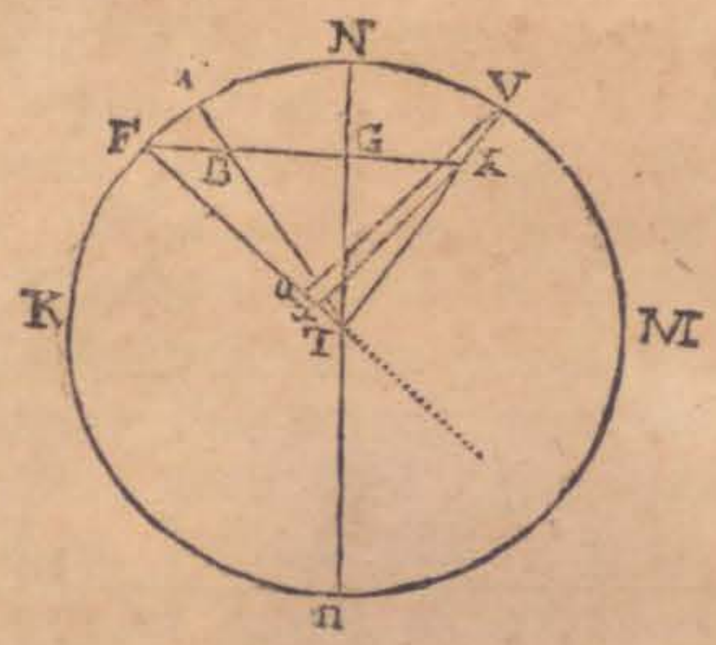
„Si motus nodorum mediocris horarius in quadraturis ſit
„$16^{II}.\ 16^{III}.\ 37^{IV}.\ 42^{V}.$ hoc eſt in anno toto ſidereo $39^{o}.\ 38'.$
„$7''.$

eſt $2BG+BF=FG+BG$: Ergo tandem cum ſit quad. ſinus Æquationis quæſitæ ad TA^2 ut eſt FB^2 ad $2BT^2$; Radices quadratas omnium terminorum ſumendo eſt ſinus Æquationis ad TA ſive ad Radium ut eſt FB ad $FG+BG$, ſed eſt BF ad $FG+BG$ ut KH ad $TK+TH$, hinc tandem, ſinus Æquationis maximæ eſt ad radium ut KH ad $TK+TH$. 1179.

(k) * *Sinus autem Æquationis in loco quovis alio &c.* Ut hoc commode demonſtretur hoc Lemma adhibendum eſt:

DE MUNDI SYSTEMATE.

„7''. 50'''. erit (1) *TH* ad *TK* in ſubduplicatâ ratione numeri 9,082764 ad numerum 10,0827646, hoc eſt ut „18,



217. In circulo quovis N K n M ſumatur arcus N F ejuſque ſinus F G, ex centro ducatur recta T B A quæ ſecet hunc ſinum in B, dico quod ſinus ſummæ angulorum F T N, A T N erit ad T G Coſinum anguli aſſumpti F T N, ut ſumma linearum F G, B G, ad lineam B T.

Ex alterâ parte puncti N ſumatur arcus N V = N A, ducatur T V & producatur F G quæ occurrat radio T V in X, ductoque radio F T eoque producto ſi opus eſt, ducantur, in ipſum perpendiculares X x, V u.

Liquet ex conſtructione, lineam B T eſſe æqualem lineæ X T, lineam G X eſſe æqualem lineæ B G, ideoque totam F X eſſe æqualem ſummæ linearum F G, B G; liquet pariter lineam V u eſſe ſinum arcus F V qui eſt ſumma arcuum N F & N V ſive N A, & propter Triangula F X x, F T G ſimilia, ob angulum F communem & rectos x & G eſt T F ad T G ut F X ad X x, & propter Triangula ſimilia u V T, x X T eſſe V u ad T V ſive T F ut X x ad T X ſive B T; unde ex perturbato ordine fit V u ad T G ut F X ſive F G + B G ad B T; eſt itaque $BT = \frac{(FG+BG)TG}{Vu}$.

Ex hoc Lemmate facile probatur ſinum æquationis in quovis loco eſſe ad ſinum æquationis maximæ ut ſinus ſummæ angulorum F T N + A T N ad radium; nam ex Principiis Trigonometricis, eſt ſinus Æquationis quæſitæ ſive ſinus anguli F T B ad ſinum anguli F (qui eſt T G Coſinus nempe anguli F T N) ut eſt B F ad B T hoc eſt, ut eſt B F ad $\frac{(FG+BG)TG}{Vu}$ per Lemma; ducatur uterque conſequens in $\frac{Vu}{TG}$ fiet ſinus æquationis quæſitæ ad V u qui eſt ſinus ſummæ angulorum F T N + A T N ut B F ad F G + B G, ſed ex notâ præcedenti eſt B F ad B F + B G ut K H ad T K + T H, & eſt K H ad T K + T H ut ſinus æquationis maximæ ad Radium, hinc tandem, ſinus æquationis cujuſvis ad ſinum ſummæ angulorum F T N + A T N, ut ſinus æquationis maximæ ad Radium.

(1) * *Erit TH ad TK in ſubduplicatâ*

„18,6524761 ad 19,6524761. Et propterea *TH* ad *HK* ut „18,6524761 ad 1. hoc eſt ut motus ſolis in anno ſidereo ad „motum nodi medium 19°. 18′, 1″. $23'''\frac{2}{5}$.

„At ſi motus medius nodorum Lunæ in 20 annis Julianis „ſit 360°. 50′. 15″. ſicut ex obſervationibus in theoriâ lunæ „adhibitis deducitur: motus medius nodorum in anno ſidereo „erit 19°. 20′. 31″. 58‴. Et *TH* erit ad *HK* ut 360gr. „ad 19°. 20′. 31″. 58‴. hoc eſt ut 18,61214 ad 1. unde „motus mediocris horarius nodorum in quadraturis evadet „16″. 18‴. 48iv. Et æquatio nodorum maxima in octanti„bus 1°. 29′ 57″.

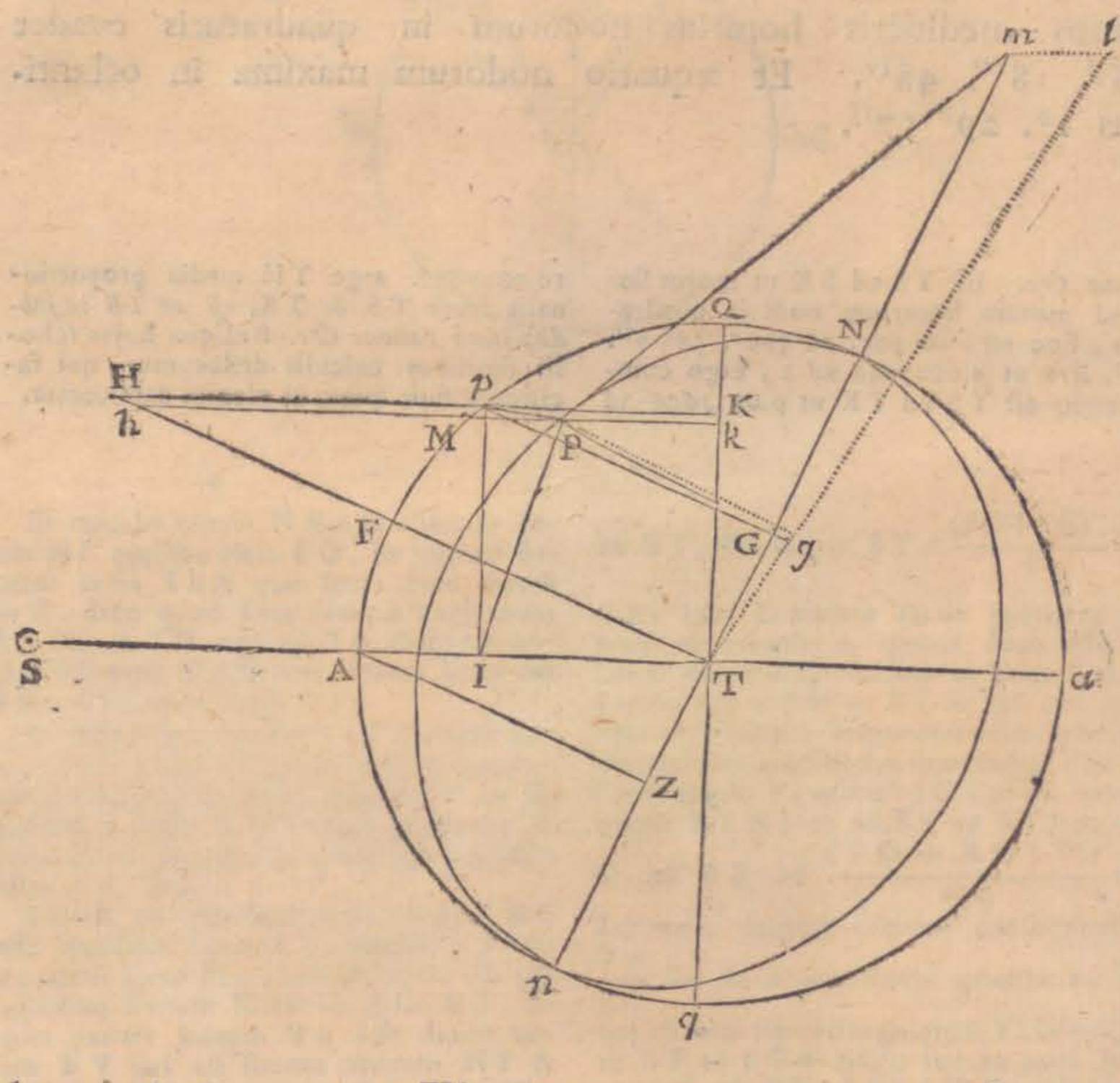
ratione &c. Eſt TS ad SK ut motus Solis ad motum horarium nodi in quadraturis, hoc eſt, ut 360. ad 39gr. 38′. 7″. 50‴. ſive ut 9.0827646 ad 1, ergo componendo eſt TS ad TK ut 9.0827646 ad 10.0827646. ergo TH media proportionalis inter TS & TK, *eſt ad TK in ſubduplicatâ ratione &c.* Reliqua hujus ſcholii ſimilibus calculis deducuntur, qui faciliores ſunt quàm ut plenius explicentur. 117

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire variationem horariam inclinationis orbis lunaris ad planum ecliptica.

Designent *A* & *a* syzygias; *Q* & *q* quadraturas; *N* & *n* nodos; *P* locum lunæ in orbe suo; *p* vestigium loci illius in



plano ecliptica, & *mTl* motum momentaneum nodorum ut supra. Et si ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, *pG* & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* inclinatio orbis lunaris ad planum ecliptica,

ticæ, ubi luna verſatur in P; & angulus $P g p$ inclinatio ejuſdem poſt momentum temporis completum; ideoque angulus GPg variatio momentanea inclinationis. Eſt (m) autem hic angulus GPg ad angulum GTg ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim. Et propterea ſi pro momento temporis ſubſtituatur hora; cum angulus GTg (per prop. xxx.) ſit ad angulum $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{iv}.$ ut $IT \times PG \times AZ$ ad AT *cub.* erit angulus GPg (ſeu inclinationis horariæ variatio) ad angulum $33^{II}.\ 10^{III}.\ 3^{vi}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* *QEI.*

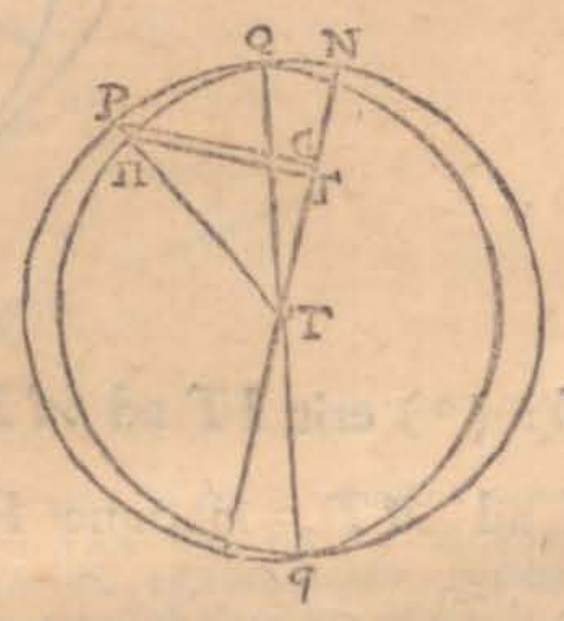
Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod luna in orbe circulari uniformiter gyratur. Quod ſi orbis ille ellipticus ſit, motus mediocris nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti ſupra expoſitum eſt. (n) Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.

Co-

(m) *Eſt autem angulus GPg ad angulum.* In Triangulo PGg, ſinus anguli GPg eſt ad lineam Gg, ut ſinus anguli PGg ad Pg (ſive PG, nam Pg & PG quam minimum differunt) ſi verò PG aſſumatur pro radio, ſinus anguli PGg eſt Pp, ergo ſinus anguli GPg eſt ad Gg ut Pp ad PG.

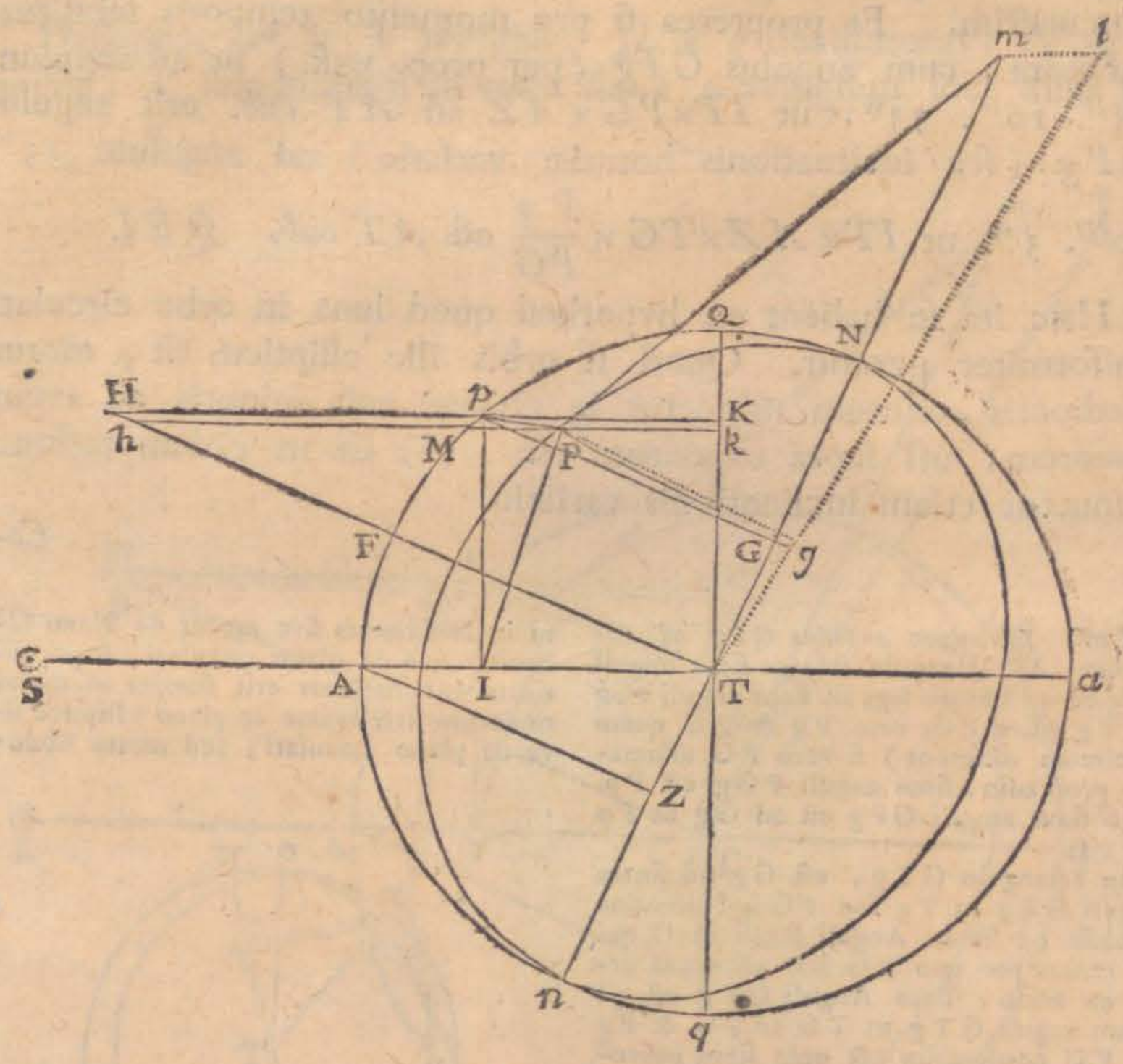
In Triangulo GTg, eſt Gg ad ſinum anguli GTg ut Tg ſive TG ipſi proximè æqualis ad ſinum Anguli Recti in G qui eſt radius pro quo PG hic aſſumitur ergo ex æquo, ſinus Anguli GPg eſt ad ſinum anguli GTg ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim, & quia ſinus parvorum Angulorum ſunt ut ipſi Anguli, eſt *angulus GPg ad angulum* &c.

(n) * *Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.* Ex propoſitionis demonſtratione liquet quod variatio inclinationis eſt ad motum nodorum ut Pp ad PG (ſive ut ſinus inclinationis plani ad Radium) & ut PG ad TG; ſumatur Π in Ellipſi ad eamdem diſtantiam à nodo ac P in circulo, ratio PG ad TG eadem erit ac ratio ΠΓ ad TΓ, per conſtruction. cum autem hic agatur de quantitate mediocri ſumatur eamdem eſſe plani inclinationem ſive agatur de Plano Elliptico ſive de plano circulari; Ergo variatio Inclinationis erit ſemper ut motus nodorum ſive agatur de plano Elliptico ſive de plano circulari; ſed motus nodorum mediocris in orbe circulari eſt ad ejus motum in orbe Elliptico ut axis major ad minorem per Cor. Prop. XXXI. In eâdem etiam ratione minuetur inclinationis variatio. 1174



DE MUNDI SYSTEMATE.

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF, sitque pM motus horarius lunæ in plano ecliptícæ; & perpendicula pK, Mk in QT demissa & utrinque producta occurrant TF in H



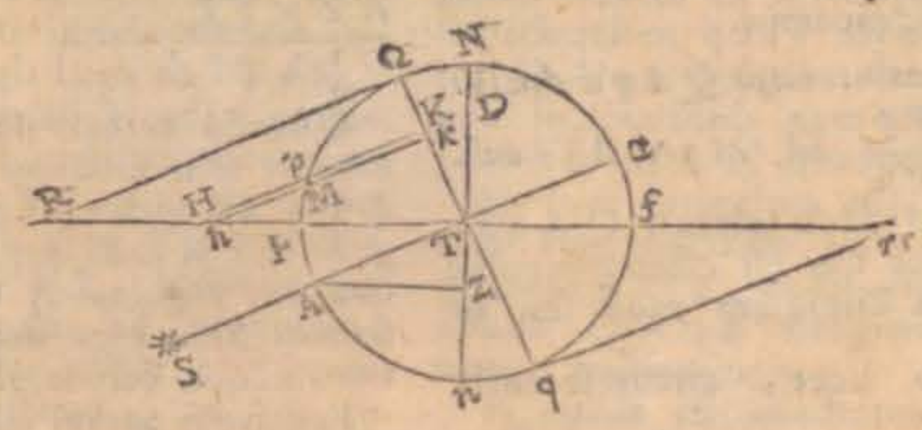
& h: (o) erit IT ad AT ut Kk ad Mp, & TG ad Hp ut TZ ad AT, ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc

117. (o) * *Erit IT ad AT ut Kk ad Mp.* Est, ex naturâ circuli, ordinata pK cui æqualis est IT ad Radium AT, ut fluxio abcissæ Kk ad fluxionem arcus Mp, & *TG ad Hp ut TZ ad AT* producatur HpK ita ut occurrat lineæ Nn in D, propter Parallelas, HD, AT & HT, AZ per constructionem, est DT ad HD ut TZ ad AT, est pariter eamdem ob rationem DG ad pD ut TZ ad AT, quare sumendo differentiam terminorum duarum priorum rationum utriusque rationis est *TG ad Hp ut TZ ad AT.*

est, æquale areæ $Hp\,Mh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea inclinationis variatio horaria ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$. ut $Hp\,Mh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.*

Corol. 2. Ideoque si terra & nodi singulis horis completis retraherentur à locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota inclinationis variatio tempore mensis illius foret ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$, ut (p) aggregatum omnium arearum $Hp\,Mh$, in revolutione puncti p genitarum, & sub signis propriis + & − conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* (q) id est, ut circulus totus $QAqa$ ductus

(p) * *Ut aggregatum omnium arearum Hp Mh sub signis propriis conjunctarum* scilicet prout linea MH sumitur in eamdem partem ac linea MK. aut in partem oppositam; priore casu area Hp Mh signo affirmativo est afficienda, posteriore negativo.



(q) * *Id est, ut circulus totus QAqa* &c. Liquet ex ipsâ constructione quod dum punctum p movetur ab F usque ad q, areæ Hp MH constituunt aream positivam FAnqrfTF, dum ex q ad f procedit areæ Hp Mh constituunt aream negativam qrf, quæ ex priori detractâ relinquit semicirculum Fnf.

Quod dum punctum p procedit ex f ad Q areæ Hp Mh efficiunt aream positivam fa NQRFTf & dum ex Q ad F procedit, efficiunt aream negativam QRF quæ ex priori detractâ relinquit semicirculum fNF. 1173.

Itaque omnes areæ Hp Mh sub signis propriis conjunctæ efficiunt circulum totum QAqa.

Cæterum observandum Variationem inclina-

DE MUNDI SYSTEMATE.

ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* (r) hoc est, ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2Mp \times AT$ *quad.*

Corol. 3. Proinde in dato nodorum situ, variatio mediocris horaria, ex quâ per mensem uniformiter continuata variatio illa menstrua generari posset, est ad $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{IV}$. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$ sive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4AT$, id est (cum Pp sit ad PG ut sinus inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ sit ad $4AT$ ut (f) sinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut inclinationis ejusdem sinus ductus in sinum duplicatæ distantiæ nodorum à sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol.

117. clinationis esse positivam aut negativam, hoc est crescere aut decrescere secundum signa quantitatis AZ × TZ de quibus in Coroll. proximo dicemus.

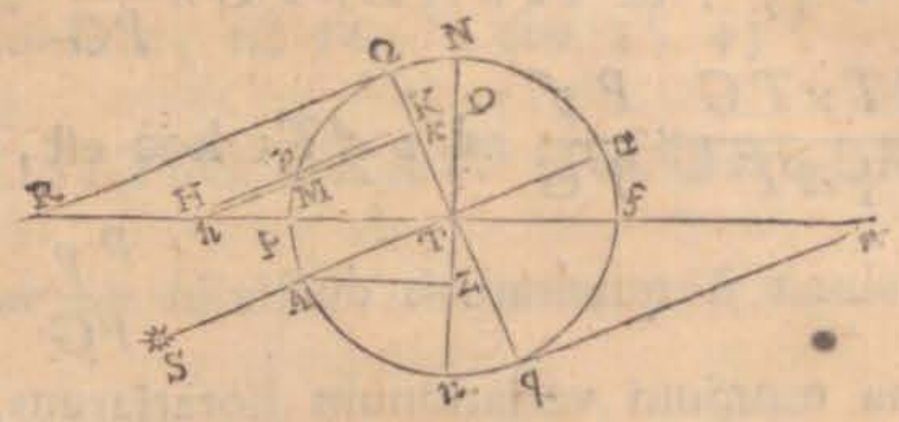
(r) * *Ut circulus totus QAqa ductus in* $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ *ad* $Mp \times AT$ *cub.* Si in hac ratione loco circuli QAqa, ponatur ejus valor qui est circumferentia QAqa ductâ in dimidium radii seu in $\frac{AT}{2}$, hæc ratio licet, circumferentia $QAqa \times \frac{AT}{2} \times AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad Mp × AT cub. Multiplicetur uterque terminus per 2 & dividatur per AT, non mutabitur ratio & fiet *ut circumferentia* $QAqa$ *ducta in* $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ *ad* $Mp \times AT$ *quad.*

(f) *Ut sinus duplicati anguli.* Ex Trigonometriæ elementis sinus duplicati anguli ATn sive ATN, cujus sinus est AZ & Cosinus TZ, est $\frac{2AZ \times TZ}{AT}$ sive $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$.

Quando autem duplum anguli ATN excedit semicirculum sive quando angulus ATN est rectus, signum sinus dupli anguli ATN, fit negativum ex positivo; quando angulus ATN excedit 180gr. signum sinus ejus dupli iterum fit positivus, sicque deinceps.

Positivum autem signum designat angulum Planum per variationem minui, negativum verò signum eum angulum augeri significat, ita ut angulus minuatur dum nodus N recedit ex conjunctione A ad quadraturam ultimam Q, crescit verò dum nodus à quadraturâ Q ad oppositionem a movetur, iterum minuitur dum ab oppositione ad primam quadraturam q tendit, & denique augetur dum à quadraturâ q ad conjunctionem A redit; ita ut Inclinationis angulus sit minimus cum nodi in quadraturis Q & q versantur, maximus

Corol. 4. Quoniam inclinationis horariæ variatio, ubi nodi in



ximus verò cum nodi ſunt in ſyzygiis A & a; Quæ Lex ab Aſtronomis eſt obſervata ſed paulò accuratius oſtendendum id ſequi reverâ ex hâc Propoſitione.

Sit nodus N ubivis inter conjunctionem A & ultimam quadraturam Q, ductâque FTf perpendiculari in lineam nodorum, dum Lunâ movebitur ex N ad F inclinationis variatio deſignabitur per aream NAFTh, cumque Luna tum verſetur inter Nodum & remotiorem quadraturam motus nodi erit regreſſivus, ideoque cum linea γT fiat ſemper remotior à Lunâ quam linea NT (punctum γ quod hic exaratum non eſt deſignat novum locum in quem Nodus adſcendens Lunæ movetur) inclinationis Lunæ angulus ad lineam Tγ relatus minor erit quam ſi ad TN referretur, area ergo NAFTh deſignabit imminutionem anguli inclinat. dum pergit Luna ab N ad F.

Dum Luna movetur ab F ad q pergit quidem ut prius nodus in antecedentia, ſed producta linea γT, ejus productio erit vicinior Lunæ in area Fq exiſtenti quam productio lineæ NT, ideoque inclinationis Lunæ angulus ad productionem lineæ Tγ relatus major erit quam ſi ad lineam Tn referretur, ſed hoc in caſu area FRq deſignat inclinationis variationem, ergo area FAq deſignat incrementum anguli inclinationis.

Dum Luna ab n ad f movetur, motus nodi fit regreſſivus & ex N in γ migrat, & lineæ γT productio remotior eſt à Lunâ in areâ nf verſante quam productio lineæ NT ideo angulus inclinationis minor erit quam ſi ad lineam Tn referretur ea verò variationis mutatio deſignatur per aream Hnaf quæ ideo imminutionem anguli inclinationis deſignat.

Ab f ad Q creſcit quidem inclinationis angulus, quia refertur ad lineam Tγ, totum itaque illud variationis incrementum deſignatur per aream Qfr ſed à Q ad n, cum motus nodi fiat progreſſivus, referaturque inclinationis angulus ad Tl, minuitur is angulus totaque imminutio deſignatur per aream NhrQ. 117.

Reſumantur hæc omnia, deprehenditur imminutionem anguli inclinationis exprimi per areas NAFh, qnHR, Hnaf & NhrQ, quarum prima & ultima efficiunt QAFTr, duæ mediæ aream qafFR.

Totum verò incrementum anguli inclinationis exprimitur per areas FRq & Qfr, quarum hæc detracta ex area QAFTr relinquit ſemicirculum QAFf, prior detracta ex areæ qafTR relinquit ſemicirculum qafF ideoque circulus totus QAqa deſignat imminutionem anguli inclinationis cum nodus verſatur in quovis puncto N quadrantis AQ.

Si hæc ratiocinia applicentur ad figuram Newtonianam ubi nodus N eſt in quadrante Qa, ex iis deprehendetur circulum QAqa deſignare incrementum anguli inclinationis.

Si nodus in quadrante aq verſetur, omnia eodem modo procedent ac in primo caſu, mutatis ſolummodo litteris majuſculis in minores, ideoque etiam oſtendetur circulum QAqa imminutionem anguli inclinationis deſignare; & pariter ubi nodus erit in quadrante qA caſus hic ad ſecundum referri poterit, minuitur ergo inclinatio dum Nodus procedit ab A ad Q, tumque eſt minima, ſiquidem inde creſcere incipit uſque ad a, ubi eſt maxima, ſiquidem inde decreſcit uſque ad q, ubi iterum eſt minima indeque creſcit uſque ad A ubi iterum maxima eſt.

DE MUNDI SYSTEMATE.

in quadraturis verſantur, eſt (per hanc propoſitionem) ad angulum $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{IV}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{P\,p}{PG}$ ad AT *cub.* id (t) eſt, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{P\,p}{PG}$ ad $2AT$; hoc eſt, ut ſinus duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturis ductis in $\frac{P\,p}{PG}$ ad radium duplicatum: ſumma omnium variationum horariarum, quo tempore luna in hoc ſitu nodorum tranſit à quadraturâ ad ſyzygiam (id eſt, ſpatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad ſummam totidem angulorum $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{IV}.$, ſeu $5878^{II}.$, ut ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturis ducta in $\frac{P\,p}{PG}$ ad ſummam totidem diametrorum; hoc (u) eſt, ut diameter ducta in $\frac{P\,p}{PG}$ ad circumferentiam; id eſt, ſi inclinatio ſit $5^{gr}.$

1^{l},

121. (t) * *Id eſt.* Ubi nodi verſantur in quadraturis, recta N n coincidit cum Q q, ideóque perpendicularis A E, abit in radium A T. Quarè $IT \times AZ \times TG \times \frac{P\,p}{PG}$ eſt ad AT cub. ut $IT \times AT \times TG \times \frac{P\,p}{PG}$ ad AT cub. Sivè ut $IT \times TG \times \frac{P\,p}{PG}$ ad AT^2 ac dividendo per $\frac{1}{2}AT$, ut $IT \times \frac{TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{P\,p}{PG}$ ad $2AT$.

(u) 121. * *Hoc eſt ut diameter.* Sit T I vel p K $= y$, radius Q T $= 1$, erit T K $= \sqrt{1-yy}$, ex naturâ circuli, & T K $=$ T G quia in hoc caſu recta n N, coincidit cum Q q, cum nempe nodi verſentur in quadraturis; ac proindè ſinus duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis, id eſt $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} = 2y \times \sqrt{1-y^2}$ Jam ut obtineatur elementum areæ quæ componitur ex omnibus ſinubus diſtantiæ duplicatæ, multiplicari debet ſinus variabilis $2y \times \sqrt{1-y^2}$, per elementum arcûs circuli, hoc eſt, per $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, undè habetur elementum areæ quæſitæ $= 2y\,dy$, ſumptiſque fluentibus, prodit area tota $= y^2$, factâ autem $y = 1$, erit area illa ubi Luna pergit à quadraturâ ad ſyzigiam, æqualis quadrato radii. Nunc verò ut habeatur ſumma totidem diametrorum multiplicandus eſt quadrans circuli per totam diametrum. Hinc ſi radius dicatur r peripheria p, erit ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis, quo tempore Luna tranſit à quadraturâ ad ſyzigiam ad ſummam totidem diametrorum ut r^2 ad $\frac{p \times 2r}{4}$, ſivè ut $2r$ ad p, hoc eſt, ut diameter ad circumferentiam.

Si

DE MUNDI SYSTEMATE.

Nam GEq æquale eſt $GHq+HEq=BHD$ (x) $+HEq=HBD+HEq-BHq=HBD+BEq-2BH\times BE=BEq+2EC\times BH=2EC\times AB+2EC\times BH=2EC\times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, eſt GEq ut AH. Deſignet jam AEg duplicatam diſtantiam nodorum à quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg ob datum angulum GEg erit ut diſtantia GE. Eſt (y) autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh eſt ut contentum $GH\times Gg$, ſeu $GH\times GE$; id eſt ut $\frac{GH}{GE}\times GEq$ ſeu $\frac{GH}{GE}\times AH$, id eſt, ut AH & ſinus anguli AEG conjunctim. Igitur ſi AH in caſu aliquo ſit ſinus inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed (z) AH, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D, huic ſinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q. E. D.*

In hâc demonſtratione ſuppoſui angulum BEG, qui eſt duplicata diſtantia nodorum à quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum eſſe, & in hoc caſu Gg eſſe augmentum horarium duplæ diſtantiæ nodorum & ſolis ab invicem, & inclinationis variatio horaria in eodem caſu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut (a) contentum ſub inclinationis ſinu AH & ſinu anguli recti BEG, qui eſt duplicata diſtantia nodorum à ſole, ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris inclinationis ſinus AH ad radium

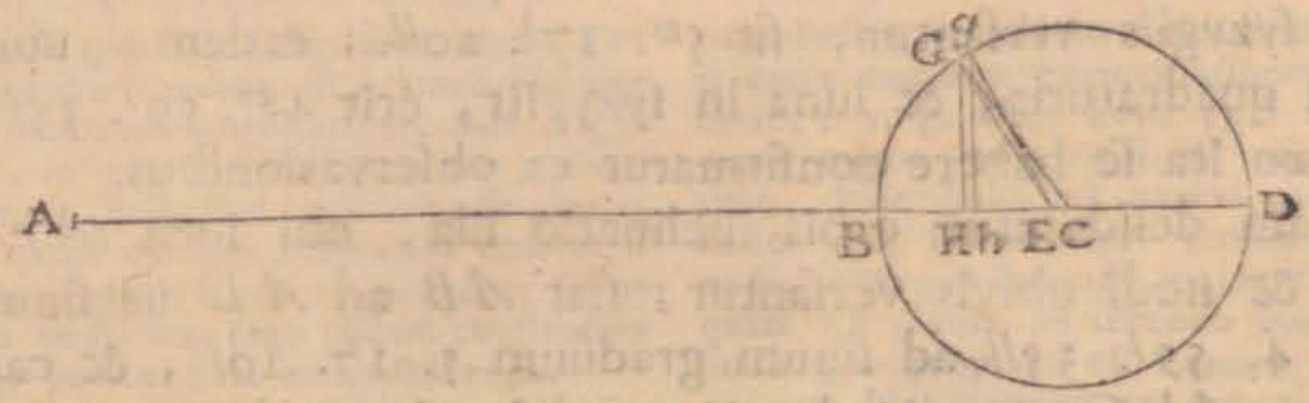
121. (x) $*=BHD+HEq$. (Prop. 5. Lib. 2. elem.) $=HBD+HEq-BHq$ (per prop. 3. lib. 2. elem.) $=HBD+BEq-2BH\times BE$ (Prop. 7. ejuſdem Lib.) $=BEq+2EC\times BH$ (ob $BD=2EC+2BE$). Eſt autem (per conſtr.) $EB^2=2EC\times BA$; quare $BEq+2EC\times BH=2EC\times AB+2EC\times BH$.

(y) * *Eſt autem Hh ad Gg.* (Per naturam circuli).

(z) *Sed AH.* (Per conſtr.)

(a) * *Ut contentum ſub inclinationis ſinu AH, & ſinu anguli recti BEG*, hoc eſt, ut contentum ſub mediocris inclinationis ſinu AH (quia in hoc caſu AH = AC) & radio *ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris inclinationis ſinus AH, ad radium quadruplicatum.*

radium quadruplicatum; hoc est (cum inclinatio illa mediocris sit quasi $5^{gr}. 8' \frac{1}{2}$) ut ejus sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, sive ut 224 ad 10000. Est autem variatio tota, sinuum differentiæ BD respondens, ad variationem illam horariam ut (b) diameter BD ad arcum Gg; id est, ut diameter BD ad semicircumferentiam BGD & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$



quo nodus pergit à quadraturis ad syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc est, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare si rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota BD ad $33''. 10'''. 33^{iv}.$ ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id est, ut 29645 ad 1000, & inde variatio illa BD prodibit $16', 23'' \frac{1}{2}$.

Hæc est inclinationis variatio maxima quatenus locus lunæ in orbe suo non consideratur. Nam inclinatio, si nodi in syzygiis versantur, nil (c) mutatur ex vario situ lunæ. At si nodi in quadraturis consistunt, inclinatio minor est ubi luna versatur

(b) * *Ut Diameter BD ad arcum Gg.* Nam, in hâc constructione, variatio tota sinuum differentiæ BD respondens per Diametrum BD exprimitur, & Hh est incrementum sinus inclinationis tempore quod per Gg designatur, sive horæ tempore; sed ubi punctum H cadit in centro C, & punctum G in medio semicirculi, tunc est $Gg = Hh$; Ergo, est Diameter BD ad arcum Gg ut variatio tota ad variationem horariam in Octantibus; sed ut sunt $2079\frac{7}{10}$ horæ quæ effluunt dum nodus pergit à quadraturâ ad syzygiam ad unam horam, ita semicircumferentia BGD ad Gg, est ergo $Gg = \frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}h}$, ideoque variatio tota est ad variationem horariam in octantibus ut BD ad $\frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}h}$ sive ut BD ad BGD & $2079\frac{7}{10}^h$. ad 1^h. conjunctim.

(c) * *Nil mutatur ex vario situ Lunæ.* Nam ex demonstratione Prop XXXIV. inclinationis variatio horaria est ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{PP}{PG}$ ad AT *cub.* sed nodis versantibus in syzygiis sit $AZ = o$ quare quantitas

DE MUNDI SYSTEMATE.

ſatur in ſyzygiis, quam ubi ea verſatur in quadraturis, exceſſu $2'.\ 43''$; uti in propoſitionis ſuperioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus exceſſus dimidio $1'.\ 21''\frac{1}{2}$ variatio tota mediocris BD in quadraturis lunaribus diminuta fit $15'.\ 2''$, in ipſius autem ſyzygiis aucta fit $17'.\ 43''$. Si luna igitur in ſyzygiis conſtituatur, variatio tota in tranſitu nodorum à quadraturis ad ſyzygias erit $17'.\ 45''$: ideoque ſi inclinatio, ubi nodi in ſyzygiis verſantur, ſit $5^{gr}.\ 17'.\ 20''.$; eadem, ubi nodi ſunt in quadraturis, & luna in ſyzygiis, erit $4^{gr}.\ 59'.\ 35''$. Atque hæc ita ſe habere confirmatur ex obſervationibus.

Si jam deſideretur orbis inclinatio illa, ubi luna (d) in ſyzygiis & nodi ubivis verſantur; fiat AB ad AD ut ſinus graduum $4.\ 59'.\ 35''$ ad ſinum graduum $5.\ 17.\ 20''$, & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ diſtantiæ nodorum à quadraturis; & erit AH ſinus inclinationis quæſitæ. (e) Huic orbis inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio, ubi luna diſtat $90^{gr}.$ à

121. $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ fit etiam o, evaneſcit itaque hoc in caſu horaria variatio, ideoque in vario ſitu Lunæ non mutatur ejus orbitæ inclinatio. Et quidem idem citra calculum patet ex ipſâ rei naturâ, nam verſantibus in ſyzygiis, ſive ſole exiſtente in lineâ nodorum, ſol eſt in eo plano in quo jacet linea nodorum, ſed linea nodorum eſt in plano orbitæ Lunaris, ergo ſol in ipſâ orbitâ Lunari productâ poſitus cenſeri poteſt; ac per conſequens qualiſcumque ſit ejus actio in Lunam, ipſam ex plano utrique communi neutiquam dimovebit.

(d) * *Ubi Luna in ſyzygiis & nodi ubivis verſantur.* Nam dum Luna ab unâ ſyzygiâ ad eamdem ſyzygiam redit, tota variatio menſtrua eſt ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$, ſive ut ex Cor. 3°. Prop. præcedentis conſtat ut Inclinationis ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ nodi à Sole ad quadruplum quadratum radii, ſed per hujus Probl. conſtructionem in ea ratione eſt AH, ſi modo AB ſit ut ſinus minimæ inclinationis & AD ſinus maximæ, ſed $4^{gr}.\ 59'.\ 35''$ eſt minimus inclinationis Angulus ubi Luna eſt in ſyzygiis & $58^{gr}.\ 17'.\ 20''$ eſt maximus. *Ergo fiat AB ad AD ut ſinus graduum* $4^{gr}.\ 59'.\ 35''$ &c.

(e) *Huic orbis inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio ubi Luna diſtat* $90^{gr}.$ *à nodis.* Minima inclinatio ubi Luna diſtat $90^{gr}.$ à nodis eſt ubi nodi ſunt in quadraturis, nonageſimus autem à nodis gradus incidit in ipſam ſyzygiam itaque minima inclinatio eadem eſt ac in præcedenti caſu; maxima vero inclinatio eſt cum nodi ſunt in ipſis ſyzygiis, & nonageſimus à nodis gradus tunc quidem incidit in quadraturas, ſed tunc inclinatio nihil mutatur ex vario ſitu Lunæ, itaque eadem eſt ſive Luna in ſyzygiis ſive in quadraturis verſetur, eadem ergo eſt iterum maxima inclinatio ac in caſu præcedenti, ideoque in hoc caſu AB & AD eadem aſſumenda ſunt ac in caſu præcedenti: Reliquum ratiocinium hic etiam adplicatur, nam quamvis tempus reditus Lunæ ad nonageſimum à nodo gradum brevior ſit tempore ejus reditus ad ſyzygiam ſive

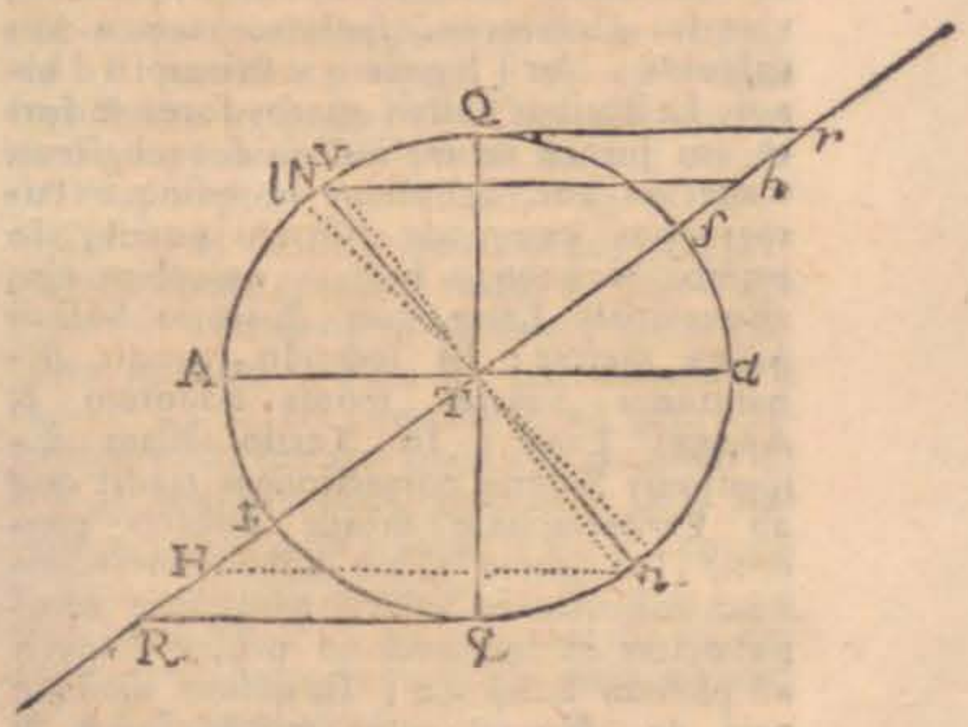
à nodis. In aliis lunæ locis inæqualitas menſtrua, quam inclinationis variatio admittit, in (f) calculo latitudinis lunæ compenſatur, & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus nodorum (ut ſupra diximus) ideoque in calculo latitudinis illius negligi poteſt.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

Scho-

ſive menſe ſynodico, ſiquidem menſe Periodico etiam brevior eſt, tamen hic caſus ad fictionem Corollarii ſecundi magis accedit, in quo nempe ſupponitur nodum toto menſe ſenſibilem viam non eſſe emenſum, quod quidem accuratius dicetur ſi aſſumatur reditus Lunæ ad eumdem ſitum reſpectu nodi; hic ergo eadem conſtructio ac prior potiori jure erit adhibenda.

(f) * *In calculo latitudinis compenſatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus nodorum.* Calculus latitudinis fit, poſitâ inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Eclipticæ, & aſſumptâ diſtantiâ Lunæ à nodo, hinc latitudo Lunæ obtinetur, quæ creſcit à nodo ad gradum à nodo nonageſimum, inde decreſcit accedendo ad alterum nodum &c. Procedat ergo Luna à nodo N ad punctum F 90gr. à nodo diſtitum, motus medius nodi eſt major motu vero, toto eo intervallo, ut ſuperius (ad Prop. XXXII.) oſtenſum eſt, ergo aſſumpta mediocri diſtantia à nodo quæ verâ major eſt & mediocri inclinatione quæ convenit illi menſi, latitudo major invenietur quam debuiſſet, ſed quoniam in caſu iſtius figuræ minuitur Angulus inclinationis dum Luna movetur ab N in F, & is angulus ad mediocrem imminutionem tunc pervenit cum Luna eſt in F circiter, quia area NFh eſt ferè ſemicirculo æqualis, hinc inclinatio orbitæ angulum majorem efficit quam is qui per inclinationem mediocrem ſupponitur, unde latitudo vera major evadit quam ea quæ propter mediocrem inclinationem orbitæ obtinetur: hinc ex eo quod nodi motus mediocris loco motus veri aſſumitur invenitur latitudo major vera, ſed ex eo quod inclinatio mediocris aſſumitur loco veræ, invenitur latitudo minor vera; inæqualitates itaque menſtruæ quam variatio inclinationis & motus nodorum admittunt ſeſe mutuo compenſant in calculo latitudinis. Cæteri caſus eamdem compenſationem ſuppeditant, v. gr. dum Luna ex F in q movetur motus verus nodi eſt minor motu vero, hinc Luna eſt reverâ remotior à nodo quam ſtatuitur per motum medium nodi, ideoque latitudo major ſupponitur quam eſt (quia in ſecundo quadrante à nodo quò proprior eſt Luna à nodo aſcedente N, ideoque eo remotior à deſ-



cendente n, eò ejus latitudo eſt major) ſed cum orbita Lunæ habuerit in F inclinationem mediocrem augetur is Angulus dum movetur Luna ab F ad q, ideoque aſſumendo eam inclinationem mediocrem minor obtinetur latitudo quam reverâ eſt, ergo, propter inæqualitatem motus nodi latitudo quæ ex motu nodi mediocri habetur eſt major vera, latitudo quæ obtinetur ex inclinatione mediocri eſt minor verâ, compenſantur ergo errores &c.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Scholium. (g)

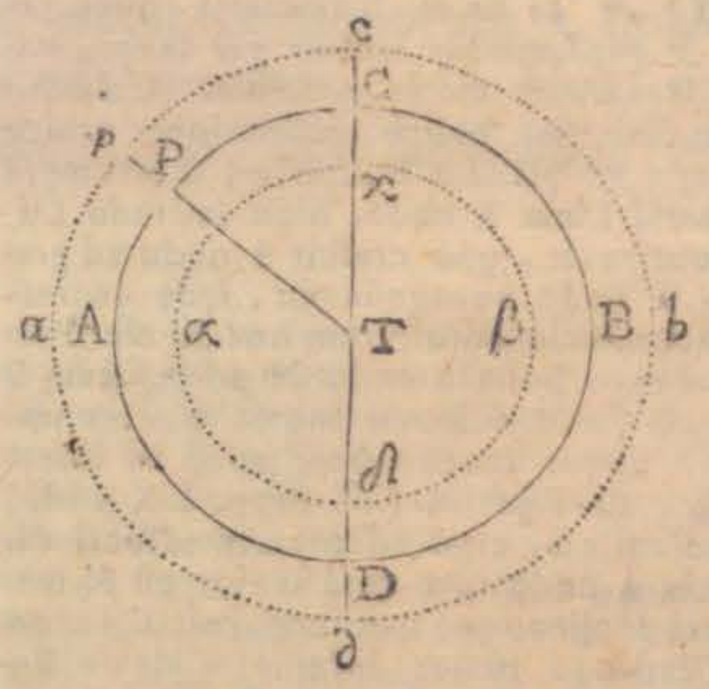
121. (g) * *Scholium.* Scholio hoc tradit Newtonus rationes quibus quædam ex Æquationibus Lunaribus ad calculos revocari possint, sed dolendum est illum non aperuisse vias quibus usus est ad eas concinnandas: defectum hunc utcumque reparare sumus conati & Methodos aperuimus quibus ex Gravitatis Theoria eas Æquationes deducere liceat, quantum fieri potuit iisdem usi sumus Methodis quas Newtono familiares fuisset constat & ad ejus solutiones proximè nos accessisse percipient Viri Docti cum paucis duntaxat secundis ab ipsius numeris discedat calculus noster & ejus consequentiæ planæ sint similes iis quas ex suis Principiis Newtonus derivavit, utrum aliis Methodis res feliciùs absolvi potuerit, viderint Doctiores, speramus tamen hos calculos, ut legitimis Principiis nixos, Lectoribus nostris gratos fore, & forte eos juvare ut melius quid excogitent: Cæterum hoc Scholium in quinque Paragraphos commodè distribui potest; In primo Newtonus Indicat calculum ejus Æquationis Lunæ quæ Æquatio Solaris prima dicitur: In secundo, tradit Æquationes Solares motus nodorum & Apogæi Lunæ; In Tertio illam Æquationis Solaris correctionem tradit quæ ab Excentricitate orbitæ Lunaris pendet; In quarto aliam adhuc correctionem Æquationis Solaris addit quæ nempe oritur ex inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Ecliptiæ; In quinto denique agit de Æquationibus motûs Lunæ & ejus Apogæi quæ pendent ex situ Apogæi Lunæ respectu Solis.

Ut autem hæc omnia & potissimum ea quæ Æquationem Solarem Lunæ spectant, & quæ primo, tertio & quarto Paragrapho à Newtono indicantur meliùs intelligantur, totum eum calculum qualis ex Theoriâ gravitatis instituendus nobis videbatur, uno tenore tradendum censuimus.

De Incremento motus medii Lunæ, & ejus Æquatione annuâ, ex Solis actione pendentibus, primum in Hypothesi orbem Lunæ esse circularem, postea in Hypothesi Orbem Lunæ esse Ellipticum. Denique in Orbe Lunari ad Ecclipticam inclinato.

THEOR. I.

Corpus P revolvatur in circulo ADBC circa corpus T à quo retineatur per vim decrescentem secundum quadrata distantiarum; accedat autem vis quædam constans quæ retrahat perpetuo corpus P à corpore centrali T, sed quæ sit exigua respectu vis ejus corporis T; Et describatur circulus a d b c in tali distantiâ ut residuum vis quam exerceret corpus T in eâ distantiâ (detractâ eâ vi extraneâ) sit ad vim quâ corpus P revolvebatur in circulo A D B C inversè ut cubi Radiorum Tp, TP; Dico, quod propter illam vim extraneam fiet ut corpus P circa circulum a d b c oscilletur, nunc citrà nunc ultra delatum, parum ab illo discedens, ita ut ejus motus assumi possit quasi fieret in eo circulo.



Nam fingatur eam vim extraneam non esse

esse constantem, sed talem ut, post discessum corporis P à circulo A D B C propter ejus vis extraneæ actionem, residuum vis quam exercet corpus T in distantia ad quam abit corpus P (detractâ eâ vi extraneâ) fit semper inverse ut cubi distantiarum, eveniet ut (per Prop. IX. Lib. I. Princip.) corpus P spiralem Logarithmicam describat, in qua angulus curvæ cum radio ad curvam ducto semper manet idem; Verùm quoniam ab initio vis illa Extranea fuit constans, liquet quod priusquam corpus P circulum a d b c attigerit ea vis plus imminuebat vim centralem quam ut decrescat secundùm cubos distantiarum auctarum, ideoque quod anguli curvæ cum radio ad curvam ducto semper crescere debuerunt, sed incremento perpetuo minore quo magis accedit vitium decrescentium ratio ad rationem inversam cubi distantiarum; Perveniet ergo corpus P ad circulum a d b c, & angulus curvæ cum Radio, quando P erit in circulo a d b c, erit recto major, quia semper crevit is Angulus à tempore quo corpus P circulum A D B C describebat in quo angulus radii cum curva rectus est; ideo P ultra circulum a d b c perget; cum autem P ultra circulum a d b c pervenerit, detractio vis constantis vim Centralem minus minuet quam secundum cubum distantiarum, itaque angulus curvæ cum radio minor fiet quam si Logarithmica spiralis describeretur & tandem reducetur ad angulum rectum ultra circulmu a d b c, inde verò curva cum radio faciet angulum acutum, nam vis centralis illic major est quam ut circulus describi possit quod sic demonstrari potest; Areæ æqualibus temporibus descriptæ durante toto hoc corporis P motu sunt ubique æquales, quoniam vires ad centrum T constanter diriguntur (ex Hyp.), ideoque in eo loco ultra circulum a d b c in quo angulus curvæ cum radio fit rectus, arcus dato tempore descriptus foret ipsa basis areæ descriptæ cujus altitudo est distantia à Centro seu ipse radius, & is arcus debet esse ad arcum qui eodem tempore descriptus fuisset a corpore P si in circulo A D B C moveri perseveraſſet, nullaque vis extranea accessisset inverse ut radii; sagittæ autem eorum arcuum (quæ sunt semper ut quadrata arcuum divisa per Radios) forent inverse ut Cubi radiorum, sed vis centralis ultra circulum adbc, minus decrescit quam secundum cubum distantiarum, ergo sagitta arcus descripti quæ est ejus vis centralis effectus, major est sagittâ quæ foret secundum rationem inversam cubi distantiarum, ergo ea sagitta quæ per vim centralem producitur major est illa quæ orbtineretur si circulus in eo loco describeretur; Ergo corpus P à Tangente magis discedit versus centrum quam si circulum describeret, ergo ejus via acutum angulum cum Radio efficere incipit, sicque accedit iterum ad circulum a d b c angulis curvæ cum radio perpetuo decrescentibus; Cum autem infra eum circulum transiverit angulus quem facit curva cum Radio iterum augetur donec is angulus rectus evadat, inde vero fiet obtusus quia vis centralis illic minor est quam ut corpus P in circulo moveri pergat, redit ergo corpus P versus circulum a d b c idque perpetuâ oscillatione, ut liquet ex collatione motûs quem haberet in Logarithmicâ spirali cum hoc motu: Sed quò minor est vis illa data quæ ex centrali detrahitur eò illæ alternæ oscillationes minus à circulo a d b c recedent, quare si vis ea exigua supponatur respectu vis Centralis corporis T, supponi etiam potest motum corporis P in circulo a d b c fiet. Q. E. D.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI. 121.

Cor. 1. Si vis illa extranea & constans perpetuo traheret corpus P versus T, iisdem argumentis ostendetur quod si describatur circulus interior $\alpha \delta \beta \pi$ in tali distantiâ à centro T, ut vis corporis T ad eam distantiam aucta per vim illam extraneam fit ad vim in circulo ADBC inversè ut cubi Radiorum circulorum ADBC, $\alpha \delta \beta \pi$, corpus P hinc inde cis citrave circulum $\alpha \delta \beta \pi$ oscillatur, & si ea vis extranea sit exigua censeri potest quod corpus P in eo ipso circulo $\alpha \delta \beta \pi$ movebitur.

Cor. 2. Et si vis illa extranea constans non foret sed crescceret secundum aliquam dignitatem positivam distantiarum, iisdem omninò ratiociniis ostendi posset quod corpus P in circulo a d b c vel $\alpha \delta \beta \pi$ movebitur, eveniet solummodo ut radius T P paulum diversus sumi debeat ab eo qui inveniretur si vis ea extranea constans foret.

Schol. Aliis Methodis effectum illius vis extraneæ ad calculos revocari posse non negamus & quidem unam aut alteram Methodum ab hac diversam eumdem in finem in sequentibus proponemus.

THE-

DE MUNDI SYSTEMATE.

THEOR. II.

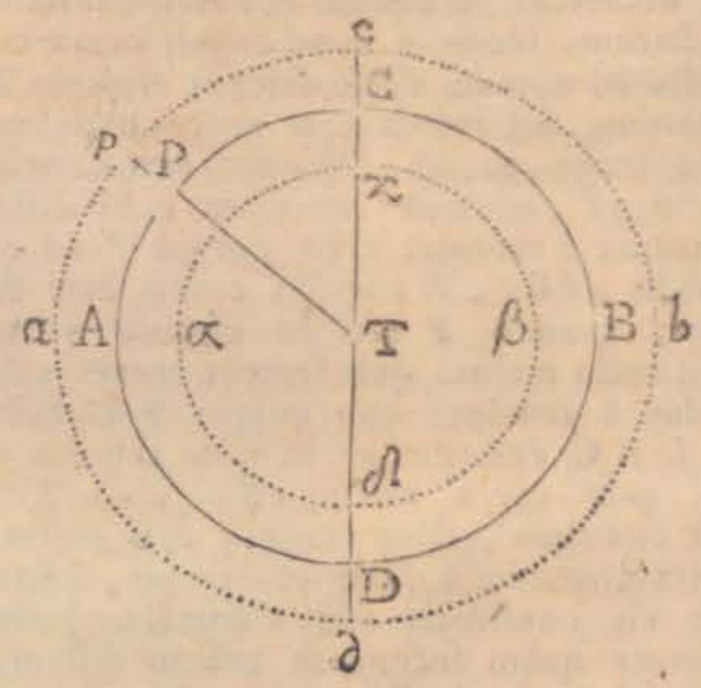
121. Positis iis quæ in primo Theoremate supponuntur, dicatur r Radius circuli ADBC, sit ϱ radius circuli a d b c, vel $\alpha\delta\beta\pi$, sit p Radiorum r & ϱ differentia; Vis corporis T in distantia r dicatur V & in eadem distantia vis extranea dicatur Y quæ erescat ut distantiæ à centro T & quæ positiva censeatur si distrahat corpus P à centro, negativa verò si illud attrahat ad centrum, dico quod Radius ϱ erit semper æqualis quantitati $\frac{V-3Y}{V-4Y}r$, sive quantitati $r\times 1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}+\frac{16Y^3}{V^5}$ &c. & omissis terminis propter exiguitatem quantitatis Y evanescentibus, est ille radius $\varrho = Y\times 1+\frac{Y}{V}$.

Nam vis corporis T in distantia ϱ erit $\frac{rr}{\varrho\varrho}V$ vis extranea erit $\frac{\varrho}{r}Y$ ex hypoth., ideoque vis quâ circulus adbc (vel $\alpha\delta\beta\pi$) describitur est $\frac{rr}{\rho\varrho}V-\frac{\varrho}{r}Y$, sed hæc vis debet esse ad vim V quâ circulus A B C D describitur inversè ut cubi Radiorum, sive ut $\frac{1}{\varrho^3}$ ad $\frac{1}{r^3}$ (per Theor. præc.) ergo est $\frac{V}{\varrho^3}=\frac{V}{r\varrho^2}-\frac{Y\varrho}{r^4}$, sive reductis terminis ad eumdem denominatorem est $\rho^4 Y = r^3 V\times\varrho-r=\pm r^3 pV$. Loco ϱ scribatur $r\pm p$ fiet $r^4Y\pm 4r^3pY+6r^2p^2Y\pm 4rp^3Y+p^4Y=\pm r^3pV$, sive deletis terminis ubi p superat primum gradum, quoniam hæc quantitas exigua est fit $r^4Y\pm 4r^3pY=\pm r^3pV$, sive $\pm pV\mp 4pY=rY$, unde obtinetur $\pm p=\frac{rY}{V-4Y}$; ideoque ρ, quod est $r\pm p$, fit $\frac{V-3Y}{V-4Y}r$ qui valor in seriem redactus est $r\times 1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}$ &c. sive $r\times 1+\frac{2Y}{V}$.

THEOR. III.

Dicatur M Tempus Periodicum corporis P in circulo A D B C, dico quod ejus Tempus Periodicum in circulo a d b c (vel $\alpha\delta\beta\pi$) erit $M\times 1+\frac{2Y}{V}$.

Dem. Tempus Periodicum corporis P revolventis in circulo a d b c d (vel $\alpha\delta\beta\pi$) propter vim extraneam Y detractam vel ad-



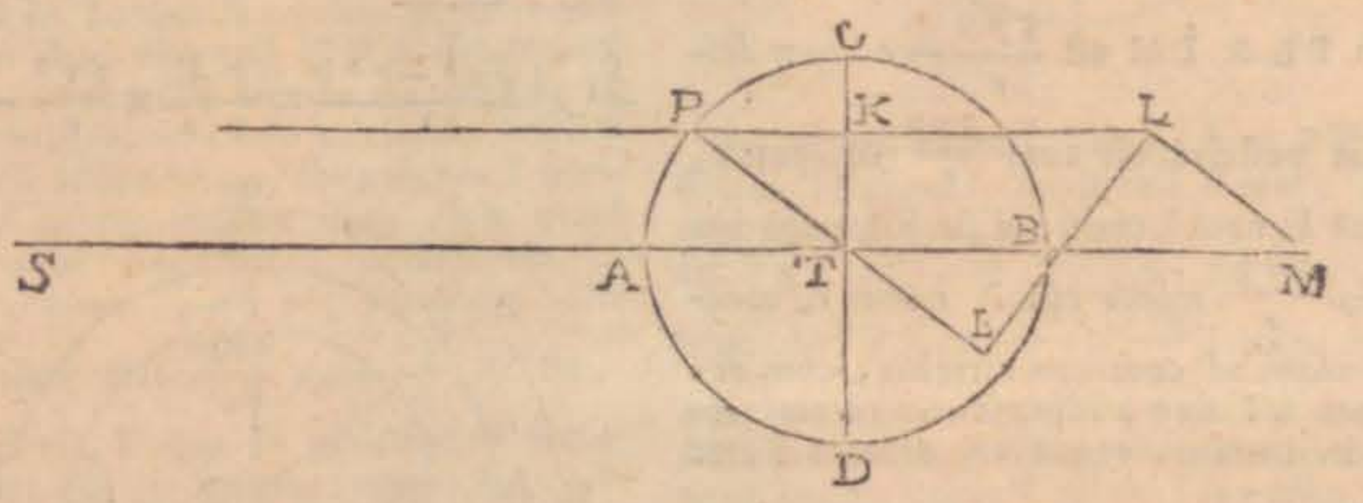
ditam est ad Tempus Periodicum ejus corporis P cum revolvebatur in circulo A D B C citra omnem vim extraneam, ut est quadratum radii ϱ ad quadratum radii r; Nam quia vis Y est semper directa ad centrum T, areæ manebunt temporibus proportionales quamcumque in viam flectatur corpus P, ergo, si tandem ejus via in circulum a d b c d (vel $\alpha\delta\beta\pi\delta$) mutetur, tempus quo describetur peripheria a d b c (vel $\alpha\delta\beta\pi$) erit ad tempus quo describebatur peripheria A D B C, ut tota area circuli a d b c (vel $\alpha\delta\beta\pi$) ad totam aream circuli A D B C ideoque ut quadrata radiorum ϱ & r, sive (per Theor. præced.) ut $\frac{V-3Y^2}{V-4Y^2}rr$ ad rr, ideoque ut $\frac{\overline{V-3Y^2}}{\overline{V-4Y^2}}$ ad 1, sed hâc fractione in

seriem

feriem reſoluta ea evadit $1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}$ &c. &c. quæ ſeries valde convergit propter exiguitatem iſtius fractionis $\frac{Y}{V}$ & illius quadratum eſt $1+\frac{2Y}{V}+\frac{9Y^2}{V^2}+\frac{40Y^3}{V^3}$ &c. Ergo ut 1 ad $1+\frac{2Y}{V}+$ &c. ita M ad $M\times 1+\frac{2Y}{V}+$ quod eſt tempus quo deſcribetur Peripheria a d b c vel $\alpha\delta\beta\kappa$.

THEOR. IV.

Sit T terra, P Luna, ADBC circulus quem Luna deſcribit; ſit S T diſtantia mediocris Terræ à Sole quæ dicatur a; dicatur F vis Solis in terram in mediocri illa diſtantia, Sol ſupponatur immotus; diſtantia Lunæ à Terrâ P T dicatur r & ea non obſtante actione Solis in Lunam eadem manere cenſeatur; Sit C P diſtantia Lunæ à quadraturâ proxima quæ dicatur u, ſit ejus ſinus y, ſit ejus Coſinus z, Dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam ſecundùm directionem radii P T, eſt ubivis $\frac{F}{a}\times\frac{3yy}{r}-y$.

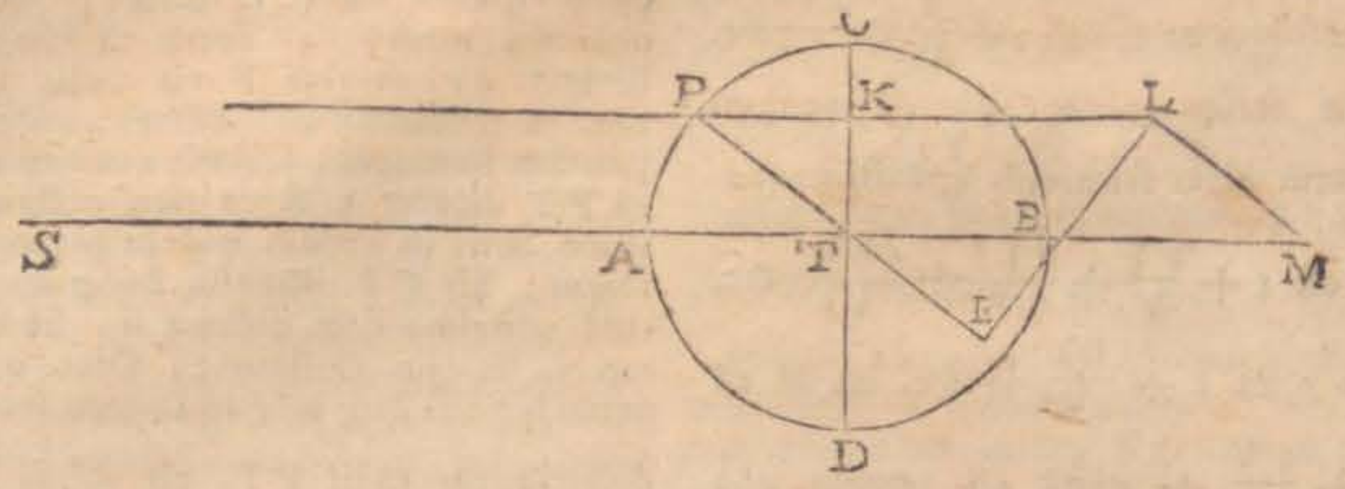


Nam, ſecundùm conſtructionem Prop. LXVI. Lib. I. Princ., repræſentetur vis Solis quæ dicitur F per lineam S T vel S K, ea vis Solis quâ trahitur Luna in loco P repræſentetur per lineam S L, & hæc vis cenſeatur compoſita ex duabus S M & L M, quarum L M ſit Parallela radio P T, cum autem linea S M ſit æqualis lineæ $S T \pm T M$, & terra trahatur per vim S T non ſecus ac Luna, ſitus reſpectivus Lunæ ac Terræ per eam vim S T non mutatur, ideo ſola ea pars vis S M quæ exprimitur per T M conſideranda venit; Præterea ex naturâ gravitatis, eſt S K ad S L ut eſt $\frac{1}{SK^2}$ ad $\frac{1}{SK\mp PK^2}$ ſive ut eſt $SK^2\mp 2SK\times PK+PK^2$ ad SK^2, aut omiſſo termino PK^2 ut $SK\mp 2PK$ ad S K, ſive quoniam 2PK eſt exiguum reſpectu lineæ S K ut S K ad $SK\pm 2PK$ eſt ergo SL ſive $SK\pm KL = SK\pm 2PK$ & $KL = 2PK$, cum autem linea P L ſit proxime parallela lineæ S M, & ex conſtructione P T ſit parallela L M, eſt T M proxime æqualis lineæ P L, & eſt $PL = PK+2KL = 3PK$; Ex puncto L ducatur perpendiculum in radium P T (productum ſi neceſſe ſit) & vis T M, ſeu vis ipſi æqualis P L reſoluta intelligatur in vim P E & vim L E, vis L E radio P T ſit perpendicularis ideoque vim centralem non afficit, vis PE ſecundùm directionem radii agat, ſicque punctum P à centro T diſtrahat, altera autem pars quæ per L M repræſentatur ſecundum directionem radii agens punctum P verſus centrum trahit; Ergo ea pars Solis quæ agit in Lunam ſecundum directionem radii P T eſt differentia virium P E & L M.

Jam vero ob Parallelas S L, S M & T P, L M eſt $LM = TP = r$, & cum P K ſit proxime perpendicularis in lineam T C

DE MUNDI SYSTEMATE.

I 2 I.

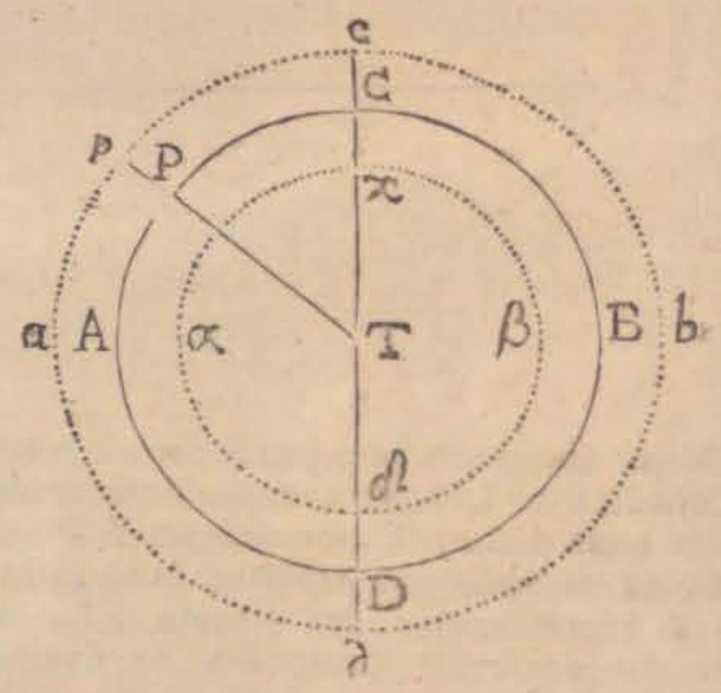


erit PK sinus arcus PC qui sinus dictus est y, ideoque $PL = 3PK = 3y$, cum autem Triangula PKT, PEL sint similia, est PT (r) ad PK (y) ut PL ($3y$) ad PE quod erit ergo $\frac{3yy}{r}$ & differentia virium PE & LM est $\frac{3yy}{r} - r$, quæ differentia positiva est cum $\frac{3yy}{r}$ superat r, tuncque Lunam à centro distrahit, negativa quando $\frac{3yy}{r}$ minus efficit quam r, tuncque Lunam ad centrum attrahit, cum ergo linea ST sive a repræsentet totam vim Solis in terram, eaque vis dicatur F, & quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ repræsentet eam partem vis Solis quæ in Lunam agit secundùm directionem PT, fiat ut a ad $\frac{3yy}{r} - r$, ita F ad eam partem vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam quæ idcircò erit $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. Q. E. O.

Coroll. Si transferatur Luna in alium orbem a d b c, $\alpha \delta \beta \kappa$ cujus radius sit ϱ, Dico, quod, manente distantia Lunæ à quadraturâ proximâ, ea pars vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam crescet ut illæ distantiæ ϱ, eritque ideo $\frac{\varrho}{r} \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, nam cum arcus p c ejusdem numeri graduum censeatur ac arcus PC sinus eorum erunt ut radii, ideoque sinus arcus p c erit $\frac{\varrho}{r} y$, Demonstrabitur vero iisdem plane argumentis quibus in Theoremata usi sumus quod, si Luna in circulo a d b c vel $\alpha \delta \beta \kappa$ moveretur, ea pars vis Solis quæ secundum directionem radii P T exercetur erit

$$\frac{F}{a} \times 3\frac{\varrho\varrho y^2}{r^2} - \varrho = \frac{F}{a} \times \frac{3\varrho^2 y^2 - r^2\varrho^2}{r^2\varrho} =$$

$$\frac{F}{a} \times \frac{3\varrho y^2 - r^2\varrho}{r^2} = \frac{\varrho F}{r\,a} \times \frac{3y^2}{r} - r.$$



THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitæ intelligi potest, si concipiatur Lunam ex suâ orbita ADBC in aliam transferri, cujus singulæ particulæ quamminimæ sint portiones circulorum talium ut vis centralis Terræ in singulo circulo agens sublata vel addita vis Solis quæ in eo loco exerceretur sit ad vim centralem Terræ in circulo A D B C citra Solis actionem agentem, inversè ut cubus radii ejus circuli ad cubum radii circuli A D B C.

Etenim cum ea vis Solis per gradus infinitè parvos crescat vel decrescat, sitque pul-

nulla cum $\frac{3yy}{r} = r$, paulo poſt minima ſit ſicque gradatim creſcat, ſi conſtans cenſeatur per tempuſculum aliquod, breviſſime tranſibit Luna in circulum a d b c illi vi congruum per Theor. I., mox verò cum vis Solis creſcat quantitate quam minima, ea vis cenſeatur conſtans per alterum tempuſculum, tranſibit Luna ex circulo primæ vi congruo in alterum huic incremento conſentaneum, ſicque ſemper, ideoque in ſingulis particulis arcus C P Luna cenſeri poteſt delata in circulum vi Solis in eo puncto agenti congruum.

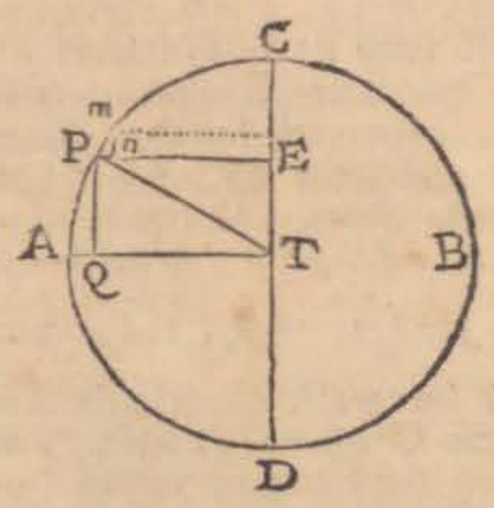
THEOR. VI.

Manentibus quæ in Theor. IV. ſuppoſita ſunt, dicatur c tota circumferentia cujus radius eſt r, dicatur Y vis Solis agens in Lunam ſecundum directionem P T & in datâ diſtantiâ C P à quadraturâ C, quæ diſtantia C P dicatur u, dicatur M tempus Periodicum Lunæ in circulo A D B C citrà Solis actionem, arcus exiguus à puncto P aſſumptus dicatur du, dico quod tempus quo ſimilis arcus deſcribetur in orbitâ in quam Luna per actionem Solis eſt tranſlata erit $\frac{Mdu}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V} +$ &c.

Nam ſi vis Y quæ in punctum P à Sole exercetur, in exiguas particulas divideretur & ſingula quæ dicatur d Y maneret conſtans durante unicâ revolutione Lunæ, ſicque gradatim Lunam in circulum a d b c transferret, tempus Periodicum in ſingulo circulo excederet tempus Periodicum in circulo præcedenti quantitate $\frac{2dY}{V}$. Hinc tandem tempus Periodicum quo circulus a d b c deſcriberetur foret $M \times 1 + \frac{2Y}{V} +$ &c. per Theor. III. & tempus quo arcus ſimilis arcui du deſcriberetur in eo circulo, foret ad hoc tempus Periodicum ut du ad c, foret itaque $\frac{Mdu}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V} +$, ſed ſingulæ particulæ orbitæ quam Luna deſcribit propter adjunctionem vis Solis ſpectari poſſunt quaſi pertinerent ad circulos congruos vi Soli in illis punctis agenti, per Theor. V. Ergo, tempus inventum eſt illud ipſum, quo durante, Luna deſcribet arcum ſimilem arcui du in orbitâ in quam transfertur per actionem Solis.

LEMMA I.

Invenire integrales quantitatum ydu, zdu, y^2du, z^2ydu, zy^2du, yz^2du, y^3du, y^4du &c. factarum ex Elemento arcus & dignitatibus ejus ſinus y, vel ejus Coſinus z.



Ex naturâ circuli Triangulum P T E eſt ſimile Triangulo fluxionali P m n; ideoque eſt P T (r) ad P m (du) ut P E (y) ad P n (dz), ut T E (z) ad m n (dy), hinc eſt $du = \frac{rdz}{y} = \frac{rdy}{z}$; Hinc fit Primò, ut, omnes termini in quibus alteruter factorum y vel z quantitatis du dimenſionem habet imparis numeri, poſſint integrari; nam loco elementi du, ponatur ejus valor $\frac{rdz}{y}$ ſi y ſit imparis dimenſionis, vel $\frac{rdy}{z}$ ſi z ſit imparis dimenſionis, ea ſubſtitutione fiet ut pares evadant dimenſiones y vel z quæ prius impares erant, & quia in primo caſu habetur fluxio dz, loco y^2 ſubſtituatur $r^2 - z^2$, ſicque omnes factores ducentes dz, erunt aut r aut z, ideoque quantitas propoſita erit abſolutè integrabilis, in altero caſu cum habeatur fluxio dy, ut tollantur factores z cujus dimenſiones ſunt pares, loco z^2 ſubſtituatur $r^2 - y^2$, ſicque omnes factores ducentes dy erunt aut r aut y ideoque habebuntur termini abſolutè integrabiles.

Secundò, factores quantitatis du ſint pares, & quidam primo ſit z^2du vel y^2du; Integralis horum Elementorum eſt $r \times$ CPQT vel $r \times$ CPE, nam eſt $z^2du = rzdy$, & zdy eſt fluxio areæ C P Q T; eſt $y^2du = rydz$,

DE MUNDI SYSTEMATE.

$ry\,dz$, & $y\,dz$ est fluxio areæ CPE; itaque quando P ex C pervenit in A & absolvit quadrantem Integralis $z^2\,du$ vel

321. $y^2\,du$ est $r \times \frac{rc}{8}$.

Sint itaque ambo factores y vel z quantitatis du numero pari qualicumque, semper reduci poterunt ita ut quantitas proposita contineat dignitates pares alterutrius quantitatis, puta y, altera variabili exclusa ponendo loco z^2 quantitatem $r^2 - y^2$. Si ergo quæratur integralis quantitatis $y^{2m}\,du$, ut ea ad impares dimensiones revocetur spectetur ut $y^{2m-1} \times y\,du$; Est autem juxta Methodos vulgares $\int y^{2m-1} \times y\,du = y^{2m-1} \int y\,du - \int \int y\,du \times 2m-1 \times y^{2m-2}\,dy$, sed $y\,du = \frac{ry\,dz}{y} = r\,dz$, & Integralis quantitatis dz sumptæ à puncto C est $r-z$, hinc $\int y\,du = rr - rz$, qua substituta in valore Integralis $\int y^{2m-1} \times y\,du$ ea fit $y^{2m-1} r^2 - y^{2m-1} rz - rr \int 2m-1 \times y^{2m-2}\,dy + \int . rz \times 2m-1 \times y^{2m-2}\,dy$, sive (quia $rr \int 2m-1 \times y^{2m-2}\,dy = \frac{2m-1}{2m-1} r^2 y^{2m-1} = r^2 y^{2m-1}$) est $\int . y^{2m}\,du = -rzy^{2m-1} + \int \times 2m-1 \times rz \times y^{2m-2}\,dy$ (sive quia $r\,dy = z\,du$) $= -rzy^{2m-1} + \int . 2m-1 \times z^2 y^{2m-1}\,du$ (& loco z^2 substituendo $r^2 - y^2$) $= -rzy^{2m-1} + 2m-1 \int . r^2 y^{2m-2}\,du - 2m-1 \int y^{2m}\,du$; Et transpositione facta est $2m \int y^{2m}\,du = -rzy^{2m-1} + \int 2m-1 \times r^2 \int y^{2m-2}\,du$, & tandem $\int . y^{2m}\,du = \frac{2m-1}{2m} \times r^2 \int y^{2m-2}\,du - \frac{rzy^{2m-1}}{2m}$; Hinc cum habeatur Integralis quantitatis $y^2\,du$; si quæratur Integralis $y^4\,du$ ea obtinebitur per hanc formulam, siquidem in eo casu est $y^{2m-2}\,du = y^2\,du$, & ex ejus integratione habetur integratio quantitatis $\int y^{2m}\,du$, quæ isto in casu est $y^4\,du$; Simili modo ex integrali quantitatis $y^4\,du$ habebitur Integralis quantitatis $y^6\,du$ &c.

Quando P pervenit in A, terminus $\frac{rzy^{2m-1}}{2m}$ evanescit, quia illic est $z = o$ habetur ergo $\int y^{2m}\,du = \frac{2m-1}{2m} r^2 \int y^{2m-2}\,du$; In eo ergo casu si quæratur integralis quantitatis $y^4\,du$, fiat $m = 2$ erit $\int . y^4\,du = \frac{3}{4} r^2 \int y^2\,du$, sed $\int . y^2\,du = \frac{r^2 c}{8}$ ideoque $\int . y^4\,du = \frac{3r^4 c}{4 \times 8}$; Si quæratur Integralis quantitatis $y^6\,du$ fiat $m = 3$ & erit $\int y^6\,du = \frac{5}{6} r^2 \int y^4\,du =$ sed $\int . y^4\,du = \frac{3r^4 c}{4.8.}$ ideoque $\int . y^6\,du \frac{3.5}{4.6.8} \frac{r^6 c}{}$.

Cor. 1. Si in primo casu in quo alteruter factorum quantitatis du aut ambo factores sunt imparis dimensionis, totum elementum per quantitates r, z, dz exprimatur, Integralis quæ tunc obtinebitur non erit completa, quia cosinus z ex T incipit & arcus u ex puncto C, unde dz negativum esse debet; erit ergo $\int r^n z^m dz = C - \frac{r^n z^{m+1}}{m+1}$, ut hæc constans C obtineatur, observandum quod ubi u est o, ideoque evanescit hoc elementum tunc est $z = r$ ergo $o = C - \frac{r^{n+m+1}}{m+1}$ hinc $C = \frac{1}{m+1} r^{n+m+1}$; v. gr. sit $\int . rz^3\,dz = C - \frac{rz^4}{4}$ fit $C = \frac{1}{4} r^5$.

Cor. 2. Si è contra arcus u ex puncto A inciperet, Integralis quæ obtinebitur cùm elementum per quantitatem y exprimetur completa non erit, & eâ ratione compleri debebit quæ in præcedenti Corollario est indicata.

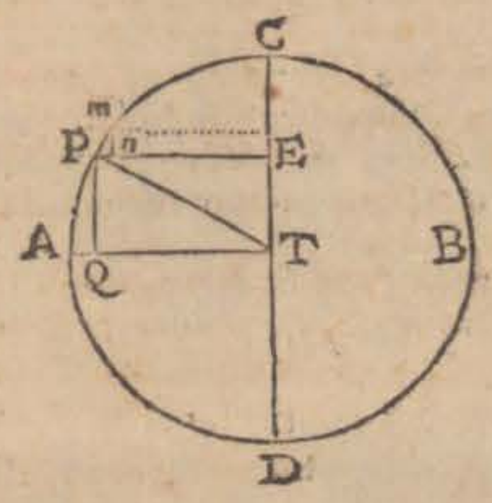
Cor. 3. In secundo casu, si u ex puncto A incipiat erit $\int . y\,dz = A\,P\,E\,T$ & $\int z\,dy$ est area A P Q, ut liquet ex ipsa figura.

Cor. 4. Denique si u ex puncto A incipiat & ambo factores sint uterque dimensionis paris, elementum non est reducendum ad litteram y, ut in Lemmatis solutione factum est, sed ad quantitatem z, quæ in toto calculo loco y substituatur & vice versa; Liquet enim quod z est finus respectu arcus A P, & y ejus Cosinus.

PROBLEMA I.

Invenire totam retardationem Lunæ dum unam revolutionem absolvit.

Cons-



Conſtat ex Theor. VI. Quod ſi Sol ſit immotus, & Luna in totâ revolutione eam vim Solis patiatur quam patitur in puncto P, eveniet ut tempus quo deſcribitur arcus du, (quodque debet eſſe $\frac{Mdu}{c}$ poſito M tempore Periodico Lunæ, & c Peripheriâ quam percurrit) evadat $\frac{Mdu}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$; itaque tempus illud producitur quantitate $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2Y}{V}$, ideo cum tempore $\frac{Mdu}{c}$ iſte arcus du deſcribi debuiſſet hoc tempore $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2Y}{V}$ arcus $\frac{2Y}{V}du$ deſcriberetur, hæc eſt ergo retardatio Lunæ in puncto P orta per actionem Solis.

Sed in ſingulo puncto P orbitæ Lunaris vis Y eſt $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ (per Theor. IV.) ergo Elementum retardationis Lunæ eſt $du \frac{2F}{Va} \times \frac{3yy}{r} - r$, cujus Integralis ſecundum Lemma præcedens eſt $\frac{2F}{Va} \times \frac{3r+c}{8r} - \frac{1}{4}rc$, ſive $\frac{2F}{Va} \times \frac{1}{8}rc$, cum P pervenit in A, cumque idem ſit Solis effectus in ſingulo quadrante tota retardatio Lunæ eſt $\frac{2F}{Va} \times \frac{4}{8}rc$ ſive $\frac{Frc}{Va}$, dum Luna revolutionem abſolvit, reſpectu Solis immoti.

Si reddatur Soli motus ſuus, & loco menſis Periodici M, menſis Synodicus μ intelligatur, & cenſeatur quod proxime verum eſt menſem ſynodicum qui reſpondet menſi Periodico in circulo adbc peracto, eſſe ad eum menſem Periodicum ut μ ad M, ideoque eum menſem Synodicum eſſe $\mu \times 1 + \frac{2Y}{V}$ omnia procedent ut prius & erit $\frac{Frc}{Va}$ retardatio Lunæ toto ejus tempore ſynodico.

Scrupulus eſſe poteſt, utrum in hac expreſſione, quantitas c deſignet peripheriam 360 grad. an eam peripheriam conjunctam cum viâ quam Sol emenſus eſt menſe ſynodico; ſed ex integrationis adhibitæ ratione patet, actum fuiſſe de veris quadrantibus circuli, ideoque hic c deſignare peripheriam ipſam nihilque ultra, ita ut $\frac{Frc}{Va}$ ſit retardatio abſoluta Lunæ tempore ſynodico.

Verum alia certior correctio eſt adhibenda; Conſtat ex Propoſitione XXVI. hujuſce Libri, velocitatem Lunæ augeri per Solis actionem Radio orbitæ Lunaris perpendicularem, ita ut, velocitas Lunæ in Quadraturis ſit ad ejus velocitatem in quolibet puncto ut $109.73r$ ad $109.73r + \frac{yy}{r}$, hinc tempus quo deſcribitur arcus du brevius ſit in proportione velocitatum, ideoque cum id tempus fuerit $\frac{\mu du}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$, ſit $\frac{109.73r}{109.73r + \frac{yy}{r}} \times \frac{\mu du}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$ ſive fractionem ad ſeries reducendo $1 - \frac{yy}{109.73rr} \times \frac{\mu dc}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$; Quantitas autem hæc $\frac{\mu dc}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$, duas partes continet, priorem independentem ab actione Solis ſecundùm directionem radii exercitam, & de acceleratione ad hanc partem pertinente actum eſt in XXVI. Prop.; & hinc fit ut menſis ſynodicus medius ſit brevior eo qui debuiſſet eſſe in proportione numeri 10973 ad 11023, & inæqualitates inde natæ in variis partibus menſis ſynodici in variatione continentur;

DE MUNDI SYSTEMATE.

altera pars $\frac{\mu d u}{c} \times \frac{2 Y}{V}$ pendet ab actione Solis secundum radium orbitæ Lunaris exercitam, & de hac sola isto calculo agitur, ideoque cum ex ista oriatur retardatio $\frac{2 Y}{V} d u$, & tempus $\frac{\mu d u}{c}$ fiat minus in proportione 1 ad $1 - \frac{y y}{109.73 r^2}$ retardatio quæ fiet dum arcus $d u$ describi debuisset erit solummodo $\frac{2 Y d u}{V} - \frac{2 Y y y d u}{109.73 r^2 V}$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times \frac{3 y y}{r} - r$ evadet hoc Elementum $d u \times \frac{2 F}{V a} \times \frac{3 y y}{r} - r - \frac{3 y^4}{109 . 73 r^3} + \frac{y y}{109.73 r}$ cujus Integralis pro quadrante juxta Lemma I. est $\frac{2 F}{V a} \times \frac{3 r^2 c}{8 r} - \frac{1}{4} r c - \frac{3 \times 3 r^4 c}{4 \times 8 \times 109.73 r^3} + \frac{r^2 c}{8 \times 109 . 73}$ sive $\frac{2 F r c}{V a} \times \frac{1}{8} - \frac{5}{4.8.109.73}$ & quadruplicatum pro tota revolutione fit $\frac{F r c}{V a} \times \frac{433.92}{438.92}$.

1 2 1.

Coroll. Constat ex Cor. 2do. Prop. IV. Lib. I. Princ. Quod vires centrales sunt inter se directè ut radii & inverse ut temporum Periodicorum quadrata: hinc, si sit A annus fidereus, & M mensis Periodicus fidereus sepositâ omni Solis actione, erit F ad V ut $\frac{a}{A A}$ ad $\frac{r}{M M}$, sive $\frac{F}{V} = \frac{a M M}{r A A}$ substituto itaque hoc valore loco $\frac{F}{V}$ in quantitate $\frac{F r c}{V a} \times \frac{433.92}{438.92}$ quæ retardationem durante mense synodico exprimit, ea retardatio fit $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92} c$, & si non attendatur ad correctionem quæ pendet ex actione Solis perpendicularis radio orbitæ Lunaris ea retardatio foret $\frac{M^2}{A^2} c$.

PROBL. II.

Dato tempore synodico apparenti Lunæ, invenire tempus periodicum quod observari debuisset, si abesset actio Solis in Lunam secundùm radium orbitæ Lunaris exercitam.

Sit *S* mensis synodicus apparens, A annus fidereus, inde (ex nota proportione mensis synodici ad Periodicum) invenietur mensem Periodicum apparentem esse $\frac{A S}{A + S}$, & quoniam hoc tempore Periodico Luna describeret peripheriam *c* deducetur quod tempore synodico *S* describet arcum $\frac{A + S}{A} c$.

Sed Luna citra Solis actionem tempore Periodico M describere debuisset Peripheriam *c*, &, eadem in Hypothesi, tempore *S* descripsisset aream $\frac{S c}{M}$ hinc ergo retardatio absoluta quam patitur tempore *S* est $\frac{S c}{M} - \frac{A + S}{A} c = \frac{A S - A M - M S}{A M} c$. Sed per Corollarium præcedentis problematis ea retardatio inventa fuerat $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92} c$ hinc obtinetur hæc æquatio $A S - A M - M S = \frac{433.92 M^3}{438.92 A}$, loco M scribatur X A, loco S scribatur E A, & fiet hæc æquatio $A^2 E - A^2 X - A^2 E X = \frac{433.92 A^3 X^3}{438.92 A}$ sive $E = X + E X + \frac{433.92}{438.92} X^3$, sed mensis synodicus medius est .08084896 A hinc E = .0804896 & æquatio fit .08084896 = 1.08084896 X + $\frac{433.92}{438.92} X^3$, loco X substituatur .0744 + R & æquatio evadit .08084896 = .08082129 + 1.09726905 R, unde habetur .00002767 = 1.09726905 R, hinc obtinetur R = .0000252 & M = .0744252 A.

THEOR. VII.

Si mutetur utcumque Solis à Terra distantia, ita ut loco *a* dicatur *X*, dico quod, cæteris manentibus, Retardatio Lunæ durante Tempore synodico, cum Ter-

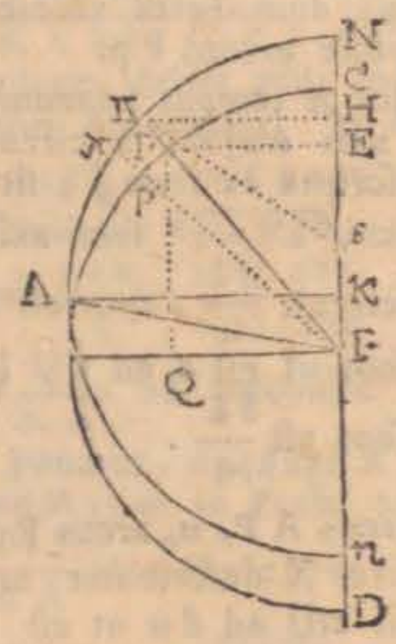
Terra distabit à Sole quantitate X erit $\frac{a^3 M^2}{X^3 A^2} \times \frac{433.92\,c}{438.92}$.

Nam ex Problemate I. Retardatio Lunæ inventa fuerat $\frac{F\,r\,c}{V\,a} \times \frac{433.92}{438.92}$ sed in aliâ à Sole distantia loco a ponatur X, & præterea loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$, decrescit enim vis Solis F ut quadrata distantiarum, hac ergo substitutione facta retardatio Lunæ fit $\frac{a^2 F\,r\,c}{X^3 V} \times \frac{433.92}{438.92}$; Tum vero loco $\frac{F}{V}$ substituatur $\frac{a M^2}{r A^2}$ & habebitur expressio Theorematis hujusce.

LEMMA II.

Foco F, axe majore N F n qui dicatur $2a$ describatur Ellipsis, sit e ejus excentricitas eaque parva fit, axis minor sit $2b$, erit $b^2 = a - e^2$; Ex foco ut Centro radio a describatur circulus, & ducantur à foco lineæ secantes circulum in P & Ellipsim in Π, linea F Π dicatur X, sinus anguli A F P sit y, Cosinus z, Dico quod linea x erit $\frac{b^2 a}{a^2 \mp e z}$.

Ducatur ex Π, Π H perpendicularis ad Axem, & propter Triangulorum F P E, F Π H similitudinem erit F P ad F Π ut P E ad Π H & ut F E ad F H, hoc est $a : x = y : \frac{y}{a} x = z : \frac{z}{a} x$: Sit f alter focus Ellipseos ex eo ducatur linea f Π, ex natura Ellipseos est f Π $= 2a - x$ sed f Π^2 = Π H^2 + f H^2 & Π H $= \frac{y}{a} x$, & f H = F H − F f vel F f − F H vel F f + F H, & est F f $= 2e$ & F H $= \frac{z}{a} x$ hinc Π H^2 + f H^2 $= \frac{y^2}{a^2} x^2 + \frac{z^2}{a^2} x^2 \mp \frac{4ez}{a} x + 4e^2 =$ f Π^2 $= 4a^2 - 4ax + x^2$, est autem $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} x^2$ $x^2 = x^2$, ergo $\mp \frac{4ez}{a} x + 4e^2 = 4a^2 - 4ax$, & dividendo per 4 & transponendo est $ax \mp \frac{ez}{a} x = a^2 - e^2 = b^2$; Unde habetur $x = \frac{b^2 a}{a^2 \mp ez}$. Q. E O.



Cor. Hic valor x in series resolutus est $\frac{b^2}{a} \times 1 \pm \frac{ez}{a^2} + \frac{z^2 e^2}{a^2} \pm \frac{e^3 z^3}{a^3}$ &c. sumptis signis superioribus quando E cadit in eàdem parte ac centrum, & sumptis signis inferioribus quando E cadit in parte in quâ non est centrum.

Cor. 2. Si fractio $\frac{a}{x} \times \frac{a^2 \mp ez}{b^2}$ ad dignitates superiores evehatur termini in quibus e plurium dimensionum poterunt omitti, propter suppositionem excentricitatem exiguam esse, & quidem si agatur de Solis excentricitate ea non assurgit ad duas centesimas radii, & excentricitas Lunæ non assurgit ad septem centesimas.

Cor. 3. Hinc tardatio Lunæ quæ ex Solis actione pendet, fiet durante tempore synodico S, $\frac{433.92\,c}{438.92} \times \frac{M^2}{A^2} \times \frac{a^2 \mp ez^3}{b^6}$, positis a pro semi-axe majore orbitæ Solis, e pro ejus excentricitate, & b pro axe minore.

PROBL. III.

Determinare quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis dum Ter-

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.

Terra describit circa Solem arcum quamminimum datum.

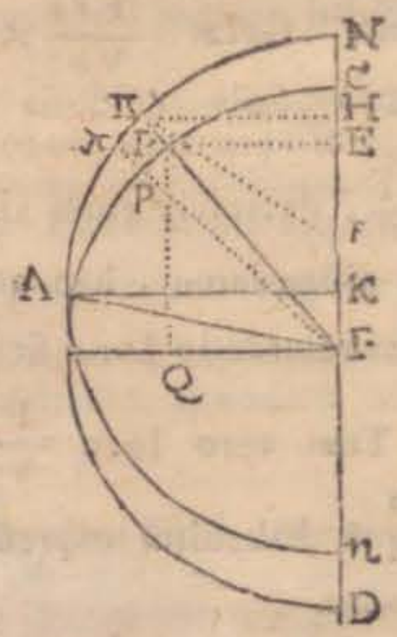
Sit ut in præcedenti Lemmate N Π n Ellipsis quam terra describit, sit Sol in foco F, ducatur ut prius linea F P Π & ei quam proxima F p π quæ secet in circulo C A D arcum P p, & quæratur quantitas graduum quâ tardatur Luna per Solis actionem, dum Terra videretur è Sole, describisse arcum P p.

Sit ut prius *A* tempus annuum, *a* Ellipseos semi-axis major, *k* circumferentia eo radio descripta ex foco F, sit *e* excentricitas, $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ semi-axis minor, area semi-circuli $\frac{ak}{4}$, quæ est ad aream semi-Ellipseos ut est *a* ad *b*, hinc area semi-Ellipseos est $\frac{bk}{4}$.

Dicatur arcus A P, *u*, arcus P p sit *du*, radio F Π sive X describatur arculus ex π in F Π, is erit ad *du* ut est F Π sive X ad *a*, ergo is arculus erit $\frac{x\,du}{a}$, ideoque area F Π π est $\frac{x^2\,du}{2a} = \frac{b^4\,a\,du}{2 \times a^2 \mp ez^2}$ (per Lem. præced.)

Sed tempus quo terra arcum P p describisse videtur est ad tempus semestre $\frac{1}{2}$ A, ut hæc area F Π π, sive $\frac{x^2\,du}{2a}$ ad semi-Ellipsim $\frac{bk}{4}$, Est itaque illud tempus quo terra arcum P p describisse videtur $\frac{4\,x^2\,du}{2\,a\,b\,k} \times \frac{1}{2}\,A = \frac{x^2\,A\,du}{a\,b\,k}$.

Inventum autem est quod tempore S Luna tardabatur propter actionem Solis quantitate $\frac{433.92\,c}{439.92} \times \frac{M^2\,a^3}{A^2\,x^3}$ ergo tempore $\frac{x^2\,A\,du}{a\,b\,k}$ tardabitur quantitate $\frac{433.92\,c \times x^2\,A\,du}{438.92 \times S\,a\,b\,k} \times \frac{M^2\,a^3}{A^2\,x^3}$ sive $\frac{433.92\,c \times du}{438.92 \times S.\,b.\,k} \times \frac{M^2\,a^2}{A\,x}$, aut substituendo valorem fractio. $\frac{a}{x}$, fit $\frac{433.92.cdu}{438.92.\,S\,b\,k} \times \frac{M^2 a}{A} \times \frac{a^2 \mp ez}{b^2}$ sive $\frac{433.92cdu \times M^2 a}{438.92\,S\,A\,b^3 k} \times a^2 \mp ez$.



PROBL. IV.

Invenire retardationem Lunæ ex actione Solis ortam durante semestri revolutione terræ circa Solem.

Primo inveniatur Integralis Elementi per Probl. I I I. inventi quod est $\frac{433.92\,c\,du \times M^2\,a}{438.92.\,S.\,A.\,b^3 k}\,a^2 \pm az$ cujus Integralis est $\frac{433.92\,c \times M^2\,a}{438.92.\,S.\,A\,b^3 k} \times a^2 u \mp aey$.

Si ergo sumatur semestris revolutio, illic est $u = \frac{1}{2}k$, & termini in quibus occurrit *y* sese destruunt, ut quidem liquet ex eo quod *y* illic evanescat, unde semestris retardatio fit $\frac{433.92c \times M^2 a}{438.92 S A b^3 k} \times \frac{1}{2}a^2 k = \frac{433.92c \times M^2 a^3}{438.92\,S\,A\,b^3} \times \frac{1}{2}$ sive ponendo $a = b$ quod proxime verum est $\frac{433.92\,c\,M^2}{438\,92\,S \times A} \times \frac{1}{2}$.

Cor. Si quæratur retardatio Lunæ, facta tempore quo Terra à suo Aphelio ad mediocrem ejus distantiam pervenit, observandum quod eo in loco arcus *u* est $\frac{1}{4}k - e$, & *y* est *b*, unde Integralis inventa evadit $\frac{433.92\,c \times M^2\,a}{438.92\,S.\,A\,b^3 k} \times \frac{1}{4}a^2 k - a^2 e - abe$, aut simplicius si quantitates *a* & *b* pro æqua-

æqualibus ſumere liceat fiet $\frac{433.92\,c \times M^2}{438.92\,S.A\,k} \times \frac{1}{4}k - 2e$ ſive $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92 \times SA\,b^3} \times \frac{1}{4} - \frac{2e}{k}$.

PROBL. V.

Invenire Æquationem motus medii Lunaris quæ pendet ex Solis actione, & quæ eſt adhibenda quando Terra eſt in ſuâ mediocri diſtantiâ à Sole.

Primo obſervandum eſt motum Lunæ qualis ex apparentiis determinatur ex duplici cauſâ pendere, ex actione Terræ cum motu projectili conjunctâ & ex Solis actione quæ motum ex præcedenti cauſâ natum tardat; Prior motus in orbe circulari uniformis foret, ſed tardatio ex alterâ cauſâ procedens inæqualiter priori illi ſeſe immiſcet, Aſtronomi verò cum motum medium Lunæ æſtimant, hanc tardationem ſumunt quaſi uniformiter in omne tempus diſtributam.

Cum ergo ea tardatio major ſit in aliquibus Terræ poſitionibus, in aliis ſit minor, quæſtio eſt quænam correctio motui medio Lunæ ſit facienda, ut habeatur Lunæ locus verus, ideoque inveſtiganda eſt differentia inter tardationem proportionaliter tempori diſtributam, & tardationem veram quæ ſingulo loco competit, quæ differentia loco medio addita aut ex eo detracta reſtituet verum locum Lunæ quatenus hæc ſola irregularitas ſpectatur.

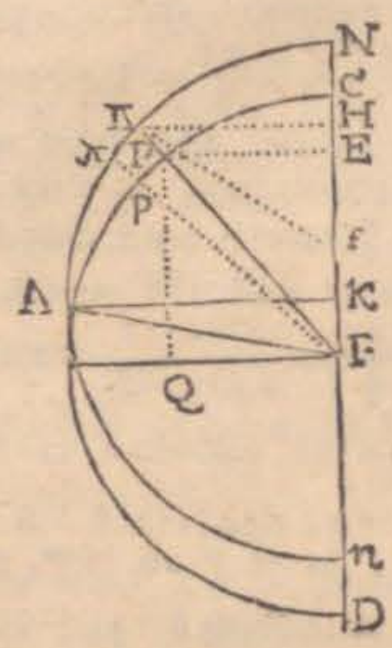
Ut ergo habeatur tardatio tempori proportionalis quando Terra eſt in mediocri diſtantia, fiat ſecundum Regulam Keplerianam, ut area ſemi-Ellipſeos (quæ eſt $\frac{bk}{4}$ & eſt ſemeſtri tempori proportionalis) ad aream FNA (quæ eſt Ellipſeos quarta pars cum Triangulo FAK ideoque eſt $\frac{bk}{8} + \frac{be}{2}$ & eſt proportionalis tempori quo Terra ab Aphelio ſuo ad mediocrem à Sole diſtantiam pervenit) hoc eſt ut $\frac{1}{12}$ ad $\frac{1}{4} + \frac{e}{k}$, ita tardatio ſemeſtri tempore factâ quæ (per Probl. IV.) eſt $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,SA\,b^3} \times \frac{1}{2}$, ad tardationem proportionalem tempori quo Terra ab Aphelio ad mediocrem ſuam à Sole diſtantiam pervenit, quæ erit ergo $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,SA\,b^3} \times \frac{1}{4} + \frac{e}{k}$; ſed per Cor. Probl. IV. vera tardatio eo in loco erat $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,SA\,b^3} \times \frac{1}{4} - \frac{2e}{k}$. Hinc ſubſtractione factâ, tardatio mediocris ſuperat tardationem veram quantitate $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,S.A\,b^3} \times \frac{3e}{k}$. Hæc ergo quantitas graduum debet addi loco medio ut locus verus obtineatur. Si ergo loco e ſumatur $.016\frac{7}{8}\,a$, erit $3e = .050\frac{5}{8}\,a$, & loco k ſcribatur $6.283188\,a$; & loco c, 360 gr. erit $\frac{3ec}{k} = \frac{188^{r}.225}{6.283188} = 2^{gr}.9005$; Præterea $\frac{M^2}{S.A}$ ad calculum revocatur ſi loco M ponatur, 0744252 A; & loco S, $.08084896$ A, ut in Prob. 2do. repertum eſt, fit $\frac{M^2}{S.A} = .06851183835$, idque ductum in fractionem $\frac{433.92}{438.92}$ efficit. 06773137 cumque fractio $\frac{a^3}{b^3}$ ſit tantum 1.00045 & ſuperius ſumptum ſit a loco b hæc fractio pro unitate ſumi poteſt, hinc eſt $\frac{a^3 M^2}{b^3\,S.A} \times \frac{433.92}{438.92} = .06773137$, quod ductum in 28^{gr}. $.9005$ efficit $0^{o}.19646$ quod ductum per 60^{l} efficit $11^{l}.7876$, ſive $11^{l}.47^{ll}.256'''$, quam Newtonus $11^{l}.49^{ll}$ aſſumit; majorem autem Æquationem in Hypotheſi Elliptica inveniemus, unde medium quoddam inter utramque ab ipſo aſſumptum eſſe videtur.

Cor. 1. Cum hæc æquatio ſit $\frac{433.92 \times ca^3 \times M^2}{438.92 \times S.b^3 A} \times \frac{3e}{k}$ ſive proxime $\frac{433.92\,c \times M^2}{438.92\,S \times A} \times \frac{3e}{k}$, & quantitates e, M, S, A, k, ſint conſtantes, hæc æquatio, ubi Tellus eſt in ſuâ mediocri diſtantiâ, eſt ſicut excentricitas orbitæ Telluris e, ideoque ſi ea excentricitas major ſit quam $.016\frac{7}{8}$ radii a, creſcet hæc æquatio in hac proportione; ſit v. gr. $e = a \times .016\frac{3}{12}$,

DE MUNDI SYSTEMATE.

& fiat ut $16\frac{7}{8}$ ad $16\frac{11}{12}$ ita 11'. 47''.616 ad quartum, is quartus terminus 11'.49''.42, erit æquatio, suppositâ excentricitate orbitæ Telluris $.016\frac{11}{12}$, hoc in casu Newtonus Æquationem facit 11'. 50''.

121.



Cor. 2. In alio quovis loco orbitæ Telluris, æquatio habebitur si fiat ut semi-Ellipsis $\frac{bk}{4}$ ad aream F N I I ita semestris tardatio $\frac{433.92cM^2}{438.92 \times S.A} \times \frac{a^3}{2b^3}$ ad tardationem huic tempori proportionalem, quæ erit ergo $\frac{433.92c \times M^2 \times FNII}{438.92 \times S \times A b^3} \times \frac{2a^3}{bk}$ tum vero si sumatur tardatio loco I I conveniens quæ est $\frac{433.92 \times c \times M^2 a}{438.92 \times S \times A b^3 k} \times a^2 u \mp aey$, (Probl. 4.) erit hæc æqu. $\frac{433.92c \times M^2 a^2}{438.92 \times S.A \times b^3 k} \times \frac{2a \times FNII}{b} - au \pm ey$, ideoque erit ut $\frac{2aFNII - abu \pm bey}{b}$; aut sumendo $u = b$, ut $\frac{2FNII - bu \pm ey}{b}$. Jam vero hæc quantitas est ipsa æquatio centri Solis; nam arcus qui describeretur per motum medium Solis eo tempore quo arcus u revera percurritur hac proportione obtinetur, ut semi-Ellipsis $\frac{bk}{4}$ ad aream F N I I ita semicirculus $\frac{1}{2}k$ ad arcum medio motu descriptum qui ergo erit $\frac{4FNII}{bk} \times \frac{1}{2}k = \frac{2FNII}{b}$; sed arcus tunc temporis revera descriptus, est N I I sive u, ergo æquatio centri Solis est $\frac{2FNII}{b} - u$ sive $\frac{2FNII - bu}{b}$ cui quantit. $\frac{2FNII - bu \pm ey}{b}$ est quam proximè æqualis, nam terminus ey propter exiguitatem e respectu b, & y respectu u considerationem nullam hic meretur, ergo æquatio Lunaris in quovis loco orbitæ Telluris est sicut æquatio centri Solis eo in loco; Ergo ut æquatio centri Solis in mediocri distantia Telluris à Sole, est ad æquationem motus Lunaris adhibendam cum Tellus est in ea mediocri distantia à Sole, ita est æquatio centri Solis in quâvis distantiâ u ab Aphelio, ad æquationem Luni Solarem primam Lunæ illi loco convenientem.

Cor. 3. Æquatio ista Lunæ, quæ Solaris prima dicitur, est maxima in distantia mediocri Terræ à Sole; nam cum sit proportionata æquationi centri Solis, & æquatio centri Solis fit maxima in mediocri distantiâ Telluris à Sole per ea quæ primo Libro circa hanc æquationem demonstrata sunt, Æquatio Solaris Lunæ eo in loco maxima pariter erit.

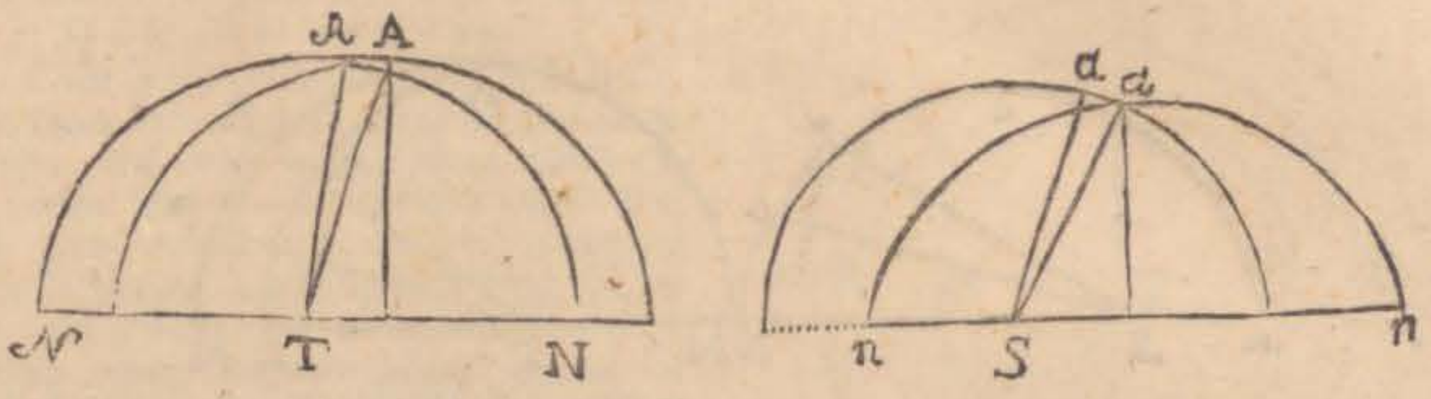
De Incremento motus medii Lunæ, & ejus æquatione ex Solis actione pendentibus, in Hypothesi eum orbem esse Ellipticum, Methodo diversâ ab eâ quæ in calculo præcedente fuit adhibitâ.

THEOR. I.

Sint duæ Ellipses descriptæ circa corpora centralia in ipsarum focis posita, quorum vires absolutæ diversæ sint; Dico, quod si Tempora Periodica in utraque Ellipsi sint ut earum Ellipsium areæ; Ellipses illæ erunt inter se similes.

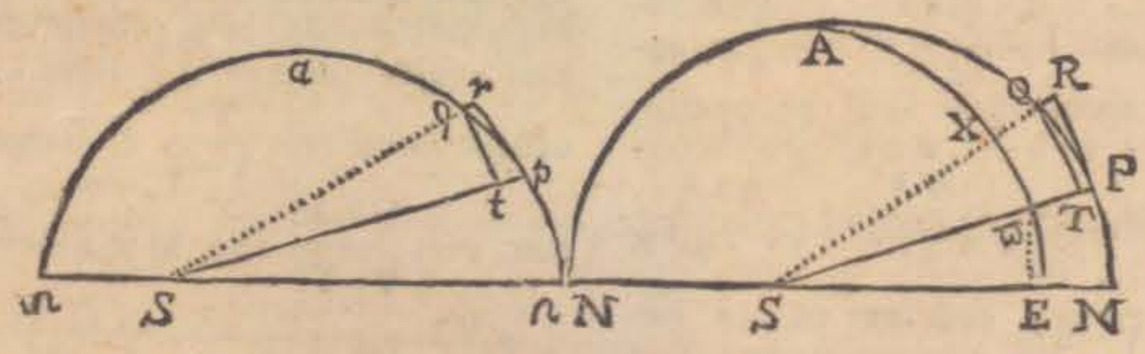
Describantur duæ Ellipses NAN, nan, circa corpora S & s in focis Ellipsium posita, & quorum vires sint diversæ, si totum tempus quo describitur Peripheria Ellipseos N A N, sit ad totum tempus quo describitur Peripheria Ellipseos n A n ut area prioris Ellipseos ad aream alterius,

Ellip-



Ellipſes illæ ſimiles eſſe debebunt, hoc eſt earum Ellipſium axes majores erunt inter ſe ut ſunt inter ſe earum minores axes, v. gr. ſi ſemi-axis major Ellipſeos NAN dicatur r, ejus minor ſemi-axis dicatur q & major ſemi-axis Ellipſeos nan dicatur ϱ, ejus minor ſemi-axis n, Dico quod erit q ad n ut eſt r ad ϱ.

Ex naturâ Ellipſium area Ellipſeos NAN eſt ad aream Ellipſeos nan ut eſt rq ad ϱn, & ex Hypotheſi tempus Periodicum in Ellipſi NAN eſt ad tempus Periodicum in Ellipſi nan in eadem ratione rq ad rn, ſi ergo ſumantur arcus ſimiles AA, aa in mediocri diſtantiâ in utrâque Ellipſi, tempora quibus deſcribentur illi arcus erunt ut tota tempora Periodica, quia illi arcus AA, aa in mediocri diſtantiâ poſiti deſcribuntur motu medio corporum eas Ellipſes deſcribentium, & erunt etiam ut areæ ASA & asa ex Hypotheſi, & iſtæ areæ ASA & asa, ſunt ut quadrata linearum SA & sa ſive ut r^2 ad ϱ^2; Ergo eſt r^2 ad ϱ^2 ut rq ad ϱn, & dividendo terminos homologos per r & ϱ eſt r ad ϱ ut q ad n; Ergo Ellipſes ſunt ſimiles. Q. E. D.



THEOR. II.

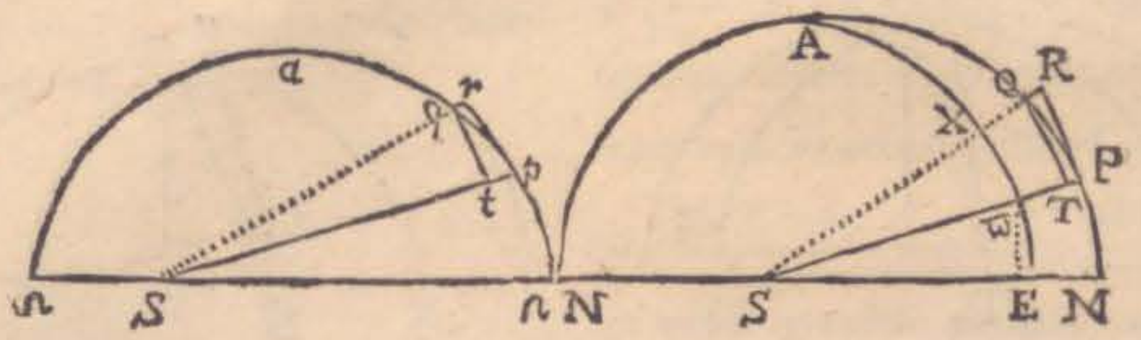
Sint, ut prius, duæ Ellipſes deſcriptæ circa corpora centralia in ipſarum focis poſita quorum vires abſolutæ diverſæ ſint, & ſint tempora Periodica in utrâque Ellipſi ut earum Ellipſium areæ, Dico quod axes majores earum Ellipſium erunt reciprocè ut vires abſolutæ corporum centralium.

Vis abſoluta corporis S dicatur V, corporis s dicatur V—Y, ducantur in utrâque Ellipſi lineæ SP, sp ad lineas apſidum SN, sn ſimiliter inclinatæ, & iis proximæ ducantur lineæ SQ, sq angulos ſimiles PSQ, psq conſtituentes, ducantur ex Q & q perpendiculares QT, qt in lineas SP, sp, & productis lineis SQ sq donec occurrant Tangentibus in R & r, erunt QR, qr virium centralium effectus dum deſcribuntur arcus PQ, pq.

Primò quidem ex Hypotheſi, Tempora quibus deſcribentur ii arcus PQ, pq erunt ut areæ PSQ, psq, & quia, ex conſt. illæ areæ ſunt ſimiles, erunt ut quadrata linearum homologarum ſive ut SP^2 ad sp^2 aut QT^2 ad qt^2. Sunt autem virium centralium effectus, directè ut vires centrales & ut quadrata temporum, vires verò centrales ſunt ut

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



$\frac{V}{SP^2}$ ad $\frac{V-Y}{sp^2}$, & quadrata temporum ſunt ut SP^4 ad sp^4, Ergo lineæ QR & qr erunt inter ſe ut $\frac{V}{SP^2} \times SP^4$ ad $\frac{V-Y}{Sp^2} \times sp^4$, ſive ut $V \times SP^2$ ad $\overline{V-Y} \times sp^2$, aut denique ut $V \times QT^2$ ad $\overline{V-Y} \times qt^2$.

Secundo, In omnibus Ellipſibus per vim centralem ex foco prodeuntem deſcriptis latus rectum eſt æquale $\frac{QT^2}{QR}$ ut conſtat ex Prop. XI. Lib. I. Princ. Si itaque latus rectum Ellipſeos NAN ſit L, Ellipſeos vero nan ſit λ erit $L = \frac{QT^2}{QR}$ & $\lambda = \frac{qt^2}{qr}$, loco QR & qr quantitates ipſis proportionales $V \times QT^2$ & $V-Y \times qt^2$ collocentur, & erit L ad λ ut $\frac{QT^2}{V \times QT^2}$ ad $\frac{qt^2}{V-Yqt^2 \times}$ ſive ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; ſed ex naturâ Ellipſium, eſt $L = \frac{q^2}{r}$ & $\lambda = \frac{\pi^2}{\varrho}$, præterea quia Ellipſes ſunt ſimiles ex præcedente Theoremate eſt $q : r = \pi : \varrho$, ideoque $\frac{q}{r} = \frac{\pi}{\varrho}$; Eſt ergo $L : \lambda$ ut q ad π ſive ut r ad ϱ; Itaque eſt r ad ϱ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$. Q. E. D.

Cor. In hîs itaque Hypotheſibus Tempora Periodica erunt inverse ut Quadrata virium abſolutarum corporum S & s; ſunt enim per Theor. I. ut r^2 ad ϱ^2, & ex hoc Theoremate eſt r ad ϱ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; Ergo Tempora Periodica ſunt ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{\overline{V-Y}^2}$.

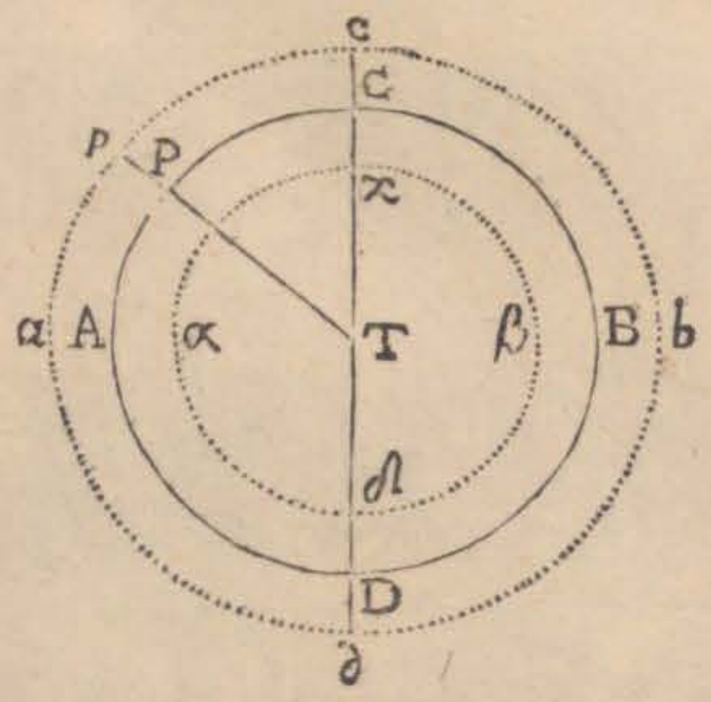
THEOR. III.

Sit T terra, P Luna quæ circa terram (ſepoſitâ omni actione Solis) deſcribat orbitam circulo proximam tempore Periodico M, Vis abſoluta Terræ in Lunam dicatur V, minuatur ea vis abſoluta quantitate exiguâ Y; Dico quod ſi ea vis V—Y maneat conſtans Luna deſcribet circa Terram orbitam ſimilem illi quam prius deſcribebat, ita ut ſi prioris orbitæ ſemi-axis major dicatur r, ſemi-axis major orbitæ novæ erit $\frac{Vr}{V-Y}$ & tempus Periodicum erit $\frac{V^2 M}{\overline{V-Y}^2}$ ſive $M \times 1 + \frac{2Y}{V} + \frac{3Y^2}{V^2} + \frac{4Y^3}{V^3}$ &c.

Nam 1°. cum Luna diſcedit à ſuâ orbitâ, retinetur tamen per vim decreſcentem ſecundum quadrata diſtantiarum, deſcribet ergo circa corpus in foco poſitum ſectionem Conicam, quæ erit adhuc Ellipſis, quia mutatio vis centralis ponitur exigua, & per vim priorem orbita circulo finitima deſcribebatur ita ut nec in Hyperbolam nec in Parabolam mutari poſſit hæc orbita.

2°. Cum vis nova Y ad centrum ſit etiamnum directa, quamcumque in viam flectatur Luna, areæ ſemper manebunt Temporibus proportionales, ideo ſi tandem in orbitam a d b c deveniat ex orbi-

ta



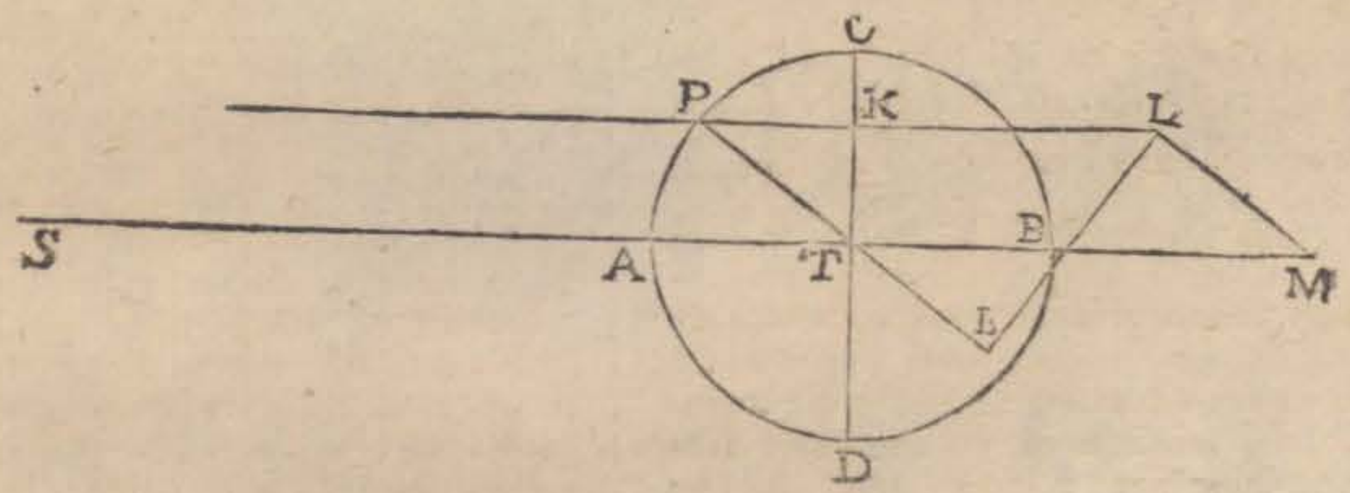
la ADBC, tempus quo describetur peripheria adbc erit ad tempus M quo describebatur peripheria ADBC ut tota area ADBC ad aream adbc.

3°. Cum ergo in his orbitis ADBC, adbc (quæ describuntur circa corpus idem quidem, sed cujus vis absoluta alia censetur cum describitur orbita ADBC quam cum describitur adbc) tempora sint areis proportionalia, istæ areæ similes erunt, per Theor. I., circulisque finitimæ per Hyp., axes majores erunt inversè ut vires V & V−Y, per Theor. II. & tempora Periodica ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{V-Y^2}$ itaque si in orbita ADBC, id tempus dictum fuerit M, in orbita adbc, erit $\frac{V^2 M}{V-Y^2}$, sive hanc quantitatem in seriem resolvendo $M \times 1 + \frac{2Y}{V} + \frac{3Y^2}{V^2}$. Q. E. D.

Cor. Iisdem Principiis ostendetur, quod si vis absoluta terræ augeretur quantitate exigua Y, Luna deferretur in orbitam interiorem $\alpha\delta\beta n$ similem priori ADBC, cujus radius foret $\frac{rV}{V-Y}$, sumendo quantitatem Y negativè & quæ describeretur tempore $M \times 1 + \frac{2Y^2}{V} + \frac{3Y^2}{V^2} + \frac{4Y^3}{V^3}$ &c. sumendo negativè terminos in quibus quantitas Y est imparium dimensionum.

Ut autem servetur hæc conditio quantitatèm Y esse exiguam, fractiones $\frac{3Y^2}{V^2}$ &c. sunt delendæ in utroque casu ut infinitè parvæ.

Schol. In primo calculo, cum supposuerimus orbitam Lunæ ADBC esse circularem, orbitas novas adbc, $\alpha\delta\beta n$ circulares etiam esse, supponere necesse erat per Theor. I. hujusce calculi.

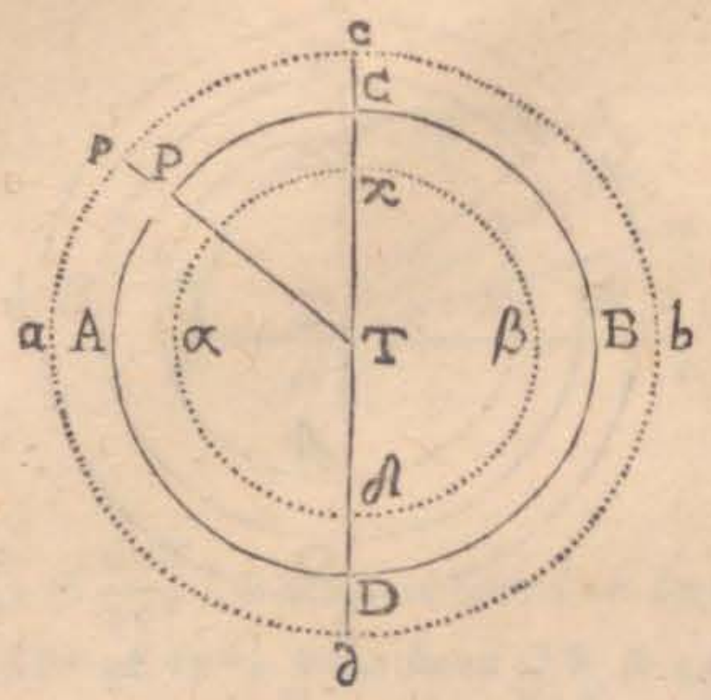


THEOR. IV.

Sit T Terra, P Luna, ADBC orbita quam Luna circa terram describeret sepositâ omni Solis actione, sit ST distantia mediocris Terræ à Sole quæ dicatur *a*; dicatur F vis Solis in Terram ipsam in mediocri illâ distantia, distantiâ Lunæ à Terrâ PT dicatur *r*; Sit CP distantia Lunæ à quadraturâ proximâ quæ dicatur *u*, sit ejus sinus *y*, sit ejus cosinus *z*; Dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam secundum directionem radii PT est ubique $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. Hoc Theor. idem est cum Theor. IV. præcedentis calculi, cujus demonstratio adiri potest.

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitæ intelligi poterit, si concipiatur Lunam ex suâ orbitâ A D B C in aliam transferri cujus singulæ particulæ quamminimæ, forent portiones earum orbitarum quas Luna reverâ describeret, si vis Terræ constanter imminuta aut aucta foret eâ quantitate, quæ, per actionem Solis in eam particulam exercitæ, ex vi Terræ detrahitur aut ei additur.

Etenim cum ea vis Solis per gradus infinitè parvos crescat & decrescat, sitque nulla cum $\frac{3yy}{r} = r$, paulo post minima sit, sicque gradatim crescat, si censeatur eam constantem manere per aliquod tempusculum, Luna brevissimè transibit in orbitam a d b c illi vi congruam per Theor. III. mox verò cum vis Solis crescat quantitate quam minimâ ea vis censeatur iterum constans per alterum tempusculum transibit Luna ex orbitâ primæ vi congruâ in alteram huic incremento consentaneam, sicque semper: ideoque in singulis particulis arcus C P, censeri potest Lunam delatam esse in orbitam vi Solis in eo puncto agenti congruam.

THEOR. VI.

Dicatur mediocris distantia Lunæ à Terra, r; vis Terræ in eâ distantiâ sit V, vis Solis sive addititia sive substractiva sit, quæ agit in Lunam secundum radii Telluris directionem, sit Y in eâ mediocri distantiâ à Terra, crescat verò ut distantiæ; Dicatur x alia quævis distantia Lunæ à Terrâ in quâ vis Terræ erit $\frac{rrV}{xx}$, & vis Solis erit $\frac{xY}{r}$; Dico quod vis corporis centralis quæ in distantiâ x foret $\frac{rrV}{xx} - \frac{xY}{r}$, in mediocri distantiâ esse debuisset $V - \frac{x^3}{r^3} Y$.

Nam siquidem fingitur vim Corporis ejus centralis fictitii sequi legem gravitatis & decrescere sicut quadrata distantiarum fiat ut $\frac{1}{xx}$ ad $\frac{1}{rr}$ ita $\frac{rrV}{xx} - \frac{xV}{r}$ quæ est vis in distantiâ x ad $V - \frac{x^3}{r^3} Y$ quæ erit vis in distantiâ r.

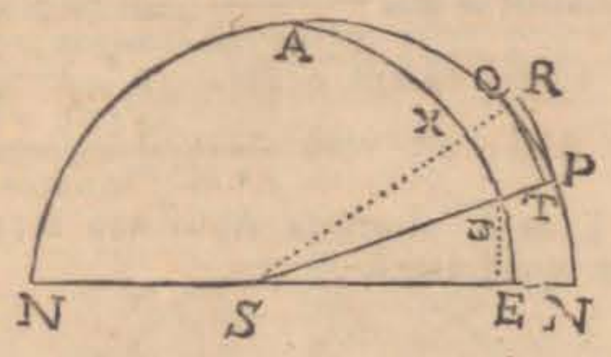
THEOR. VII.

Sit x ut prius distantia Lunæ à Terrâ in propriâ orbitâ, dico quod per actionem Solis illa distantia fiet $\frac{r^3 x V}{V r^3 - Y x^3}$, sive hoc valore in seriem redacto fiet $x + \frac{x^4 Y}{r^3 V} + \frac{x^7 Y^2}{r^6 V^2}$ &c. aut omissis terminis superfluis $x + \frac{x^4 Y}{r^3 V}$.

Nam nova orbita in quam Luna delata censetur est similis priori per Lem. I. & per Lem. II. earum lineæ Homologæ sunt ut vires absolutæ corporum centralium inversè, seu ut vires quas habent in distantiis æqualibus, nempe inversè ut $V - \frac{x^3}{r^3} Y$ ad V, ergo ut $V - \frac{x^3}{r^3} Y$ ad V, ita x ad distantiam Homologam in novâ orbitâ quæ erit ergo $\frac{xV}{V - \frac{x^3}{r^3} Y}$ sive $\frac{r^3 x V}{V r^3 - x^3 Y}$.

Q. E. D.

THEO-



THEOR. VIII.

Centro S, radio æquali mediocri distantiæ r, describatur circulus, arcus ejus ϖX inter lineas SP, SQ interceptus dicatur du; Dico primò quod Luna in eo circulo uniformiter moveri posset eodem tempore Periodico quo moveretur in propriâ orbitâ si abesset vis Solis, ideoque si tempus Periodicum Lunæ in propriâ orbitâ dicatur M, & tota Peripheria circuli cujus radius est r dicatur c, tempus quo arcus du describetur mediocri Lunæ motu citra Solis actionem erit $\frac{M\,du}{c}$; 2°. Cum sit r semi-axis major Orbitæ Lunaris, si dicatur q ejus axis minor, Dico quod tempus quo idem ille arcus du describi videbitur urgente Solis actione & spectatâ excentricitate orbitæ Lunaris erit $\frac{M\,du}{c} \times \frac{x^2}{qr} + \frac{2\,x^5\,Y}{q\,r^4\,V} + \frac{3\,x^8\,Y^2}{q\,r^7\,V^2}$ &c.

Primo enim liquet quod is circulus describetur eo tempore Periodico quo describeretur orbita Elliptica Lunaris si sola vis Telluris agat; nam si corpora plura circa centrum commune revolvantur in quibuscumque Ellipsibus, Tempora eorum Periodica sunt in sesquiplicatâ ratione axium majorum (per Prop. XV. Lib. I. Princ. Newt.) sed hujus circuli & orbitæ Lunaris axes majores sunt æquales (per const.) Ergo eorum temporaPeriodica sunt æqualia.

Secundo dicatur E tota superficies Ellipseos orbitæ Lunaris, hæc superficies E erit ad aream SQP ut tempus Periodicum M ad tempus quo arcus PQ describeretur, quod erit ergo $\frac{SQP \times M}{E}$ valor autem areæ SPQ est $\frac{QT \times SP}{2}$, sed ut r ad du ita SQ sive SP (x) ad QT, est ergo $QT = \frac{x\,du}{r}$ & $\frac{QT \times SP}{2} = \frac{xx\,du}{2r}$ hinc tempus quo Luna in propriâ orbitâ citra Solis actionem describeret arcum QP est $\frac{M\,x\,x\,du}{2r.E}$. Hoc autem tempus erit ad illud quo describeretur similis arcus in orbitâ in quam Luna per actionem Solis defertur ut quadrata radiorum seu, per (Theor. præc.) ut xx ad $xx + \frac{2\,x^5\,Y}{r^3\,V}$ ita $\frac{M\,x\,x\,du}{2r.E}$ ad $\frac{M\,du}{2r.E} \times xx + \frac{2\,x^5\,Y}{r^3\,V}$, sive cùm semi-axis minor orbitæ Lunaris dicatur q & area Ellipseos E sit ideo $\frac{1}{2}\,qc$, Tempus quo arcus du describi videbitur à Lunâ translatâ per actionem Solis in aliam orbitam fiet $\frac{M\,du}{c} \times \frac{xx}{qr} + \frac{2\,x^5\,Y}{q\,r^4\,V.} + \&c.$

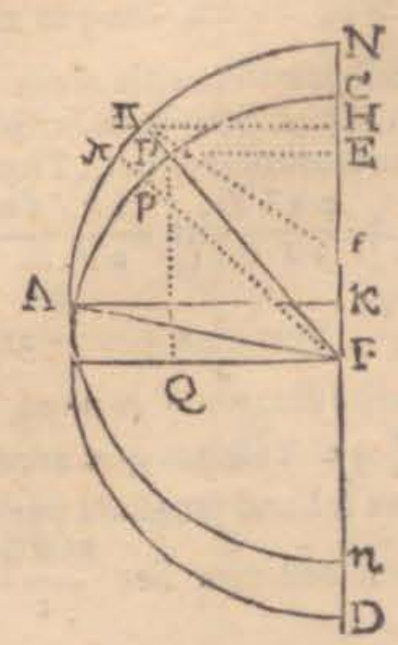
Cor. 1. Ex ipsâ demonstratione liquet quod tempus quo citra Solis actionem describeretur area SPQ foret $\frac{M\,du}{c} \times \frac{xx}{qr}$, & discrepantiæ illius quantitatis à motu medio in æquatione Lunæ, quæ dicitur soluta, continentur: excessus vero (vel defectus si vis Y fiat negativa) $\frac{M\,du}{c} \times \frac{2\,x^5\,Y}{q\,r^4\,V}$ per Solis actionem genitus novam motus medii perturbationem producit de quâ hic agendum; Ergo, siquidem per medium motum tempore $\frac{M\,du}{c}$ arcus du describ-tus fuisset, tempore hujus excessus $\frac{M\,du}{c} \times \frac{2\,x^5\,Y}{q\,r^4\,V}$ arcus $\frac{2\,x^5\,Y\,du}{q\,r^4\,V}$ describi potuisset, eâque quantitate graduum tardatur medius motus Lunæ propter actionem Solis secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitam.

Cor. 2. Iisdem vero ratiociniis quibus usi sumus in solutione Probl. 1. calculi præcedentis constabit, quod propter accelerationem quæ oritur per actionem Solis perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris exercitam hæc retardatio $\frac{2\,x^5\,Y\,du}{q\,r^4\,V}$ debet minui in proportione 1 ad $1 - \frac{yy}{109.73\,r^2}$ sicque evadit $\frac{2\,x^5\,Y\,du}{q\,r^4\,V} - \frac{2\,x^5\,y^2\,Y\,du}{109.73\,q\,r^6\,V}$.

LEM-

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



LEMMA I.

Ex præcedentis calculi Lemmate II. conſtat quod ſi ex puncto ϖ ducatur perpendicularis ϖ E in lineam Apſidum, & excentricitas dicatur f erit FI ſive $x = \frac{q^2 r}{r^2 \mp f \times FE}$.

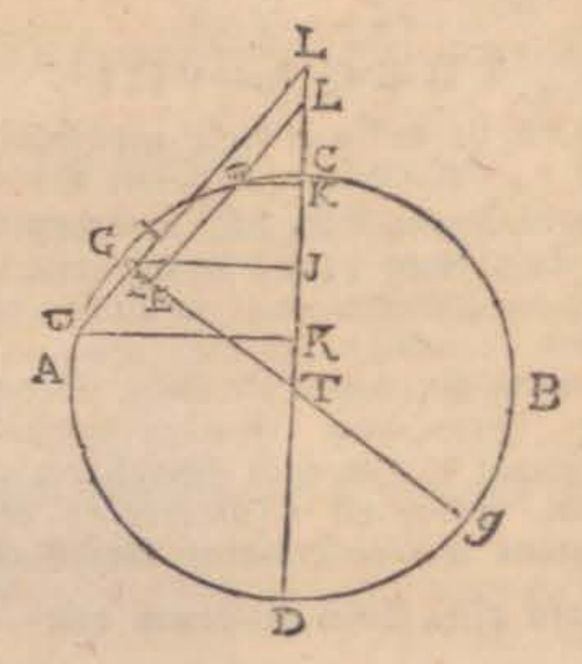
Nulla enim eſt differentia niſi in litteris, quæ diverſæ ſunt quia hic agitur de orbitâ Ellipticâ Lunæ illic de orbitâ Elliticâ Telluris, cæterum eadem eſt demonſtratio.

Hic autem valor in ſeriem redactus evadet $\frac{q^2}{r} \times 1 \pm \frac{FE \times f}{r} + \frac{FE^2 \times f^2}{r^4} \pm \frac{FE^3 \times f^3}{r^6}$ &c.

Signa ſuperiora adhibenda ſunt cum Luna diſtat ab Apogæo minus quam 90 gr. tam in conſequentia quam in antecedentia, cum Luna magis diſtat ab Apogæo quam 90 gr. ſigna inferiora ſunt adhibenda.

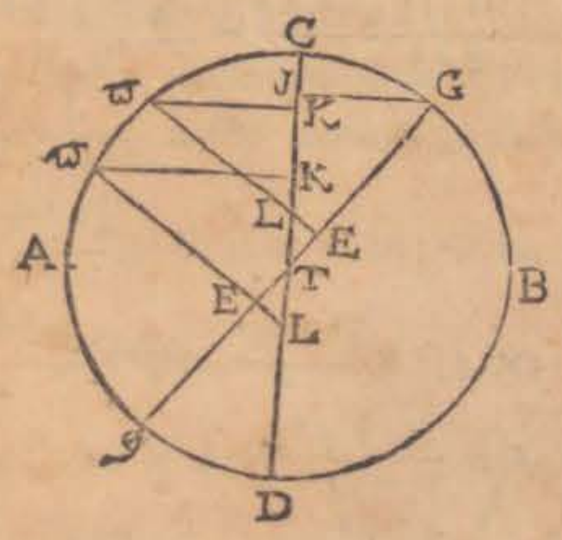
LEMMA II.

Si linea Apſidum non coincidat cum lineâ quadraturarum, Dicatur vero *m* ſinus anguli lineæ quadraturarum & lineæ Apſidum, & *n* ejus anguli coſinus; Sit *y* ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ, *z* ejus coſinus, Dico quod diſtantia Lunæ à terrâ, quæ dicitur *x* erit $\frac{q^2 rz}{r^3 \mp f \times nz + my}$ cum Luna eſt in eâdem quadraturâ cum alterutrâ Apſi, eſt verò $\frac{q^2 rz}{r^3 \mp f \times nz - my}$ cum Luna & alterutra Apſis non ſunt in eâdem quadraturâ.



Sit CADB circulus deſcriptus centro T, radio æquali mediocri diſtantiæ Lunæ à terrâ quæ dicitur *r*. Sit GTg linea Apſidum, CTD linea quadraturarum, GI ſinus anguli lineæ quadraturarum & lineæ apſidum qui dicitur *m*, TI ejus coſinus qui dicitur *n*, ϖ punctum circuli CADB quod reſpondet vero loco Lunæ in peripheria ſuæ orbitæ, quod ſumitur vel ultra vel citra apſidem, ϖ K ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ qui dicitur *y*, TK ejus coſinus qui dicitur *z*, Ducatur ex ϖ in lineam apſidum perpendicularis ϖ E, quæ producatur donec ſecet lineam quadraturarum in L, Triangulum TIG eſt ſimile Triangulo TEL (ob angulos rectos E & I & angulum communem T); Triangulum TEL eſt ſimile Triangulo ϖ KL (ob angulos rectos E & K & angulum communem L; Hinc eſt TI (*n*) : IG (*m*) :: ϖ K (*y*) : KL $= \frac{my}{n}$; Hinc in iſto caſu TL = TK + KL $= z + \frac{my}{n}$, ſed ex ſimilitudine Triang. TIG & TEL eſt TG (*r*) : TI (*n*) :: TL $(z + \frac{my}{n})$; TE = $\frac{nz + my}{r}$, ſubſtituto ergo

go hoc valore in valore x Lemmate superiori reperto fit $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz + my}$. Q. E. 1°. O.



Si ϖ & apsis alterutra non sint in eadem quadratura, & 1°. si tamen ϖ non distet 90 gr. à proxima apside, similia erunt ut prius Triang. TJG, TEL, ϖKL, unde erit $KL = \frac{my}{n}$, sed erit $TL = TK - KL$ sive $z - \frac{my}{y}$, unde fiet $TE = \frac{nz - my}{r}$ ideoque erit $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$; Sed si ϖ distet à linea apsidum plusquam 90 gradibus erit $TL = KL - TK$ sive, $-TK + KL$, ideoque TE fiet $\frac{-nz + my}{r}$, sed cum in eo casu signum anceps litteræ f mutari debeat, statuatur non mutari illud signum litteræ f dum Luna est in eâdem quadraturâ donec in aliam quadraturam transeat, quamvis magis quam 90 gradibus ab apside discedat, mutari debebit ut fiat æquipollentia signum quantitatis $\frac{-nz+my}{r}$, quæ itaque evadet ut prius $\frac{nz - my}{r}$ ideoque fiet $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$ quotiescumque ϖ & apsis alterutra non erunt in eâdem quadraturâ, determinando signum anceps $\mp f$ ex apside cui vicinior fuit Luna cum eam quadraturam describere incepit. Q. E. 2°. Oct.

Cor. Hic valor x in seriem redactus evadit $\frac{q^2}{r} \times 1 \pm \frac{f \times nz \pm my}{r} \frac{}{r^2} + \frac{f^2 \times nz \pm my^2}{r^2} \frac{}{r^4} \pm \frac{f^3 \times nz \pm my^3}{r^3} \frac{}{r^6}$ signa superiora litteræ f sunt adhibenda cum initium quadraturæ quam describit Luna minus distat ab Apogæo quam 90 gr. tam in consequentia quam in antecedentia, si vero magis distet ab Apogæo quam 90 gr. signa inferiora sunt adhibenda.

Signa superiora quantitatis my sunt adhibenda cum & Luna & apsis alterutra sunt in eâdem quadraturâ, signa inferiora cum Luna & apsis sunt in diversis quadraturis.

PROBL. I.

Dato Sinu & Cosinu anguli quem faciunt linea Apsidum & linea quadraturarum invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitam, tempore quo Luna orbitam suam percurrit.

Supponitur lineam Apsidum & Solem immotos manere durante illâ revolutione Lunæ; Quo posito cum retardationis Lunæ elementum inventum fuerit (Cor. 2. Theor. 8.) $\frac{2a^5 Y du}{qr^4 V} - \frac{2x^5 y^2 Y du}{109.73 q r^6 V}$, loco $\frac{2rYdu}{qV}$ ponatur ejus valor $\frac{2rFdu}{Vaq} \times \frac{3y^2}{r} - r$ & loco $\frac{x}{r}$ valor ejus $\frac{q^2}{r^2} \times 1 \pm f \times \frac{nz \pm my}{r^2}$ &c. qui ad quintam dignitatem evehatur, dicatur A terminus $nz \pm my$, ea quinta dignitas erit $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times 1 \pm \frac{5fA}{r^3} + \frac{15 f^2 A^2}{r^6} \pm \frac{35 f^3 A^3}{r^8}$; Verum observari potest, quod siquidem totidem sunt quadrantes in quibus f positivum aut negativum sumi debet, & tota revolutio Lunæ spectetur, hi termini ancipites omitti possunt, vel ab initio, hæc quinta dignitas sumi debet quasi foret $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times 1 + \frac{15 f^2 A^2}{r^2}$

In his pagellis exponentem z loco exponentis 2 exaratum esse facilè percipiet eruditus Lector, quod monemus ne illo Typographico mendo turbetur horum intellectio.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ducatur in $1-\frac{yy}{109.73r^2}$ fiet $\frac{q^{10}}{109.73r^{12}}\times 109.73r^2-y^2+15\times 109.73\frac{f^2A^2}{r^4}-\frac{15f^2y^2A^2}{r^6}$,

1,2 1.

Denique ducatur in $\frac{2Fdu}{Vaq}\times 3y^2-r^2$ fit $\frac{2Fq^9du}{109.73\,V\,ar^{12}}\times 329.19r^2y^2-3y^4-109.73r^4+r^2y^2+\frac{45\times 109.73f^2y^2A^2}{r^4}-\frac{35\times 109.73f^2r^2A^2}{r^4}-\frac{45f^2y^4A^2}{r^6}+\frac{15f^2y^2A^2}{r^4}$ sive $\frac{2Fq^5du}{109.73\,Var^{12}}\times 330.19r^2y^2-3y^4-109.73r^4+\frac{330.19\times 15f^2y^2A^2}{r^4}-\frac{15\times 109.73f^2r^2A^2}{r^4}-\frac{45f^2y^4A^2}{r^6}$. Loco A^2 ſubſtituatur $n^2z^2+m^2y^2$, omiſſo termino $\pm 2mnzy$ quia quando tota revolutio Lunæ aſſumitur duo ſunt quadrantes in quibus Luna eſt cum apſide, duo vero in quibus Luna cum neutrâ apſide occurrit, fit tandem totum Elementum $\frac{2Fq^9du}{109\,73\,V\,ar^{12}}\times 330.19r^2y^2-3y^4-109.73r^4+\frac{330.19\times 15f^2n^2z^2y^2}{r^4}+\frac{330.19\times 15f^2m^2y^4}{r^4}-\frac{109.73\times 15f^2r^2n^2z^2}{r^4}-\frac{109.37\times 15f^2r^2m^2y^2}{r^4}-\frac{45f^2n^2z^2y^4}{r^6}-\frac{45f^2m^2y^6}{r^6}$;

Cujus Integralis ſecundum Lemma I. calculi præcedentis pro quadrante ſit $\frac{2Fq^9}{109.73Var}\times\frac{330.19r^4c}{8}-\frac{3\times r^4c}{4\times 8}-\frac{109.73r^4c}{4}+\frac{330.19\times 15f^2n^2\cdot 4c}{8r^4}-\frac{330.9\times 15f^2n^2\times\frac{3}{4}r^4c}{8r^4}+\frac{330.19\times 15f^2m^2\times\frac{3}{4}r^4c}{8r^4}-\frac{109.73\times 15f^2n^2r^4c}{4r^4}+\frac{109.73\times 15f^2n^2r^4c}{8r^4}-\frac{109.73\times 15f^2m^2r^4c}{8r^4}-\frac{45f^2n^2\times\frac{3}{4}r^4c}{8r^4}+\frac{45f^2n^2\times\frac{3\times 5}{4\times 6}r^4c}{8r^4}-\frac{45f^2m^2\times\frac{3\times 5}{4\times 6}r^4c}{8r^4}$; Quod reductum efficit $\frac{2Fq^9c}{109.73\,V\,ar^{\frac{1}{2}}}\times\frac{108.48}{8}+\frac{330.19\times 15\times f^2\times\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}m^2}{8r^4}-\frac{109.73\times 15f^2n^2+m^2}{8r^4}-\frac{45f^2\times\frac{1}{8}n^2+\frac{5}{8}m^2}{8r^4}$ quod quadruplicatum efficit $\frac{Fq^9c}{109.73\,V\,ar^{\frac{1}{2}}}\times 108.48+330.19\times 15f^2\times\frac{\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}m^2}{r^4}-109.73\times 15f^2\times\frac{n^2+m^2}{r^4}-45f^2\times\frac{\frac{1}{8}n^2+\frac{5}{8}m^2}{r^4}$ ſive tandem $\frac{Fq^9c}{109.73\,V\,ar^{\frac{1}{2}}}\times 108.48+136.0375\times 15\frac{f^2m^2}{r^4}-27.5575\times\frac{15f^2n^2}{r^4}$.

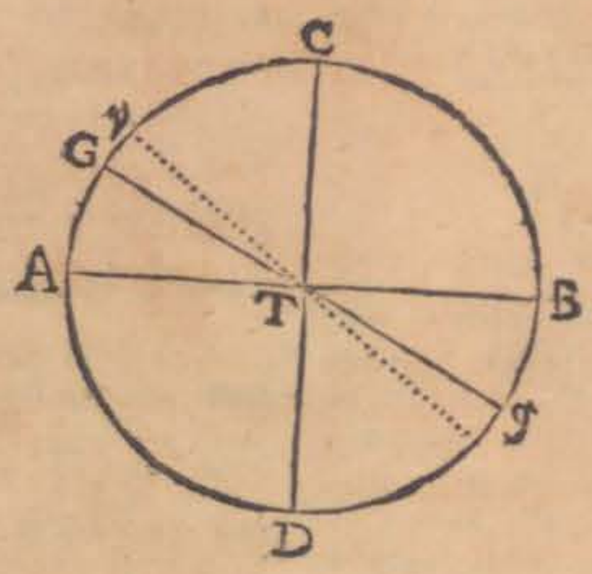
Cor. Si Sol & Apſis immoti non fingantur, ſed ſupponatur eos pari paſſu moveri res eodem redibit, ſi modo hæc revolutio quâ durante naſcitur hæc tardatio cenſeatur æqualis menſi Synodico; Quamvis autem Apſis reverâ non ſequatur motum Solis, ſed longe lentiùs procedat, imo in iſto calculo immota cenſeri debeat, non tamen inde oritur error ullius momenti tam propter Eccentricitatem Orbitæ Lunaris quæ magna non eſt, quam propterea quod maxima pars hujus tardationis pendeat ex poſitione Lunæ reſpectu Solis, & minima ſit ea pars hujus tardationis quæ per ſitum Lunæ reſpectu Apſidum determinatur.

Cor. 2. Ex his terminis $\frac{Fq^9c}{109.73\,V\,ar^{\frac{1}{2}}}\times 108.48+136.0375\times 15\frac{f^2m^2}{r^4}-27.5575\times 15\frac{f^2n^2}{r^4}$ liquet quod ſi linea Apſidum cum linea quadraturarum conſentiat, quo caſu ſinus m anguli quem facit linea Apſidum cum linea quadraturarum evaneſcit, & ejus Coſinus n fit r, hæc tardatio fit omnium minima, nempe $\frac{Fq^9c}{109.73.V\,ar.}\times 108.48-27.5575\times 15\frac{f^2}{r^3}$.

E con-

E contra, si linea Apsidum sit in Syzygiis ita ut m fiat r, & n evanescat, hæc expressio fit omnium maxima nempe $\frac{Fq^9c}{109.73.Var^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15\frac{f^2}{r^2}$; Ideo mensis Synodicus fit minimus cum Apsides sunt in Quadraturis, longissimus vero cum Apsides sunt in Syzygiis.

Cor. 3. Hinc oritur altera æquatio Solaris Lunæ quæ secunda dicitur & pendet ex situ Apsidum, sive Apogæi respectu Solis.



PROBL. II.

Posito Solem in mediocri suâ distantiâ versari & lineam Apsidum omnes possibiles positiones cum lineâ Syzygiarum successive obtinere, Invenire tardationem mediocrem Lunæ in singulâ ejus revolutione synodicâ.

Sit linea Apsidum, in ipsâ directione syzygiarum A & B, & dum Sol ab Apogæo Lunæ in consequentia movetur, & Apogæum revera est immotum, fingatur Solem immotum stare & ipsum Apogæum à Sole in antecedentia regredi; Moveatur Apogæum ex G in γ per arcum quamminimum $G\gamma$ qui dicatur du tardatio Lunæ quæ fiet dum describitur $G\gamma$ erit ad totam tardationem quæ fieret si apsis foret immota in G & quæ per Probl. præcedens inveniretur, ut tempus quo Apsis describit arcum $G\gamma$ ad totum mensem synodicum: Dicatur ergo A tempus quo Apsidum revolutio Solis respectu absolveretur, quod in hac hypothesi est ipse annus sidereus, erit ut tota circumferentia c ad du, ita A ad tempus quo Apsis arcum du describet quod erit $\frac{A\,du}{c}$. Præterea ut mensis synodicus S ad hoc tempus $\frac{A\,du}{c}$, Ita tardatio mense synodico facta quæ est $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8} \times 108.43 + 136.0375 \times 15\frac{f^2m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15\frac{f^2n^2}{r^4}$ ad tardationem quæ fiet tempore $\frac{A\,du}{c}$ quæ erit itaque $\frac{AFq^9du}{S \times 109.73 . V.ar^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15\frac{f^2m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15\frac{f^2n^2}{r^4}$ (in quâ expressione m respondet quantitati y quæ in Lemmate I. præceden-

DE MUNDI SYSTEMATE.

tis calculi adhibetur, & n respondet quantitati z) & integretur pro quadrante juxta Coroll. 4. ejus Lemmatis habebitur

121. $\frac{A.F.q^9}{S\times 109.73.V.ar^8} \times \frac{108.48c}{4} + \frac{136\,0375\times 15f^2r^2c}{4r^4} - \frac{163.595\times 15f^2r^2c}{8r^4}$;

Quadruplicetur vero pro toto circulo fiet $\frac{AFq^9c}{S\times 109.73.Var^8} \times 108.48 + \frac{813.6f^2}{r^2}$; Denique ut totum tempus A ad tempus synodicum S ita hæc tardatio ad tardationem menſe synodico factam quæ erit ergo $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8} \times 108.48 + \frac{813.6f^2}{r^2}$.

PROBL. III.

Positâ excentricitate orbitæ Telluris circa Solem, & orbitæ Lunæ circa Terram invenire tardationem Lunæ 1°. dum Terra describit arcum quamminimum datum, 2°. Dum describit annuam suam orbitam, 3°. durante menſe synodico, 4°. dum Luna ab Aphelio suo ad mediocrem suam à Sole distantiam pervenit.

Sit a mediocris distantia Telluris à Sole, x alia quævis distantia, si F sit vis Solis in distantia a erit $\frac{aaF}{xx}$ ejus vis in distantia x; Ergo in calculo Probl. mox præcedentis quo tardationem menſe synodico factam invenimus, x loco a ponatur & $\frac{aaF}{xx}$ loco F evadet tardatio $\frac{a^2Fq^9c}{109.73\,Vx^3r^8} \times 108.48 + \frac{813.6f^2}{r^2}$, & si A sit annus sidereus, M menſis Periodicus Lunæ citra omnem Solis actionem, est $\frac{F}{V} = \frac{M^2a}{A^2r}$ (per Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) hinc ista tardatio evadit $\frac{M^2a^3q^9c}{109.73A^2x^3r^9} \times 108.48 + \frac{813.6f^2}{r^2}$.

Sit b semi-axis minor Ellipseos quam Terra describit circa Solem, e excentricitas, k Peripheria radio a descripta, ideoque sit $\frac{1}{2}bk$ area tota Ellipseos quam Terra describit circa Solem, sit du motus angularis terræ circa Solem quam minimo tempore, area illi angulari motui respondens erit $\frac{xxdu}{2a}$ (ut constat ex calculo præcedente) ideoque ut Ellipsis tota $\frac{1}{2}bk$ ad hanc aream $\frac{xxdu}{2a}$, ita annus A, ad tempus quo arcus du describitur qui erit ergo $\frac{Axxdu}{abk}$, & ut menſis synodicus Sad id tempus ita tota tardatio ad tardationem hoc tempore quæ factam erit $\frac{AM^2a^3x^2q^9cdu}{109.73.S.A^2x^3abkr^9} \times 108.48 + \frac{813.6f^2}{r^2}$ sive $\frac{M^2a^2q^9cdu}{109.73\,S\,Ax.bkr^9} \times 108.48 + \frac{813.6f^2}{r^2}$ sed $\frac{a}{x}$ est $\frac{a^2 \mp ez}{b^2}$ per Lem. 2. calculi præcedentis, hinc istud elementum evadit $\frac{M^2aq^9c\times 108.48 + 813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A.b^3k.r^9} \times a^2du \mp ezdu$ cujus Integralis est $\frac{M^2aq^9c\times 108.48 + 813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A.b^3.kr^9} \times a^2u \mp aey$, quæ semi-circulo absoluto fit $\frac{M^2a^3q^9c\times 108.48 + 813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73\,S.A.b^3kr^9} \times \frac{1}{2}k$; cujus duplum est retardatio anno durante facta, estque $\frac{M^2a^3q^9c\times 108.48 + 813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A.b^3r^9}$ hinc ut A ad S ita hæc tardatio ad tardationem menſe synodico factam quæ erit ergo $\frac{M^2a^3q^9c}{A^3b^3r^9} \times \frac{108.48 + 813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$.

Denique, retardatio quæ convenit mediocri distantiæ à Sole, in quâ u est $\frac{1}{4}k - e$, & est $y=b$, est $\frac{M^2aq^9c\times 108.48 + 813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73\,S.A.b^3r^3} \times \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2e}{k} - \frac{abe}{k}$.

PRO-

PROBL. IV.

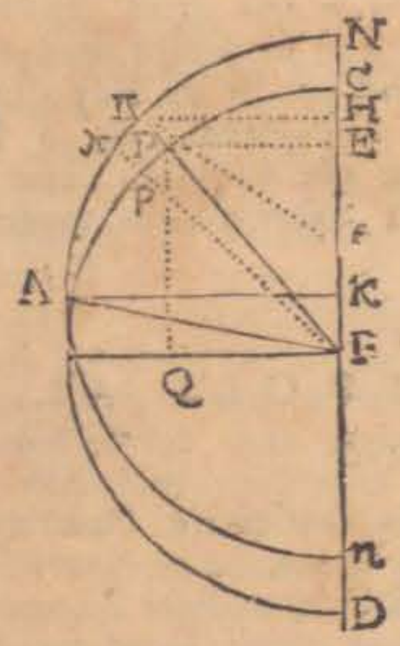
Dato tempore Synodico apparenti Lunæ invenire tempus Periodicum M quod obſervaretur ſi omnino abeſſet vis Solis.

Siquidem tempore M deſcriberetur arcus c, tempore S deſcriberetur $\frac{Sc}{M}$, tempus autem Periodicum quod tempori Synodico S reſpondet eſt $\frac{AS}{A+S}$, ideoque cum illo tempore revera deſcribatur arcus c, tempore Synodico S deſcriberetur $\frac{A+S}{A}c$, hinc retardatio quæ fit menſe Synodico eſt $\frac{Sc}{M} - \frac{Ac+Sc}{A}$ ſive $\frac{ASc-AMc-MSc}{AM}$; quæ inventa fuit $\frac{M^2a^3q^9c}{A^2b^2r^9} \times \frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ unde fit æquatio ex quâ valor quantitatis M obtinebitur, fiat ut in præcedenti calculo $S=EA$ & $M=XA$, æquatio evadit $E=X+EX+X^3 \times \frac{a^3q^9}{b^3r^9} \times \frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$.

Sumatur excentricitas mediocris orbitæ Lunaris quam .055505 r facit Newtonus in hoc Scholio, unde is terminus $\frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ evadit 1.0110782 eſt $\frac{q^9}{r^9}=9864$, eſt $\frac{a^3}{b^3}=1$. proximè, itaque æquatio eſt $E=X \times \overline{1+E}+.9972X^3$, loco E ſubſtituatur .0804896, loco X ſubſtituatur .0744 + R & æquatio evadit .08084896 = .08082583 + 1.09740854 R unde habetur .00002313 = 1.09740854 R unde obtinetur R = .0000210, & M = .0744210 A; fere ut in præcedenti calculo.

PROBLEMA V.

Invenire æquationem motus medii Lunaris quæ pendet ex Solis actione & quæ adhibenda eſt cum Terra eſt in mediocri ſuâ diſtantiâ à Sole.



Hoc Problema ſolvitur ut in præcedenti calculo, itaque ut tota Ellipſis cujus area eſt $\frac{1}{2}bk$ ad aream FNA (ſive $\frac{bk}{8}+\frac{be}{2}$.) ita tardatio annua quæ inventa eſt $\frac{M^2a^3q^9c \times 108.48+813.6\times\frac{f^2}{r^2}}{S.A.b^3r^9\times 109.73}$, ad tardationem quæ in motu medio continetur & quæ eſt ideo $\frac{M^2aq^9c \times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{S.A\,b^3r^9\times 109.73} \times \frac{1}{4}a^2+\frac{a^2e}{k}$, cujus exceſſus ſupra retardationem veram Probl. III. inventam eſt $\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{S.A\,b^3r^9\times 109.73} \times \frac{2a^2e+abe}{k}$ ſive ſumendo ab pro a^2 fit $\frac{M^2a^3q^9c}{S.A.b^3r^9} \times \frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73} \times \frac{3e}{k} = \frac{.9972M^2}{S.A} \times \frac{3ee}{k} - \frac{abe}{k}$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

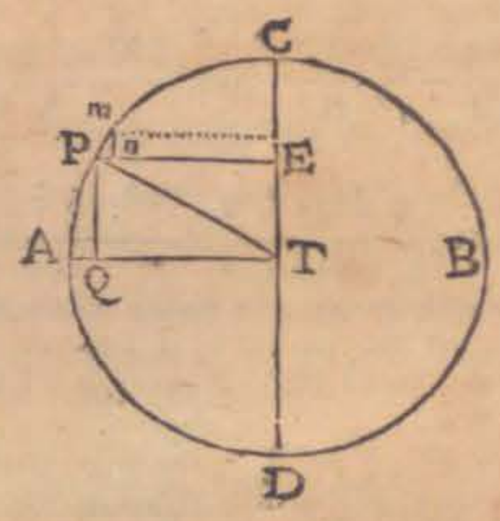
221.

(per Prob. IV.) est $\frac{3cc}{k}$ = 2gr. 9005, est $\frac{M^2}{SA}$ = .0685042 quod ductum in .9972 efficit .0683123 88, quod ductum in 2gr. 9005, efficit 0°.1982 quod ductum per 60′ bis efficit 11″. 52″ &c. sed in priori calculo erat 11′. 47″, itaque medium inter hos duos valores est 11′. 49″, ut invenit Newtonus; cum enim Orbitæ Lunaris figura sit admodum variabilis, & incerta sit excentricitas quæ ipsi citra actionem Solis conveniret, non immerito sumitur medium inter id quod prodit ex Hypothesi orbem Lunæ esse circularem, & in Hypothesi orbem Lunæ esse Ellipsim, cujus excentricitas est ea excentricitas mediocris quæ observatur.

PROBL. VI.

Positâ Excentricitate Orbitæ Lunaris, Posito vero Solem in mediocri suâ distantiâ à Terrâ semper stare, invenire æquationem motus medii Lunæ pendentem ex vario situ Apogæi Lunæ respectu Solis.

Inventum erat in Problemate 1°. quod tota tardatio Lunæ, durante mense Periodico, in mediocri distantia Terræ à Sole & in data Apsidis ad Quadraturam positione erat $\frac{F q^9 c}{109.73 Var^8} \times 107.48 + \frac{136.035 \times 15 f^2 m^2}{r^4} - \frac{27.5575 \cdot 15 f^2 n^2}{r^4}$, Posito sinum anguli lineæ Apsidum cum linea quadraturarum esse m, Cosinum vero anguli esse n, sive quod eodem redit sinum distantiæ Apsidis à Syzygia esse n, ejus Cosinum esse m; Præterea inventum erat quod si linea Apsidum omnes possibiles positiones cum linea Syzygiarum assumat, tota tardatio quæ eo tempore fit est $\frac{AF q^9 c}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}$; Hinc si linea apsidum discedat à Syzygia arcu u, & fingatur retardationem esse proportionaliter tempori distributam, fiet ut tota Peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio facta dum Peripheria describitur quæ est $\frac{AF q^9 c}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{813. f^2}{r^2}$ ad tardationem mediam huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{AF q^9 u}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}$, sed cum Elementum tardationis (eodem Probl. 2°.) repertum fit $\frac{AF q^9 du}{S. 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{136.0375 \times 15 f^2 m^2 - 27.5575 \times 15 f^2 n^2}{r^4}$. Integralis ejus sumatur per Lemma I. calculi præcedentis, loco m ponendo x & loco n ponendo y, & Integralis erit



$\frac{AF q^9}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48u + \frac{136.0375 \times 15 f^2 \times APET - 27.5575 \times 15 f^2 APQ}{r^3}$

quæ quantitas si subtrahatur ex præcedenti, æquatio in data distantia u Apogæi à Sole in Antecedentia, vel Solis ab Apogæo in consequentia erit $\frac{AF q^9 f^2}{S \times 109.73 Var^8} \times 813.6ru - 136.0375 \times 15 APET + 27.5575 \times 15 APQ$ est autem APET = APQ + 2PQT, est ru = 2APT = 2APQ + 2PQT, quibus valoribus substitutis, divisoque primo termino 813.6 per 15 æquatio evadit $\frac{15 AF q^9 f^2}{109.73 \times S. V. ar^8} \times 108'.48 APQ + 108.48 PQT - 136.0375 APQ - 272.075 PQT + 27.5575 APQ$, & reductione facta fit $\frac{15 A \times F q^9 f^2}{109.73 \times S. V. ar^8} \times -163.595 PQT$.

Hæc æquatio negativa est cum Apogæum

gæum Lunæ ex A in C à Syzygiâ ad quadraturam procedit, in Quadratura evanescit, nam PQT in Quadratura fit zero: Si Apsis ex C in syzygiam B pergat, fit APET=APQ−2PQT, est ru=2APT=2AQP−2PQT, quibus valoribus in æquatione substitutis quantitas −163.5951QT ex negativâ positiva fit, rursus fit negativa cum ex syzygiâ B ad quadraturam D Apogæum pergit, positiva iterum ex D in A; evanescit vero in omnibus punctis syzygiarum & quadraturarum.

Cor. 1. Ex Trigonometriâ notum est quod sinus arcus dupli alterius arcus est duplum facti sinus arcus simpli per ejus Cosinum divisum per Radium; ideoque constat quod sinus arcus dupli alterius arcus est semper ut factum arcus simpli per ipsius Cosinum; sed areæ QPT duplum, nempe area TQPE, est ipsum factum sinus QP arcus AP per ejus Cosinum TQ, ergo area QPT, est ut sinus arcus dupli arcus AP, Æquatio autem inventa est ubique ut area illa PQT siquidem constat ex facto illius areæ per constantes ductæ; Ergo æquatio proposita est ubique ut sinus arcus dupli Distantiæ Apogæi Lunæ à Syzygiâ.

Cor. 2. Hinc etiam sequitur illam æquationem evanescere in syzygiis & Quadraturis, iis enim in punctis Luna distat à syzygiâ vel 90gr vel 180gr. vel 270 vel 360, quorum arcuum duplum est 180, 360, 540, 720, quorum arcuum sinus sunt zero.

Cor. 3. Hinc etiam sequitur hanc æquationem esse maximam in Octantibus tunc enim cum Apogæum distet à syzygia vel 45. gr. vel 135 vel 225 vel 315 quorum dupli sunt, 90 gr 270, 450, 630 &c. & horum arcuum sinus sit Radius qui omnium sinuum maximus est sequitur æquationem istis finibus proportionatam hic loci esse maximam.

Cor. 4. In Octantibus hæc area PQT est $\frac{1}{2}r^2$, ut notum est, hinc ista Æquatio evadit $\frac{40.449375 \times 15AF\,q^9 f^2}{109.73 S. V \times a r^9}$, loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2 a}{A^2 r}$ est $f^2 = .0030305 r^2$; est $\frac{q^9}{r^9} = .9864$. tota quantitas fit $\frac{40.449375 \times 15 \times .0029892 r \times AM^2}{109.73.S.A^2} =$ sed inventum est quod est $\frac{M^2}{SA} = .0685042$, & est $\frac{40.449375 \times 15}{109.73} = 5.52939$, hinc tota æquatio est $.00112974561r$, sed r est æqualis arcui 57 gr. 29. &c. hinc æquatio est graduum .063723125 &c. quod ductum per 60 efficit $3'.82338$, & .82338 ductum per 60, efficit $49''.4$, Ita ut tota æquatio sit $3'.49''$. &c.

Cor. 5. Newtonus non tradit quantitatem hujus Æquationis qualem illam ex calculis invenit, sed ait ille, *Hæc æquatio quam semestrem vocabo in Octantibus Apogæi quando maxima est ascendit ad* $3'\,45''$ *circiter quantum ex Phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis distantia à Terra.* Scilicet in Hypothesibus nostris Apsidem & terram immotam assumpsimus, cum id revera non sit, ideoque, si concedatur nos attigisse verum Newtoni calculum, æquatio per calculum inventa non plane eadem erit cum vera, parum tamen admodum ab illa differet; cæterum omnes æquationis veræ Leges ex iis quæ per istum calculum obtinentur merito deducentur, & eæ ipsæ sunt quæ in præcedentibus Coroll. sunt constitutæ, sed absoluta æquationis quantitas ex observatione non ex calculo est petenda, differunt autem calculus & rei veritas $3''$ duntaxat quod Theoriæ præstantiam sufficienter probat.

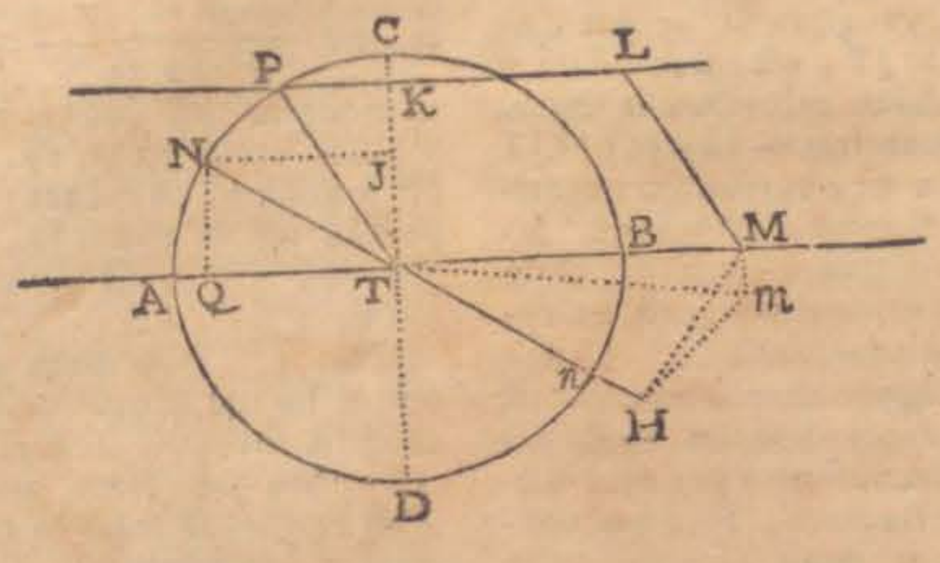
De Æquatione motus Lunaris semestri secunda quæ pendet ex positione lineæ Nodorum respectu lineæ Syzygiarum.

Ex inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Ecliptiæ fit ut pars actionis Solis consumatur in ipso plano orbitæ Lunaris ad Planum Ecliptiæ admovendo, sicque tota non occupetur, ut hactenus suppositum fuerat in distrahendo Lunam à terræ centro aut illam ad id attrahendo, aut alio modo Lunam in proprio ejus Plano accelerando aut retardando. Hinc æquationes prius inventæ novâ correctione indigent.

PRO-

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



PROBL. I.

Invenire partem actionis Solis quæ Lunam ſecundum radium ejus orbitæ trahit, ſublatâ eâ parte actionis Solis quæ conſumitur in ipſo plano orbitæ Lunaris dimovendo.

Sit A T B linea Syzygiarum in Ecliptícæ plano; N T n linea nodorum; P locus Lunæ in propria orbita; P L, L M directiones virium in quas reſolvitur vis Solis, quarum P L eſt parallela T M & L M Parallela radio T P.

Ducatur ex M in planum orbitæ Lunaris productum perpendicularis M m, ducatur in plano orbitæ Lunaris linea T m, & ex M & m ducantur perpendiculares M H, m H in lineam nodorum N n productam.

Radius T P dicatur r ut prius, Diſtantiæ Lunæ à Quadratura ſinus P K dicatur y, Coſinus T K dicatur z; Diſtantiæ nodorum à Syzygia ſinus N Q ſit n, Coſinus T Q ſit m; Denique ſinus Inclinationis orbitæ Lunaris ad Eclipticam dicatur l, exiſtente r radio, & ea inclinatio conſtans ſupponatur, quæ ſecundum Keplerum, De la Hirium &c. eſt ubi maxima, graduum 5. 19. 30.

Ex demonſtratis eſt T M $= 3y$; & propter ſimilitudinem Triangulorum N T Q, M T H, eſt N T (r) : M T $(3y)$ :: N Q (n) : M H $\left(\frac{3yn}{r}\right)$, & quia angulus M H m eſt angulus inclinationis orbitæ Lunaris ad Eclipticam, ut $r : l ::$ M H $\left(\frac{3yn}{r}\right)$: M m $= \frac{3ynl}{r^2}$; Denique ut eſt T M $(3y)$ ad M m $\left(\frac{3ynl}{r^2}\right)$ ſic eſt r ad ſinum anguli M T m qui erit ergo $\frac{nl}{r}$, cujuſque Coſinus erit $\sqrt{r^2 - \frac{n^2l^2}{r^2}}$ ſive $r - \frac{n^2l^2}{2r^3}$.

Jam autem tota vis T M eſt ad eam ejus partem quæ agit ſecundum planum orbitæ Lunaris ut radius ad Coſinum anguli M T m ſive ut r ad $r - \frac{n^2l^2}{2r^3}$ & in eâdem proportione minuuntur partes in quas reſolvitur ea vis, ergo cum portio totius vis T M ſecundum directionem radii exercita (ſi Planum orbitæ Lunaris & Eclipticæ idem fuiſſent) ſit $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r}$ ex ſuperiùs demonſtratis; Pars reſidua propter inclinationem Plani erit $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - \frac{3y^2}{2r^5}\sqrt{a^2l^2}$;

Vis autem L M quæ eſt $\frac{F}{a}r$ & negativè ſumitur, nullam diminutionem patitur ex hâc plani inclinatione, quippe P T eſt in ipſâ orbitâ Lunari, ideoque ejus planum quomodocumque ſitum non dimovet; Hinc ergo pars actionis Solis quæ Lunam ſecundum radium ejus orbitæ trahit, ſublatâ

* tâ eâ parte quæ conſumitur in plano orbitæ dimovendo eſt $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$.

PROBL. II.

Dato ſinu anguli quem faciunt lineæ Nodorum & Syzygiarum invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis ſecundùm directionem radii orbitæ Lunaris exercitam, ſemotâ eâ ejus actionis parte quæ in dimovendo plano orbitæ Lunaris exercetur.

Elementum retardationis Lunæ (Probl. 1. calculi prioris) inventum erat $\frac{2Ydu}{V}$, loco Y ponatur ejus valor Probl. præcedente inventus $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$; ſi, quia jam actum eſt de retardatione per vim $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ productâ, adhibeatur ſolummodo quantitas $\frac{F}{a} \times -\frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$ (quæ cum negativa ſit ex retardatione fit acceleratio) hinc, accelerationis ex hâc cauſâ pendentis Elementum eſt $\frac{2Fdu}{Va} \times \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$, cujus Integralis pro quadrante eſt $\frac{Fn^2l^2}{Var^5} \times \frac{3r^2c}{8}$ & quadruplicatum pro revolutione integrâ fit $\frac{3Fn^2l^2c}{2Var^3}$. Unde liquet quod cum linea nodorum eſt in ipſâ lineâ Syzygiarum quo caſu n evaneſcit, tunc motus Lunæ eſt ipſe ille qui præcedentibus Theoriis fuit inventus, quando vero linea nodorum eſt in lineâ ſyzygiarum tunc eſt $n = r$, & eſt acceleratio $\frac{2Fl^2c}{2Var}$ quæ tum maxima eſt.

PROBL. III.

Poſito Solem in mediocri ſuâ diſtantiâ verſari, & lineam Nodorum omnes poſſibiles poſitiones cum lineâ Syzygiarum ſucceſſivè obtinere, Invenire æquationem motus medii Lunæ pendentem ex vario ſitu nodorum Lunæ.

Primò ut inveniatur acceleratio mediocris quæ ex inclinatione plani Lunaris oritur, fingatur Solem immotum ſtare & lineam Nodorum ab eo recedere in Antecedentia (nodorum autem motum proprium hic omittere licet, cum in Problemate præcedente omiſſus ſit, ſic enim utraque omiſſio ſeſe compenſant.)

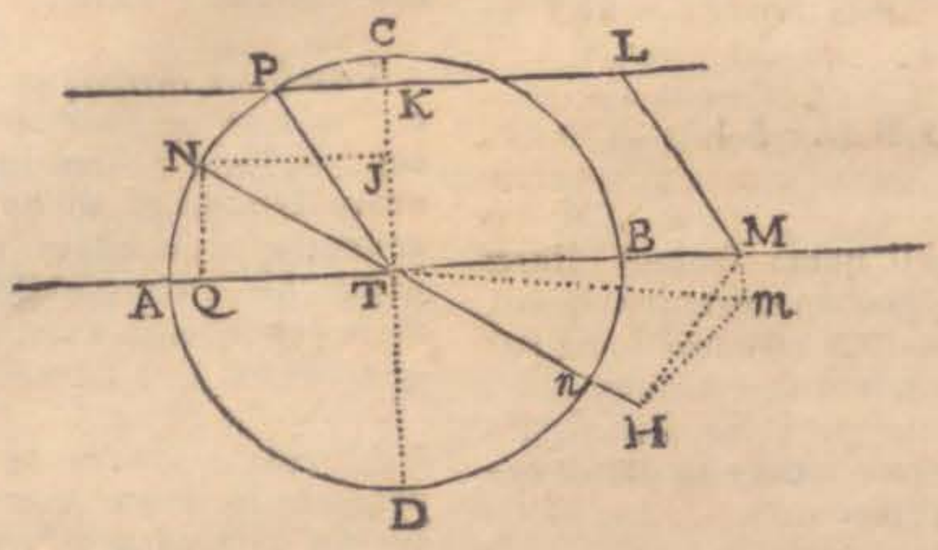
Moveatur Nodus ex N per arcum du, acceleratio Lunæ quæ fiet dum deſcribitur du erit ad accelerationem toto menſe factam, ut tempus quo Nodus deſcribit arcum du ad totum menſem, ſed tempus quo nodus deſcribit arcum du eſt $\frac{Adu}{c}$, nam ut tota Peripheria c ad arcum du ita annus ſidereus A ad tempus quo arcus du deſcribitur, quod erit ergo $\frac{Adu}{c}$, ergo ut menſis ſynodicus S, ad hoc tempus $\frac{Adu}{c}$, ita acceleratio uno menſe factâ quæ inventa eſt $\frac{3Fl^2n^2c}{2VAr^3}$ ad $\frac{3AFl^2n^2du}{2S.V.ar^3}$. Integretur pro quadrante & erit $\frac{3AFl^2r^2c}{2\times 8S.Var^3}$ quadruplicetur pro totâ revolutione fiet $\frac{3AFl^2c}{4SVar}$, & hæc erit acceleratio motus medii Lunæ propter orbitæ inclinationem.

Hinc ſi linea nodorum diſcedat à lineâ ſyzygiarum arcu u, & fingatur totam accelerationem proportionaliter tempori diſtribui, fiat ut tota Peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio $\frac{3AFl^2c}{4S.Var}$, ad accelerationem huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{3AFl^2u}{4S.V.ar}$ ſive $\frac{3AFl^2}{2S.Var^2} \times \frac{ru}{2}$. Sed Integralis elementi $\frac{3AFl^2n^2du}{2SVar^3}$ quando arcus NA eſt u, eſt $\frac{3AFl^2 \times ANQ}{2.S.V.ar^2}$ (ex Lem. I. calc 1.) hæc ergo quantitas ex præcedenti ſubſtracta dat æquationem ſive differentiam accelerationis mediæ & accelerationis

 veræ

DE MUNDI SYSTEMATE.

221.



veræ, quæ æquatio erit ergo $\frac{3AFl^2}{2SVar^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ sed $\frac{ru}{2} - ANQ$ est Trianguium NQT, & est $NQT = \frac{nm}{2} = \frac{2nm}{4}$, Hinc æquatio propoſita ſive Exceſſus acceleracionis mediæ ſuper veram eſt $\frac{3AFl^2}{8S.Var} \times \frac{2nm}{r}$, quæ eſt quantitas quâ minuendus eſt motus medius Lunæ ut ejus locus verior habeatur.

Cor. Hinc cum quantitates $\frac{3AFl^2}{8S.Var}$ ſint conſtantes & $\frac{2nm}{r}$ ſit ſinus arcus dupli diſtantiæ nodi à ſyzygiâ, æquatio eſt ubique ut ſinus arcus dupli diſtantiæ nodi à ſyzygiâ, ergo evaneſcit in ſyzygiis & Quadraturis; Maxima eſt in Octantibus, cumque ſit illic $m = n = r\sqrt{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{2nm}{r} = r$: loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2 a}{A^2 r}$, æquatio in Octantibus fit $\frac{2M^2 l^2}{8S.A.r}$, ſed cum Inclinatio ſit 5 gr. $19\frac{1}{2}'$ cujus ſinus l eſt .92811, ideoque $\frac{l^2}{r}$ eſt .00863 r, & $\frac{3l^2}{8r} = .00325$, cum vero $\frac{M^2}{S.A}$ (per Prob. V. calc. præc.) ſit. 0685, hinc æquatio evadit in Octantibus .000221 r; Denique eſt $r = 5781.29$, quod ad ſecundas reductum efficit 206264″, & ductum per .000223 efficit 45″.6, quam Newtonus 47″ per Theoriam gravitatis ſe inveniſſe profitetur.

DE MOTU APSIDUM.

Newtonus Sectione XI. Lib. I. Princ. ingenioſiſſimam excogitavit rationem motum Apſidum ad calculum revocandi, fingendo nempe vim externam Solis poſſe conferri cum vi quæ ex revolutione plani ipſius orbitæ Lunaris oriretur, ſicque inveniri curvam per motum corporis in Ellipſi mobili genitam quæ eadem foret cum eâ quæ per vis extraneæ adjunctionem naſceretur; Eidem Methodo mox inſiſtemus & ex eâ Leges motûs Apſidum derivantur accuratiſſimè quales illas Newtonus ſtatuit; ſed fatendum ipſam abſolutam ejus motus quantitatem dimidio circiter minorem inveniri illâ quæ per obſervationes innoteſcit; Itaque aliam indicare Methodum rem eamdem æſtimandi priori illâ non omiſſâ, inopportunum viſum non eſt.

PROBL. I.

Sol ſupponatur immotus; Linea Apſidum qualemcumque Angulum cum lineâ quadraturarum efficiat, ejuſque anguli ſinus ſit y;

In-

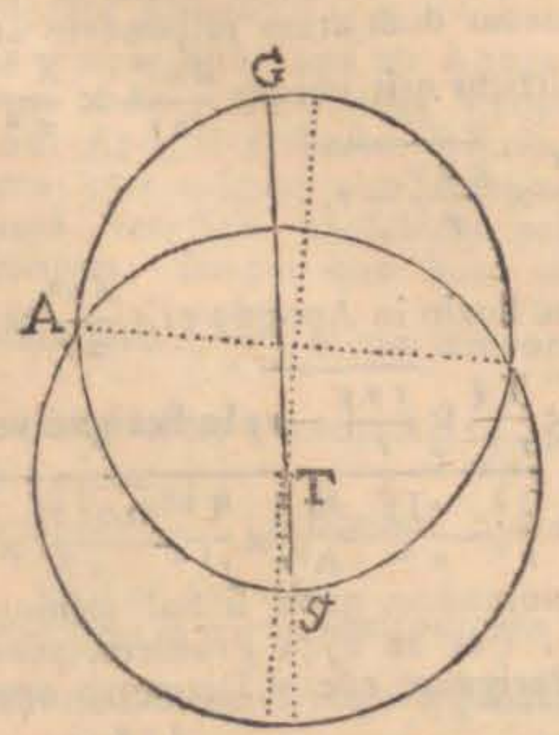
Invenire motum Apogæi dum Luna ab Apogæo ad Apogæum redit.

Sit G A g Ellipsis quam Luna circa Terram T describit; sit G Apogæum, g Perigæum; dicatur r semi-axis major; T distantia Apogæa; $T - 2f$ distantia Perigæa. Centro T describatur circulus radio r, eum circulum Luna describeret eodem tempore quo Ellipsim suam describit, & Vis Centralis Terræ in Lunam in eodem circulo revolventem foret $\frac{du^2}{2r}$ ex notâ circuli proprietate.

Portiones du ejus circuli ubique æquales intelligantur, & sumantur in Ellipsi arcus terminati per lineas e centro T per utrumque extremum arcus illius du ductas; liquet, quod dum arcus illi Elliptici describentur, lineolæ per quas Luna ex Tangente ad Ellipsin reducetur erunt effectus vis centralis Terræ & vis Solis secundum directionem radii orbitæ Lunaris conjunctis vel oppositis actionibus Lunam trahentium.

Lineolæ autem propter vim centralem terræ descriptæ erunt ubique, primò in ratione ipsius vis centralis, sive inverse ut quadrata distantiarum à centro, ideoque in distantia X erunt $\frac{r^2 du^2}{2rX^2}$; & secundò ut quadrata temporum sive ut quadrata arearum Ellipseos quæ respondent arcubus æqualibus du; illæ vero areæ cum sint inter se similes (ob æquales angulos in T arcubus æqualibus du mensuratos) erunt ut X^2, ideoque tempora erunt ut X^2 eorumque quadrata ut X^4; Ideoque vis centralis Terræ effectus dum describitur area quæ respondet arcui du erit ubique $\frac{r^2 du^2}{2rX^2} \times \frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^2 du^2}{2r^3}$. In Apogæo erit $\frac{T^2 du^2}{2r^3}$ in Perigæo $\frac{T^2 du^2}{2r^3} - \frac{4Tf du^2}{2r^3}$ &c.

Vis Solis in Lunam agens secundum directionem radii orbitæ Lunaris dicatur Y in mediocri distantiâ, & quia crescit ut distantiæ, in distantiâ X fit $\frac{X}{r}$ Y, ejus verò effectus crescit ut quadrata temporum, ideoque per ea quæ dicta sunt, effectus ejus vis dum describitur area quæ respondet arcui du est $\frac{X}{r} \times Y \times \frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^5}{r^5}$ Y,



in Apogæo erit $\frac{T^5}{r^5}$ Y, in Perigæo $\frac{T^5}{r^5}$ Y $- \frac{10T^4 f}{r^5}$ Y &c.

Sit, ut prius, F vis Solis in Terram in ejus mediocri distantiâ à Terra a, inventum est vim Y esse $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & vim Lunæ in mediocri distantia esse ad vim Solis F ut $A^2 r$ ad $M^2 a$ (A ut prius est annus sidereus, M mensis Periodicus, sed sepositâ Solis actione) cum ergo effectus vis Terræ in Lunam in mediocri distantiâ dum describitur area $\frac{r du}{2}$ sit $\frac{du^2}{2r}$, si fiat ut $A^2 r$ ad $M^2 a$ ita $\frac{du^2}{2r}$ ad quartum qui erit $\frac{M^2 a}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r}$, is terminus erit effectus vis Solis quæ per F exprimitur, sicque effectus vis Y in mediocri distantiâ dum describitur area $\frac{r du}{2}$ erit $\frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r} \times \frac{3yy}{r} - r$, & in qualicumque distantiâ X erit $\frac{X^5}{r^5} \times \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r} \times \frac{3yy}{r} - r$.

Hinc fluxio secunda orbitæ Lunaris, hoc est, lineola ad Terram directa, intercepta inter Tangentem & curvam Lu-

DE MUNDI SYSTEMATE.

narem quæ est differentia (vel summa) effectuum vis Centralis Terræ & vis Solis in Lunam dum arcus respondens arcui du percurritur erit ubique $\frac{du^2}{2r} \times \frac{X^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{X^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$.

121.

Hæc fluxio in Apogæo erit $\frac{du^2}{2r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$; In Perigæo vero erit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r}$; Ubi notandum quod si Sol immotus fingatur, (ut in hyp. Problem. assumitur) & si Perigæum esset è Diametro oppositum Apogæo tunc quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ eadem absolutè foret tam in Apogæo quam in Perigæo.

Si conciperetur quod effectu virium existente in Apogæo $\frac{du^2}{2r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r$ vera Ellipsis describeretur, hic effectus virium in Apogæo deberet esse ad earum effectum in Perigæo, primo inversè ut quadrata distantiarum, secundo directè ut quadrata temporum sive ut quartæ dignitates distantiarum, unde illi effectus erunt ut quadrata distantiarum directè hoc est ut T^2 ad $T^2 - 4Tf$, dividatur ergo effectus virium in Apogæo per T^2 & ducatur in $T^2 - 4Tf$ effectus virium in Perigæo esse deberet $\frac{du^2}{2r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r$: Sed in Perigæo ut & in Apogæo ex naturâ Apsidum evanescit fluxio distantiæ X utpote maximæ vel minimæ, ejus autem fluxionis fluxio est is ipse effectus Virium Terræ & Solis, ideo fluens hujus effectus virium reverâ evaneſceret, itaque ex ipsis hypothesibus oportebit ut $\int \frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r} = 0$; Sed in Perigæo, spectatâ actione Terræ & Solis, fluxio secunda reperta erat $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r}$. Itaque excedit eam quantitatem cujus fluens evadit zero quantitate $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{6T^4 f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r}$.

Punctum itaque Perigæi non erit in puncto è Diametro opposito Apogæo, sed arcu quodam differet, quem obtinemus quærendo quonam in loco orbitæ Lunaris fluens fluxionis secundæ ejus curvæ evanescat. Observandum autem, quod distantiæ Lunæ à Terrâ, circa puncta Apogæi vel Perigæi non multum mutantur, ideoque si Perigæum arcu p transferatur non magna mutatio exinde orietur in effectu vis centralis terræ, sed sinus y qui occurrit in valore vis Solis evadet, $y + \frac{zp}{r}$ (sumpto z pro cosinu arcus cujus sinus est y, est enim $dy = \frac{z\,du}{r}$ per naturam circuli, cùm hic verò agatur de arcu p non magno, potest poni p loco du, & differentia sinuum pro dy) fiet itaque fluxio secunda orbitæ Lunaris in loco in quo Perigæum esse debebit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5} \times \overline{3yy + \frac{6yzp}{r} + \frac{3z^2 p^2}{r^2}} - r}$; cujus pars $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r}$, Fluentem habet æqualem zero; Fluens autem excessus $\frac{du^2}{2r} \times \frac{M^2}{A^2 r} \times - \frac{T^5}{r^5} \times \frac{6yzp}{r^2} + \frac{6T^4 f}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$ fiat æqualis zero (omissis terminis in quibus f aut p ad duas dimensiones assurgunt) & habebitur valor p, quâtenus designat arcum quo processit Perigæum, siquidem tota fluens fluxionis secundæ orbitæ Lunaris in eo puncto fiet zero.

Hinc itaque divisis terminis per quantitatem communem $\frac{6M^2 T^4 du}{2Ar^8}$ habetur

hæc

hæc Æquatio $T p \times \int \frac{y z d u}{r} = f \times \int \overline{3yydu - rrdu}$, sive quia $ydu = -rdz$ fit $T p \times \int -zdz = f \times \int -\overline{3rydz - r^2 du}$. Est autem $\int -zdz = \frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}zz$ & $\int -ydz$ segmentum circulare cujus ordinata est y, sive sector circularis $\frac{1}{2}ru$, dempto vel assumpto Triangulo cujus area est $\frac{1}{2}yz$; Hinc æquatio evadit $\frac{1}{2} T p \times rr - zz = f \times \frac{3}{2}r^2 u - \frac{3}{2}ryz - r^2 u$, sive $T p \times yy = f \times r^2 u - 3ryz$, unde tandem habetur $p = \frac{rf}{T} \times \frac{ru - 3yz}{yy}$.

Atque cum hic sit motus Perigæi quo tempore Luna fertur ab Apogæo ad Perigæum erit motus Apsidis durante unâ revolutione Lunæ ab Apogæo ad Apogæum $\frac{2fr}{T} \times \frac{ru - 3yz}{yy}$.

Cor. 1. Hinc motus Apsidum nullus est cum $ru - 3yz = 0$; in Quadraturis verò fit negativus regrediuntur itaque Apsides; maximus autem est in syzygiis & positivus, tunc enim evanescit quantitas negativa $3yz$, fit $u = \frac{1}{4}c$, & $y = r$, unde ille motus fit $\frac{fc}{2T}$ durante unâ revolutione Lunæ.

Cor. 2. Si hunc calculum accuratius instituere liceret, attendi posset ad motum Solis dum Luna ab Apogæo ad Perigæum movetur, promovetur enim interim Sol 13 circiter gradibus, itaque etsi Luna veram describeret Ellipsim, Perigæum non faceret cum quadratura eumdem angulum quem faciebat Apogæum, sed 13 gradibus minus distaret in consequentia. Sed instituto calculo invenimus parum admodum exinde mutari motum Perigæi in propriâ orbitâ, ita ut ad institutum nostrum sufficiat illum assumere qualis per Problema repertus est.

PROBL. II.

Invenire quantitatem motus Apsidum singulo anno.

Sit Apogæum in quadraturâ, & Sole procedente Apogæum inde versus Syzygiam recedat.

Dicatur α tempus quo Sol revolutionem respectu Apogæi Lunæ absolvit, dicatur π tempus quo Luna ab Apogæo ad Apogæum redit, sit c tota Peripheria quam Sol Apogæi respectu describit, & du arcus ejus exiguus quo Apogæum à quadraturâ recessisse censebitur propter Solis motum, tempus quo hunc arcum describserit erit $\frac{\alpha du}{c}$, & cum tempore π, Apogæum moveatur quantitate $\frac{2fr}{1.yy} \times ru$ $-3yz$ tempore $\frac{\alpha du}{c}$ procedet quantitate $\frac{2\alpha fr}{\pi . T c} \times \frac{rudu}{y^2} - \frac{3yzdu}{y^2}$, erit autem u arcus qui metitur distantiam Apogæi à quadraturâ. y ejus sinus, & z ejus Cosinus, & $du = \frac{rdy}{z}$ hinc quantitas $\frac{2afr}{\pi . T.c} \times \frac{rudu}{y^2} - \frac{3zydu}{y^2}$, fit $\frac{2\alpha fr}{\pi . T . c} \times \frac{rudu}{y^2} - \frac{3rdy}{y}$. Ut habeatur fluens quantitatis $\frac{rudu}{y^2}$, ponatur loco u ejus valor $y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8} + \frac{63y^{11}}{2816r^{10}}$ &c. fiet $\frac{rudu}{yy} = \frac{rdu}{y} + \frac{ydu}{6r} + \frac{3y^3du}{40r^3} + \frac{5y^5du}{112r^6} +$ &c. & dividendo rdu per valorem y, qui est $u - \frac{u^3}{6rr} + \frac{u^5}{120r^4} - \frac{u^7}{5040r^6}$ est $\frac{rdu}{y} = \frac{rdu}{u} + \frac{udu}{6r^2} + \frac{7u^3du}{360r^4} + \frac{31u^5du}{15120r^6}$; & loco ydu in sequentibus terminis ponendo $-rdz$ & loco y^2 ejusque dignitatum ponendo $r^2 - z^2$ ejusque dignitates, fit $\frac{rudu}{yy} = \frac{rdu}{u} + \frac{udu}{6r} + \frac{7u^3du}{360r^3}$ &c. $- \frac{rdz}{6r} + \frac{3}{40} \times \frac{rr - zz \times -rdz}{r^3} + \frac{5}{112} \times \frac{\overline{rr - zz}^2 \times -rdz}{r^6} + \frac{35}{1152}, \frac{\overline{rr - zz}^3 \times -rdz}{r^8} + \frac{63}{2816} \times \frac{\overline{rr - zz}^4 \times -rdz}{r^{10}}$ &c. Cujus quantitatis

DE MUNDI SYSTEMATE.

LIB. I.

fluens est r L. $u + \frac{u^2}{12r} + \frac{7u^4}{1440r^3}$ &c. $+$

$$\frac{rr-rz}{6r} + \frac{3}{40} \times \frac{\frac{2}{3}r^4 - r^3z + \frac{1}{3}rz^3}{r^3} + \frac{5}{112} \times \frac{\frac{8}{15}r^6 - r^5z + \frac{2}{3}r^3z^3 - \frac{1}{5}rz^5}{r^5} + \frac{35}{1152} \times \frac{\frac{16}{35}r^8 - r^7z + r^5z^3 - \frac{3}{5}r^3z^5 + \frac{1}{7}rz^7}{r^7} + \frac{63}{1816} \times \frac{\frac{128}{315}r^{10} - r^9z + \frac{4}{3}r^7z^3 - \frac{6}{5}r^5z^5 + \frac{4}{7}r^3z^7 - \frac{1}{9}rz^9}{r^9}$$

cui fluenti si adjungatur fluens quantitatis $-\frac{3rdy}{y}$ quæ est $-3r$ L. y & omne ducatur per $\frac{2afr}{\pi Tc}$ habetur motus Apogæi dum propter Solis motum Apsis recessit à quadraturâ arcu u.

Si ergo u sit quadrans, y erit r, & z fiet zero unde hæc expressio evadet $\frac{2\alpha fr}{\pi Tc}$

$$\times r \text{ L. } \tfrac{1}{4}c + \frac{\frac{1}{16}c^2}{12r} + \frac{\frac{7}{256}c^4}{1440r^3} \text{ &c.} + \frac{r}{6} + \frac{3}{40} \times \frac{2}{3}r + \frac{5}{112} \times \frac{8}{15}r + \frac{35}{1152} \times \frac{16}{35}r + \text{ &c.} - 3r \text{ L. } r = \frac{2\alpha fr^2}{\pi . Tc} \times \text{L.} \frac{\frac{1}{4}c}{r^4} + \frac{c^2}{192r^2} + \frac{7c^4}{368640r^4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{10\times11} \text{ &c.}$$

harum fractionum $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5}$ &c. summa variis modis haberi potest, & quidem liquet oriri istos terminos ex terminis seriei quæ excessum quadrantis supra radium exprimit cum radius est Unitas, cujus seriei quinque priores termini efficiunt .33905, residui .23174; hinc cum quinque primi termini hic assumpti evadant propter fractiones per quas ducuntur .26343, & sequentes per fractiones minores quam $\frac{1}{3}$ ducantur, ii omnes sequentes simul sumpti non efficient $\frac{.23174}{3}$ sive .07724, id itaque addatur ad .26343, erit .34067 numerus major quæsito, & .26343 numerus quæsito minor, assumatur medium .30205 quantitas proposita evadit $\frac{2\alpha f}{\pi Tc} \times \text{L.} \frac{1}{4}c + \frac{c^2}{192} + .30205$.

Si verò dicatur g excessus quadrantis super Radium, per naturam Logarithmorum fiet L. $\frac{1}{4}c = g - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g^3 - \frac{1}{4}g^4 + \text{ &c.} = .57079 - .16290 + .06196 - .02652 + .01211 - .00576 = .4496$, unde expressio inventa fit $\frac{2\alpha f}{\pi Tc} \times .4496r^2 + \frac{c^2}{192} + .30205r^2 = \frac{2\alpha f}{\varpi T} \times .75165r^2 + \frac{c}{192} = \frac{\alpha f}{\varpi T} \times \frac{1.5033r^2}{c} + \frac{c}{96}$, sive quia est $\frac{c}{96} = 35^r.75$, & $\frac{r^2}{c} = \frac{r}{6.28,188} = 95^r.1189$ & $\frac{1.5r^2}{c} = 138^r.6783$, habetur motus Apogæi durante quadrante $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 178^r.4283$ & durante totâ revo- $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 695^r.7132$, sed ut totum tempus α qualecumque sit, ad tempus annuum A, ita motus $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 695^r.7132$ ad motum annuo tempore factum qui erit $\frac{f}{T} \times \frac{A}{\varpi} \times 695^r.7132$; Præterea sit P mensis Periodicus Lunæ fiatque ut A ad P ita $\frac{f}{T} \times \frac{A}{\varpi} \times 695^r.7132$ ad motum Apsidum tempore Periodico Lunæ, qui erit $\frac{f}{T} \times \frac{P}{\varpi} \times 695^r.7132$, & ut P ad ϖ ita $\frac{f}{T} \times \frac{P}{\varpi} \times 695^r.7132$, ad motum Apsidum mense Anomalistico ϖ qui erit $\frac{f}{T} 695^r.7132$, & ut 360 ad $360 + \frac{f}{T} \times 695^r.7132$ ita P ad mensem Anomalisticum ϖ qui ergo erit $P \times 1 + \frac{f}{T} \times \frac{695^r.7132}{360}$; Ideoque motus annuus Apogæi erit $\frac{f}{T} \times \frac{A \times 69.7132}{P \times 1 + \frac{f}{T} \times \frac{69.7132}{360}}$, sed annus Tropicus

pícus eſt $13\frac{1}{3}$ P proxime, hinc motus Apogæi fit $\frac{f}{T} \times \frac{13\frac{1}{3} \times 69.7132}{1+\frac{f}{1}\times\frac{69.7132}{360}}$.

Excentricitas f orbitæ Lunaris eſt quidem variabilis, de ejus legibus poſthac; Excentricitatis valorem mediocrem aſſumit Newtonus .05505 ſi Radius ſit 1, Ill. Caſſinus eam paulo minorem facit nempe .05430; ex Legibus autem variationis excentricitatis patebit quod loco f ſcribi debet .05147 & loco T, 1.05147 unde motus Apſidum fiet $\frac{.04895\times13\frac{1}{3}\times69^{gr}.7132}{1+\frac{.04895\times69.7132}{360}} = \frac{45^{gr}.4997}{1.0126} = 44.9$ circiter; qui quidem motus invenitur per obſervationes 40 ^{gr}.

DE MOTU APSIDUM

Secundum Newtoni methodum.

Hic revocanda ſunt ea quæ in Sectione IX. Lib. I. dicta ſunt de motu corporum in orbibus mobilibus.

LEMMA I. Prop. XLIV. Lib. I.

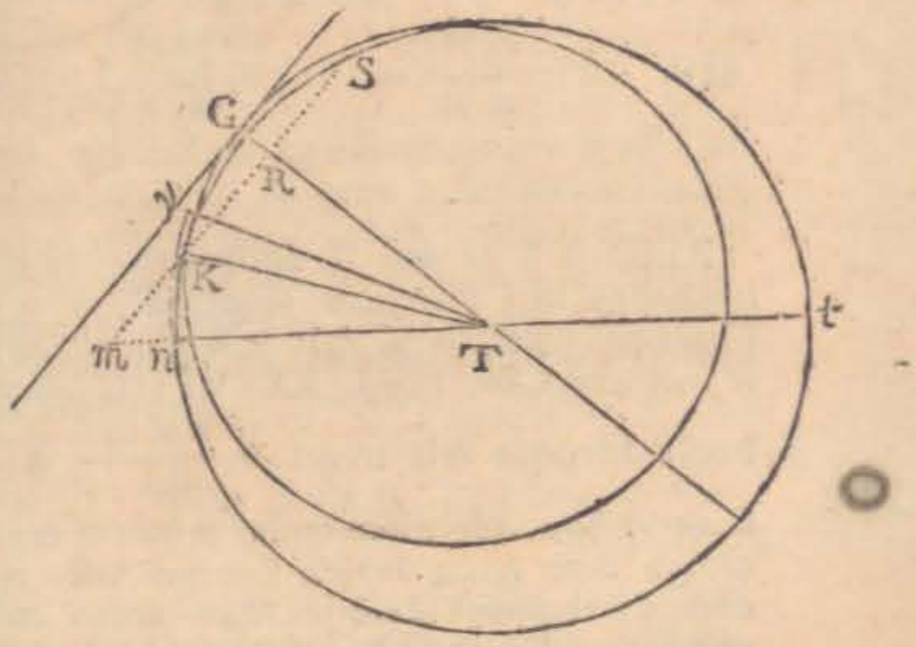
Concipiatur planum Orbitæ alicujus uniformiter revolvi, dum corpus quoddam ipſam orbitam propter vim centralem aliquam percurrit, id corpus in ſingulo puncto duplici vi centrali urgébitur, propriâ nempe quâ urgetur in centrum virium, & eâ quæ ex revolutione Plani orbitæ pendet, Hæc ubique erit inverſè in triplicatâ ratione diſtantiæ à Centro.

Demonſtrationem vide Propoſitione ſuprà indicatâ.

LEMMA II.

Si vis Solis in Lunam agens, ſit quantitas quæ in mediocri diſtantiâ ſit conſtans, dicaturque Y, creſcat vero ut diſtantia à Terrâ, vis Terræ in diſtantiâ mediocri ſit V, Dico quod (ponendo orbitam Lunarem circulo ſatis finitimam eſſe) motus Lunæ concipi poteri quaſi fieret in Ellipſi ſimili illi quam reverâ deſcribit, ſed cujus Planum foret mobile, ita ut integrâ revolutione Apſis ejus orbitæ promoveretur quantitate $360^{gr}. \times \sqrt{\frac{r^3V-T^3Y}{r^3V-4T^3Y}}$; 121.

Demonſtratio eſt in exemplis tertiis ad Propoſitionem XLV, ſed eam demonſtrationem hic breviter trademus.

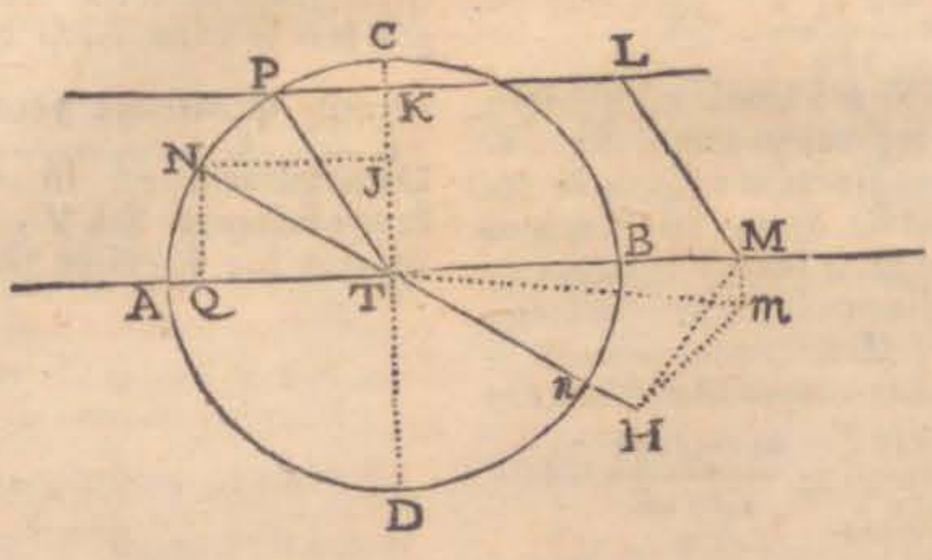


Sit G Lunæ Apogæum, G K arcus quam minimus quem Luna in propria orbita dato exiguo tempore deſcriberet, tranſferatur vero Luna cum ſuo Plano ita ut ejus Apſis tranſferatur in γ dum Luna ex G in K moveri debuiſſet; motus Lunæ in G ex duobus compoſitus cenſeatur, nempe ex motu ſecundum Tangentem per velocitatem acquiſitam, & ex motu per vim centralem genitam quæ ſimul ac ſemel in puncto G agere cenſeatur, hic motus per G R repræſentetur, motus ſecundum Tangentem per R K, fiat vero R K ad R m, ut angulus G T K ad G T K + G T γ, & ſi nulla vis centralis ex revolutione plani oriretur, Luna foret in m cum debuiſſet eſſe in K, ſed quia T m eſt longior quam T K ſumatur T n = T K & reverâ Luna erit in n, & erit m n effectus vis centralis ex revolutione plani genitus dum Luna deſcripſiſſet arcum G K.

Ra-

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



Radio TK centro T describatur circulus quem mT producta secet in t & mK producta secet in S, erit $mn \times mt = mK \times mS$ per Cor. Prop. XXXV. III. Elem. Eucl. ideoque erit $mn = \frac{mK \times mS}{mt}$ & si fingatur hunc circulum quam proximè coincidere cum Arcu orbitæ Lunaris GK, eodemque tempore describi quo arcus describeretur, erit GR effectus vis centralis Terræ dum Luna descripsisset arcum GK, & per notam proprietatem circuli hic arcus foret $\frac{RK^2}{2GT}$.

Ergo cum effectus vis centralis ex revolutione plani genitæ, & effectus vis centralis terræ eodem tempore geniti sint mn & GR, vires illæ erunt uti mn & GR, sive ut quantitates ipsis æquales $\frac{mK \times mS}{mt}$ & $\frac{RK^2}{2GT}$ sed cum mt sit quamproxime 2GT, sitque $mS = mR + RK$, & $mK = mR - RK$, istæ vires sunt ut $mR^2 - RK^2$ ad RK^2, si itaque dicatur T distantia maxima Lunæ, $T - X$ alia distantia quævis, r mediocris distantia, V vis terræ in ea mediocri distantia, erit $\frac{r^2}{T^2}V$ vis centralis terræ in puncto T, ideoque, cum sit RK^2 ad $mR^2 - RK^2$ ut vis gravitatis ad vim ex revolutione plani genitam hæc erit, $\frac{r^2V \times mR^2 - r^2V \times RK^2}{T^2 \times RK^2}$.

In puncto K aut alio quocumque ubi TK est $T - X$, vis gravitatis est $\frac{r^2}{\overline{T-X}^2}V$, & quoniam vires ex revolutione Plani genitæ sunt inverse in triplicatâ ratione distantiarum, vis plani est $\frac{T.r^2.V \times mR^2 - Tr^2V \times RK^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$ quæ si addatur vi gravitatis fit $\frac{Tr^2VRK^2 - Xr^2VRK^2 + Tr^2VmR^2 - Tr^2VRK^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$

Sed cum in eo puncto vis gravitatis sit $\frac{r^2}{\overline{T-X}^2}V$, & vis subtractitia Solis sit ut distantiæ, ideoque sit $\frac{T-X}{r}Y$, si reducantur ad communem denominatorem $Tr^2V - Xr^2V - \frac{T^4Y}{r} + \frac{4T^3XY}{r} -$. $\overline{T-X}^3$ fient $\frac{\qquad\qquad}{\overline{T-X}^3}$

Ut autem æquipolleat Plani revolutio cum subtractione vis Solis, ita determinandæ sunt quantitates RK^2 & mR^2, ut expressiones harum virjum sint ubique æquales, & 1°. quidem cum X fit zero, vis gravitatis cum vi Plani est $\frac{Tr^2V \times mR^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$ & vis gravitatis subtractâ vi Solis remanet $\frac{Tr^2V - \frac{T^4Y}{r}}{\overline{T-X}^3}$. Oportet ergo ut sit

$mR^2 =$

$mR^2 = \frac{\overline{RK}^2}{r^2V} \times r^2V - \frac{T^3Y}{r}$. Termini vero reliqui in quibus est X sunt $-\frac{Xr^2VRK^2}{\overline{T.X^3} \times RK^2}$ & $-\frac{Xr^2V + 4T^3X\frac{Y}{r}}{T - Y^3}$. Oportet ergo ut sit $RK^2 = \frac{\overline{RK}^2}{r^2V} \times r^2V - 4T^3\frac{Y}{r}$.

Itaque ut vis revolutionis plani vi gravitatis permixta, idem efficiet ac vis subtractitia Solis, oportet ut sit mR^2 ad RK^2 ut $r^2V - \frac{T^3Y}{r}$ ad $r^2V - \frac{4T^3Y}{r}$, sive ut sit mR ad RK ut $\sqrt{r^2V - \frac{T^3Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2V - \frac{4T^3Y}{r}}$ unde cùm sit mR ut motus Lunæ & Apogæi conjunctim & RK ut motus Lunæ, si Luna descripserit 360gr. fiet ut $\sqrt{r^2V - \frac{4T^3Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2V - \frac{T^3Y}{r}}$ ita 360gr. ad Lunæ & Apogæi motum conjunctim, qui erit ergo

$$360 \times \sqrt{\frac{r^2V - \frac{T^3Y}{r}}{r^2V - \frac{4T^3Y}{r}}} = 360\sqrt{\frac{\overline{r^3V - T^3Y}}{\overline{r^3V - 4T^3Y}}},$$

itaque si ex hoc valore tollantur 360gr. Residuum erit motus Apogæi integrâ revolutione Lunæ. Q. E. O.

THEOR. I.

Invenire motum Apogæi Lunaris, supponendo orbitam Lunarem esse circulo finitimam.

Describat Luna arcum du, & eo durante vis Y constans maneat, & spectatur du quasi portio Ellipseos descriptæ, si vis Y durante totâ revolutione crevisset sicut distantiæ; Motus Apsidis durante totâ revolutione C, foret (per Lemma 2.) $c\sqrt{\frac{\overline{r^3V - T^3Y}}{r^3V - 4T^3r}} - c$, ideoque durante tempore quo arcus du percurritur foret $du\sqrt{\frac{\overline{r^3V - T^3Y}}{\overline{r^3V - 4T^3Y}}} - du$, fit $r = T$, & sumatur valor quantitatis $\sqrt{\frac{V-Y}{V-4Y}}$ is erit $1 + \frac{3Y}{2Y}$, hinc itaque elementum motus Apsidum est $\frac{3r}{2V}du$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. fit $\frac{3F}{2Va} \times \frac{3yy\,du}{r} - r\,du$, cujus Integralis pro quadrante est $\frac{3F}{2Va} \times \frac{3r^2c}{8r} - \frac{rc}{4}$ & pro circulo $\frac{3F}{2Va} \times \frac{rc}{2}$ & cum $\frac{F}{V}$ sit $\frac{MM}{rAA}$ evadit, $\frac{3MM}{4AA}c$ sive cum $\frac{MM}{AA}$ sit fere .0055 est motus Apsidum $.0041c = 1^d.476$ sive $1^d 28'.33''$, & quia is absolvitur mense Synodico, ut habeatur motus Apogæi annuus, fiat ut .0808 ad 1, ita $1^d.476$ ad $18^{gr}.267$. sive $18^{gr}.16'$. quod est circiter dimidium veri motus Apsidisut observat Newtonus.

THEOR. II.

Invenire Leges motus Apogæi Lunæ supponendo Orbitam Lunarem esse Ellipticam.

Distantia Lunæ Apogæa dicatur A, Perigæa dicatur P, sinus anguli Apogæi & lineæ quadraturarum sit y, vis Solis in Apogæo agens erit per demonstrata $A \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & vis Solis agens in Perigæo, erit $P \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & y in utroque casu est eadem quantitas, dicatur itaque C hæc quantitas $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$; siquidem est constans; Vis Solis subtractitia aut additicia in Apogæo ac Perigæo erit AC vel PC; hoc est, erit ut quantitas constans C, ducta in distantiam A vel P; si itaque fingatur in punctis intermediis, eam vim esse etiam eandem constantem C, per distantiam ductam, aut saltem variationem quantitatis C compensari tunc per Cor 2. Prop. XLV., & Exempla tertia ejusdem, erit motus Lunæ ab Apside ad Apsidem $360 \times \sqrt{\frac{V-C}{V-4C}}$, si V

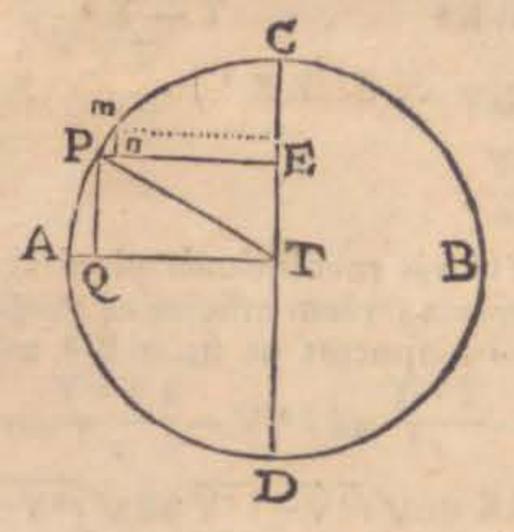
DE MUNDI SYSTEMATE.

fit ut vis gravitatis terræ in data distantia, est vero $360 \sqrt{\frac{V-C}{V-4C}} = 360 \times 1 + \frac{3C}{2V}$,

121. ideoque motus Apsidis erit $360 \times \frac{3C}{2V}$ tota revolutione Synodico-Anomalisticâ quam pro synodicâ sumimus.

Loco C litteram Y quæ in toto calculo designabat quantitatem $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ resumamus, & fingatur talem esse Apogæi motum ut ubique sit proportionalis motui $360 \times \frac{3Y}{2V}$ durante mense Synodico quod quidem ex prædictis consequitur, fingaturque Solem immotum stare & Apogæum ejus respectu in Antecedentia regredi, totamque revolutionem respectu Solis tempore α absolvere, sit ergo c tota peripheria, Apsis percurret respectu Solis arcum du tempore $\frac{\alpha du}{c}$; Ideo tempore synodico S percurret $360^{gr.} \times \frac{3Y}{2V}$ motuo suo, tempore $\frac{\alpha du}{c}$ percurret $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3Ydu}{2V}$, sed quia est $\frac{Y}{V} = \frac{F}{Va} \times \frac{3yy}{r} - r$ & $\frac{F}{V} = \frac{M}{A} \frac{M}{A} \frac{a}{r}$, elementum motus Apogæi est $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times 3yydu - r^2du$, cujus integralis est (si fingatur Apogæum à quadratura ad syzygiam in antecedentia retrocedere) $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times 3.rf.ydz - r^2u$ est autem autem $f.ydz = CPE$, hinc sumendo $\frac{\alpha M}{SA}$ pro unitate, est $\frac{3M}{2Ar} \times 3CPE - ru$ & pro quadrante $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{8}$ & pro circulo $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{2}$ prope ut in præcedenti Theoremate.

Hinc si sumatur motus Apogæi proportionalis tempori, dum Apogæum discedet à Sole arcu u, ejus motus esse debuisset $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{ru}{2}$ cum revera inventus sit $\frac{3M}{2Ar} \times 3CPE - ru$, hinc æquatio est $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{3ru}{2} - 3CPE$, sed $3CPE = \frac{3ru}{2} \mp \frac{3yz}{2}$ per



constr. hinc Æquatio fit $\frac{3M}{2Ar} \times \pm \frac{3yz}{2}$, sed $\frac{2yz}{r}$ est sinus arcus dupli distantiæ à Sole, hinc itaque hæc æquatio est ut sinus arcus dupli distantiæ Apogæi à Sole, unde Lex æquationis habetur, quod sit maxima in Octantibus, nulla in Syzygiis & quadraturis, positiva à quadraturis ad Syzygias negativa inde, sed ejus quantitas, non per hunc calculum, sed per observationes est determinanda; Siquidem, ut observatum est, Hypotheses adhibitæ ut ut à motu Apsidum non dissimiles, attamen ipsius quantitatem dimidio fere minorem exhibent. De his in Notis subsequentibus plura.

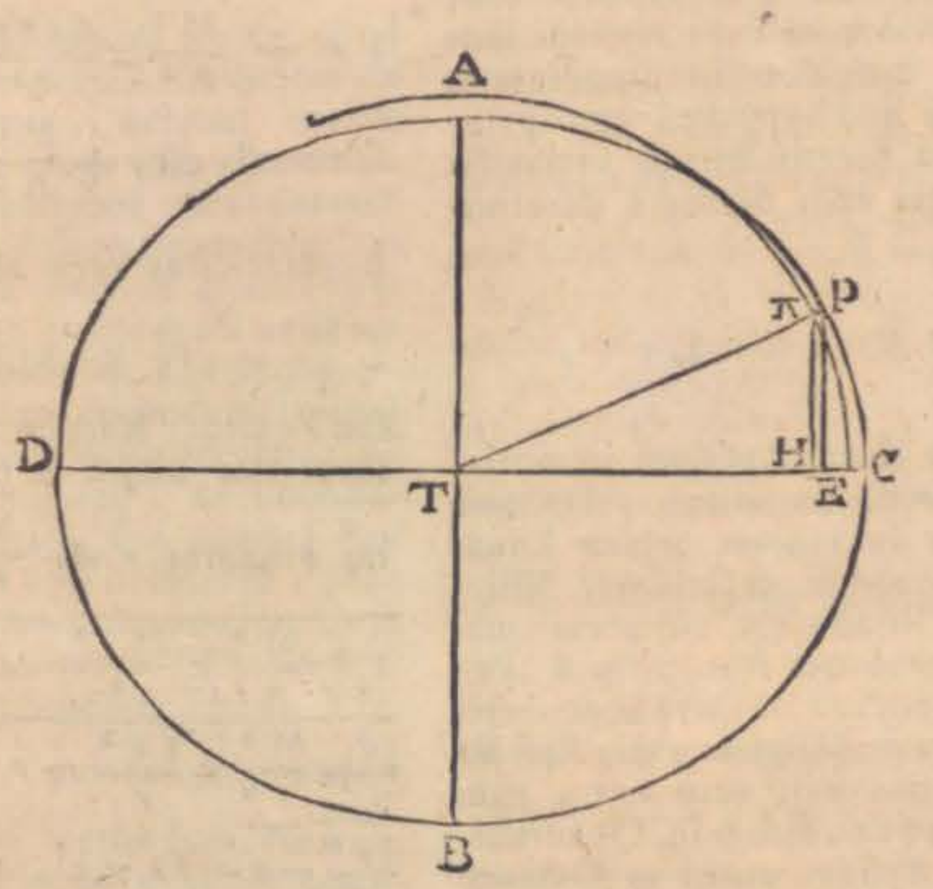
DE EXCENTRICITATE ORBITÆ LUNARIS.

Ipsa Curva quam Luna describit posset determinari per calculum adhibita ejus curvæ fluxione secunda, quæ obtinetur subtrahendo vim Solarem à vi terræ; Audivimus autem Viros in Mathesi Primarios hoc Problema, quod certe non est exiguæ difficultatis, suum feciſſe; Cum autem nobis videatur Newtonum non aliter hanc curvam investigasse quam per approximationes quasdam, eadem Methodo, tenui nostro modulo magis accommodata, idem persequi conabimur.

I. Propositione XXVIII. hujus Libri quæ-

quæsivit Newtonus qualis foret orbita Lunaris ex suppositione illam citra actionem Solis circularem esse, & invenit quod si assumatur eam orbitam fieri Ellipsim per Solis actionem ea Ellipsis terram in centro haberet & ejus axis minor foret ad majorem qui secundùm lineam quadraturarum jaceret, ut 69 ad 70.

Hinc deducitur quod si semi-axis major 70 dicatur $r+p$, semi-axis minor 69 sit $r-p$, distantia Lunæ à terra in loco quovis dicatur $r+x$, sit y sinus distantiæ Lunæ à quadratura proxima, z ejus distantiæ Cosinus erit ubivis $x = p \times 1 - \frac{2yz}{rz}$.



Nam sit $T\Pi = r$, $TP = r+x$, $\Pi H = y$, $TH = z$; propter Triangula similia TPE, $T\Pi H$ est $PE = \frac{r+x}{r} \times y$ & $TE = \frac{r+x}{r} \times z$, unde per naturam Ellipseos est $\frac{\overline{r-p}^2}{r+p^2} \times \overline{\overline{r+p}^2 - \frac{\overline{r-p}^2}{r+p^2} \times \frac{\overline{r+x}^2}{r^2}} \times z^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2$; Unde est $\overline{r-p}^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r-p}^2}{r+p^2} \times \frac{r+x^2}{r^2} \times z^2$, sed divisione factâ, omissisque terminis superfluis, est $\frac{\overline{r-p}^2}{r+p^2} = 1 - \frac{4p}{r}$, hinc fit $\overline{r-p}^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times z^2 - \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times \frac{4pz^2}{r}$ & quia $y^2 + z^2 = r^2$, & formatis dignitatibus omissisque terminis in quibus p, vel x, ad secundam dimensionem assurgunt habetur $r^2 - 2rp = r^2 + 2rx - \frac{4pz^2}{r}$ = sive loco z^2 scripto $r^2 - y^2$; deletis terminis æqualibus & transpositione factâ & divisione per 2, habetur $rx = \frac{2pr^2}{r} - \frac{2py^2}{r} - rp$ ideoque $x = p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$.

Ex quo sequitur quod in Octantibus x evanescit, illic enim $\frac{2y^2}{r^2} = 1$.

II. Ponatur vero Orbitam Lunarem

DE MUNDI SYSTEMATE.

Ellipticam citra Solis actionem ejusque semi-axem majorem esse Y, excentricitatem dici f, accedere autem vim Solis, sed eam tantùm partem ejus actionis considerari quæ secundum orbitæ radium agit, omissâ illâ parte ejus actionis Solaris quæ radio est perpendicularis, in hâc Hypothesi deprehendetur hujus orbitæ figuram variari, & magis oblongam evadere dum Apsides sunt in Syzygiis quam dum sunt in quadraturis, Excentricitatem pariter variabilem esse maximam dum Apsides sunt in Syzygiis, mediocrem cum Apsides sunt in Octantibus, cum sunt in Quadraturis minimam, & ex hâc hypothesi cum priori conjunctâ ejus excentricitatis variabilis Leges & quantitas rudi Minervâ determinari potest.

121.

THEOR. I.

Positis Sole & lineâ Apsidum immotis, item omissâ eâ actionis Solaris parte quæ perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris agit; Dico quod si describatur Ellipsis, cujus Terra sit focus & cujus axis major sit linea inter Lunæ Apogæum & Perigæum interjacens, Orbita Lunaris erit contenta intra eam Ellipsim cum Apsides erunt in Syzygiis, erit vero extra eam Ellipsim cum Apsides erunt in Quadraturis, cum vero Apsides erunt in Octantibus orbita Lunaris cum eâ Ellipsi coincidet.

Resumptis iis quæ in Theor. VII. calculi secundi dicta fuerunt, inventum est quod si distantia Lunæ citra Solis actionem fuisset x, evadit per Solis actionem secundum radium exercitam $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V}$ sive quia est $\frac{Y}{V} = \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{3yy}{r} - r$, hæc distantia fit $x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{x^4}{r^3}$. Hinc cum distantia Apogæa fit $r+f$, distantia Perigæa fit $r-f$, & ea distantia quæ est perpendicularis in axem, & quæ est semi-lateri recto Ellipseos æqualis $r - \frac{f^2}{r}$; Distantia Apogæa evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 + 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4+4r^3f}{r^3}$. Distantia Perigæa fit $r - f + \frac{M^2}{A^2} \times \times \frac{3r^4y^2 - 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 - 4r^3f}{r^3}$ & Distantia perpendicularis est $r - \frac{H}{r} + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4z^2 - 12r^2z^2f^2}{r^5}$; Ponendo z loco y, ut fieri debere ex ipsâ constructione patet, Ergo totus axis major invenitur $2r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{6r^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{2r^4}{r^3}$, sive semi-axis est $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - \frac{M^2}{A^2} \times r$; Excentricitas vero est $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{12y^2f}{r^2} - \frac{M^2}{A^2} \times 4f$; Ex Ellipseôn autem naturâ, semi-latus Rectum Ellipseos cujus hic foret axis major & hæc foret excentricitas evaderet $r + \frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3y^2}{r} - r - \frac{1 + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{12y^2}{r^2} - 4}{r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - r}} f^2 = r + \frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3y^2}{r} - r} - f^2 \times \frac{1}{r} + \frac{7M^2}{A^2 r^2} \times \frac{3y^2}{r} - r$, sed ea distantia perpendicularis est in curva Lunari $r - \frac{f^2}{r} + \frac{M^2}{A^2} + \overline{\frac{3z^2}{r} - r} - \frac{4M^2f^2}{A^2r^2} \times \frac{3z^2}{r} - r$ unde differentia inter distantiam perpendicularem in Ellipsi & eam distantiam in Orbita Lunari est $\frac{3M^2}{A^2 r} \times y^2 - z^2 - \frac{M^2f^2}{A^2r^3} \times 21y^2 - 12z^2 - 3r^2$, sive omisso hoc ultimo termino propter f^2, ea differentia est $\frac{3M^2}{A^2 r} \times y^2 - z^2$. Si Apsides sunt in Syzygiis est $y = r$, & $z = o$, unde hæc quantitas est maxima quæ esse possit, unde distantia perpendicularis in Ellipsi excedit distantiam in orbita Lunari quantitate $\frac{3M^2r}{A^2}$; Si Apsides sunt in quadraturis fit $y = o$, & $z = r$, un-

unde hæc quantitas $\frac{3M^2}{A^2 r} \times y^2 - z^2$ evadit $-\frac{3M^2 r}{A^2}$, ideoque distantia perpendicularis in Ellipsi minor est distantia in Orbita Lunari, unde fit ut Orbita Lunaris contineat intra se Ellipsim; Si vero Apsides sint in Octantibus evanescit $y^2 - z^2$, hinc ipsa Orbita Lunaris cum Ellipsi coincidit.

Cor. Ex hoc Theoremate liquet quod omissio vis quæ agit perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris, exhibet orbitæ Lunaris mutationem plane oppositam illi quæ ex ejus consideratione deduceretur omissâ excentricitate orbitæ, nam sive Apsides sint in Syzygiis sive in quadraturis liquet ex Theoremate præcedenti orbitam Lunæ prolongari secundum lineam Syzygiarum, contrahi vero secundum lineam quadraturarum, cujus oppositum statuebatur Prop. XXVIII. hujusce, ex consideratione vis Solaris totius, sed semotâ Excentricitatis orbitæ Lunaris ratione; hinc ergo ut mediocrem quodammodo teneamus viam; jungemus incremento distantiæ Lunaris secundum Hypothesim Theor. VII. calculi 2di. invento, partem aliquam $\frac{m}{n}$ decrementi secundum methodum Newtonianam inventi; Unde sic medium quoddam inter ambas Hypotheses obtinebimus. Itaque quævis distantia x evadet $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} p x \times 1 - \frac{2y^2}{r^2} = x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4 y^2}{r^5} - \frac{M^2 \times x^4}{A^2 \times r^3} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$.

PROBL. I.

Positis iis quæ in Corollario præcedentis Theorematis statuuntur, & supposito Orbitam Lunarem, quomodocumque mutatam per Solis actionem, Ellipsi proximam esse, Invenire Leges excentricitatis Orbitæ Lunaris.

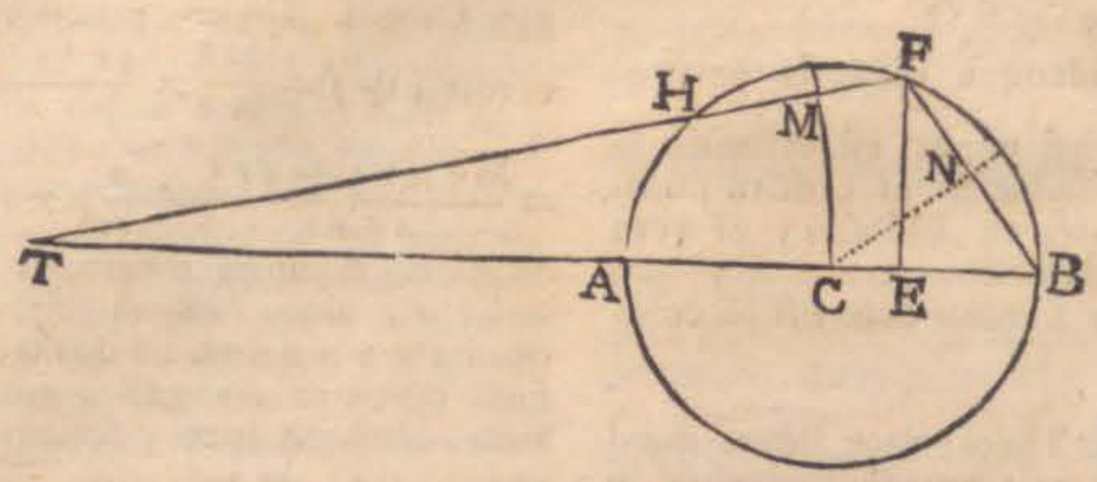
Primò cum distantia Apogea sit $r + f$, hæc distantia loco x substituta in valore per Coroll. Theor. præcedentis reperto evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 y^2 + 12 r^3 f y^2}{r^5} - \frac{M^2 \times r^4 + 4r^3}{A^2 r^3} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$; ut habeatur distantia mediocris loco x scribatur r, sinus autem ejus distantiæ à quadratura proxima est quam proxime Cosinus distantiæ Apogæi à quadratura proxima, ideoque loco y scribatur z, fit $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3z^2}{r} - \frac{M^2 r}{A^2} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2z^2}{r^2}$ quæ subtracta ex distantiâ Apogæâ relinquit excentricitatem $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 \times y^2 - z^2 + 12 r f y^2}{r^5} + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$, quæ omissis terminis omittendis fit $f + \frac{3M^2 r^2 - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$; Hinc illius excentricitatis hæ sunt leges, 1°. Excentricitas est maxima cum Apsides sunt in Syzygiis, nam illic y fit r, & $z = o$, hinc excentricitas evadit $f + \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$.

2°. Excentricitas est minima cum Apsides sunt in Quadraturis, illic enim est $y = o$ & $z = r$, unde Excentricitas evadit $f - \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$.

3°. Excentricitas est mediocris cum Apsides versantur in Octantibus, estque $= f$, quia $y^2 = z^2$ sicque evanescit $\frac{3M^2 r^2 - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



4ª. In aliis quibuſcunque locis hâc conſtructione obtinetur fere excentricitas, ſumatur $TC = f$, $CB = \frac{3M^2r - \frac{2n}{m}A^2p}{A^2}$, hoc radio CB deſcribatur circulus in quo ſumatur BF æqualis duplæ diſtantiæ Apſidum à Syzygiâ, erit ſatis proximè CF excentricitas, nam centro T radio TC deſcribatur arcus CM, cum ſit perpendicularis in lineam THMF, & is arcus parum diſcedat à linea recta, punctum M erit medium lineæ HF per 3. 3 Elem. & MF erit æqualis Coſinui CE arcûs BF.

Radius CB ad compendium dicatur g, & quia ſinus dimidii arcus BF in circulo cujus radius erat r dicebatur z in hoc calculo, hinc in hoc circulo erit $BN = \frac{g}{r}z$, & juxta nota Trig. Theoremata, ut $CB(g)$ ad $BN\left(\frac{g}{r}z\right)$ ſic $FB\left(\frac{2gz}{r}\right)$ ad $EB = \frac{2zz}{rr}g$, & $CE = g - \frac{2zz}{rr}g = g \times \frac{rr - 2zz}{rr}$, ſed $rr - zz = yy$, hinc $CE = g \times \frac{yy - zz}{rr}$, ideoque TF ſive $TE = f + \frac{3M^2r - \frac{2n}{m}A^2p}{A^2} \times \frac{yy - zz}{r^2}$ ut prius inventum fuerat.

Schol. Hæc fictitia Ellipſis nonnihil diſcederet à loco Perigæi Lunæ per eaſdem hypotheſes determinato, ſi verò ex diſtantia Perigæa cum diſtantia Apogæa collatis excentricitas quæreretur, diverſa quidem ejus quantitas obtineretur, ſed eædem forent Leges, nam diſtantia Apogæa foret $r + f + \overline{r + 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$ & Perigæa $r - f + \overline{r - 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$ hinc axis major eſſet $2r + 2r \times \frac{Y}{V} + \frac{2n}{m} \times p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$ & ſemi-axis $r + r \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$; Excentricitas vero $f + 4f \times \frac{Y}{V}$ ſive $f \times 1 + \frac{4M^2}{A^2r} \times \frac{3yy}{r} - r$. Quæ quidem eſt maxima cum Apſides ſunt in Syzygiis quia illic $y^2 = r^2$ ergo $f \times 1 + \frac{8M^2}{A^2}$. In quadraturis ſit minima quia evaneſcit y, ideoque ſit $f \times 1 - \frac{4M^2}{A^2}$, hinc mediocris excentricitas eſt $f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2}$, quod evenit in Octantibus tunc enim $y^2 = \frac{1}{2}r^2$, ideoque $\frac{3y^2}{r} - r = \frac{1}{2}r$, ſit ergo $f \times 1 + \frac{4M^2}{A^2r} \times \frac{1}{2}r = f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2}$. In cæteris locis ſumatur $TC = f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2}$ & $CB = \frac{6M^2}{A^2}f$, & ſi CB dicatur

g ut in Probl. præcedente erit $CE = g \times \frac{rr - 2zz}{rr} = g \times \frac{rr - 2rr + 2yy}{rr} = g \times \frac{2yy - rr}{rr}$ ideoque $TE = f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2} + \frac{6M^2}{A^2} \times \frac{2yy - rr}{rr} = f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2 r} \times r + \frac{4M^2}{A^2 r} \times \frac{3yy}{r} - \frac{6M^2}{A^2 r} \times r = f \times 1 + \frac{4M^2}{A^2 r} \times \frac{3y^2}{r} - r$ quæ est Excentricitas reperta, & eadem constructione obtinetur ac in hypothesi Problematis.

Si denique sicut Astronomis solemne est axim majorem constantem assumamus, & semi-axis major dicatur r, qui ex distantia Apogæa subducatur ut habeatur Excentricitas, eædem ejus excentricitatis Leges iterum obtinebuntur; erit quippe Excentricitas $f + r + 4f \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$ sive $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3yy}{r} - r + \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \frac{2yy}{r} - r + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$; Quæ fit in Syzygiis ubi $y^2 = r^2$, $f + \frac{2M^2 r}{A^2} + \frac{8M^2 f}{A^2} - \frac{2np}{m}$, in Quadraturis ubi y evanescit $f - \frac{M^2 r}{A^2} - \frac{4M^2 f}{A^2 f} + \frac{n}{mp}$. Unde mediocris Excentricitas est $f + \frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{2M^2 f}{A^2} - \frac{np}{2m}$, quæ quidem etiam in Octantibus circiter occurrit quia majores termini $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{3yy}{r} - r + \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \frac{3yy}{r} - r$ evadunt $\frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{M^2 f}{A^2}$ in Octantibus, nam cum y^2 illic fit $\frac{1}{2} r^2$ fiunt ii termini $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{3rr}{2r} - r$, $+ \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \frac{3rr}{2r} - r = \frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{2M^2 f}{A^2}$.

PROBL. II.

Variationis Excentricitatis quantitatem maximam determinare.

Hoc Problema nonnisi per determinationem veræ curvæ quam sequitur Luna potest determinari, quâ non inventâ ad Observationes recurrendum, ut fecisse videtur Newtonus, mediocrem Excentricitatem esse partium 5505 quarum radius sit 100000 assumit, & maximum incrementum vel decrementum assumit $1172\frac{3}{4}$, tam ex Observationibus quàm quod ille numerus ad concinnandam constructionem pro Æquatione Apogæi commodus esset ut suo loco dicemus.

Illust. Cassinus mediocrem illam Excentricitatem facit 5430 Incrementum vero & Decrementum 1086, nec malè hæc consentiunt cum quantitatibus Prob. 1°. inventis, si loco quantitatis indeterminatæ $\frac{n}{m}$ scribatur $\frac{1}{2}$; Nam, id Incrementum aut Decrementum inventum fuerat $\frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$, sive accuratiùs sumptis quantitatibus quæ ad simplicitatem calculi omissæ fuerant cum Excentricitas inventa fuisset $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 \times y^2 - z^2 + 12r^3 f y^2}{r^5} + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 z^2}{r^2}$, hæc evadit (cum Apsides sunt in Syzygiis & $z = o$, $y = r$) $f + \frac{M^2}{A^2} \times 3r + 12f + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - p$. & cum sunt in Quadraturis ubi $z = r$ & $y = o$, $f - \frac{M^2}{A^2} \times 3r + \frac{M^2}{A^2} \times 4f + p$, unde mediocris Excentricitas est $f + \frac{M^2}{A^2} \times 10f$, & Incrementum vel Decrementum, $\frac{M^2}{A^2} \times 3r + 6f - p$.

Cum itaque fit $\frac{M^2}{A^2} = .0055$ ex priùs inventis, mediocris Excentricitas $1 + \frac{10M^2}{A^2} \times f$ quam

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.

(†) Hiſce motuum lunarium computationibus oſtendere volui, quod motus lunares per theoriam gravitatis à cauſis ſuis computari poſſint. Per eandem theoriam inveni præterea quod æquatio annua medii motus lunæ oriatur à variâ dilatatione orbis lunæ per vim ſolis, juxta Corol 6. Prop. LXVI. Lib. I. (h) Hæc vis in perigæo ſolis major eſt, & orbem lunæ dilatat; in apogæo ejus minor eſt, & orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato luna tardiùs revolvitur, in contracto citiùs; & æquatio annua, per quam hæc inæqualitas compenſatur, in (i) apogæo & perigæo ſolis nulla eſt, in (k) mediocris ſolis à terrâ diſtantia ad 11′. 50″ circiter aſcendit, in aliis locis æquationi centri ſolis proportionalis eſt; & additur medio motui lunæ ubi terra pergit ab aphelio ſuo ad perihelium, & in oppoſitâ orbis parte ſubducitur. Aſſumendo radium orbis magni

1000

(quam Caſſinus invenit 5430 & Newtonus 5505) eſt 1.055 *f*, hinc eſt *f*=5147 ſecundùm Caſſinum & 5218 ſecundùm Newtonum quod utrumque ductum in .0055, prius efficit 1819.85 alterum 1822.2 cumque *p* ſit 719, id ex priore detractum relinquit 1100.85, ex poſteriore 1103.2; qui numeri incidunt inter 1172 & 1086 quos pro Excentricitatis variatione aſſignant Newtonus aut Hallejus & Caſſinus.

(†) * *Hiſce motuum* &c. Hæc eſt enim veritatis ejus Theoriæ fortiſſima probatio, ſi ea quæ Mathematicè deducuntur ex eâ Theoriâ apprime conſentiant cum Phænomenis in caſu maxime compoſito.

(h) * *Hæc vis in Perigæo Solis major eſt & orbem Lunæ dilatat*; Vis Solis aliquando adjungitur vi Terræ ut Lunam verſus Terram attrahat, aliquando idque ſæpiùs & ubi fortiùs agit vi Terræ eſt oppoſita, & Lunam à Terrâ diſtrahit, itaque toto effectu vis Solis ſimul conſiderato, Luna per eam vim à Terrâ diſtrahitur & eò magis quò ea vis Solis major eſt; ideoque Luna magis à Terrâ diſtrahitur dum Terra verſatur in ſuo Perihelio quàm ubi verſatur in Aphelio: hinc primo caſu orbita Lunæ magis eſt dilatata quàm hoc altero.

(i) * *In Apogæo & Perigæo nulla eſt* id omninò liquet ex Coroll. 2. Probl. V. prioris calculi, nam ex iis quæ in eo Corollario ſtatuuntur liquet quod ut habeatur Æquatio quovis in loco, hæc proportio eſt inſtituenda, ut areæ Ellipſeos quam Terrâ deſcribit dimidium ad aream deſcriptam à Terrâ ab Aphelio (vel Perihelio) uſque ad eum locum propoſitum, ita ſemeſtris tardatio ad tardationem mediocri motui adſcriptam, ſed in hoc caſu ea area à Terra deſcripta eſt ipſa ſemi-Ellipſis, ergo etiam tardatio medio motui adſcripta eſt ipſa ſemeſtris tardatio; Tum verò ſumitur ex Probl. IV. tardatio loco dato conveniens quæ ex tardatione mediocri tollitur, & differentia eſt æquatio quæſita; ſed rurſus ea tardatio Aphelio aut Perihelio conveniens eſt ipſa ſemeſtris tardatio, ergo, ex tardatione mediocri motui eo in loco adſcripta, detracta nullum eſt reſiduum, cum planè ſint æquales, ergo æquatio in Apogæo ac Perigæo nulla eſt.

(k) * *In mediocri Solis diſtantia &c.* Videntur hæc verba ſtatuere quid conſtet ex Obſervationibus, nempe hanc æquationem eſſe 11′. 50″. ubi maxima eſt, & eſſe æquationi centri proportionalem, obſerva-

1000 & eccentricitatem terræ $16\frac{7}{8}$, hæc (l) æquatio, ubi maxima eſt per theoriam gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed eccentricitas terræ paulo major eſſe videtur, & auctâ eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eâdem ratione. Sit eccentricitas, $16\frac{11}{12}$, & æquatio maxima erit 11′. 51″. LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

(m) Inveni etiam quod in perihelio terræ, propter majorem vim ſolis, apogæum & nodi lunæ velocius moventur quam in aphelio ejus, idque in triplicatâ ratione diſtantiæ terræ à ſole inversè. (n) Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum

ſervavimus autem III. Caſſinum hanc æquationem ubi maxima eſt 9′. 44″. efficere.

(l) * *Hæc æquatio ubi maxima eſt prodiit* 11′. 49″. Sumptâ Orbitâ Lunari ut circulari, per Theoriam gravitatis prodiit 11′. 47″. imo minor, ſive Newtonus aliâ viâ eum calculum inſtituerit quàm nos, ſive alia Elementa aſſumpſerit, ſive ex excentricitate Orbitæ Lunaris conſideratione hanc quantitatem auxerit, cætera verò ad amuſſim quadrant.

Eam Æquationem excentricitati Terræ eſſe proportionatam ex Cor. I. Prob. V. pag. 487., prodit enim ejus valor per quantitates fixas ductas in excentricitatem quæ in calculo dicebatur e; & quamvis quantitas b quæ eſt $\sqrt{a^2 - e^2}$ in eo valore occurrat, idcircò non eſt cenſendum æquationis valorem multùm pendere ex illa dignitate e^2 ſiquidem in illo termino ea dignitas fere evaneſcit reſpectu a^2.

Liquet etiam ex Cor. 2. ejuſd. Probl. cæteras æquationes eſſe proportionatas æquationi centri Solis: addendas eſſe motui Lunæ dùm pergit ab Aphelio ad Perihelium, illic enim tardatio vera minor eſt quam tardatio mediocris, ergo provectior eſt Luna quam ſecundùm tardationem mediocrem, addi ergo debet ejus viæ iſte tardationis defectus; ex Perihelio pergendo res oppoſitâ ratione procedet.

(m) * *Inveni etiam &c.* Id utique ſtatuit Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I., illic oſtendit Vires Solis eſſe ut Cubos diſtantiarum reciprocè, unde cùm ſint cauſæ errorum Apogæi & Nodorum, illi errores ſive motus qui ſuis cauſis ſunt proportionales, debent eſſe ut cubi diſtantiarum reciproce; Hinc dicatur a mediocris diſtantia Terræ à Sole, diſtantia quævis alia dicatur $a \pm x$, motus medius diurnus Apogæi in diſtantia a ſit g, motus medius nodi in ea diſtantia a ſit n, in diſtantia x, motus Apogæi erit $\frac{a^3}{a \pm x^3} g$ & motus nodi erit $\frac{a^3}{a \pm x^3} n$ aut formando ſeriem ex his quotientibus & omiſſis terminis in quibus altior dignitas quantitatis x occurrit, erit motus Apogæi in quavis diſtantia, $g \mp \frac{3x}{a} g$, & motus nodi $n \mp \frac{3x}{a} n$. 121.

(n) * *Et inde oriuntur Æquationes annuæ, Æquationi centri Solis proportionales.* Cùm motus Apogæi Lunæ & nodi uniformis non ſit cùm Terra ad varias à Sole diſtantias transfertur, ſed addatur aut detrahatur ex eorum motu medio quantitas variabilis $\frac{3x}{a} g$, & $\frac{3x}{a} n$, ſi quæratur progreſſus Apogæi Lunæ aut nodi cùm Terra ab Aphelio Solis certâ quantitate dierum diſceſſerit, is progreſſus ex motu medio Apogæi Lunæ aut nodi rectè non computabitur, quippe ſingulis diebus præter motum medium quantitate $\frac{3x}{a} g$, $\frac{3x}{a} n$ proceſſerunt aut receſſerunt, ſumma ergo om-

DE MUNDI SYSTEMATE.

tuum æquationi centri ſolis proportionales. Motus (o) autem ſolis eſt in duplicatâ ratione diſtantiæ terræ à ſole inversè & (p) maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, eſt $1^{gr}.\ 56'.\ 20''$ prædictæ ſolis eccentricitati $16\frac{11}{12}$ congruens. (q) Quod ſi motus ſolis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiæ inversè, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam $2^{gr}.\ 54'$

121. omnium harum quantitatum erit ſumenda, quæ erunt correctiones ſeu æquationes quibus ex loco medio Apogæi & Nodi ad verum ejus locum deveniemus, illæ verò æquationes æquationibus centri Solis erunt proportionales, nam cùm motus Solis ſit in duplicatâ ratione diſtantiæ inversè (ut exponetur in notâ o proximè ſequenti) ſit m motus medius diurnus Solis in mediocri diſtantia a, in diſtantiâ quavis $a \pm x$ is motus erit $\frac{a}{a \pm x^2} m$, ſeu in ſeriem reſolvendo hanc Expreſſionem erit $m \mp \frac{2x}{a} m$, hinc differentia inter motum medium & verum erit $\pm \frac{2x}{a} m$, & ex ſummâ earum differentiarum conflabuntur æquationes centri Solis, cùm ergo æquationes Apogæi & Lunæ ex ſummâ quantitatum $\pm \frac{3x}{a} g$, $\frac{3x}{a} n$ conſtent, erunt iſtæ æquationes ubivis in punctis correſpondentibus ſeu in æqualibus ab Aphelio Terræ diſtantiis in ratione conſtanti $3g$, & $3n$ ad $2m$: Ideoque erunt ubique proportionales æquationibus centri Solis.

(o) * *Motus Solis eſt in duplicatâ ratione diſtantiæ inversè* ſcilicet motus Solis angularis è Terrâ ſpectatus; nam cùm Sol deſcribat ſemper areas tempori proportionales, arcus quos reverâ deſcribit ſunt ſemper inversè ut diſtantiæ, ſed præterea magnitudines apparentes eorum arcuum e Terrâ ſpectatorum ſunt etiam inversè ut eorum à Terrâ diſtantia, ergo arcus quos Sol ſingulis temporculis æqualibus deſcribere videtur è Terrâ, ſunt in duplicatâ ratione diſtantiarum inversè.

(p) *Et maxima Centri Æquatio eſt* $1^{o}.\ 56'.\ 20''$. Illam $1^{o}.\ 55'.\ 50''$. facit Ill. Caſſinus.

(q) * *Quod ſi motus Solis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiæ inversè*; Dicatur M motus Solis in diſtantiâ mediocri, quæ dicatur a, & diſtantia quævis alia ſit $a \pm x$; ſi motus Solis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiarum inversè, in diſtantiâ $a \pm x$ foret $\frac{a^3}{a \pm x^3} M$ ſive $\frac{a^3 M}{a^3 \pm 3a^2x + 3ax^2 \pm x^3}$ aut formando ſeriem, is motus in diſtantia $a \pm x$ erit $M \pm \frac{3x}{a} M$ omiſſis reliquis terminis ob exiguitatem fractionis $\frac{x}{a}$; ideoque differentia motus in diſtantiâ verâ & motus in diſtantiâ mediocri foret $\mp \frac{3x}{a} m$: In verâ autem hypotheſi quòd Solis motus creſcat in ratione ſubduplicatâ inverſâ diſtantiarum, eodem ratiocinio invenitur quod in quovis loco motus Solis erit $\frac{a^2 M}{a^2 \mp 2ax + x^2}$ & diviſione facta erit is motus $M \mp \frac{2x}{a} M$, & differentia motus veri & motus medii erit $\mp \frac{2x}{a} M$, eritque ergo hæc differentia ad differentiam in priore Hypotheſi inventam ut 2 ad 3 in omnibus locis correſpondentibus; ſed æquationes conflantur ex ſummâ differentiarum motus veri & medii ſumptarum in omnibus locis ab Aphelio uſque ad locum eum ubi æquatio applicatur; cùm ergo in utrâque hypotheſi ſingulæ differentiæ motus veri & medii ſint in omnibus punctis correſpondentibus

in

$54' 30''$. (r) Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi & nodorum lunæ generant, sunt ad 2^{gr}, $54'. 30''$. ut motus medius diurnus apogæi, & motus medius diurnus nodorum lunæ sunt ad motum medium diurnum solis. Unde prodit æquatio maxima medii motus apogæi $19'. 43''$, & æquatio maxima medii motus nodorum $9. 24''$. (f) Additur verò æquatio prior & subducitur posterior, ubi terra pergit à perihelio suo ad aphelium: & contrarium fit in oppositâ orbis parte.

Per theoriam gravitatis (t) constitit etiam quod actio solis in lunam

in ratione constanti 2 ad 3 erunt etiam summæ earum differentiarum in locis correspondentibus, ipsæ nempe æquationes in eâdem ratione, ergo maxima centri æquatio in hypothesi verâ motum Solis decrescere in duplicatâ ratione distantiarum est ad æquationem maximam in hypothesi fictitiâ motum Solis decrescere in triplicatâ ratione distantiarum ut 2 ad 3 cum ergo æquatio maxima sit per Observationes $1^{gr}. 56'. 20''$. hæc altera erit $\frac{3}{2} \times 1^{gr}. 56'. 20''$. sive $2^{gr}. 54'. 30''$. Q. E. D.

(r) * *Et propterea Æquationes maximæ quas inæqualitates motuum Apogæi & nodorum generant sunt ad* $2^{gr}. 54'. 30''$. *ut modus medius Apogæi & Nodi ad motum medium Solis.* Nam statutum est motus horum esse in triplicatâ ratione distantiarum inversè, sit g motus medius Apogæi in mediocri nempe distantiâ, n motus medius nodorum, & m motus medius Solis, decrescantque in triplicatâ ratione inversâ distantiarum, deprehenditur eodem modo ac in notâ præcedente quod in quolibet loco differentiæ inter motum verum & motum mediocrem erunt $\mp \frac{3x}{a} g$, $\mp \frac{3x}{a} n$, $\mp \frac{3x}{a} m$, Æquationes maximæ sunt summa earum quantitatum sumptarum ab Apogæo Solis usque ad mediocrem ejus à Terrâ distantiam, itaque illæ Æquationes constituuntur per series, omnium $\frac{3x}{a} g$, omnium $\frac{3x}{a} n$, & omnium $\frac{3x}{a} m$, 1 2 x.

qualescumque ergo sint illæ quantitates variabiles x, cùm eædem sint in tribus hisce seriebus summæ earum serierum sive Æquationes maximæ, erunt inter se ut illæ quantitates g, n & m, per quas omnes partes singularum illarum serierum ducuntur, illæ verò quantitates sunt motus medii Apogæi, nodi & Solis, ergo datâ unâ ex his Æquationibus, v. gr. datâ Æquatione maximâ Solis & motu medio Apogæi, nodi & Solis, habentur cæteræ Æquationes maximæ statuendo illas esse ad eam Æquationem datam, ut ii motus medii dati.

Liquet verò ex ipsâ hac Demonstratione, verùm quidem Solis motum medium assumi debere, non autem veram ipsius Æquationem sed eam quæ prodit fingendo Solis motum in triplicatâ ratione distantiarum decrescere.

(f) * *Additur verò Æquatio* Apogæi Lunæ *& subducitur Æquatio* nodi *ubi Terra pergit à Perihelio suo ad Aphelium*; motus Apogæi Lunæ est progressivus, motus verò nodi est retrogradus; Terrâ autem à Perihelio procedente uterque motus major fit motu medio, inde ergo plus procedit Apogæum Lunæ, quàm per motum medium, plus recedit nodus, prior ergo Æquatio addenda, posterior detrahenda.

(t) * *Per theoriam gravitatis constitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo ma-*

DE MUNDI SYSTEMATE.

lunam paulo major ſit, ubi tranſverſa diameter orbis lunaris tranſit per ſolem, quam ubi eadem ad rectos eſt angulos cum linea terram & ſolem jungente: & propterea orbis lunaris paulo major eſt in priore caſu quam in poſteriore. Et (u) hinc oritur alia æquatio motus medii lunaris, pendens à ſitu apogæi lunæ ad ſolem, quæ quidem maxima eſt cum apogæum lunæ verſatur in octante cum ſole; & nulla cum illud ad quadraturas vel ſyzygias pervenit: & motui medio additur in tranſitu apogæi lunæ à ſolis quadraturâ ad ſyzygiam, & ſubducitur in tranſitu apogæi à ſyzygiâ ad quadraturam. Hæc æquatio, quam ſemeſtrem vocabo, in octantibus apogæi, quando maxima eſt, aſcendit ad $3'.\ 45''$ circiter, (x) quantùm ex phænomenis colligere

121. *for ſit ubi tranſverſa Diameter orbis Lunaris tranſit per Solem* &c.

Facile deducitur ex Cor. Theor. IV. calculi primi (pag. 479) quod (exiſtente x diſtantiâ Lunæ à Terrâ, r ejus diſtantiâ mediocri, & y ſinu ejus diſtantiæ à quadraturâ, exiſtente etiam F vis Solis in terram in mediocri ejus diſtantiâ a) actio Solis Lunam trahentis ſecundum directionem radii orbitæ Lunaris eſt $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$.

Unde ea vis, Lunâ in quadraturis exiſtente, fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times -r$, eſt ergone gativa & Lunam ad Terram attrahit cum verò Luna eſt in ſyzygiis, ea actio Solis fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times 2r$, eſt itaque poſitiva & Lunam à Terra diſtrahit; In locis autem ſimilibus hæ Solis actiones ſunt ut diſtantiæ x Lunæ à Terrâ. Hinc ſi Apſides ſint in ſyzygiis ſit verò Luna in quadraturis, ubi per actionem Solis ad terram trahitur ambæ diſtantiæ x Lunæ in utrâque quadraturâ poſitæ ſunt ſimul æquales lateri recto orbitæ Lunaris; cum verò Luna eſt in ſyzygiis ubi per actionem Solis à Terra diſtrahitur, ambæ diſtantiæ x Lunæ in conjunctione & oppoſitione poſitæ ſunt ſimul æquales axi majori, qui ſemper ſuperat latus rectum.

Si verò Apſides ſunt in quadraturis, & Luna etiam in quadraturis ambæ diſtantiæ x Lunæ in utrâque quadraturâ poſitæ ſimul ſumptæ ſunt æquales axi majori, & cum Lunâ eſt in ſyzygiis, ambæ diſtantiæ x Lunæ in conjunctione & oppoſitione poſitæ ſunt ſimul æquales lateri recto orbitæ Lunaris.

Ergo cum Apſides ſunt in Syzygiis actio Solis quæ Lunam ad Terram attrahit eſt minor, & è contra actio quæ Lunam à Terra diſtrahit eſt major quam cum Apſides ſunt in quadraturis, ideoque orbis Lunaris paulo major fieri debet in priore caſu quam in poſteriore.

De punctis autem inter quadraturas & Syzygias intermediis ab eo quod in his punctis extremis evenit judicari poteſt, ſed potiſſimum ex calculo quo Æquatio ex hâc cauſâ natâ determinatur.

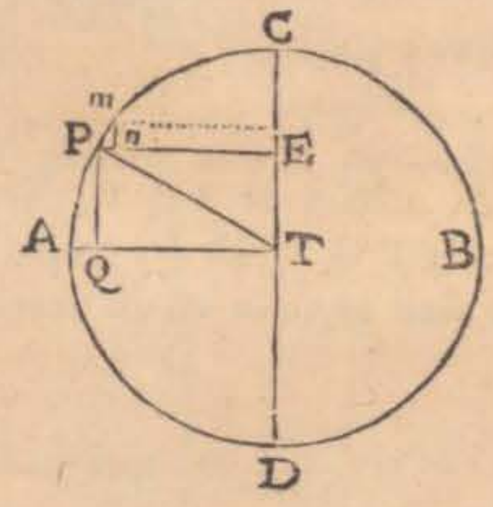
(u) * *Et hinc oritur alia Æquatio motus medii Lunaris* &c. Hujus æquationis calculum ejuſque Leges explicatas habes Probl. VI. calculi ſecundi (pag. 500.) ejuſque Corollariis.

(x) * *Quantùm ex Phænomenis colligere potui* &c. Ex Coroll. 5to. Probl. VI. (pag. 501. in quo quædam menda irrepſerunt à B. L. prius corrigenda) Æquatio hæc $3'.\ 56''$ eſt reperta, quædam autem cau-

ligere potui. Hæc eſt ejus quantitas in mediocri ſolis diſtantiâ à terrâ. (y) Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione diſtantiæ ſolis inversè; ideoque in maximâ ſolis diſtantiâ eſt $3'.\ 34''$, 121,

cauſæ ſunt cur hæc quantitas pro verâ quantitate adhiberi nequeat, ſed hæc æquatio ex phænomenis ſit colligenda; primò, quantitas f ſive excentricitas Orbitæ Lunaris ſatis certo non eſt cognita, ut conſtat ex iis quæ de excentricitate dicta ſunt, hic autem mediocrem excentricitatem aſſumpſimus 5505 partium quarum radius orbitæ ſit 100000 cum Newtono quam Caſſinus facit tantum 5430 partium, & forte minor aſſumi deberet ſi attendatur ad Excentricitatem Orbitæ Lunaris qualis ea foret citra Solis actionem ex quibus conſiderationibus, liquet æquationem inventam minorem factum iri quam $3'.\ 56''$, ſicque magis acceſſuram ad æquationem $3'.\ 45''$ quæ ex Phænomenis colligitur: ſecundò cum varias Hypotheſes aſſumpſerimus vero quidem proximas non tamen veras abſolutè ut liquet ex Cor. I. Probl. I. (pag. 496) ex iis erroribus ipſæ quantitates abſolutæ mutantur ſed manent earum proportiones ex quibus Leges æquationum pendent ita ut datâ aliquâ ex æquationibus per Phænomena, reliquæ ſatis tuto exinde deduci queant.

(y) * *Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione diſtantiæ inversè.* Probl. VI. (pag. 500. col. 2.) hæc æquatio inventa eſt $\frac{15\,A \times F q^9 f^2}{109.73 \times S.\,V.\,a r^8} \times -163.595\,PQT$, in quâ expreſſione a repræſentat mediocrem Solis à Terra diſtantiam, in aliâ itaque à Sole diſtantiâ loco a ponatur X, & loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$ quia vis Solis F eſt inversè ut quadrata diſtantiarum, hac ergo ſubſtitutione factâ æquatio fit $\frac{15\,A\,a^2 F q^9 f^2}{109.73.S.\,V\,X^2.\,X r^8} \times -163.595\,PQT$ tum loco $\frac{F}{V}$ ſubſtituatur $\frac{a M^2}{r A^2}$ (ut liquet ex Cor. Probl. I. calculi primi, pag. 484) æquatio evadit $\frac{15\,M^2 a^3 q^9 f^2}{109.73S.A.X^3.r^9} \times -163.595\,PQT$, & quia in octantibus eſt $PQT = \frac{1}{4} r^2$ æquatio eſt $-\frac{15 \times 163.595 \times M^2 a^3 q^9 f^2}{4 \times 109.73 \times S.\,A\,X^3 r^7}$, in quâ cum nulla ſit variabilis quantitas præter X^3 in denominatore occurrente, liquet Æquationem cum Apogæum eſt in Octantibus, hoc eſt æquationem maximam eſſe ut X^3 inversè, hoc eſt *augeri ac diminui in triplicatâ ratione diſtantiæ Solis X inversè; ideoque* &c.



Scilicet poſitâ Excentricitate Orbitæ telluris $.016\frac{11}{12}$, diſtantia maxima eſt $1 + .016\frac{11}{12}$, diſtantia mediocris 1, & diſtantia minima $1 - .016\frac{11}{12}$, itaque ſumendo rationem triplicatam mediocris & maximæ diſtantiæ fiat ut $1 + 3 \times .016\frac{11}{12} + 3 \times .000285\frac{1}{3}$ &c. (1.0516) ad 1, ita $3'45''$ ad quartum qui erit $3'.34''$. & ſumendo rationem triplicatam inverſam mediocris & minimæ diſtantiæ fiat ut $1 - 3 \times .016\frac{11}{12}$

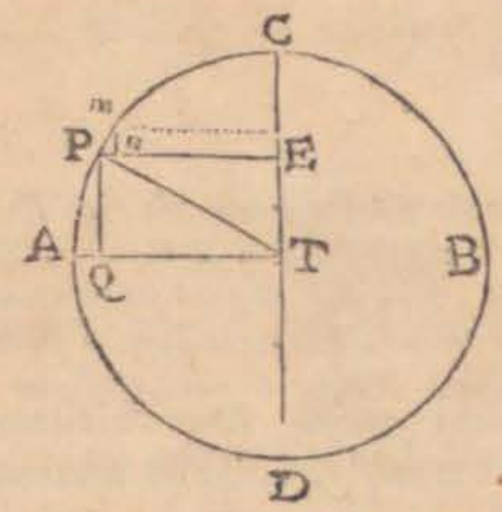
DE MUNDI SYSTEMATE.

34^{II}, & in minima $3'.56^{II}$ quamproximè: ubi vero apogæum lunæ ſitum eſt extra octantes, evadit minor; (z) eſtque ad æquationem maximam, ut ſinus duplæ diſtantiæ apogæi lunæ à proximâ ſyzygiâ vel quadraturâ ad radium.

(a) Per eandem gravitatis theoriam actio ſolis in lunam paulo major eſt ubi linea recta per nodos lunæ ducta tranſit per ſolem, quam ubi linea illa ad rectos eſt angulos cum rectâ ſolem ac terram jungente. (b) Et inde oritur alia medii motus lu-

121. $+3X.000285\frac{x}{2}$ &c. (.950197) ad 1 ita $3'.45^{II}$. ad quartum qui erit $3'.56^{II}$.

(z) * *Eſtque ad æquationem maximam.* Siquidem in quâcumque diſtantiâ Terræ à Sole, hæc æquatio eſt $\frac{15\,M^2\,a^3\,r^9\,f^2}{109.73\,S.A.X^3\,x^9} \times -163.595\,PQT$, liquet quod ſupponendo diſtantiam X non variari, hæc æquatio erit ubique ut PQT; in octantibus autem PQT eſt $\frac{1}{4}r^2$, hinc in quovis loco hæc æquatio eſt ad eam quæ in

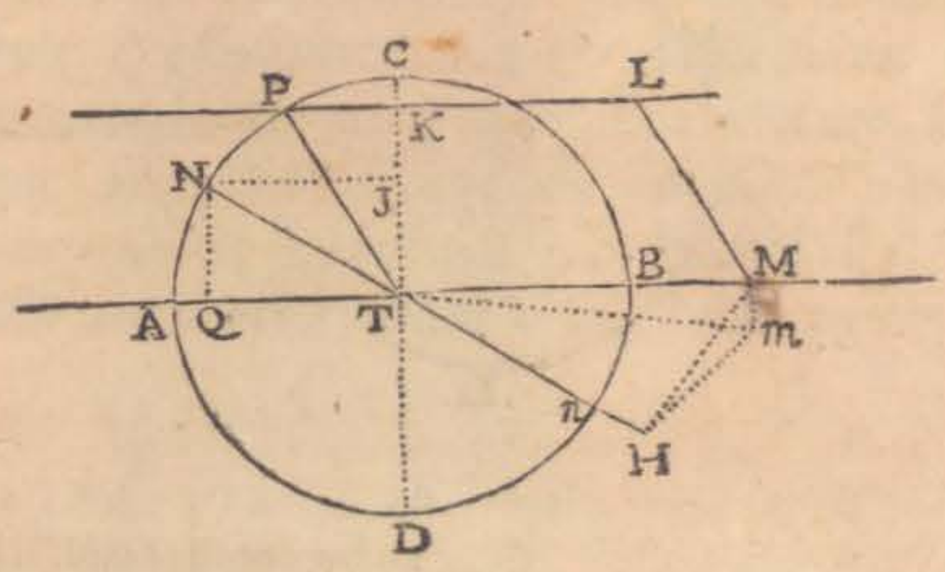


Octantibus obtineretur, manente eâdem diſtantiâ Solis à Terrâ ut PQT ad $\frac{1}{4}r^2$, ſive quia PQT eſt $\frac{1}{2}zy$ ut $\frac{1}{2}zy$ ad $\frac{1}{4}r^2$, & utrumque ducendo per $\frac{4}{r}$ ut $\frac{2zy}{r}$ ad r, ſed $\frac{2zy}{r}$ eſt ſinus duplæ diſtantiæ puncti P, hoc eſt Apogæi à Syzygiâ, (aut à quadraturâ perinde enim eſt ut ex Trigonometriæ Principiis liquet) hinc æquatio in quovis ſitu Apogæi extra octantes eſt ad Æquationem maximam quæ obtineretur in Octantibus manente eâdem diſtantia Telluris à Sole, ut ſinus duplæ diſtantiæ Apogæi Lunæ à proximâ Syzygiâ, ad radium.

(a) * *Per eamdem* &c. Cum linea recta per nodos ducta tranſit per Solem, tunc Sol verſatur in plano ipſius orbitæ Lunaris producto, ejus itaque actio non conſumitur in dimovendâ Lunâ ab eo plano, ſed tota impenditur ad eam vel à terrâ diſtrahendam, vel ad terram attrahendam, vel ad eam accelerandam aut retardandam in proprio ſuo Plano, cum autem linea nodorum eſt ad angulos rectos cum rectâ ſolem ac terram jungente, tunc Sol maxime diſcedit à plano orbitæ Lunaris, hinc pars ejus actionis conſumitur in admovendo Plano orbitæ Lunaris ad Eclipticam, & per reſiduum duntaxat ejus actionis Lunæ errores *in longum* producit; hinc priori caſu actio Solis in Lunam paulò major eſt quam in poſteriore, partem autem actionis Solis reſiduam ſublatâ eâ ejus parte quæ in plano orbitæ Lunaris dimovendo conſumitur ad calculum vocamus Probl. 1°. Calculi tertii (pag. 502.).

(b) * *Et inde oritur alia motus medii æquatio.* Hujus æquationis quantitatem & Leges Probl. III. Calculi 3i. (pag. 503.) expoſuimus, illamque $\frac{3\,A.F.l^2}{8\,S.V.ar} \times \frac{2nm}{r}$ in-

lunaris æquatio, quam ſemeſtrem ſecundam vocabo, quæque maxima eſt ubi nodi in ſolis octantibus verſantur, & evaneſcit ubi ſunt in ſyzygiis vel quadraturis, & in aliis nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ nodi alterutrius à proximâ ſyzygiâ aut quadraturâ: (c) additur vero medio motui lunæ, ſi ſol diſtat à nodo ſibi proximo in antecedentia, ſubducitur ſi in conſequentia, & in octantibus, ubi maxima eſt, aſcen-



invenimus, ſumendo *l* pro ſinu inclinationis orbitæ, & *n* & *m* pro ſinu & Coſinu diſtantiæ nodorum à Syzygiâ. Hinc cum $\frac{2nm}{r}$ ſit ſinus duplæ diſtantiæ nodi à Syzygiâ, cæteri verò termini ſint conſtantes hæc æquatio eſt maxima *ubi nodi in Solis octantibus verſantur*, & evaneſcit *ubi ſunt in Syzygiis vel quadraturis & in aliis nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ nodi à Syzygiâ* &c.

(c) * *Additur verò medio motui Lunæ, ſi ſol diſtat à nodo ſibi proximo in antecedentia ſubducitur ſi in conſequentia.* Ex actione Solis in Lunam, Lunâ retardatur, ex diminutione verò ejus actionis propter obliquitatem plani orbitæ Lunaris, diminuitur hæc Lunæ retardatio, hoc eſt acceleratio quædam oritur reſpectu motus qui, omiſſâ hac conſideratione, fuerat determinatus; mediocris acceleratio hinc nata, & quæ includitur in medio motu Solis eſt ubique $\frac{3\,A.F.l^2}{2\,S.V\,ar^2} \times \frac{ru}{2}$, vera autem acceleratio eſt $\frac{3\,A.F.l^2}{2\,S.V\,ar^2} \times ANQ$. Unde æquatio eſt $\frac{3\,A.F.l^2}{2.\,S.V\,ar^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ per Probl. III. calculi 3. (pag. 503. & ſeq.) jam itaque ſi $\frac{ru}{2}$ ſit major quam ANQ quod evenit in toto quadrante ANC, acceleratio mediocris eſt major vera, & Luna magis proceſſiſſe cenſetur quam revera proceſſit, hinc iſta differentia $\frac{3\,A.F.l^2}{2\,S.V.ar^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ debet detrahi ex ejus loco invento ut verus locus habeatur, in hoc autem caſu Sol qui puncto A reſpondere cenſetur eſt in conſequentia reſpectu nodi N.

XXXV.

Dum verò N verſatur inter C & B, &

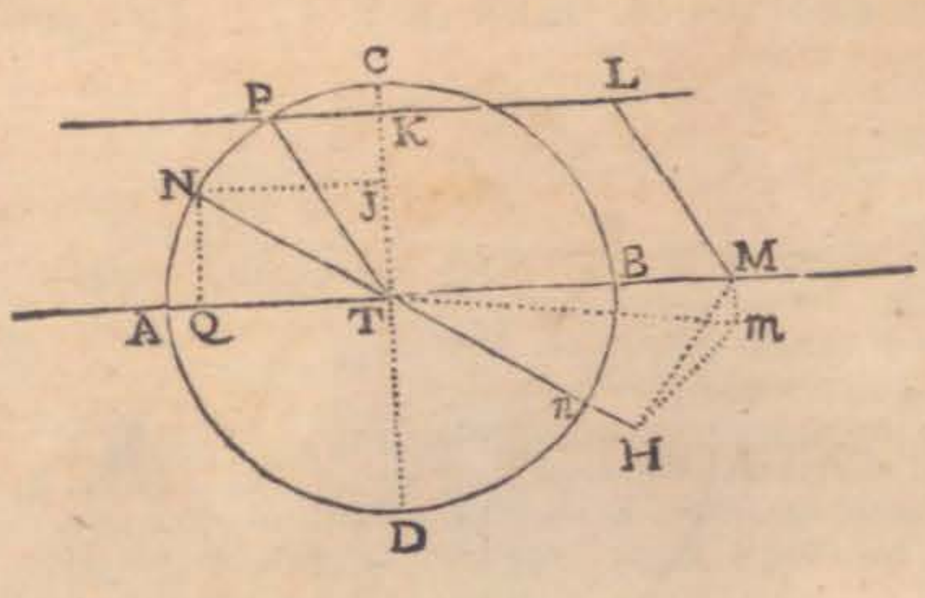
n

DE MUNDI SYSTEMATE.

cendit ad $47^{\prime\prime}$ in mediocri ſolis diſtantiâ à terrâ, (d) uti ex theoriâ gravitatis colligo. In (e) aliis ſolis diſtantiis hæc æquatio maxima in octantibus nodorum eſt reciprocè ut cubus diſtantiæ ſolis à terrâ, ideoque in perigæo ſolis ad $49^{\prime\prime}$ in apogæo ejus ad $45^{\prime\prime}$ circiter aſcendit.

111.

Per



n inter A & D, tunc $\frac{ru}{2}$ eſt minor quam ANQ, ſic itaque acceleratio mediocris eſt minor quam acceleratio vera, ideoque differentia $\frac{3A.Fl^2}{2S.V.ar^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ addi debet loco medio Lunæ, tunc autem Sol in A eſt in antecedentia reſpectu nodi proximi n.

3°. Dum N verſatur inter B & D & n in A & C $\frac{ru}{2}$ excedit ANQ, ſive motus mediocris excedit verum ſubduci itaque debet differentia, eſt vero in eo caſu Sol in A in conſequentia reſpectu nodi n.

Denique Dum N eſt inter D & A, $\frac{ru}{2}$ minor eſt quam ANQ addi itaque debet æquatio loco medio Lunæ & Sol eſt in Antecedentia reſpectu nodi N.

Ergo æquatio ſubducitur ex medio motu Lunæ cum Sol eſt in conſequentia reſpectu nodi proximi, additur vero ei motui cum Sol eſt in antecedentia.

(d) * *Uti ex Theoriâ colligo*, calculus noſter coroll. Probl. III. contentus, Æquationem maximam $45^{\prime\prime}.6$ exhibet, qui numerus eſt adeo proximus numero $47^{\prime\prime}$. quem ex Theoriâ gravitatis collegit Newtonus, ut credere facile ſit ipſum hunc numerum ex Theoriâ gravitatis collegiſſe eâ proximè ratione quæ in calculo (pag. 501.) adhibetur, differentiola enim iſta oriri poteſt ex eo quod, vel angulum inclinationis orbitæ, vel quantitatem M menſis Periodici citra actionem Solis conſiderati, paulo majorem fecerit quam nos.

(e) * *In aliis Solis diſtantiis.* Eadem plane eſt demonſtratio ac in notâ (y) præcedente; cum æquatio fit $\frac{3AFl^2}{8SVar} \times \frac{2nm}{r}$ in diverſâ Solis à Terrâ diſtantiâ X, loco a ſcribatur X, loco F, $\frac{a^2F}{X^2}$, loco $\frac{F}{V}$, $\frac{aM^2}{rA^2}$, æquatio evadit $\frac{3M^2a^3l^2}{8A.S.X^3r^2} \times \frac{2nm}{r}$ & in Octantibus quia $\frac{2nm}{r} = r$, Æquatio eſt $\frac{3M^2a^3l^2}{8A.SX^3r}$, ideoque æquationes in

Octan-

Per (f) eandem gravitatis theoriam apogæum lunæ progreditur quam maximè ubi vel cum ſole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum ſole quadraturam facit. (g) Et eccentricitas fit maxima in priore caſu & minima in poſteriore, per Corol. 7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ ſunt, & æquationem principalem apogæi generant, quam ſemeſtrem vocabo. (h) Et æquatio maxima ſemeſtris eſt 12gr. 18′ circiter, quantùm ex obſervationibus colligere potui. *Horroxius* noſter lunam in ellipſi circum terram, in ejus umbilico inferiore conſtitutam, revolvi primus ſtatuit. *Halleius* centrum ellipſeos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum terram. Et (i) ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progreſſu & regreſſu apogæi & quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur diſtantia mediocris lunæ à terrâ in partes 100000, & refe-

Octantibus in diverſâ Solis à Terrâ diſtantiâ, ſunt inter ſe inverſè ut X3, ſi fiat itaque ut Cubus maximæ diſtantiæ Terræ à Sole qui eſt 1.0516, ad Cubum 1 mediocris diſtantiæ, ita 47″ Æquatio pro mediocri diſtantia inventa erit ad 45″ circiter eaque erit Æquatio in maximâ diſtantiâ Solis à Terrâ, & ut .950107 Cubus minimæ diſtantiæ, ad 1 ita 47″ ad 49″ circiter quæ erit Æquatio maxima cum Sol erit in Perigæo. Eâdem etiam ratione ac in notâ (z) oſtendetur quomodo in quâvis Solis à Terrâ diſtantiâ, & in quavis poſitione Nodi reſpectu Solis Æquatio obtineri debeat.

(f) * *Per eamdem gravitatis Theoriam Apogæum Lunæ progreditur quam maximè* &c. Per Methodum ex ipſis Newtoni Principiis derivatam invenimus (pag. 505. & ſeq.) motum Apſidis eſſe ut $3yy-rr$, ſumendo y pro ſinu diſtantiæ Apſidis à quadraturâ, is ergo motus, juxta hunc calculum, evaneſcit cum $y\sqrt{3}=r$, cum nempe y eſt ſinus arcus 35gr.15′, poſitivus verò eſt in ſyzygiis illic enim fit $3yy-rr=2rr$ negativus in Quadraturis illic enim eſt $3yy-rr=-rr$.

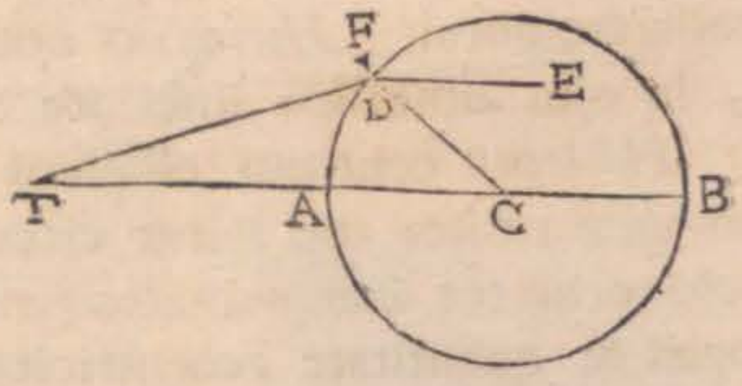
(g) * *Et excentricitas ſit maxima in priore caſu* cum nempe Apſides ſunt in ſyzygiis & minima in poſteriore, cum nempe *Apſides ſunt in Quadraturis.* Id utique ſtatuitur toto calculo de Excentricitate orbitæ Lunaris ſuperius pag. 512. & ſeq. tradito. 1214

(h) * *Et Æquatio maxima ſemeſtris*, &c. Hanc ex obſervationibus determinandam liquet cum non ſatis feliciter obtineatur abſoluta quantitas motus Apogæi per calculos ſecundum Newtoniana Principia inſtitutos; Methodus autem à nobis indicata eſt admodum incompleta & rudis, & in ea multa quæ conſiderari debuiſſent ſunt omiſſa, hinc cum in cæteris motibus Lunæ & Æquationibus ad votum ſuccedat Theoria Newtoniana, in hoc caſu aliquid adhuc deſiderari, fatendum eſt.

(i) * *Et ex motu in Epicyclo.* Ingeniosè & feliciter conjunctas eſſe unicâ conſtructione Geometricâ Excentricitatis variationes, & motus Apogæi æquationes, ex iis quæ de Excentricitate dicta ſunt pag. 516. intelligi poteſt; Illic enim oſtenditur quod ſi TC ſit excentricitas media f, CB maxima excentricitatis variatio ab excentricitate mediocri, BF arcus duplus diſtantiæ apſidis à ſyzygiâ, tunc linea TF eſt excentricitas, oſtenditur verò, Probl. II. pag. 517. variationem maxi-

DE MUNDI SYSTEMATE.

referat T terram & TC eccentricitatem mediocrem lunæ partium 5505. Producatur TC ad B, ut sit CB sinus æquationis maximæ semestris 12gr. 18′ ad radium TC, & circulus BDA centro C, intervallo CB descriptus erit epicyclus ille in quo centrum orbis lunaris locatur & secundum ordinem literarum

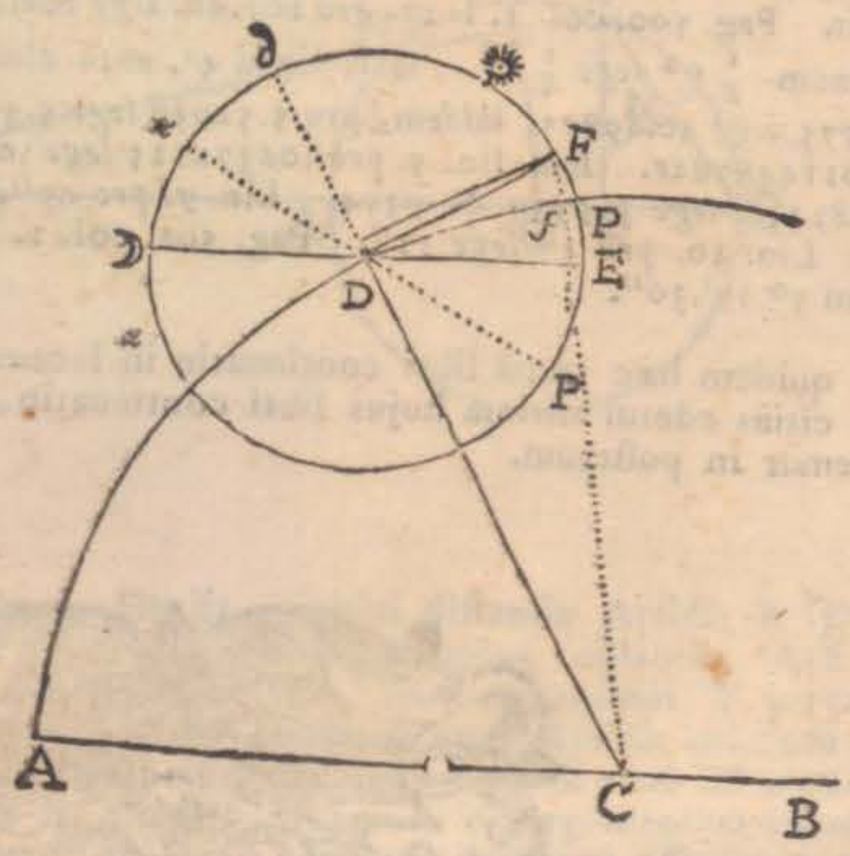


BDA revolvitur. Capiatur angulus BCD æqualis duplo argumento annuo, seu duplæ distantiæ veri loci solis ab apogæo lunæ semel æquato, & erit CTD æquatio semestris apogæi lunæ & TD eccentricitas orbis ejus in apogæum secundo æquatum tendens. Habitis autem lunæ motu medio & apogæo & eccentri-

221. mam excentricitatis quæ est A B tam ex observationibus quam consentiente calculo sumi posse 1172 partium quarum Radius orbitæ Lunaris est 100000 & excentricitas TC 5505, simul autem cum constet ex observationibus æquationem semestrem Apogæi 12gr. 18′ esse, ejus Anguli sinus est partium 1172 Radio existente partium 5505, ut liquet si fiat ut Radius 100000 ad sinum Anguli 12°. 18′ qui est 21303 ita 5505 ad quartum qui est 1172 $\frac{3}{4}$ hinc illum numerum pro maximâ variatione excentricitatis selegit Halleius, quia non procul est ab iis quos & observationes & calculus indicant, simulque est sinus anguli maximi quo discedunt Apsides à loco medio, Ergo quando B F est quadrans, ideoque Apsides octante à syzygiâ distant, sinus anguli F T B est ipsa linea C B sive 1172 $\frac{3}{4}$ dum radius T F est æqualis T C sive 5505, ergo eo in casu angulus F T B est verus discessus lineæ Apsidum à suo loco medio, & jacet T F in verâ positione lineæ apsidum, & cum T F sit excentricitas eo in loco est F in ipsâ positione centri orbitæ Lunaris; Idem proximè eveniet in quovis alio loco F; Nam cum Æquationes Apogæi (pag. 512.) sint ut sinus Arcus dupli distantiæ Apsidis à Sole, & sit F B arcus duplus distantiæ Apsidis à Sole & F E ejus sinus, æquatio maxima 12gr. 18′. debebit esse ad eam quæ huic loco F competit ut B C ad F E, sed in ea proxime sunt ratione anguli omnes F T B, hinc itaque est quam proximè T F in verâ positione lineæ Apsidum & F centrum orbitæ.

Cum atmosphæra terræ ad usque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem solis, & refringendo spargat eandem in umbram terræ, & spargendo lucem in confinio umbræ dilatet umbram: (r) Ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, addo minutum unum primum in eclipsibus lunæ, vel minutum unum cum triente. LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

Theoria vero lunæ primò in syzygiis, deinde in quadraturis, & ultimò in octantibus per phænomena examinari & stabiliri debet. Et opus hocce aggressurus motus medios solis & lunæ ad tempus meridianum in observatorio regio *Grenovicensi*, die ultimo mensis *Decembris* anni 1700. st. vet. non incommodè sequentes adhibebit: nempe motum medium solis ♑ 20^{gr}. 43$'$. 40$''$., & apo-



gio erit PE major semicirculo ut & F ☉, ideoque est ☉ in antecedentia respectu F promovetur itaque Luna propter hanc Æquationem; cæterum non tantum in luminarium Syzygiis, sed ad cæteros Lunæ ad spectus hæc adaptari possunt, verum commodius est Astronomis, Theoriam suam ex syzygiarum observationibus explorare & constituere.

(r) * *Ad diametrum umbræ.* Parallaxis est angulus qui subtenditur per semi-Diametrum terræ ex Luna spectatæ; Jam vero propter atmosphæræ actionem in radios lucis idem evenit respectu umbræ ac si semi-Diameter terræ 35 vel 40 milliaribus augeretur, nam radii illâc pergentes rectam viam non sequuntur, sed introrsum in umbram conjiciuntur, hinc

DE MUNDI SYSTEMATE.

& apogæi ejus ♋ 7gr. 44′. 30″, & motum medium lunæ ♒ 15gr. 21′. 00″., & apogæi ejus ♐ 8gr. 20′. 00″, & nodi ascendentis ♌ 27gr. 24′. 20″.; & differentiam meridianorum observatorii hujus & observatorii regii *Parisiensis* 0hor. 9min. 20sec. motus autem medii lunæ & apogæi ejus nondum satis accuratè habentur.

221. carent radiis solaribus loca quæ trans Atmosphæram eos recipere deberent, fungitur ergo Atmosphæra vice corporis opaci, & umbra ea de causa dilatari debet quasi semi-Diameter terræ in 35 vel 40 milliaribus foret aucta.

ERRATA.

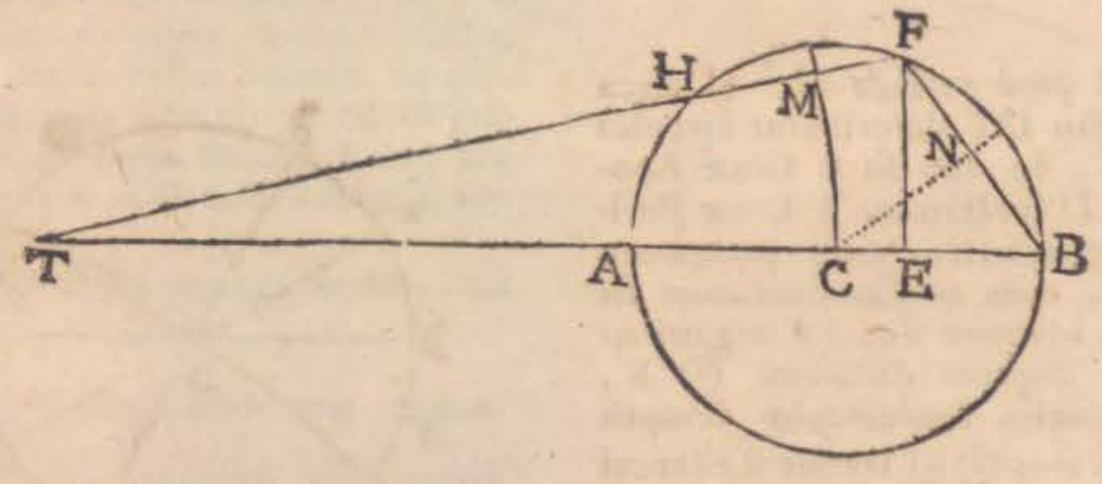
Pag. 400. Not. col. 2. lin. 8. & pag. 402. N. col. 1. l. 2. *pro* 110. *lege* 112. Pag. 498. Not. col. 1. l. 17. & 18. Luna *lege* Terra. *Ibid.* col. 2. l. 8. quæ factam erit *lege* factam, quæ erit. Pag. 500. col. 1. l. 27. *pro* 107.48. *lege* 108.48. Pag. 501. col. 1. linea 5a. ante ultimam $\frac{1}{2} r^2$ *lege* $\frac{1}{4} r^2$. *Ibid.* lineâ 4a. ante ultimam & ultimâ & col. 2. lin. 2. *pro* 40.449375 *lege* 40.89875, *ibidem*, *pro* 5.52939 *lege* 5.59082. *Ibid* lin. 3. *pro* .0011:97456r *lege* .0011448782r. *Ibid.* lin. 5. *pro* .06372125 *lege* .065590872. *Ibid.* lin. 6. *pro* 3′82338. & *pro* .82338. *lege* 3′.9354. & .9354. Lin. 7. *pro* 49″4. *lege* 56″. Lin. 8. *pro* 3′.49″. *lege* 3′.56″. Lin. 30. *pro* 3″ *lege* 11″. Pag. 502. col. 1. lin. 28. *pro* graduum 5.19′.36″. *lege* graduum 5°.19′.30″.

Serò quidem hæc tertii libri continuatio in lucem prodit propter varia Editoris negotia, citiùs edetur ultima hujus libri continuatio, quoniam ejus operâ nimis tardâ non utemur in posterum.

PHI-

tricitate, ut & orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus lunæ locus in orbe & distantia ejus à terrâ, (k) idque per methodos notissimas.

(l) In perihelio terræ, propter majorem vim solis, centrum orbis lunæ velociùs movetur circum centrum *C* quam in aphelio, idque in triplicatâ ratione distantiæ terræ à sole inversè. (m) Ob æquationem centri solis in argumento annuo comprehensam, centrum orbis lunæ velocius movetur in epicyclo *BDA* in duplicatâ ratione distantiæ terræ à sole inversè. Ut idem adhuc velociùs moveatur in ratione simplici distantiæ inversè; ab orbis centro *D* agatur recta *DE* versus apogæum lunæ seu rectæ *TC* parallela, & capiatur angulus *EDF* æqualis excessui argumenti annui prædicti supra distantiam apogæi lunæ à perigæo



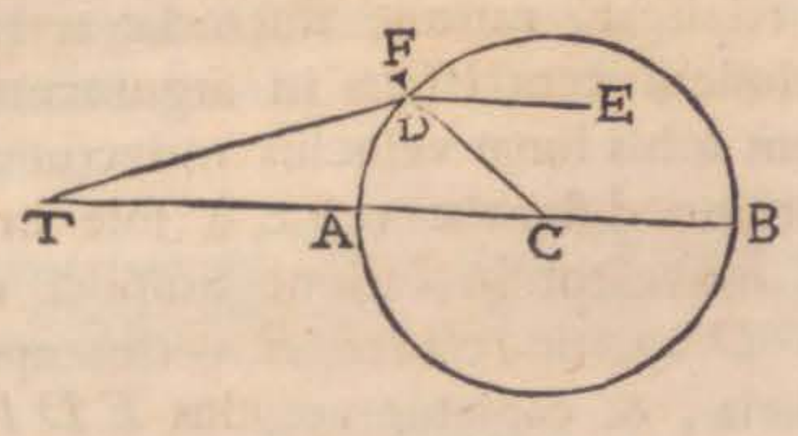
(k) * *Per Methodos notissimas.* De iis agitur Lib. I. Prop. XXXI.

(l) * *In perihelio.* Si nulla esset vis Solis quiescerent Apsides orbitæ Lunaris, nec mutaretur ejus excentricitas, motum itaque centri orbitæ Lunaris F in circulo BFHA vi Solari esse debitum liquet, omnes verò errores ex vi Solari ortos, esse proximè in triplicatâ ratione distantiæ terræ à Sole sæpius observatum est, hinc motus centri F orbitæ Lunaris in circulo BFHA eâ proportione variari debet.

(m) * *Ob Æquationem centri Solis in argumento annuo comprehensam* &c. Arcus FB vel arcus BD in figura Textus est duplus distantiæ Apsidis à syzygiâ, hoc est, duplus distantiæ Apsidis à Sole, itaque punctum F invenitur locum Solis à loco Apsidis tollendo, residui in consequentia duplum est arcus BF, & id residuum est argumentum annuum, fingatur apsidem immotam esse solem vero moveri, pendebit arcus BF ex motu Solis fietque major quo celerius Sol movebitur, sed motus Solis est inverse in ratione duplicatâ distantiarum Terræ à Sole (not. o), ergo motus puncti F ex hac consideratione sequitur rationem inversam duplicatam distantiæ Terræ à Sole. LIB. I. SECT.

DE MUNDI SYSTEMATE.

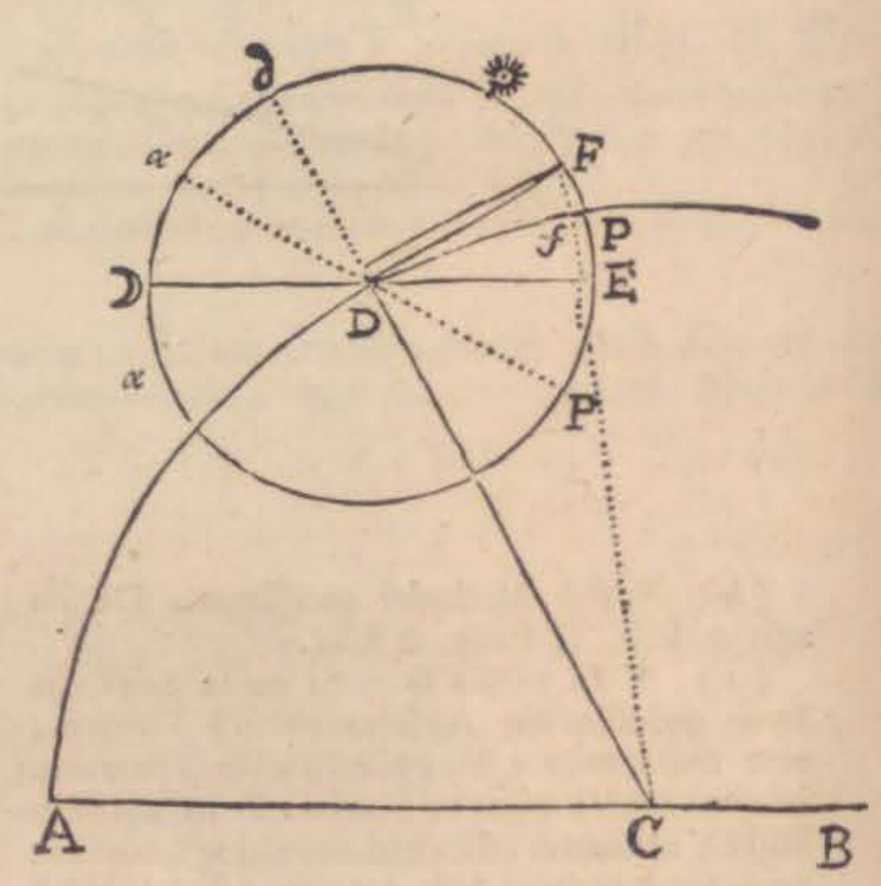
gæo ſolis in conſequentia; vel (n) quod perinde eſt, capiatur angulus CDF æqualis complemento anomaliæ veræ ſolis ad gradus 360. Et ſit DF ad DC ut dupla eccentricitas orbis magni ad diſtantiam mediocrem ſolis à terra, & motus medius



diurnus ſolis ab apogæo lunæ ad motum medium diurnum ſolis ab apogæo proprio conjunctim, id eſt, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & $52^{l}.\ 27^{ll}.\ 16^{lll}.$ ad $59^{l}.\ 8^{lll}.\ 10^{ll}.$ conjunctim, ſive ut 3 ad 100. Et

121. (n) * *Vel quod perinde eſt.* Si circa punctum D radio DF deſcribatur circulus EF ⊙ dα ☽ P; In quo ſit E Lunæ Apogæum è centro D ſpectatum; ☽ Lunæ Perigæum, α Apogæum Solis, P Solis perigæum, ⊙ locus Solis, cum ex Conſtructione ſit dDE = DCB, ideoque duplum argumenti annui, ſive duplum diſtantiæ ⊙ E, erit EDC æqualis ſemicirculo dempto 2⊙E, ſive erit $\frac{1}{2}c - 2\odot E$; Itaque ſi ei arcui EDC addatur EDF æqualis annuo argumento dempta diſtantia Apogæi Lunæ a Perigæo Solis, ſive ⊙E − PE, fiet $CDF = \frac{1}{2}c - \odot E - PE$, ſed cum $\frac{1}{2}c$ ſit æqualis diſtantiæ Perigæi Solis ab ejus Apogæo erit $\frac{1}{2}c = PE \odot \alpha$, ex quo itaque detracto PE & E⊙, eſt $CDF = \odot\alpha$ ſive diſtantiæ Solis ab Apogæo in antecedentia, aut quod idem eſt complemento ad 360 gr. arcus α ☽ PEF ⊙, qui arcus eſt diſtantia Solis ab Apogæo ſuo, in conſequentia ſumpta, quæ eſt Solis anomalia vera.

Si punctum P foret in conſequentia reſpectu puncti E, tunc EDF faciendus eſſet æqualis argumento annuo addita diſtantia Perigæi Solis à Lunâ, ſicque fieret $CDF = \frac{1}{2}c - \odot + PE$ & quoniam in eo



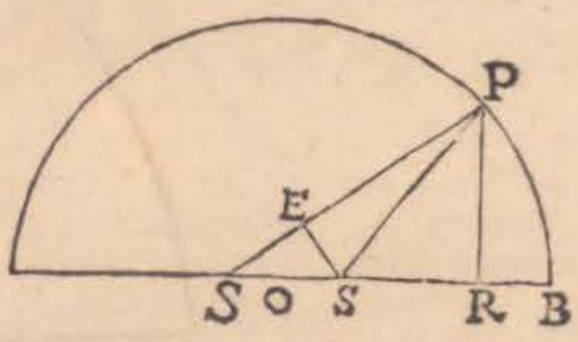
caſu eſt $\frac{1}{2}c = P\odot$ ☽ α, & $-\odot E + PE = -P\odot$, erit $CDF = \odot$ ☽ α, ſive erit diſtantia Solis ab Apogæo in Antecedentia poſito, hoc eſt, complementum ad 360 gr. arcûs α ☽ PEF ⊙, qui arcus eſt diſtantia Solis ab Apogæo ſuo in conſequentia ſumpta, quæ eſt Solis anomalia vera.

Et concipe centrum orbis lunæ locari in puncto F, & in epicyclo, cujus centrum eſt D, & radium DF, interea revolvi dum punctum D progreditur in circumferentiâ circuli $DABD$. Hâc (°) enim ratione velocitas, quâ centrum orbis lunæ in lineâ quâdam curvâ circum centrum C deſcriptâ movebitur, erit reciprocè ut cubus diſtantiæ ſolis à terrâ quamproximè, ut oportet. LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROB. XVI.

Com-

(o) * *Hâc enim ratione.* Æquationem hujus motus centri orbis Lunaris quæ adhibenda eſt ut moveatur velocius quam per primam conſtructionem, idque in ſimplici ratione diſtantiæ inverse eſſe proportionalem æquationi centri Solis conſtat eadem demonſtratione quâ in notis m & n pag. 519. de Æquationibus annuis Apogæi & nodi idem probatum fuit.

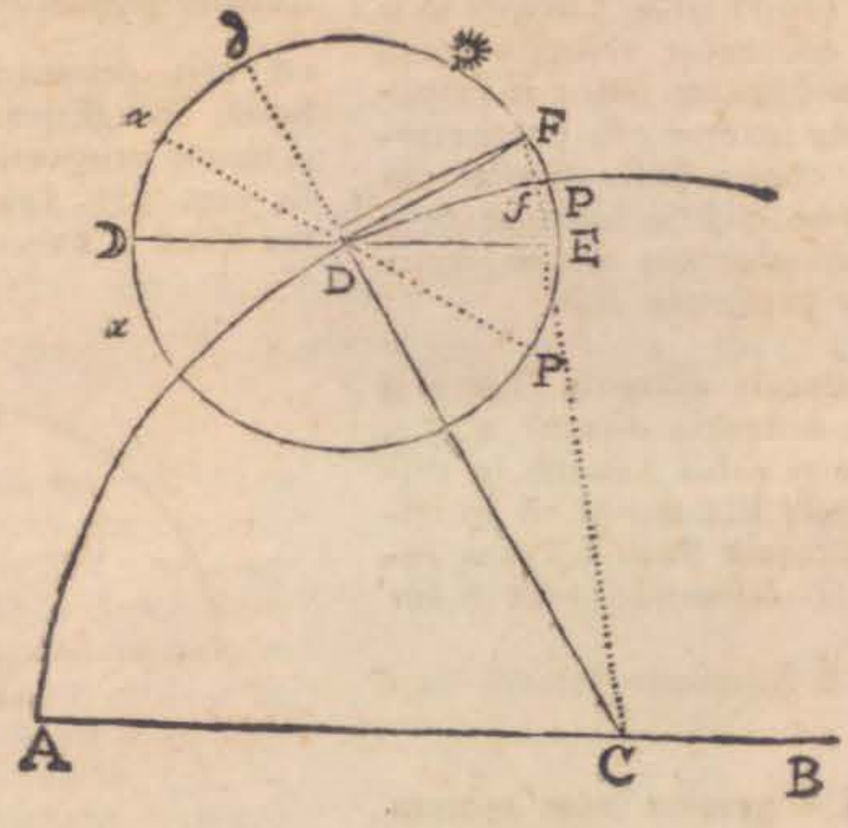
Dicatur a mediocris diſtantia Terræ à Sole, quævis alia diſtantia dicatur $a \pm x$, motus medius centri orbis Lunaris in diſtantia a ſit o, & quia ille motus eſt in triplicatâ ratione diſtantiæ Solis à Terra inverse, in aliâ quavis diſtantiâ Terræ à Sole erit $\frac{a^3}{a \pm x^3}\, o$ & formando ſeriem, erit $o \mp \frac{3x}{a}\, o$, ſed ſi fingeretur eum motum ſequi proportionem inverſam duplicatam diſtantiarum, inveniretur is motus ſingulis in locis $o \mp \frac{2x}{a}\, o$, & ita aſſumptus fuerat in primâ conſtructione (vid. not. m præced.), ergo ſingulo in loco error commiſſus per hanc fictionem foret $\mp \frac{x}{a}\, o$; Pariter ſi Solis motus medius dicatur m oſtenſum eſt (not. n pag. 519. 520.) differentiam inter motum medium & verum eſſe $\mp \frac{2x}{a}\, m$; Ideoque cum ratio $\mp \frac{x}{a} o$ ad $\mp \frac{2x}{a} m$, ſit in ſingulis punctis x eadem, Æquatio ex errore $\mp \frac{x}{a}\, o$ orta erit proportionalis Æquationi ex $\mp \frac{2x}{a}\, m$ orta, hoc eſt erit proportionalis Æquationi centri Solis; Sed Æquatio centri Solis, eſt quamproximè proportionalis ſinui anomaliæ Solis not. 372. Lib. I. nam illic demonſtratur quod ſi ex utroque foco S & ſ orbitæ Solis ducantur lineæ ad punctum P erit B ſ P anomalia media, & B S P anomalia vera, ideoque angulus S P ſ erit Æquatio, ducatur ergo ex ſ in S P perpendiculum ſ E & ex P perpendiculum P R ob ſimilitudinem Triangulorum S ſ E & ſ P R erit, S P ad P R ut S ſ ad ſ E, ſive ſumendo S P pro radio conſtanti (quod eſt proxime verum) erit, ut Radius ad Sinum Anomaliæ veræ ita dupla excentricitas ad ſinum æquationis Solis, ſive ad ipſam Æquationem, nam in parvis angulis, arcus pro ſinubus ſumi poſſunt. Hinc ſinus anomaliæ veræ eſt ad æquationem centri Solis in Ratione datâ radii nempe ad duplam excentricitatem, hinc itaque, Æquatio orta ex errore $\mp \frac{x}{a}\, o$, erit ut ſinus Anomaliæ Solis, ſed



1 2 1.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Computatio motus hujus difficilis eſt, ſed facilior reddetur per approximationem ſequentem. Si diſtantia mediocris lunæ à terra ſit partium 100000, & eccentricitas TC ſit partium 5505 ut ſupra: recta CB vel CD invenietur partium $1172\frac{3}{4}$ & recta DF partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad diſtantiam TC ſubtendit angulum ad terram quem tranſlatio centri orbis à loco D ad locum F generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata



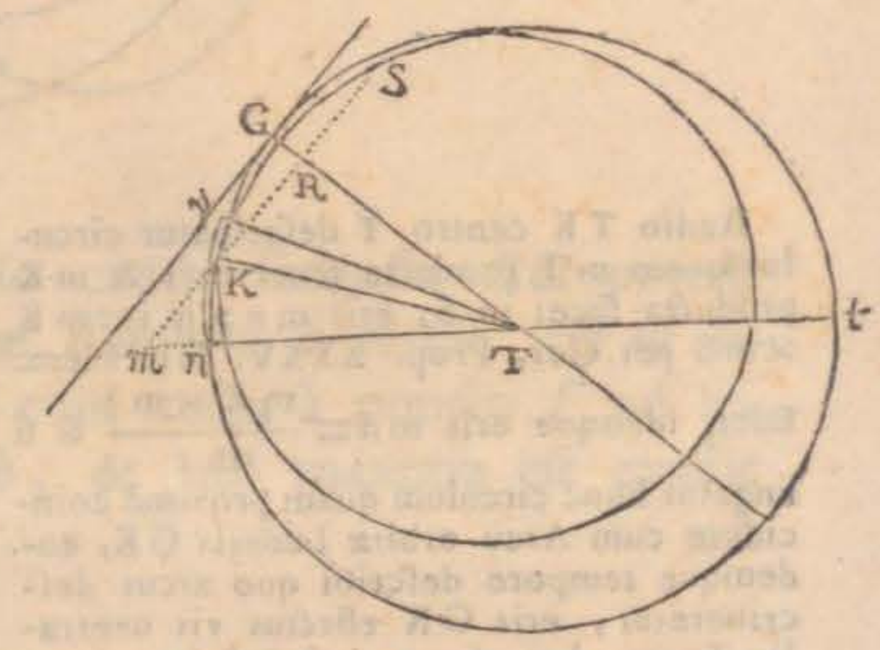
125. Angulus C D F eſt complementum ejus anomaliæ ad 360gr. ſinus autem arcus alicujus & ſinus ejus complementi ad 360gr. ſunt unum & idem, ergo Æquatio ex errore $\mp\frac{x}{a}o$ nata eſt proportionalis ſinui angulorum C D F & ſi ſumatur Radius D F æqualis æquationi maximæ hinc natæ, cæteri omnes ſinus angulorum C D F erunt ipſæ æquationes in datâ Solis anomaliâ, ſi itaque ſumantur à puncto D arcus D f in circulo B D A æquales illis ſinubus, erit f verus locus centri orbitæ Lunaris, & quia ob exiguitatem horum ſinuum reſpectu radii C D, linea per C & f ducta cadit etiam in F ſumi poteſt F, ut verus locus centri orbitæ Lunaris.

Invenitur autem Æquatio maxima orta ex errore $\mp\frac{x}{a}o$; ſi attendatur quod Solis motus eſt ubique $m \mp \frac{2x}{a}m$, ſive $m \mp \frac{x}{a} \times 2m$ ideoque ſummam omnium errorum ex errore $\frac{x}{x}o$ fore ad ſummam omnium errorum in ſolis motu genitorum ut o ad $2m$, ſive Æquationem quæſitam eſſe ad Æquationem Solis ut eſt motus centri orbitæ Lunaris per circulum B D A ad duplum motum medium Solis reſpectu ſui Apogæi, ſed quoniam arcus B D ſunt ſemper dupli diſtantiæ Solis ab Apogæo Lunæ motus

pĩcus eſt $13\frac{1}{3}$ P proxime, hinc motus Apogæi fit $\frac{f}{1} \times \frac{13\frac{1}{3} \times 69.7132}{1+\frac{f}{1}\times\frac{69.7132}{360}}$.

Excentricitas f orbitæ Lunaris eſt quidem variabilis, de ejus legibus poſthac; Excentricitatis valorem mediocrem aſſumit Newtonus .05505 ſi Radius ſit 1, Ill. Caſſinus eam paulo minorem facit nempe .05430; ex Legibus autem variationis excentricitatis patebit quod loco f ſcribi debet .05147 & loco T, 1.05147 unde motus Apſidum fiet $\frac{.04895\times13\frac{1}{3}\times69^{gr}.7132}{1+\frac{.04895\times69.7132}{360}} = \frac{45^{gr}.4997}{1.0126} = 44.9$ circiter; qui quidem motus invenitur per obſervationes 40^{gr}.

narem circulo ſatis finitimam eſſe) motus Lunæ concipi poteſt quaſi fieret in Ellipſi ſimili illi quam revera deſcribit, ſed cujus Planum foret mobile, ita ut integra revolutione Apſis ejus orbitæ promoveretur quantitate $360^{gr}. \times \sqrt{\frac{r^3V-T^3Y}{r^3V-4T^3Y}}$; Demonſtratio eſt in exemplis tertiis ad Propoſitionem XLV, ſed eam demonſtrationem hic breviter trademus. 121.



Sit G Lunæ Apogæum, GK arcus quam minimus quem Luna in propriâ orbitâ dato exiguo tempore deſcriberet, transferatur vero Luna cum ſuo Plano ita ut ejus Apſis transferatur in γ dum Luna ex G in K moveri debuiſſet; motus Lunæ in G ex duobus compoſitus cenſeatur, nempe ex motu ſecundum Tangentem per velocitatem acquiſitam, & ex motu per vim centralem genito quævis ſimul ac ſemel in puncto G agere cenſeatur, hic motus per GR repræſentetur, motus ſecundum Tangentem per RK, fiat vero RK ad Rm, ut angulus GTK ad GTK + GTγ, & ſi nulla vis centralis ex revolutione plani oriretur, Luna foret in m cum debuiſſet eſſe in K, ſed quia Tm eſt longior quam TK ſumatur Tn = TK & revera Luna erit in n, & erit mn effectus vis centralis ex revolutione plani genitæ dum Luna deſcripſiſſet arcum GK.

Ra-

DE MOTU APSIDUM

Secundum Newtoni methodum.

Hic revocanda ſunt ea quæ in Sectione IX. Lib. I. dicta ſunt de motu corporum in orbibus mobilibus.

LEMMA I. Prop. XLIV. Lib. I.

Concipiatur planum Orbitæ alicujus uniformiter revolvi, dum corpus quoddam ipſam orbitam propter vim centralem aliquam percurrit, id corpus in ſingulo puncto duplici vi centrali urgebitur, propriâ nempe quâ urgetur in centrum virium, & eâ quæ ex revolutione Plani orbitæ pendet. Hæc ubique erit inverſè in triplicatâ ratione diſtantiæ à Centro.

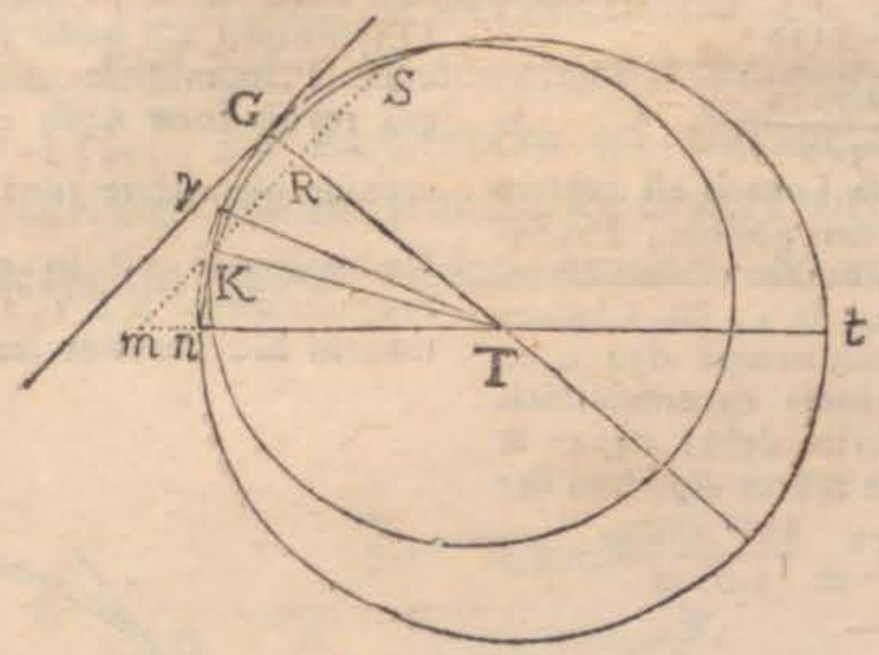
Demonſtrationem vide Propoſitione ſuprà indicatâ.

LEMMA II.

Si vis Solis in Lunam agens, ſit quantitas quæ in mediocri diſtantiâ ſit conſtans, dicaturque Y, creſcat vero ut diſtantia à Terrâ, vis Terræ in diſtantiâ mediocri ſit V, Dico quod (ponendo orbitam Lu-

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



Radio TK centro T describatur circulus quem mT producta secet in t & mK producta secet in S, erit $mn \times mt = mK \times mS$ per Cor. Prop. XXXV. III. Elem. Eucl. ideoque erit $mn = \frac{mK \times mS}{mt}$ & si fingatur hunc circulum quam proxime coincidere cum Arcu orbitæ Lunaris GK, eodemque tempore describi quo arcus describeretur, erit GR effectus vis centralis Terræ dum Luna describeret arcum GK, & per notam proprietatem circuli hic arcus foret $\frac{\overline{RK^2}}{2GT}$.

Ergo cum effectus vis centralis ex revolutione plani genitæ, & effectus vis centralis terræ eodem tempore producti sint mn & GR, vires illæ erunt uti mn & GR, sive ut quantitates ipsis æquales $\frac{mK \times mS}{mt}$ & $\frac{RK^2}{2GT}$ sed cum mt sit quamproxime 2GT, sitque $mS = mR + RK$, & $mK = mR - RK$, istæ vires sunt ut $mR^2 - RK^2$ ad RK^2, si itaque dicatur T distantia maxima Lunæ, T−X alia distantia quævis, r mediocris distantia, V vis terræ in eâ mediocri distantiâ, erit $\frac{r^2}{T^2}$ V vis centralis terræ in distantia T, ideoque, cum sit RK^2 ad $mR^2 - RK^2$ ut vis gravitatis ad vim ex revolutione plani genitam hæc erit, $\frac{r^2 V \times mR^2 - r^2 V \times RK^2}{T^2 \times RK^2}$.

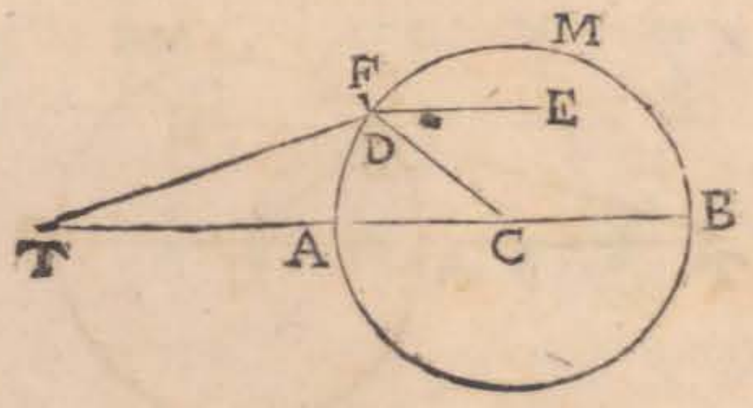
In puncto K aut alio quocumque ubi TK est T−X, vis gravitatis est $\frac{r^2}{\overline{T-X}^2} V$, & quoniam vires ex revolutione Plani genitæ sunt inversè in triplicatâ ratione distantiarum, vis plani est $\frac{Tr^2V \times mR^2 - Tr^2V \times RK^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$ quæ si addatur vi gravitatis fit $\frac{Tr^2VRK^2 - Xr^2VRK^2 + Tr^2VmR^2 - Tr^2VRK^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$

Sed cum in eo puncto vis gravitatis sit $\frac{r^2}{\overline{T-X}^2} V$, & vis subtractitia Solis sit ut distantiæ, ideoque sit $\frac{T-X}{r} Y$, si reducantur ad communem denominatorem $Tr^2V - Xr^2V - \frac{T^4Y}{r} + \frac{4T^3XY}{r}$. $\overline{T-X}^3$ fient $\frac{\qquad\qquad}{\overline{T-X}^3}$

Ut autem æquipolleat Plani revolutio cum subtractione vis Solis, ita determinandæ sunt quantitates RK^2 & mR^2, ut expressiones harum virium sint ubique æquales, & 1°. quidem cum X sit zero, vis gravitatis cum vi Plani est $\frac{Tr^2V \times mR^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$ & vis gravitatis subtractâ vi Solis remanet $\frac{Tr^2V - \frac{T^4Y}{r}}{\overline{T-X}^3}$. Oportet ergo ut sit

$mR^2 =$

cata in ſitu parallelo ad diſtantiam ſuperioris umbilici orbis lunæ à terra, ſubtendit eundem angulum, quem utique tranſlatio illa generat in motu umbilici, & ad diſtantiam lunæ à terrâ (P) ſubtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu lunæ, quique propterea æquatio centri ſecunda dici poteſt. Et hæc æquatio, in mediocri lunæ diſtantia à terrâ, eſt ut ſinus anguli, quem recta illa *D F* cum recta à puncto *F* ad lunam ducta continet quamproximè, & ubi maxima eſt evadit 2′. LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

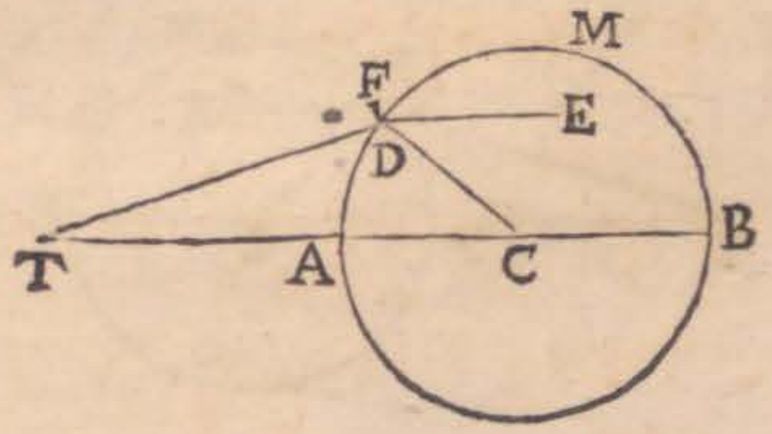


tus diurnus centri orbis Lunaris per circulum B D A eſt etiam duplus motus Solis ab Apogæo Lunæ, hinc Æquatio quæſita eſt ad maximam Æquationem Solis ut eſt radius D C ad diſtantiam mediocrem Solis à Terra & ut duplus motus diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad duplum motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo conjunctim, maxima autem Solis Æquatio eſt ipſa dupla excentricitas orbis magni, hinc Æquatio quæſita ſive radius D F eſt ad duplam excentricitatem ut D C ad diſtantiam mediocrem Solis à Terra, & ut motus diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo conjunctim, undè viciſſim eſt etiam D F ad D C ut dupla excentricitas ducta per motum diurnum Solis ab Apogæo Lunæ, ad diſtantiam mediocrem Solis à Terrâ ductam per motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo.

(p) * *Subtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu Lunæ.* Scilicet tota orbita Lunæ, ipſaque Luna per motum centri orbitæ ex D in F tranſlatum ex proprio loco mota cenſeri debet in locum alium per lineam ipſius D F duplam ipſique Parallelam, cum itaque diſtantia mediocris ſit partium 100.000, ſi hæc linea quæ duplicata eſt 70.4, angulum rectum cum linea à Terra ducta efficiat quo caſu maximam æquationem facit, ipſa ſubtendet angulum 2′ 25″ ſiquidem ſinus duorum minutorum eſt 58.18 ſinus trium 87.27. In aliis autem hujus lineæ poſitionibus reſpectu lineæ à Terrâ ductæ, anguli quos ſubtendet erunt ad iſtum ut eſt ſinus Anguli quem facit cum lineis à Terrâ ductis ad Radium; Nam in Triangulis in quibus duæ lineæ ſunt conſtantes ſed earum angulus variabilis, ſi una ex iis lineis alterius reſpectu ſit minima, Tertia linea pro conſtante aſſumi poteſt, eſt verò ad minimam lineam, ut ſinus anguli variabilis ad ſinum anguli oppoſiti minimæ lineæ; hinc ſinus anguli variabilis & ſinus anguli minimi ſunt in ratione datâ. Ergo ut ſinus 1 2 1.

DE MUNDI SYSTEMATE.

2′. 25″. (q) Angulus autem quem recta *D F* & recta à puncto *F* ad lunam ducta comprehendunt, invenitur vel subducendo angulum *E D F* ab anomalia media lunæ, vel addendo distantiam lunæ à sole ad distantiam apogæi lunæ ab apogæo so-



lis. Et ut radius est ad sinum anguli sic inventi, ita 2′. 25″. sunt ad æquationem centri secundam, addendam, si summa illa sit minor semicirculo, subducendam si major. Sic habebitur ejus longitudo in ipsis luminarium syzygiis.

Cum

121. sinus Anguli recti sive Radius ad 2′. 25″. ita sinus anguli quem facit linea à terrâ ducta cum lineola Parallela ad D F, ad angulum quo locus Lunæ mutatus cernitur.

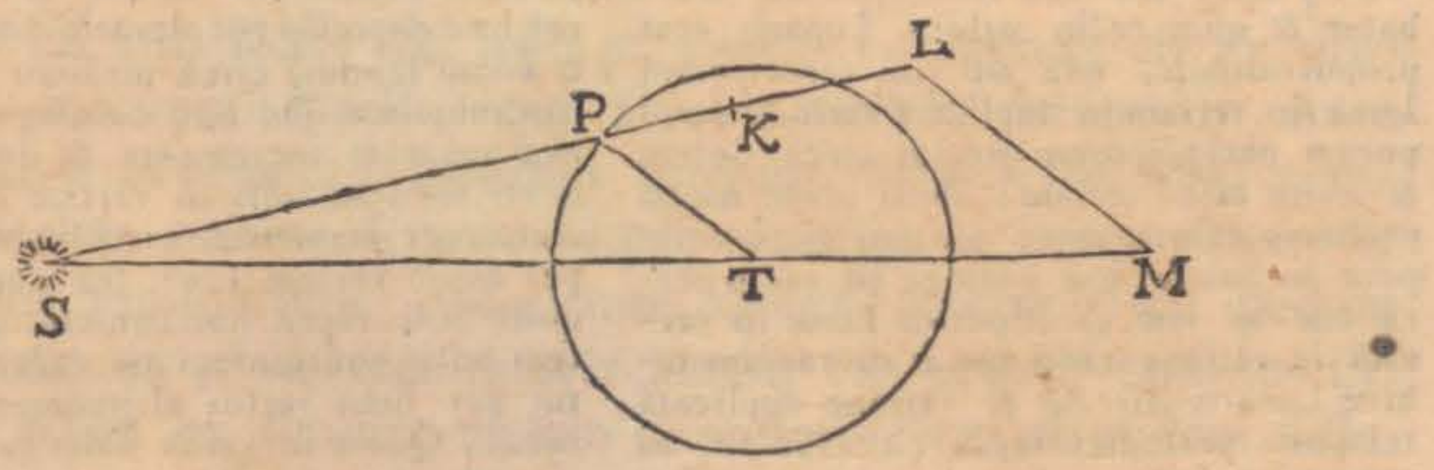
(q) * *Angulus autem quem* facit linea à terrâ ducta cum lineola Parallela ad D F, & in ipso loco Lunæ posita, æqualis est illi quem facit recta D F & recta à puncto F ad Lunam ducta, saltem proximè quia F est centrum orbitæ Lunaris à quo Terra non multum distat; Fingatur, produci lineam D F & ex puncto F duci lineam Parallelam lineæ D E, quæ ad Apogæum Lunæ tendit, & ex eodem puncto F aliam duci lineam ad Lunam, angulus hujus lineæ cum linea D E erit anomalia media Lunæ ergo angulus hujus lineæ cum linea D F producta erit differentia anguli E D F & anomaliæ mediæ Lunæ, sive quia erat E D F differentia argumenti annui, & distantiæ Apogæi Lunæ à Perigæo Solis & ex Anomalia media Lunæ tollatur argumentum annuum supereſt distantiæ Lunæ à Sole, cui addi debet distantia Apogæi Lunæ & Perigæi Solis, sive (quia semi circuli additi vel detracti non mutant valores Angulorum eorumque sinuum) distantia Apogæi Lunæ & Apogæi Solis: cætera facile patebunt ex figuræ descriptione; Exemplum esto in conjunctione ubi est ☉ locus Solis & Lunæ, liquet enim quod quando punctum ☉ est in consequentia respectu puncti F, Luna quæ transfertur per lineam parallelam lineæ D F transfertur in Antecedentia; dum è contrà punctum ☉ est in antecedentia respectu puncti F, Luna transfertur in consequentia; est vero F ☉ = P E, cum ergo A L est major semicirculo, ut in figura, tunc P E sive F ☉ est minor semicirculo, est ergo ☉ in consequentia respectu puncti F, hinc subducenda est ea Æquatio; sit verò A E minor semicirculo-

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO II.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.



SOlis vis *ML* ſeu *PT*, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1. ad 638092,6. Et vis *TM–LM* ſeu 2*PK* in ſyzygiis lunaribus eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro terræ, id eſt, in (z) ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideo-

(z) * *In ratione* $60\frac{1}{2}$ *ad* 1. Quemadmodùm in prop. 25ª. demonſtratum eſt eam partem vis centripetæ Lunaris in Solem quâ motus ejus circà terram perturbatur

DE MUNDI SYSTEMATE.

ideoque vis prior in ſuperficie terræ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus diſtant à ſole. Vi alterâ, quæ duplo major eſt, mare elevatur & ſub ſole & in regione ſoli oppoſitâ. (x) Summa virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat aquam in regionibus quæ 90 gradibus diſtant à ſole, ſive elevet eandem in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis, hæc ſumma erit tota ſolis vis ad mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac ſi tota in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus diſtant à ſole nil ageret.

Hæc eſt vis ſolis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi ſol tam in vertice loci verſatur quam in mediocri ſuâ diſtantiâ à terrâ. (a) In aliis ſolis poſitionibus vis ad mare attollendum eſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis ſolis ſupra horizontem loci directè & cubus diſtantiæ ſolis à terrâ inversè.

Co-

121. batur & quæ radio orbitæ Lunaris erat proportionalis, eſſe ad vim centripetam Lunæ in terram in duplicatâ ratione temporum periodicorum terræ circà Solem & Lunæ circà terram, ſimili planè modo probatur eam quoquè partem vis centripetæ in Solem quæ analoga eſt radio terræ eſſe ad vim centripetam Lunæ in terram in ratione radii terræ ad radium orbitæ Lunaris directè & ratione duplicatâ temporis periodici terræ circà Solem ad tempus periodicum Lunæ circà terram inversè. Quarè vires Solis ad perturbandos motus corporum propè ſuperficiem terræ ſunt ad vires Solis ad perturbandos motus Lunæ ut radius terræ ad radium orbitæ Lunaris, hoc eſt, ut 1 ad 60 $\frac{1}{2}$.

(x) * *Summa virium* eſt ad vim gravitatis ut 3 ad 38604600 ſive ut 1 ad 12868200.

(a) * *In aliis Solis poſitionibus.* Hâc vi aqua maximè deprimitur ubi Sol verſatur in horizonte & maximè elevatur ubi Sol in vertice loci verſatur. Depreſſio autem & elevatio aquarum magis ac magis decreſcit quò altiùs Sol aſcendit ſuprà horizontem, aut à vertice deſcendit. Præterea hæc depreſſio aut elevatio circa initium & finem lentiùs, circà medium verò celeriùs minuitur; ſed hæc contingent ſucceſſiva aquarum incrementa & decrementa, ſi vis maxima Solis in vertice loci exprimatur per diametrum circuli, hoc eſt, per per ſinum verſum 180°. ſeù duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem, in aliis autem Solis poſitionibus vis eadem exhibeatur per ſinus verſos altitudinum duplicatarum; Quarè in variis Solis poſitionibus, vis ad marè attollendum ſumi poteſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem, ſeclusâ tamen perturbatione quæ ex variâ Solis à tellure diſtantiâ oritur. At vis Solis augetur vel minuitur quò propiùs ad terram accedit aut longiùs ab eâ recedit, idque in ratione triplicatâ diſtantiarum inversâ (cor. 14. prop. 66. lib. 1.) conſiderari itaquè poterit, vis Solis ad mare attollendum ut ſinus verſus duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem loci directe & cubus diſtantiæ Solis à Terrâ inverse. Cæterùm tota hæc propoſitio eleganter admodùm calculo tractata legitur in tribus Diſſertationibus quæ Tom. 3°. adjectæ ſunt.

Corol. Cum vis centrifuga partium terræ à diurno terræ motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ ſub æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub polis menſurâ pedum *Pariſienſium* 85472, ut ſupra in prop. XIX; vis ſolaris de quâ egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1. ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 ſeu 1 ad 44527, (b) efficiet ut altitudo aquæ in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis ſuperet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus diſtant à ſole, menſurâ tantùm pedis unius *Pariſienſis* & digitorum undecim cum triceſimâ parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim lunæ ad mare movendum.

(c) Vis lunæ ad mare movendùm colligenda eſt ex ejus proportione ad vim ſolis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ aſcenſus in conjunctione & oppoſitione luminarium, obſervante *Samuele Sturmio*, eſt pedum plus minus 45, in quadraturis autem eſt pedum tantum 25. Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differen-

(b) * *Efficiet ut altitudo aquæ.* Quoniam ex variis pendulorum obſervationibus & nuperrimè inſtitutis gradûs meridiani menſuris ſub circulo polari, terra altior eſt ſub æquatore quam ex Theoriâ Newtonianâ prodiit (prop. 19. lib. hujus) paulò augenda erit altitudo aquæ in hoc corollario definita. Obſervandum autem eſt corollarium illud rigoroſè verum non eſſe; Newtonus enim ex differentiâ diametri æquatoris & axis terræ per ſimplicem proportionem colligit altitudinem aquæ ex vi Solis oriundam; uterque tamen caſus eſt longè diverſus, primus ſiquidem pendet à quadraturâ circuli, alter verò refertur ad quadraturam hyperbolæ (ut patet ex cor. 2. prop. 90. lib. 1. & not. 106. lib. hujus). Sed quam parùm à veritate diſcrepet præſens corollarium apparet ex computo inito in Diſſertatione Clariſſ. Macclaurin prop. 5. 121.

(c) * *Vis Lunæ ad Mare movendum.* Vid. cap. 6. num. 10. in Diſſertatione Clariſſ. Bernoullii & prop. 9. in Diſſertatione Clariſſ. Macclaurini.

DE MUNDI SYSTEMATE.

rentiâ oritur. Solis igitur & lunæ in æquatore verſantium & mediocriter à terrâ diſtantium ſunto vires S & L, & erit L+S ad L−S ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* æſtus maris ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi* ad pedes plus minus ſexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æſtus in ſyzygiis ſuperare poteſt altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus ſeptem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia ſit pedum novem, erit L+S ad L−S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ ſeu 41 ad 23. Quæ proportio ſatis congruit cum priore. Ob magnitudinem æſtus in portu *Briſtoliæ*, obſervationibus *Sturmii* magis fidendum eſſe videtur, ideoque donec aliquid certius conſtiterit, proportionem 9 ad 5 uſurpabimus.

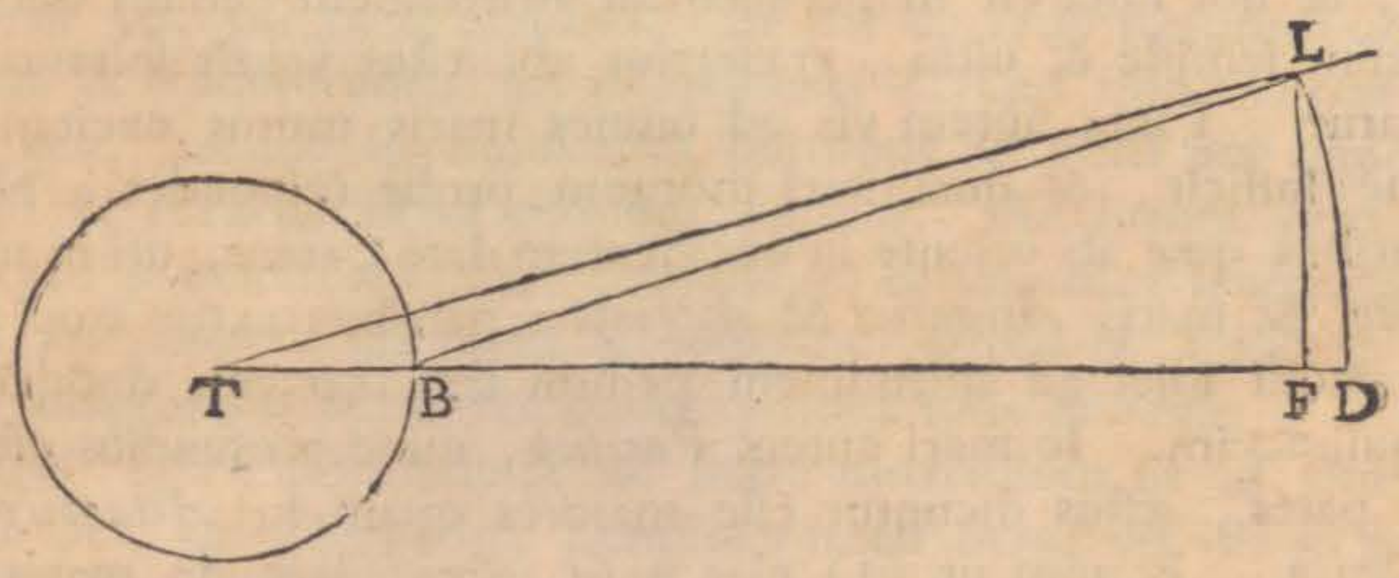
Cæterum ob aquarum reciprocos motus, æſtus maximi non incidunt in ipſas luminarium ſyzygias, ſed ſunt tertii à ſyzygiis ut dictum fuit, ſeu proximè ſequuntur tertium lunæ poſt ſyzygias appulſum ad meridianum loci, vel potius (ut à *Sturmio* notatur) ſunt tertii poſt diem novilunii vel plenilunii, ſeu poſt horam à novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideoque incidunt in horam à novilunio vel plenilunio plus minus quadrageſimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam ſeptimam circiter ab appulſu lunæ ad meridianum loci; ideoque proximè ſequuntur appulſum lunæ ad meridianum, ubi luna diſtat à ſole vel ab oppoſitione ſolis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in conſequentia. Æſtas & hyems maxime vigent, non in ipſis ſolſtitiis, ſed ubi ſol diſtat à ſolſtitiis decimâ circiter parte totius circuitus, ſeu gradibus plus minus 36 vel 37. Et ſimiliter maximus æſtus maris oritur ab appulſu lunæ ad meridianum loci, ubi luna diſtat à ſole decimâ circiter parte motus totius ab æſtu ad æſtum. Sit diſtantiâ illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et (d) vis ſolis in hâc diſtantiâ lunæ à ſyzygiis & quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum

121. (d) * *Et vis Solis.* Hanc virium proportionem non multùm à verò differre patet ex iis quæ immediatè præcedunt.

motum maris à vi lunæ oriundum, quam in ipsis syzygiis & quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiæ hujus duplicatæ seu anguli graduum 37, hoc est, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia superiore pro S scribi debet 0,7986355 S. LIBER TERTIUS. PROP. XXXVII. PROBL. XVIII.

Sed & vis lunæ in quadraturis, ob declinationem lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ post quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ versatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis ad mare movendum diminuitur (e) in duplicatâ ratione sinus complementi declinationis quamproximè. Et propterea vis lunæ in his quadraturis est tantùm 0,8570327 L. Est igitur L+0,7986355S ad 0,8570327L−0,7986355S ut 9 ad 5.

(f) Præterea diametri orbis, in quo lunâ sine eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque distantia



(e) 122 * *In duplicatâ ratione.* Sit TBD planum æquatoris, T centrum telluris, sitque Luna in L, erit angulus LBD, mensura declinationis ab æquatore, seu, ob exiguum angulum TLB, erit declinatio illa quamproximè æqualis angulo LTD, cujus anguli cosinus est TF, sumpto TL, pro radio. Jam vis quæ aquam in loco æquatoris B, directè trahit à centro T, ubi Luna versatur in plano æquatoris in D, est ad vim quæ eandem aquam directè à centro trahit, ubi Lunæ est in L, ut TL ad TF, hoc est, ut radius ad sinum complementi declinationis LTD, sepositâ vi aquæ centripetâ versus T. Sed, auctâ vi illâ centripetâ, in eâdem ratione minuitur vis altera aquam à centro trahens; Quarè, componendo, vis Lunæ in loco D, est ad vim ejus in L, ut quadratum sinûs totiùs TL, ad quadratum sinûs complementi TF, declinationis Lunæ LTD. 122.

(f) * *Præterea diametri orbis.* (Prop. 28. Lib. hujus).

DE MUNDI SYSTEMATE.

tia lunæ à terrâ in ſyzygiis eſt ad diſtantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et diſtantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ à ſyzygiis, ubi æſtus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ à quadraturis, ubi æſtus minimus generatur, ſunt ad mediocrem ejus diſtantiam ut 69,c98747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. (g) Vires autem lunæ ad mare movendum ſunt in triplicatâ ratione diſtantiarum inversè, ideoque vires in maximâ & minimâ harum diſtantiarum ſunt ad vim in mediocri diſtantia ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. (h) Unde fit 1,017522L + 0,7986355 S ad 0,9830427×0,8570327L−0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis ſolis ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol. 1. Cum aqua vi ſolis agitata aſcendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum triceſimâ parte digiti, eâdem vi lunæ aſcendet ad altitudinem octo pedum & digitorum $\frac{5}{22}$, & vi utrâque ad altitudinem pedum decem cum ſemiſſe, & ubi luna eſt in perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum ſemiſſe & ultra, præſertim ubi æſtus ventis ſpirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abundè ſufficit, & quantitati motuum probè reſpondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem latè patent, uti in mari *Pacifico*, & maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem, duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latius patet, æſtus dicuntur eſſe majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut (i) plenus ſit æſtus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor eſſe debet quam graduum nonagin-

122. (g) * *Vires autem Lunæ.* (Cor. 14. Prop. 66. Lib. 1.).

(h) * *Undè fit.* Ut ex hâc analogiâ vis L Lunæ colligi poſſit ducenda ſunt media & extrema, hæcque orietur æquatio 1.017522 L × 5 + 0.7986355 S × 5 = 0.9830427 × 9 × 0.857032 L − 0.7986355 S × 9; & tranſponendo hæc habetur proportio S : L = 0.9830427 × 0.8570327 × 9 − .017522 × 5 : 0.7986355 × 5 + 0.7986355 × 9. Jam verò ſumptis horumce numerorum Logarithmis, & quæſitis reſpondentibus numeris in vulgaribus Logarithmorum tabulis, prodit S ad L ut 1 ad 4.4815 quamproximè.

(i) * *Ut plenus ſit æſtus.* (109).

naginta. In mari *Æthiopico* aſcenſus aquæ intra tropicos minor eſt quam in zonis temperatis, propter anguſtiam maris inter *Africam* & auſtralem partem *Americæ*. In medio mari aqua nequit aſcendere, niſi ad littus utrumque & orientale & occidentale ſimul deſcendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Eâ de causâ fluxus & refluxus in inſulis, quæ à littoribus longiſſime abſunt, perexiguus eſſet ſolet. In portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad ſinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent eſſe ſolito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normannia*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad littora vero quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo æſtus reſpondet viribus ſolis & lunæ.

Corol. 2. Cum vis lunæ ad mare movendum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longè minor quam quæ vel in experimentis pendulorum, vel in ſtaticis aut hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. (k) In æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Co-

(k) * *In æſtu ſolo marino.* Hæ quidem vires ad movendum mare ſufficiunt, ſed alios effectus ſenſibiles producere non poſſunt. Etenim granum unum cum pondere granorum 4000 etiam accuratiſſimâ libra comparatum ſentiri vix poteſt, vis autem Solaris eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, ſummaque virium Solis & Lunæ eſt ad eandem vim gravitatis ut 1 ad 2032890. Quare patet vires illas licet conjunctas multò minores eſſe quam ut pondus corporis cujuſvis in Libra appenſi ſenſibiliter augere vel minuere poſſint. Unde nec in experimentis pendulorum, Baro- 122.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Corol. 3. Quoniam vis lunæ ad mare movendum eſt ad ſolis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per corol. 14. prop. LXIV. lib. 1.) ſunt ut denſitates corporum lunæ & ſolis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas lunæ erit ad denſitatem ſolis ut 4.4815 ad 1 directè, & cubus diametri lunæ ad cubum diametri ſolis inversè: id eſt (cum diametri mediocres apparentes lunæ & ſolis ſint $31'.\ 16''\frac{1}{2}$ & $32'.\ 12''$) ut 4891 ad 1000. (l) Denſitas autem ſolis erat ad denſitatem terræ ut 1000 ad 4000; & propterea denſitas lunæ eſt ad denſitatem terræ ut 4891 ad 4000 ſeu 11. ad 9. Eſt igitur corpus lunæ denſius & magis terreſtre quam terra noſtra.

Corol. 4. Et cum vera diameter lunæ ex obſervationibus aſtronomicis ſit ad veram diametrum terræ ut 100 ad 365; erit maſſa lunæ ad maſſam terræ ut 1 ad 39,788.

Corol. 5. Et (m) gravitas acceleratrix in ſuperficie lunæ erit quaſi triplo minor quam gravitas acceleratrix in ſuperficie terræ.

Corol. 6. (n) Et diſtantia centri lunæ à centro terræ erit ad diſtantiam centri lunæ à communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788.

(o) *Corol* 7. Et mediocris diſtantia centri lunæ à centro terræ in octantibus lunæ erit ſemidiametrorum maximarum terræ $60\frac{2}{5}$ quamproximè. Nam terræ ſemidiameter maxima fuit pedum *Pariſienſium* 19658600, & mediocris diſtantia centrorum terræ & lunæ, ex hujuſmodi diametris $60\frac{2}{5}$ conſtans, æqualis eſt pedibus 1187379440. Et hæc diſtantia (per corollarium ſupe-

122. Barometrorum, vel in ſtaticis aut hydroſtaticis ſenſibiles edent effectus. Idem corollarium eleganter demonſtravit Clariſſ. Eulerus num. 30. Diſſertationis de fluxu & refluxu maris.

(l) * *Denſitas autem Solis.* (Cor. 3. Prop. 8. Lib. hujus).

(m) * *Et gravitas acceleratrix.* Nam gravitas acceleratrix eſt ut maſſa directè & quadratum diſtantiæ à centro, hoc eſt, ſemidiametri inverse (cor. 1. prop. 75. lib. 1.). Ideòque gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ eſt ad gravitatem acceleratricem in ſuperficie terræ ut 1×133^24 ad 39.788×1000, hoc eſt, ut 1 ad 3 circiter.

(n) * *Et diſtantia centri Lunæ.* (61. Lib. 1.).

(o) * *Coroll.* 7. Computum eodem plane modo initur ac in prop. 4. lib. hujus.

ſuperius) eſt ad diſtantiam centri lunæ à communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788: ideoque diſtantia poſterior eſt pedum 1158268534. Et cum luna revolvatur, reſpectu fixarum, diebus 27, horis 7, & minutis primis $43\frac{4}{5}$; ſinus verſus anguli, quem luna tempore minuti unius primi deſcribit, eſt 12752341, exiſtente radio 1000,000000,000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1158268534 ad pedes 14,7706353. Luna igitur vi illa, qua retinetur in orbe, cadendo in terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe lunæ per Corol. Prop. III. Et hac vi luna cadendo tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,8538067. Et ad ſexageſimam partem diſtantiæ lunæ à centro terræ, id eſt ad diſtantiam pedum 197896573 à centro terræ, corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribet etiam pedes 14,8538067. Ideoque ad diſtantiam pedum 19615800, quæ ſunt terræ ſemidiameter mediocris, grave cadendo deſcribet pedes 15,11175, ſeu pedes 15, dig. 1, & lin. $4\frac{1}{11}$. Hic erit deſcenſus corporum in latitudine graduum 45. Et per tabulam præcedentem in prop. XX. deſcriptam, deſcenſus erit paulo major in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* exiſtente exceſſu quaſi $\frac{2}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur per hoc computum in latitudine *Lutetiæ* cadendo in vacuo deſcribent tempore unius ſecundi pedes *Pariſienſes* 15, dig. 1, & lin. $4\frac{25}{33}$ circiter. Et ſi gravitas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur à motu diurno terræ in illa latitudine; gravia ibi cadendo deſcribent tempore minuti unius ſecundi pedes 15, dig. 1, & lin. $1\frac{1}{2}$. Et hac velocitate gravia cadere in latitudine *Lutetiæ* ſupra oſtenſum eſt ad prop. IV, & XIX.

Corol. 8. Diſtantia mediocris centrorum terræ & lunæ in ſyzygiis lunæ eſt ſexaginta ſemidiametrorum maximarum terræ, demptâ triceſimâ parte ſemidiametri circiter. Et in quadraturis lunæ diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt $60\frac{5}{6}$ ſemidiametrorum terræ. Nam hæ duæ diſtantiæ ſunt ad diſtantiam

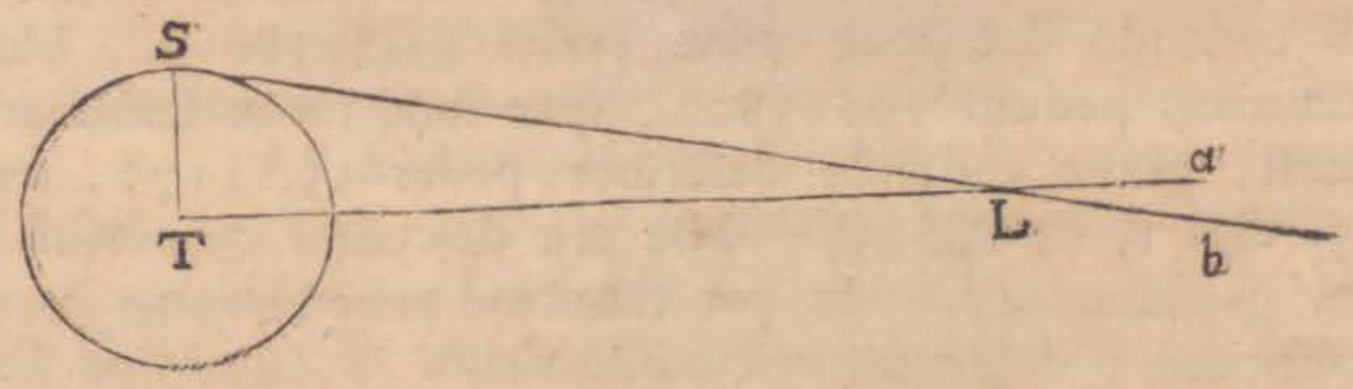
DE MUNDI SYSTEMATE.

mediocrem lunæ in octantibus ut 69 & 70 ad $69\frac{1}{2}$ per prop. XXVIII.

Corol. 9. Distantia mediocris centrorum terræ & lunæ in syzygiis lunæ est sexaginta semidiametrorum mediocrium terræ cum decimâ parte semidiametri. Et in quadraturis lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est sexaginta & unius semidiametrorum mediocrium terræ, demptâ triceſimâ parte semidiametri.

Corol. 10. In syzygiis lunæ (P) parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, est $57'.20''$, $57'.16''$, $57'.14''$, $57'.12''$, $57'.10''$, $57'.8''$, $57'.4''$ respectivè.

In



123. (p) 123. * *Parallaxis* Lunæ horizontalis in diversis latitudinibus seu distantiis ab æquatore determinari potest. Parallaxis Lunæ horizontalis est differentia locorum in quibus Luna in horizonte posita, ex centro & superficie terræ observata inter stellas fixas conspicitur. Hæc autem locorum distantia æqualis est angulo sub quo videretur semidiameter terræ ex loco Lunæ observata. Sit Luna in horizonte constituta in L; observator in superficiei terrestris loco S, Lunam inter stellas referet in b, sed idem observator in centro terræ T positus Lunam referet in a. Est igitur differentia locorum æqualis aLb, qui æquatur angulo SLT, sub quo semidiameter terræ è loco Lunæ L spectatur. Sed quoniam terra est figuræ sphæroidicæ, semidiametri ejus in diversis latitudinibus inter se differunt & est semidiameter maxima secundum æquatorem ad minimam secundum polos, sive in latitudine 90° ut 19658600 ad 19573000 circiter, estque earum differentia 85472 (prop. 19 lib. huj.) in aliis latitudinibus differentia inter diametrum maximam & quamvis aliam est ad differentiam priorem in ratione duplicatâ sinûs totius ad sinum cujusvis latitudinis quamproximè (prop. 20 lib. huj.) hinc in syzigiis Lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris, hoc est, ubi distantia centrorum Lunæ & terræ est semidiametrorum maximarum terræ 59. 366 circiter (cor. 8.) sub æquatore invenitur dicendo, ut est distantia Lunæ à terrâ LS = 59. 366, ad semidiametrum maximam TS = 1, ità sinus totus ad sinum anguli TLS, qui est $57'\ 20''$. In aliis Lunæ locis minuitur parallaxis in eâdem fere ratione ac semi-

In his computationibus attractionem magneticam terræ non conſideravi, cujus utique quantitas perparva eſt & ignoratur. Siquando vero hæc attractio inveſtigari poterit, & menſuræ graduum in meridiano, ac longitudines pendulorum iſochronorum in diverſis parallelis, legeſque motuum maris, & parallaxis lunæ cum diametris apparentibus ſolis & lunæ ex phænomenis accuratiùs determinatæ fuerint: (q) licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere. LIBER TERTIUS. PROP. XXXVIII. PROBL. XIX.

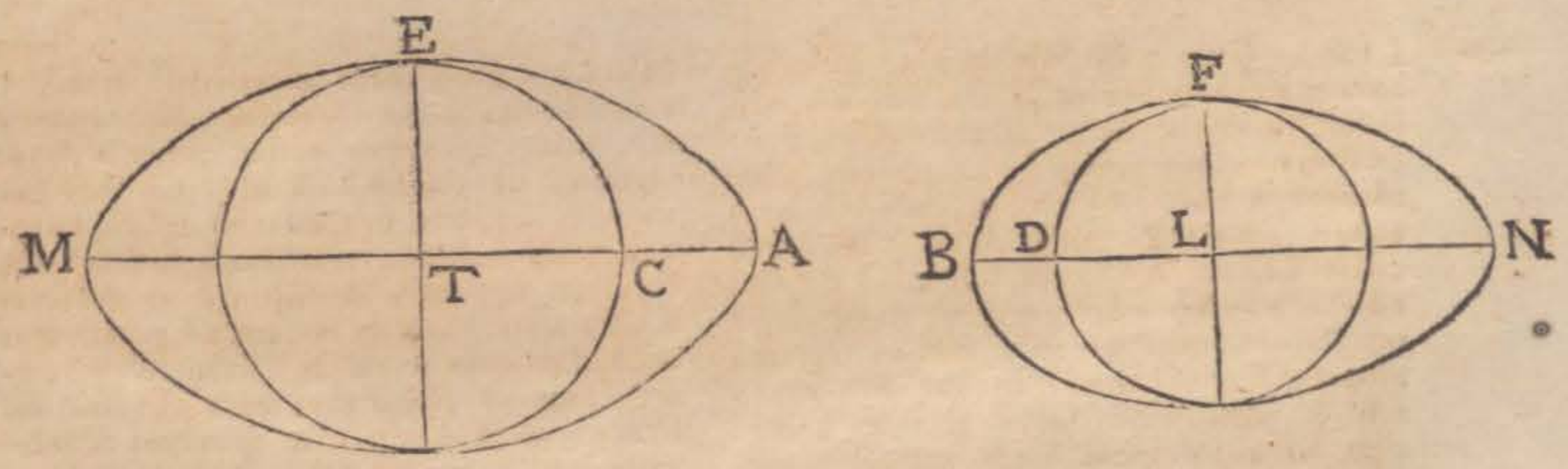
PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire figuram corporis lunæ.

Si corpus lunare fluidum eſſet ad inſtar maris noſtri, vis terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum eſſet ad vim lunæ, quâ mare noſtrum in partibus & ſub lunâ & lunæ oppoſitis attollitur, (r) ut gravitas acceleratrix lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in lunam, &

ſemidiametri terræ, & hinc prodeunt parallaxes in latitudinibus graduum o. 30. 38. 45. 52. 60. 90. quales à Newtono determinantur.

(q) * *Licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.* Theoriæ Newtoni de fluxu & refluxu maris plurima hic potuiſſemus adjungere quorum ope calculos accuratiùs repetere licuiſſet. Verùm materiam exhauriunt elegantiſſimæ diſſertationes quas tom. 3. addidimus. 1236

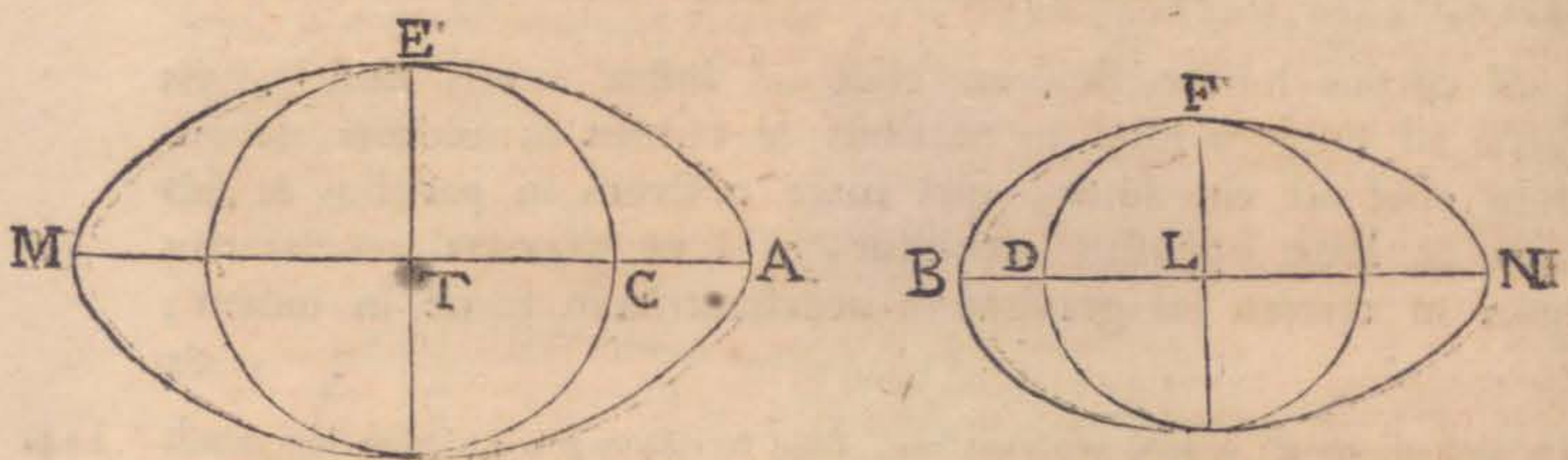


(r) * *Ut gravitas acceleratrix.* Sit T, globus terræ fluido ſatis profundo E A, coopertus, ſitque L, globus Lunæ coopertus fluido F B. Si gravitas acceleratrix Terræ in Lunam æqualis eſſet gravitati acceleratrici Lunæ in terram, hoc eſt ſi æqualis eſſet materiæ quantitas in Lunâ & in Terrâ, globi duo T, L, ſeſe componerent in figuras ſphæroidicas ſimiles quarum axes M A, B N, jacerent in directum

DE MUNDI SYSTEMATE.

& diameter lunæ ad diametrum terræ conjunctim; id eſt, ut 39,788 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, ſeu 1081 ad 100. Unde cum mare noſtrum vi lunæ attollatur ad pedes $8\frac{3}{7}$, fluidum lunare vi terræ attolli deberet ad pedes 93. Eâque de cauſâ figura lunæ ſphærois eſſet, cujus maxima diameter producta tranſiret per centrum terræ, & ſuperaret diametros perpendiculares exceſſu pedum 186. Talem igitur figuram luna affectat, eamque ſub initio induere debuit. *Q. E. I.*

Co-



1:12:36. (106). Cum enim omnia hinc inde ponantur æqualia præter ipſam molem, nulla eſt ratio cur figuræ illæ non ſint inter ſe ſimiles, alteraque in acutiorem ſphæroidem deſinat. Quare in caſu præſenti, erit B L ad L F, ut T A ad T E, & viciſſim B D ad A C ſicut I F ad T E, hoc eſt, ſi æqualis eſſet gravitas acceleratrix terræ in Lunam atque Lunæ in terram, altitudo fluidi Lunaris in partibus proximis & remotiſſimis ſuprà globum Lunæ, eſſet ad altitudinem fluidi terreſtris analogam ſuprà globum terræ ut diameter Lunæ ad diametrum terræ. Rurſùs, ſi terra & Luna æquales habeant diametros, erunt altitudines fluidi ſuprà globos ut gravitates acceleratrices reſpective (prop. 74, *lib.* 1.). Quarè ſi neque gravitas acceleratrix in Lunam æqualis ſit gravitati acceleratrici Lunæ in terram, nec diameter Lunæ diametro terræ æqualis, vis terræ ad elevandum fluidum in partibus citimis & ultimis erit ad vim ipſam Lunæ quâ mare noſtrum in partibus & ſub Lunâ & Lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diametrum terræ conjunctim, ſive ut maſſa Lunæ quæ gravitati acceleratrici eſt proportionalis ad maſſam terræ quæ itidem gravitati ejus acceleratrici eſt proportionalis & ut diameter Lunæ ad diametrum terræ conjunctim. De figurâ corporis Lunæ nova quàm plurima atque eximia habentur in diſſertationibus de fluxu & refluxu maris.

Corol. (f) Inde vero fit ut eadem ſemper lunæ facies in terram obvertatur. In alio enim ſitu corpus lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes, ob parvitatem virium agitantium eſſent longè tardiſſimæ: adeò ut facies illa, quæ terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in prop. XVII allatam) reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi & in terram converti.

(f) * *Indè verò fit.* Quoniam maxima diameter Lunæ versùs centrum terræ dirigitur (ex dem.) hinc fit ut eadem ſemper Lunæ facies in terram obvertatur. Positâ autem Sphæroidicâ Lunæ figurâ, inter varias Lunæ partes non dabitur æquilibrium, niſi Sphærois Lunæ axem ſuum telluri obvertat (109); quare in alio ſitu corpus Lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes, ob parvitatem virium in minimo ſcilicet axis majoris ſuprà minorem exceſſu, eſſent longè tardiſſimæ adeò ut non turbetur Lunaris motûs circà axem æquabilitas, ideóque (per not. in prop. 17.) facies illa quæ terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis Lunaris umbilicum reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi & in terram converti.

124. Clariſſ. D. De Mairan in elegantiſſimâ diſſertatione de motu diurno telluris circa axem quæ legitur in monum. Pariſ an. 1729. exponit admodum ingeniosè prout ſemper facit, cur eadem Lunæ facies in terram continuò obvertatur, variaſque explicat inæqualitates librationis Lunaris in longitudinem. Conjecturam facit Vir Doctiſſimus homogeneam non eſſe Lunæ materiam ſed hemiſpherium inferius ſuperiori gravius ſupponit; quo poſito facile demonſtrat Lunam reſpectu telluris in ſitu conſtanti manere. Obſervat deindè fieri non poſſe ut conſtans maneat Lunæ poſitio, niſi conſtans quoque ſit velocitas fluidi in quo Lunam ipſam deferri aſſumit. Sed in omni orbitâ ellipticâ vel excentricâ qualis eſt orbita Lunæ, variabiles ſunt hujuſce fluidi velocitates, quarè Luna in eodem ſitu conſiſtere non poteſt, ſed oſcillationes quaſdam in longitudinem patitur, ex quibus fiet ut modo nobis detegatur aliqua pars hemiſpherii quod occultum eſſe ſolet, modo autem nobis abſcondatur aliqua pars hemiſpherii quod ſolet eſſe conſpicuum, idque magis vel minus contingere debet pro majori vel minori inæqualitate velocitatum fluidi. Hâc ratione explicari poterit cur Lunaris librationis quantitas in longitudinem major aliquando ab Aſtronomis obſervatur quam ex prop. 17. lib. hujus, prodire debet. Verùm tota hæc explicatio ad rem noſtram & Newtonianum ſyſtema accommodabitur, ſi vorticum loco ſubſtituatur attractio, quemadmodum à Clariſſ. Daniele Bernouillio factum eſt, cujus eximiam Diſſertationem de fluxu & refluxu maris cap. 3. conſulas Lector. 124.

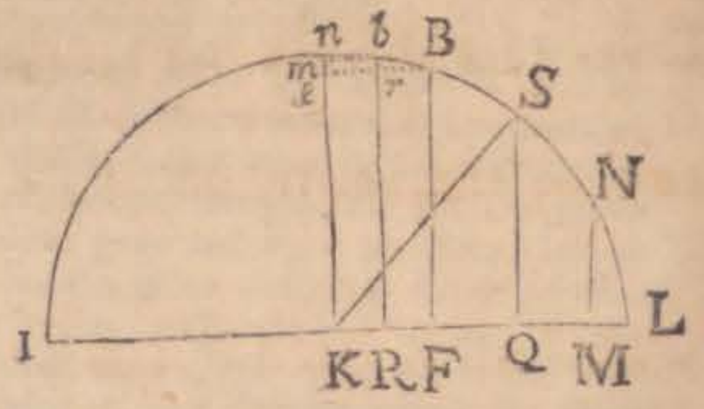
DE MUNDI SYSTEMATE.

LEMMA I.

Si APEPp *terram desiguet uniformiter densam, centroque* C *& polis* P, p *& æquatore* AE *delineatam; & si centro* C *radio* CP *describi intelligatur sphæra* Papc; *sit autem* QR *planum, cui recta à centro solis ad centrum terræ ducta normaliter insistit; & terræ totius exterioris* PapAPcpE, *quæ sphæra modo descriptâ altior est, particulæ singulæ conentur recedere hinc inde à plano* QR, *sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia à plano: Dico primò, quod tota particularum omnium in æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, vis & efficacia ad terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto* A, *quod à plano* QR *maximè distat, consistentium vim & efficaciam, ad terram consimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum axem, in communi sectione æquatoris & plani* QR *jacentem, peragetur.*

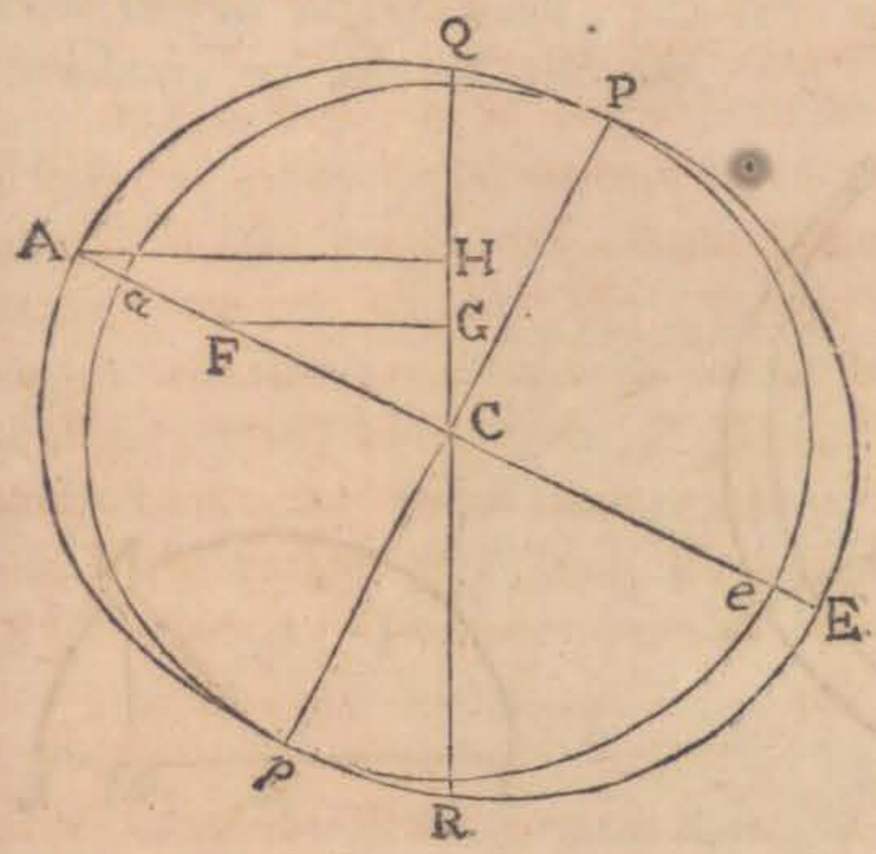
Nam centro *K* diametro *IL* describatur semicirculus *INL*. Dividi intelligatur semicircumferentia *INL* in partes innumeras æquales, & à partibus singulis *N* ad diametrum *IL* demittantur sinus *NM*. Et (t) summa quadratorum ex sinibus omnibus

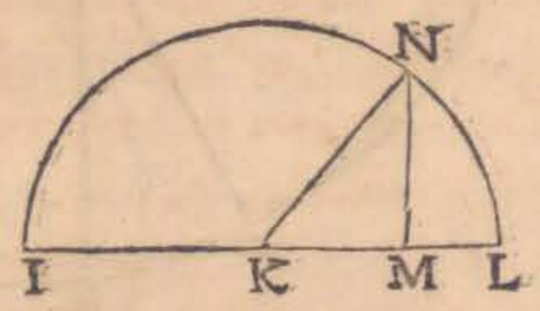
125. (t) 125. * *Et summa quadratorum.* Divisa intelligatur semi-circumferentia INL, in particulas æquales innumeras nb, NL, NS, bB &c. erectisque sinibus bR, NM, &c. erit sinus bm, seu KR, æqualis sinui NM, & ità de cæteris (prop. 26. lib. 3. elem.). Quare sinus omnes ut KR, KF, æquales erunt sinibus ut NM, SQ, ac proindè summa quadratorum ex sinibus omnibus NM, æqualis erit summæ quadratorum ex sinibus omnibus KM. Præterea quadratum semi-diametri KN, æquale est quadratis sinuum KM, MN. Quarè (ob summam quadratorum KM,



æqua-

bus NM æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus KM, & ſumma utraque æqualis erit ſummæ quadratorum ex totidem ſemidiametris KN; ideoque ſumma quadratorum ex omnibus NM erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris KN. LIBER TERTIUS. PROP. XXXVIII. PROBL. XIX.





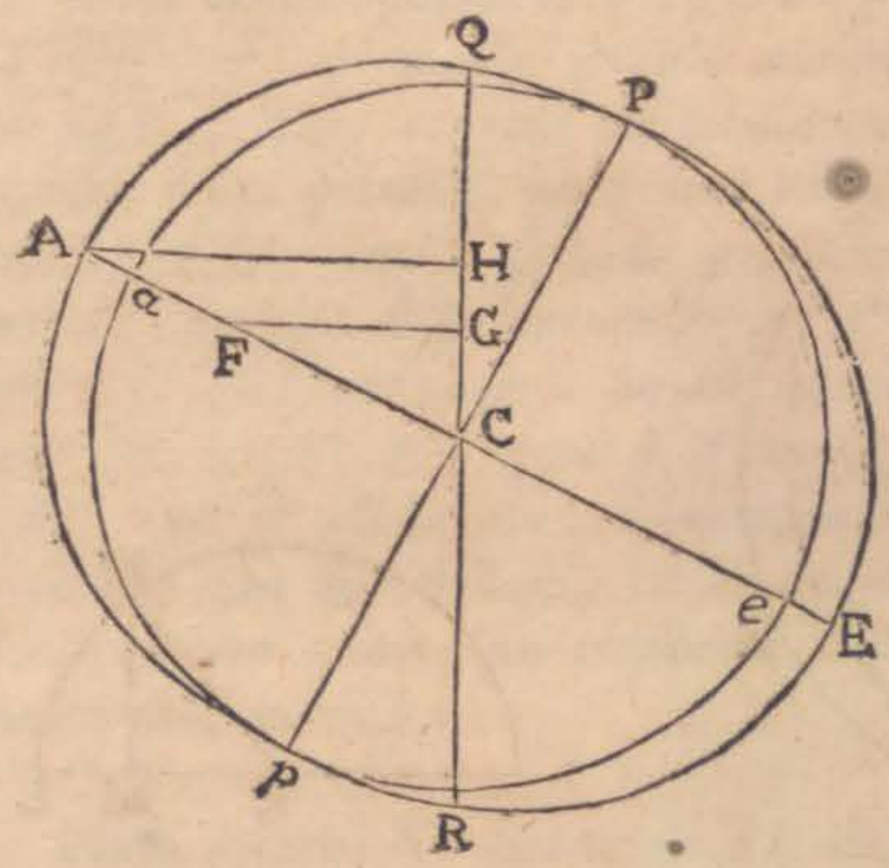
Jam dividatur perimeter circuli AE in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque F ad planum QR demittatur perpendiculum FG, ut & à puncto A perpendiculum AH. Et vis, quâ particula F recedit à plano QR, erit ut perpendiculum illud FG per hypotheſin, & hæc vis ducta in diſtantiam CG (u) erit efficacia particulæ F ad terram circum centrum ejus convertendam. Ideoque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$,

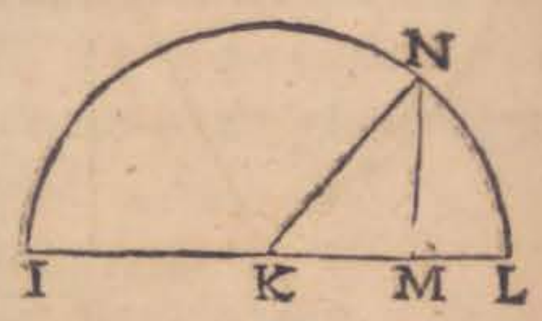
æqualem ſummæ quadratorum NM, ſumma quadratorum ex omnibus ſemidiametris KN, dupla eſt ſummæ quadratorum ex omnibus ſinibus NM, ideòque ſumma quadratorum ex omnibus NM, erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris KN. 125.

(u) * *Erit efficacia.* (47. *lib.* 1.).

DE MUNDI SYSTEMATE.

HC, (x) hoc est, ut FCq ad ACq; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis suis F erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut summa omnium FCq ad summam totidem ACq, hoc est (per (y) jam demonstrata) ut unum ad duo. *Q. E. D.*





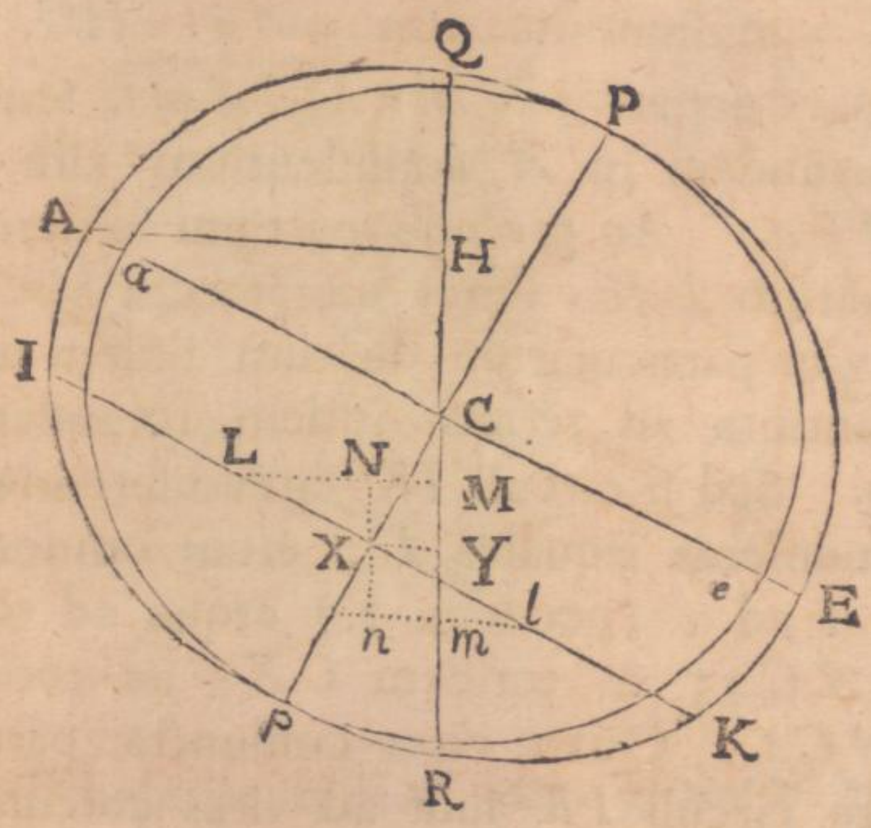
Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter à plano QR, idque æqualiter ab utrâque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem terram, circum axem tam in plano illo QR quam in plano æquatoris jacentem.

825. (x) * *Hoc est*, ob triangula ACH, FCG, similia. (y) * *Per jam demonstrata.* (150.)

LEM-

LEMMA II.

Iisdem positis: dico secundò quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circulo AE uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.



Sit enim *IK* circulus quilibet minor æquatori *AE* parallelus, sintque *L*, *l* particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum *Pape* sitæ. Et si in planum *QR*, (z) quod radio in solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula *LM*, *lm*: vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum *QR*, (a) proportionales erunt perpendiculis illis *LM*, *lm*.

Sit

(z) * *Quod radio in Solem ducto.* (Per hyp. Lem. 1.).

(a) * *Proportionales erunt.* (Per hypothes. ejusdem Lem.).

DE MUNDI SYSTEMATE.

Sit autem recta Ll plano $Pape$ parellela & biſecetur eadem in X, & per punctum X agatur Nn, quæ parellela ſit plano QR & perpendiculis LM, lm occurrat in N ac n, & in planum QR demittatur perpendiculum XY. (b) Et particularum L & l vires contrariæ, ad terram in contrarias partes rotandam, ſunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc eſt, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$; ſeu $LN \times MC + NM \times MC$ & (c) $LN \times mC - NM \times mC$: & harum differentia $LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$ eſt vis particularum ambarum ſimul ſumptarum ad terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN \times Mm$ ſeu (d) $2\,LN \times NX$ eſt ad particularum duarum ejuſdem magnitudinis in A conſiſtentium vim $2\,AH \times HC$, (e) ut LXq ad ACq. Et pars negativa $NM \times \overline{MC + mC}$ ſeu $2\,XY \times CY$ ad particularum earumdem in A conſiſtentium vim $2\,AH \times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id eſt, particularum duarum L & l ſimul ſumptarum vis ad terram rotandam eſt ad vim particularum duarum iiſdem æqualium & in loco A conſiſtentium ad terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad ACq. Sed ſi circuli IK circumferentia IK dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2 (per lem. 1.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad $2\,ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2\,CXq$ ad $2\,ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK ſunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut $IXq - 2\,CXq$ ad $2\,ACq$: & propterea (per lem. 1.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut $IXq - 2\,CXq$ ad ACq.

Jam

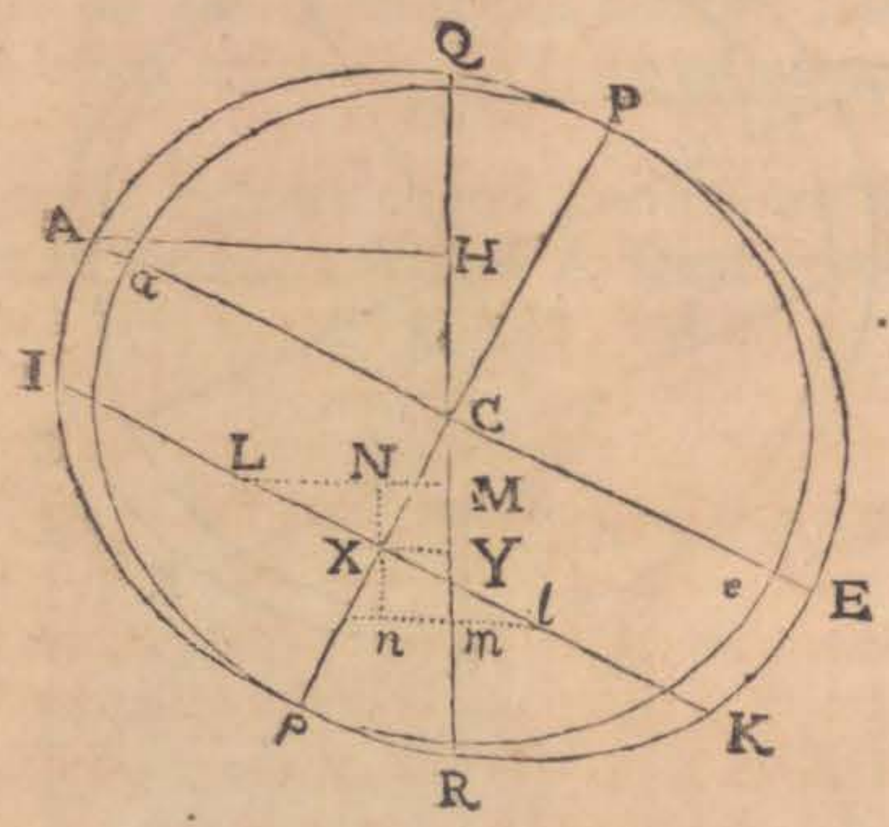
125. (b) * *Et particularum L & l.* (Ex Dem. in Lem. præced.).

(c) * *Et* $LN \times mC - NM \times mC$. Nam ob ſimilitudinem triangulorum LN: NM = ln : nm, ſed eſt NM = nm; quare LN = ln, ideóque $ln \times mC - nm \times mC = LN \times mC - NM \times mC$ & ob $mC = mM + MC$, erit virium illarum differentia $= LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$.

(d) * *Seu* $2\,LN \times NX$. Nam, ob ſimilitudinem triangulorum, eſt NX = nX, ideóque Nn ſeu Mm = 2 NX, ac proinde $LN \times Mm = 2\,LN \times NX$.

(e) * *Ut* LXq *ad* ACq. Eſt enim LN : AH = LX : AC & NX : HC = LX : AC, ideóque per compoſitionem rationum $LN \times NX : AH \times HC = LXq : ACq$. Simili argumento patet partem nega-

Jam verò si sphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem IK; (f) materia in perimetro circuli cujusque IK erit ut IXq: ideoque vis materiæ illius ad terram rotandam, erit ut IXq in $IXq-2CXq$. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli AE perimetro consisteret, esset ut IXq in ACq. Et propterea vis particu-



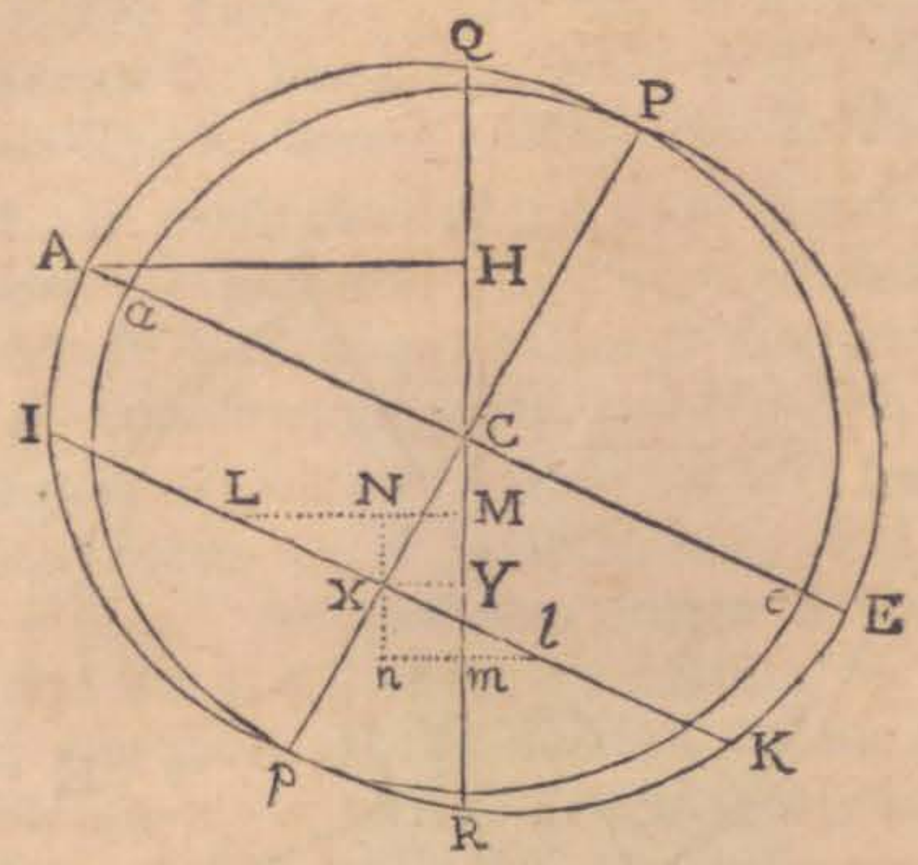
larum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE consistentis, ut omnia IXq in $IXq-2CXq$ ad totidem IXq in ACq, (g) hoc est, ut omnia $ACq-CXq$ in $ACq-3CXq$ ad totidem $ACq-CXq$ in ACq, id est, ut omnia $ACqq-4ACq\times CXq+3CXqq$ ad

(f) * *Materia in perimetro circuli.* Sunt enim zonæ sphæricæ similes ut quadrata radiorum.

(g) *Hoc est, ut omnia* &c. Nam ex centro C, ad punctum I, ducta intelligatur recta CI, erit $IX^2=CI^2-CX^2$, sed est $CI=AC$, quare $IX^2=AC^2-CX^2$, ac proinde IXq in $(IXq-2CXq)=ACq-CXq$ in $ACq-3CXq$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ad totidem $ACqq - ACq \times CXq$, hoc eſt, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio eſt $ACqq - 4\,ACq \times CXq + 3\,CXqq$, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio eſt $ACqq - ACq \times CXq$; ac (h) proinde per methodum fluxionum, ut $ACqq \times CX - \frac{4}{5}\,ACq \times CX$ *cub.* $+ \frac{3}{5}\,CXqc$ ad $ACqq \times CX - \frac{1}{5}\,ACq \times CX$ *cub.* id eſt, ſi pro CX ſcribatur tota Cp vel AC, ut $\frac{4}{15}\,ACqc$ ad $\frac{2}{5}\,ACqc$. hoc eſt, ut duo ad quinque. *Q. E. D.*



L E M.

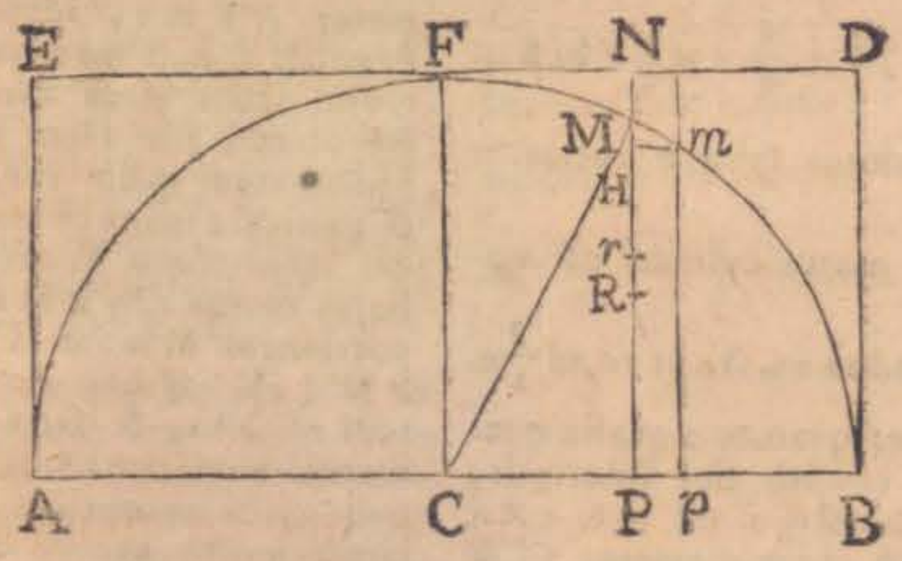
225. (h) * *Ac proindè per methodum fluxionum.* Quantitates $ACqq - 4\,ACq \times CXq + 3\,CXqq$ & $ACqq - ACq \times CXq$, concipiantur multiplicatæ per fluxionem rectæ CX, ſumptiſque fluentibus, erit fluens prioris quantitatis $ACqq \times CX - \frac{4}{5}\,ACq \times CX$ cub. $+ \frac{3}{5}\,CXq$ cub. fluens autem poſterioris quantitatis ſive $ACqq \times CX - \frac{1}{5}\,ACq \times CX$ cub. & ut habeatur efficacia tota, pro CX ſcribatur Cp vel AC, erit fluens prior ad poſteriorem ut $\frac{4}{15}\,ACq$. cub. ad $\frac{2}{5}\,ACq$. cub.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXVIII. PROBL. XI, X.

(i) LEMMA III.

Iisdem positis: dico tertiò quod motus terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 *ad numerum* 1000000.

Est enim motus cylindri circum axem suum immotum revolventis ad motum sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet



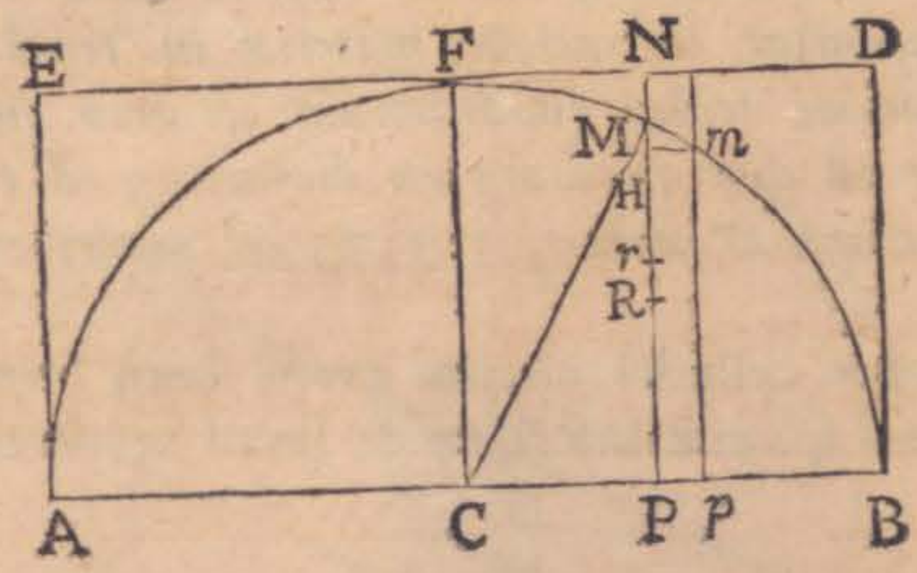
(i) 126. * *Lemma* demonstratur. Revolutione semicirculi A F B, & rectanguli eidem circumscripti A E D B, describantur sphæra & cylindrus circumscriptus. Sit radius C B = 1, peripheria circuli hoc radio descripti = n, abscissa C P = x, ordinata P M = y, quælibet ipsius pars P R = v, R r = dv; peripheria circuli radio P R, descripti = nv, annulus circularis ex revolutione lineolæ R r = $nv\,dv$, velocitas puncti R = v, motus annuli prædicti = nv^2dv, motus totius circuli radio P R, descripti = $\frac{1}{3}nv^3$, motus circuli radio P M, descripti = $\frac{1}{3}ny^3$, motus circuli radii P N descripti = $\frac{1}{3}n$, motus cylindri totius = $\frac{2}{3}n$. 126.

Sit P p = dx motus annuli solidi revolutione figuræ P M m p descripti = $\frac{1}{3}ny^3dx = \frac{1}{3}ndx \times (1-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}ndx \times (1-xx)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}nx^2dx \times (1-xx)^{\frac{1}{2}}$.

Undè motus solidi revolutione figuræ C F M P, descripti = $\frac{1}{4}n\int dx(1-xx)^{\frac{1}{2}}$

DE MUNDI SYSTEMATE.

libet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcriptis: & motus cylindri ad motum annuli tenuiſſimi, ſphæram & cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum



$+\frac{1}{12}nx(1-xx)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}n\times CFMB=\frac{1}{32}nn$, adeóque motus ſphæræ totiùs $=\frac{1}{16}nn$. Eſt igitur motus cylindri ad motum ſphæræ ut $\frac{2}{3}n$ ad $16nn$, ſeu ut 16 ad $\frac{3}{2}n$, hoc eſt, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcriptis; nam quadratum diametri 2 eſt 4 & $4\times4=16$, circulus verò cujus diameter 2, & peripheria n, eſt $\frac{1}{2}n$ & tres hujuſmodi circuli ſunt $\frac{3}{2}n$.

126.

Materia annuli tenuiſſimi ſphæram & cylindrum ad communem eorum contactum F ambientis ſit m, & velocitas erit ut CF, ſive ut 1, adeóque motus $=m$, & proindè motus cylindri ad motum annuli illius ut $\frac{2}{3}n$ ad m, ſive ut $2n$ ad $3m$, hoc eſt, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; baſis enim cylindri eſt circulus $\frac{1}{2}n$ & altitudo diameter AF $=2$, ideóque cylindrus $=n$. Prædicti annuli materia ſit aan, ideóque motus ipſius circà axem cylindri $=aan$. Revolvatur jam idem annulus circà proprium axem quem exhibeat diameter AB; & particula materiæ annuli reſpondens arcui infinitеſimo Mm, erit $a^2\times Mm$ & hujus motus $a^2y\times Mm=a^2dx$, ob proportionem $Mm:mH\ (dx)=CM(1):PM\ (y)$. Quarè motus partis FM, annuli eſt a^2x, & factâ $x=1$, motus quadrantis annuli $=a^2$ eſt motus totius annuli circà proprium axem $=4a^2$. Eſt igitur motus annuli circà axem cylindri ad ejuſdem motum circà axem proprium ut aan, ad $4aa$, ſeu ut n ad 4, hoc eſt, ut circumferentia circuli n, ad duplum diametri 4. Quamobrem motus cylindri eſt ad motum ſphæræ

ut	- - - -	16 ad	$\frac{3}{2}n$
motus annuli circà axem cylindri eſt ad motum cylindri ut		m ad	$\frac{2}{3}n$
& motus annuli circà axem proprium eſt ad ejus motum circà axem cylindri ut		4 ad	n.

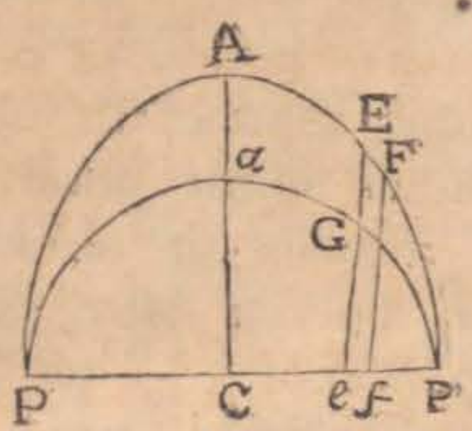
Quarè, per compoſitionem rationum & ex æquo, motus ſphæræ circà axem proprium eſt ad motum annuli ut n^3 ad

plum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iſte circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejuſdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri. H Y-

LIBER TERTIUS. PROP. XXXVIII. PROBL. XIX.

64 *m*. Eſt autem n^3 ad 64 *m* ut $\frac{2n}{3} \times \frac{3n^2}{16}$ ad $8 \times m$, ſed $\frac{2n}{3}$, eſt quantitas materiæ in terrâ; *m*, quantitas materiæ in annulo $\frac{3n^3}{16}$ eſt ſumma trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli AFB, & 8 eſt ſumma duorum quadratorum ex diametro AB. Quare motus terræ totius circum axem jam ante deſcriptum ex motibus particularum omnium compoſitus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem, in ratione quæ componitur ex ratione materiæ in terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuſcumque ad duo quadrata ex diametro, id eſt, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 ad numerum 1000000, poſitâ ratione diametri ad peripheriam ut 1 ad 3.141 quamproximè. Q. E. D.

127. Lemma. Semiaxe majori CA & minori CP, deſcribatur ſemiellipſis PAp, atque radio CP, deſcribatur ſemicirculus Pap, circà axem Pp revolvi concipiantur tum ſemicirculus tum ſemiellipſis, erit ſphæra motu ſemicirculi genita ad ſphæroidem ſemiellipſeos revolutione deſcriptam ut Ca^2 ad CA^2. Sit $pe = x$ $Ge = y$, $Cp = r$, $CA = a$, exprimatque $\frac{r}{p}$ rationem radii ad peripheriam, erit $\frac{py}{r}$, peripheria circuli radio Ge deſcripti. Prætereà (ex naturâ ellipſeos 248 lib. 1.) $Ca\ (r) : CA\ (a) = Ge\ (y) : Ee$, ideóque $Ee = \frac{ay}{r}$, hinc peripheria circuli radio Ee deſcripti $= \frac{pay}{rr}$, ejuſdemque circuli area $= \frac{pa^2y^2}{2r^2}$; area autem circuli radio Ge deſcripti eſt $\frac{py^2}{2r}$. Quarè fluxio ſphæroidis fit $\frac{pa^2y^2dx}{2r^3}$, & fluxio ſphæræ eſt $\frac{py^2dx}{2r}$. Sed (ex naturâ circuli) $y^2 = 2rx - xx$; hinc fluxio ſphæroidis eſt $\frac{2pa^2rxdx - pa^2x^2dx}{2r^3}$; & fluxio ſphæræ $\frac{2prxdx - pxxdx}{2r}$, ſumptiſque fluentibus, erit fluens prima ad alteram ut $\frac{pa^2rx^2}{r^3} - \frac{pa^2x^3}{6r^3}$ ad $\frac{prx^2}{2r} - \frac{px^3}{6r}$. Jam loco *x*, ſubſtituatur 2*r*, erit ſphærois tota, ad totam ſphæram ut $\frac{4pa^2r^3}{r^3} - \frac{8pa^2r^3}{6r^3}$ ad $\frac{2pr^3}{r} - \frac{8pr^3}{6r}$, hoc eſt, ut a^2, ad r^2, 127.



ſivè in ratione duplicatâ CA^2 ad Ca^2. Simili árgumento patet ſphæram ellipſeos ſemiaxe majori tanquam radio deſcriptam eſſe ad ellipſoidem in ratione duplicatâ ſemiaxis majoris ad minorem.

HYPOTHESIS II.

De Mundi Systemate.

Si annulus prædictus terrâ omni reliquâ ſublatâ, ſolus in orbe terræ, motu annuo circa ſolem ferretur, & interea circa axem ſuum, ad planum eclipticæ in angulo graduum 23½ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus punctorum æquinoctialium, ſive annulus iſte fluidus eſſet, ſive is ex materiâ rigidâ & firmâ conſtaret.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire præceſſionem æquinoctiorum.

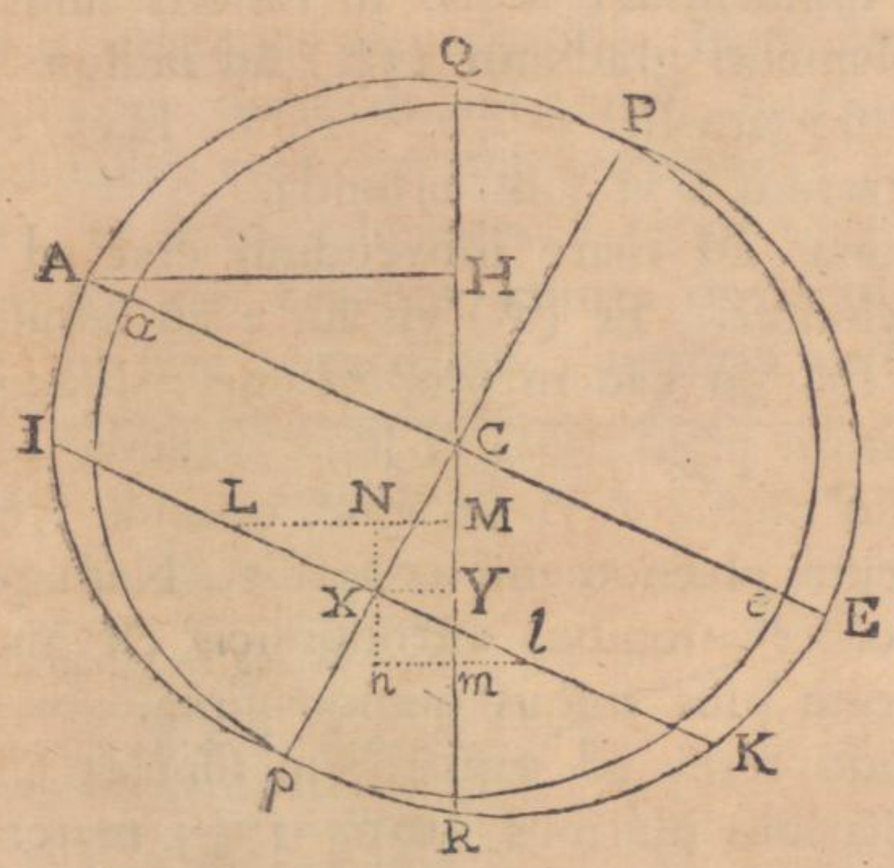
Motus mediocris horarius nodorum lunæ in orbe circulari, ubi nodi ſunt in quadraturis, erat $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$, & hujus dimidium $8''. 17'''. 38^{iv}. 18^{v}$. (ob rationes ſupra explicatas) eſt motus medius horarius nodorum in tali orbe; fitque anno toto ſidereo $20^{gr}. 11'. 46''$. Quoniam igitur nodi lunæ in tali orbe conficerent annuatim $20^{gr}. 11'. 46''$. in antecedentia; & ſi plures eſſent lunæ, motus nodorum cujuſque (per corol. 16. prop. LXVI. lib. 1.) forent ut tempora periodica; ſi luna ſpatio diei ſiderei juxta ſuperficiem terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad $20^{gr}. 11'. 46''$ ut dies ſidereus horarum 23. 56′ ad tempus periodicum lunæ dierum 27. 7 hor. 43; id eſt, ut 1436 ad 39343. Et par eſt ratio nodorum annuli lunarum terram ambientis; ſive lunæ illæ ſe mutuo non contingant, ſive liqueſcant & in annulum continuum formentur, ſive denique annulus ille rigeſcat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iſte, quoad quantitatem materiæ, æqualis ſit terræ omni *P a p A P e p E* quæ globo *P a p e* ſuperior eſt; & quoniam globus iſte ad terram illam ſuperiorem (k) ut *a C qu.* ad *A C qu. − a C qu.* id eſt (cum terræ ſemidiameter minor *PC* vel *aC* ſit ad ſemidiametrum majorem *AC* ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; ſi annulus iſte terram ſecundùm æquatorem cingeret & uterque ſimul

127. (k) * *Ut aCqu. ad ACqu − aCqu.* Globus iſte eſt ad terram totam ut aC^2, ad AC^2 (Lem. præc.) ideóque annulus materiæ inter globum & terram interceptus, hoc eſt, exceſſus materiæ in terrâ ſuprà materiam in globo eſt ut $ACqu. - aCqu.$

mul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus lem. III.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223, ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum, quo ipsius nodi seu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: (l) motus qui

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROBL. XX.



restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eâdem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex annulo & globo compositi ad motum 20^{gr}. 11′. 46″., ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus nodi lunarum (ut supra explicui) atque (m) ideo quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires $3IT$ *in fig. pag.* 411. & 413.) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum à plano QR, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem in morem figuræ $PapAPepE$ ad superiorem

(l) * *Motus qui restabit in annulo.* (52. lib. 1.).

(m) * *Atquè ideò.* (vid. not. 101. lib. hujus).

DE MUNDI SYSTEMATE.

illam terræ partem conſtituendam ſpargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad terram circa quamvis æquatoris diametrum rotandam, atque ideo ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus æquinoctiorum regreſſus jam eſſet ad 20gr. 11′. 46″, ut 10 ad 73092: ac proinde fieret 9″. 56‴. 50iv.

Cæterum hic motus (n) ob inclinationem æquatoris ad planum eclipticæ minuendus, idque in ratione ſinus 91706 (qui ſinus eſt complementi graduum $23\frac{1}{2}$.) ad radium 100000. Quâ ratione motus iſte jam fiet 9″. 7‴. 20iv. Hæc eſt annua præceſſio æquinoctiorum à vi ſolis oriunda.

Vis autem lunæ ad mare movendum erat ad vim ſolis, ut 4,4815 ad 1 circiter. Et (o) vis lunæ ad æquinoctia movenda eſt ad vim ſolis in eâdem proportione. Indeque prodit annua æquinoctiorum præceſſio à vi lunæ oriunda 40″. 52‴. 52iv, ac tota præceſſio annua à vi utrâque oriunda 50″. 00‴. 12iv. Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam præceſſio æquinoctiorum ex obſervationibus aſtronomicis eſt annuatim minutorum ſecundorum plus minus quinquaginta.

Si (p) altitudo terræ ad æquatorem ſuperet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quam $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & præceſſio æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

Deſ-

127. (n) * *Ob inclinationem.* Pro majori vel minori inclinatione plani æquatoris ad planum Ecclipticæ minorem eſſe vel majorem regreſſum æquinoctiorum patet ex not. 101. lib hujus. Illud autem decrementum obtinetur, ſi minuatur motus in ratione ſinûs complementi inclinationis ad radium. Sed planum æquatoris inclinatur ad planum Ecclipticæ gradibus $23\frac{1}{2}$ circiter, quatè cum motus æquinoctiorum ſit tardiſſimus, ſatis accurate minuitur motus ille in ratione ſinûs 91706. qui ſinus eſt complementi graduum $23\frac{1}{2}$ ad radium 100000.

(o) * *Et vis Lunæ.* (Cor. 18. 19. Lib. I.).

(p) * *Si altitudo terræ.* Quò enim altior erit materia ad æquatorem eò levior ſit oportet ut materiam quæ eſt verſus polos in æquilibrio poſſit ſuſtinere. Cæterum quia in tribus non ſatis Laudandis Diſſertationibus tom. 3. adjunctis, nova occurrunt quamplurima de figurâ telluris, de viribus Solis & Lunæ, præceſſionem æquinoctiorum, eâdem quâ hactenus factum eſt, methodo, accuratiùs licebit computare.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROBL. XX.

Deſcripſimus jam ſyſtema ſolis, terræ, lunæ, & planetarum: ſupereſt ut de cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA IV.

Cometas eſſe lunâ ſuperiores & in regione planetarum verſari.

(q) Ut defectus parallaxeos diurnæ extulit cometas ſupra regiones ſublunares, ſic (r) ex parallaxi annuâ convincitur eorum deſcenſus in regiones planetarum. Nam cometæ, qui progrediuntur ſecundum ordinem ſignorum, ſunt omnes ſub exitu apparitionis aut ſolito tardiores aut retrogradi, ſi terra eſt inter ipſos & ſolem; at juſto celeriores ſi terra vergit ad oppoſitionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem ſignorum ſunt juſto celeriores in fine apparitionis, ſi terra verſatur inter ipſos & ſolem; & juſto tardiores vel retrogradi, ſi terra ſita eſt ad contrarias partes. (f) Contingit hoc maximè ex motu terræ

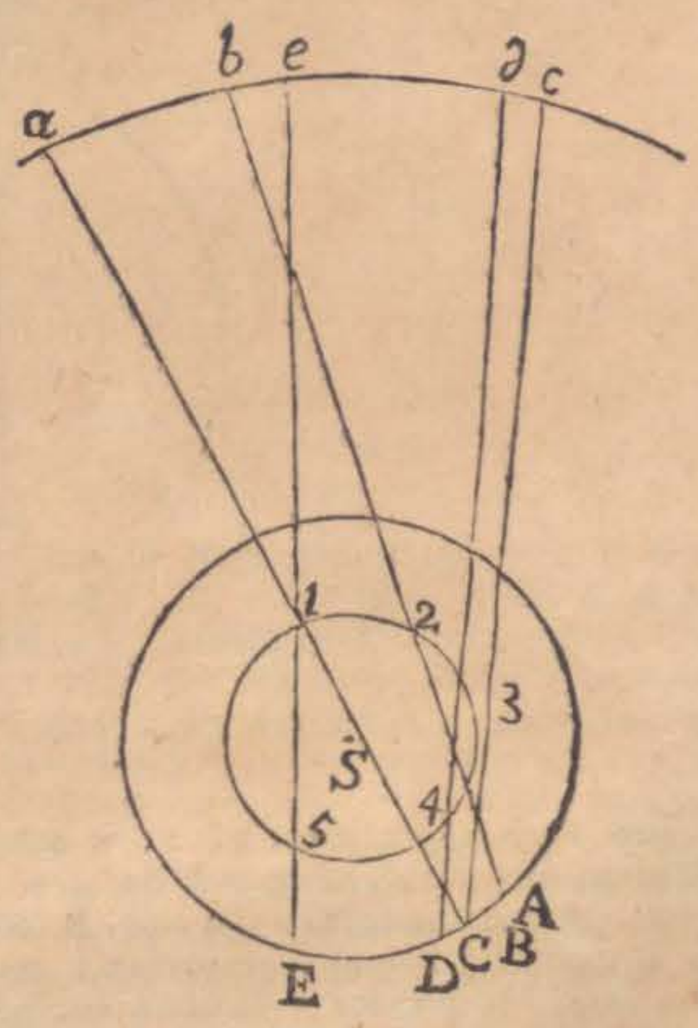


Fig. 128.

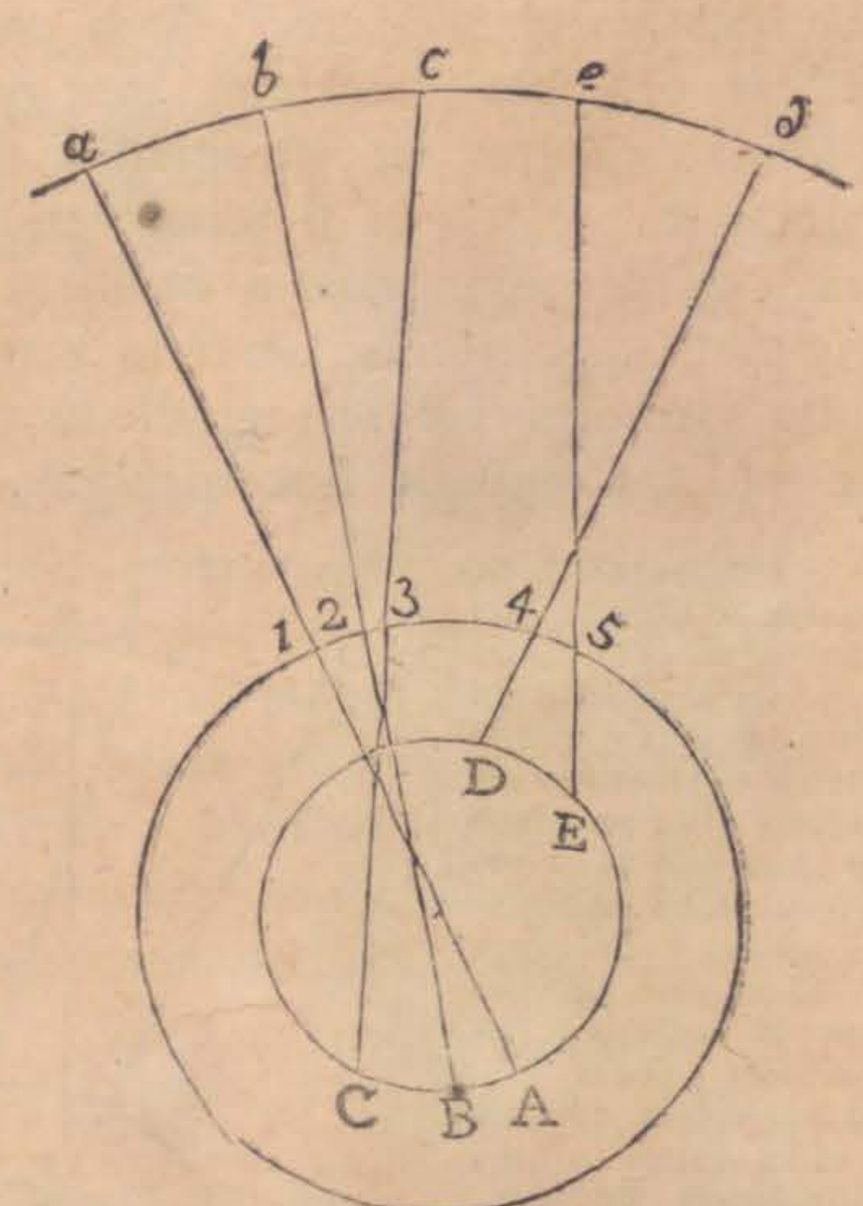
(q) * *Ut defectus parallaxeos diurnæ.* Parallaxis diurna cometæ eſt differentia locorum in quibus cometa ex centro terræ, vel ex eo ſuperficiei terræ loco ad quem cometa verticalis eſt & ex quovis alio loco ſuperficiei terræ obſervatus, inter ſtellas fixas refertur. Hæc parallaxis diurna, maxima eſt in Lunâ, ubi ea in horizonte conſtituitur, inde verò magis magiſque decreſcit quò altius Luna ſuprà horizontem elevatur. Quia verò hæc parallaxis non obſervatur in cometis, patet eos eſſe Lunâ ſuperiores (30.).

(r) * *Sic ex parrallaxi annuâ.* Parallaxis annua ex motu circà ſolem oritur, hæcque reſpicit longitudinem cometæ, hoc eſt, diſtantiam ejus in Eccliptica à primo arietis puncto. Quomodò ex hâc parallaxi Newtonus colligat cometas deſcendere in regiones planetarum explicabitur in decurſu.

(f) 128. * *Contingit hoc maximè.* Sit S, Sol A B E, orbita telluris & a b c, ſphæra fixarum ad quam Planetæ referantur, exhibeatque 1, 2, 3, 4, Planetæ alicujus inferioris orbitam. Moveatur terra ex A, per B, in C, & intereà Planeta ex 1, per 2, in 3, hic Planeta ex a, per b, in c, ſecundum ordinem ſignorum progredi videbitur. At ſi terra moveatur ex C, per D, in E & planeta ex 3, per 4 in 5, idem planeta per d, in e, retrogredi videbitur.

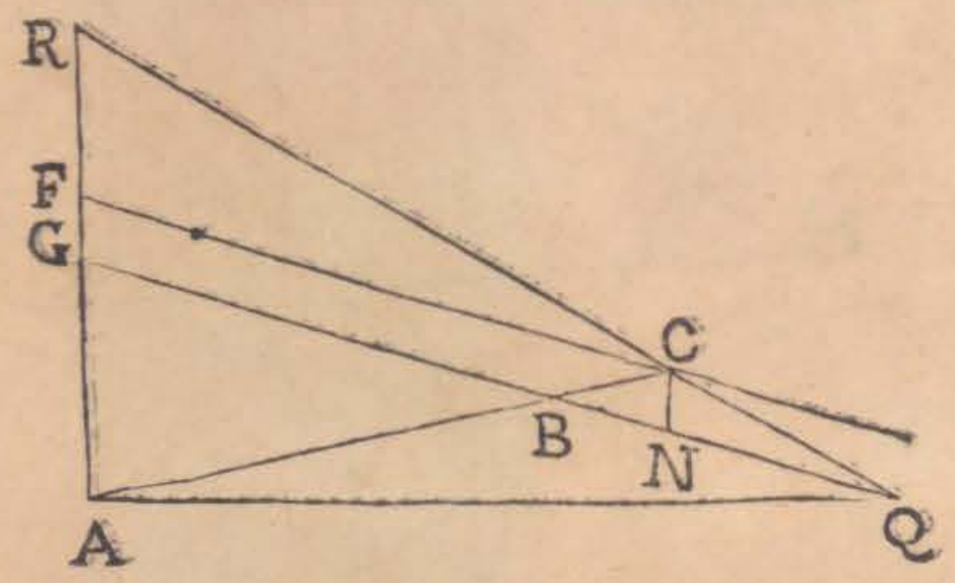
DE MUNDI SYSTEMATE.

in vario ipsius situ, perinde ut fit in planetis, qui pro motu terræ vel conspirante vel contrario nunc retrogradi sunt, nunc tardiùs progredi videntur, nunc verò celeriùs. Si terra pergit ad eandem partem cum cometa, & motu angulari circa solem tantò celeriùs fertur, ut recta per terram & cometam perpetuo ducta



328. Jam verò repræsentet 1, 2, 3 orbem planetæ superioris, sitque A B C, orbis terræ. Moveatur terrâ ex A, per B, & C in D, planeta autem superior ex 1 per 2 & 3 in 4, hic planeta secundum ordinem signorum progredi videbitur. At si terra moveatur ex D in E, planeta verò ex 4 in 5, item planeta ex loco d in e, retrogredi apparebit. Quia verò planetæ modò in consequentia, modò in antecedentia ferri videntur, necessum est ut modò tardiores, modò celeriores appareant, atque in ipso veluti motuum æquilibrio, neque in consequentia neque in antecedentia sensibiliter pergant, sed quasi stationarii videantur. Hæc itaque planetarum phænomena ex motu terræ maximè contingunt, oriri tamen possunt etiam aliquantulum ex inæquali planetarum motu.

ducta convergat ad partes ultra cometam, cometa è terrâ ſpectatus ob motum ſuum tardiorem apparet eſſe retrogradus; ſin terra tardius fertur, motus cometæ (detracto motu terræ) fit ſaltem tardior. At ſi terra pergit in contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione



LEMMA XXX.

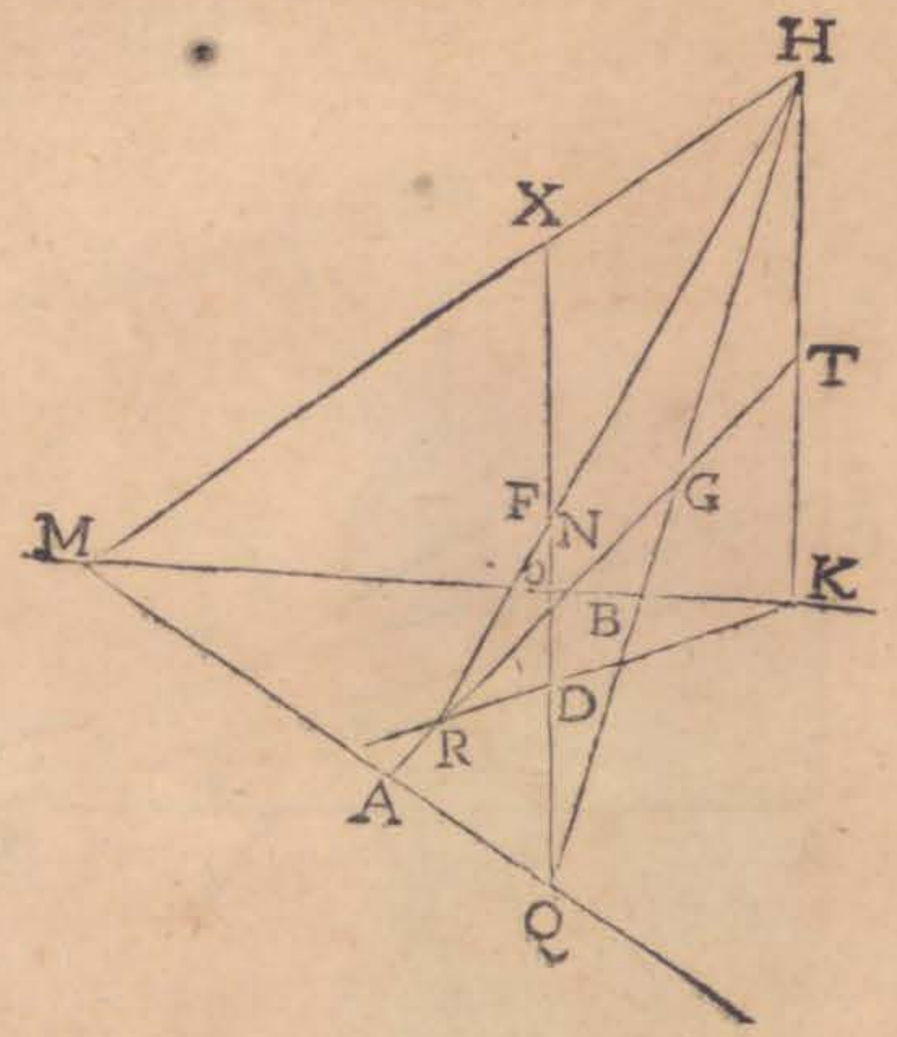
LEMMA. Datis poſitione tribus rectis QA, QB, QC, ex eodem puncto Q, ductis & in eodem plano jacentibus, ducere rectam AC, ex puncto quolibet A, ità ut partes AB, CB, ſint in datâ ratione m, ad n.

Ex A ducatur utcumque recta AR, rectis QC, QB, productis occurrens in G, R, capianturque GF, AG, in datâ ratione m ad n (prop. 12. lib. 6. elem.). Per F, agatur FC parallela rectæ GQ, ipſique QR occurrens in C, erit juncta AC, recta quæſita. Nam ob parallelas FC, GQ, eſt AB: BC = AG: GF, ſed (per conſtr.) GF, AG, ſunt in datâ ratione m ad n. Quare eandem inter ſe rationem habent partes interceptæ AB, BC.

Idem fit trigonometricè. Nam in triangulo AQG, datur latus AG, & præterea noti ſunt anguli AQG, QAG, ideóque dabitur AG, ac proinde innoteſcet etiam GF, datam habens rationem ad AG (per conſtr.) quare dabitur recta CN, æqualis & parallela rectæ GF. Rurſus in triangulo QNC, cognitis angulo CQN, & angulo CNQ, qui æqualis eſt angulo FGN, hoc eſt, anguli priùs inventi AGQ, complemento ad duos rectos, atque inſuper dato latere CN, innoteſcet CQ, tandem in triangulo ACQ, datis lateribus QA, QC, & angulo intercepto AQC, invenientur latus CA atque anguli QAC, QCA, id eſt, magnitudo & poſitio rectæ AC.

De Mundi Systemate.

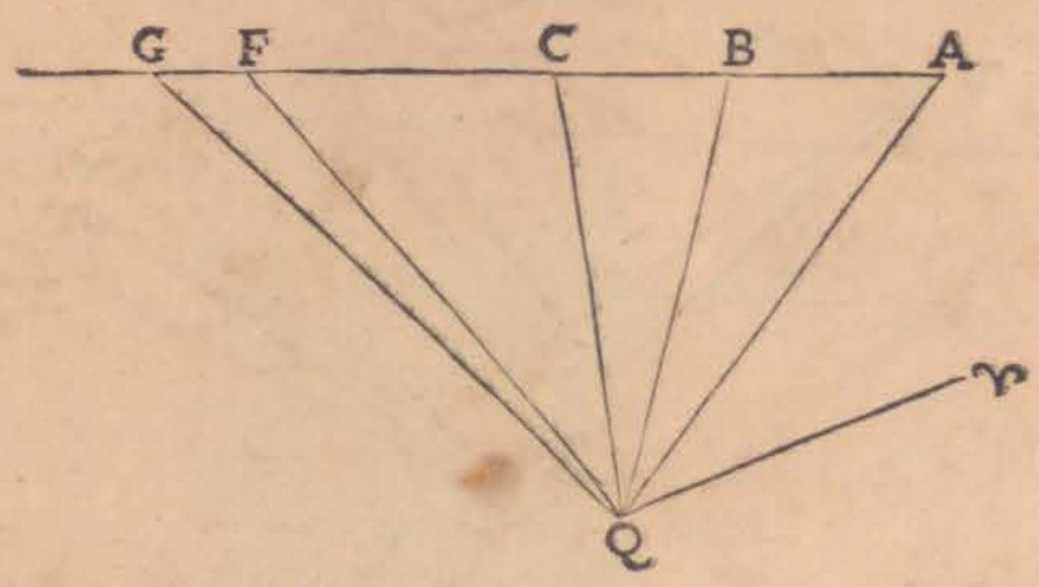
tione vel motu retrogrado distantia cometæ in hunc modum colligitur. Sunto $\curlyvee Q A$, $\curlyvee Q B$, $\curlyvee Q C$ observatæ tres longitudines cometæ sub initio motus, sitque $\curlyvee Q F$ longitudo ultimò obser-



130. Lemma. Datis positione quatuor rectis QA, QB, RB, RD, in eodem plano jacentibus ducere rectam MK, ità ut MO, sit ad ON ut m ad n, & ON ad NK ut n ad r. Capiatur BG, ad BA, sicut $n+r$ ad m. Item capiatur FB ad BD ut $m+n$ ad r. Junctæ rectæ QG, RF, producantur donec concurrant. Per punctum concursus H, ducatur HK parallela rectæ BD, itemque HM, parallela rectæ RB, erit MK recta quæsita. Nam propter parallelas HM, TN (per constr.) erit KN ad NM, ut KT ad TH. Sed quia HK parallela est rectæ FD, KT est ad TH ut DB ad BF, hoc est, (per constr.) ut r ad $m+n$, ac proinde KN est ad NM ut r ad $m+n$. Rursus ob parallelas HK, OX, erit MO ad OK ut MX ad XH, sed quia HM, parallela est rectæ AG, erit MX ad XH ut AB ad BG, id est, (per constr.) ut m ad $n+r$. Est igitur MO ad OK ut r ad $m+n$. Quare, dividendo & ex æquo, tres rectæ MO, ON, NK, sunt in eâdem ratione cum tribus quantitatibus m, n, r. Idem fit trigonometricè. Nam rectarum quatuor datarum QA, QB, RB, RD, dantur intersectiones omnes ac proindè rectæ QB, DB, RB, BA, RD, sunt magnitudine datæ. Præterea dantur etiam BF & BG, utpotè habentes datam rationem ad BD & RA. Jam verò in triangulo RBF, datis lateribus BR, BF, cum angulo intercepto RBF, dantur latus RF & angulus RFB ac proindè etiam datur angulus QFH,

Simi-

obſervata, ubi cometa videri deſinit. (a) Agatur recta ABC, cujus partes AB, BC rectis QA & QB, QB & QC interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur AC ad G, ut ſit AG ad AB ut tempus inter obſervationem primam & ultimam ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur QG. Et ſi cometa moveretur uniformiter in lineâ rectâ, atque terra vel quieſceret, LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROB. XX.



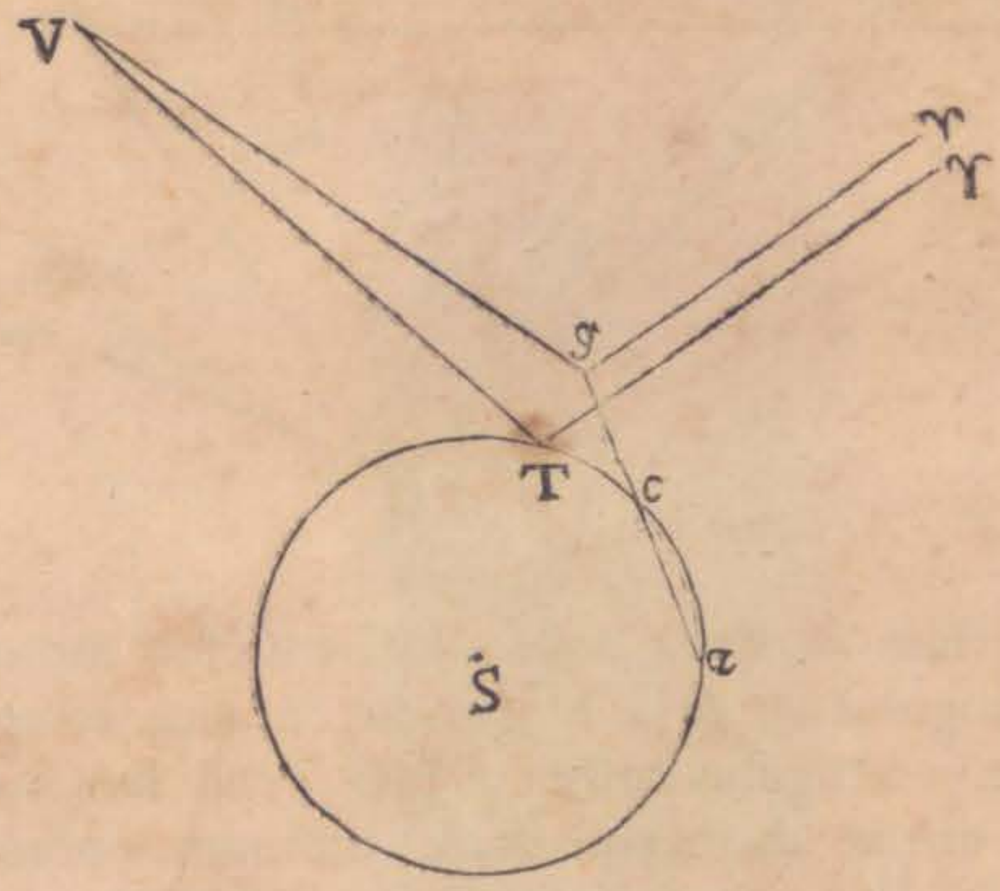
ceret, vel etiam in lineâ rectâ uniformi cum motu progederetur; foret angulus $\curlyvee QG$ longitudo cometæ tempore obſervationis ultimæ. Angulus igitur FQG, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum cometæ ac terræ. Hic autem angulus, ſi terra & cometa in contrarias partes moventur, additur angulo $\curlyvee QG$, & ſic motum apparentem cometæ

Similiter in triangulo QBG, datis lateribus QB, BG, & angulo QBG, dabitur angulus BQG; quare in triangulo QFH, datis duobus angulis QFH, FQH, cum latere QF, quod eſt ſumma vel differentia rectarum datarum QB, QF innoteſcet latus QH. Tandem in triangulo QHM, dato angulo HQM qui eſt ſumma vel differentia notorum angulorum BQA, HQB, datoque angulo QMH qui æqualis eſt angulo dato QAB, ſimulque noto latere QH, innoteſcent latera HM, QM. Simili prorſus modo invenientur latera RK, HK, in triangulo RKH. Igitur in triangulo MHK, notis lateribus HM, HK, & angulo intercepto MHK, qui æqualis eſt angulo dato ABQ, innoteſcent anguli HMK, HKM & baſis MK. Datis autem angulis HMQ, HMK, dabitur horum ſumma vel differentia QMK, hoc eſt, poſitio rectæ MK, ob rectam QM, poſitione datam. Simili modo rectæ QO, RN, RK & anguli quos MK cum his rectis efficit, trigonometrice inveniuntur. 130

(a) * *Agatur recta ABC.* (129).

DE MUNDI SYSTEMATE.

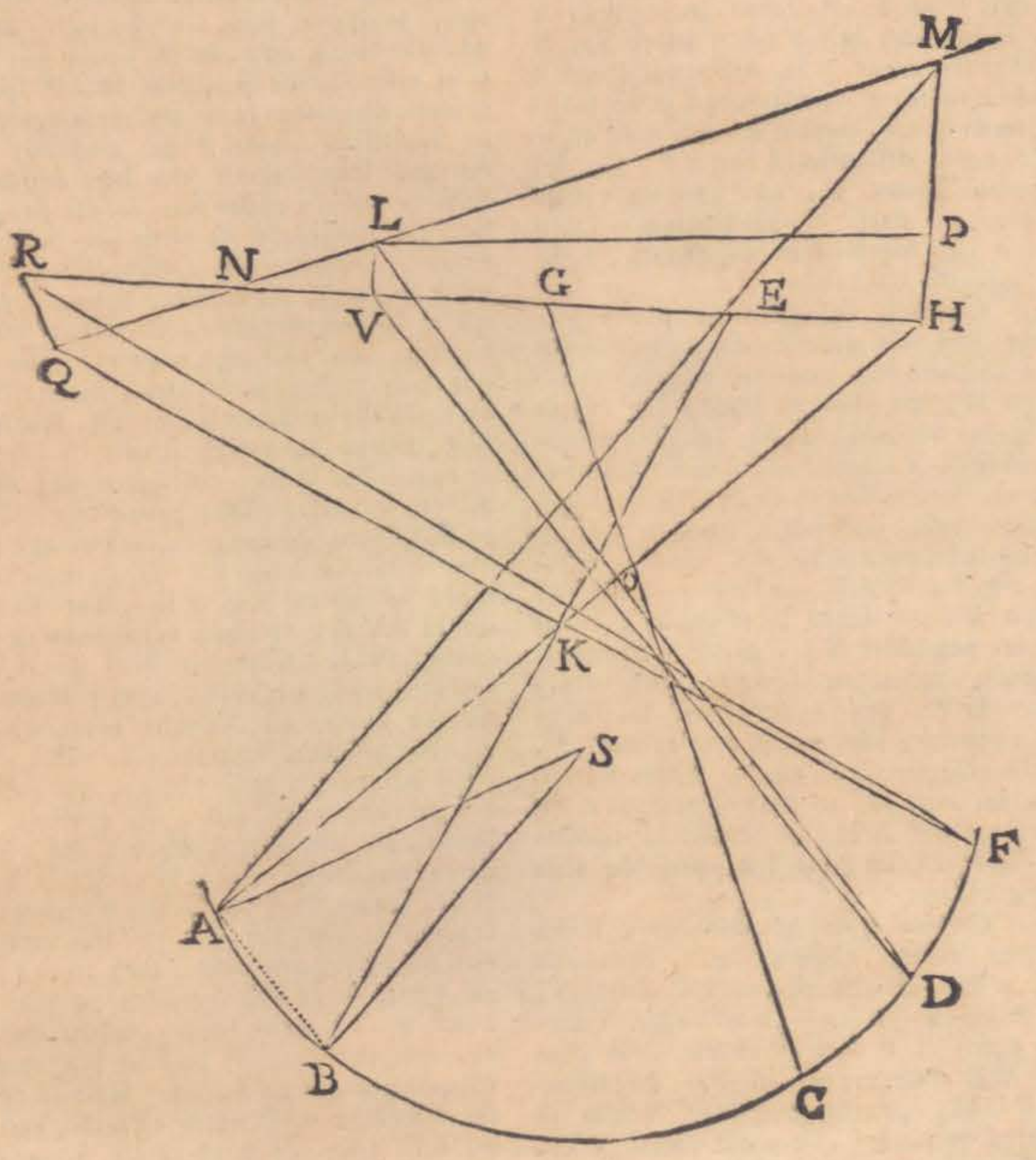
metæ velociorem reddit: ſin cometa pergit in eaſdem partes cum terrâ, eidem ſubducitur, motumque cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti (b) modo expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu terræ, & idcirco pro parallaxi cometæ meritò habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit. Diſtantia vero cometæ ex hâc parallaxi ſic colligitur. Deſignet *S* ſolem, *a c T* orbem magnum, *a* locum terræ in obſervatione primâ, *c* locum



terræ in obſervatione tertiâ, *T* locum terræ in obſervatione ultimâ, & T♈ lineam rectam verſus principium arietis ductam. Sumatur angulus ♈*TV* æqualis angulo ♈*QF*, hoc eſt, æqualis longitudini cometæ ubi terra verſatur in *T*. Jungatur *a c*, & producatur ea ad *g*, ut ſit *a g* ad *a c* ut *AG* ad *AC*, & erit *g* locus quem terra tempore obſervationis ultimæ, motu in rectâ *a c* uniformiter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur *g*♈ ipſi *T*♈ parallela, & capiatur angulus ♈*gV* angulo ♈*QG*

130. (b) * *Uti modò expoſui.* (128).

ΥQG æqualis, erit hic angulus ΥgV æqualis longitudini cometæ è loco g ſpectati; & angulus TVg parallaxis erit, quæ oritur à tranſlatione terræ de loco g in locum T: ac proinde V locus erit cometæ in plano eclipticæ. Hic (c) autem locus V orbe *Jovis* inferior eſſe ſolet. Idem



(c) 131. * *Hic autem locus V.* Recta HV, referat veſtigium cometæ in plano Eccliptícæ, ſintque V, G, E, H, quatuor cometæ loca in plano Eccliptícæ præcedenti methodo inventa. Sit S, ſol, ABCD, orbis magnus, ſintque A, B, C, D, quatuor terræ loca ad tempora obſervationum nota. In triangulo ASB, dantur latera SA, SB, daturque angulus ASB, differentia ſcilicet locorum terræ è ſole viſorum; quare dabuntur anguli SAB, SBA, notaque erit in partibus ſemidiametri orbis magni recta AB, chorda nempe arcûs à tellure interim percurſi. Rurſus in triangulo KAB, dantur omnes anguli, nam datur angulus KAB, qui eſt ſum- 131.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Idem colligitur ex curvaturâ viæ cometarum. (d) Pergunt hæc

132. ſumma vel differentia notorum angulorum SBA, SBK. Quarè datur ratio laterum AK, AB, ſed data eſt ratio rectarum SA, AB, dabitur itaque ratio SA ad KA. At (131.) nota eſt ratio inter KO & KH, innoteſcet igitur ratio inter SA & KH; Quarè datur AH, diſtantia cometæ à terrâ in partibus ſemidiametri orbis magni. Simili planè modo invenientur aliorum locorum diſtantiæ à terrâ E, G, V, hic autem locus V, ubi cometa videri deſinit, ex datis obſervationibus inito computo per methodum expoſitam, orbe Jovis inferior eſſe ſolet.

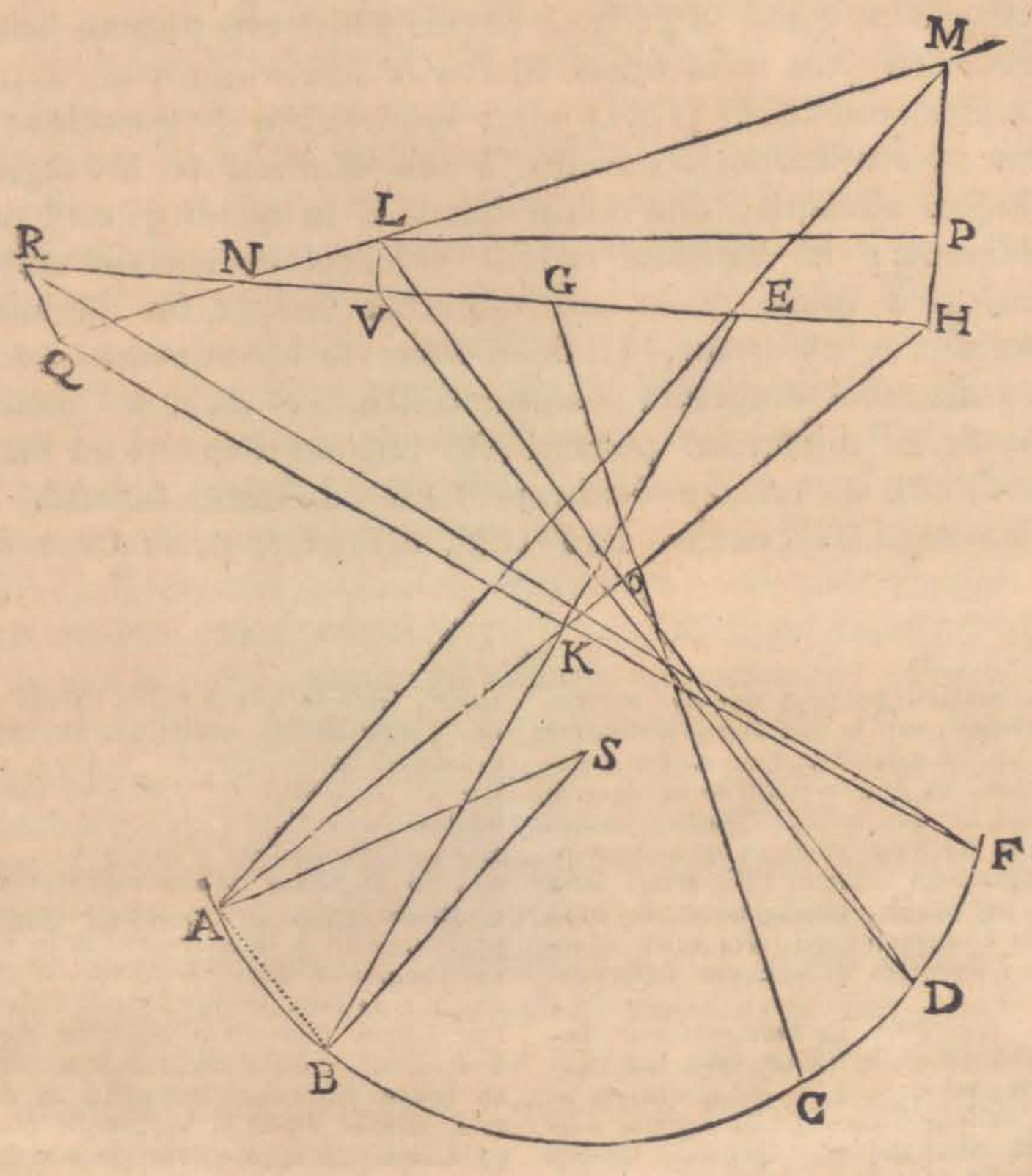
132. Cometæ veſtigium in plano Ecclipticæ jam determinavimus, ut autem veram obtineamus cometæ trajectoriam, ex loco H, ad planum Ecclipticæ erecta intelligatur normalis HM, tangens anguli latitudinis cometæ ad datum obſervationis tempus poſito AH, radio, eritque M, locus verus cometæ ad tempus datum; Eſt enim poſitio rectæ AH, ejus longitudo & angulus MAH, latitudo. Similiter in loco V, ad idem Ecclipticæ planum erigatur normalis VL, æqualis tangenti latitudinis ad idem tempus obſervatæ, ſumpto DV, pro radio, erit L, locus verus cometæ, ideóque juncta recta LM, eſt ipſa trajectoria quæſita. Patet autem diſtantiam loci M, ab A, ſivè rectam AM, eſſe ad rectam AH, ut ſecans latitudinis in H, ad radium, & ità porrò de aliis cometæ locis.

133. Cætera quæ ad motum cometæ pertinent facilè definientur. Invenitur LM, recta ſcilicet percurſa à cometa, dum tellus ab A ad D movetur. Ducatur enim LP ipſi VH parallela cum rectâ ME concurrens in P. In triangulo PLM, præter angulum rectum in P, datur latus LP, æquale lateri VH, atque etiam datur latus PM, æquale differentiæ rectarum datarum MH, LV, quarè dabitur LM. Producatur ML, donec cum HV, concurrat in N, erit N nodus. Præterea NV erit ad VL, ut VH ad PM, itemque LN ad LV ut LM ad MP, & ideò dabuntur LN, LV, capiatur tempus quod ſit ad tempus inter obſervationem in M, & obſervationem in L, ut NL ad LM, habebitur tempus inter obſervationem in L, & appulſum cometæ ad nodum, cum enim cometa in lineâ rectâ uniformiter moveri ſupponatur, tempora ſunt ut ſpatia. Dabitur quoque locus cometæ in nodo verſantis, cum enim detur punctum N, & propter tempus cognitum inter obſervationem in L, & appulſum cometæ ad nodum, detur quoque locus terræ pro hoc momento, dabitur poſitio rectæ hæc puncta jungentis, hoc eſt longitudo cometæ in nodo exiſtentis. Tandem ob datam diſtantiam nodi à loco V datamque latitudinem cometæ in eodem loco, dantur in triangulo ſphærico rectangulo latera duo circà angulum rectum ac proinde innoteſcit inclinatio hypothenuſæ, id eſt, ſemitæ ipſius cometæ ad Ecclipticam.

134. Ex dictis colligitur quâ ratione ad tempus quodlibet propoſitum definiri poſſint locus cometæ è terrâ viſus, illiuſque diſtantia à terrâ. Determinentur ut ſuprà veſtigium orbitæ in plano Ecclipticæ HEVR, ipſaque vera cometæ orbita MLNQ. Capiatur HR ad HV, ut ſpatium inter obſervationem primam tempuſque datum ad ſpatium inter obſervationem primam & quartam. Dato terræ loco ad tempus propoſitum, putà F, datur poſitio rectæ FR, ac proinde datur longitudo cometæ quæſita (132). Præterea fiat RQ ad RN, ſicut MH ad HN, patet dari latitudinem cometæ ad tempus datum (loc. cit.). His autem datis, obtineri poteſt diſtantia cometæ à terrâ (ibid.) in hâc ergò hypotheſi quod cometæ in lineis rectis uniformiter moveantur, determinari poſſunt præcipua motûs cometarum elementa. Hâc de re conſulat Lector opuſculum Clariſſ. Viri Dominici Caſſini de cometâ an 1664, Davidis Gregorii Aſtronomiam Phyſicam & Caſſini filii Theoriam cometarum in monumentis Pariſ. an 1727.

(d) * *Pergunt hæc corpora.* Eſt & alia parallaxis proveniens ex motu terræ circà Solem. Hæc latitudinem cometarum reſpicit, hoc eſt, diſtantiam eorum ab Ecclipticâ verſus Boream aut auſtrum, undè fit ut cometæ in ſphærâ fixarum à curſu cir-

hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa, quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum



circulari deflectere & lineam admodum irregularem videantur describere. Cum enim planum in quo cometa movetur, cum plano Ecclipticæ in quo terra fertur, non coincidat, cometa modò suprà Ecclipticam in Septentrionem ascendit, modò infrà Ecclipticam in austrum descendit. Quia tamen in eodem plano semper incedit, orbem circularem, tellure quiescente, videretur describere, sed quoniam tellus ipsa movetur in plano Ecclipticæ, cometa pro diversis terræ locis observatus, modò versùs Boream altius ascendere, modò versùs austrum inferius descendere apparebit. Observationibus compertum est cometas propemodum in circu-

1345

DE MUNDI SYSTEMATE.

totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis, & quoties terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quod reſpondet motui terræ; & inſignis ejus quantitas, meo computo, collocavit diſparentes cometas ſatis longe infra jovem. Unde conſequens eſt quod in perigæis & periheliis, ubi propiùs adſunt, deſcendunt ſæpius infra orbes Martis & inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum (e) ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis à ſole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicatâ ratione diſtantiæ: in duplicatâ ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam à ſole, & in aliâ duplicatâ ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur & lucis quantitas & apparens diameter cometæ, dabitur diſtantia, dicendo quod diſtantia ſit ad diſtantiam planetæ, in ratione diametri ad diametrum directè & ratione duplicatâ lucis ad lucem inversè. Sic

6 minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum

135. circulis maximis pergere, quandiu moventur celerius, at in fine cursûs deflectere ſolent ab his circulis; hæc autem deflexio pendet ex ipsâ trajectoriæ cometarum curvaturâ de quâ infra. Quare deinceps trademus normam computi quo Newtonus diſparentes cometas ſatis longè infrà Jovem collocavit, nonnullaque afferemus exempla cometarum qui infrà orbes Martis & inferiorum planetarum deſcenderunt.

(e) 135. (*) *Ex Luce capitum.* Intelligantur duæ ſuperficies ſphæricæ concentricæ, minor una, major altera, & in centro utriuſque conſtitutum fingatur corpus aliquod lucidum. Quoniam corpus illud radios ſuos per omnem circuitum diffundit, evidens eſt eandem radiorum quantitatem in concavâ ſuperficie utriuſque ſphæræ contineri, ideóque denſitates radiorum erunt in ratione ſuperficierum ſphæricarum inversè, hoc eſt, in ratione duplicatâ ſemidiametrorum ſive diſtantiarum à corpore lucido inversè (14. lib. 1.). Quare nullâ diſtantiarum habitâ ratione, ſenſatio quæ à radiis nervos opticos percutientibus excitatur, eſt ut quadratum diſtantiæ inversè. Sed quò remotius eſt lucidum, eo pauciores radii ad oculum perveniunt, idque in duplicatâ ratione diſtantiarum (loco ſuprà cit.) hoc eſt, in duplicatâ ratione diametri apparentis diminutæ. Quare, componendo, corporis cœleſtis à ſole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur ſplendor in ratione quadruplicatâ diſtantiæ. Erit itaque quadratum diſtantiæ cometæ à ſole ad quadratum diſtantiæ planetæ ab eodem in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ & ratione lucis planetæ ad lucem cometæ. Undè diſtantia cometæ à Sole eſt ad diſtantiam planetæ ab eodem in ratione compoſitâ ex ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ & ratione ſubduplicatâ Lucis planetæ ad Lucem cometæ.

cum ſexdecim pedum à *Flamſtedio* obſervata & micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″; nucleus autem ſeu ſtella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11‴ vel 12‴. Luce vero & claritate capitis ſuperabat caput cometæ anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus ſaturnum cum annulo ſuo quaſi quadruplo lucidiorem fuiſſe: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi ſit quaſi 21″, idcoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter eſſet 30″: erit diſtantia cometæ ad diſtantiam ſaturni ut 1 ad √4 inverſè, & 12‴ ad 30″ directè, id eſt, ut 24 ad 30 ſeu 4 ad 5. Rurſus cometa anni 1665 menſe aprili, ut auctor eſt *Hevelius*, claritate ſuâ pene fixas omnes ſuperabat, quinetiam ipſum ſaturnum ratione coloris videlicet longè vividioris. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′, at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Porrò cum diameter capillitii cometarum raro ſuperet 8′ vel 12′, diameter verò nuclei, ſeu ſtellæ centralis ſit quaſi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet ſtellas haſce ut plurimùm ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cum lux earum cum luce Saturni non rarò conferri poſſit, eamque aliquando ſuperet; manifeſtum eſt, quod cometæ omnes in periheliis vel infrà Saturnum collocandi ſint, vel non longè ſuprà. Errant igitur toto cœlo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant: quâ certe ratione non magis illuſtrari deberent à Sole noſtro, quam planetæ, qui hic ſunt, illuſtrantur à ſtellis fixis.

Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem cometarum per fumum illum maximè copioſum & craſſum, quo caput circundatur, quaſi per nubem obtusè ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tantò pro-

DE MUNDI SYSTEMATE.

pius ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copia lucis à ſe reflexæ planetas æmuletur. Inde veriſimile fit cometas longè infra ſphæram Saturni deſcendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex caudis. (f) Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu minuenda eſt diſtantia cometarum, ne fumus à capite ſemper ortus per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expanſione propagetur. In poſteriore referenda eſt lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur ſi concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra diſcum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, (g) Jovem ipſum ſplendore ſuo multùm ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illuſtrabitur à ſole, ideoque erit ſoli multò propior. Quinetiam capita ſub Sole deliteſcentia, & caudas cum maximas tum fulgentiſſimas inſtar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam venerem ne dicam veneres plures conjunctas quandoque ſuperaret.

Idem

135. (f) * *Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi*, ut poſteà probabitur.

(g) * *Jovem ipſum ſplendore ſuo.* Id variis obſervationibus confirmat Newtonus in opuſculo de mundi ſyſtemate. Cometa anni 1679. Decembris 12. & 15. ſtilo veteri, quo tempore caudam clariſſimam emittebat & Luci multorum Jovium per tantum ſpatium diffuſæ ac dilatatæ non imparem, magnitudine nuclei, ut obſervabat *Flamſtedius*, cedebat Jovi, adeóque Soli longè vicinior, quin imò minor erat Mercurio. Nam die 17ª menſis hujus, ubi terræ propior erat, apparuit Caſſino per teleſcopium Ped. 35. paulò minor globo Saturni. Die 8ª. menſis hujus, tempore matutino, vidit Halleius caudam perbrevem & latam & quaſi ex corpore ſolis jamjam orituri exeuntem, ad inſtar nubis inſolito more fulgentis, nec priùs diſparentem quam ſol ipſe inciperet ſuprà horizontem conſpici. Superabat igitur hic ſplendor Lucem nubium uſque ad ortum ſolis, & immediato ſolis ſplendori ſolum cedendo vincebat longe lucem omnium ſtellarum conjunctim. Non Mercurius, non Venus, non ipſa Luna in tantâ ſolis orientis vicinitate cerni ſolet. Fingamus lucem hancce dilatatam coarctari & in orbem nuclei cometici Mercurio minorem coarctari & ſplendore longè fortiori jam reddita magis conſpicua, Mercurium longè ſuperabit, adeóque erit ſoli vicinior. Diebus 12. & 15. ejuſdem menſis, cauda hæc per ſpatium longè majus diffuſa apparuit rarior, & luce tamen adeò forti ut ſtellis fixis vixdum apparentibus cerneretur & mox trabis mirum in modum fulgentis ſpeciem exhibuit.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu cometarum à terrâ solem versùs, ac decrescente in eorum recessu à sole versus terram. Sic enim cometa posterior anni 1665. (observante *Hevelio*) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo apparente, ideoque præterierat perigæum; splendor vero capitis nihilominus indies crescebat, usque dum cometa radiis solaribus obtectus desiit apparere. Cometa anni 1683 (observante eodem *Hevelio*) in fine mensis Julii, ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur usque ad *Sept.* 4. quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore cometa ad terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro mensurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. esse tantum $6'.\ 5''$ inclusâ coma, at *Sept* 2. esse $9'.\ 7''$. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in viciniâ solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius à sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad terram. Cometa anni 1618. circa medium mensis *Decembris*, & iste anni 1680. circa finem ejusdem mensis, celerrimè movebantur, ideoque tunc erant in perigæis. Verum splendor maximus capitum contigit ante duas fere septimanas, ubi modo exierant de radiis solaribus; & splendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate solis. Caput cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decemb.* 1. majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16. (jam in perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decemb.* conspectum & à *Flamstedio* observatum est caput cometæ posterioris in distantia novem graduum à sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore nubium juxta solem occidentem. *Decemb.* 26. velocissimè

motus

DE MUNDI SYSTEMATE.

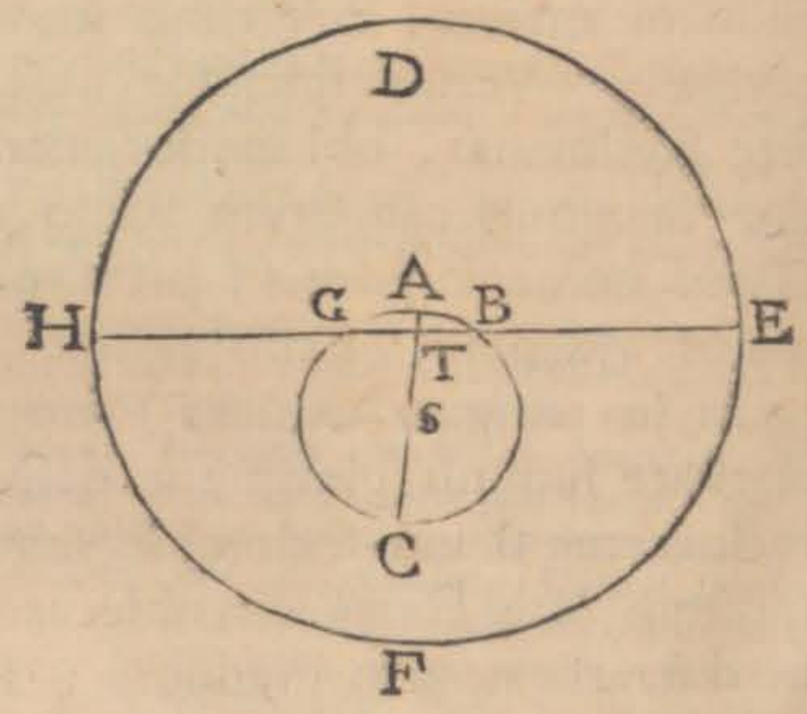
motus, inque perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori pegaſi, ſtellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut ſtella quartæ, *Jan.* 9. ut ſtella quintæ, *Jan.* 13. ob ſplendorem lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25. vix æquabat ſtellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia à perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales à terrâ diſtantias, æqualiter lucere debuiſſent, in plaga ſolis maximè ſplenduêre, ex altera perigæi parte evanuêre. Igitur ex magnâ lucis in utroque ſitu differentia, concluditur magna ſolis & cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux cometarum regularis eſſe ſolet, & maxima apparere ubi capita velociſſimè moventur, atque ideo ſunt in perigæis; niſi quâtenus ea major eſt in vicinia ſolis.

Corol. 1. Splendent igitur cometæ (h) luce ſolis à ſe reflexâ.

Corol. 2. (i) Ex dictis etiam intelligitur cur cometæ tantoperè frequentant regionem ſolis. Si cernerentur in regionibus longè

135. (h) * *Luce Solis à ſe reflexâ.* Nam à terrâ recedentibus cometis & ad ſolem accedentibus, augetur eorum ſplendor, decreſcente licet diametro, ut ex præcedentibus obſervationibus patet.

(i) * *Ex dictis etiam intelligitur.* Referat S ſolem, T, terram, circulus DFFH, ſphæram fixarum. Quoniam cometæ ſplendent luce ſolis à ſe reflexâ, (cor. 1.), ii non videbuntur, niſi à ſole ità illuſtrentur ut oculi noſtri hâc luce moveri poſſint. Prætereà cometæ per caudas ſuas maximè fiunt conſpicui, has autem caudas non emittunt priuſquam ad ſolem aliquantulum incaluerint, quare patet cometas ſeſe conſpicuos non præbere niſi ad definitam quandam à ſole diſtantiam accedant. Ponatur itaque ſphæra ABCG, ſoli concentrica ad talem diſtantiam deſcripta ut nullus cometa propter illuſtrationis defectum, deregi poſſit, priuſquam ad ſphæræ hujus ſuperficiem pervenerit, juncta recta ST, producatur utrinque donec ſuperficiei huic occurrat in A, & C. Per T, ductum intelligatur planum HE, cui normalis eſt recta AC, planum illud ſphæram dividet in duo hemiſpheria quorum unum HFE, eſt verſus ſolem, alterum verò HDE, ſoli opponitur. Cometæ omnes in ſphæ-



ræ ſegmento BCG, exiſtentes, videbuntur in hemiſphærio verſus ſolem, omnes autem qui verſantur in ſegmento BAG videbuntur in hemiſphærio quod ſoli opponitur.

longè ultra ſaturnum, deberent ſæpiùs apparere in partibus ſoli oppoſitis Forent enim terræ viciniores, qui in his partibus verſarentur; & ſol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verum percurrendo hiſtorias cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in hemiſphærio ſolem verſus, quam in hemiſphærio oppoſito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux ſolaris obtexit. Nimirum in deſcenſu ad regiones noſtras neque caudas emittunt, neque adeo illuſtrantur à ſole, ut nudis oculis ſe prius detegendos exhibeant, quam ſint ipſo jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa ſolem deſcripti pars longè major ſita eſt à latere terræ, quod ſolem reſpicit; inque parte illâ majore cometæ, ſoli ut plurimum viciniores, magis illuminari ſolent.

Corol. 3. Hinc (k) etiam manifeſtum eſt, quod cœli reſiſtentia deſtituuntur. Nam cometæ vias obliquas & nonnunquam curſui

tur. Quarè ſi ſegmentum BCG, majus ſit ſegmento BAG, plures cometæ videbuntur in hemiſpherio verſus ſolem quam in oppoſito. Jam verò cometæ nudis oculis ſe priùs detegendos non exhibent quam ſint Jove propiores; ponatur itaque SA, circiter $\frac{3}{2}$ diſtantiæ Martis à ſole, hoc eſt, SA ſit circiter dupla ipſius ST, erit ſegmentum BGC pluſquam quadruplo majus ſegmento BAG, ideóque quadruplo vel quintuplo plures cometæ detegentur in hemiſpherio verſus ſolem quam in hemiſpherio oppoſito. At ſi cometæ cernerentur in regionibus longè ultrà Saturnum, foret SA, longè major quam ST, & ideò cometæ ſæpiùs deberent apparere in partibus ſoli oppoſitis, forent enim terræ viciniores qui in ſegmento BAG, verſantur, cæteros verò in ſegmento BCG, ſol interpoſitus obſcuraret. Ex his intelligitur cur cometæ tantoperè frequentant regionem Solis.

(k) * *Hinc etiam manifeſtum eſt.* Clariſſ. Caſſinus in mon. Pariſ. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosè reduxit. Obſervatos plurimorum cometarum motus retrogrados meras eſſe apparentias conjectatur, non ſecus ac directus planetarum circumſolarium motus apparet aliquandò retrogradus. Sed quamvis celeberrimi hujuſce Aſtronomi judicium maximè veneremur, nonnullos tamen cometas metu verè retrogrado contrà ſeriem ſignorum curſum tenuiſſe conabimur oſtendere, ubi hâc de re plura dicendi locus dabitur, poſtquam ſcilicet tradiderimus motuum cometarum elementa. Obliquas eſſe nonnunquam cometarum vias & curſui planetarum contrarias fateri non dubitarunt quidam Carteſiani. Verùm quâ ratione diverſi illi cometarum motus cum vorticibus conciliari poſſint difficilè intelligitur, cum enim cometæ in regiones planetarum deſcendant, neceſſe videtur ut rapidiſſimo vorticum torrente contrarii cometarum motus maximè perturbentur, citóque deſtruantur, ac tandem cometæ hujuſce torrentis vi rapiantur. At ſummè regulares eſſe cometarum motus & contrà curſum planetarum diutiſſimè conſervari, nonnullis cometarum exemplis deinceps patebit.

135

DE MUNDI SYSTEMATE.

curſui planetarum contrarias ſecuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus ſuos, etiam contra curſum planetarum diutiſſimè conſervant. (l) Fallor ni genus planetarum ſint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod ſcriptores aliqui meteora eſſe volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. (m) Capita cometarum atmoſphæris ingentibus cinguntur; & atmoſphæræ infernè denſiores eſſe debent. Unde nubes ſunt, non ipſa cometarum corpora, in quibus mutationes illæ viſuntur. Sic terra ſi è planetis ſpectaretur, luce nubium ſuarum proculdubio ſplenderet, & corpus firmum ſub nubibus propè deliteſceret. Sic cingula jovis in nubibus planetæ illius formata ſunt, quæ ſitum mutant inter ſe, & firmum jovis copus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora cometarum ſub atmoſphæris & profundioribus & craſſioribus abſcondi debent.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

Cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus moveri, & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere.

(n) Patet per corol. I. prop. XIII. libri primi, collatum cum prop. VIII. XI. & XIII. libri tertii.

Co-

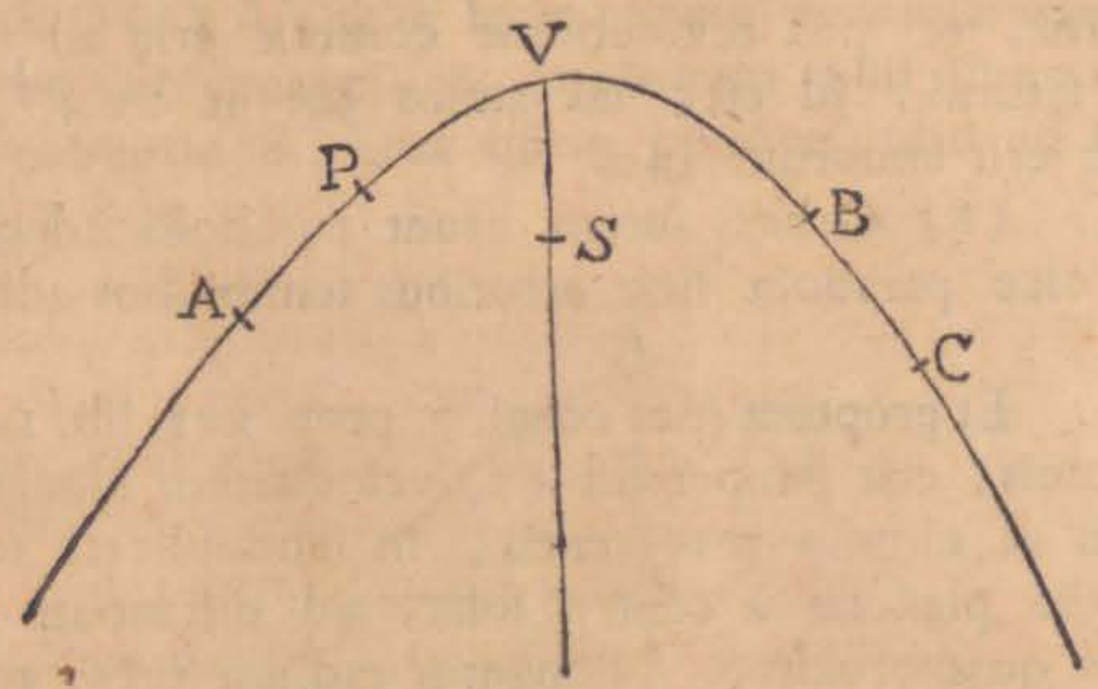
135. (l) * *Fallor, ni genus planetarum ſint.* Quam gravibus fundamentis nitatur hæc ſententia manifeſtum erit poſteà ex variis cometarum phænomenis.

(m) * *Capite cometarum* atmoſphæris ingentibus cingi variis argumentis impoſterum confirmat Newtonus. Cæterum in ipſis cometarum corporibus non fieri perpetuas mutationes illas in decurſu conſtabit independenter omninò ab illâ opinione quæ cometis ingentes atmophæras tribuit.

(n) * *Patet.* Quoniam cometæ motu ſuo lineas curvas circà ſolem deſcribunt, ut ex obſervationibus conſtat, vi aliquâ à motu rectilineo detorquentur (per leg. 1.). Quoniam autem hæc vis quæ planetas à lineis rectis detorquet maximè tendit versùs ſolem ut pote corpus cætera omnia ſyſtematis ſolaris corpore longè ſuperans, eadem quoque vis in cometis ſolem maximè debet reſpicere. Sed vis acceleratrix in planetis eſt in duplicatâ ratione diſtantiarum à ſole inverſâ (prop. 8. lib. 3.). Quarè eandem quoque legem obſervare debent cometæ quæ ſunt corpora planetis ſimilia ac proindè (cor. prop. 13. lib. 1. & prop. 13. lib. 3.)

come-

Corol. 1. Hinc si cometæ in orbem redeunt; orbes erunt ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica planeta- LIBER TERTIUS. PROP. XL. THEOR. XX.



cometæ non secus ac planetæ in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moventur & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describunt. Hæc ità se habent, si sol è loco suo nullatenus moveatur; sed quamvis sol per attractionem planetarum perpetuo motu agitetur, non tamen longè recedit à communi gravitatis centro planetarum omnium, ideóque etiam cometæ qui in regionibus à sole maximè diffitis commorantur, non magnoperè hujus centri situm turbare possunt. Quarè orbitarum suarum umbilicus non longè distabit à centro solis, ac proindè propositio hæc vera est quamproxime. Quantum accuratè observatis cometarum motibus congruat patebit deinceps.

136. Keplerus aliique post eum astronomi non pauci cometas in lineis rectis moveri posuerunt, & indè cometarum quorumdam loca observationibus satis congrua calculo investigarunt. Res ità succedere potest, si observetur cometa in eâ tantùm orbitæ suæ parte quæ à rectâ non multum differat. Sit APVBC, Sectio conica admodùm excentrica in cujus umbilico altero S collocatum sit solis centrum. Ponamus cometam observari, dum orbitæ suæ partem AP, describit, fieri potest ut reliquo tempore, dum scilicet à loco P, per V, B, ad locum C promovetur, in regiones remotissimas abiens oculis se subducat & sub radiis solaribus deliteſcat respectu observatoris in tellure circà solem S motâ, vel etiam accidere potest ut, motu telluris ità exigente, cometa percurrens orbitæ partem APVB, sub solaribus radiis abscondatur & tunc primum observetur cum ad locum B pervenerit, lineam BC describturus. In hoc utroque casu via cometæ à lineâ rectâ parum differet. In primo casu, cometæ à Sole absorpti credentur, quia ad solem accedentes, pro destructis habebuntur. In altero casu, è sole videbuntur emergere, quia tunc primum sese conspicuos præbuerunt, dum à Sole in remotas regiones discedebant. Porrò dum cometa versus solem descendit, putà dum AP percurrit postea ad solem accedens sub ejus radiis latet, putà dum PVB describit, tandemque dum ad alteras solis partes subitò emergit, usurpatur sæpè pro novo cometa à priori in AP diverso, & duæ rectæ AP, BC pro duabus trajectoriis habentur. Ex his patet cur trajectoriæ rectilineæ, observatis cometarum motibus 136.

DE MUNDI SYSTEMATE.

netarum in (o) axium principalium ratione ſeſquiplicatâ. (P) Ideoque cometæ maximâ ex parte ſupra planetas verſantes, & eo nomine orbes axibus majoribus deſcribentes, tardius revolventur. Ut ſi axis orbis cometæ ſit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis ſaturni, id eſt, ad annos 30. ut $4\sqrt{4}$ (ſeu 8) ad 1. ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. (P) Orbes autem erunt parabolis adeo finitimi, ut eorum vice parabolæ ſine erroribus ſenſibilibus adhiberi poſſint.

Corol. 3. Et proptera (per corol. 7. prop. XVI. lib. 1.) velocitas cometæ omnis, erit ſemper ad (q) velocitatem planetæ cujuſvis circa ſolem in circulo revolventis, in ſubduplicatâ ratione duplæ diſtantiæ planetæ à centro ſolis, ad diſtantiam cometæ à centro ſolis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, ſeu ellipſeos in quâ terra revolvitur ſemidiametrum maximam eſſe partium 100000000: & (r) terra motu ſuo diurno mediocri deſcribet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque cometa in eâdem telluris à ſole diſtantiâ mediocri, eâ cum velocitate quæ ſit ad velocitatem telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{5}{12}$.

136. plerumque reſpondeant. Id fit ſcilicet eò quod aliqua duntaxat portio trajectoriæ pro integrâ trajectoriâ habeatur. At ſi tota ſimul conſideretur tam in aſcenſu verſus ſolem quam in deſcenſu, aliam nullam præter Sectionem conicam ſatisfacere conſtabit.

(o) * *In axium principalium ratione ſeſquiplicatâ.* (Prop. 15 lib. 1.).

(P) * *Ideóque cometæ* maximâ ex parte ſuprà planetas verſantes, quo tempore ſcilicet oculos noſtros fugiunt & eo nomine orbes axibus majoribus quam planetæ deſcribentes tardius revolventur.

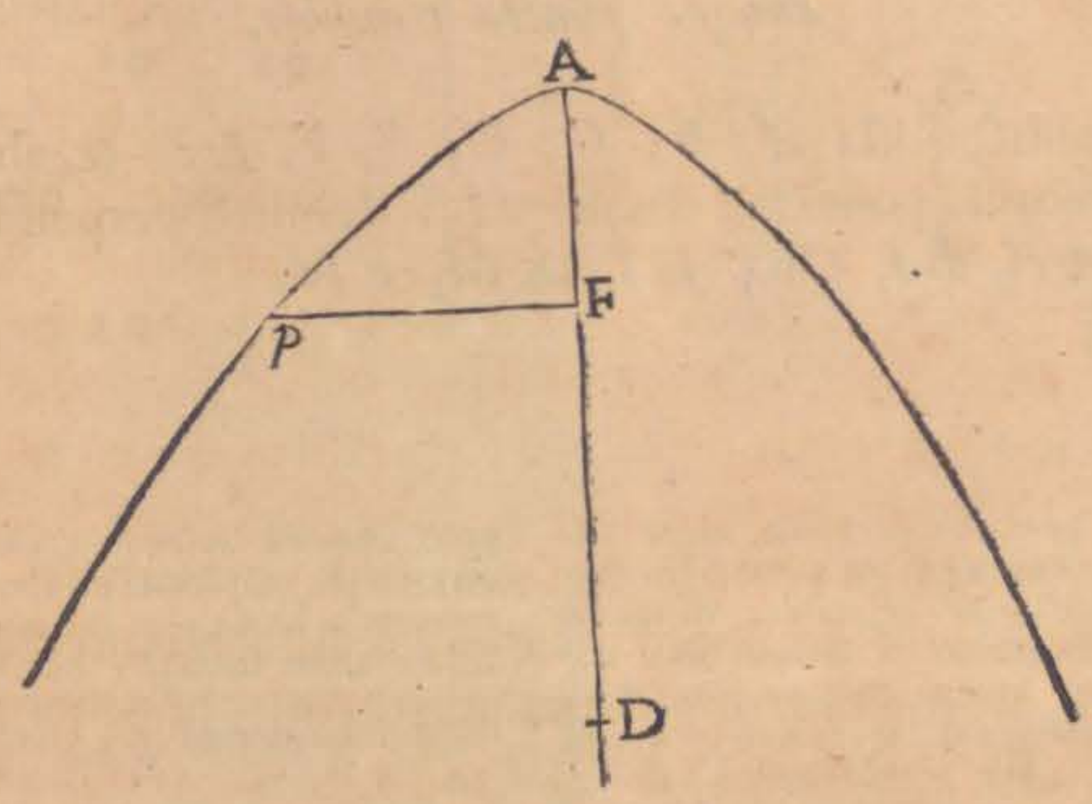
(p) * *Orbes autem parabolis adeò finitimi.* Orbes cometarum ſunt admodum excentrici, ut ex obſervationibus colligitur, & valdè exigua eſt portio orbis quem toto apparitionis tempore deſcribunt, exiguo enim temporis ſpatio ſeſe conſpicuos præbent. Verum ſi in ellipſi centrum ad infinitam ab umbilico diſtantiam removeatur, portio ellipſis cujus abſciſſa finita eſt, abit in parabolam. Quarè elliptici orbes cometarum erunt parabolis valdè finitimi.

(q) * *Ad velocitatem planetæ cujuſvis* circà ſolem in circulo revolventis, hoc eſt, ad velocitatem ejus mediocrem.

(r) * *Et terra.* Fiat hæc analogia: ut eſt tempus periodicum terræ circà ſolem ad totam peripheriam circuli 3.141... ità dies una vel hora una ad partem peripheriæ unâ die vel horâ unâ deſcriptam.

$101364\frac{1}{2}$. (f) In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in subduplicatâ ratione distantiarum reciprocè, ideoque datur.

Corol. 4. (t) Unde si latus rectum parabolæ quadruplo majus sit radio orbis magni, & quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area quam cometa radio ad solem ducto singu-



(f) * *In majoribus autem vel minoribus.* (Cor. 6. prop. 4. & prop. 15. lib. 1. vel per cor. 6. prop. 16. ejusdem libri.).

(t) * *Undè si latus rectum.* Ex umbilico parabolæ F, ducatur ad axem A D, ordinata P F, erit area A p F, ad aream circuli quartâ parte lateris recti seu radio A F descripti (theor. 2. de parabolâ lib. 1.) ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Nam si radius circuli sumatur æqualis unitati, erit area circuli ad quadratum diametri, ut 3.14159 ad 4. Sed rectangulum sub ordinatâ p F & abscissâ F A, est dimidium hujus quadrati, hoc est 2, & area parabolica A p F, hujus rectanguli duæ tertiæ partes, hoc est $\frac{4}{3}$ (per theor. 4. de parab. lib. 1.). Quarè area parabolica A p F, est ad aream circuli radio A F, descripti ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. 136.

Si igitur velocitas cometæ revolventis in parabolâ eadem esset cum velocitate planetæ gyrantis in circulo, in eâdem quoque ratione foret tempus quo cometa describit arcum parabolæ A p, ad tempus periodicum planetæ. Sed velocitas cometæ est ad velocitatem planetæ in eâdem distantiâ à sole ut $\sqrt{2}$ ad 1, in hâc igitur ratione diminuenda est prior ratio. Undè tempus quo cometa describit arcum parabolicum A p, erit ad tempus periodicum planetæ ut $\frac{4}{3 \times \sqrt{2}}$ ad $\frac{3.14159}{1}$. Sivè ut $\sqrt{\frac{16}{9 \times 2}}$, hoc est, ut $\sqrt{\frac{8}{9}}$ ad 3.14159.

DE MUNDI SYSTEMATE.

singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. (u) *Sin* latus rectum majus sit vel minus in ratione quâvis, erit area diurna & horaria major vel minor in eâdem ratione subduplicatâ.

(x) LEMMA V.

Invenire lineam curvam generis parabolici, quæ per data quotcunque puncta transibit.

Sunto puncta illa *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam *HN* demitte perpendicula quotcunque *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, *FN*.

Cas.

136. Jam tempus periodicum terræ circà solem sit 365.2565 dier. & cometa in perihelio ad distantiam æqualem distantiæ terræ à sole supponatur, tempus quo cometa describet arcum parabolicum A p, per hanc analogiam invenitur: ut est 3.14159 ad $\sqrt{\frac{8}{9}}$, ità 365.2565 ad tempus quæsitum quod erit 109. dier. 14 hor. 46′. Si quadratum radii ponatur esse partium 100000000. erit area parabolica harum partium 133333333, quas cometa radiis ad solem ductis describit diebus 109. hor. 14.46′. Quarè area quam cometa singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$ & singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$.

(u) * *Sin latus rectum.* Tempora quibus cometa in distantiis inæqualibus areas parabolicas similes describeret, sunt ut revolutiones in circulis, ideóque in ratione distantiarum sesquiplicatâ (cor. 6. prop. 4. lib. 1.), id est, majus temporis intervallum requiritur ut cometa in majori parabolâ aream similem describat, minus autem in minori, ac proinde cometa tempore æquali minorem partem parabolæ majoris & majorem parabolæ minoris describeret, idque in ratione sesquiplicatâ distantiarum inversâ, hoc est, positâ ratione distantiarum $\frac{d}{e}$, erit ratio arearum æquali tempore descriptarum ut $\frac{1}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{e\sqrt{e}}$. Sed areæ similes parabolarum inæqualium sunt in ratione duplicatâ laterum rectorum (112. lib. I.). Sive distantiarum quæ sunt laterum rectorum pars quarta (cor. 2. theor. 1. de parab. lib. 1.). Quarè ratio prior in hâc ratione duplicatâ augenda est, totaque ratio composita erit ut $\frac{dd}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{ee}{e\sqrt{e}}$, hoc est, ut $\sqrt{d}$ ad $\sqrt{e}$, quæ est ratio subduplicata distantiarum sive laterum rectorum. Patet aream minorem fieri in eâdem ratione subduplicatâ, si ratio sesquiplicata distantiarum minuatur in ratione duplicatâ laterum rectorum seu distantiarum.

(x) * *Lemma.* Totum illud Lemma exponitur num. 76. lib. 2.

Caſ. 1. Si punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* æqualia ſunt intervalla *HI*, *IK*, *KL*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK*, &c. differentias primas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*, &c. ſecundas *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, &c. tertias *d*, 2*d*, 3*d*, &c. id eſt, ita ut ſit $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, dein $b - 2b = c$, &c. & ſic pergatur ad

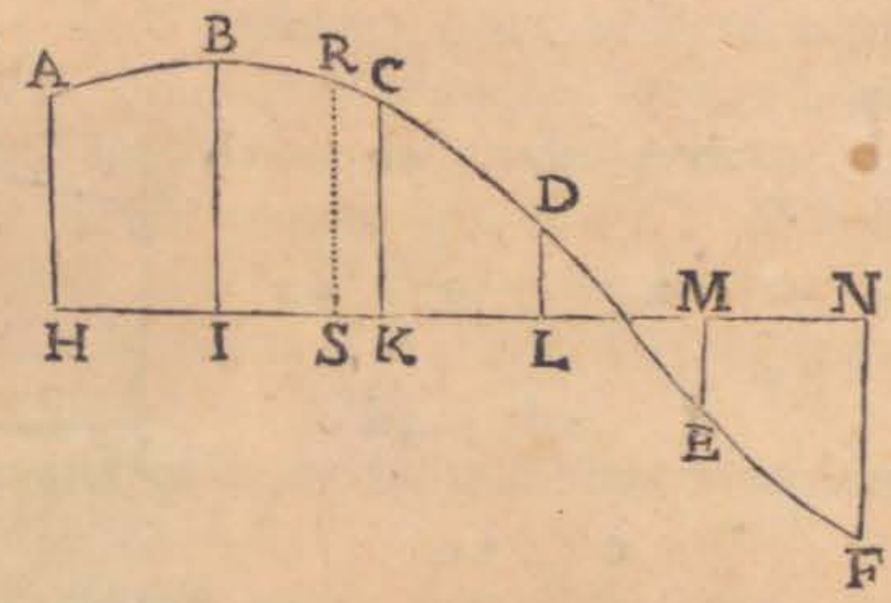
b 2b 3b 4b 5b

c 2c 3c 4c

d 2d 3d

e 2e

f



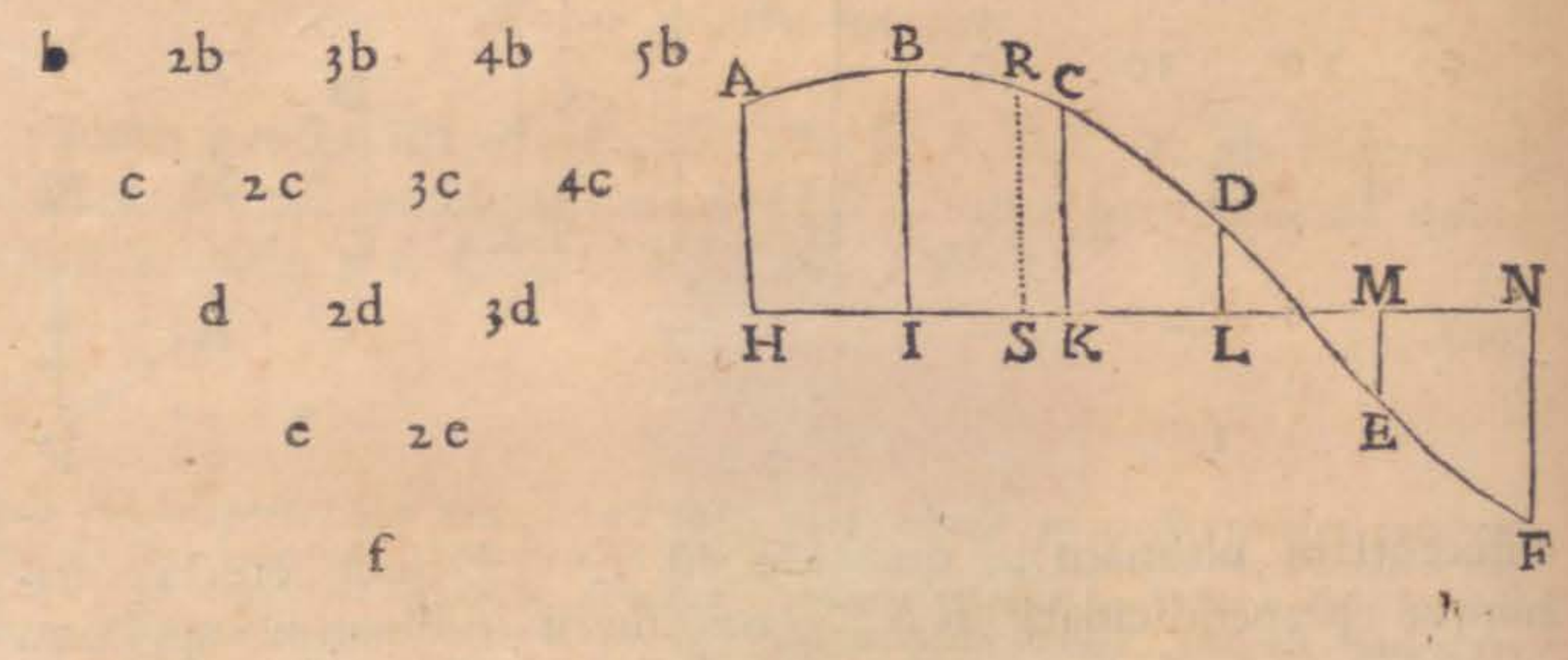
differentiam ultimam, quæ hic eſt *f*. Deinde erecta quacunque perpendiculari *RS*, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla *HI*, *IK*, *KL*, *LM*, &c. unitates eſſe, & dic $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM = t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum *ME*, & præponendo ſigna negativa terminis *HS*, *IS*, &c. qui jacent ad partes puncti *S* verſus *A*, & ſigna affirmativa terminis *SK*, *SL*, &c. qui jacent ad alteras partes puncti *S*. Et ſignis probe obſervatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Caſ. 2. Quod ſi punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, &c. inæqualia ſint intervalla *HI*, *IK*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK*, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum diviſas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*; ſecundas per intervalla bina diviſa *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, &c. tertias per intervalla terna diviſas *d*, 2*d*, 3*d*, &c. quartas per intervalla quaterna diviſas *e*, 2*e*, &c. &

ſic

DE MUNDI SYSTEMATE.

sic deinceps; id est, ita ut sit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c. dein $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c. postea $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. Inventis



differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, s in $+SM = t$; pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri possunt quamproximè. Nam si curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & parabola per eadem duci intelligatur: erit area parabolæ hujus eadem quamproximè cum area curvæ illius quadrandæ. (y) Potest autem parabola per methodos notissimas semper quadrari Geometricè.

LEM-

136. (y) * *Potest autem Parabola*, per methodos notissimas (165. lib. 1.) semper quadrari geometricè. Inveniatur itaque æquatio definiens curvam parabolicam quæ transibit per curvæ quadrandæ puncta quotlibet, erit area parabolæ hujus eadem quam proximè cum areâ curvæ illius quadrandæ. Quò plura sunt puncta curvæ propositæ per quæ transit curva Parabolica, eò propius area hujus accedit ad aream illius.

LEMMA VI.

Ex obſervatis aliquot locis cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Deſignent *HI*, *IK*, *KL*, *LM* tempora inter obſervationes *HA*, *IB*, *KC*, *LD*, *ME* obſervatas quinque longitudines cometæ, *HS* tempus datum inter obſervationem primam & longitudinem quæſitam. Et ſi per puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E* duci intelligatur curva regularis *ABCDE*; & per lemma ſuperius inveniatur ejus ordinatim applicata *RS*, erit *RS* longitudo quæſita.

Eâdem methodo ex obſervatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

(z) Si longitudinum obſervatarum parvæ ſint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; ſuffecerint obſervationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin maiores ſint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt obſervationes quinque adhiberi.

LEM-

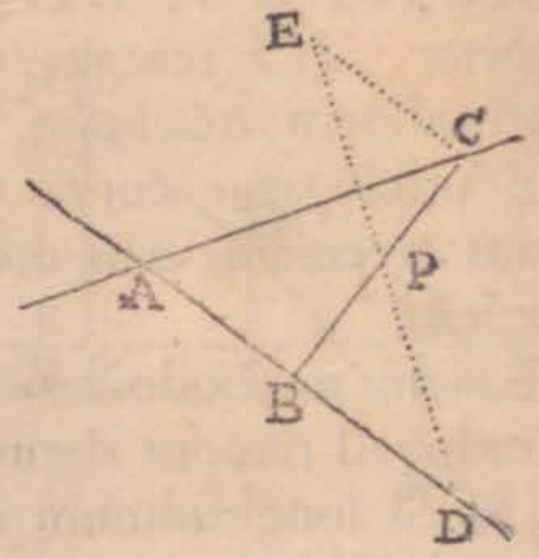
(z) 137. * *Si longitudinum obſervatarum*, (patet per not. in cor. præc.). Methodus Lemmatis præcedentis quæ methodus interpolationum dici ſolet, in rebus Aſtronomicis uſus habere poteſt eximios. Hanc methodum adhibuit Clariſſ. Maierus tom 2. Commentt. Acad. Petropol. ad inveſtiganda ſolſtitiorum momenta. Circâ tempus ſolſtitii obſerventur aliquæ Solis altitudines meridianæ, illaſque Solis altitudines repræſentent quædam ordinatæ, & tempora inter obſervationes elapſa ordinatarum intervallis exhibeantur. Deinde tranſeat Parabola per extremitates ordinatarum, abſciſſa quæ correſpondet minimæ ordinatæ, tempus ſolſtitii determinabit. Cæterum definiri poteſt tempus ſolſtitii per plures obſervationes & parabolam plurium dimenſionum, vel per tres obſervationes duntaxat & parabolam conicam, uti fecit Halleius. Verum in quocunque caſu adhibeatur interpolationum methodus, oportet differentias obſervatas ſenſibiliter majores eſſe erroribus qui in ipſâ obſervatione committi poſſunt, hâc autem adhibitâ curâ, ſatis accurate determinari poterunt plurima aſtronomiæ phænomena quæ aliâ quidem viâ forent determinatu difficillima. Elegantiſſimum ejuſdem methodi exemplum dedit eximius geometra D. Clairaut in Mon Pariſ. an. 1736., ubi determinandæ telluris figuræ modum exponit ex menſurâ plurium meridiani arcuum in diverſis latitudinibus captâ. 137.

DE MUNDI SYSTEMATE.

LEMMA VII.

Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, PC, *rectis duabus positione datis* AB, AC *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*

A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem versus rectam alteram *AC* usque ad *E*, ut sit *PE* ad *PD* in datâ illâ ratione. Ipsi *AD* parallela sit *EC*; & si agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q. E. F.*



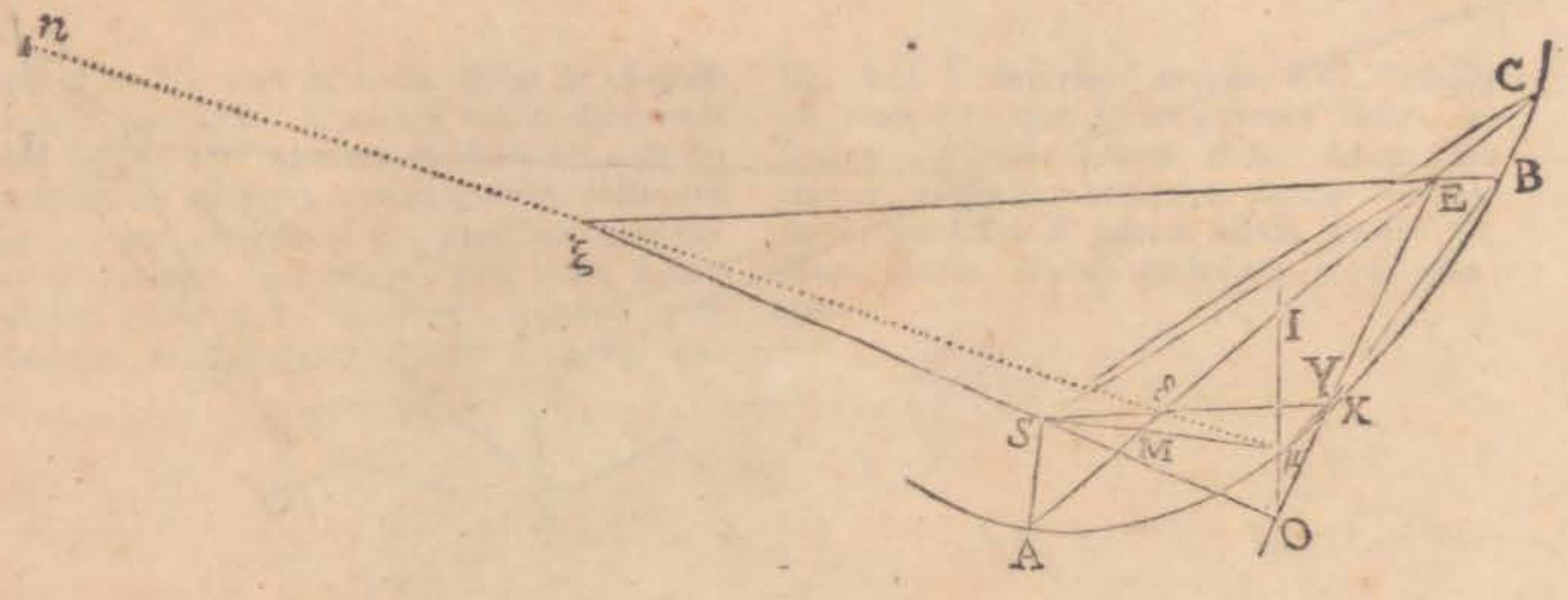
LEMMA VIII.

Sit ABC *parabola umbilicum habens* S. *Chorda* AC *bisecta in* I *abscindatur segmentum* ABCI, *cujus diameter sit* Iμ *& vertex* μ. *In* Iμ *producta capiatur* μO *æqualis dimidio ipsius* Iμ. *Jungatur* OS, *& producatur ea ad* $\frac{\S}{3}$, *ut sit* S$\S$ *æqualis* 2SO. *Et si cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *& agatur* $\S$B *secans* AC *in* E: *dico quod punctum* E *abscindet de chordâ* AC *segmentum* AE *tempori proportionale quamproximè.*

Jungatur enim *EO* secans arcum parabolicum *ABC* in *Y*, & agatur μX, quæ tangat eundem arcum in vertice μ, & actæ *EO* occurrat in *X*; & (a) erit area curvilinea $AEX\mu A$ ad aream curvilineam $ACY\mu A$ ut *AE ad AC*. Ideoque cum trian-

137. (a) * *Et erit area.* Quoniam chorda AC bisecta est in I, erit semisegmentum AμI æquale semisegmento μIC. Item quia μX tangit parabolam in μ, erit μX, parallela chordæ AC (per Lem. 4. de conic. lib. 1.) ac proinde triangulum

triangulum ASE fit ad triangulum ASC in eâdem ratione, erit area tota $ASEX\mu A$ ad aream totam $ASCY\mu A$ ut AE ad AC. Cum autem ξO ſit ad SO ut 3 ad 1, & EO ad XO in eâdem ratione, erit SX ipſi EB parallela: & propterea ſi jungatur BX, erit triangulum SEB triangulo XEB æquale. LIBER TERTIUS. PROP. XL. THEOR. XX.



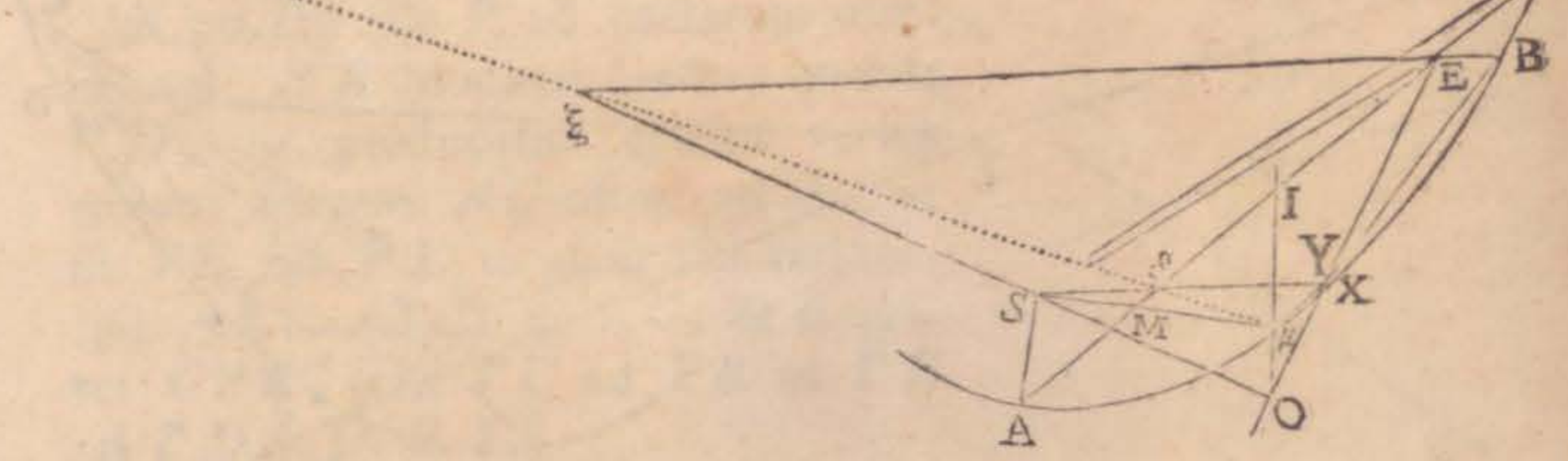
Unde ſi ad aream $ASEX\mu A$ addatur triangulum EXB, & de ſumma auferatur triangulum SEB, manebit area $ASBX\mu A$ areæ $ASEX\mu A$ æqualis, atque ideo ad aream $ASCY\mu A$ ut AE ad AC. Sed areæ $ASBX\mu A$ æqualis eſt area $ASBY\mu A$ (b) quamproximè, & hæc area $ASBY\mu A$ eſt ad aream $ASCY$

lum OIE ſimile eſt triangulo OμX, ideóque ob IO triplam ipſius μO, erit triangulum IOE trianguli μOX, noncuplum & triangulum IOE trapezii IμXE, ſeſquioctavum. Præterea triangulum IAO, eſt trianguli IAμ, ſeſquialterum (omittuntur in figurâ aliquæ lineæ ad vitandam confuſionem) cum idem ſit trianguli utriuſque vertex A, ſitque baſis OI ſeſquialtera baſis μI; triangulum verò AμI, ſubſeſquitertium eſt ſemiſegmenti AμI (prop. 24. Archimed. de parab vel theor. 4. de parab. lib. 1.). Quare triangulum AOI eſt ſeſquioctavum ſemiſegmenti AμI, hoc eſt, in ratione compoſitâ ex rationibus ſeſquialterâ & ſubſeſquitertiâ ac proinde triangulum AOI, eſt ad ſemiſegmentum AμI, ſicut triangulum IOE, ad trapezium μXIE, & viciſſim trapezium μXIE eſt ad ſemiſegmentum AμI ut IE ad AI, ac proindè, componendo, area curvilinea AμXE, eſt ad ſemiſegmentum AμI, ut AE, ad AI, ideóque area curvilinea AμXE eſt ad ſegmentum totum AμC ut AE ad AC. 137.

(b) * *Quamproximè.* Ob viciniam punctorum μ, X (ex hyp.).

DE' MUNDI SYSTEMATE.

$ASCY\mu A$, (c) ut tempus descripti arcus AB ad tempus descripti arcus totius AC. Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproximè *Q. E. D.*



Corol. Ubi punctum B incidit in parabolæ verticem μ, est AE ad AC in ratione temporum accuratè (d).

Scho-

138. (c) * *Ut tempus descripti arcûs.* (prop. 1. lib. 1.).

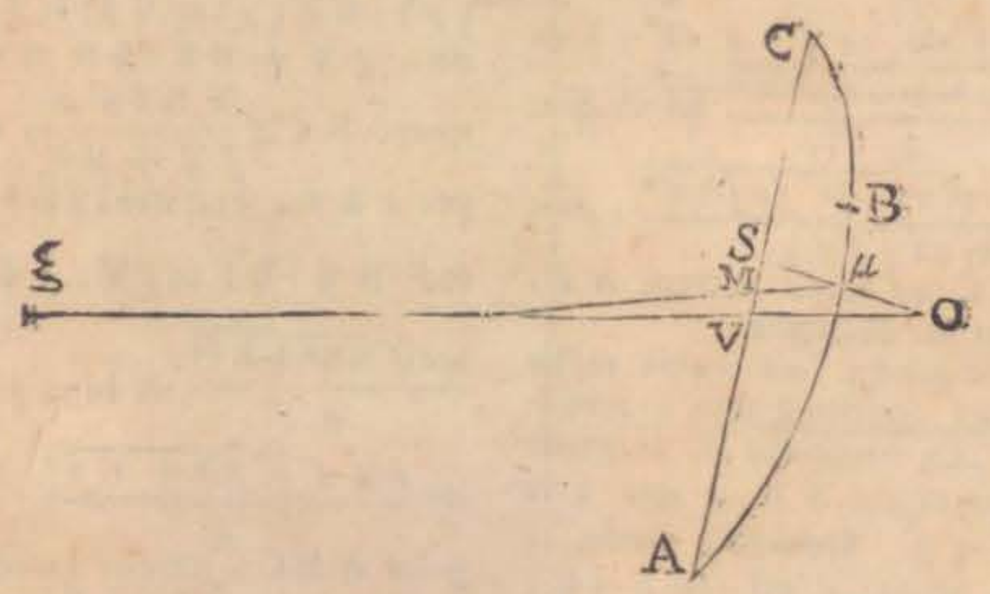
(d) * *Accuratè.* Ideò enim in casu Lemmatis hujus A E non est ad A C in ratione temporum accuratè, quia area A S B X μ A, sumpta est æqualis areæ A S B Y μ A, quod verum est duntaxat quamproximè. Sed coincidentibus punctis B, μ, areæ illæ æquales fiunt accuratè, quare in hoc casu A E est ad A C, in ratione temporum accurate.

138. Quoniam coincidentibus punctis B, μ, chorda A C dividitur in E in ratione temporum accurate, iisdem verò punctis non coincidentibus, hæc chorda dividitur in ratione temporum quamproximè tantùm, quò propius erit punctum B vertici parabolæ μ, eò magis accuratè dividetur chorda A C in duo segmenta quæ temporum rationem habeant. Observandum est chordam A C magis accuratè dividi in ratione temporum, si B distet à vertice μ versus C quam si ab eodem vertice μ, versus A, æquali intervallo distet. Quoniam enim parabolæ portio μ A vertici principali propior est, ea fit curvior & à tangente μ X, magis deflectit quam portio μ C, à vertice μ, remotior. Quare si investiganda sint tria temporis momenta quibus cometa in parabolæ locis tribus A, B, C, versatur ità ut A E sit ad A C, ut temporum intervalla accuratè, sumenda sunt prædicta tempora ferè æqualia. Nam ob exiguas trajectoriæ parabolicæ portiones astronomicis observationibus subjectas, quæ-

Scholium.

Si jungatur $\mu\xi$ secans AC in δ, & in ea capiatur ξn, quæ sit ad μB ut 27 MI ad 16 $M\mu$: acta Bn secabit chordam AC in

punctum E, non multum distat à chordæ medio puncto I. Oportet autem intervallum illud, ubi cometa tardior est, paulò majus esse altero; cometa enim existente in μ, ubi chorda AC, dividitur accuratè in ratione temporum; erit recta EC, major quam AE, hoc est, tempus quo cometa tunc tardior (cor. 3. prop. 40. lib. huj.) describit arcum BC, majus est tempore quo idem cometa factus velocior describit arcum BA. Accuratius itaque eligentur tempora parum inæqualia ut punctum E potius abeat versus C, quam versus A, ob rationem modò allatam.



139. Si vertex μ, segmenti parabolici $A\mu C$ parum differt à vertice principali, sitque punctum B proximum puncto μ, recta $S\mu$, ex parabolæ umbilico S, ad verticem μ, ducta dividet chordam AC, in M, ferè in ratione temporum, ut ex præcedentibus patet.

140. Si fuerit recta $S\mu$, admodum magna respectu abscissæ μI, erit SV, tripla ipsius MV. Quoniam enim rectæ SVO, $SM\mu$; in hoc casu pro parallelis haberi possunt, erit IV ad VM ut IO ad μO, hoc est, (per constr. Lem. 8.) ut 3 ad 1.

141. Iisdem positis, erit $V\xi = 3VS + 3I\mu$; quoniam enim (per constr.) $S\xi = 2SO$, erit $O\xi = 3SO = 3SV + 3VO$. Jam utrinque auferatur VO, fiet $V\xi = 3SV + 2VO$. Sed ob rectas VO, $M\mu$ parallelas, VO est ad $M\mu$, ut IO ad $I\mu$, hoc est, ut 3 ad 2, ideóque $2VO = 3M\mu$. Præterea rectæ $S\mu$, $I\mu$, æquales constituunt angulos cum rectâ tangente parabolam in μ, quæ est chordæ AC parallela (per theor. 3. de parab. & lem. 4. de conic.). Quare æquales sunt anguli $MI\mu$, $IM\mu$, ac proindè recta $M\mu = I\mu$; undè fit $3I\mu = 2VO$, & $V\xi = 3VS + 3I\mu$. 141.

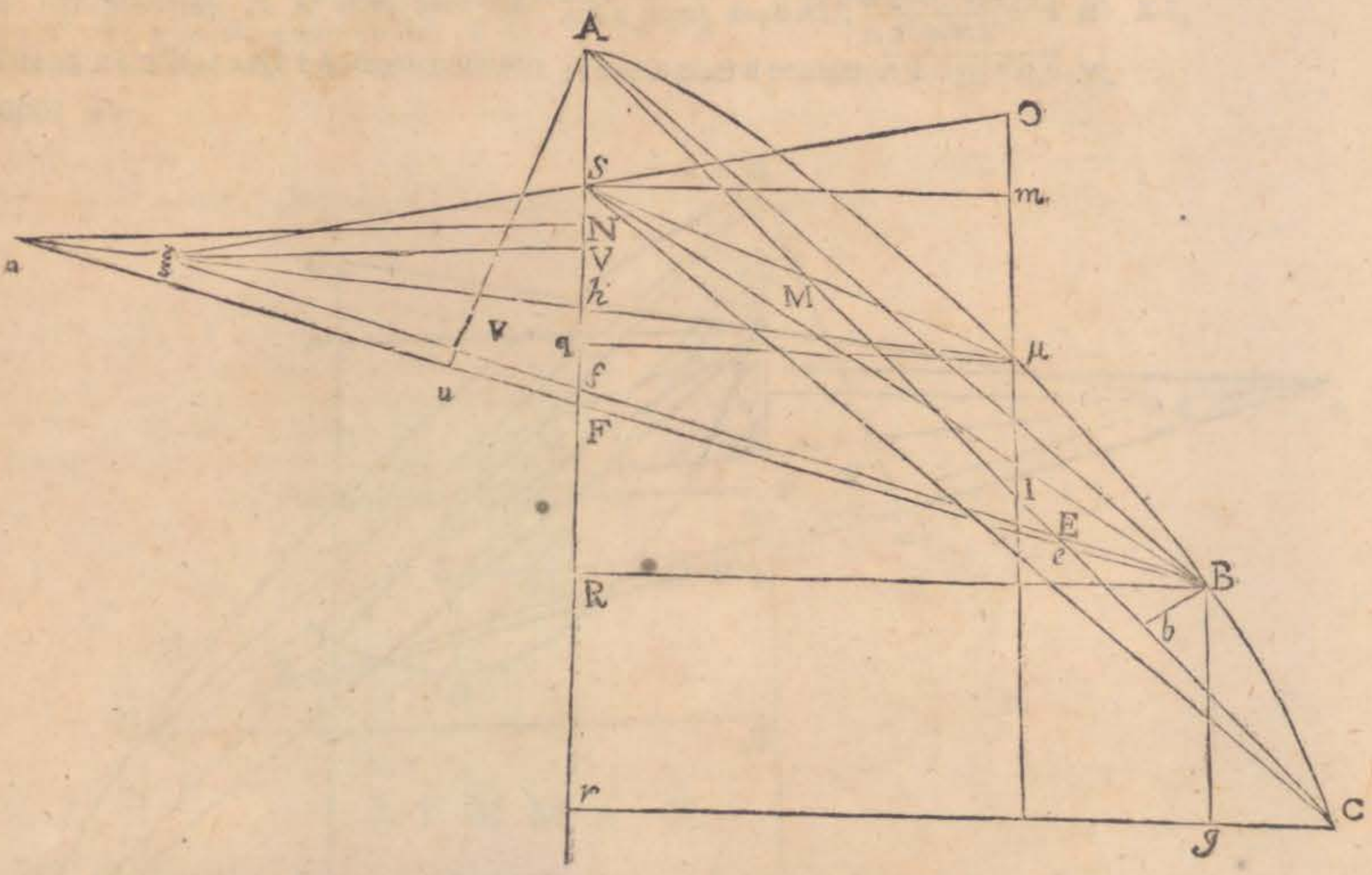
DE MUNDI SYSTEMATE.

in ratione temporum (e) magis accuratè quam priùs. Jaceat autem punctum *n* ultra punctum ξ, ſi punctum *B* magis diſtat à

142. (e) 142. * *Magis accuratè quam priùs.* Sit A vertex principalis paraboloæ, S umbilicus, A S = *f*, ideóque latus rectum principale = 4*f*. Ponatur K B = *y*, r C = *x*, erit area $ASBC = \frac{x^3 + 12f^2x}{24f}$, & area $ASBA = \frac{y^3 + 12f^2y}{24f}$ (theor. 4. de parab.); ac proinde area A S B C, eſt ad aream A S B A, ut $\frac{x^3+12f^2x}{24f}$ ad $\frac{y^3+12f^2y}{24f}$, ſeu ut $x^3 + 12f^2x$ ad $y^3 + 12f^2y$, id eſt, in ratione temporum accurate. Præterea eſt $AC = \sqrt{Ar^2+rC^2} = \frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f}$; quare ſi fiat $x^3 + 12f^2x$ ad $y^3 + 12f^2y$ ut $\frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f}$ ad $AE = \frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$, erit quoque recta A C ad hanc rectam A E, in ratione temporum accurate.

Jam verò inveſtigandus eſt valor rectæ A E, qui prodit ex conſtructione Lemmatis præcedentis. Ex umbilico S, erigatur ad μ O perpendicularis S m, hæc erit æqualis ordinatæ q μ. Deinde (theor. 1. de parab.) q μ, dimidia eſt ipſius r C, ſeu $\frac{1}{2}x$, & $\mu m = q S = \frac{xx-16ff}{16f}$. Præterea eſt μ I = 2 μ O (per conſtr.) & $\mu I = \frac{AI^2}{4S\mu}$ (165 & theor. 2. de parab.). Sed eſt $AI^2 = \frac{x^4+16f^2x^2}{64f^2}$, & $S\mu^2 = \left(\frac{x^2-16f^2}{16f}\right)^2 + \frac{1}{4}xx$, quare eſt μ O ſeu $\frac{AI^2}{8S\mu} = \frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x}$, ac proindè m O = μ O − m μ = $\frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}$, ideóque SO = $\sqrt{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}\right)^2}$, & ξ O = 3 $\sqrt{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}\right)^2}$. Inſuper ex puncto ξ, ad abſciſſam A R erectâ perpendiculari ξ V, ob ſimilitudinem triangulorum S m O, S ξ V, ſit S O : q μ = ξ S : ξ V, ideóque ξ V = *x*. Præterea S O : m O = S ξ : S V, ac proindè S V = 2 m O, hincque prodit A V = A S + 2 m O, & V R = A R − A S − 2 m O. Sed ob triangulorum ſimilitudinem ξ V (*x*) : B R (*y*) = V f : R f, & componendo, ξ V + B R : B R = V f + R f : R f, quare $Rf = \frac{VR+BR}{\xi V + BR}$, datur itaque R f, per *x* & *y*. Præterea f B² = R B² + R f², ſed R B : B f = ξ V : ξ f = $\frac{\xi V \times Bf}{RB} = \frac{x\times\sqrt{RB^2+Rf^2}}{y}$, & hinc ξ B = $\sqrt{RB^2+Rf^2} + \frac{x\times\sqrt{RB^2+Rf^2}}{y}$. Deinde in triangulo A B C, dantur latera A B, A C, & præterea datur latus B C; ductâ enim B g perpendiculari ad r C, erit B C = $\sqrt{Bg^2+gC^2} = \sqrt{Rr^2+(RB-rC)^2}$; datur itaque perpendicularis B b = $\sqrt{\frac{3}{4}BC^2}$. Inſuper ducatur A V perpendicularis ad A B, ob ſimilitudinem triangulorum A V f, B R f, erit A f : A V = R f : R B, ideóque $AV = \frac{RB\times Af}{Rf}$. Denique ductâ B b, perpendiculari ad A C, ſimilia erunt triangula E A V, B b e, ac proinde B b : b E = A V : A E, & invertendo B b : A V = b E : A E, atque, componendo B b + A V : A V = b E + A E : A E, hinc A E = A b

à vertice principali parabolæ quam punctum μ; & citra, ſi minus diſtat ab eodem vertice.



$\frac{Ab \times AV}{Bb + AV}$. Jam loco Ab, Bb, AV, ſubſtitutis eorum valoribus modò inventis prodit AE, paulò minor quam $\frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$.

Inveſtigandus ſupereſt valor rectæ Ae, qui prodit ex conſtructione ſcholii hujus. Quoniam ſimilia ſunt triangula ξSh, $\xi O\mu$, erit $\xi S : Sh = \xi O : O\mu$, hinc $Sh = \frac{\xi S \times O\mu}{\xi O}$; Sed inventa eſt ſuprà recta Sq, invenietur itaque qh, ac proindè etiam $h\mu = \sqrt{qh^2 + q\mu^2}$. Prætereà $\xi S : SO = \xi h : h\mu$, quarè $\xi h = \frac{S\xi \times \sqrt{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$, ac proindè tota recta $\xi\mu = \sqrt{qh^2 + q\mu^2} + S\xi \times \frac{\sqrt{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$. 142.

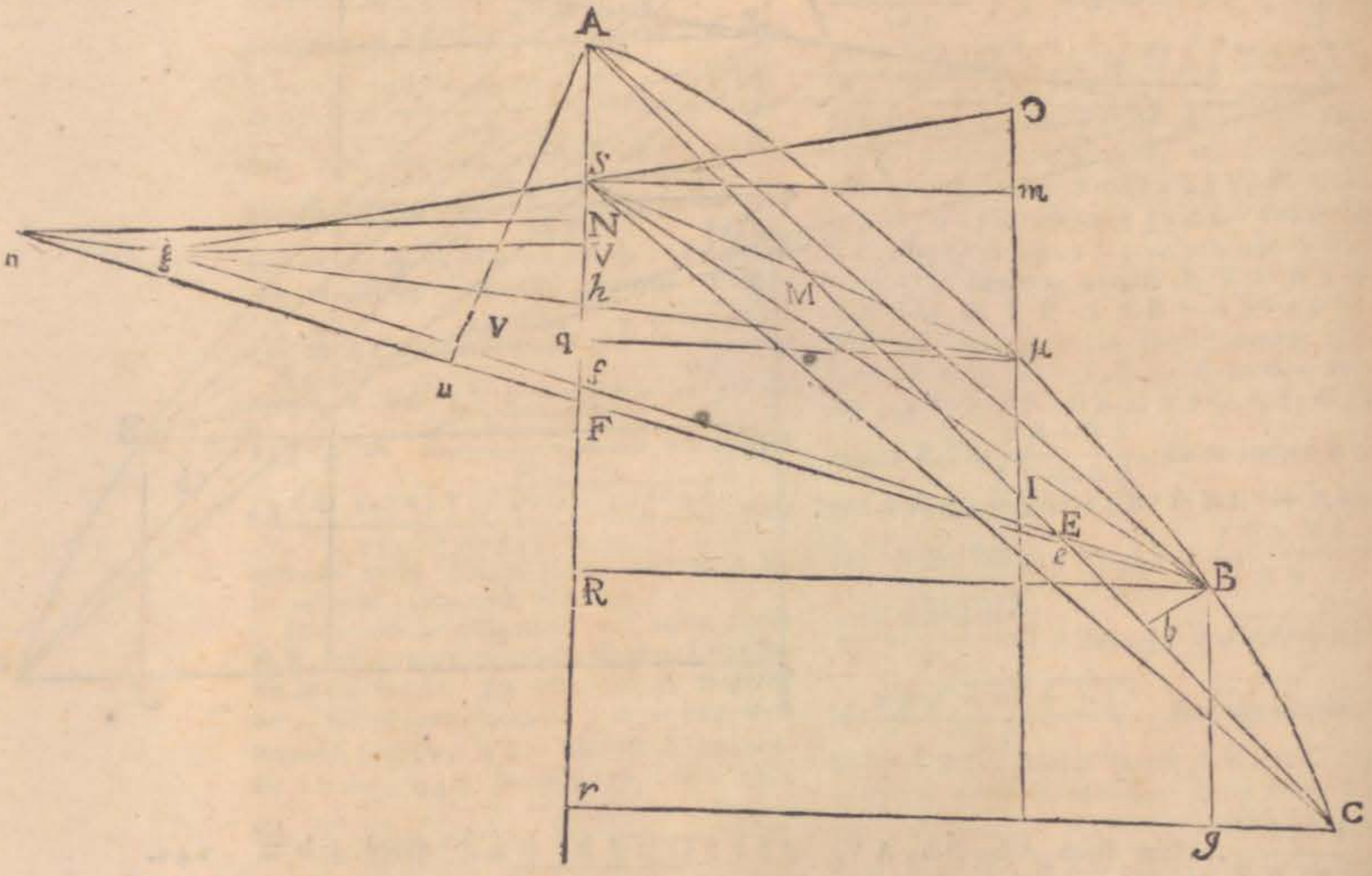
Deindè (per conſtr.) fit $\xi n = \frac{27\,MI \times \mu B}{16\,M\mu}$. Sed $AM : MI = AS : I\mu$, ac proindè, componendo $AM + MI : MI = AS + I\mu : I\mu$, invenietur itaque Ml, ideóque tota recta $n\mu$. Inſuper $h\mu : qh = hr : hM$, invenietur itaque hN, ac proindè & Nn, ob triangulum hrN, rectangulum.

DE MUNDI SYSTEMATE.

lum. Prætereà (ex præced.) inventa eſt hR, ideóque etiam datur nR. Jam fiat $rN : NF = BR : RF$, & invertendo $NF : RF = rN : BR$, atque componendo $NF + RF : RF = rN + BR : BR$, hinc

142. $RF = \frac{BR \times NR}{rN + BR}$, ideóque datur $BF = \sqrt{BR^2 + RF^2}$. Deindè $BF : BR = rF : FN$, & indè $rF = \frac{BF \times FN}{BR}$, atque recta tota $rB = \frac{BF \times FN}{BR} + \sqrt{BR^2 + RF^2}$.

Ducatur recta Au, perpendicularis ad AB, erit ob triangulorum AuF, RBF, ſimilitudinem $AF : Au = RF : RB$, ideóque $Au = \frac{RB \times AF}{RF}$, & hinc prorſus ut ſuprà habetur $Ae = \frac{Ab \times Au}{Bb + Au}$. Ex hactenus dictis patet dari rectas AE, Ae, per x, y, & quantitates conſtantes. Jam loco Ab, Bb, Au, ſubſtitutis eorum valoribus analyticis, fit Ae, paulò major quam AE, & paulò minor quam $\frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$.



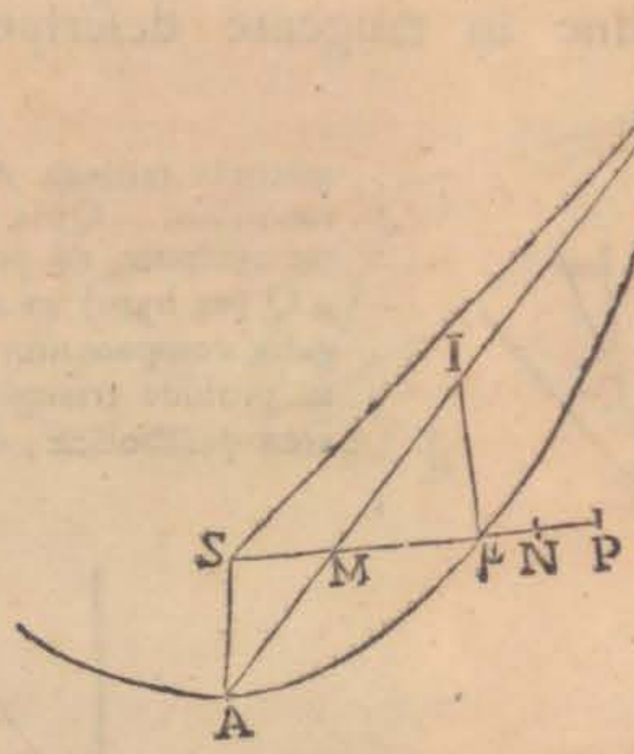
Quarè recta Bn, ſecabit chordam AC, in e, in ratione temporum magis accuratè quàm recta $\S B$.

Idem ſcholium faciliùs demonſtrari poteſt hoc modo. Quoniam $Ae = \frac{Ab \times Au}{Ab + Au} = Ab - \frac{Ab \times Ab}{Au + Bb}$ (ex dem.) erit Ae ſemper minor quam Ab. Jam verò factâ analogiâ $x^3 + 12f^2x : y^3 + 12f^2y = \sqrt{}$

(f) LEMMA IX.

Rectæ I μ *&* μ M *&* *longitudo* $\frac{AIq}{4S\mu}$ *æquantur inter ſe.*

Nam $4S\mu$ eſt latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.



LEMMA X.

Si producatur S μ *ad* N *&* P, *ut* μ N *ſit pars tertia ipſius* μ I, *&* SP *ſit ad* SN *ut* SN *ad* S μ. *Cometa, quo tempore deſ-*

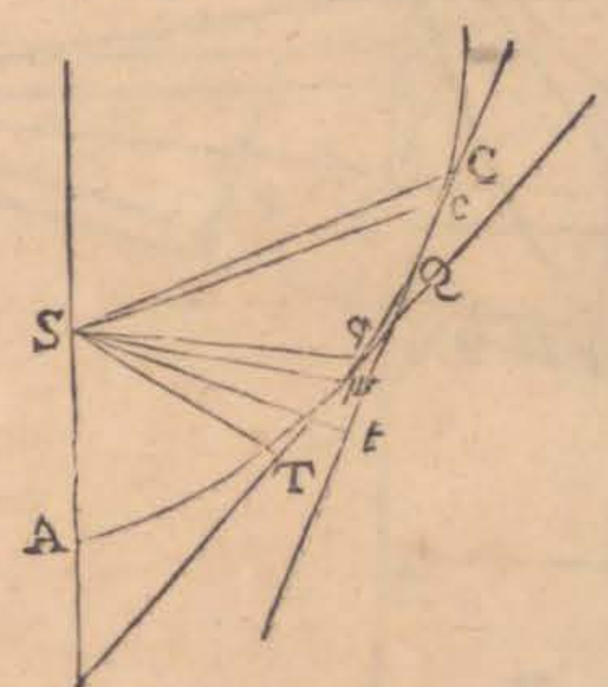
$\frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f} : \frac{(y^3+12f^2y)\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$, ſi A e æqualis foret huic quarto termino haberetur ratio temporum accuratè (prop. 1. lib. 1.). Sed quartus ille terminus major eſt rectâ Ae; nam terminus ille major eſt quam chorda AB, eſt enim $AB = \frac{\sqrt{y^4+16f^2y^2}}{4f} = \sqrt{x^3+12f^2x} \times \frac{\sqrt{y^4+16f^2y^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$ hæc autem quantitas minor eſt quam $\frac{y^3+12f^2y)\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$. Sed (per conſtr.) ità ducitur μn, ut recta nB ſemper ſecet chordam AC in puncto e, quod proximius eſt puncto C quam punctum E; quarè cum recta Ae ſemper minor ſit verâ, major tamen quam AE, hæc magis quam illa ad juſtum valorem accedet, ac proindè recta nB, ſecat chordam AC, in ratione temporum magis accuratè quam recta ξB. Res eodem modo demonſtratur, ubicumque ſumatur punctum A. 1426

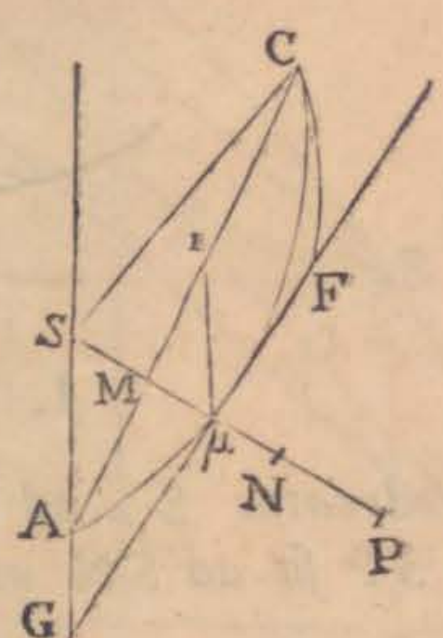
(f) * *Lemma IX.* (Patet per num. 139. lib. huj. & theor. 1. & 2. de parab. lib. 1.).

DE MUNDI SYSTEMATE.

describit arcum A μ C, *si progrederetur eâ semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi* SP *æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam si cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in rectâ, quæ parabolam tangit in μ; (g) area, quam radio ad punctum *S* ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ *A S C* μ. (h) Ideoque contentum sub longitudine in tangente descriptâ & longitudine $S\mu$ minimis trilinea A S C μ, S μ Q constituentibus. Quia verò æqualia insumuntur tempora ad percurrendas lineas A C, μ Q (ex hyp.) ex æqualibus numero triangulis componuntur spatia A S C μ, S μ Q, ac proinde triangulum S μ Q, æquale est areæ parabolicæ, A S C μ.



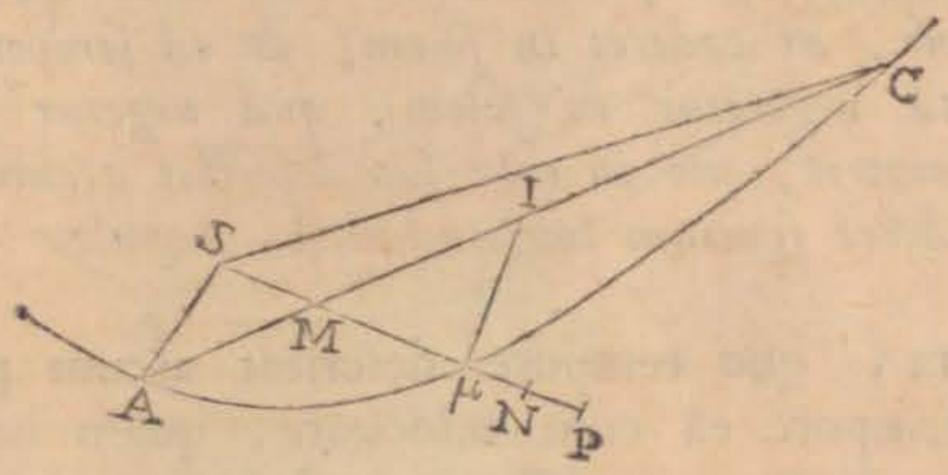


142. (g) * *Area quam radio.* Cometa velocitate quam habet in μ, relictâ parabolâ, progrediatur uniformiter in rectâ μ Q, quæ parabolam tangit in μ, area S μ Q, quam radio ad punctum S, ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ A S C μ, quam eodem tempore describit. Sumantur enim lineolæ C c, q μ, à cometa descriptæ & à parabolæ umbilico S, ad tangentes C t, μ T, erigantur perpendiculares S t, S T, velocitas in C, est ad velocitatem in μ, ut S T ad S t (cor. 1. prop. 1. lib. 1.) sed velocitates in C, & μ, sunt ut spatia eodem tempore percursa, putà C c & q μ; est igitur C c ad μ q ut S T ad S t. Quarè triangulum S μ q, æquale est triangulo C S c. Istud autem ubique obtinet in triangulis

(h) * *Ideóque.* Quoniam recta S μ, cum tangente in μ, & chordâ A C, æquales constituit angulos (lem. 4. de conicis), spatium contentum sub longitudine descriptâ in tangente & rectâ S μ, erit ad spatium contentum sub chordâ A C, & rectâ S M, ut area A S C μ, ad triangulum A S C, id est, ut triangulum S A C + segm. parab. C A c ad triangulum S A C, id est, ut triangulum S A C + $\frac{2}{3}$ paral-

lelo-

$S\mu$ esset ad contentum sub longitudinibus AC & SM, ut area $ASC\mu$ ad triangulum ASC, id est, ut SN ad SM. Quare AC est ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN. Cum autem velocitas cometæ in altitudine SP sit (per corol. 6. prop. XVI. lib. 1.) ad ejus velocitatem in



altitudine $S\mu$, in subduplicatâ ratione SP ad $S\mu$ inversè, id est, in ratione $S\mu$ ad SN; (i) longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN. Igitur AC & longitudo hâc novâ velocitate in tangente & rectâ $S\mu$, ad spatium contentum sub chordâ AC, & rectâ SM, ut SM + MN ad SM, hoc est, ut SN ad SM: Unde si longitudo descripta in tangente dicatur L, erit $L \times S\mu : AC \times SM = SN : SM$, ideóque longitudo descripta in tangente erit ad chordam AC, ut $\frac{SN}{S\mu}$ ad $\frac{SM}{SM}$, hoc est, ut SN ad $S\mu$.

142.

(i) * *Longitudo.* Nam longitudines iisdem temporibus uniformi motu descriptæ, sunt ut velocitates (5. lib. 1.).

delogrammi AGFC, ad triangulum ASC, hoc est, ut $AC \times \frac{1}{2}SM + AC \times \frac{2}{3}I\mu$ ad $AC \times \frac{1}{2}SM$, sivè ut $SM + \frac{4}{3}I\mu$ ad SM. Sed μN, sumpta est æqualis $\frac{1}{3}I\mu$, & est $M\mu = \mu I$ (num. 139.). Quarè $MN = \frac{4}{3}I\mu$. Est igitur spatium contentum sub longitudine descriptâ in

DE MUNDI SYSTEMATE.

locitate descripta, cum sint ad longitudinem in tangente descriptam in eâdem ratione, æquantur inter se. *Q. E. D.*

(k) *Corol.* Cometa igitur eâ cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$, eodem tempore describeret chordam AC quamproximè.

LEMMA XI.

Si cometa motu omni privatus de altitudine SN *seu* $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$ *demitteretur, ut caderet in solem, & eâ semper vi uniformiter continuatâ urgeretur in solem, quâ urgetur sub initio; idem semisse temporis, quo in orbe suo describit arcum* AC, *descensu suo describeret spatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

Nam cometa, quo tempore describit arcum parabolicum AC, eodem tempore eâ cum velocitate, quam habet in altitudine SP (per lemma novissimum) describet chordam AC, ideoque (per corol. 7. prop. XVI. lib. 1.) eodem tempore in circulo, cujus semidiameter esset SP, vi gravitatis suæ revolvendo, describeret arcum, cujus longitudo esset ad arcus parabolici chordam AC, in subduplicatâ ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in solem in altitudine SP, cadendo de altitudine illâ in solem, describeret semisse temporis illius ((l) per corol. 9. prop. IV. lib. 1.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP, id est, spatium $\frac{AIq}{4S\mu}$. (m) Unde cùm pondus

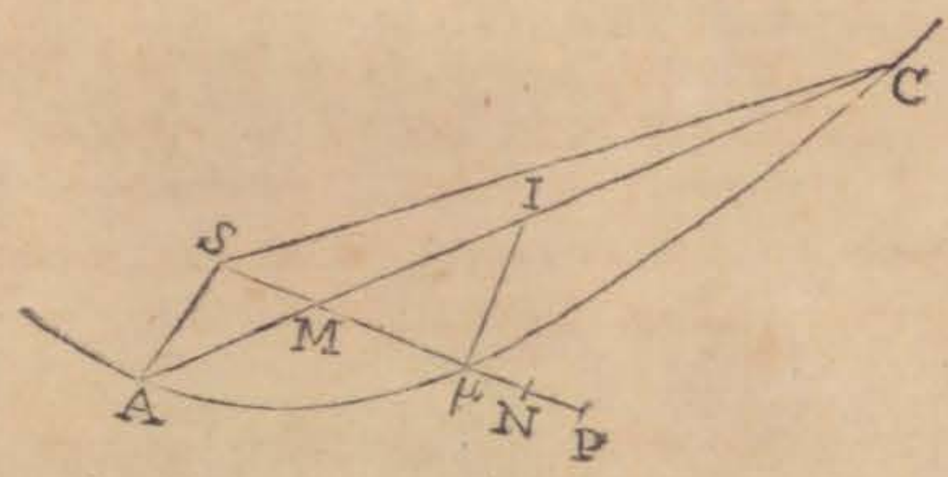
co-

142. (k) * *Corol.* Si $S\mu$, sit admodum magna respectu μN, tres geometricè proportionales $S\mu$, SN, SP, erunt etiam arithmeticè proportionales quamproximè, id est NP, æquabitur μN, sivè trienti ipsius $I\mu$, ideóque μP, æqualis quamproximè $\frac{2}{3}$ ipsius $I\mu$. Quarè patet collarium.

(l) * *Per corol. 9. prop. IV. lib.* 1. Vel per num. 201. ejusdem lib.

(m) * *Undè cum pondus cometæ.* Gravitas acceleratrix cometæ versus Solem in distantiâ SN, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in distantiâ SP, ut SP^2 ad SN^2, hoc est, ob proportionales SP, SN, $S\mu$, ut SP ad $S\mu$.

cometæ in ſolem in altitudine SN ſit ad ipſius pondus in ſolem in altitudine SP, ut SP ad $S\mu$: cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in ſolem cadendo, deſcribet ſpatium $\frac{AIq}{4S\mu}$, (n) id eſt, ſpatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*



PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometæ in parabola moti trajectoriam ex datis tribus obſervationibus determinare.

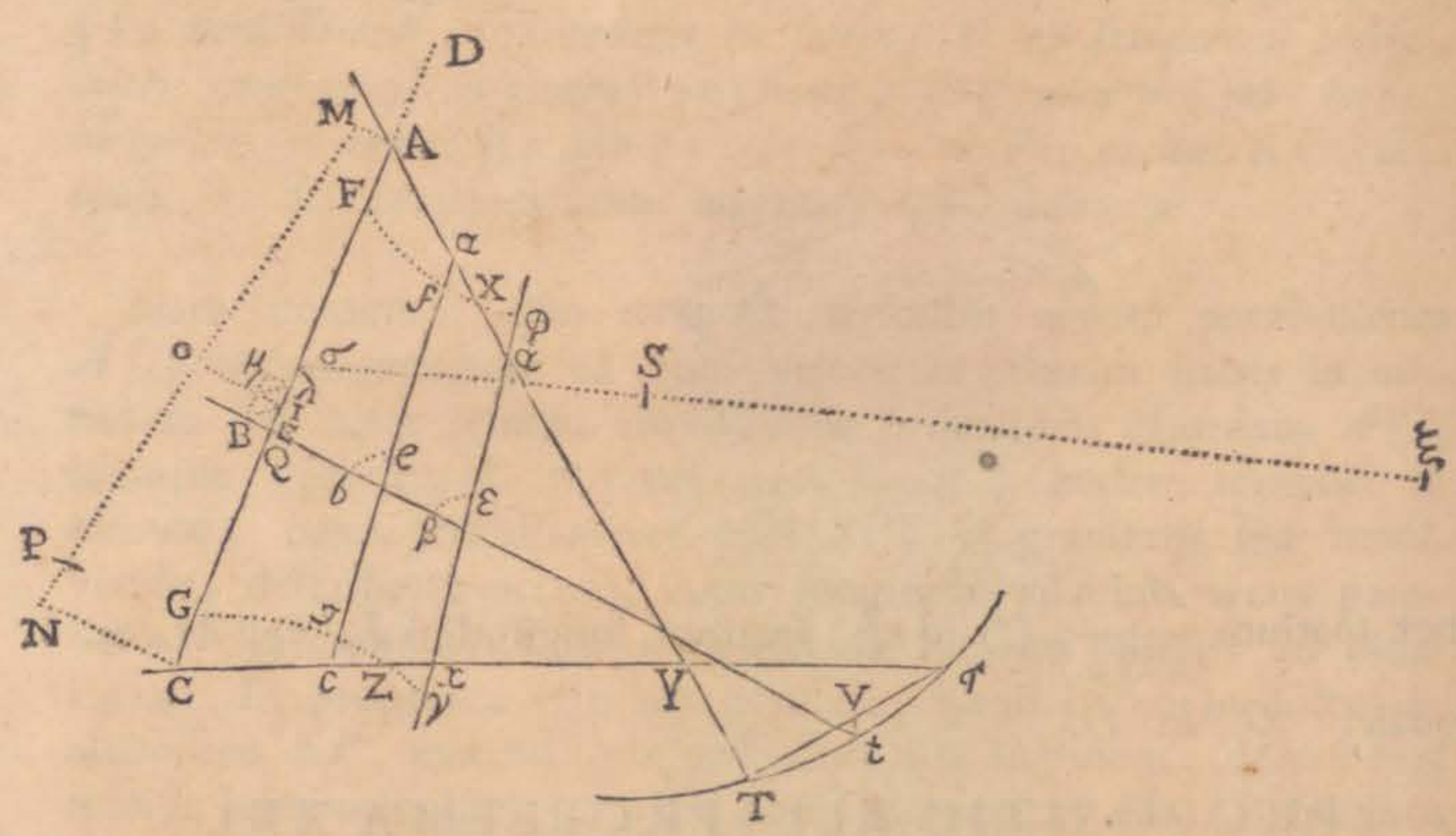
Problema hocce longè difficillimum multimodè aggreſſus, compoſui problemata quædam in libro primo, quæ ad ejus ſolutionem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulo ſimpliciorem excogitavi.

Seligantur tres obſervationes (o) æqualibus temporum intervallis

(n) * *Id eſt.* (Lem. IX.).
(o) * *Æqualibus temporum intervallis.* Ratio patet per not. 138.

DE MUNDI SYSTEMATE.

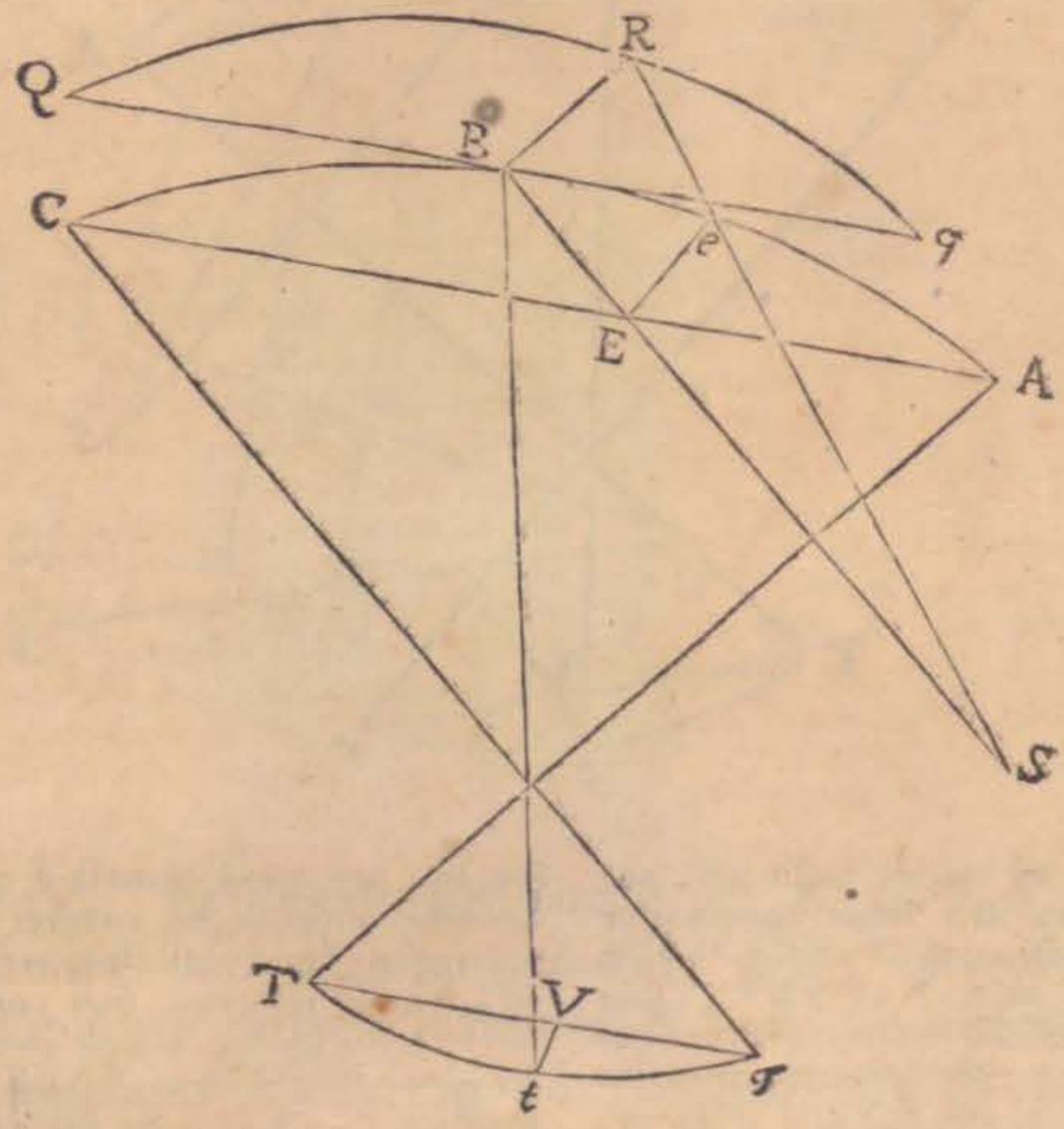
vallis ab invicem quamproximè distantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi cometa tardius movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia sit ad summam temporum, ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos; vel ut punctum *E* (in fig. lem. VIII.) incidat in punctum *M* quamproximè, & inde aberret versus *I* potius quam versus *A*. (P) Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus cometæ locus per lemma sextum.



Designet *S* solem, *T*, *t*, τ tria loca terræ in orbe magno, *T A*, *t B*, τ *C* observatas tres longitudines cometæ, *V* tempus inter observationem primam & secundam, *W* tempus inter secundam ac tertiam, X longitudinem, quam cometa toto illo tempore eâ cum velocitate, quam habet in mediocri telluris à sole distantiâ, describere posset, quæque (per corol. 3. prop. XL. lib. III.) invenienda est, & *t V* perpendiculum in chordam *T* τ. In observatâ longitudine mediâ *t B* sumatur utcunque punctum *B* pro loco cometæ in plano ecliptícæ, & inde versus

142. (p) * *Si tales observationes.* (Ibid.).

verſus ſolem *S* ducatur linea *BE*, quæ ſit ad ſagittam *tV*, ut contentum ſub *SB* & *St quad.* ad cubum hypotenuſæ trianguli rectanguli, cujus latera ſunt *SB* & (q) tangens latitudinis cometæ in obſervatione ſecundâ ad radium *tB*. Et per punctum *E* agatur (per hujus lem. VII.) recta *AEC*, cujus partes *AE*, *EC*, ad rectas *TA* & *τC* terminatæ, ſint ad invicem ut tempora *V* & *W*: & (r) & erunt *A* & *C* loca cometæ in plano eclip- LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.



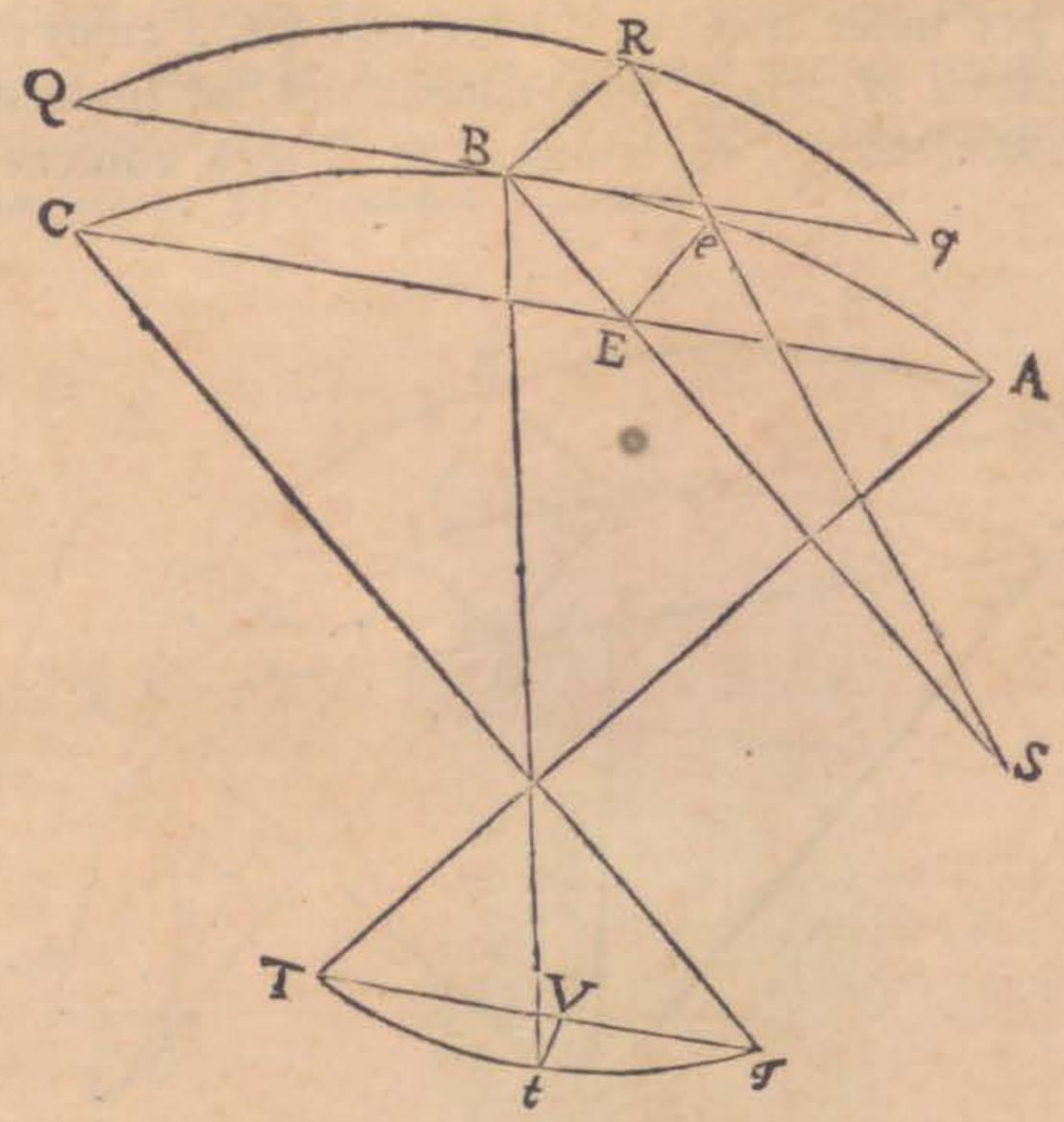
(q) * *Et tangens latitudinis cometæ.* Ex puncto B, ad planum Eccliptícæ erecta intelligatur normalis, hæc erit tangens latitudinis cometæ in ſecundâ obſervatione, ſumpto tB pro radio.

(r) * *Et erunt A & C loca cometæ.* Quoniam (ex hyp) B eſt veſtigium cometæ in plano Eccliptícæ, & BR ad planum Eccliptícæ normaliter ducta, tangens latitudinis obſervatæ ex t ad radium tB, patet punctum R eſſe verum cometæ locum, atque RS diſtantiam cometæ à Sole in obſervatione ſecundâ. Per E, agatur Ee, ad BR, parallela quæ (per prop. 8. lib. XI. elem.) normalis eſt ad planum Eccliptícæ, jacetque in plano trianguli SBR, occurrat hæc ipſi SR in e. Jam verò recta Re, eſt ad rectam tV, in ratione compoſitâ ex Re, ad BE, & BE ad tV. Sed (per prop. 11. lib. 6. elem.) Re eſt ad BE ut RS ad BS & BE eſt ad tV, ut $St^2 \times SB$ ad SR^3. Quare Ee eſt ad tV, in ratione compoſitâ ex ratione SR ad BS, & ratione 142

DE MUNDI SYSTEMATE.

ecliptica in observatione primâ ac tertiâ quamproximè, si modo *B* sit locus ejus rectè assumptus in observatione secundâ.

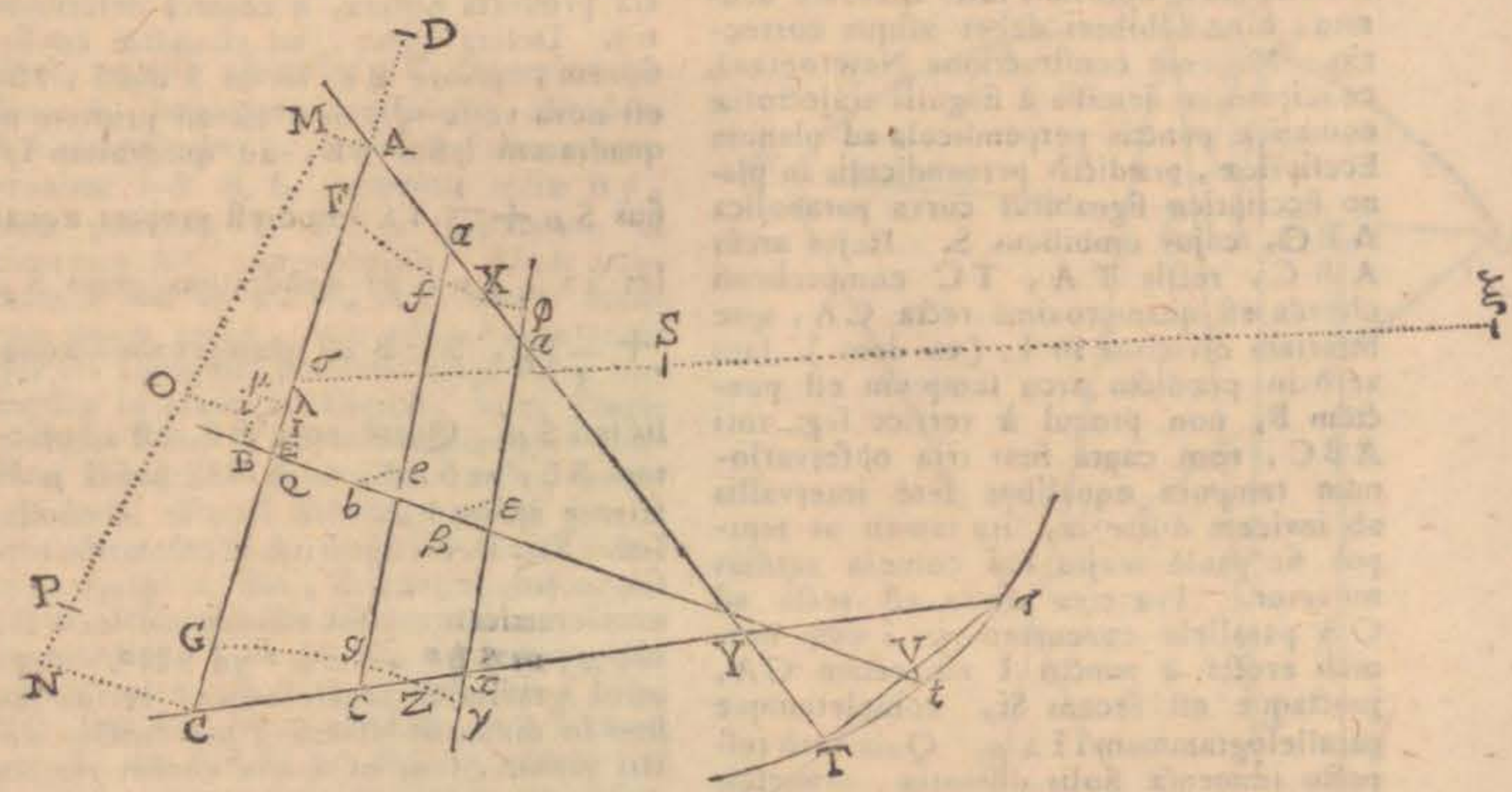
Ad



642. tione $St^2 \times SB$ ad cubum rectæ SB; ratio autem quæ ex istis binis componitur eadem est cum ratione St^2 ad SR^2, hinc Re est ad BE, ut St^2 ad SB^2. Quia verò tV est æqualis quamproximè quadrato arcûs Tt per diametrum orbis magni diviso (132. lib. 1.) erit recta tV, quamproxime spatium per quod terra è quiete demissa vi suæ gravitatis caderet versus Solem, dum semissem arcûs Tt, describet, si eâdem ubique gravitate acceleratrice uniformiter continuatâ urgeretur quâ urgetur in loco t, (202. lib. 1.). Præterea gravitas acceleratrix versus solem in loco t, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in loco R, ut SR^2 ad St^2, & spatia eodem tempore, urgentibus illis viribus deorsum versus Solem, descripta, sunt inter se ut vires (Lem. X. Lib. I.); Quare recta Re, est spatium per quod cometa è quiete ex R demissus versus Solem caderet semisse temporis quo Terra describit arcum Tt, hoc est, semisse temporis quo cometa describit trajectoriæ suæ arcum interceptum inter duas longitudines TA, TC, ideóque punctum R, est in arcûs istius chordâ. Undè si tam arcûs trajectoriæ Q R q binis longitudinibus TA, TC terminati quam puncti e, concipiantur vestigia normalibus ad planum Ecclipticæ demissis signata, nempè A, B, C & E, erit punctum E in chordâ arcûs ABC. Sed chorda arcûs ABC dividitur à rectâ SB ferè in ratione temporum quibus cometa ad Ecliptican reductus, describit arcus AB, BC, (165.) & (per constr.) in eâdem ratione dividitur recta AC, nullaque alia hisce conditionibus potest satisfacere. Cùm igitur oporteat chordam arcûs qui est

Ad AC biſectam in I erige perpendiculum Ii. Per punctum B age occultam Bi ipſi AC parallelam. Junge occultam Si ſecantem AC in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per ſolem S age occultam $\sigma\xi$ æqualem $3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, à puncto B verſus punctum ξ duc occultam novam BE, quæ ſit ad priorem BE in duplicata ratione diſtantiæ BS ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eâdem lege ac prius, id eſt, ita ut ejus partes AE & EC ſint ad invicem, ut tem-

LIBER III. PROP. XLI. PROBL. XXI.



eſt veſtigium portionis trajectoriæ inter longitudines TA, TC interceptæ, à rectis TA, TC terminari & per E tranſire & in E dividi in ratione temporum, cumque recta AC haſce conditiones ſola & unica obtineat, evidens eſt rectam AC eſſe chordam prædicti arcûs, ac proinde puncta A & C ſunt quamproxime veſtigia cometæ in plano Ecclipticæ in obſervationibus primâ & tertiâ, ſi modò B, ſit locus ejus rectè aſſumptus in obſervatione ſecundâ. 142.

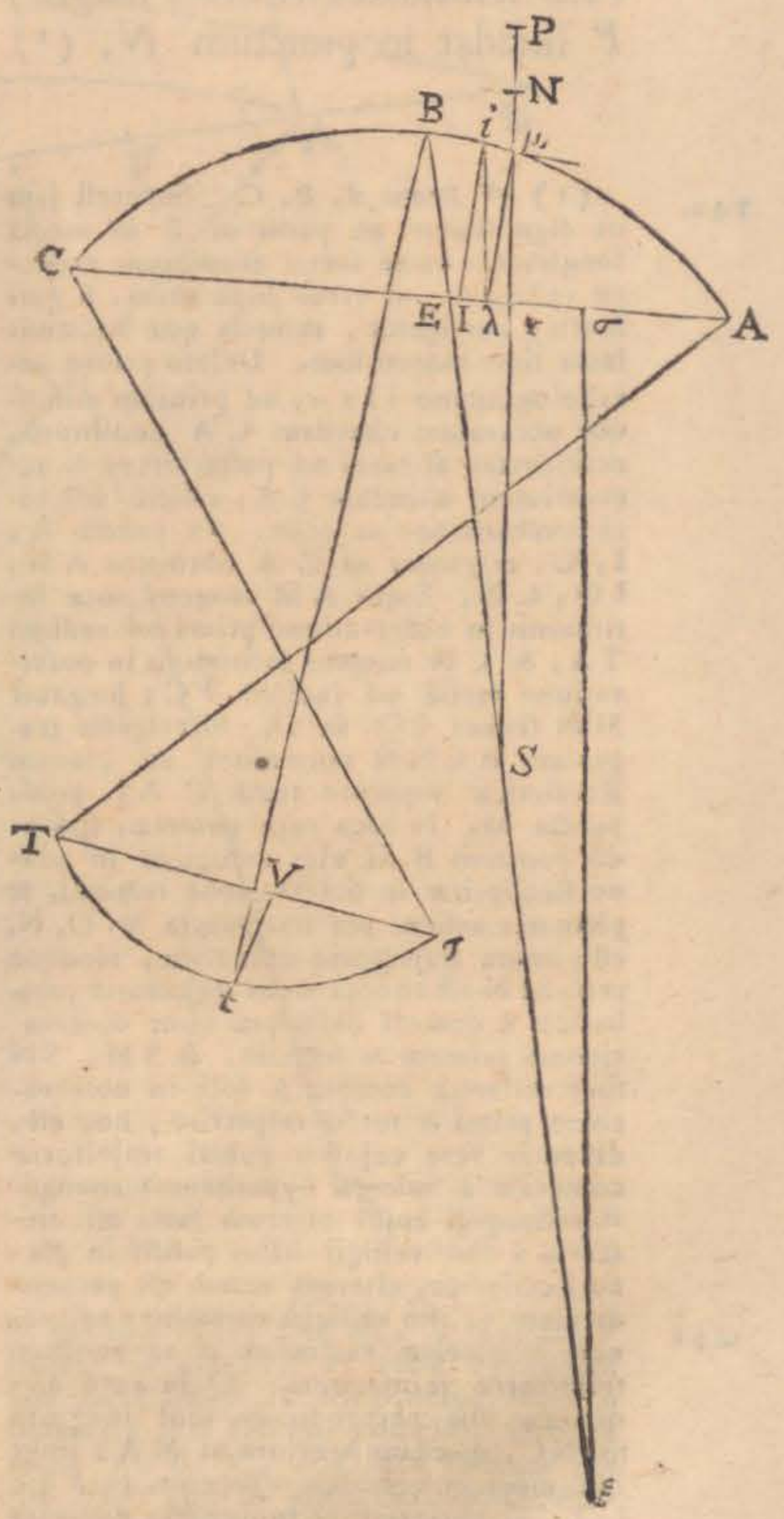
DE MUNDI SYSTEMATE.

tempora inter obſervationes *V* & *W*. Et erunt *A* & *C* loca cometæ (f) magis accuratè.

Ad

142. (f) * *Magis accuratè.* Quoniam (per conſtr. præced.) aſſumptus eſt locus B vero non ſatis proximus, & licet accuratè ſumptus fuiſſet, tamen loca A & C, indè deducta non ſunt ſatis accuratè definita, hinc adhiberi debet aliqua correctio. Manente conſtructione Newtonianâ, concipiantur demiſſa à ſingulis trajectoriæ cometicæ punctis perpendicula ad planum Eccliptice, prædictis perpendiculis in plano Eccliptice ſignabitur curva parabolica A B C, cujus umbilicus S. Hujus arcûs A B C, rectis T A, T C comprehenſi chorda eſt quamproximè recta C A, quæ bifariam dividitur in I, (ex dem.). Jam verò in prædicto arcu ſumptum eſt punctum B, non procul à vertice ſegmenti A B C, nam capta ſunt tria obſervationum tempora æqualibus ferè intervallis ab invicem diſtantia, ita tamen ut tempus ſit paulò majus ubi cometa tardiùs movetur. Præterea ducta eſt recta ad C A parallela concurrens in i cum normali erectâ à puncto I ad rectam C A, junctaque eſt ſecans Si, completumque parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Quia verò reſpectu immenſæ Solis diſtantiæ, evaneſcit diſtantia punctorum I, μ; erit α ferè vertex ſegmenti A B C. Jungatur μ S, ſecans chordam A C in Y, erit μY, ferè parallela $i\lambda$, ob immenſam puncti S diſtantiam, ideóque $\lambda\gamma$, æqualis rectæ $i\mu$, ac proindè & ipſi $i\lambda$. Sed (ex conſtr.) $I\sigma$ ſumpta eſt tripla ipſius $i\lambda$, quarè eſt etiam tripla ipſius $\lambda\gamma$ & reliquæ $Y\sigma$, ideóque juncta σS, (165) ea ipſa eſt recta σS, quæ exhibetur in Lem. 8. id eſt, in rectâ σS, productâ verſus S, reperitur punctum ξ, à quo ducta quævis recta chordam A C arcumque C B A ſecans, chordam ſecat in ſegmenta quæ eandem habent rationem cum temporibus quibus reſpondentes arcus à cometâ deſcribuntur. Sed (ex conſtr.) $\sigma\xi = 3S\sigma + 3i\lambda$ & $i\lambda = I\mu$, ſunt enim rectæ $i\lambda$, $I\mu$, diametri ejuſdem parallelogrammi rectanguli, hinc $\sigma\xi = 3\sigma s + 3I\mu$. Quarè (140) punctum ξ, ſuprà inventum, illud eſt ex quo ducta utcumque recta dividit chordam C A in ratione temporum quibus binæ partes arcûs A C ab eâdem rectâ productâ notatæ, à cometâ deſcribuntur. Deletâ igitur, ad vitandam confuſionem, priore B E verſus S ductâ, acta eſt nova verſus ξ, quæ eſt ad priorem ut quadratum ipſius S B, ad quadratum ipſius $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$, hoc eſt propter æquales $i\lambda$, $I\mu$, ad quadratum ipſius $S\mu + \frac{1}{3}I\mu$, & S B eſt quamproximè æqualis ipſi $S\mu$. Quarè nova B E, eſt ad priorem B E, ut $S\mu^2$, ad SN^2, poſitâ μ N triente ipſius $I\mu$, ſivè $i\lambda$, ut in conſtr. Lem. X. Deindè gravitas acceleratrix verſus Solem in loco N, eſt ad gravitatem acceleratricem verſus eundem in loco B, vel μ, ut SB^2 vel $S\mu^2$ ad SN^2. Præterea gravitates acceleratrices verſus ſolem in diſtantiis diverſis, manentibus dictis viribus, ſunt ut ſpatia eodem tempore verſus ſolem cadendo deſcripta; eſt igitur nova B E, ad priorem B E, ut ſpatium verſus ſolem cadendo percurſum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco N, ſemiſſe temporis quo cometa deſcribit arcum longitudinibus T A, T C, comprehenſum, ad ſpatium eodem tempore verſus ſolem cadendo deſcriptum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco B. Sed æquales ſunt hujus analogiæ conſequentes, quarè æquantur etiam antecedentes, ideóque nova recta B E æquatur ſpatio à grave cadente verſus ſolem percurſo, ſemiſſe temporis quo cometa arcum A B C, in Eccliptică deſcribit, urgente vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in diſtantiâ S N, à ſola obtinet. At (Lem. XI.) ſpatium per quod corpus decidit verſus ſolem ſemiſſe temporis quo cometa deſcribit arcum A B C, cum urgetur vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in loco N obtinet

Ad *AC* biſectam in *I* erigantur perpendicula *AM*, *CN*, *IO*, quorum *AM* & *CN* ſint tangentes latitudinum in obſervatione primâ ac tertiâ ad radios *TA* & *τC*. Jungatur *MN* ſecans



XXI.

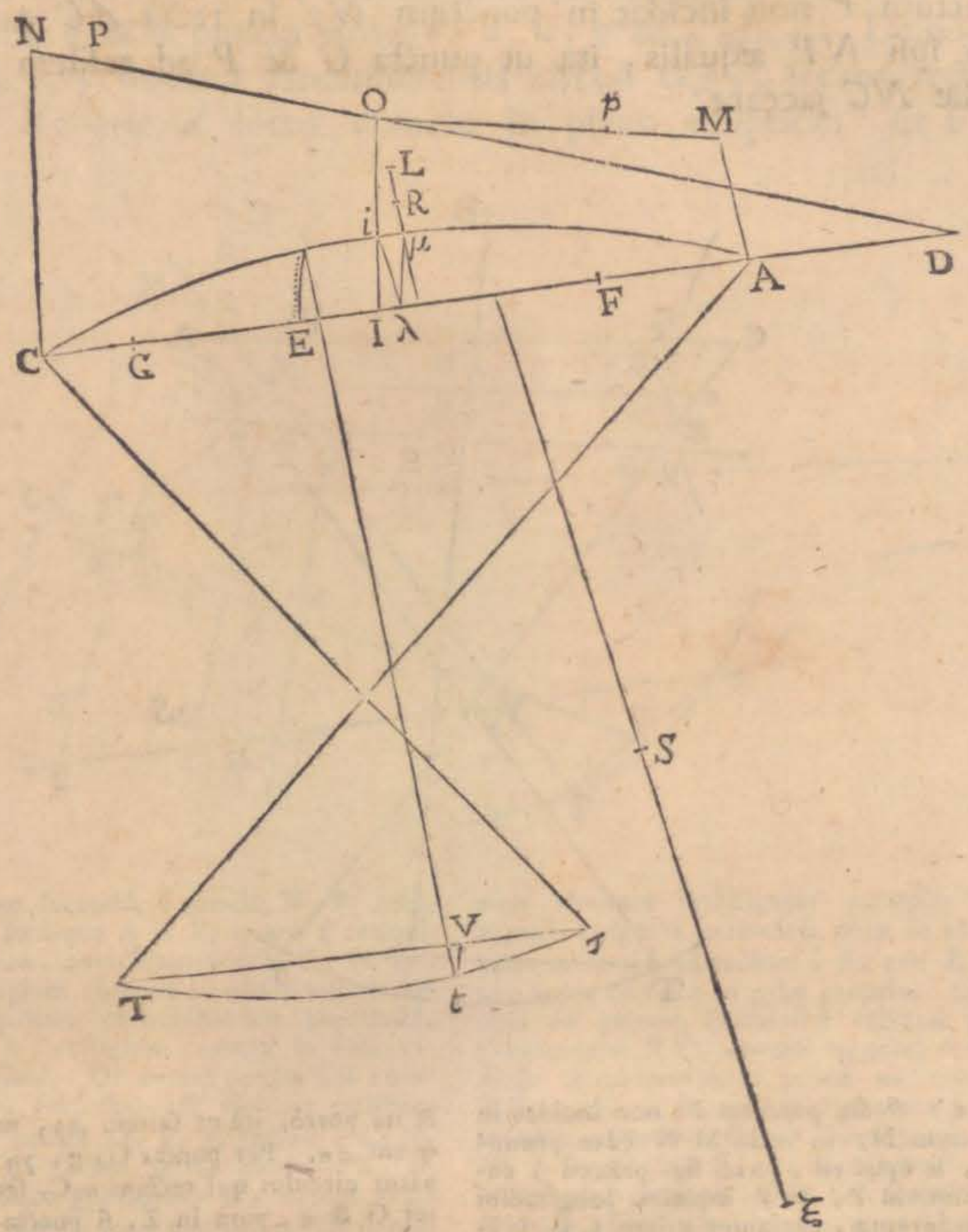
tinet, æquale eſt rectæ μY, ſegmento ipſius μS, inter verticem μ & chordam AC intercepto, ac proinde æquatur quamproxime ipſi BE ſegmento rectæ Bξ, inter punctum B ipſi μ proximum & chordam AC comprehenſo. Unde punctum E eſt in chordâ AC magis accurate quam anteà, hoc eſt, chorda arcûs qui eſt veſtigium portionis trajectoriæ cometicæ in plano Ecclipticæ, inter longitudines TA, TC interceptæ, per punctum E ultimò inventum tranſit quamproximè. Porrò chorda prædicta per E traducta inter TA, TC, ità locari debet ut AE, ſit ad EC, ſicut tempus quo cometa deſcribit Ecclipticæ arcum inter longitudines TA & tB, ad tempus quo arcum inter tB & TC deſcribit (Lem. 8.) ſed AC ità (per Lem. 8.) acta eſt per E, ut AE ſit ad EC in eâdem illâ ratione, nempè ſicut tempus inter obſervationem primam & ſecundam ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam. Rectè igitur acta eſt AC, per E ſcilicet tranſiens & diviſa in E ut oportebat, ac proinde ſi modò punctum B, recte fuerit aſſumptum pro cometæ veſtigio in obſervatione ſecundâ, puncta A, C ſunt ejuſdem veſtigia quamproximè in obſervationibus primâ & tertiâ.

DE MUNDI SYSTEMATE.

cans IO in O. Constituatur rectangulum $iI\lambda\alpha$ ut prius. In IA productâ capiatur ID æqualis $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$. Deinde in MN versus N capiatur MP, quæ sit ad longitudinem supra inventam X, in subduplicatâ ratione mediocris distantiæ telluris à sole (seu semidiametri orbis magni) ad distantiam OD. Si punctum P incidat in punctum N, (t) erunt A, B, C tria loca cometæ,

142. (t) * *Erunt A, B, C.* Supereſt jam ut dignoſcatur an punctum B in mediâ longitudine recte fuerit aſſumptum cometæ veſtigium, ut error hinc ortus, ſi quis fuerit, corrigatur, reliquis quæ hactenus facta ſunt manentibus. Deleto priore parallelogrammo $iI\lambda\mu$, ad priorem minuſque accuratam chordam CA conſtituto, deſcribatur alterum ad poſteriorem & accuratiorem chordam CA, eâdem adhibitâ conſtructione ut priùs. Ex punctis A, I, C, erigantur ad CA normales AM, IO, CN, ſitque AM tangens notæ latitudinis in obſervatione primâ ad radium TA, & CN tangens latitudinis in obſervatione tertiâ ad radium TC; jungatur MN ſecans IO in O. Si erigatur trapezium ACNM normaliter ad planum Eccipticæ manente rectâ CA, erunt puncta M, N loca vera cometæ, ſi modò punctum B ſit ejus veſtigium in plano Eccipticæ in obſervatione ſecundâ, & planum tranſiens per tria puncta M, O, N, eſt planum trajectoriæ cometicæ, ideoque recta MN eſt chorda arcus trajectoriæ parabolicæ à cometâ deſcriptæ inter obſervationem primam & tertiam, & SM, SN ſunt diſtantiæ cometæ à ſole in obſervatione primâ & tertiâ reſpective, hoc eſt, diſtantia vera cujuſvis puncti trajectoriæ cometicæ à Sole eſt hypothenuſa trianguli rectanguli cujus alterum latus eſt diſtantia à ſole veſtigii illius puncti in plano Eccipticæ, alterum autem eſt perpendiculum ex iſto veſtigio normaliter ad planum Eccipticæ excitatum & ad punctum trajectoriæ terminatum. Quia verò aliqua ex iſtis perpendiculis ſunt longiora ut NC, quædam breviora ut MA, inter hæc medium quoddam uſurpetur, putà hic IO. Et univerſaliter loquendo, diſtantia cujuſvis puncti trajectoriæ cometicæ à ſole erit quamproximè hypothenuſa trianguli rectanguli cujus alterum latus eſt diſtantia puncti analogi in veſtigio trajectoriæ deſcripto & alterum latus eſt ipſa recta IO. Quibus poſitis in IA, eâve productâ capiatur $ID = S\mu + \frac{2}{3}i\lambda = SR$, factâ $LR = L\mu$, & jungatur DO, hæc quamproxime æquabitur puncti trajectoriæ cujus μ eſt veſtigium diſtantiæ à ſole auctæ duabus tertiis rectæ interjectæ inter punctum iſtud & chordam arcûs trajectoriæ, ipſam ſcilicet MN in trapezio ACNM, id eſt, recta DO æqualis eſt rectæ in plano trajectoriæ cometæ analogæ ipſi SR in ejus veſtigio in plano Eccipticæ, hoc eſt DO æqualis eſt rectæ SR in parabolâ (Lem. X.). Jam (per cor. 3. prop. 40.) conferatur velocitas cometæ, dum in parabolicâ ſuâ trajectoriâ movetur in diſtantiâ à ſole æquali rectæ DO, cum velocitate telluris circà ſolem, & definiatur linea quam cometa, cum prædictâ velocitate æquabiliter motus, percurreret toto tempore quo tellus arcum $\tau t T$ deſcribit, ſive toto tempore quo cometa arcum ABC in Eccipticâ percurrit, in partibus arcûs $Tt\tau$ à tellure interim percurſi. Id autem facilè præſtatur modo ſequenti. Calculo inveniatur longitudo arcûs $\tau t T$ à tellure deſcripti inter obſervationem primam & tertiam, poſito quovis numero rotundo pro mediocri diſtantiâ terræ à ſole, longitudo putà MP quæ eſt ad longitudinem priùs inventam X, in ſubduplicatâ ratione diametri orbis magni ad rectam notam DO, quæque proinde datur, eſt ipſa longitudo quæſita, ea nempe quam, cometa æquabiliter latus cum velocitate quam trajectoriam ſuam parabolicam deſcribens habet ad diſtantiam à ſole æqualem rectæ DO, percurreret

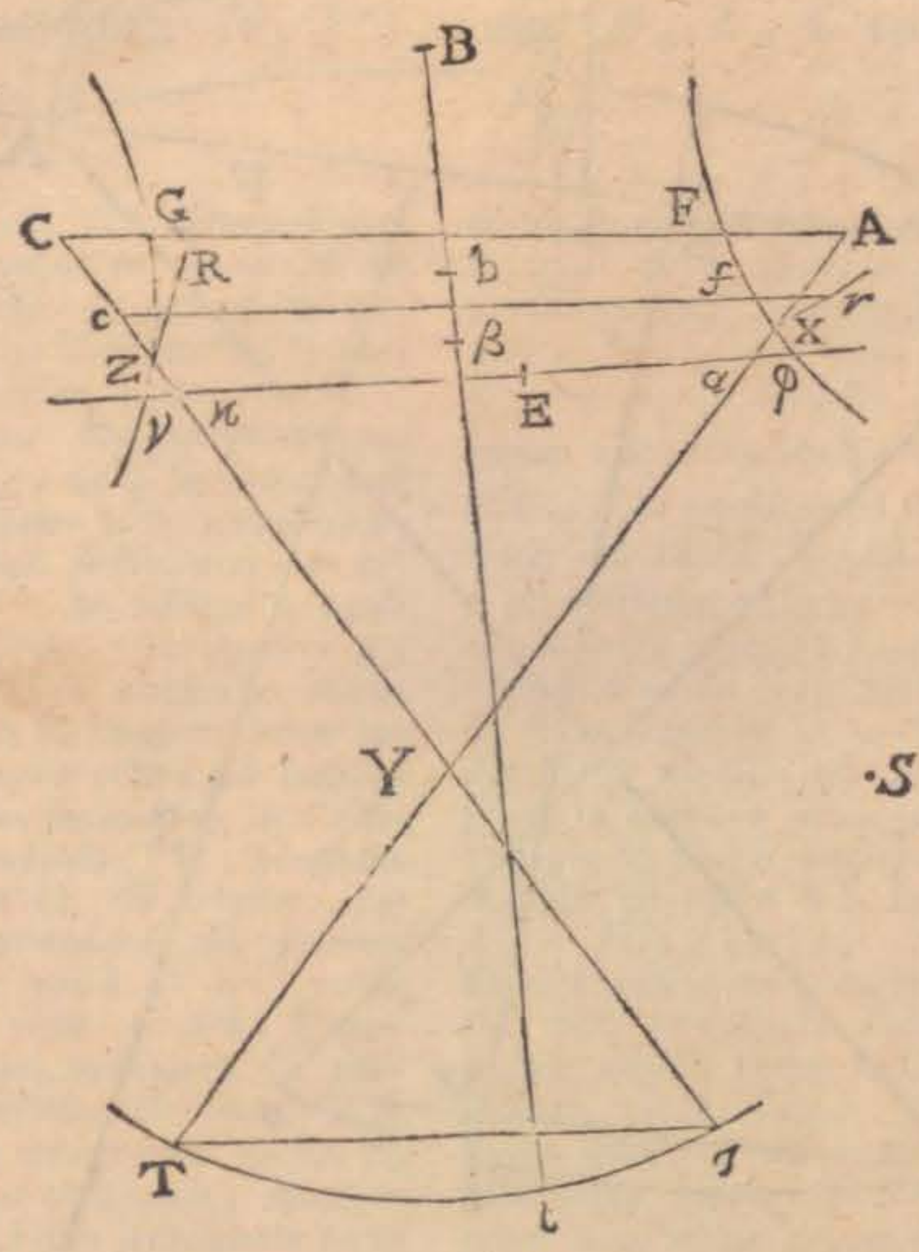
tem-



tempore quo cometa arcum cujus chorda MN reverâ percurrit. Nam (per cor. 3. prop. 40.) velocitas cometæ in hâc distantiâ DO, est ad velocitatem telluris in prædictâ ratione. Sed (per Lem. X.) dicta longitudo MP æqualis est chordæ arcûs quem cometa isto tempore reverâ describit; Quare si reperiatur MP æqualis chordæ MN, hoc est, si punctum P incidat in punctum N rectè assumptum fuit punctum B in longitudine secundò observatâ pro vestigio cometæ, ideóque erunt A, B, C, tria loca cometæ per quæ orbis ejus in plano Ecclipticæ describi debet. 142.

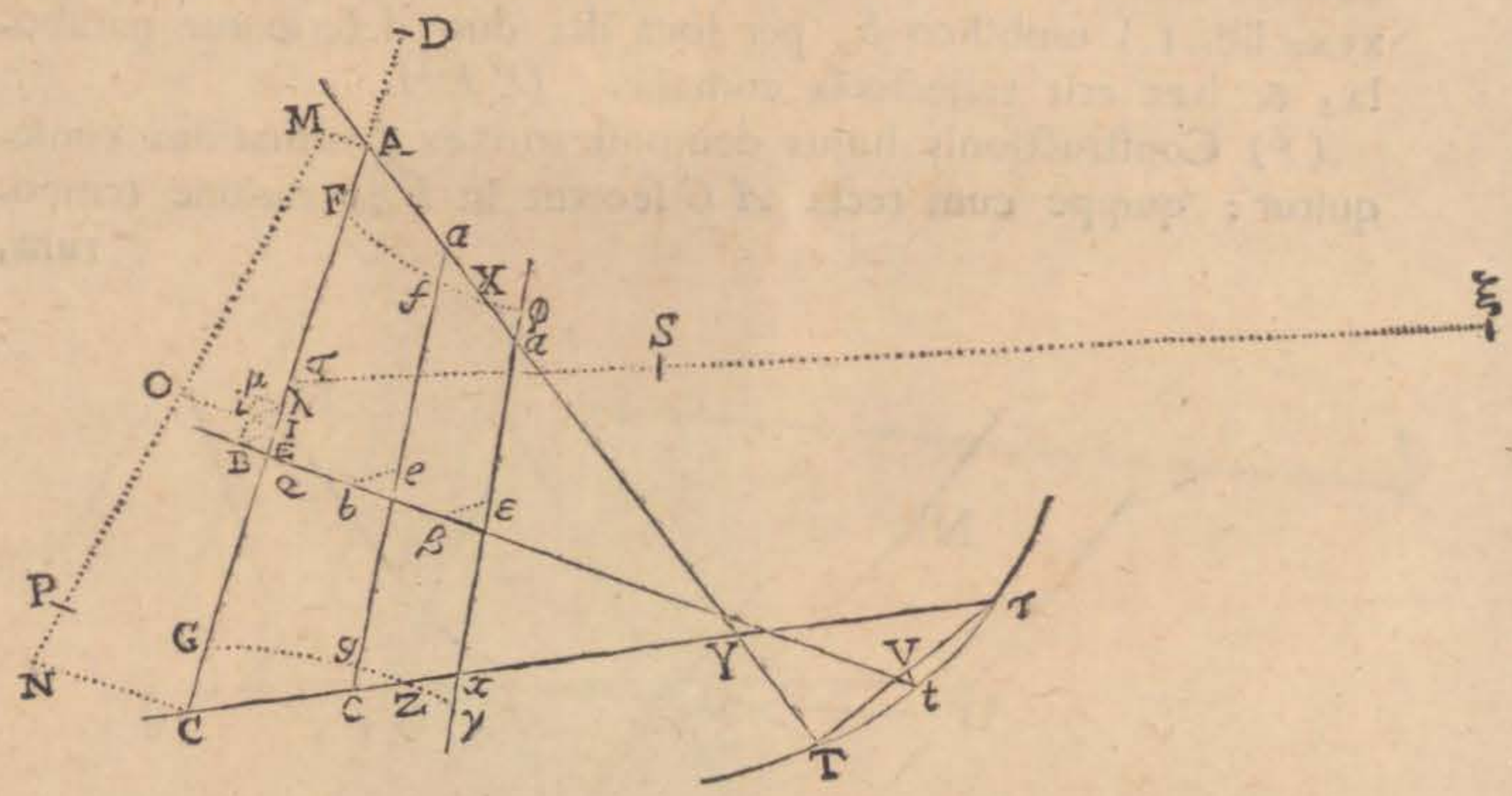
DE MUNDI SYSTEMATE.

tæ, per quæ orbis ejus in plano eclipticæ describi debet. (u) Sin punctum *P* non incidat in punctum *N*; in rectâ *AC* capiatur *CG* ipsi *NP* æqualis, ita ut puncta *G* & *P* ad easdem partes rectæ *NC* jaceant. Ea-



1'42. (u) * *Sin punctum P*, non incidat in punctum N, in rectâ M N eâve productâ, si opus est, (vid. fig. præced.) capiantur M P, N P æquales longitudini priùs inventæ, capiantur etiam C G, C F, æquales M P, N P, ità ut G & P ad easdem partes rectæ N C jaceant. Præterea eâdem methodo quâ ex assumpto puncto B, inventa sunt puncta E, A, C, G, ex assumptis aliis punctis b & β, inveniantur nova puncta e, a, c, g, & ε, α, κ, γ. Quod si longitudo priùs inventa M P, minor fuerit quam M N, aut A G, vel C F, punctum b, sumendum erit propius puncto Y, in quo C τ & A T concurrunt, & ità porrò, ità ut saltem α γ, minor fiat quam α κ. Per puncta G, g, γ, describatur circulus qui rectam τ C, secabit inter G & κ, putà in Z, si puncta nova b, β, sumpta fuerint, ut jam diximus. Similiter per puncta F, f, φ, describatur circulus rectam T A, intersecans in X, erunt puncta Z, X, loca cometæ ad Eclipticam reducta, sive cometæ vestigia in observatione primâ & tertiâ, si B sit ejusdem vestigium in observatione secundâ. Idem similiter obtinet in a, c, & b, item in α, κ & β. Jam verò demonstratum est locum B, esse vestigium cometæ in observa-

Eadem methodo, quâ punctâ *E*, *A*, *C*, *G*, ex assumpto puncto *B* inventa sunt, invenientur ex assumptis utcunque punctis aliis *b* & *β* puncta nova *e*, *a*, *c*, *g* & *ε*, *α*, *κ*, *γ*. Deinde si per *G*, *g*, *γ* ducatur circumferentia circuli *Gg γ*, secans rectam *τC* in *Z*: erit *Z* locus cometæ in plano ecliptícæ. Et si in



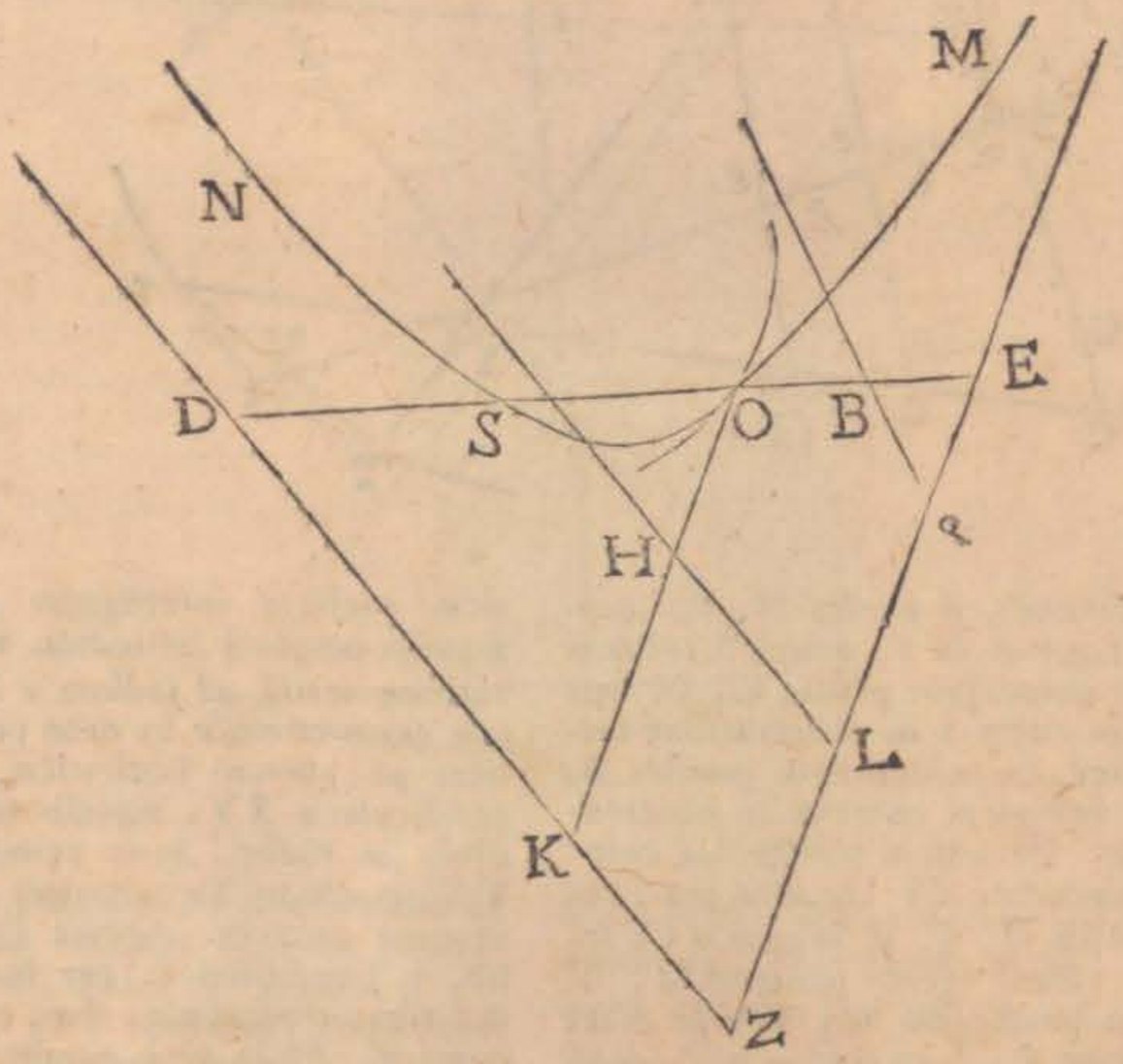
servatione secundâ, si puncta N, P, coincidant, itemque A & F; quare si reliquis manentibus, coincidant puncta C, G, erit C, vestigium cometæ in observatione tertiâ. Similiter coincidentibus punctis A, F, erit A, vestigium cometæ in observatione primâ. Ut autem puncta illa coinciderent, traductus est circulus transiens per tria puncta G, g, γ, rectam τC, secans in Z. Cùm igitur punctum Z, sit tam in loco punctorum C, nempe rectâ τC, quam in loco punctorum G, nempe circulo, quandò punctum C reperitur in Z, punctum G in illo etiam reperietur, id est, in isto casu coincident puncta C, G, ideóque punctum Z est verum cometæ vestigium in plano Ecclipticæ in observatione tertiâ, huic enim conveniunt omnes conditiones requisitæ. Similiter ob easdem rationes, punctum X est verum cometæ vestigium in observatione primâ. Quare si ex puncto Z, ad planum Ecclipticæ excitata intelligatur normalis Z R æqualis tangenti latitudinis notæ in observatione tertiâ ad radium τ Z, erit R locus verus cometæ in orbe proprio. Similiter ad planum Ecclipticæ erigatur perpendicularis X Y, æqualis tangenti latitudinis in observatione primâ ad radium T X, punctum Y, erit alter cometæ locus in orbe proprio. Quare (per prop. 19. lib. 1.) umbilico S, per loca bina R, r, describatur parabola, hæc erit trajectoria cometæ. Quia verò parabolæ per puncta R, r, & umbilico S, descriptæ duplex positio esse potest (ut patet ex constr. prop. 19. lib. 1.) ex eodem umbilico S, & binis punctis R, r, duæ describi poterunt parabolæ; utra autem pro orbe cometæ sumenda sit ex aliâ quâvis cometæ observatione manifestum erit. Nam locus cometæ qui ex alterâ harum parabolarum colligetur, cum observato loco conveniet, locus autem ex alterâ parabolâ deductus nequaquam observationibus congruet.

142.

DE MUNDI SYSTEMATE.

AC, ae, $\alpha\nu$ capiantur AF, af, $\alpha\varphi$ ipſis CG, $c\varrho$, $n\gamma$ reſpectivè æquales, & per puncta F, f, φ ducatur circumferentia circuli $Ff\varphi$, ſecans rectam AT in X; erit punctum X alius cometæ locus in plano eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios TX & τZ; & habebuntur loca duo cometæ in orbe proprio. Denique (per prop. XIX. lib. I.) umbilico S, per loca illa duo deſcribatur parabola, & hæc erit trajectoria cometæ. *Q. E. I.*

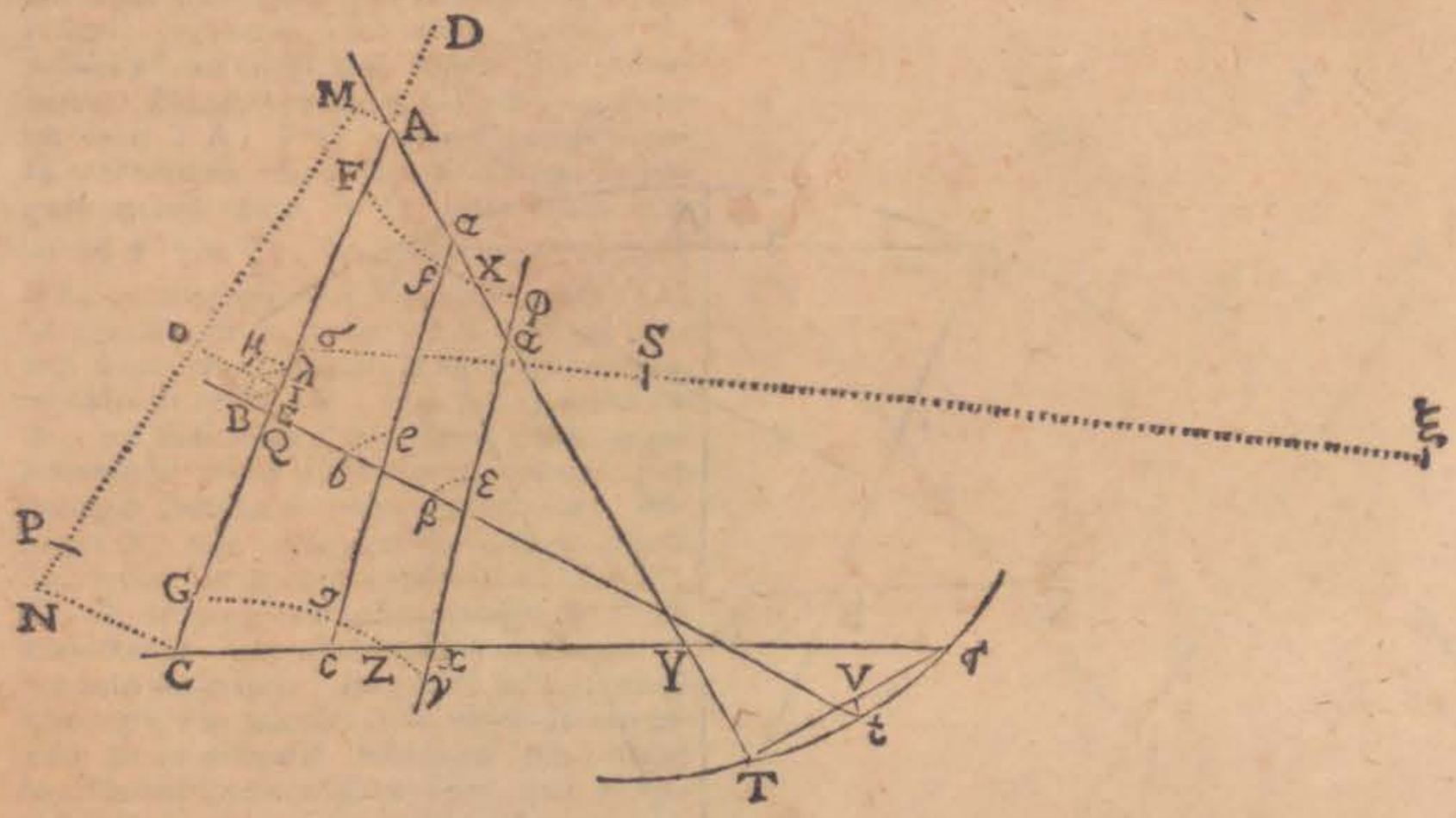
(x) Conſtructionis hujus demonſtratio ex lemmatibus conſequitur: quippe cum recta AC ſecetur in E in ratione temporum,



143. (x) * *Conſtructionis hujus demonſtratio.* Patet ex notis præced.

143. Lemma. Sit angulus rectilineus AQB datumque punctum S; item ſit curva MON, talis ut per S ductâ quâvis rectâ SE ſit BE, anguli lateribus intercepta, æqualis rectæ SO, erit curva MON, hyperbola. Nam ducatur SL, ad BQ, parallela, occurrenſque ipſi AQ in L, in rectâ QL productâ capiatur $LZ = LQ$, agaturque ZD ad QB parallela, itemque ducatur OK parallela ad QZ: ob $SO = BE$ (per hyp.) erit $HO = QE$. Quare cum ſit $SH : HO = SL : LE = SL - SH : LE - HO = LH : LQ = LH : HK$, erit $SH \times HK = HO \times LH$, hoc eſt, SL

rum, per lemma VII, ut oportet per lem. VIII: & BE per lem XI. sit pars rectæ BS vel $B\beta$ in plano ecliptícæ arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per corol. lem. x.) lon- LIBER I. SECTIUS. PROP. XII. PROBL. XXI.



gitudo sit chordæ arcus, quem cometa in orbe proprio inter observationem primam ac tertiam describere debet, ideoque ipsi MN æqualis fuerit, si modo B sit verus cometæ locus in plano ecliptícæ.

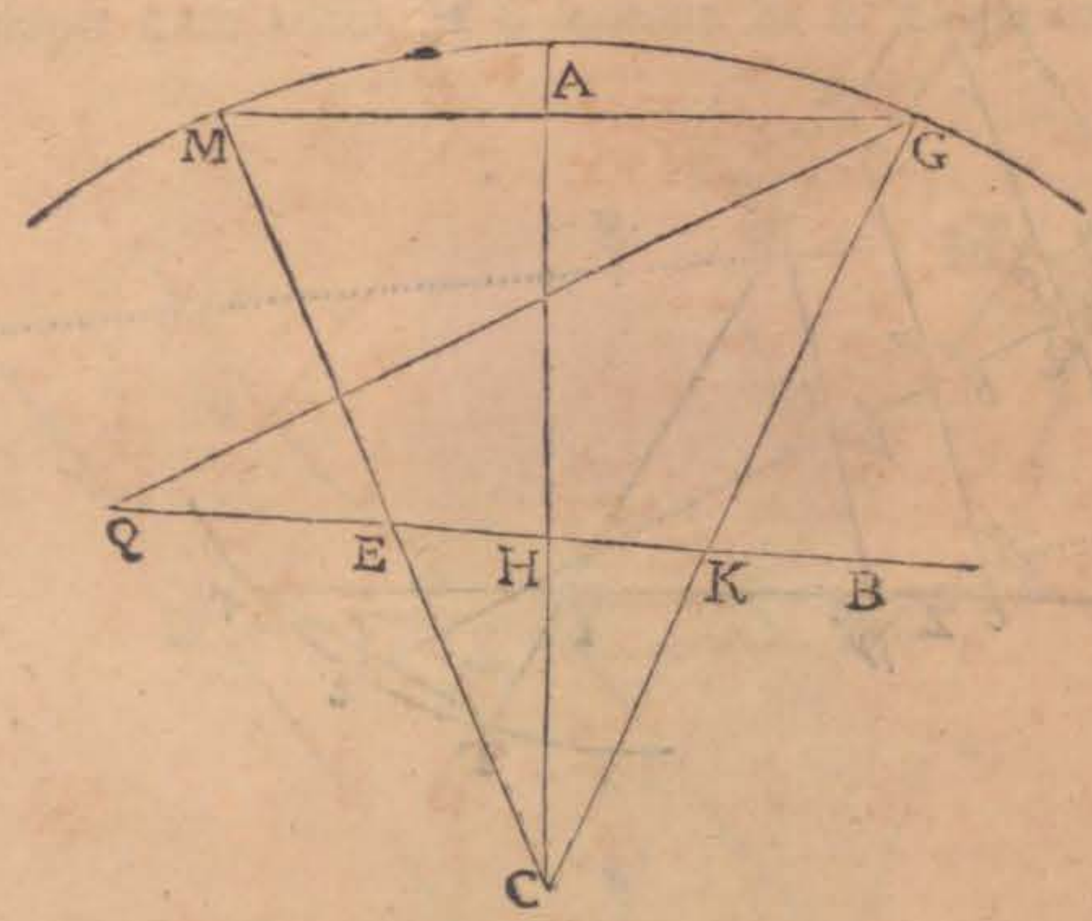
Cæterum puncta B, b, β non quælibet, sed vero proxima eli-

$SL \times HK - LH \times HK = KO \times LH - HK \times LH$. Unde erit $SL \times HK = KO \times LH$, vel $ZL \times LS = ZK \times KO$, ideóque curva MON, est hyperbola cujus asymptoti ZA, ZS (Lem. 1. de con.).

144. Corol. Hinc per datum punctum S, recta linea duci potest ità ut pars rectæ BE, lateribus anguli dati EQB, intercepta, æqualis sit rectæ datæ. Nam descriptâ hyperbolâ MON, centro S, intervallo datam rectam æquante, describatur circulus hyperbolam intersecans in O, & producatur SOE, erit BE, æqualis rectæ datæ SO (143). 144

DE MUNDI SYSTEMATE.

(y) eligere convenit. Si angulus AQt, in quo vestigium orbis in plano ecliptica descriptum secat rectam tB, præter propter innotescat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ



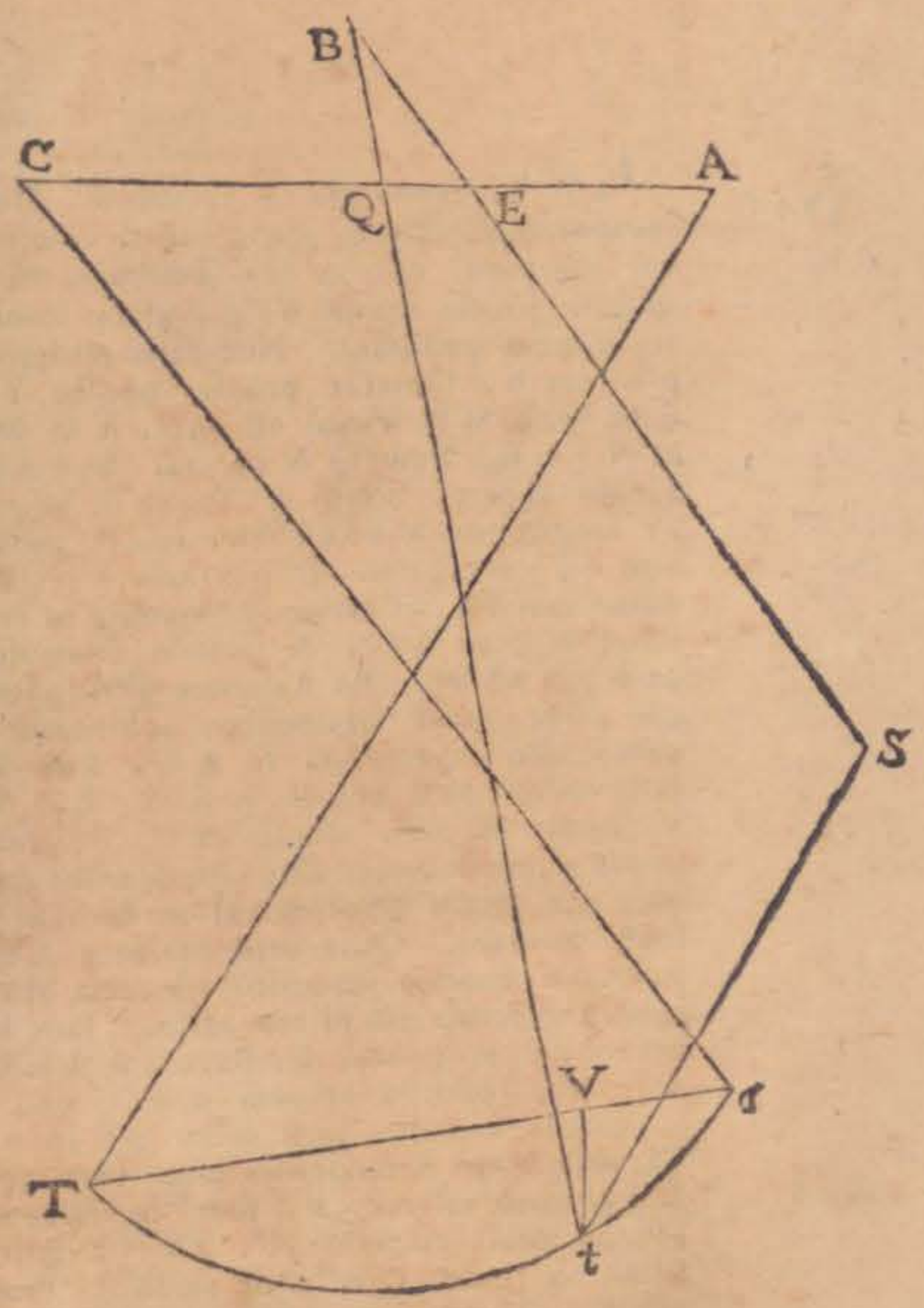
145. 145. Newtonus in arithmeticâ universali præcedentis corollarii constructionem quæ fit per conchoidem more veterum, anteponendam esse ait constructioni quæ Sectiones Conicas adhibet. Quare veterum constructionem utpotè simpliciorem hic quoque subjungemus. Sic autem describitur conchois. Agatur nempè recta QB, ad quam erigatur normalis AH, deindè ex puncto C, tanquam polo ità ducantur rectæ quotcumque CM, rectam QB secantes in E, ut semper sit EM, æqualis rectæ datæ AE, curva in quâ sunt puncta M, A dicitur conchois. Jam verò inter latera anguli GQB, ducere oporteat rectam GK, quæ transeat per punctum datum C, & æqualis sit rectæ datæ CK, puncto C tanquam polo & intervallo dato AH=CK describatur conchois quæ occurrat rectæ CG, in G patet fore KG, æqualem rectæ datæ CK. Q.E.F.

(y) * *Eligere convenit.* Si præter propter innotescat angulus quem vestigium orbitæ cometicæ continet cum rectâ terram & cometam in observatione secundâ conjun-

quæ ſit ad $\frac{4}{3} T_t$ in ſubduplicatâ ratione SQ ad St. Et agendo rectam SEB, cujus pars EB æquetur longitudini Vt, determinabi-

145.

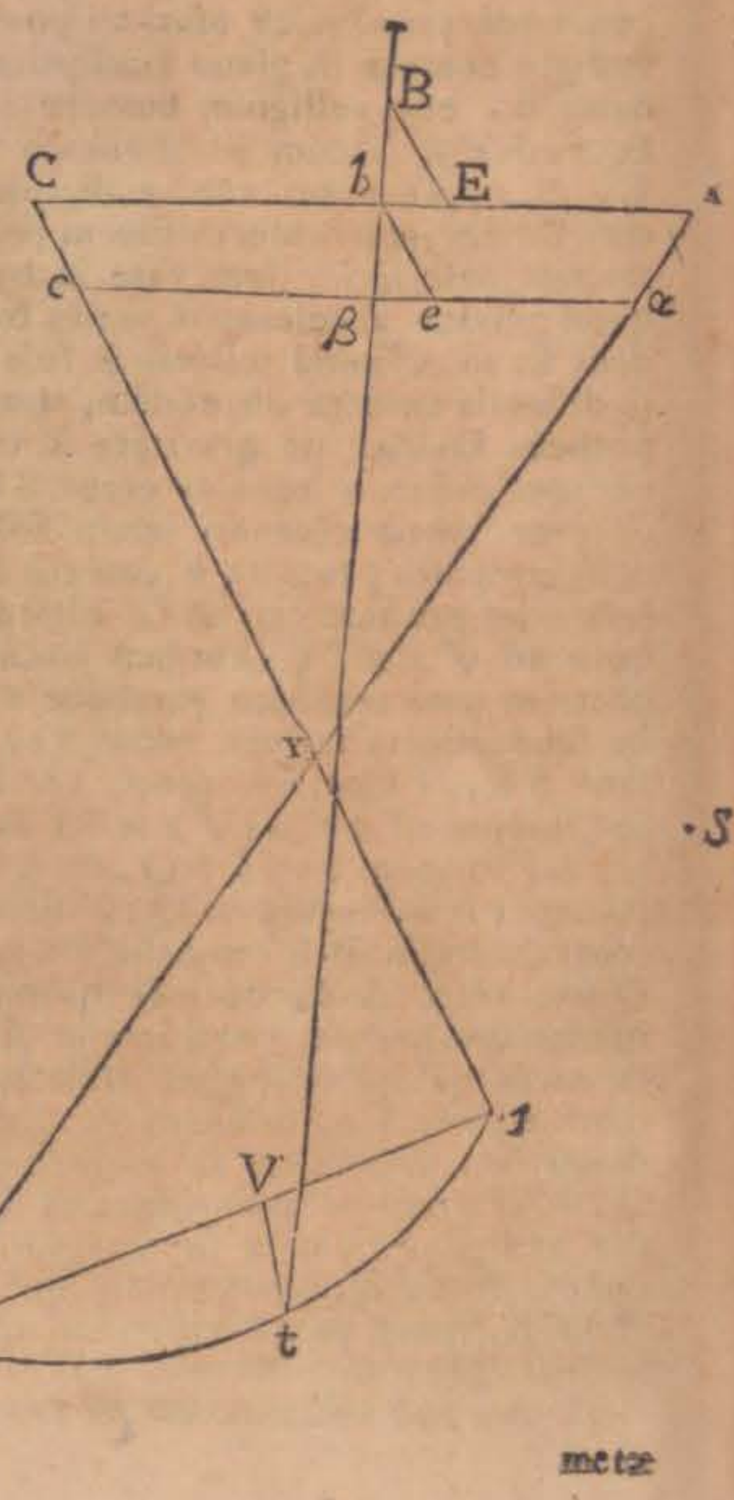
jungente, ſive huic æqualis angulus AQt (Lem. 4. de con.) quem chorda AC continet cum rectâ tB, id quod præſtari poterit per num. 133. tunc punctum B, primò aſſumendum hoc modo determinabitur. Ducatur recta AC, rectis poſitione datis TA, TC utrinque comprehenſa, rectamque tB, poſitione datam, in angulo æquali dato in Q interſecans quæ ſit ad $\sqrt{2} \times Tt$, hoc eſt, proximè ad $\frac{4}{3} Tt$, in ſubduplicatâ ratione St ad SQ, & agatur per S, recta SEB, tali ut pars EB à cruribus anguli AQB intercepta, æqualis ſit rectæ tV (144. 145.) punctum B, ità definitum, eſt illud ipſum quod commodè primâ vice uſurpari poterit pro veſtigio cometæ in plano Eccliptiçæ. Pónatur B, eſſe veſtigium cometæ in plano Eccliptiçæ & arcum parabolicum per A, C, B tranſeuntem eſſe veſtigium arcûs trajectoriæ inter obſervationem primam & tertiam deſcripti. Jam verò in hypotheſi quod gravitas accelerattrix versùs ſolem eâdem ſit in diſtantiâ telluris à ſole, atquè in diſtantiâ cometæ ab eodem, quæ eſt hypotheſis Galilæi de gravitate à verâ non multum diſtans, æquales erunt BE, tV, ut potè ſpatia cadendo versùs ſolem eodem tempore percurſa à cometâ & à tellure, ac proinde erit AC chorda parabolæ ad $\sqrt{2} \times Tt$ chordam circuli cujus centrum cum umbilico parabolæ coincidit in ſubduplicatâ ratione rectæ St, ad rectam SE, (Cor. 7. prop. 16. lib. 1). Sed ſumpta eſt AC ad $\sqrt{2} \times Tt$ in ſubduplicatâ ratione St ad SQ, & AC ſecat rectam tB in angulo AQt, ſicut oportebat, atquè BE æqualis eſt ipſi tV; Quare recta AC obtinet quamproximè omnes conditiones requiſitas ut ſit chorda arcûs qui eſt veſtigium trajectoriæ cometicæ inter longitudinem primam TA, & tertiam interceptæ ac proindè punctum B, habet omnes conditiones ut ſit proximè veſtigium cometæ in obſervatione ſecundâ. Rectè igitur determinatum eſt punctum B, quod primâ vice uſurpare licet.



DE MUNDI SYSTEMATE.

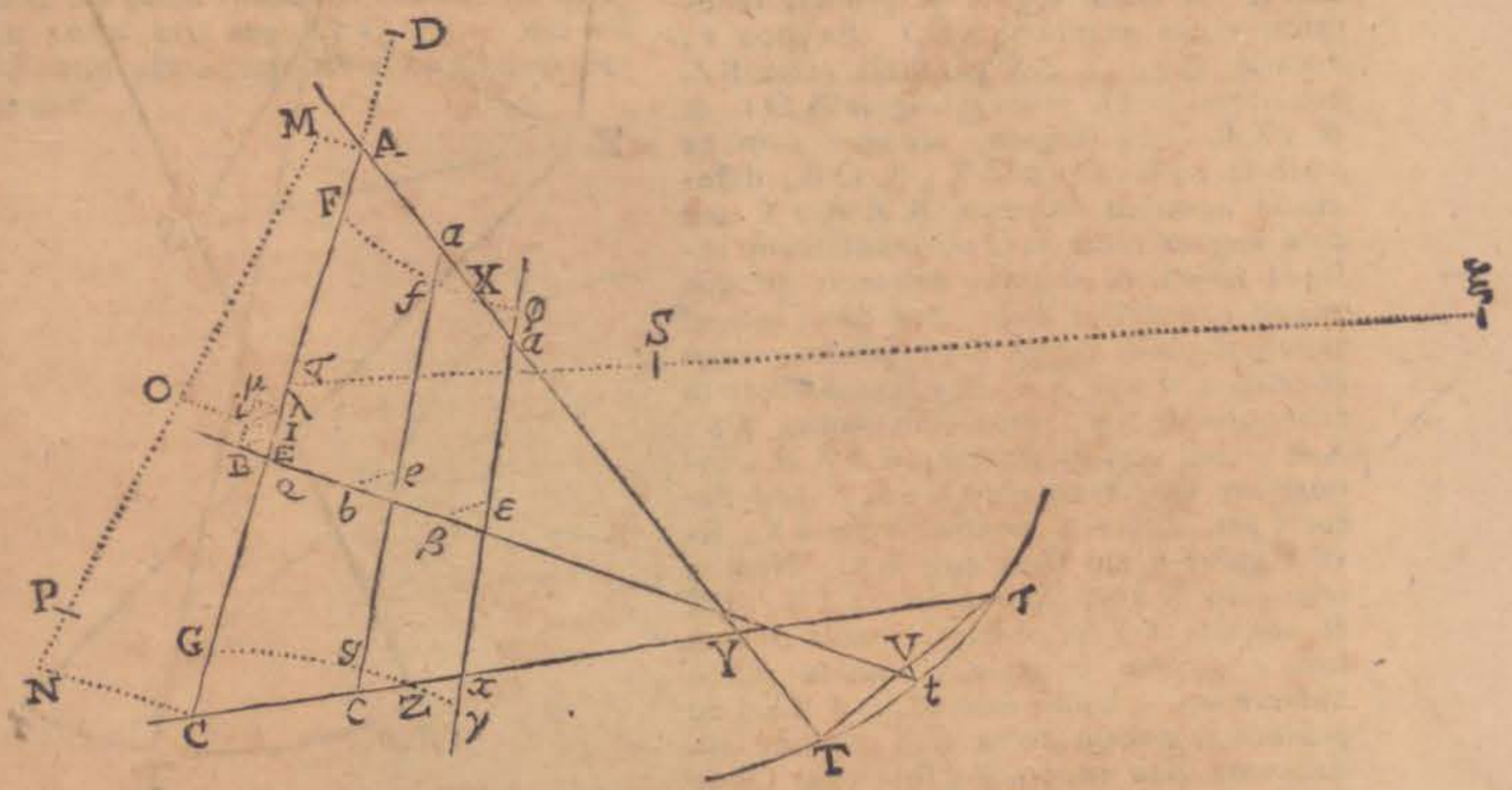
nabitur punctum *B* quod prim vice uſurpare licet. (z) Tum rectâ *AC* deletâ & ſecundùm præcedentem conſtructionem iterum ductâ, & inventâ inſuper longitudine *MP*; in *tB* capiatur punctum *b*, e lege, ut ſi *TA*, *τC* ſe mutuò ſecuerint in *Y*, ſit diſtantia *Yb* ad diſtantiam *YB*, in ratione compoſitâ ex ratione *MP* ad *MN* & ratione ſubduplicatâ *SB* ad *Sb*. Et eâdem methodo inveniendum erit punctum tertium *β* ſi modo

145. (z) * *Tum rectâ AC, deletâ.* Determinato puncto B, quod primâ vice licet uſurpare, cætera quæ deinceps aſſumuntur puncta nempè b, *β*, aliam conſtructionem poſtulant. Nec ſatis eſt quod punctum b, ſumatur propius puncto Y, dum linea M P, minor eſt quam A C vel M N (in fig. Newt.) & contrà. Sed quia ducere oportet rectam A C, quæ ſit æqualis longitudini M P, capiatur in t B, punctum b, eâ lege ut ſit diſtantia Y b, ad diſtantiam YB, in ratione compoſitâ ex ratione M P ad A C, & ratione ſubduplicatâ S B ad S b. Ex hactenus dictis patet cur prior ratio componens adhibeatur; cum enim invenienda ſit A C, quæ ſit longitudini M P æqualis, ſi illa hâc ſit major aut minor, minuenda erit vel augenda donec æquales fiant, æquarentur autem per ſolam priorem rationem ſi M P foret conſtans. Quia verò variante A C, perpetuò quoque variabilis eſt recta M P, ideò adhibenda eſt altera ratio. Jam in parabolis per puncta A, B, C, & a, b, c, deſcriptis, chordæ arcuum A B C, a b c, in quibus æquales ſunt rectæ B E, b e, ad umbilicum S tendentes inter verticem & chordam interceptæ, ſunt in ratione ſubduplicatâ rectarum S B, S b (ut colligitur ex theor. 1. & 2. de parab.). Præterea (ex dem.) æquales ſunt rectæ B E, b e quamproximè; ſunt enim ſpatia à cometâ verſus ſolem cadendo in diverſis ab illo diſtantiis eodem tempore percurſa, & veſtigium cometæ in obſervatione ſecundâ proximum eſt vertici arcûs A B C, ſeu veſtigii portionis trajectoriæ à cometâ inter obſervationem primam & tertiam deſcriptæ. Quare habetur punctum b, co-



metæ

dò operationem tertiò repetere lubet. Sed hâc methodo operationes duæ ut plurimum ſuffecerint. Nam ſi diſtantia $B\,b$ perexigua obvenerit; poſtquam inventa ſunt puncta F, f & G, g, LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.



actæ rectæ Ff & Gg ſecabunt TA & τC in (*) punctis quæſitis X & Z.

Exem-

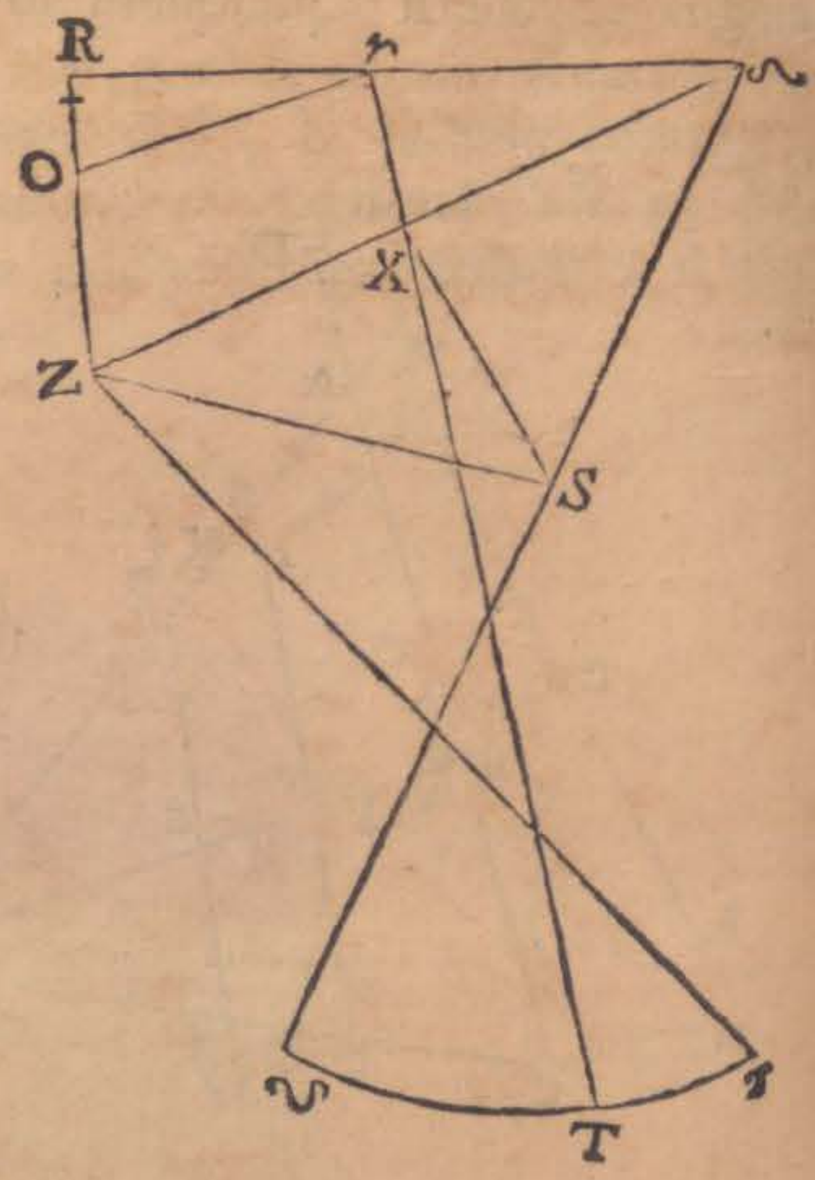
metæ veſtigium in plano Eccliptícæ non tamen accuratum, ſed verò proximum duntaxat.

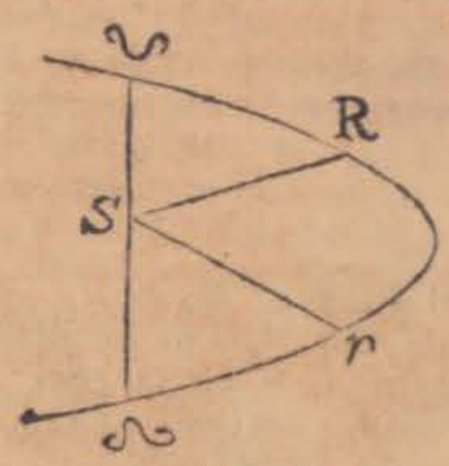
(*) * *In punctis quæſitis X & Z.* (Ut patet ex notâ u, in hanc prop.).

146. Si elliptica cometæ orbita magis accuratè obſervationibus ſatisfacere deprehendatur, ea ſic poterit deſcribi. Reperiatur veſtigium cometæ in plano Eccliptícæ in obſervatione ſecundâ, eundem ordinem ſitumque obtinet veſtigium illud inter puncta B, b, β, quem punctum Z, inter C, c, ϰ, vel X, inter A, a, α. Ex veſtigio ſic invento, ad planum Eccliptícæ erigatur normalis quæ eſt tangens latitudinis in obſervatione ſecundâ ad radium æqualem diſtantiæ inter locum t, dictumque veſtigium Hujus perpendiculi extremum punctum ſignabit locum cometæ in orbitâ propriâ ſecundò obſervatum. Denique umbilico S, per puncta X, Z, & punctum modò inventum deſcribatur ellipſis (prop. 20. lib. 1.), hæc erit quæſita cometæ trajectoria. 146

DE MUNDI SYSTEMATE.

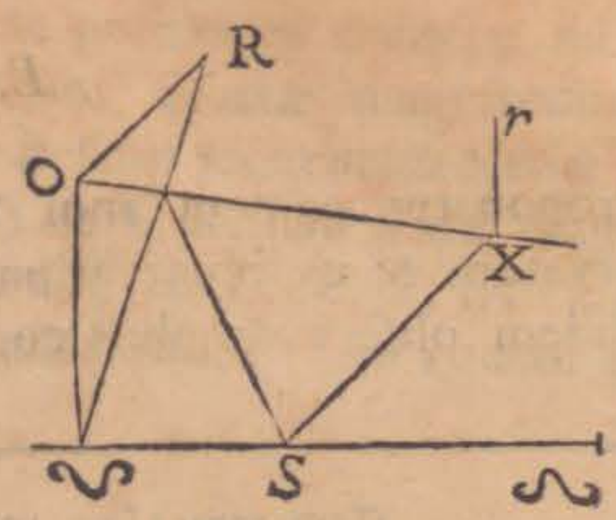
147. Ex præcedentis problematis solutione colligi possunt positio lineæ nodorum trajectoriæ & tempus quo cometa nodos tenet. Iisdem manentibus, & per easdem litteras designatis ut suprà, producantur rectæ ZX, Rr, donec concurrant in ☊, jungantur que SZ, SX, S☊. Jam verò (ex præced.) data sunt omnia puncta S, Z, X, ideóque trianguli SZX, tam latera quam anguli ac proindè innotescit etiam angulus SX☊. Ex loco r, ducatur rO, ad ZX parallela rectæ RZ, occurrens in O, erunt triangula ROr & & rX☊, æquiangula, ideóque cum ex notis lateribus Or = ZX, & OR, differentiâ notarum rectarum RZ & rX una cum angulo recto ROr, innotescant reliqua latera & anguli, dabuntur quoque anguli trianguli rX☊. Sed datur in hoc triangulo latus unum Xr, dabuntur ergò & reliqua nempè X☊ & r☊. Deindè in triangulo ☊XS, nota sunt latera XS, X☊, cum angulo intercepto SX☊, innotescet itaque angulus XS☊ Sed datur (per observ.) positio rectæ SX, sivè angulus quem facit cum TX. Nam in triangulo XTS, dantur latera TS, TX & angulus XTS, distantia inter locum solis cognitum locumque cometæ primò observatum. Undè innotescit TXS, ac proindè & positio rectæ ☊S♈, hoc est, dabuntur loca nodorum è sole visa. Quod si æquales fuerint rectæ ZR, Xr, nodorum linea parallela est rectæ ZX, ideóque positione cognita.

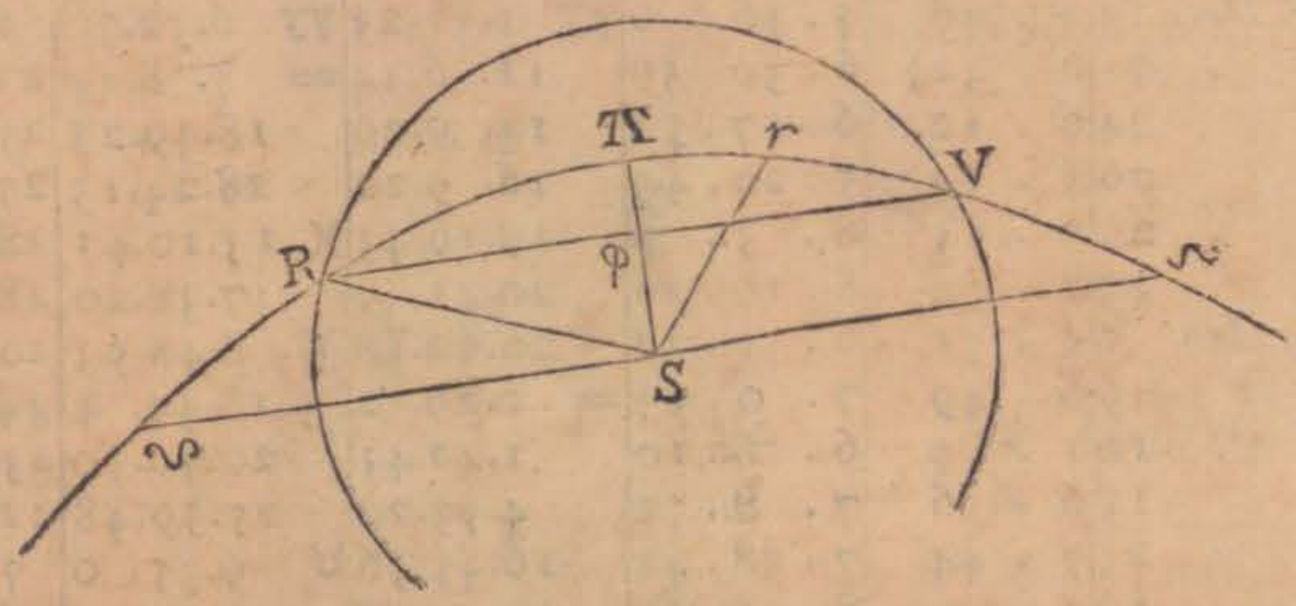




Ad determinandum tempus quo cometa in nodo versatur, fit Rr, trajectoria cometæ (per prop. præced.) descripta, sitque superius inventa nodorum linea ☊S♈, trajectoriæ in ☊ & ☊ occurrens, erit (prop. 1. lib. 1.) intervallum temporis inter observationem primam & momentum quo cometa ad nodum ☊ appellit, ad intervallum temporis inter observationem primam & tertiam ut area r☊S, ad aream RSr; sed arearum r☊S, RSr, nota est ratio (per theor. 4. de parab. vel num. 142.) notum igitur est tempus quo cometa nodum ☊, tenet. Pari modo innotescit tempus quo cometa ad nodum alterum ♈ appellit.

148. Iisdem manentibus, determinabitur inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ. Ex puncto O ad ☍ S ☊, nodorum lineam erigatur perpendicularis O ☍, jungaturque R ☍. In triangulo O S ☍, præter rectum ad ☍, dantur (147.) angulus O S ☍ & latus O S, quare datur O ☍. Deinde in triangulo R O ☍, dantur latera circà rectum O R & O ☍, ideóque notus erit angulus O ☍ R, qui est inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ.





149. Facilè obtineri potest tempus quo cometa perihelium tenet. Umbilico S, per puncta R, r, describatur trajectoria cometæ. Centro S, per alterutrum punctorum putà R, describatur circulus trajectoriæ denuò occurrens in V, jungaturque R V, ad quam ex puncto S demittatur perpendicularis S φ, quæ producatur donec parabolæ occurrat in π, erit π trajectoriæ perihelium; & proindè recta ipsius S π quadrupla, erit ejusdem latus rectum principale. Cum enim umbilicus S, in parabolæ axe reperiatur, circulus centro S descriptus, parabolam intersecabit in duobus punctis ab axe æqualiter distantibus ac proinde axi normalis erit R V intersectiones conjungens; Quarè S φ est axis & π vertex parabolæ, sive trajectoriæ perihelium & quadrupla S π parameter diametri cujus π est vertex (theor. 2. de parab.) hoc est, latus rectum principale. Jam capiatur tempus cujus intervallum ab observatione primâ, dum cometa versabatur in r, est ad intervallum temporis inter observationem primam & tertiam ut area r S π ad aream R r S, habebitur illud ipsum tempus quo cometa perihelium occupat.

150. Hinc etiam cometæ perigæum ejusque tempus determinabitur. Cum enim detur tempus inter observationem primam & tertiam interceptum, quo scilicet data area r R S, à cometa radio ad solem ducto describitur, data quoque erit area uno die similiter descripta. Præterea datur r, locus cometæ in observatione primâ, quare dabuntur loca cometæ in proprio orbe ad dies singulos. Sed dantur loca telluris in orbitâ suâ, notusque est situs mutuus inter telluris orbitam & cometæ trajectoriam. Unde innotescet tempus quo cometa est terræ proximus, hoc est, tempus quo cometa in perigæo versatur.

Exem-

DE MUNDI SYSTEMATE.

Exemplum.

Proponatur cometa anni 1680. Hujus motum à *Flamſtedio* obſervatum & ex obſervationibus computatum, atque ab *Halleio* ex iiſdem obſervationibus correctum, tabula ſequens exhibet.

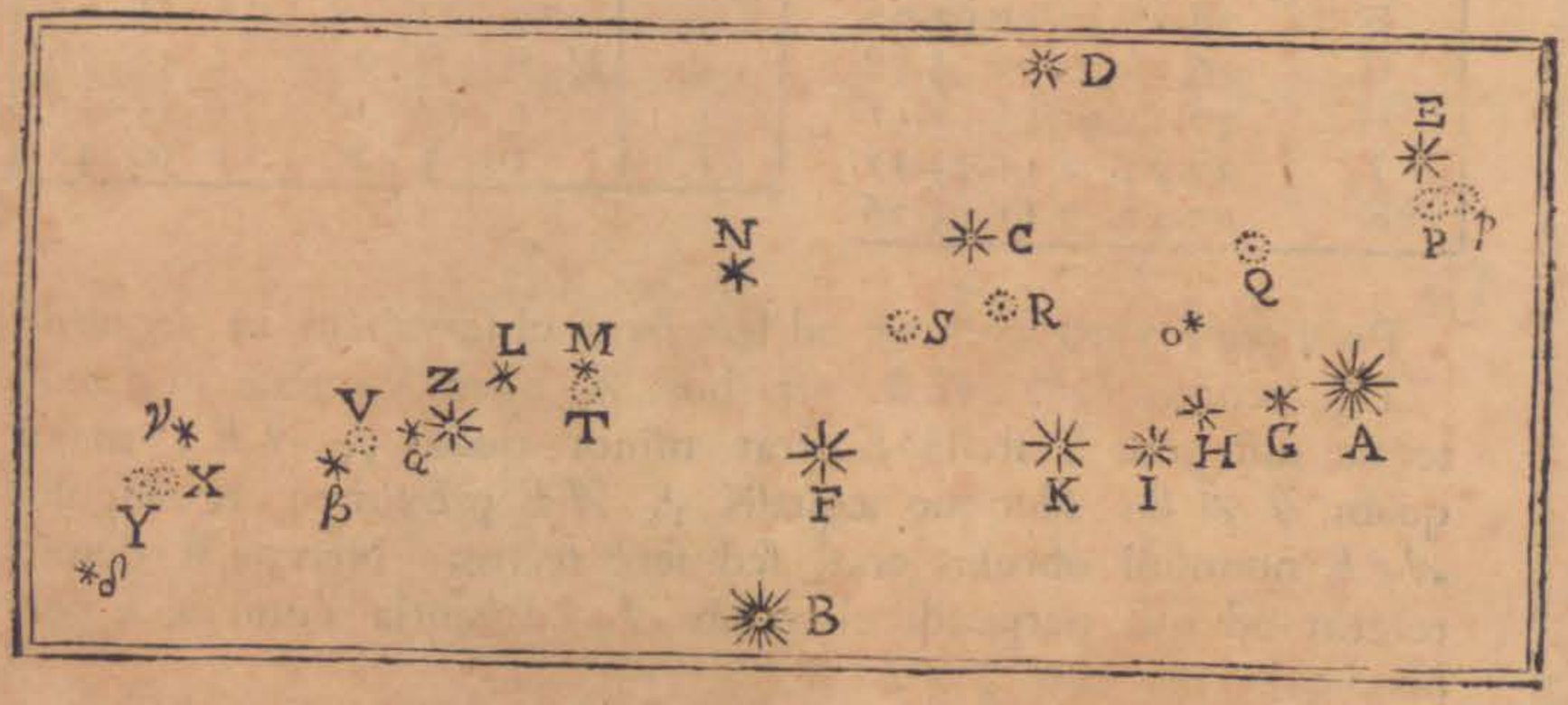
	Tem. appar.	Tem. verum	Long. Solis.	Cometæ Longitudo	Cometæ Lat. bor.
	h. ′	h. ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680. *Dec.* 12	4 . 46	4 . 46 . 0	♍ 1 . 51 . 23	♍ 6 . 32 . 30	8 . 28 . 0
21	6 . 32½	6 . 36 . 59	11 . 6 . 44	♒ 5 . 8 . 12	21 . 42 . 13
24	6 . 12	6 . 17 . 52	14 . 9 . 26	18 . 49 . 23	25 . 23 . 5
26	5 . 14	5 . 20 . 44	16 . 9 . 22	28 . 24 . 13	27 . 0 . 2
29	7 . 55	8 . 3 . 2	19 . 19 . 43	♓ 13 . 10 . 41	28 . 9 . 58
30	8 . 2	8 . 10 . 26	20 . 21 . 9	17 . 38 . 20	28 . 11 . 53
1681. *Jan.* 5	5 . 51	6 . 1 . 38	26 . 22 . 18	♈ 8 . 48 . 53	26 . 15 . 7
9	6 . 49	7 . 0 . 53	♒ 0 . 29 . 2	18 . 44 . 4	24 . 11 . 56
10	5 . 54	6 . 6 . 10	1 . 27 . 43	20 . 40 . 50	23 . 43 . 52
13	6 . 56	7 . 8 . 55	4 . 33 . 20	25 . 59 . 48	22 . 17 . 28
25	7 . 44	7 . 58 . 42	16 . 45 . 36	♉ 9 . 35 . 0	17 . 56 . 30
30	8 . 7	8 . 21 . 53	21 . 49 . 58	13 . 19 . 51	16 . 42 . 18
Feb. 2	6 . 20	6 . 34 . 51	24 . 46 . 59	15 . 13 . 53	16 . 4 . 1
5	6 . 50	7 . 4 . 41	27 . 49 . 51	16 . 59 . 6	15 . 27 . 3

His adde obſervationes quaſdam è noſtris.

	Tem. appar.	Cometæ Longitudo	Cometæ Lat. bor.
1681. *Feb.* 25	8h . . 30′	♉ 26° . 18′ . 35″	12° . 46′ . 46″
27	8 . 15	27 . 4 . 30	12 . 36 . 12
Mar. 1	11 . 0	27 . 52 . 42	12 . 23 . 40
2	8 . 0	28 . 12 . 48	12 . 19 . 38
5	11 . 30	29 . 18 . 0	12 . 3 . 16
7	9 . 30	♊ 0 . 4 . 0	11 . 57 . 0
9	8 . 30	0 . 43 . 4	11 . 45 . 52

Hæ obſervationes teleſcopio ſeptupedali, & micrometro filiſque in foco teleſcopii locatis peractæ ſunt: quibus inſtrumentis

tis & positiones fixarum inter se & positiones cometæ ad fixas determinavimus. Designet *A* stellam quartæ magnitudinis in sinistro calcaneo Persei (*Bayero o*) *B* stellam sequentem tertiæ magnitudinis in sinistro pede (*Bayero ſ*) & *C* stellam sextæ magnitudinis (*Bayero n*) in talo ejusdem pedis, ac *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *Z*, α, β, γ, δ stellas alias minores in eodem pede.



Sintque *p*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, *X*, loca cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantiâ *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$ *CD* $23\frac{2}{5}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AI* $27\frac{7}{12}$, *BI* $52\frac{1}{6}$, *CI* $36\frac{7}{12}$, *DI* $53\frac{5}{11}$ *AK* $38\frac{2}{3}$ *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $50\frac{7}{8}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta transibat inter stellas *D* & *E*, sic ut distantia stellæ *D* ab hâc rectâ esset $\frac{1}{6}$ *CD*. *LM* erat ad *LN* ut 2 ad 9, & producta transibat per stellam *H*. His determinabantur positiones fixarum inter se.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Tandem *Poundius* noſter iterum obſervavit poſitiones harum fixarum inter ſe, & earum longitudines & latitudines in tabulam ſequentem retulit.

Fixarum	Longitudines.			Lat. boreæ.		
	°	′	″	°	′	″
A	♉ 26.	41.	50	12.	8.	36
B	28.	40.	23	11.	17.	54
C	27.	18.	30	12.	40.	25
E	26.	27.	17	12.	52.	7
F	28.	28.	37	11.	52.	22
G	26.	56.	8	12.	4.	58
H	27.	11.	45	12.	2.	1
I	27.	25.	2	11.	53.	11
K	27.	42.	7	11.	53.	26

Fixarum	Longitudines.			Lat. boreæ.		
	°	′	″	°	′	″
L	♉ 29.	33.	34	12.	7.	48
M	29.	18.	54	12.	7.	20
N	28.	48.	29	12.	31.	9
Z	29.	44.	48	11.	57.	13
α	29.	52.	3	11.	55.	48
β	♊ 0.	8.	23	11.	48.	56
γ	0.	40.	10	11.	55.	18
δ	1.	3.	20	11.	30.	42

Poſitiones vero cometæ ad has fixas obſervabam ut ſequitur. Die veneris *Feb.* 25. ſt. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p. m. cometæ in p exiſtentis diſtantia à ſtellâ E erat minor quam $\frac{3}{13}$ AE, major quam $\frac{1}{5}$ AE, ideoque æqualis $\frac{3}{14}$ AE proxime: & angulus ApE nonnihil obtuſus erat, ſed ferè rectus. Nempe ſi demitteretur ad pE perpendiculum ab A, diſtantia cometæ à perpendiculo illo erat $\frac{1}{3}$ pE.

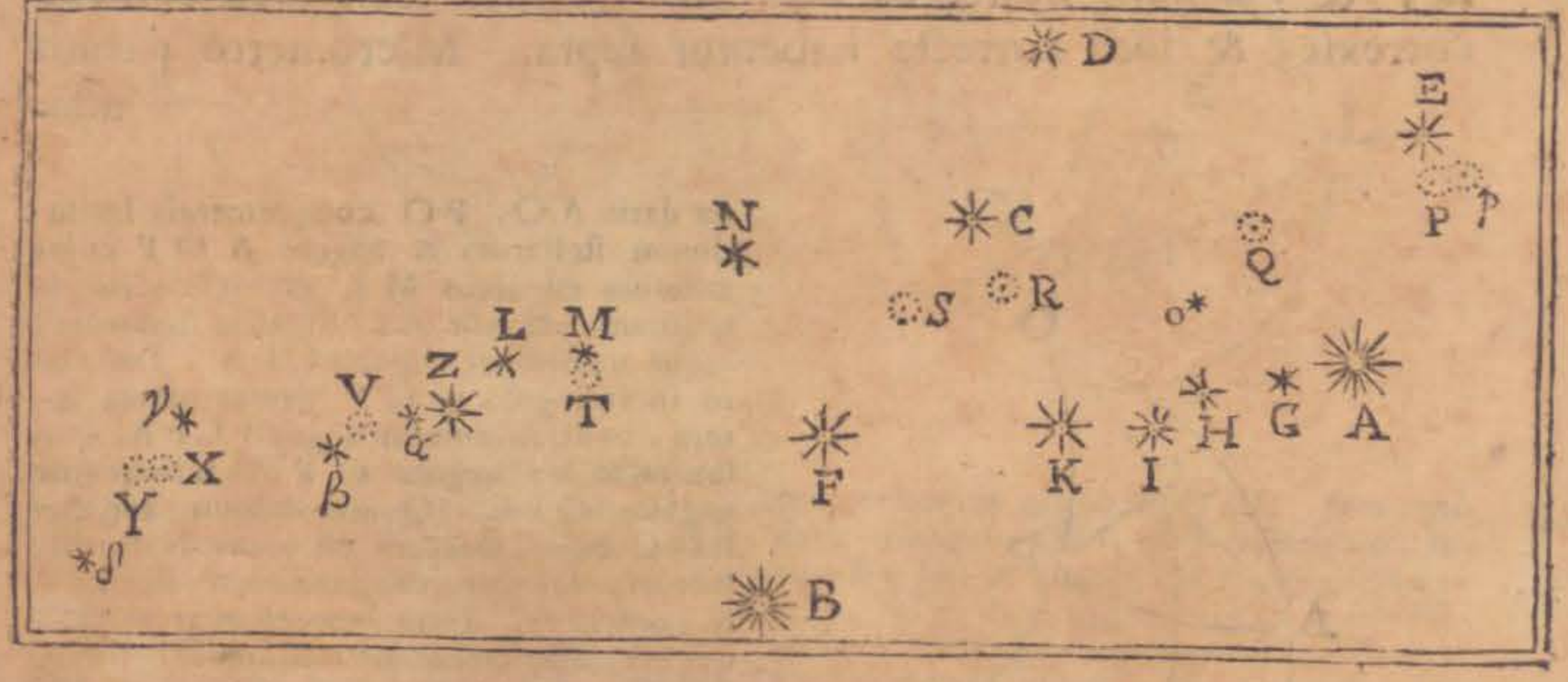
Eâdem nocte horâ $9\frac{1}{2}$, cometæ in P exiſtentis diſtantia à ſtellâ E erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ AE, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ AE, ideoque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ AE, ſeu $\frac{8}{39}$ AE quamproximè. A perpendiculo autem à ſtellâ A ad rectam PE demiſſo diſtantia cometæ erat $\frac{4}{5}$ PE.

Die ſolis *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ p. m. cometæ in Q exiſtentis diſtantia à ſtellâ O æquabat diſtantiam ſtellarum O & H, & recta QO producta tranſibat inter ſtellas K & B. Poſitionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accuratè definire non potui.

Die martis *Mart.* 1. hor. 11. p. m. cometa in R exiſtens, ſtellis

ſtellis *K* & *C* accuratè interjacebat, & rectæ *CRK* pars *CR* paulo major erat quam $\frac{1}{3}CK$, & paulo minor quam $\frac{1}{3}CK+\frac{1}{18}CR$, ideoque æqualis $\frac{1}{3}CK+\frac{1}{15}CR$ ſeu $\frac{16}{45}CK$. LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

Die mercurii *Mart.* 2. hor. 8. p. m. cometæ exiſtentis in *S* diſtantia à ſtellâ *C* erat $\frac{4}{9}FC$ quamproximè. Diſtantia ſtellæ *F* à rectâ *CS* producta erat $\frac{1}{24}FC$; & diſtantia ſtellæ *B* ab eâdem rectâ, erat quintuplo major quam diſtantia ſtellæ *F*. Item recta *NS* producta tranſibat inter ſtellas *H* & *I*, quintuplo vel ſextuplo propior exiſtens ſtellæ *H* quam ſtellæ *I*.



Die ſaturni *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$. p. m. cometâ exiſtente in *T*, recta *MT* æqualis erat $\frac{1}{2}ML$, & recta *LT* producta tranſibat inter *B* & *F*, quadruplo vel quintuplo propior *F* quam *B*, auferens à *BF* quintam vel ſextam ejus partem verſus *F*. Et *MT* producta tranſibat extra ſpatium *BF* ad partes ſtellæ *B*, quadruplo propior exiſtens ſtellæ *B* quam ſtellæ *F*. Erat *M* ſtella perexigua quæ per teleſcopium videri vix potuit, & *L* ſtella major quaſi magnitudinis octavæ.

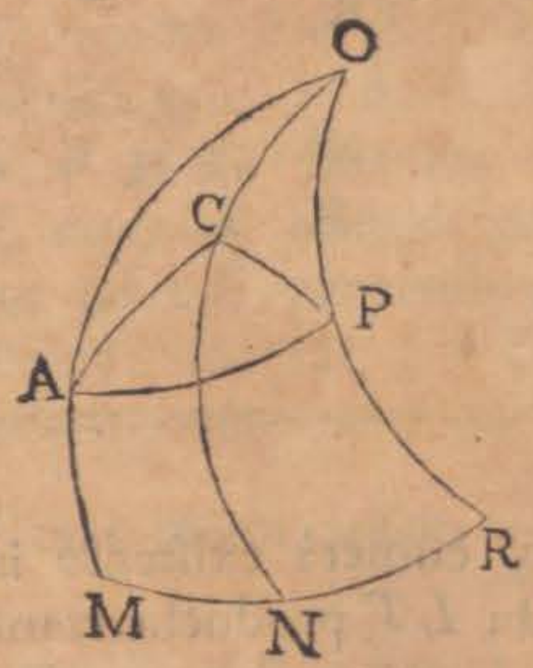
Die lunæ *Mart.* 7 hor $9\frac{1}{2}$ p. m. cometæ exiſtente in *V*, recta *V*α producta tranſibat inter *B* & *F*, auferens à *BF* verſus *F* $\frac{1}{10}BF$, & erat ad rectam *V*β ut 5 ad 4. Et diſtantia cometæ à rectâ αβ erat $\frac{1}{2}V\beta$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Die mercurii *Mart.* 9. hora $8\frac{1}{2}$ p. m. cometa existente in *X*, recta ♑ *X* æqualis erat $\frac{1}{4}$ ♑ ☉, & perpendiculum demissum à stellâ ☉ ad rectam ♑ *X* erat $\frac{2}{5}$ ♑ ☉.

Eâdem nocte horâ 12, cometa existente in *Y*, recta ♑ *Y* æqualis erat $\frac{1}{3}$ ♑ ☉, aut paulo minor, puta $\frac{5}{16}$ ♑ ☉, & perpendiculum demissum à stellâ ☉ ad rectam ♑ *Y* æqualis erat $\frac{1}{6}$ ♑ ☉ vel $\frac{1}{7}$ ♑ ☉ circiter. Sed cometa ob viciniam horizontis cerni vix potuit, nec locus ejus tam distinctè ac in præcedentibus definiri.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes derivabam (a) longitudines & latitudines cometæ, & *Poundius* noster ex correctis fixarum locis loca cometæ correxit, & loca correcta habentur supra. Micrometro parùm affa-



ex datis A O, P O complementis latitudinum stellarum & angulo A O P cujus mensura est arcus M R differentia longitudinum, dabitur A F distantia stellarum, atque innotescet angulus O P A. Jam verò in triangulo A C P dantur omnia latera, unde invenietur angulus C P A, quo subtracto ex angulo O P A relinquetur angulus O P C. Quare dabitur angulus P O C cujus mensura est arcus N R differentia scilicet longitudinum stellæ P & cometæ C. Item innotescet arcus O C, qui est complementum latitudinis cometæ. Eâdem prorsus ratione, si observentur distantiæ cometæ à duabus fixis quarum ascensiones rectæ & declinationes notæ sunt, indè colligentur ascensio recta & declinatio cometæ.

149. (a) 149. * *Longitudines & latitudines.* Si observentur distantiæ cometæ à duabus fixis quarum longitudines & latitudines notæ sunt, invenientur cometæ longitudo & latitudo ad tempus observationis. Referat M R, portionem Ecclipticæ cujus polus O, sint A, P duæ stellæ quarum longitudines & latitudines datæ sunt, sitque C cometa cujus distantia à duabus stellis A, P nota sit. In triangulo A O P,

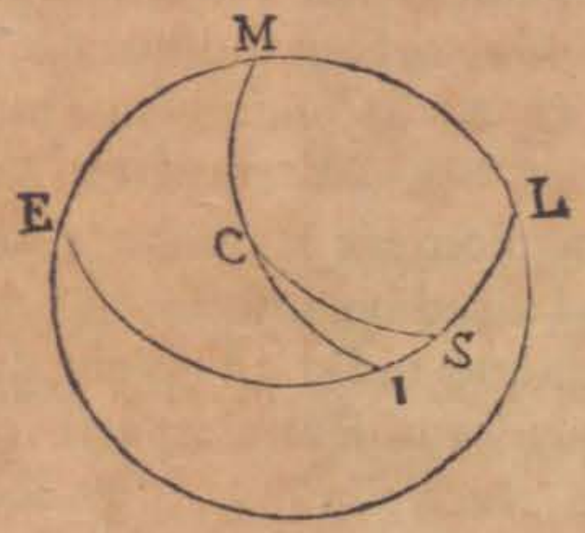
150. Datis declinatione & ascensione rectâ alicujus stellæ fixæ, inveniri possunt declinatio & ascensio recta cometæ, modò tamen stella & cometa transire vicissim possint per campum telescopii immoti aut alio quocumque modo obtineatur differentia declinationis & ascensionis rectæ inter fixam & cometam (39 lib. 3.) & hinc dabuntur cometæ longitudo & latitudo (17. lib. 3.)

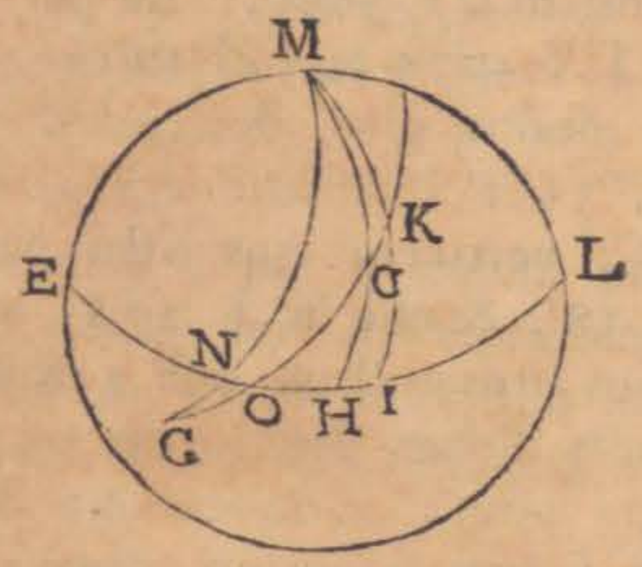
151. Datis cometæ longitudine & latitudine, simulque notâ longitudine solis, datur distantia cometæ à sole. Sit enim E L portio Ecclipticæ, Sol in S, latitu-

do

affabrè conſtructo uſus ſum, ſed longitudinum tamen & latitudinum errores (quâtenus ex obſervationibus noſtris oriantur) minutum unum primum vix ſuperant. Cometa autem (juxta obſervationes noſtras) in fine motus ſui notabiliter deflectere cœpit boream verſus, à parallelo quem in fine menſis *Februarii* tenuerat. LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

Jam





do cometæ CI; in triangulo CIS, ad I rectangulo (7. lib. 3.) datur latus CI, itemque notum eſt latus IS differentia longitudinum ſolis & cometæ, ideóque innoteſcit diſtantia cometæ à ſole CS.

152. Si duobus diebus ſeſe invicem immediatè ſubſequentibus obſerventur longitudines H, I & latitudines CH, KI cometæ alicujus, dabitur arcus KC quem cometa motu diurno proprio deſcripſit. Quoniam enim in triangulo KMC, datur angulus quem metitur arcus IH longitudinum differentia, ſimulque nota ſunt latera KM, CM, quæ ſunt datarum latitudinum KI, CH complementa, innoteſcet arcus KC. Si verò altera latitudo fuerit auſtralis, putà CH, altera Borealis ut GN, latus GM eſt ſumma latitudinis GN & quadrantis NM, ac proinde etiam in hoc caſu dabitur arcus CG.

153. Iiſdem manentibus, inveniri poteſt nodus O orbitæ cometæ datis enim in triangulo MCK lateribus MC, MK, cum angulo intercepto M quem metitur longitudinum datarum differentia HI, dabitur angulus MKC, qui ex 180°. ſubductus, relinquit angulum OKI. Jam verò datis triangulo OKI, ad I rectangulo, latitudine IK, & angulo OKI, invenitur angulus IOK, daturque arcus OI, quo addito longitudini I, obtinetur diſtantia nodi O à principio arietis. Ex præcedentibus patet datis duabus aſcenſionibus rectis & declinationibus inveniri quoque motum cometæ proprium, inclinationem orbitæ ad æquatorem & punctum in quo orbita illa æquatorem interſecat. 152

154. Iiſdem poſitis ſit K locus cometæ primò obſervatus, à loco nodi O ſubtrahatur longitudo cometæ I, relinquetur arcus OI. Datis in triangulo KOI, ad I rectangulo, lateribus KI, OI, dabitur arcus KO quem cometa à primo obſervationis die uſque ad Ecclipticam deſcripſit. Jam verò arcus KO conferatur cum arcubus deſcriptis ab initio obſervationis cometæ in K, ad datum uſque aliquod momentum ſingulis diebus pro arbitrio aſſumptum. Hinc proportionali parte adhibitâ, circiter colligetur tempus quo cometa ſecuit Ecclipticam. Simili modo invenietur tempus quo trajecit æquatorem.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Jam ad orbem cometæ determinandum; ſelegi ex obſervationibus hactenus deſcriptis, tres quas *Flamſtedius* habuit *Dec.* 21. *Jan.* 5. & *Jan.* 25. (b) Ex his inveni *St* partium 9842,1 & *Vt* partium 455, quales 10000 ſunt ſemidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam aſſumendo *tB* partium 5657, inveni *SB* 9747, *BE* primâ vice 412, S_α 9503, $t\lambda$ 413: *BE* ſecundâ vice 421, *OD* 10186, *X* 8528,4 *MP* 8450, *MN* 8475, *NP* 25. Unde ad operationem ſecundam collegi diſtantiam *tb* 5640. Et per hanc operationem tandem diſtantias *TX* 4775 & *τZ* 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus deſcendentem in ☋ & aſcendentem in ♈ 1 gr. 53′; inclinationem plani ejus ad planum eclipticæ 61 gr. 20′ $\frac{1}{3}$; verticem ejus (ſeu perihelium cometæ) diſtare à nodo 8 gr. 38′, & eſſe in ♐ 27 gr. 43′ cum latitudine auſtrali 7 gr. 34′; & ejus latus rectum eſſe 236,8, areamque radio ad ſolem ducto ſingulis diebus deſcriptam 93585, quadrato ſemidiametri orbis magni poſito 100000000; cometam verò in hoc orbe ſecundum ſeriem ſignorum proceſſiſſe, & *Decemb.* 8d. 0h. 4′. p. m. in vertice orbis ſeu perihelio fuiſſe. Hæc omnia per ſcalam partium æqualium & chordas angulorum ex tabulâ ſinuum naturalium collectas determinavi graphicè; conſtruendo ſchema ſatis amplum, in quo videlicet ſemidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis eſſet digitis 16 $\frac{1}{3}$ pedis *Anglicani*.

Tan-

155. Si cometa primò obſervetur in eâdem rectâ cum duabus fixis, deinde in aliâ quoque rectâ cum duabus aliis fixis obſervetur, accuratè trajectis per quatuor illas ſtellas duobus filis in ſuperficie globi cœleſtis, interſectio filorum determinabit locum cometæ pro tempore obſervationis. Si eodem modo definiantur alia cometæ loca, illius ſemita in ſuperficie globi cœleſtis delineabitur.

156. Accuratè deſignatis in ſuperficie globi cometæ locis, filum duobus locis applicatum per cætera omnia propèmodum tranſire videbitur; Hæc igitur loca ferè ſunt in peripheriâ circuli maximi, ideóque comera ex terrâ in circuli maximi peripheriâ incedere apparebit. Quare ſi filum per duo loca tranſiens extendatur donec Ecclipticam & æquatorem ſecet, habebuntur locus nodi, & inclinatio orbitæ cometicæ, ſimulque punctum in quo cometa trajicit æquatorem.

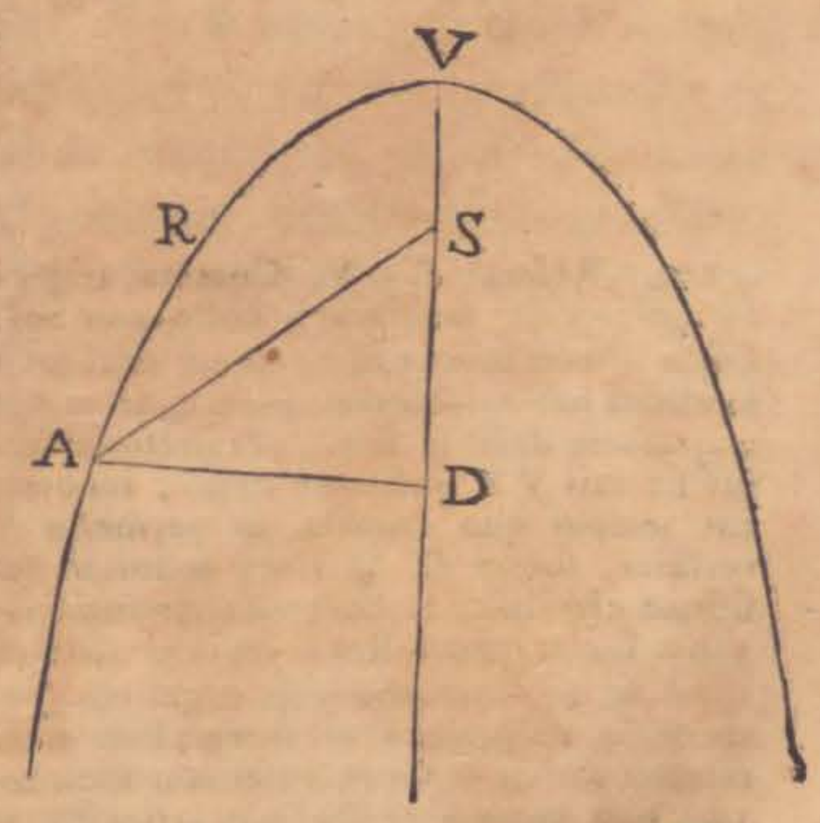
(b) * *Ex his inveni.* Quâ ratione ſequentes determinationes poſſint inveniri vel graphicè vel arithmeticè, patet ex conſtructione prop. præced. & ex iis quæ huic propoſitioni addidimus.

Tandem ut conſtaret an cometa in orbe ſic invento verè moveretur, collegi per operationes partim arithmeticas partim graphicas loca cometæ in hoc orbe ad obſervationum quarundam tempora: uti in tabulâ ſequente videre licet.

	Diſtant. Comet. à Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect	Long. Obl.	Lat. Obl	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr.	gr.	gr. ′	gr. ′	′	′
Dec. 12	2792	♍ 6 . 32′	8 . 18 $\frac{1}{2}$	♍ 6.31 $\frac{1}{5}$	8.26	+ 1	− 7 $\frac{1}{2}$
29	8403	♐ 13 . 13 $\frac{2}{3}$	28 . 0	♐ 13.11 $\frac{3}{4}$	28.10 $\frac{1}{12}$	+ 2	− 10 $\frac{1}{12}$
Feb. 5	16669	♉ 17 . 0	15 . 29 $\frac{2}{3}$	♉ 16.59 $\frac{7}{8}$	15.27 $\frac{2}{5}$	+ 0	+ 2 $\frac{1}{4}$
Mar. 5	21737	29 . 19 $\frac{3}{4}$	12 . 4	29.20 $\frac{6}{7}$	12. 3 $\frac{1}{2}$	− 1	+ $\frac{1}{2}$

Poſtea vero *Halleius* noſter orbitam (c) per calculum arithmeticum accuratiùs determinavit, quam per deſcriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum nodorum in ☋ & ♍ 1gr. 53′, & inclinationem plani orbitæ ad eclipticam 61gr. 20′

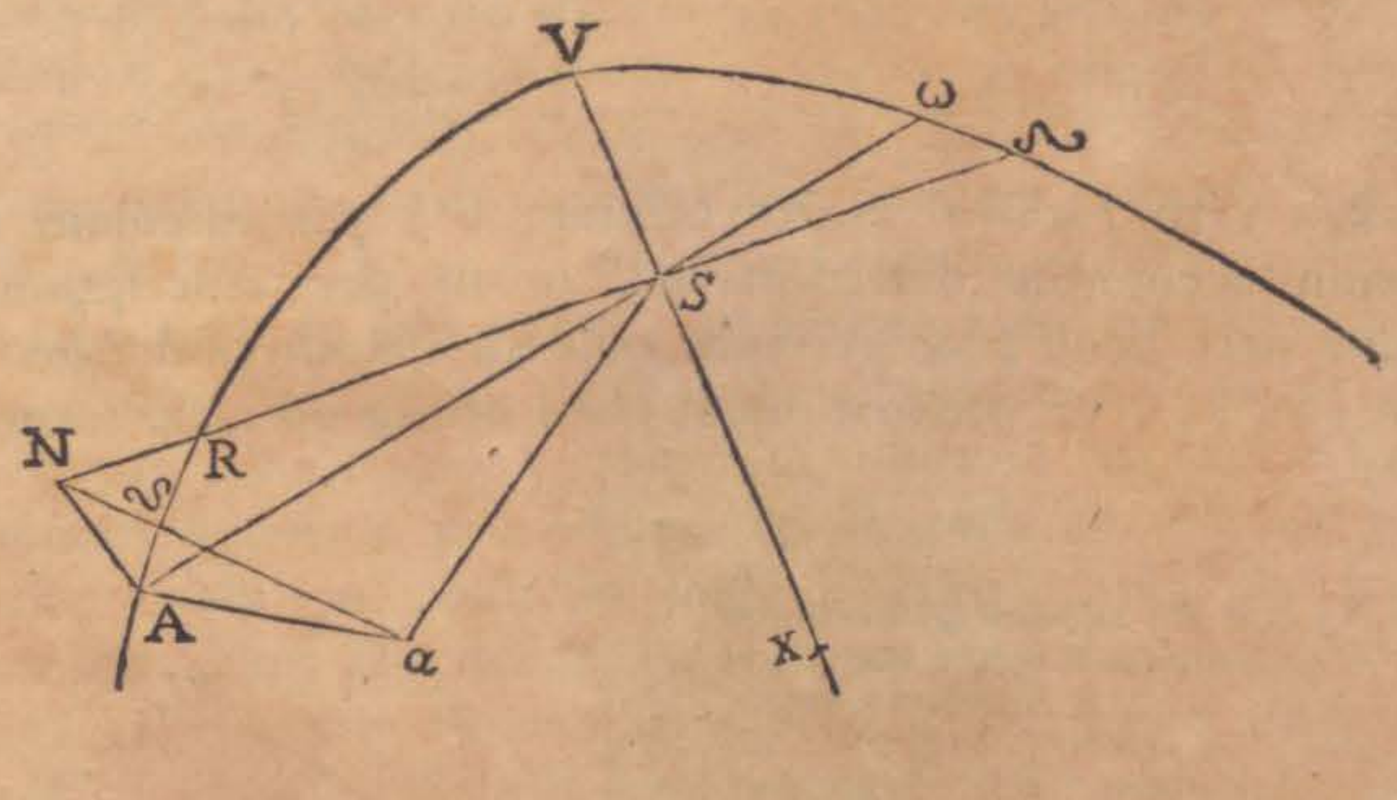
(c) 157. * *Per calculum arithmeticum.* Calculi hujus inſtituendi methodum exponemus. Sit S Sol, V R A orbita cometæ parabolica, cujus vertex V, ſitque VS, diſtantia umbilici à vertice = *f*, erit parabolæ latus rectum principale = 4*f*. Fiat A D = *x*, erit ſpatium V R A S = $\frac{x^3 + 12f^2x}{24f}$ (140). Ponatur area illa dato rectilineo æqualis putà *bb*, habebitur æquatio $24fbb = x^3 + 12f^2x$. Reſolutâ hâc æquatione cubicâ per vulgares algebræ regulas, vel per conſtructionem geometricam, adhibitis parabolâ & circulo, innoteſcet ordinatim applicata A D. Datâ autem A D, dabitur V D, (per theor. 2. de parab.) quare nota quoque erit recta compoſita ex D V & V S, cui æqualis eſt recta S A, (ibid.), ideóque recta illa dabitur magnitudine. Præterea datur etiam D A, quare nota eſt ratio inter S A & A D, id eſt, inter radium & ſinum rectum anguli A S D, quem ſcilicet S A cum axe comprehendit, ideóque datur angulus ille. Sed data eſt S A longitudine, quare rectæ S A longitudo & inclinatio ad axem] calculo determinari poſſunt.



DE MUNDI SYSTEMATE.

$20'\frac{1}{3}$, ut & tempus perihelii cometæ *Decemb.* $8^{d}.\ 0^{h}.\ 4'$: distantiam vero perihelii à nodo ascendente in orbitâ cometæ mensuratam invenit esse $9^{gr}.\ 20'$, & latus rectum parabolæ esse 2430 partium, existente mediocri solis à terrâ distantiâ partium 100000. Et ex his datis, calculo itidem arithmetico accuratè instituto, loca cometæ ad observationum tempora computavit, ut sequitur.

Tem-



158. 158. Referat ☊ ω V, Cometæ trajectoriam in cujus umbilico S collocatur Sol, sitque ω punctum quod cometa occupavit in aliquâ harum observationum quarum ope trajectoria definita fuit. Trajectoriæ hujus sit axis V X positione datus; innotescat tempus quo cometa in perihelio V versatur, sitque ☊ ☋ linea nodorum positione cognitâ. Si cometæ trajectoria inventa fuerit parabolica, capiatur spatium quod sit ad spatium ω V S, cognitum (per theor. 4. de parab.) ut intervallum inter tempus datum & suprà inventum momentum quo cometa perihelium attingit, ad intervallum inter prædictum momentum & observationem cometæ in ω; ponatur spatium illud dato rectilineo, puta *b b*, æquale. Deindè (157.) ipsi *b b* æquale fiat spatium parabolicum V R A S, & inveniatur tam positio quam magnitudo rectæ S A respectu S V, cujus positio & magnitudo respectu distantiæ aphelii terræ à sole priùs notæ sunt. At si cometæ trajectoria deprehendatur elliptica, per methodos in prop. 31. lib. 1. expositas, ducatur recta SA, talis ut area V R A S, sit ad totam ellipseos aream, sicut intervallum inter tempus datum & momentum quo perihelium occupat integrum cometæ tempus periodicum quod ex dato orbitæ cometicæ axe principali cognitum est, dabiturque rectâ S A tam positione quam magnitudine. Jam verò in utroque casu ex A ad nodorum lineam ☋ ☊ erigatur normalis A N, rectæ ☋ ☊ occurrens in N; ex eodem A, ad Ecclipticæ planum demittatur perpendicu-

lum

Tempus verum.		Distantia Cometæ à ☉	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in. Long	Lat.
d.	h.		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec. 12.	4.46	28028	♍ 6.29.25	8.26. 0 Bor.	− 3. 5	− 2. 0
21.	6.37	61076	♒ 5. 6.30	21.43.20	− 1.42	+ 1. 7
24.	6.18	70008	18.48.20	25.22.40	− 1. 3	− 0.25
26.	5.21	75576	28.22.45	27. 1.36	− 1.28	+ 0.44
29.	8. 3	14021	♓ 13.12.40	28.10.10	+ 1.59	+ 0.12
30.	8.10	86661	17.40. 5	28.11.20	+ 1.45	− 0.33
Jan. 5.	6. 1½	101440	♈ 8.49.49	26.15.15	+ 0.56	+ 0. 8
9.	7. 0	110959	18.44.36	24.12.54	+ 0.32	+ 0.58
10.	6. 6	113162	20.41. 0	23.44.10	+ 0.10	+ 0.18
13.	7. 9	120000	26. 0.21	22.17.30	+ 0.33	+ 0. 2
25.	7.59	145370	♉ 9.33.40	17.57.55	− 1.20	+ 1.25
30.	8.22	155303	13.17.41	16.42. 7	− 2.10	− 0.11
Feb. 2.	6.35	160951	15.11.11	16. 4.15	− 2.42	+ 0.14
5.	7. 4½	166686	16.58.25	15.29.13	− 0.41	+ 2.10
25.	8.41	202570	26.15.46	12.48. 0	- 2.49	+ 1.14
Mar. 5.	11.39	216205	29.18.35	12. 5.40	+ 0.35	+ 2.24

Apparuit etiam hic cometa menſe *Novembri* præcedente & *Coburgi* in *Saxoniâ* à Dno. *Gottfried Kirch* obſervatus eſt diebus menſis hujus quarto, ſexto & undecimo, ſtylo veteri; & ex poſitionibus ejus ad proximas ſtellas fixas ope teleſcopii nunc bipedalis nunc decempedalis ſatis accuratè obſervatis, ac differentia longitudinum *Coburgi* & *Londini* graduum undecim & locis fixarum à *Poundio* noſtro obſervatis, *Halleius* noſter loca cometæ determinavit ut ſequitur.

No-

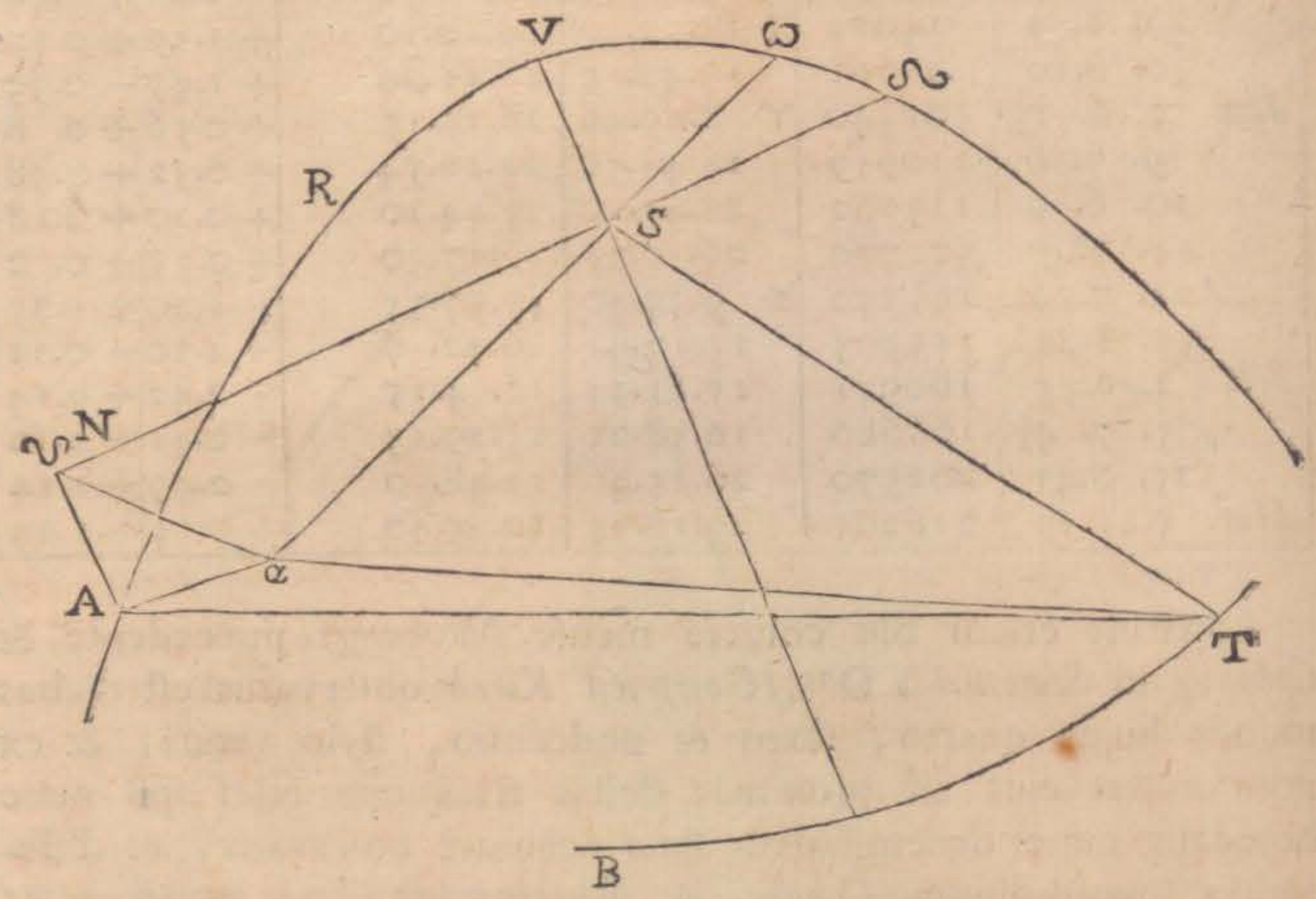
lum eidem rectæ occurrens in a, junganturque aN, aS, erit angulus ANa, inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecliptic æ ac proinde cognitus (146). Deindè quoniam noti ſunt anguli VSA, VSN, notus quoquè erit angulus NSA, horum ſumma vel differentia. Quarè in triangulo rectangulo NaA, datis latere NA, & angulo ANa, innoteſcent reliqua latera Na & Aa. Præterea in triangulo rectangulo SNa, dantur latera SN & Na, ideóque dabuntur latus Sa, & angulus NSa. Sed (145.) datur poſitio rectæ SN, quarè nota erit poſitio rectæ Sa, hoc eſt, cometæ longitudo heliocentrica, ſive locus cometæ heliocentricus ad Eclipticam reductus. Denique in triangulo SAa rectangulo ad a, nota ſunt omnia latera, ac proindè dabitur angulus ASa, latitudo cometæ heliocentrica. Ex his quoque patet viciſſim inveniri poſſe tempus quo cometa datum in orbe ſuo locum tenet. 158.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Novem. 3^d. 17^h. $2'$, tempore apparente *Londini*, cometa erat in ♌ 29gr. $51'$. cum lat. bor. 1gr. $17'$. $45''$,

Novem. 5^d. 15^h. $58'$ cometa erat in ♍ 3gr. $23'$ cum lat. bor. 1gr. $6'$.

No-



159. 159. Iisdem manentibus sit B T orbis magnus, sitque tellus in T ad tempus datum. Jungantur T A, T a, erit planum trianguli T A a, ad planum Ecclipticæ normale (prop. 18. lib. 11. elem.). Jam in triangulo T S a, in plano Ecclipticæ datur latus S a, (158.), notumque est latus S T, ex theoriâ telluris, & utrumque latus in partibus mediocris distantiæ telluris à sole expressum habetur. Præterea ob latera illa positione cognita, datur angulus T S a, ab illis comprehensus, quarè innotescent latus T a, & angulus S T a; Sed datur T S positione, nempe locus solis ad tempus datum, nota igitur est positio rectæ T a, hoc est, cometæ longitudo geocentrica, sive locus cometæ geocentricus ad Ecclipticam reductus. Deindè in triangulo rectangulo A a T, dantur latera duo in partibus mediocris distantiæ telluris à sole expressa (158 & ex theoriâ telluris). Quarè innotescet angulus A T a, hoc est, cometæ latitudo geocentrica, itemque dabitur hypothenusa T A, distantia scilicet cometæ à terrâ. Ex his itaque patet quomodo ad data observationum tempora, instituto calculo, loca cometæ possint computari. Clariss. Halleius iisdem usus principiis ad definiendos cometarum motus maximo labore tabulas constituxit. Harum tabularum normam videat Lector in ejusdem Celeberrimi Viri opusculo quod inscribitur: come-

Novem. 10d. 16h. 31′ cometa æqualiter distabat à stellis leonis σ ac τ *Bayero*; nondum verò attigit rectam eâsdem jungentem, sed parum abfuit ab eâ. In stellarum catalogo *Flamstediano* σ tunc habuit ♍ 14gr. 15′ cum lat. bor. 1gr. 41′ ferè, τ verò ♍ 17gr. 3½, cum lat austr. 0gr. 34′. Et medium punctum inter has stellas fuit ♍ 15gr. 39¼, cum lat. bor. 0gr. 33½. Sit distantia cometæ à rectâ illâ 10′ vel 12′ circiter, & differentia longitudinum cometæ & puncti illius medii erit 7′, & differentia latitudinum 7½, circiter. Et inde cometa erat in ♍ 15gr. 32′ cum lat. bor. 26′ circiter.

Observatio prima ex situ cometæ ad parvas quasdam fixas abundè satis accurata fuit. Secunda etiam satis accurata fuit. In tertia, quæ minùs accurata fuit, error minutorum sex vel septem subesse potuit, & vix major. Longitudo verò cometæ in observatione primâ, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat ♌ 29gr. 30′. 22″. latitudo borealis 1gr. 25′. 7″. & distantia ejus à sole 115546.

Porro *Halleius* observando quod cometa insignis intervallo annorum 575 quater apparuisset, scilicet mense *Septembri* post cædem *Julii Cæsaris*, anno *Christi* 531 *Lampadio* & *Oreste Coss.* anno *Christi* 1106 mense *Februario*, & sub finem anni 1680, idque cum caudâ longâ & insigni (præterquam quod sub mortem

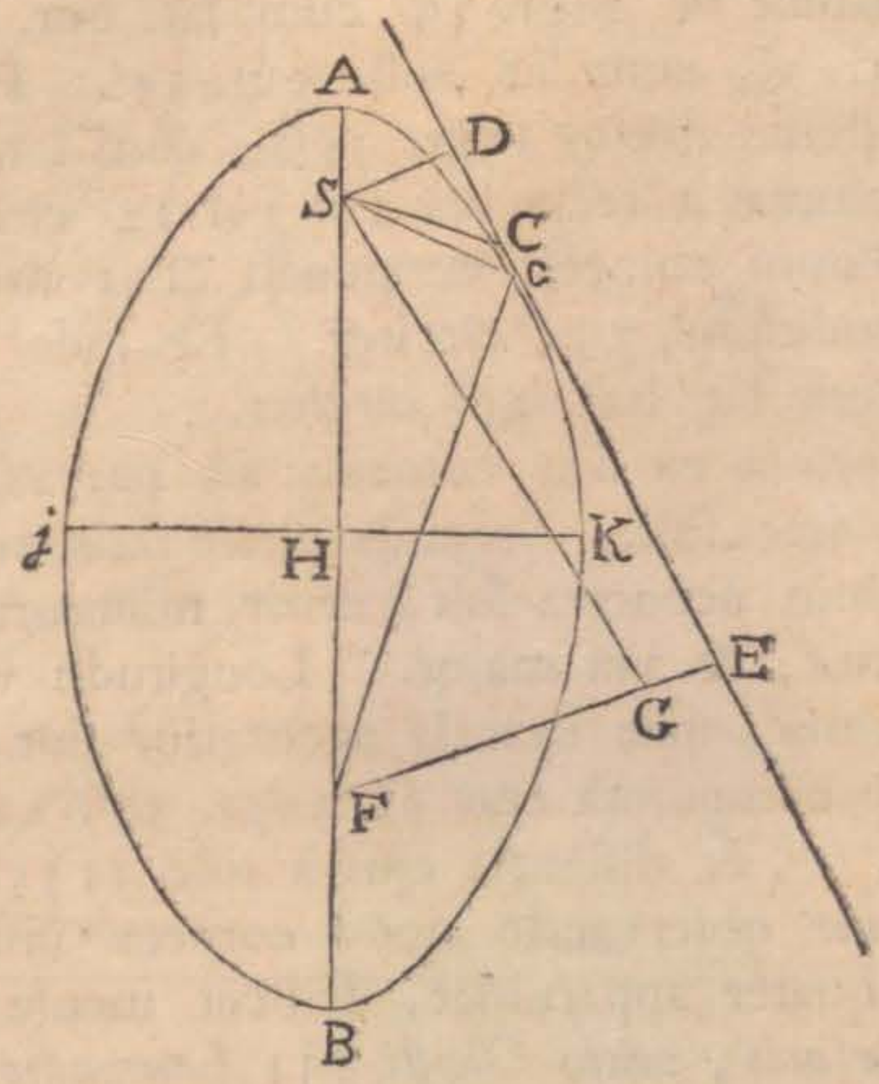
cometographia, seu Astronomiæ cometicæ Synopsis.

160. Si cometæ orbitas ellipticas describere & duas Keplerí leges observare ponantur, hoc est, si temporum periodicorum quadrata sint ut cubi mediocrium distantiarum à sole & areæ ellipticæ radiis ad solem ductis sint temporibus proportionales, facile determinabitur orbitæ cometicæ magnitudo, omnesque motûs cometarum circumstantiæ definientur, quod elegantissime præstitit D. Bouguer in monum. Paris. an. 1733. Clarissimi Viri methodum hic adjungemus.

Ex datis tribus observationibus à se invicem parum distantibus, inveniatur cometæ velocitas in aliquo orbitæ suæ loco, & exigua ejusdem orbitæ portio determinetur. Quoniam tria observationum tempora parum à se invicem distant, portio orbitæ hoc temporis intervallo descripta considerari poterit tanquam linea recta vel ipsamet tangens orbitæ motu uniformi percursa, ideóque portio hæc rectilinea orbitæ & ipsa cometæ velocitas inveniri poterunt per Lem 4. & per ea quæ huic lemmati addidimus. Idem quoque obtinebitur duplici elegantissimâ methodo quæ in monum. Paris. loco citato legitur. 160.

DE MUNDI SYSTEMATE.

tem *Cæsaris*, cauda ob incommodam telluris positionem minùs ap-



180. His præmissis, sit S sol, C c exiguæ orbitæ cometicæ portio ex tribus observationibus determinata. Quoniam nota est S C, distantia scilicet cometæ à sole atque etiam innotescit angulus S C D, dabitur perpendicularis S D, hujus anguli S C D sinus, sumpto S C, pro radio. Dicatur S C = a, S D = b, designet e, spatiolum C c, tempusculo f percursum, sitque x = A B, seu axi principali ellipseos quam cometa circà solem in umbilico S, positum integro tempore periodico t, describit. Ut determinentur quantitates x & t, conferre oportet motum cometæ cum motu cognito planetæ alicujus. Sit q axis principalis ellipseos quam planeta describit, n tempus periodicum, dicaturque p peripheria circuli cujus diameter est q. Quoniam axis principalis ellipseos est summa maximæ & minimæ distantiæ planetæ à sole, erit distantia mediocris planetæ à sole æqualis dimidio axi principali, hoc est $\frac{x}{2}$ * est distantia mediocris cometæ, & $\frac{1}{2}q$ distantia mediocris planetæ. Jam verò fiat (per leg. 1. Kepleri.) $\frac{1}{8}q^3 : n^2 = \frac{1}{8}x^3 : t^2$ hinc fit $t = \frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}}$. Invenienda superest altera expressio temporis periodici t. Quoniam C c, est portio orbitæ admodum exigua, sector C S c, considerari poterit instar trianguli evanescentis cujus area $\frac{1}{2}$ S D * C c = $\frac{1}{2}be$. Quarè, per alteram Kepleri

apparuiſſet:) quæſivit orbem ellipticum cujus axis major eſſet par-

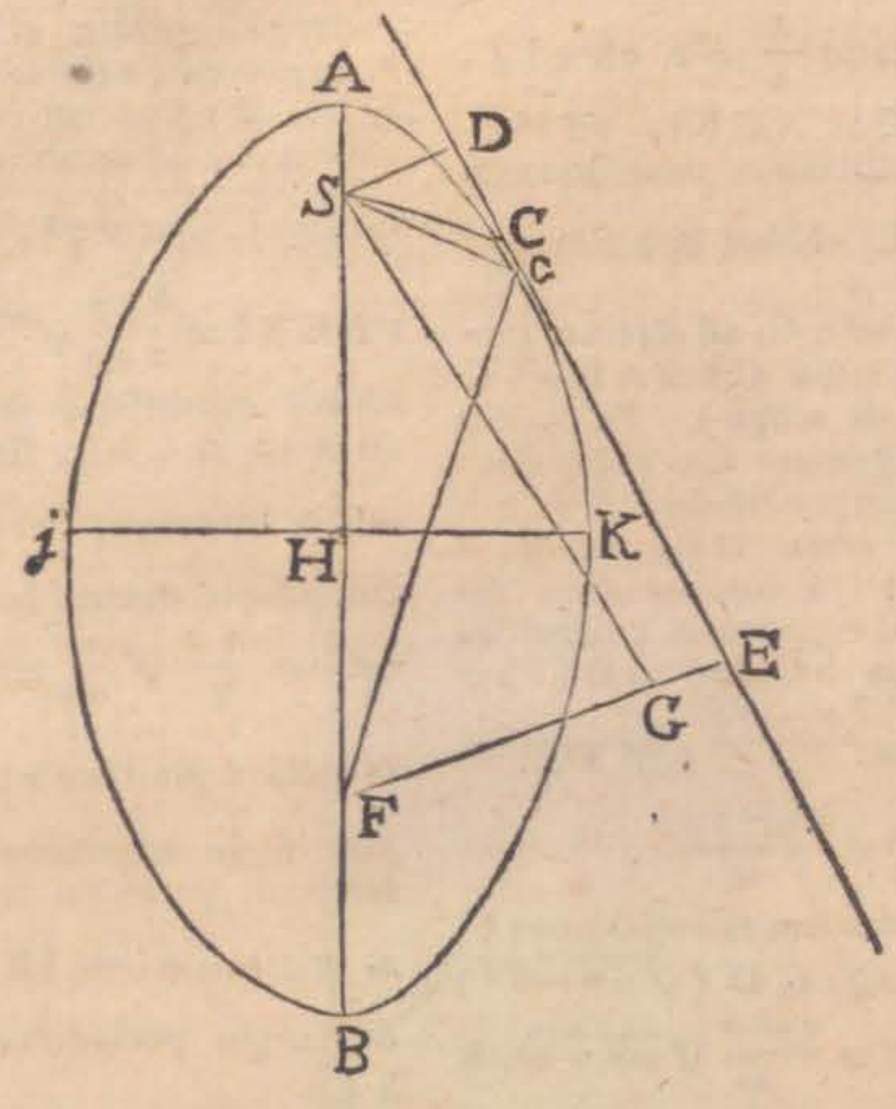
pleri regulam, dicatur $\frac{1}{2}be$ eſt ad f, ut area tota ellipſeos ACBI, ad integrum tempus periodicum t, unde habetur $t=\frac{f}{\frac{1}{2}be}\times ACBI$. Nunc ut obtineatur area ACBI, ex puncto C, ad alterum umbilicum F, agatur recta $CF=AB-SC=x-a$ (theor. 3. de ellipſi). Ex eodem umbilico F, ad tangentem Cc productam in E, demittatur perpendicularis FE, ſitque SG parallela rectæ DE, triangula rectangula SCD, FCE ſimilia ſunt, ob angulos SCD, FCE, æquales (theor. 4. de ellipſ.) ideóque $SC(a):SD(b)=FC(x-a):FE=\frac{bx-ab}{a}$, ac proindè FG, ſeu $FE-SD=\frac{bx-2ab}{a}$.

Deinde (ob eorumdem triangulorum ſimilitudinem) $SC(a):CD(\sqrt{a^2-b^2})=FC(x-a):CE=\frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-b^2}$, & hinc DE, vel SG, ſeu $CE+CD=\frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2-b^2}=\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}$. Sed $FG=\frac{bx-2ab}{a}$ (ex dem.), quarè eſt $SF=\frac{\sqrt{b^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2+a^2x^2-b^2x^2}}{a^2}=\sqrt{\frac{a^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2}{a^2}}$; ideóque diſtantia SH vel FH umbilici alterutrius à centro $=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2}{a^2}}$. Jam (ob triangulum SIH rectangulum in H, & per theor. 3. de ellipſi) erit $IH=\sqrt{\frac{1}{4}x^2-\frac{a^2x^2+4ab^2x-4a^2b^2}{4a^2}}=\frac{b}{a}\sqrt{ax-a^2}$ ac proindè axis minor $IK=\frac{2b}{a}\sqrt{ax-a^2}$, & factum ex axe majori in minorem $=\frac{2bx}{a}\sqrt{ax-a^2}$. Sed eſt factum illud area rectanguli orbitæ ellipticæ circumſcripti, & præterea (249. lib. 1.) area rectanguli hujus eſt ad aream ellipſeos ut quadratum axis AB, ad aream circuli huic quadrato inſcripti; quarè $q^2:\frac{1}{4}qp=\frac{2bx}{a}\sqrt{ax-a^2}:ACBI=\frac{bpx}{2aq}\sqrt{ax-a^2}$. Tandem in ultimâ expreſſione temporis periodici loco areæ ACBI, ſubſtituatur illius valor modo inventus, fiet $t=\frac{fpx}{aeq}\sqrt{ax-a^2}$, collatiſque duobus ipſius t valoribus, habebitur $\frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}}=\frac{fpx}{aeq}\sqrt{ax-a^2}$, & reductâ æquatione $x=\frac{af^2p^2q}{f^2p^2q-ae^2n^2}$. Jam ſi in expreſſionibus axis minoris & temporis periodici ſubſtituatur valor ipſius x, erit axis minor $IK=2be\sqrt{\frac{a}{f^2p^2q-ae^2n^2}}$ & tempus periodicum $=f^3p^3n\times\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{f^2p^2q-ae^2n^2}}$. Hinc patet determinari poſſe omnia quæ ad cometarum motus pertinent.

161. Si formulæ modò inventæ quantitatibus finitis & poſitivis exprimantur, orbita ACBI erit elliptica, ideóque cometa reditum habebit. Quia verò circulus eſt ſpecies quædam ellipſis, cometa circulum quoque poterit deſcribere, in eo autem caſu æquales erunt diſtantiæ SA, SC, SB, axiſque AB duplus fiet diſtantiæ SC, ac proinde $\frac{af^2p^2q}{f^2p^2q-ae^2n^2}=2a$, & hinc $e=\frac{fp}{n}\sqrt{\frac{q}{2a}}$, valor ſcilicet ſpatioli Cc à cometa tempore f percurſi. Si ea ſit cometæ velocitas ut fiat $ae^2n^2=f^2p^2q$, tunc infinito æquales evadent expreſſiones axis majoris, minoris & temporis periodici; quarè orbita cometæ mutabitur in ellipſim infinite oblongatam ſeu parabolam, ideóque cometa reditum non habet. Tandem ſi ae^2n^2, ſit major quam f^2

DE MUNDI SYSTEMATE.

partium 1382957, existente mediocri distantiâ telluris à sole par-



162. $f^2 p^2 q$, negativa fit expressio axis majoris & orbita abit in hyperbolam ac proindè cometa nunquam futurus est iterum conspicuus.

162. Ut prædictæ formulæ ad calculum reducantur, cometarum motus cum telluris motu conferatur. Sit q dupla distantia mediocris terræ à Sole, p peripheria circuli cujus diameter q, n annus sydereus seu intervallum 365. dier. 6^{ho}. $9'$: fiat mediocris distantia telluris à sole partium 10000000, ideòque $q = 20000000$, & $p = 62831853$, spatium Cc unius diei intervallo cometa ponatur descripsisse. His valoribus substitutis in formulis præcedentibus erit $x = \frac{591826599533557939 \times a}{591826599533557939 - ae^2}$ & $t = \frac{18592780951754022232 \times a^{\frac{3}{2}}}{591826599533557939 - ae^2}^{\frac{3}{2}}$. Jam nihil amplius faciendum superest, nisi ut in casibus particularibus loco a, & e, substituantur valores per observationem determinati. Utrum verò cometa rediturus sit vel non cognoscetur, si quantitas ae^2, minor majorve reperiatur numero constanti 591826599533557939. Minùs prolixus fiet calculus, si distantiam mediocrem telluris à sole ponamus partium 10000, tunc enim erit $x = \frac{591826599 \times a}{591826599 - ae^2}$, & $t = \frac{18592780951 \times a\sqrt{a}}{591826599 - ae^2 \times \sqrt{591826599 - ae^2}}$. Exemplo sit cometa qui annis 1729. 1730. apparuit. Ex observationibus Clariss. Cassini colligitur die 13ª. Octobris an. 1729. distantiam S C cometæ à sole, fuisse partium 42998, exiguam orbitæ portionem diei unius intervallo descriptam, fuisse partium $122\frac{452}{10000}$, atque angulum D C S, fuisse 82°. 11′. Hinc invenitur quantitas ae^2 major quam 591826599, ideóque

partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 (d) revolvi poſſit. Et ponendo nodum aſcendentem in ♋ 2gr. 2′; inclinationem plani orbis ad planum eclipticæ 61gr. 6′. 48″.; perihelium cometæ in hoc plano ☩ 22gr. 44′. 25″; tempus æquatum perihelii *Decem.* 7d. 23h. 9′; diſtantiam perihelii à nodo aſcendente in plano eclipticæ 9gr. 17′. 35″; & axem conjugatum 18481,2: (e) computavit motum cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus tam ex obſervationibus deducta quam in hoc orbe computata exhibentur in tabulâ ſequente.

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROB. XXI.

(161) orbita cometæ eſt hyperbola, ac proindè expectandus non eſt hujus cometæ regreſſus. Cæterùm hæc vera ſunt in eâ duntaxat hypotheſi quod cometæ duas Kepleri leges obſervent.

(d) 163. * *Revolvi poſſit.* Quadrata temporum periodicorum in cometis æquè ac in planetis ponantur ut cubi mediocrium diſtantiarum à ſole, tempus periodicum cometæ dicatur *t*, tempus periodicum terræ circà ſolem dicatur T, diſtantia mediocris terræ à ſole ſit D, axis major ellipſeos à cometa deſcriptæ ſit 2*a*, ideóque mediocris diſtantia cometæ à ſole = *a*, erit $T^2 : t^2 = D^3 : a^3$. Fiat D = 10000 partibus T = 365 dieb. 6hor. 9′ = 525969′, *t* = 575 annis, invenietur 2*a*, ſeu axis major ellipſeos à Cometâ deſcriptæ, partium 1382957, exiſtente mediocri diſtantiâ telluris à ſole earumdem partium 10000. in hoc igitur orbe cometa annis 575 revolvi poteſt. 163.

(e) * *Computavit motum cometæ.* Ratio computi ineundi patet ex num. 158. 159. vel etiam ex methodo Clariſſ. D. Bouguer num. 160. & ſeq.

Tem-

DE MUNDI SYSTEMATE.

Tempus verum	Long. obs.	Lat. Bor. obs.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h.	gr.	gr.	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Nov. 3.16.47″	♌ 29.51′. 0″	1.17.45″	♌ 29 51.22	1.17.32 B	+0.22	− 0.13
5.15.37	♍ 3.23. 0	1. 6. 0	♍ 3.24.32	1. 6. 9	+1.32	+0. 9
10.16.18	15.32. 0	0.27. 0	15.33. 2	0.25. 7	+1. 2	− 1.53
16.17. 0			♎ 8.16.45	0.53. 7 A		
18.21.34			18.52.15	1.26.54		
20.17. 0			28.10.36	1.53.35		
23.17. 5			♏ 13.22.42	2.29. 0		
Dec. 12. 4.46	♍ 6.32.30	8.28. 0	♍ 6.31.20	8.29. 6 B	− 1.10	+1. 6
21. 6.37	♒ 5. 8.12	21.42.13	♒ 5. 6.14	21.44.42	− 1.58	+2.29
24. 6.18	18.49.23	25.23. 5	18.47.30	25.23.35	− 1.53	+0.30
26. 5.21	28.24.13	27. 0.52	28.21.42	27. 2. 1	− 2.31	+1. 9
29. 8. 3	♓ 13.10.41	28. 9.58	♓ 13.11.14	28.10.38	+0.33	+0.40
30. 8.10	17.38.20	28.11.53	17.38.27	28.11.37	+0. 7	− 0.16
Jan. 5. 6. 1½	♈ 8.48.53	26.15. 7	♈ 8.48.51	26.14.57	− 0. 2	− 0.10
9. 7. 1	18.44. 4	24.11.56	18.43.51	24.12.17	− 0.13	+0.21
10. 6. 6	20.40.50	23.43.32	20.40.23	23.43.25	− 0.27	− 0. 7
13. 7. 9	25.59.48	22.17.28	26. 0. 8	22.16.32	+0.20	− 0.56
25. 7.59	♉ 9.35. 0	17.56.30	♉ 9.34.11	17.56. 6	− 0.49	− 0.24
30. 8.22	13.19.51	16.42.18	13.18.28	16.40. 5	− 1.23	− 2.13
Feb. 2. 6.35	15.13.53	16. 4. 1	15.11.59	16. 2. 7	− 1.54	− 1.54
5. 7. 4½	16.59. 6	15.27. 3	16.59.17	15.27. 0	+0.11	− 0. 3
25. 8.41	26.18.35	12.46.46	26.16.59	12.45.22	− 1.36	− 1.24
Mar. 1.11.10	27.52.42	12.23.40	27.51.47	12.22.28	− 0.55	− 1.12
5.11.39	29.18. 0	12. 3.26	29.20.11	12. 2.50	+2.11	− 0.26
9. 8.38	0.43. 4	11.45.52	♊ 0.42.43	11.45.35	− 0.21	− 0.17

Obſervationes cometæ hujus à principio ad finem non minùs congruunt cum motu cometæ in orbe jam deſcripto, quam motus planetarum congruere ſolent cum eorum theoriis, & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejuſque orbem hic rectè definitum fuiſſe.

In tabulâ præcedente omiſimus obſervationes diebus *Novembris* 16, 18, 20 & 23 ut minùs accuratas. Nam cometa his etiam temporibus obſervatus fuit. *Ponthæus* utique & ſocii, *Novem.* 17. ſt. vet. horâ ſextâ matutinâ *Romæ*, id eſt, hora 5. 10′ *Londini*, filis ad fixas applicatis, cometam obſervarunt in ♎ 8gr. 30′ cum latitudine auſtrali 0gr. 40′. Extant eorum obſervationes in tractatu, quem *Ponthæus* de hoc cometâ in lucem edidit. *Cellius*, qui aderat & obſervationes ſuas in epiſtolâ ad *D. Caſſinum* miſit, cometam eâdem horâ vidit in ♎ 8gr. 30′.

30′. cum latitudine auſtrali 0gr. 30′. Eâdem horâ *Galletius A. venioni* (id eſt, hora matutina 5. 42 *Londini*) cometam vidit in ♎ 8gr. ſine latitudine. Cometa autem per theoriam jam fuit in ♎ 8gr. 16′. 45″ cum latitudine auſtrali 0gr. 53′. 7″.

Nov. 18 horâ matutinâ 6. 30′ *Romæ* (id eſt, horâ 5, 40′ *Londini*) *Ponthæus* cometam vidit in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine auſtrali 1gr. 20′ *Cellius* in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine auſtrali 1gr. 00′. *Galetius* autem horâ matutinâ 5. 30′ *Avenioni* cometam vidit in ♎ 13gr. 00′, cum latitudine auſtrali 1gr. 00′. Et *R. P. Ango* in Academiâ *Flexienſi* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ (id eſt, horâ 5. 9′ *Londini*) cometam vidit in medio inter ſtellas duas parvas, quarum una media eſt trium in recta linea in virginis auſtrali manu *Bayero* ψ, & altera eſt extrema alæ *Bayero* θ. Unde cometa tunc fuit in ♎ 12gr. 46′. cum latitudine auſtrali 50′. Eodem die *Boſtoniæ* in *Novâ Angliâ* in latitudine 42½ graduum, horâ quintâ matutinâ, (id eſt *Londini* horâ matutinâ 9. 44′) cometa viſus eſt prope ♎ 14gr. cum latitudine auſtrali 1gr. 30′, uti à cl. *Halleio* accepi.

Nov. 19. hora mat. 4½ *Cantabrigiæ*, cometa (obſervante juvene quodam) diſtabat à ſpicâ ♍ quaſi 2gr. boreazephyrum verſus. Erat autem ſpica in ♎ 19gr. 23. 47″ cum lat. auſtr. 2gr. 1′. 59″. Eodem die hor. 5. mat. *Boſtoniæ* in *Novâ Angliâ*, cometa diſtabat à ſpica ♍ gradu uno, differentia latitudinum exiſtente 40′. Eodem die in Inſula *Jamaicâ*, cometa diſtabat à ſpicâ intervallo quaſi gradus unius. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Maryland*, in confinio *Virginiæ* in lat. 38½ gr., horâ quintâ matutinâ (id eſt, horâ 10ª *Londini*) cometam vidit ſupra ſpicam ♍, & cum ſpicâ propemodum conjunctum, exiſtente diſtantiâ inter eoſdem quaſi ¾ gr. Et (f) ex his obſervationibus inter ſe collatis colligo quod hora 9.44′ *Londini* cometa erat in ♎ 18gr. 50′ cum latitudine auſtrali 1gr. 25′. circiter. Cometa autem

(f) * *Ex his obſervationibus inter ſe collatis* via cometæ inter ſtellas determinatur, & hinc colliguntur cometæ longitudo & latitudo (149.) hor. 9. 44′ Londini, reductione ſcilicet factâ ad meridianum Londinenſem. 163.

DE MUNDI SYSTEMATE.

tem per theoriam jam erat in ♎ 18gr. 52′. 15″ cum latitudine australi 1gr. 26′. 54″.

Nov. 20. D. *Montenarus* Astronomiæ Professor *Paduensis*, horâ sextâ matutinâ *Venetiis* (id est, horâ 5. 10′ *Londini*) cometam vidit in ♎ 23gr. cum latitudine australi 1gr. 30. Eodem die *Bostoniæ*, distabat cometa à spicâ ♍, 4gr. longitudinis in orientem, ideoque erat in ♎ 23gr. 24′ circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & socii hor. mat. $7\frac{1}{4}$ cometam observarunt in ♎ 27gr. 50′ cum latitudine australi 1gr. 16′, *Cælius* in ♎ 28gr. *Ango* horâ quintâ matutinâ in ♎ 27gr. 45′, *Montenarus* in ♎ 27gr. 51′. Eodem die in insulâ *Jamaicâ* cometa visus est prope principium scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum spicâ virginis, id est, 2gr. 2′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* in *Indiâ Orientali*, (id est ad horam noctis præcedentis 11. 20′ *Londini*) capta est distantia cometæ à spicâ ♍ 7gr. 35′ in orientem. In lineâ rectâ erat inter spicam & lancem, ideoque versabatur in ♎ 26gr. 58′ cum lat. australi 1gr. 11′ circiter; & post horas 5 & 40′ (ad horam scilicet quintam matitunam *Londini*) erat in ♎ 28gr. 12′ cum lat. austr. 1gr. 16. Per theoriam vero cometa jam erat in ♎ 28gr. 10′. 36″, cum latitudine australi 1gr. 53′. 35″.

Nov. 22. Cometa visus est à *Montenaro* in ♍ 2gr. 33′. *Bostoniæ* autem in *Novâ-Angliâ* apparuit in ♍ 3gr. circiter, eâdem ferè cum latitudine ac prius, id est, 1gr. 30′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* cometa observabatur in ♍ 1gr. 50′; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* cometa erat in ♍ 3gr. 5′ circiter. Eodem die *Londini* hora mat. $6\frac{1}{2}$ *Hookius* noster cometam vidit in ♍ 3gr. 30′ circiter, idque in lineâ rectâ quæ transit per spicam virginis & cor leonis non exactè quidem, sed à lineâ illâ paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea à cometâ per spicam ducta, hoc die & sequentibus transibat per australe latus cordis leonis interposito perparvo intervallo inter cor leonis & hanc lineam. Linea recta per cor leonis & spicam virginis transiens, eclipticam secuit in ♍ 3gr. 46′; in angulo 2gr. 51′.

Et

Et ſi cometa locatus fuiſſet in hâc lineâ in ♍ 3gr. ejus latitudo fuiſſet 2gr 26′. Sed cum cometa conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil diſtaret ab hâc lineâ boream verſus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex obſervatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem ſpicæ ♍, eratque 1gr. 30′ circiter, & conſentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone* perpetuò augebatur, ideoque jam ſenſibiliter major erat quam 1gr. 30′. Inter limites autem jam conſtitutos 2gr. 26′ & 1gr. 30′, magnitudine mediocri latitudo erit 1gr. 58′ circiter. Cauda cometæ, conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad ſpicam ♍, declinans aliquantulum à ſtellâ iſtâ, juxta *Hookium* in auſtrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit ſenſibilis, & cauda æquatori fere parallela exiſtens, aliquantulum deflectebatur ab oppoſitione ſolis boream verſus.

Nov. 23. ſt. vet. horâ quintâ matutinâ *Noriburgi* (id eſt hora $4\frac{1}{2}$ *Londini*) D. *Zimmerman* cometam vidit in ♍ 8gr. 8′, cum latitudine auſtrali 2gr. 31′, captis ſcilicet ejus diſtantiis à ſtellis fixis.

Nov. 24. Ante ortum ſolis cometa viſus eſt à *Montenaro* in ♍ 12gr. 52′, ad boreale latus rectæ quæ per cor leonis & ſpicam virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam 2gr. 38′. Hæc latitudo, uti diximus, ex obſervationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuò augebatur; ideoque jam paulò major erat quam 1gr. 58′; & magnitudine mediocri, ſine notabili errore, ſtatui poteſt 2gr. 18′. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam & decreviſſe volunt, & *Cellius* & obſervator in *Novâ-Angliâ* eandem ferè magnitudinem retinuiſſe, ſcilicet gradus unius vel unius cum ſemiſſe. Craſſiores ſunt obſervationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præſertim quæ per azimuthos & altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores ſunt eæ quæ per poſitiones cometæ ad fixas à *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & obſervatore in *Novâ Angliâ*, & nonnunquam à *Ponthæo* & *Cellio* ſunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* cometa obſervabatur in ♍ 11gr. 45′; ideoque

DE MUNDI SYSTEMATE.

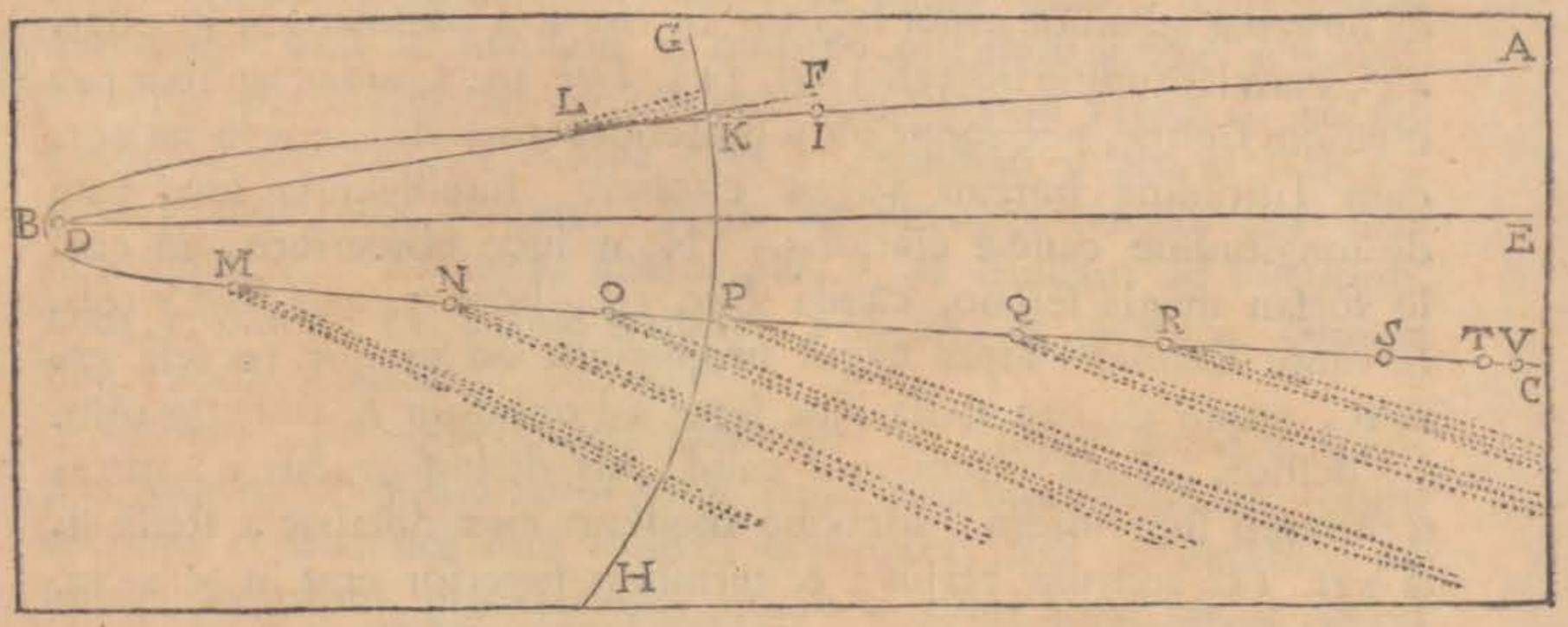
ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* erat in ♑ 13gr. circiter. Per theoriam vero cometa jam erat in ♑ 13gr. 22′. 42″.

Nov. 25. Ante ortum solis *Montenarus* cometam observavit in ♑ 17¾gr. circiter. Et *Cellius* observavit eodem tempore quod cometa erat in linea recta inter stellam lucidam in dextro femore virginis & lancem australem libræ, & hæc recta secat viam cometæ in ♑ 18gr. 36′. Per theoriam verò cometa jam erat in ♑ 18⅓gr. circiter.

Congruunt igitur hæ observationes cum theoriâ quâtenus congruunt inter se, & congruendo probant unum & eundem fuisse cometam, qui toto tempore à quarto die *Novembris* ad usque nonum *Martii* apparuit. Trajectoria cometæ hujus bis (g) secuit planum ecliptícæ, & propterea non fuit rectilinea. Ecliptícam secuit non in oppositis cœli partibus, sed in fine virginis & principio capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque cursus cometæ plurimum deflectebatur à circulo maximo. Nam & mense *Novembri* cursus ejus tribus saltem gradibus ab ecliptícâ in austrum declinabat, & postea mense *Decembri* gradibus 29 vergebat ab ecliptícâ in septentrionem partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in solem & redibat à sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut observavit *Montenarus*. Pergebat hic cometa per signa novem, à leonis scilicet ultimo gradu ad principium geminorum, præter signum leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; & nulla alia extat theoria, quâ cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maximè inæquabilis. Nam circa diem vigesimum *Novembris* descripsit gradus circiter quinque singulis diebus: dein motu retardato inter *Novemb.* 26. & *Decemb.* 12, spatio scilicet dierum quindecim cum semisse, descripsit gradus tantum 40; postea verò motu iterum accelerato, descripsit gradus ferè quinque singulis die-

163. (g) * *Bis secuit planum Ecclipticæ.* Tempus quo cometa secat Ecclipticam invenìri potest per num. 145. & 154.

diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria, quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probè respondet, quæque eadem observat leges cum theoriâ planetarum, & cum accuratis observationibus astronomicis accuratè congruit, non potest non esse vera. LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.



Cæterùm trajectoriam quam cometa descripsit, & caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano trajectoriæ delineatas exhibere: ubi *A B C* denotat trajectoriam cometæ, *D* solem, *D E* trajectoriæ axem, *D F* lineam nodorum, *G H* intersectionem sphæræ orbis magni cum plano trajectoriæ, *I* locum cometæ *Nov.* 4. *Ann.* 1680, *K* locum ejusdem *Nov.* 11, *L* locum *Nov.* 19, *M* locum *Dec.* 12, *N* locum *Dec.* 21, *O* locum *Decemb* 29, *P* locum *Jan.* 5. *sequent.* *Q* locum *Jan.* 25, *R* locum *Feb.* 5, *S* locum *Feb.* 25, *T* locum *Mar.* 5, & *V* locum *Mar.* 9. Observationes vero sequentes in caudâ definiendâ adhibui.

Nov. 4. & 6. Cauda nondum apparuit. *Nov.* 11. Cauda jam cœpta non nisi semissem gradus unius longa tubo decempedali visa fuit. *Nov.* 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30gr. longa, solique directè

DE MUNDI SYSTEMATE.

oppoſita in *Novâ-Angliâ* cernebatur, & protendebatur uſque ad ſtellam ♂, quæ tunc erat in ♍ 9gr. 54′. *Nov.* 19. In *Mary-land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. Cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam δ in aquilæ auſtrali alâ, & deſinebat prope ſtellas *A*, ω, *b* in tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♈ 19½gr. cum latitudine boreali circiter. *Dec.* 11. Cauda ſurgebat ad uſque caput ſagittæ (*Bayero* α, β,) deſinens in ♈ 26gr. 43′, cum latitudine boreali 38gr. 34′. *Dec.* 12. Cauda tranſibat per medium ſagittæ, nec longè ultra protendebatur, deſinens in ♒ 4gr. cum latitudine boreali 42½gr. circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12, hora 5. 40′ *Romæ* (obſervante *Ponthæo*) ſupra cygni uropygium ad gradus 10 ſeſe extulit; atque ab hac ſtellâ ejus latus ad occaſum & boream min. 45 deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat à ſtellâ illâ 2gr. 15′ auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♓ 22gr. cum latitudine boreali 61gr. Et hinc longa erat cauda 70gr. circiter. *Dec.* 21. Eadem ſurgebat fere ad cathedram *Caſſiopeiæ*, æqualiter diſtans à β & *Schedir*, & diſtantiam ab utrâque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, ideoque deſinens in ♈ 24gr. cum latitudine 47½gr. *Dec.* 29. Cauda tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54gr; ideoque deſinebat in ♉ 19gr. cum latitudine 35gr. *Jan.* 5. Cauda tetigit ſtellam π in pectore *Andromedæ* ad latus ejus dextrum, & ſtellam μ in ejus cingulo ad latus ſiniſtrum; & (juxta obſervationes noſtras) longa erat 40gr.; curva autem erat & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per ſolem & caput cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce ſatis ſenſibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce

ce tenuissimâ desinebat è regione stellæ « in latere *Persei*. Distantia termini caudæ à circulo solem & cometam jungente erat 3gr. 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}$gr. *Jan.* 25 & 26. Cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & nocte unâ & alterâ sequente ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissimâ & ægerrimè sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulò ultrà. Dirigebatur autem ejus axis ad lucidam in humero orientali aurigæ accuratè, ideoque declinabat ab oppositione solis boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. se caudam ad longitudinem graduum 12 vidisse scribit. *Feb.* 25. & deinceps cometa sine caudâ apparuit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua cometæ hujus phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit, quod corpora cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum planetarum. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes terræ, solis & planetarum, cometa hicce in transitu suo per viciniam solis statim dissipari debuisset. Est enim calor solis ut radiorum densitas, hoc est, reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à sole. Ideoque cum distantiâ cometæ à centro solis *Decemb.* 8. ubi in perihelio versabatur, esset ad distantiam terræ à centro solis ut 6 ad 1000 circiter, calor solis apud cometam eo tempore erat ad calorem solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æstivum solem, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si (i) recte conjector) quasi triplo vel quadruplo major quàm calor

(i) * *Si rectè conjector.* Hanc Newtoni conjecturam experimenta confirmant. In transact. philosoph. num. 270. describitur tabula caloris gradus exhibens. (Hujus tabulæ constructionem jam exposuimus in not. ad cor. 4. prop. 8. lib. 3.). Ex relatis ab autore experimentis colligitur calorem ferri, quantum levioris ignis auxilio fieri potuit, candefacti, circiter fuisse $2\frac{1}{2}$ majorem quam calor aquæ ebullientis. Hinc ignis vehementioris ope aucto calore ferri cadentis, rectè conjectatur Newtonus calorem hujus ferri quasi triplo vel quadruplo majorem fieri quam calor aquæ ebullientis. ¶. 1635.

DE MUNDI SYSTEMATE.

calor aquæ ebullientis; ideoque calor, quem terra arida apud cometam in perihelio verſantem ex radiis ſolaribus concipere poſſet, quaſi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omniſque materia volatilis ſtatim conſumi ac diſſipari debuiſſent.

Cometa igitur in perihelio ſuo calorem immenſum ad ſolem concepit, & calorem illum diutiſſimè conſervare poteſt. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem ſuum omnem ſpatio horæ unius in aëre conſiſtens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conſervaret in ratione diametri, propterea quod ſuperficies (ad cujus menſuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illâ ratione minor eſt pro quantitate materiæ ſuæ calidæ incluſæ. Ideoque globus ferri candentis huic terræ æqualis, id eſt, pedes plùs minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigeſceret. Suſpicor tamen quod duratio caloris, ob cauſas latentes, augeatur in minore ratione quam ea diametri: (k) & optarim rationem veram per experimenta inveſtigari.

Porrò notandum eſt quod cometa menſe *Decembri*, ubi ad ſolem modò incaluerat, caudam emittebat longe majorem & ſplendidiorem quam antea menſe *Novembri*, ubi perihelium nondum attigerat. Et univerſaliter caudæ omnes maximæ & fulgentiſſimæ è cometis oriuntur ſtatim poſt tranſitum eorum per regionem ſolis. Conducit igitur calefactio cometæ ad magnitudinem caudæ. (l) Et indè colligere videor quod cauda nihil aliud ſit quam vapor longe tenuiſſimus, quem caput ſeu nucleus cometæ per calorem ſuum emittit. Cæ-

163. (k) * *Et optarim rationem veram.* Clariſſ. Hermannus Boerhaave in elementis Chemiæ, diligentiſſimis experimentis ſe inveniſſe refert eò diutiùs calorem in corporibus retineri quo majora ſunt, cæteris paribus. Si autem corpora ejuſdem diametri ejuſdemque caloris, diverſæ ſint denſitatis, quæ denſiora ſunt, caloris quoque ſunt renactora; denſitas enim ignem coercet, illiuſque egreſſum ex intimis partibus retardat. Quia verò intimæ corporum partes innumeris modis variari atque inter ſe permiſceri poſſunt, hinc patet in ipſâ caloris conſervatione non leves varietates oriri poſſe. Hæ ſunt fortaſſe latentes cauſæ quæ Newtonum in eam ſuſpicionem induxerunt durationem ſcilicet caloris augeri in minori ratione quam eâ diametri.

(l) * *Et indè colligere videor.* Hanc ſententiam pluribus argumentis deinceps confirmat Newtonus.

Cæterùm de cometarum caudis triplex eſt opinio; eas vel jubar eſſe ſolis per tranſlucida cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius à capite cometæ in terram, vel denique nubem eſſe ſeu vaporem à capite cometæ jugiter ſurgentem & abeuntem in partes à ſole averſas. Opinio prima eorum eſt qui nondum imbuti ſunt ſcientiâ rerum opticarum. Nam jubar ſolis in cubiculo tenebroſo non cernitur, niſi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aërem ſemper volitantibus: ideoque in aëre fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum fortiùs ferit; in aëre clariore tenuius eſt & ægriùs ſentitur: in cœlis autem ſine materiâ reflectente nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quâtenus in jubare eſt, ſed quâtenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum luce ſolis illuſtratum uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux fixarum & planetarum diſtinctè ad nos tranſmiſſa demonſtrat medium cœleſte nullâ vi refractivâ pollere. Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam viſas fuiſſe, id, quoniam rariſſimè contingit, adſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum oculorum tum aëris tremuli referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo teleſcopiis evaneſcunt. Aëris & aſcendentium vaporum tremore fit, ut radii facilè de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde eſt quòd ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos ſine omni refractione ſenſibili. Nequis contendat quod caudæ non ſoleant videri in cometis, cum eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni:

DE MUNDI SYSTEMATE.

(m) sciendum est quod lux fixarum plus centum vicibus augeri potest mediantibus telescopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ verò nullæ: cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi capitum lux tenuis est & valde obtusa. Sic enim cometa anni 1680, mense *Decembri*, quo tempore caput luce suâ vix æquabat stellas secundæ magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gradus 40, 50, 60 vel 70 longitudinis & ultrà: postea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut stella septimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui sed satis sensibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obscurissimâ, quæ cerni vix posset, porrigebatur ad gradum usque duodecimum vel paulò ultrà: ut supra dictum est. *Sed* & *Feb.* 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri desierat, caudam gradus duos longam per telescopium contemplatus sum. Porro si cauda oriretur ex refractione materiæ cœlestis, & pro figurâ cœlorum deflecteretur de solis oppositione, deberet deflexio illa in iisdem cœli regionibus in eandem semper partem fieri. Atqui cometa anni 1680. *Decemb.* 28. hora $8\frac{1}{2}$. p. m. *Londini*, versabatur in ♐ 8gr. 41′, cum latitudine boreali 28gr. 6′, sole existente in ♑ 18gr. 26′. Et cometa anni 1577. *Dec.* 29 versabatur in ♐ 8gr. 41′ cum latitudine boreali 28gr. 40′, sole etiam existente in ♑ 18gr. 26′ circiter. Utroque in casu terra versabatur in eodem loco, & cometa apparebat in eâdem cœli parte: in priori tamen casu cauda cometæ (ex meis & aliorum observationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppositione solis aquilonem versus; in posteriore verò (ex observationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiatâ cœlorum refractione, supereſt ut phænomena caudarum ex materiâ aliquâ lucem reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à sole aversas ascen-

1683. (m) * *Sciendum est.* Ut notum est ex telescopiorum theoriâ apud omnes passim rerum opticarum & catoptricarum scriptores. Sed eâ potissimum legi merentur quæ de lucis intensitate, visionis distinctione & telescopiorum beneficiis dedit Clariss. Vir Robert Smith in eximio opere optico.

ascendere confirmatur ex (a) legibus quas observant. Ut quòd in planis orbium cometarum per solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione solis in eas semper partes, quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quòd spectatori in his planis constituto apparent in partibus à sole directè aversis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem cometæ, ut & ubi caput cometæ ad solem propiùs accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput cometæ: Præterea

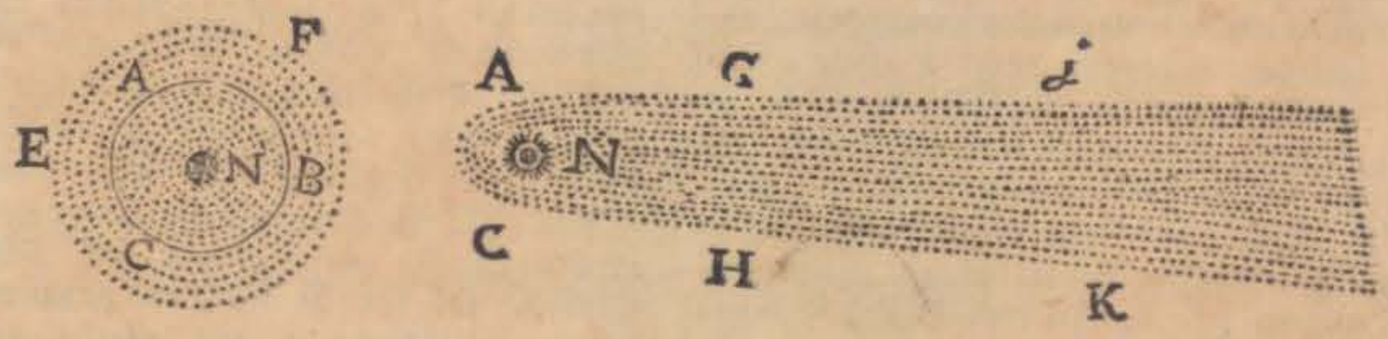
(a) 164. * *Ex legibus quas observant.* Leges illæ quas observant cometarum caudæ cum prædictâ Newtoni sententiâ apprimè congruunt. Cauda à cometæ capite vaporis instar in altum, id est, in partes à sole aversas assurgens in plano orbis cometæ per solem transeunte jacere debet; in æthere enim quieto nulla est ratio cur ad hanc potius quam ad illam partem deflectat. Quia autem vapor à capite exiens duos motus simul componit, alterum scilicet ascensus recti à sole, alterum verò progressus capitis, hinc fit ut cauda non directe a sole aversa sit, sed aliquantulum inde deviet in eas partes quas cometæ caput in orbe suo progrediens relinquit; si tamen spectator in orbis cometici plano per solem transeunte constituatur, deviatio caudæ neutiquam sentitur, quia tota in plano isto jacet. Licet vapor assurgens motum capitis participet, tamen propter aliqualem ætheris resistentiam, minus velociter quam caput ipsum progreditur, & quò altius ascendit vapor eò fit rarior, id est, quò longior est cauda eò majorem experitur resistentiam, ideóque præcedens caudæ latus quod scilicet proximus est partibus ad quas tendit cometa, convexum erit, sequens verò concavum ac proindè cauda non à sole duntaxat aversa est, sed etiam incurvatur. Hæc à sole deviatio & curvatura eò minor est quò recta solem cometamque conjungens obliquior est ad cometæ orbitam; si enim cometa directe à sole vel ad solem tenderet, cauda quoque foret recta & à sole directè aversa. Hinc patet in ipso cometæ perihelio maximam esse caudæ deviationem maximamque curvaturam; tunc enim recta solem & cometam conjungens ad orbem cometæ normalis est. Præterea ob prædictam licet admodum exiguam ætheris resistentiam, convexa caudæ facies in ætherem incurrens densior est, ac proinde lucidior & distinctius terminata apparebit quam facies concava. Hæc sunt præcipua caudarum phænomena quibus satisfacit Newtoni opinio. Hinc caudas à capitibus oriri & in regiones à sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant.

165

165. Descriptis opinionibus de cometarum caudis adjungenda est illa quam Clariss. D. De Mairan in eximio opere de aurorâ Boreali his tuetur rationum momentis. Cometas ad solem proximè accedere observationibus compertum est; Hinc Newtonianæ attractionis legibus consentaneum videtur ut aliquam solaris atmosphæræ materiam cometa attrahat. Cur autem materia hæc instar comæ vento agitatæ dispergatur & ad solis oppositum dirigatur ex radiorum solarium impulsione oriri potest. Plurimis enim experimentis certum est solares radios omni prorsus impulsionis vi non carere. Clariss. Hombergius varia materiæ levissimæ filamenta radiis solaribus in vitri ustorii foco objecta notabiliter impelli observavit. Lamellam quoque elasticam ità ligneæ tabulæ affixit ut extremitas una libere penderet, collectis vitri ustorii ope solaribus radiis

DE MUNDI SYSTEMATE.

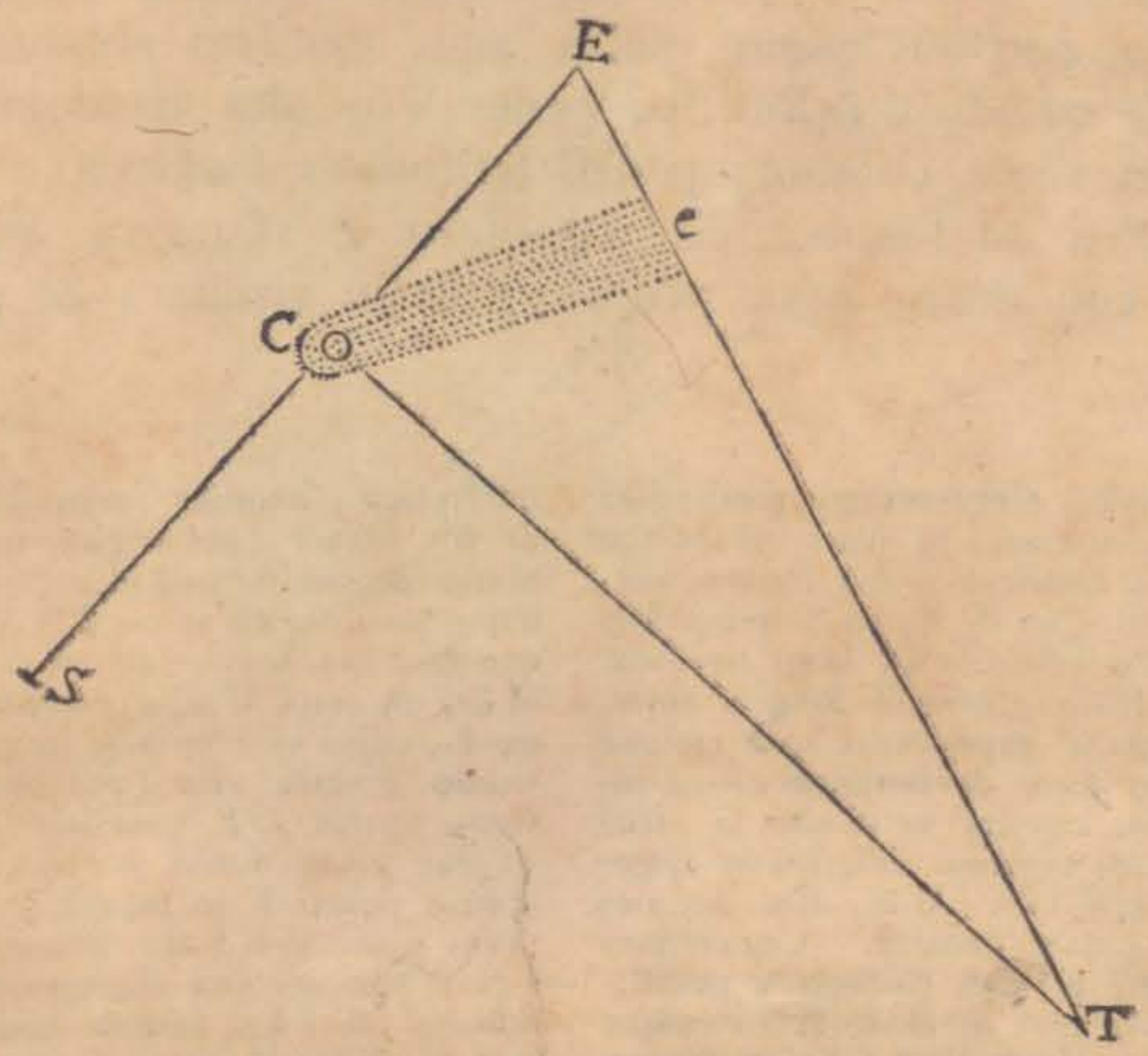
terea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque ideo quod cauda convexo sui latere partes respicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ sunt lineâ à sole per caput cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendidiores & limite minus indistincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in quâ caput conspicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed à capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aëre nostro fumus corporis cujusvis igniti petit supe-



165. exposita hæc lamella instar penduli sensibiliter ibat & redibat. Quamvis autem leviſſima sit hic apud nos radiorum solarium impulsio, maxima tamen esse potest in spatiis liberrimis in quibus cometæ deferuntur, præsertim cum tenuissima sit materia quæ cometarum caudas componit. Jam verò concipiatur comera N, apparenti cinctus atmosphærâ E D F, in transitu scilicet prope solem collectâ, ità ut in majori à cometæ nucleo N, distantiâ levior rariorque semper fiat hæc materia, quemadmodum in apparenti cometarum atmosphærâ solet observari. Sphæra interior A B C, ex iis ponatur constare particulis quæ radiorum solarium impulsioni possint resistere, è contrà verò orbis superior A F B D C E, leviores contineat particulas quæ huic impulsioni cedant, manifestum est radiorum solarium impulsione projici versus solis oppositionem materiæ vestigium B G H j K, quod figuram caudarum repræsentat. Ex dictis patet hanc sententiam cum Newtonianis principiis consentire; Et quidem Newtonus describens posteà Kepleri opinionem quæ eâdem ferè est, ab eâ non videtur alienus.

ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel obliquè ſi corpus moveatur in latus: ita in cœlis, ubi corpora gravitant in ſolem, fumi & vapores aſcendere debent à ſole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel rectà petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel obliquè, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit à quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia ſolis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.



166. Longitudo caudæ hoc modo poteſt inveniri. Sit S ſol, C cometa cujus cauda Ce; ex cognitis ſolis & cometæ locis notus erit angulus TCE, daraque (per obſerv.) deviatione caudæ à ſolis oppoſito, dabitur angulus ECe, ac proindè innoteſcet angulus TCe, quem ſcilicet cauda efficit cum rectâ terram & cometam jungente. Prætereà (per obſerv.) innoteſcit angulus ad terram CTe, quem cauda ſubtendit, quarè (per theoriam cometæ) datâ cometæ diſtantiâ à terrâ, dabitur caudæ longitudo. 166

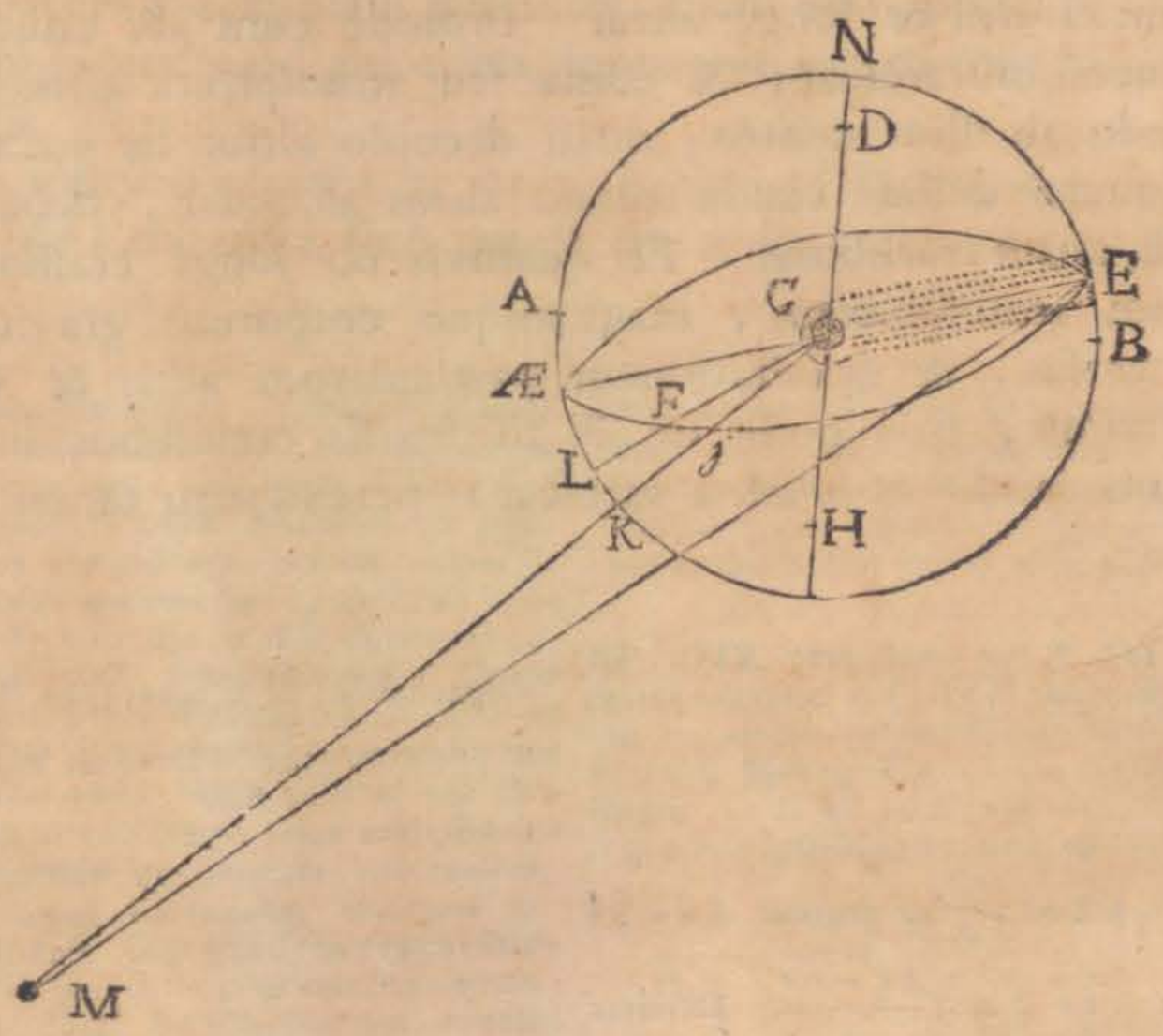
DE MUNDI SYSTEMATE.

in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſius reflectet, & limite minus indiſtincto terminabitur. De caudarum agitationibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus aëris noſtri, & motibus nubium caudas aliquâ ex parte obſcurantium oriantur; vel forte à partibus viæ lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari.

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex cometarum atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate aëris noſtri. Nam aër juxta ſuperficiem terræ ſpatium occupat quaſi 850 partibus majus quàm aqua ejuſdem ponderis, ideoque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem aëris ad ſummitatem atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea ſi

*167. *167. Novam elegantemque methodum ad cometarum motus in orbe parabolico computandos nobiſcum, ſuâ humanitate, communicavit Clariſſ. Vir & in rebus Mathematicis Verſatiſſimus D. De Chezeaux. Methodum hanc deſcribere longius foret, paucis duntaxat exponemus quâ ratione longitudinem atque deviationem caudæ inveſtigat. Sit cometa in puncto G circà quod tanquam centrum deſcribatur ſphæra cujus radii GA, GE, ſint æquales longitudini caudæ cometæ. Concipiatur in hâc ſphærâ planum Ecclipticæ parallelum habens polos in D & H, itemque concipiatur planum AKEB parallelum orbitæ veræ cometæ habens polum unum in G, ſit terra in M, ejus longitudo e cometâ viſa & ad planum orbitæ AKEB reducta, exprimetur per arcum KB, latitudo autem per arcum Kj. Quia verò datur (per obſerv.) longitudo cometæ é terrâ viſa, dabitur longitudo terræ e cometâ viſa; ſed datur latitudo cometæ (per obſerv.) & (per theoriam cometæ) habetur inclinatio plani AKEB, ad planum Ecclipticæ, itemque innoteſcit locus nodi B. Quare (per trigon. ſphær.) invenietur longitudo terræ reſpectu plani AKEB, cujus menſura eſt arcus BNAK, dabiturque latitudo Kj. Jam verò ductâ lineâ ME, ex terrâ M, ad extremitatem caudæ E, cujus extremitatis longitudo & latitudo è terra viſæ (per obſerv.) notæ ſunt, agatur GF parallela rectæ EM, eodem planè modo ac ſuprà innoteſcet poſitio puncti F in ſuperficie ſpheræ reſpectu plani AKEB, deſcriptoque arcu circuli maximi GFL, invenientur arcus BNAL & FL. Sed in triangulo ſphærico GjF, datis latere Gj, complemento ſcilicet ad jK, & latere GF, complemento ad FL, atque latere Fj, menſurâ anguli FGj, qui æqualis eſt angulo GME, invenietur angulus GFj. Tandem concipiatur planum circuli maximi tranſiens per puncta F, j, per centrum G, commune ſphæræ & cometæ atque per extremitatem caudæ E, cujuſque ſectio cum plano ANB, ſit recta EGÆ, formabitur alterum triangulum ſphæricum ÆFL, cujus

ſi columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ altam pedes 32. Indè verò (per regulam (b) multis experimentis confirmatam, quod compreſſio aëris ſit ut pondus atmoſphæræ incumbentis, quodque gravitas ſit reciprocè ut quadratum



jus jam innoteſcunt angulus ÆFL & latus FL, quare dabitur latus ÆL, ac proindè etiam dabitur arcus BAÆ, ob datum arcum BAL; innoteſcet præterea arcus BE, atquè obtinebitur arcus ÆF, qui additus arcui Fj, dabit arcum Æj, ideóque dabitur arcus Ej, menſura anguli rectilinei jGE, vel MGE. Datis autem in triangulo rectilineo MGE, angulis MGE, GME & latere GM, dabitur latus GE, hoc eſt, longitudo caudæ. Si itaque habeatur diſtantia cometæ à terrâ in partibus mediocris diſtantiæ terræ à ſole expreſſa, in iiſdem quoque partibus obtinebitur longitudo caudæ. Quoniam verò (ex theoriâ cometæ) datur diſtantia cometæ à nodo ex ſole viſa, ſi ex hâc diſtantiâ ſubtrahatur arcus BE, habebitur angulus quem recta per ſolem & cometam ducta comprehendit cum caudâ GE, hoc eſt, deviatio cometæ à ſole. 1671.

(b) * *Multis experimentis confirmatam.* Experimenta illa referunt paſſim rerum Phyſicarum ſcriptores, ſed præſertim Clariſſ. Muſkembroek in Phyſicâ. Videantur etiam tranſactiones Philoſophicæ an. 1671. num. 73.

DE MUNDI SYSTEMATE.

dratum distantiæ locorum à centro terræ) computationem (c) per corol. prop. XXII. lib. II. ineundo, inveni quod aër, si ascendatur à superficie terræ ad altitudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit quam apud nos in ratione longè majori, quam spatii omnis infra orbem saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideoque globus aëris nostri digitum unum latus, eâ cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleret omnes planetarum regiones usque ad sphæram saturni & longè ultrà. Proindè cum aër adhuc altior in immensum rarescat; & coma seu atmosphæra cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quam superficies nuclei deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quàm rarissima. Et quamvis ob longè crassiorem cometarum atmosphæram, magnamque corporum gravitationem solem versus, & gravitationem particularum aëris & vaporum in se mutuò, fieri possit ut aër in spatiis cœlestibus inque cometarum caudis non adeò rarescat; perexiguam tamen quantitatem

168. (c) 168. * *Per corol. prop. XXII.* Sit (in figurâ prop. XXII.) S centrum terræ, S A ejusdem semidiameter mediocris pedum $19615800 = r$, A B pedum 850, & ideò S P $= 19616650 = a$, S F $= 2r$, dignitas hyperbolæ $fah = rr$, ideóque A a $= r$, F f $= \frac{1}{2}r$, & B b $= \frac{rr}{a}$ ac proindè A a $-$ F f $= \frac{1}{2}r$ & A a $-$ B b $= \frac{ar - rr}{a}$. Densitas A H seu S t $= m = 33$, densitas B j, seu S u $= n = 32$, & densitas F N, sive S Z $= d$. His positis, (ex naturâ hyperbolæ per theor. 4. de hyperbolâ), erit area t h n z, ad aream t h i u, ut L. $\frac{m}{d}$ ad L. $\frac{m}{n}$, & (per Cor. Prop. XXII. lib. 2.) erit L. $\frac{m}{d}$: L. $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}r : \frac{ar - rr}{a} = a : 2a - 2r$, ideóque L. $\frac{m}{d} = \frac{a}{2a - 2r} \times$ L. $\frac{33}{32}$. Est autem $\frac{a}{2a - 2r} = \frac{1961665}{170}$, & ex tabulis vulgaribus L. $\frac{33}{32} = 0.0133639$. Quarè L. $\frac{m}{d} = 154.20879349$. Densitas ergò aeris in A seu in superficie telluris se habet ad densitatem aeris in F, seu in distantiâ semidiametri telluris ab eâdem superficie ut numerus respondens logarithmo 154.20879349 ad unitatem. Porrò logarithmo 3.2087100 in tabulis vulgaribus respondet numerus 1617 & ideò logarithmo 3.20879349 respondere debet numerus unitate fere integrâ major quam 1617. Logarithmo igitur invento 154.20879349 respondet numerus major quam 1617 cum 151 zeris adscriptis. Jam verò semidiameter terræ sit ut prius 19615800 pedum. Parallaxis solis ponatur $10''$ cujus sinus rectus est partium 485 posito radio partium 10000000. Quoniam semidiameter orbis magni est ad semidiametrum terræ ut radius ad sinum parallaxis solis (30. lib. 3.) erit semidiameter orbis magni pedum circiter 5000000000000. Sed semidiameter orbis Saturni circiter decuplo major est (phæn. 4.) erit igitur hæc semidiameter

pedum

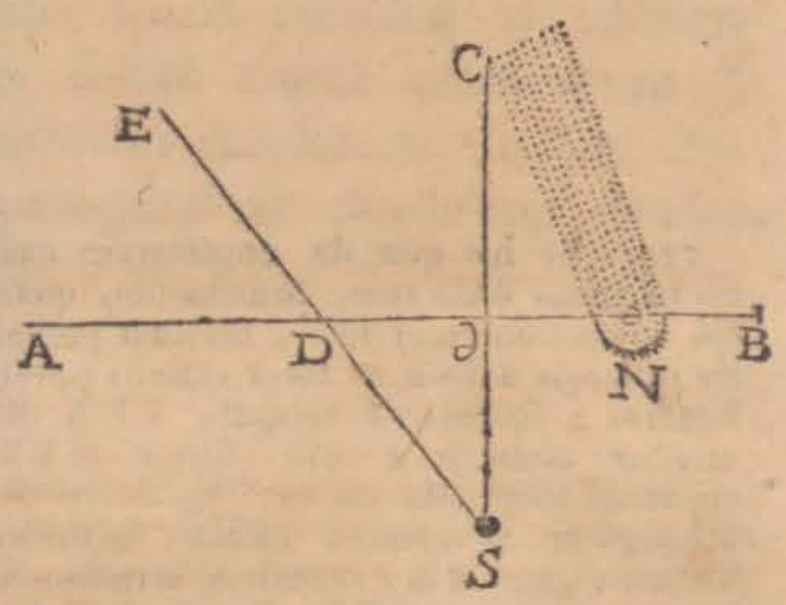
tatem aëris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abundè sufficere, ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas transfucentibus. Atmosphæra terrestris luce solis splendens, crassitudine suâ paucorum milliarium, & astra omnia & ipsam lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam verò caudarum crassitudinem, luce pariter solari illustratam, astra minima sine claritatis detrimento transfucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam aëris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve lucem solis in jubare reflectentis.

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

Quo temporis spatio vapor à capite ad terminum caudæ ascendit, (d) cognosci ferè potest ducendo rectam à termino caudæ

pedum 500000000000, ideóque diameter ped. 1000000000000, sive digitorum 12000000000000. Est igitur sphæra Saturni ad globum cujus diameter est digitus unus ut præcedentis numeri cubus sive 1728 cum annexis 39 cyphris ad unitatem; sed ratio illa multò minor est ratione densitatum modò inventâ; Quarè globus aëris nostri digitum unum latus eâ cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris impleret omnes planetarum regiones usque ad sphæram Saturni & longè ultrà.

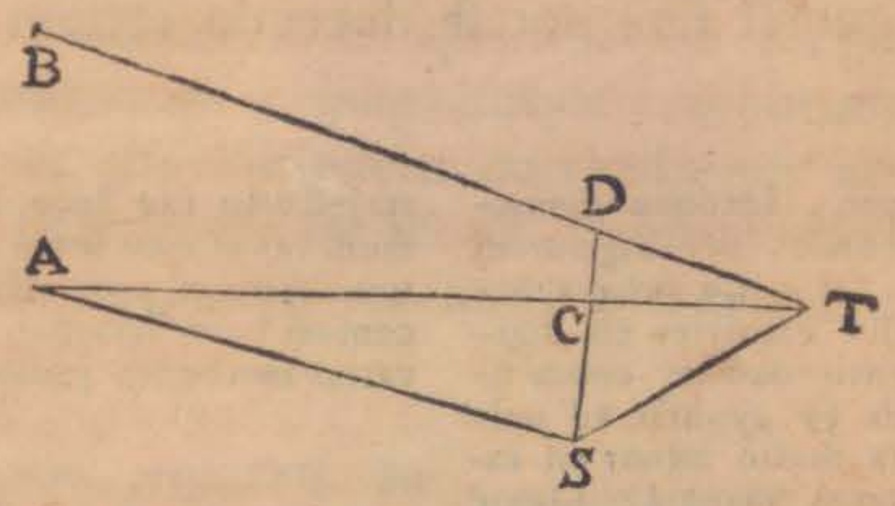
(d) 169. * *Cognosci ferè potest.* Referat S solem, A B trajectoriæ cometicæ portionem. Sit N cometæ nucleus ab A versus B progrediens, C terminus caudæ. Ducatur recta à termino illo C ad solem, punctum d, ubi recta trajectoriam secat, designabit locum ex quo vapor in termino caudæ ascendere cæpit à capite, si vapor ille rectà ascendat à sole. Quia autem vapor non rectà ascendit à sole sed vergit versus partes A, quas cometa reliquit (164) agatur recta S E, parallela longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum cometæ) recta illa à lineâ caudæ divergat, atque trajectoriam cometæ alicubi intersecet putà in D, vapor qui nunc terminum caudæ constituit à nucleo cœpit ascendere dum cometa in trajectoriæ suæ loco D versabatur; hic enim vapor cum motu ascensûs à sole, motum cometæ progressivum quem antè ascensum suum habebat, componit. Sed per varias methodos paulò antè explicatas in- 168.



veniri potest tempus quo cometa locum D occupavit & potest definiri quanto temporis spatio opus sit ut cometa trajectoriæ portionem D N, longitudine datam, percurrat, ideóque habebitur proximè tempus quo vapor ad terminum caudæ ascendit. Simili modo determinari potest temporis spatium quo vapor ascendit ad datum caudæ punctum.

DE MUNDI SYSTEMATE.

dæ ad ſolem, & notando locum ubi recta illa trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi recta aſcendat à ſole, aſcendere cœpit à capite, quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non rectà aſcendit à ſole, ſed motum cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſus ſui eundem componendo, aſcendit obliquè. Unde verior erit problematis ſolutio, ut recta illa, quæ orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potiùs (ob motum cur-



170. 170. Ex his quæ de cometarum caudis hactenus dicta ſunt, cometarum, quandiù nobis conſpicui ſunt, maxima poſſibilis diſtantia à ſole & terrâ definiri poteſt. Referat S ſolem, T terram, S T A diſtantiam cometæ à ſole, ſitque A T B, apparens longitudo caudæ. Quoniam lux propagatur à termino caudæ ſecundùm lineam rectam T B, reperitur terminus ille alicubi in lineâ T B, putà in D. Jungatur D S, ſecans lineam T A in C, & quia cauda ſemper opponitur ſoli quam proxime, ideóque ſol, caput cometæ & terminus caudæ jacent in directum, reperitur caput cometæ in C. Rectæ T B, agatur parallela S A, occurrens lineæ T A, in A, caput cometæ C neceſſariò reperietur inter T & A, nam terminus caudæ reperitur alicubi in lineâ infinitâ T B, & lineæ omnes ut S D, quæ ab S ad lineam T B duci poſſunt, ſecant lineam T A, alicubi inter T & A. Quare cometa non poteſt longius abeſſe à terrâ quam intervallo T A, nec à ſole quam intervallo S A ultrà ſolem, vel ST,, citrà. Exemplo ſit cometa an 1680. cometa ille die 12. Dec. diſtabat 9°. à ſole & longitudo caudæ erat 35°. Quare conſtruatur triangulum TSA, cujus angulus T æqualis ſit diſtantiæ 9°. & angulus A ſeu angulus A T B æqualis ſit longitudini caudæ 35°., erit S A ad ST, id eſt, limes maximæ poſſibilis diſtantiæ cometæ à ſole ad ſemidiametrum orbis magni ut ſinus anguli T, ad ſinum anguli A, hoc eſt, ut 3. ad 11. circiter. Quarè cometa eo tempore minùs diſtabat à ſole quam $\frac{3}{11}$ partibus diſtantiæ terræ à ſole, & propterea verſabatur aut intrà orbem

curvilineum cometæ) ut eadem à linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor, qui erat in termino caudæ *Jan.* 25. aſcendere cœperat à capite ante *Dec.* 11. ideóque aſcenſu ſuo toto, dies plus 45 conſumpſerat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10 apparuit, aſcenderat ſpatio dierum illorum duorum, qui à tempore perihelii cometæ elapſi fuerant. Vapor igitur ſub initio in viciniâ ſolis celerrimè aſcendebat, & poſtea cum motu per gravitatem ſuam ſemper retardato aſcendere pergebat; & aſcendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiù apparuit, ex vapore ferè omni conſtabat, qui à tempore perihelii aſcenderat; & vapor, qui primus aſcendit, & terminum caudæ compoſuit, non priùs evanuit quam ob nimiam ſuam tam à ſole illuſtrante quam ab oculis noſtris diſtantiam videri deſiit. Unde etiam caudæ cometarum aliorum, quæ breves ſunt, non aſcendunt motu celeri & perpetuò à capitibus & mox evaneſcunt, ſed ſunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentiſſimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere ſub initio, per cœlos unà cum capitibus moveri pergunt. Et (e) hinc rurſus colligitur ſpatia cœleſtia vi reſiſtendi deſtitui; utpote in quibus non ſolùm ſolida planetarum & cometarum corpora, ſed etiam rariſſimi caudarum vapores motus ſuos velociſſimos liberrimè peragunt ac diutiſſimè conſervant.

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROB. XXI.

Aſ-

bem Mercurii aut inter orbem illum & terram. Rurſus die 21. Decembr. diſtantia cometæ à ſole erat $32^{\circ}\frac{2}{5}$. & longitudo caudæ 70°. ergò ut ſinus $32^{\circ}\frac{2}{5}$. ad ſinum 70°, hoc eſt, ut 4 ad 7, ità erat limes intervalli inter cometam & ſolem ad diſtantiam terræ à ſole & propterea nondum cometa exceſſerat ex orbe veneris. Die 28. Decembr. diſtantia cometæ à ſole erat 55°. & longitudo caudæ 56°. Quare, iiſdem calculi veſtigiis inſiſtendo, limes intervalli inter cometam & ſolem, nondum æquabat diſtantiam terræ à ſole & propterea cometa nondum exceſſerat ex orbe telluris. Hâc methodo quam ex Newtoni opuſculo de mundi ſyſtemate deſcripſimus, aliorum cometarum diſtantias limitando inventum eſt cometas omnes, quandiù ſe nobis oſtendunt, verſari intrà ſpatium ſphæricum centro ſole & intervallo ſolis ac terræ vel duplicato vel ad ſummum triplicato deſcriptum. 170.

(e) * *Et hinc rurſus colligitur.* Legantur quæ dicta ſunt in ſcholio prop. XI. lib. 2.

DE MUNDE SYSTEMATE.

Aſcenſum caudarum ex atmoſphæris capitum & progreſſum in partes à ſole averſas *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longè tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non eſt à (f) ratione prorſus alienum, non obſtante quod ſubſtantiæ craſſæ impeditiſſimis in regionibus noſtris à radiis ſolis ſenſibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam à ſole aſcendere. Cum autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideóque ſervatâ quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potiùs oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda cometæ ad eundem modum aſcenderit à ſole? Nam radii ſolares non agitant media, quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes eâ actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore ſibi communicato rarefiet, & ob diminutam eâ raritate gravitatem ſuam ſpecificam, quâ priùs tendebat in ſolem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad aſcenſum vaporum conducit etiam, quod hi gyrantur circa ſolem & eâ actione conantur à ſole recedere, at ſolis atmoſphæra & materia cœlorum vel planè quieſcit, vel motu ſolo quem à ſolis rotatione acceperit, tardiùs gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſus caudarum in viciniâ ſolis, ubi orbes curviores ſunt, & cometæ intra denſiorem & eâ ratione graviorem ſolis atmoſphæram conſiſtunt, & caudas quàm longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus ſolem gravitando, movebuntur circa ſolem in ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur & iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in

170. (f) * *Non eſt a ratione prorſus alienum* (165.).

in ſolem non magis efficiet ut caudæ poſtea decidant à capitibus ſolem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit, ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel ſimul in ſolem cadent, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur; ideoque gravitas illa non impedit, quò minùs caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem à cauſis jam deſcriptis, aut aliis quibuſcunque facillimè accipiant & poſtea liberrimè ſervent.

Caudæ igitur, quæ in cometarum periheliis naſcuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel indè poſt longam annorum ſeriem cum iiſdem ad nos redibunt, vel potiùs ibi rarefactæ paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad ſolem caudæ novæ breviuſculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & ſubindè in periheliis cometarum illorum, qui ad uſque atmoſphæram ſolis deſcendent, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuò rareſcit ac dilatatur. Quâ ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem latior ſit quam juxta caput cometæ. Eâ autem rarefactione vaporem perpetuò dilatatum diffundi tandem & ſpargi per cœlos univerſos, deindè paulatim in planetas per gravitatem ſuam attrahi, & cum eorum atmoſphæris miſceri rationi conſentaneum videtur. Nam quemadmodum maria ad conſtitutionem terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem ſolis vapores copiosè ſatis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condenſati (ut (g) aliqui cum ratione philoſophantur) decurrant in fontes & flumina: ſic ad conſervationem marium & humorum in planetis requiri videntur cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condenſatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem conſumitur & in terram aridam convertitur, continuò ſuppleri & refici poſſit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omninò creſcunt, dein magnâ ex

(g) * *Ut aliqui cum ratione philoſophantur.* Horumce philoſophorum rationes videre eſt paſſim apud omnes cultiores phyſicos. Legantur tranſact. philoſop. an. 1687. 1694. 1729 & monum. Acad. Pariſ. an. 1703. 170.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles terræ aridæ in dies augetur, & liquores, nisi aliundè augmentum sumerent, perpetuò decrescere deberent, ac tandem deficere. Porrò suspicor spiritum illum, qui aëris nostri pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex cometis præcipuè venire.

Atmosphæræ cometarum in descensu eorum in solem excurrendo in caudas, diminuuntur, & (eâ certè in parte quæ solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum à sole, ubi jam minùs excurrunt in caudas, ampliantur; si modo phænomena eorum *Hevelius* rectè notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modo ad solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsan crassiore & nigriore in atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior & nigrior esse solet. Sic caput cometæ, de quo egimus, in æqualibus à sole ac terrâ distantiis obscurius apparuit post perihelium suum quam antea. Mense enim *Decembri* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at mense *Novembri* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt cometam priorem. Nam juveni cuidam *Cantabrigiensi*, *Novem.* 19. cometa hicce luce suâ quantumvis plumbeâ & obtusâ, æquabat spicam virginis, & clarius micabat quam postea. Et *Montenaro Nov.* 20, st. vet. cometa apparebat major stellis primæ magnitudinis, existente caudâ duorum graduum longitudinis. Et *D. Storer* literis, quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus mense *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longè cedere cometæ, qui mense *Novembri* ante solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur, quod materia capitis sub initio copiosior esset, & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur, quod capita cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emiserunt, apparuerint sub-

obs-

obſcura & exigua. Nam anno 1668. *Mart.* 5. ſt. nov. horâ ſeptimâ veſpertinâ *R. P. Valentinus Eſtancius*, *Braſiliæ* agens, cometam vidit horizonti proximum ad occaſum ſolis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, caudâ verò ſuprà modum fulgente, ut ſtantes in littore ſpeciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auſtrum vergens, & horizonti ferè parallela. Tantus autem ſplendor tres ſolùm dies durabat, ſubindè notabiliter decreſcens; & interea decreſcente ſplendore aucta eſt magnitudine cauda. Undè etiam in *Luſitaniâ* quartam ferè cœli partem (id eſt, gradus 45) occupaſſe dicitur ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infrà horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt, quod caput à ſole receſſit, eique proximum fuit initio, pro more cometæ anni 1680. Et in chronico *Saxonico* ſimilis legitur cometa anni 1106. *cujus ſtella erat parva & obſcura* (ut ille anni 1680) *ſed ſplendor qui ex ea exivit valde clarus & quaſi ingens trabs ad orientem & aquilonem tendebat*, ut habet etiam *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi* Monacho. Apparuit initio menſis *Februarii*, ac deinceps circa veſperam, ad occaſum ſolis brumalem. Indè verò & ex fitu caudæ colligitur caput fuiſſe ſoli vicinum. *A ſole*, inquit *Matthæus Pariſienſis*, *diſtabat quaſi cubito uno*, *ab horâ tertiâ* (rectius ſextâ) *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens.* Talis etiam erat ardentiſſimus ille cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus lib. 1. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quod ante ſolem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente vero die quantum potuit viſum eſt. Nam quam minima fieri poteſt diſtantia ſolem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* (caudæ ſcilicet) *nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore* (ait Ariſtoteles) *cum* (cauda) *jam minus flagraret, reddita eſt* (capiti) *cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem* (id eſt, ad 60gr.) *extendit. Apparuit autem tempore hyberno* (an. 4. olymp. 101.) *& aſcendens*

DE MUNDI SYSTEMATE.

dens usque ad cingulum orionis ibi evanuit. Cometa ille anni 1618, qui è radiis solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulò superare videbatur, sed majores apparuere cometæ non pauci, qui caudas brevio es habuere. Horum aliqui jovem, alii venerem vel etiam lunam æquasse traduntur.

(h) Diximus cometas esse genus planetarum in orbibus valde eccentricis circa solem revolventium. Et quemamodum è planetis non caudatis minores esse solent, qui in orbibus minoribus & soli propioribus gyrantur, sic etiam cometas, qui in perihcliis suis ad solem propiùs accedunt, ut plurimum minores esse, ne solem attractione suâ nimis agitent, rationi consentaneum videtur. (i) Orbium verò transversas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione cometarum in iisdem orbibus post longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio propositio sequens lumen accendere potest.

PRO-

171. (h) 171. * *Diximus cometas esse genus planetarum*, idque gravissimis rationibus confirmatur. Hâc enim factâ hypothesi, computatisque per methodos præcedentes cometarum trajectoriis, hujusmodi trajectoriæ semper cum phænomenis congruunt quamproxime. Clariss. Halleius suspicatur cometam an. 1531. ab Appiano observatum, eundem fuisse cum illo qui anno 1607 descriptus est à Keplero & Longomontano & quem Halleius ipse redeuntem observavit an. 1682. quadrabant enim elementa omnia, solaque periodorum inæqualitas adversari videbatur. Verum tanta non fuit inæqualitas illa ut causis physicis adscribi non possit. Saturni enim motus à cæteris planetis & præsertim à jove ità perturbatur ut per aliquot dies integros incertum sit hujus planetæ tempus periodicum. Rectè etiam animadvertit Clariss. Cassinus in Mon. Paris. 1699. cometam diversis temporibus observatum ideóque pro duobus cometis usurpatum, unum eundemque esse posse, licet non conveniant inter se omnia motuum elementa; fieri scilicet potest ut unus idemque cometa bis observatus non secet Ecclipticam sub eodem angulo & in iisdem locis, ut cometæ hujus velocitas in perigæo non sit eadem. Talibus enim erroribus aliisque plurimis Luna est obnoxia. Cæterum Clariss. Halleius diligenter perpensis motibus cometæ an. 1682. hujus cometæ reditum anno 1758. futurum esse prædixit.

(i) * *Orbium verò transversas diametros & revolutionum tempora periodica.* Hæc duo obtineri possunt per methodum num 160. expositam.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Inventam cometæ trajectoriam corrigere.

Operatio 1. Assumatur positio plani trajectoriæ, per propositionem superiorem inventa; & seligantur tria loca cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quàmmaximè distantia; sitque A tempus inter primam & secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo (k) in perigæo versari convenit, vel saltem non longè à perigæo abesse. (l) Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes trigonometricas, loca tria vera cometæ in assumpto illo plano trajectoriæ. Deindè per loca illa inventa, circa centrum solis ceu umbilicum, per operationes arithmeticas, ope prop. XXI lib. 1. institutas, describatur sectio conica: (m) & ejus areæ, radiis à sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunto D & E; nempe D area inter observationem pri-

(k) * *In perigæo versari convenit.* Versante enim cometa in perigæo vel saltem non longe à perigæo, illius motus magis accurate definitur.

(l) * *Ex his locis apparentibus.* Inveniantur per operationes trigonometricas (ut in prop præced.) loca tria vera cometæ in assumpto illo plano trajectoriæ tanquam accurato, hoc est, inveniantur tria prius definiti plani puncta in quibus cometa eandem longitudinem ac latitudinem obtineret quam revera habere observatur.

(m) * *Ejus areæ.* Ex datâ cometæ semitâ ejusque partium magnitudine respectu semitæ telluris ejusque partium, dabitur velocitas quâ cometa illam describit ideóque dabitur tempus quo cometa areas duas jam inventas percurrit. Tempus illud totum dicatur T, capiaturque numerus C, qui sit ad 1, ut tempus inter observationem primam & secundam ad tempus inter observationem secundam & tertiam, hoc est, ut A ad B. Sumatur præterea G ad 1, ut areæ inter observationem primam & secundam ad aream inter observationem secundam & tertiam, id est, ut D ad E; eadem quoque erit ratio inter tempora quibus areæ illæ radiis ad solem ductis describentur. Sit S, tempus verum inter observationem primam & tertiam. Si reperiatur T = S, & G = C, inventa plani trajectoriæ positio vera erit & accurata, nullâ indigens correctione. Sin aliter erit T − S, error in tempore toto inter observationem primam & tertiam ortus nimirum ex positione plani trajectoriæ minus accuratâ, & G − C, erit error ex eâdem causâ ortus in ratione temporis inter observationem primam & secundam, ad tempus inter observationem secundam & tertiam, ut patet; nam in utroque casu unitas usurpatur pro consequente rationis inter bina tempora. 171.

DE MUNDI SYSTEMATE.

primám & ſecundam, & E area inter ſecundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D+E velocitate cometæ per prop. XVI. lib. 1. inventa deſcribi debet.

Oper. 2. (n) Augeatur longitudo nodorum plani trajectoriæ, additis ad longitudinem illam $20'$ vel $30'$, quæ dicantur P; & ſervetur plani illius inclinatio ad planum eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus cometæ locis obſervatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut ſuprà: deinde etiam orbis per loca illa tranſiens, & (o) ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint *d* & *e*, nec non tempus totum *t*, quo area tota *d*+*e* deſcribi debeat.

Oper. 3. Servetur longitudo nodorum in operatione primâ, & augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, additis ad inclinationem illam $20'$ vel $30'$, quæ dicantur Q. Deinde ex obſervatis prædictis tribus cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbiſque per loca illa tranſiens, (p) ut & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint δ & ε, & tempus totum τ, quo area tota $\delta+\varepsilon$ deſcribi debeat.

(q) Jam ſit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & *g* ad 1 ut *d* ad *e*, & γ ad 1 ut δ ad ε; ſitque S tempus verum inter

171. (n) * *Longitudo nodorum*, per num. 145. inventa

(o) * *Et ejuſdem areæ duæ.* Harumce arearum inter tres obſervationes radiis ad ſolem ductis deſcriptarum ratio ſit ut g, ad 1; ſitque t, tempus totum quo cometa utramque aream deſcriberet. Si deprehendatur t=S & g=C, aſſumpta plani poſitio vera erit & accurata. Sin aliter, erit, ut ſuprà in operatione 1ª, t−S, error in tempore toto inter obſervationem primam & tertiam, & g−C error in ratione temporis inter obſervationem primam & ſecundam ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam. Uterque hic error oritur ex poſitione non ſatis accuratâ plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ.

(p) * *Ut & ejuſdem areæ duæ.* Sint areæ illæ ut γ ad 1, ſitque τ tempus totum quo area tota $\delta+\varepsilon$, deſcribi debeat. Si fuerit $\tau=S$ & $\gamma=C$, aſſumpta plani trajectoriæ poſitio vera eſt & accurata. Sin contrà, erit $\tau-S$, error in tempore toto inter obſervationem primam & tertiam, & $\gamma-C$, error in ratione temporis inter obſervationem primam & ſecundam ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam.

(q) * *Jam ſit C ad 1.* Iiſdem ſervatis denominationibus quas adhibet Newtonus, inſtituatur operatio per regulam falſæ poſitionis. Ad inveniendum errorem ortum ex aſſumptâ inclinatione plani trajectoriæ ad planum Eccliptice, fiat juxta prædictam regulam, ut differentia errorum T−τ ad differentiam poſitionum T−S, ità

ter observationem primam ac tertiam; & signis + & − probè observatis quærantur numeri m & n, eâ lege, ut sit $2G-2C = mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S$ æquale $mT-mt+nT-n\tau$. Et si in operatione primâ I designet inclinationem plani trajectoriæ ad planum eclipticæ & K longitudinem nodi alterutrius, erit $I+nQ$ vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, & $K+mP$ vera longitudo nodi. (r) Ac denique si in operatione primâ, secundâ ac tertiâ, quantitates R, r & ϱ designent latera recta trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejusdem latera transversa respectivè: erit $R+mr-mR+n\varrho-nR$ verum

ità error Q, ad quartam quantitatem, erit hæc ipsa quantitas $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$, error inclinationis plani in toto scilicet tempore inter observationem primam & tertiam. Simili modo dicatur, $G-\gamma : G-C = Q : \frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$, erit quantitas $\frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$ error ejusdem inclinationis in ratione inter bina trium observationum tempora. Similiter error longitudinis nodi in toto tempore inter observationem primam & tertiam invenitur $\frac{T-S}{T-t}\times P$, error verò in ratione inter bina tempora est $\frac{G-C}{G-g}\times P$. Est itaque vera & correcta inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ $I+\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$, sive $I+\frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$; & vera longitudo nodi est $K+\frac{T-S}{T-t}\times P$ vel $K+\frac{G-C}{G-g}\times P$. Jam verò quoniam corrigendus est error uterque tam in toto tempore quam in ratione inter bina tempora, ponamus $\frac{T-S}{T-t}\times P$ & $\frac{G-C}{C-g}\times P$, separatim æquari $m\times P$ hoc est $\frac{T-S}{T-t}=m$ & $\frac{G-C}{G-g}=m$.

Ponamus quoque $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$ & $\frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$ $=n\times Q$, id est $\frac{T-S}{T-\tau}=n$, & $\frac{G-C}{G-\gamma}=n$. Hinc proveniet $mT-mt=T-S$ & $mG-mg=G-C$; item $nT-n\tau=T-S$, & $nG-ng=G-C$, undè fit $2T-2S=mT-mt+nT-n\tau$, & $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$. Quare si tales quærantur numeri m & n, ut sit $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S=mT-mt+nT-n\tau$, erit $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$ & $\frac{G-C}{T-\tau}\times Q=n\times Q$. Similiter fiet $\frac{T-S}{T-t}\times P$ & $\frac{G-C}{G-g}\times P=mP$, ac proindè error inclinationis plani trajectoriæ erit nQ & error longitudinis nodi mP. Quare vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ erit $I+nQ$, & $K+mP$ vera longitudo nodi. Hæc omnia patent ex notis in tres operationes præcedentes. 171.

(r) * *Ac denique*. Nota sint latera recta trium trajectoriarum in operatione primâ, secundâ & tertiâ descriptarum. Designet R, latus rectum primæ trajectoriæ, r secundæ, ϱ tertiæ, & trajectoriæ quam cometa describit desideretur verum latus rectum; per regulam falsæ positionis eâdem planè methodo quam modò ad-

DE MUNDI SYSTEMATE.

verum latus rectum, & $\frac{1}{L+m\,l-mL+n\lambda-nL}$ verum latus transversum trajectoriæ quam cometa describit. (f) Dato autem latere transverso datur etiam tempus periodicum cometæ. *Q. E. I.*

Cæterùm cometarum revolventium tempora periodica, & orbium latera transversa, haud satis accuratè determinabuntur, nisi per collationem cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem orbem descripsisse reperiantur, concludendum erit hos omnes esse unum & eundem cometam, in eodem orbe revolventem. (t) Et tum demum ex revolutionum temporibus dabuntur orbium latera transversa, & ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur cometarum plurium trajectoriæ, ex hypothesi quod sint parabolicæ. Nam hujusmodi trajectoriæ cum phænomenis semper congruent quamproximè. Id liquet, non tantùm ex trajectoriâ parabolicâ cometæ anni 1680, quam cum observationibus suprà contuli, sed etiam ex eâ

172. hibuimus poterit inveniri. Ut obtineatur vera longitudo nodi, additur ejus longitudini in primo plano excessus longitudinis assumptæ in plano secundo suprà præcedentem ductus in m, & ut habeatur vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ, additur inclinationi plani primi, excessus inclinationis assumptæ in plano tertio suprà inclinationem præcedentem ductus in n. Sed trajectoria cometæ ejusque latus rectum corrigi debent tum ob correctam longitudinem nodi, tum ob correctam inclinationem plani ad planum Ecclipticæ, quare lateri recto trajectoriæ in primo plano descriptæ sive ipsi R, addi debet $m\,r - m\,R$, excessus scilicet lateris recti in plano secundo suprà latus rectum in plano primo ductus in m. Addere insuper oportet $n\,\rho - n\,R$, qui est excessus lateris recti in plano tertio suprà latus rectum in primo ductus in n, ideóque erit $R + m\,r - m\,R + n\,\rho - n\,R$, verum latus rectum. Simili modo patet datis lateribus transversis in operatione primâ, secundâ & tertiâ respectivè $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$, esse verum latus transversum trajectoriæ $\frac{1}{L+m\,l-m\,L+n\lambda-n\,L}$.

(f) 172. * *Dato autem latere transverso.* Accuratè descriptâ cometæ trajectoriâ (per methodos præced.) si deprehendatur ellipsim solis centro tanquam umbilico descriptam, non verò parabolam per determinata trajectoriæ puncta transire, cometa in orbem redibit & dato latere tranverso trajectoriæ hujus, dabitur tempus periodicum; erit scilicet, quadratum temporis periodici cometæ ad quadratum temporis periodici telluris circà solem ut cubus majoris axis orbitæ cometicæ ad cubum majoris axis orbitæ terrestris (160).

(t) * *Et tum demum* (160).

eâ cometæ illius insignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* observatus fuit. Is ex observationibus suis longitudines & latitudines hujus cometæ computavit, sed minùs accuratè. Ex iisdem observationibus *Halleius* noster (u) loca cometæ hujus denuò computavit, & tum demum ex locis sic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus nodum ascendentem in ☊ 21gr. 13′. 55″., inclinationem orbitæ ad planum ecliptícæ 21gr. 18′. 40″, distantiam perihelii à nodo in orbitâ 49gr. 27″. 30″. Perihelium in ♌ 8gr. 40′. 30″ cum latitudine austrinâ heliocentricâ 16gr. 1′. 45″. Cometam in perihelio *Novemb.* 24d. 11h. 52′. p. m. tempore æquato *Londini*, vel 13h. 8′ *Gedani*, stylo veteri, & latus rectum parabolæ 410286, existente mediocri terræ à sole distantiâ 100000. Quam probe loca cometæ in hoc orbe computata congruunt cum observationibus, patebit ex tabulâ sequente ab *Halleio* supputatâ.

LIBER TERTIUS. PROP. XLII. PROBL. XXII.

(u) * *Loca cometæ hujus denuò computavit.* Varias computi hujus ineundi methodos suprà tradidimus.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Temp. Appar. *Gedani*, ſt. vet.	Obſervatæ Cometæ diſtantiæ.		Loca obſervata.	Loca computata in Orbe.
Decemb.		gr. ″ ″		gr. ′ ″
3d. 18h. 29 1/2	a Corde Leonis	46 . 24 . 20	Long. ♌ 7. 1. 0	♌ 7 . 1 . 29
	a Spica Virginis	22 . 52 . 10	Lat. auſt. 21.39. 0	21 . 38 . 50
4 . 18 . 1 1/2	à Corde Leonis	46 . 2 . 45	Long ♌ 10.15. 0	♌ 0 . 16 . 5
	à Spica Virginis	23 . 52 . 40	Lat auſt. 22 24. 0	22 . 24 . 0
7 . 17 . 48	à Corde Leonis	44 . 48 . 0	Long ♌ 3. 0. 0	♌ 3 . 7 . 33
	à Spica Virginis	27 . 56 . 40	Lat. auſt. 25. 0	25 . 21 . 40
17 . 14 . 43	à Corde Leonis	53 . 15 . 15	Long ♎ 2.56. 0	♎ 2 . 56 . 0
	ab Hum. Orionis dext.	45 . 43 . 30	Lat. auſt. 49 25. 0	49 . 25 . 0
19 . 9 . 25	a Procyone	35 . 13 . 30	Long. ♊ 28.40 30	♊ 28 . 43 . 0
	a Lucid Mandib. Ceti	52 . 16 . 0	Lat. auſt. 45.48 0	45 . 46 . 0
20 . 9 . 53 1/2	a Procyone	40 . 49 . 0	Long. ♊ 13 3. 0	♊ 13 . 5 . 0
	à Lucid. Mandib. Ceti	40 . 4 . 0	Lat. auſt. 39.54. 0	39 . 53 . 0
21 . 9 . 9 1/2	ab Hum. dext. Orionis	26 . 21 . 25	Long. ♊ 2.16 0	♊ 2 . 18 . 30
	à Lucid. Mandib. Ceti	29 . 28 . 0	Lat. auſt. 33.41. 0	33 . 39 . 40
22 . 9 . 0	ab Hum. dext. Orionis	29 . 47 . 0	Long. ♉ 24 24. 0	♉ 24 . 27 . 0
	à Lucid. Mandib. Ceti	29 . 29 . 30	Lat. auſt. 27.45. 0	27 . 46 0
26 . 7 . 58	à Lucida Arietis	23 . 20 . 0	Long. ♉ 9. 0. 0	♉ 9 . 2 . 28
	ab Aldebaran	26 . 44 . 0	Lat. auſt. 12.26. 0	12 . 34 . 13
27 . 6 . 45	a Lucida Arietis	20 . 45 . 0	Long. ♉ 7. 5.40	♉ 7 . 8 . 45
	ab Aldebaran	28 . 10 . 0	Lat. auſt. 10.22. 0	10 . 22 . 13
28 . 7 . 39	à Lucida Arietis	18 . 29 . 0	Long. ♉ 5.24.43	♉ 5 . 27 . 12
	à Palilicio	25 . 37 . 0	Lat. auſt. 8.22.50	8 . 23 . 37
31 . 6 . 45	a Cing. Androm.	30 . 48 . 10	Long. ♉ 2. 7.40	♉ 2 . 8 . 20
	à Palilicio	32 . 53 . 30	Lat. auſt. 4.13. 0	4 16 . 25
Jan. 1665. 7 . 7 . 37 1/2	à Cing. Androm.	25 . 11 . 0	Long. ♈ 28.24.47	♈ 28 . 24 . 0
	a Palilicio	37 . 12 . 25	Lat. bor. 0.54. 0	0 . 53 . 0
13 . 7 . 0	a capite Androm.	28 . 7 . 10	Long. ♈ 27. 6.54	♈ 27 . 6 . 39
	à Palilicio	38 . 55 . 20	Lat. bor. 3. 6.50	3 . 7 . 40
24 . 7 . 29	a Cin. Androm.	20 . 32 . 5	Long. ♈ 26.29.15	♈ 26 . 28 . 50
	à Palilicio	40 . 5 . 0	Lat bor. 5.25.50	5 . 26 . 0
Feb. 7 . 8 . 37			Long. ♈ 27.24.46	♈ 27 . 24 . 55
			Lat. bor. 7. 3.26	7 . 2 . 15
22 . 8 . 46			Long. ♈ 28.29.46	♈ 20 . 29 . 58
			Lat. bor. 8 12.26	8 10 . 25
Mar. 1 . 8 . 16			Long ♈ 29.18.15	♈ 29 . 18 . 20
			Lat. bor. 8.36.26	8 . 36 . 12
7 . 8 . 37			Long ♈ 0. 2.48	♉ 0 . 2 . 42
			Lat. bor. 8.56.30	8 . 56 . 56

Menſe *Februario* anni ineuntis 1665, ſtella prima arietis quam in ſequentibus vocabo γ, erat in ♈ 28gr. 30′. 15″ cum latitudine boreali 7gr. 8′. 58″. eScunda arietis erat in ♈ 29gr. 17′.

$17^{l}.\ 18^{ll}$ cum latitudine boreali 8gr. $28^{l}.\ 16^{ll}$. Et ſtella quædam alia ſeptimæ magnitudinis, quam vocabo *A*, erat in ♈ 28gr. $24^{l}.\ 45^{ll}$ cum latitudine boreali 8gr. $28^{l}.\ 33^{ll}$. Cometa vero *Feb.* $7^{d}.\ 7^{l}.\ 30^{ll}$ *Pariſiis* (id eſt *Feb.* $7^{d}.\ 8^{l}.\ 37^{ll}$ *Gedani*) ſt. vet. triangulum conſtituebat cum ſtellis illis γ & *A* rectangulum ad γ. Et diſtantia cometæ à ſtella γ æqualis erat diſtantiæ ſtellarum γ & *A*, id eſt 1gr. $19^{l}.\ 46^{ll}$ in circulo magno, atque ideo ea erat 1gr. $20^{l}.\ 26^{ll}$ in parallelo latitudinis ſtellæ γ. Quare ſi de longitudine ſtellæ γ detrahatur longitudo 1gr. $20^{l}.\ 26^{ll}$, manebit longitudo cometæ ♈ 27gr. $9^{l}.\ 49^{ll}$. *Auzoutius* ex hâc ſuâ obſervatione cometam poſuit in ♈ 27gr. 0^{l} circiter. Et ex ſchemate, quo *Hookius* motum ejus delineavit, is jam erat in ♈ 26gr. $59^{l}\ 24^{ll}$. Ratione mediocri poſui eundem in ♈ 27gr. $4^{l}.\ 46^{ll}$. Ex eâdem obſervatione *Auzoutius* latitudinem cometæ jam poſuit 7gr. & 4^{l} vel 5^{l} boream verſus. Eandem rectius poſuiſſet 7gr. $3^{l}.\ 29^{ll}$, exiſtente ſcilicet differentia latitudinum cometæ & ſtellæ γ æquali differentiæ longitudinum ſtellarum γ & *A*.

Feb. $22^{d}.\ 7^{h}.\ 30^{l}$ *Londini*, id eſt *Feb.* $22^{d}.\ 8^{h}.\ 46^{l}$ *Gedani*, diſtantia cometæ à ſtella *A*, juxta obſervationem *Hookii* à ſeipſo in ſchemate delineatam, ut & juxta obſervationes *Auzoutii* à *Petito* in ſchemate delineatas, erat pars quinta diſtantiæ inter ſtellam *A* & primam arietis, ſeu $15^{l}.\ 57^{ll}$. Et diſtantia cometæ à linea jungente ſtellam *A* & primam arietis erat pars quarta ejuſdem partis quintæ, id eſt 4^{l}. Ideoque cometa erat in ♈ 28gr. $29^{l}.\ 46^{ll}$, cum lat. bor. 8gr. $12^{l}.\ 36^{ll}$.

Mart. $1^{d}.\ 7^{h}.\ 0^{l}$ *Londini*, id eſt *Mart.* $1^{d}.\ 8^{h}.\ 16^{l}$ *Gedani*, cometa obſervatus fuit prope ſecundam arietis, exiſtente diſtantia inter eoſdem ad diſtantiam inter primam & ſecundam arietis, hoc eſt ad 1gr. 33^{l}, ut 4 ad 45 ſecundum *Hookium*, vel ut 2 ad 23 ſecundum *Gottignies*. Unde diſtantia cometæ à ſecunda arietis erat $8^{l}.\ 16^{ll}$ ſecundum *Hookium*, vel $8^{l}.\ 5^{ll}$ ſecundum *Gottignies*, vel ratione mediocri $8^{l}.\ 10^{ll}$. Cometa vero ſecundum *Gottignies* jam modo prætergreſſus fuerat ſecundam arietis quaſi ſpatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die confecti,

DE MUNDI SYSTEMATE.

fecti, id eſt 1. 35″ circiter (quocum ſatis conſentit *Auzoutius*) vel paulo minorem ſecundum *Hookium*, puta 1′. Quare ſi ad longitudinem primæ arietis addatur 1′, & ad latitudinem ejus 8′. 10″, habebitur longitudo cometæ ♈ 29gr. 18′, & latitudo borealis 8gr. 36′. 26″.

Mart. 7ᵈ. 7ʰ. 30′ *Pariſiis* (id eſt *Mart.* 7ᵈ. 8ʰ. 37′ *Gedani*) ex obſervationibus *Auzoutii* diſtantiâ cometæ à ſecundâ arietis æqualis erat diſtantiæ ſecundæ arietis à ſtellâ *A*, id eſt 52′. 29″. Et differentia longitudinum cometæ & ſecundæ arietis erat 45′ vel 46′, vel ratione mediocri 45. 30″. Ideoque cometa erat in ♉ 0gr. 2′. 48″. Ex ſchemate obſervationum *Auzoutii*, quod *Petitus* conſtruxit, *Hevelius* deduxit latitudinem cometæ 8gr. 54. Sed ſculptor viam cometæ ſub finem motus ejus irregulariter incurvavit, & *Hevelius* in ſchemate obſervationum *Auzoutii* à ſe conſtructo incurvationem irregularem correxit, & ſic latitudinem cometæ fecit eſſe 8gr. 55′. 30″. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere poteſt 8gr. 56′, vel 8gr. 57′.

Viſus etiam fuit hic cometa *Martii* die 9, & tunc locari debuit in ♉ 0gr. 18′, cum lat. bor. 9gr. $3\frac{1}{2}$ circiter.

Apparuit hic cometa menſes tres, ſignaque ferè ſex deſcripſit, & uno die gradus fere viginti confecit. Curſus ejus à circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus ſub finem ex retrogrado factus eſt directus. Et non obſtante curſu tam inſolito, theoriâ à principio ad finem cum obſervationibus non minus accuratè congruit, quam theoriæ planetarum cum eorum obſervationibus congruere ſolent, ut inſpicienti tabulam patebit. Subducenda tamen ſunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velociſſimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta ſecunda ab angulo inter nodum aſcendentem & perihelium, ſeu conſtituendo (ˣ) angulum illum 49gr. 27′. 18″. Cometæ utriuſque (& hujus & ſuperioris) paral-

172. (x) * *Angulum illum* inter nodum aſcendentem & perihelium invenerat Halleius 49°. 27′. 30″, conſtituto autem angulo illo 49°. 27′. 18″, computationibuſque repetitis, ſubducta inveniuntur duo minuta prima circiter, ut oportet, & theoriâ à prin-

parallaxis annua insignis fuit, & (y) indè demonstratur motus annuus terræ in orbe magno. LIBER TERTIUS. PROP. XLII. PROBL. XXII.

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ, qui apparuit anno 1683.. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano eclipticæ angulum ferè rectum continebat. Hujus nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in ♍ 23gr. 23′; inclinatio orbitæ ad eclipticam 83gr. 11′; perihelium in ♎ 25gr. 29′. 30″; distantia perihelia à sole 56020, existente radio orbis magni 100000, & tempore perihelii *Julii* 2d. 3h. 50′. Loca autem cometæ in hoc orbe ab *Halleio* computata, & cum locis à *Flamstedio* observatis collata, exhibentur in tabulâ sequente.

1683 Temp. Æquat	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ Lat
d. h. ′	gr ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13.12.55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+1. 0	+0. 7
15.11.15	2.5 .12	1 .37.4	29.34. 0	11 39 43	29.34.50	+1.55	+0.50
17.10.20	4.45 45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8 40	29.34. 0	+1.34	+0.30
23.13.40	10.18.21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+1. 3	−1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23.40	−0.53	−1. 7
31 9.42	18. 9 22	♎ 27. 55. 3	26.22.52	♎ 27 54.24	26 22.25	−0.39	−0.27
31.14 55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+0. 1	−2. 7
Aug. 2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25 17.28	−0.46	+1. 9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23 16.55	24.12.19	−1.25	+1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20 40 32	22.49. 1	−1.51	+2. 0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	−2. 2	−0.27
15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	−4.30	−5.32
16.15.10	3.48. 2	0 43. 7	9.34.16	0.41.5	9.34.13	−1.12	−0. 3
18.15.44	5.45.33	♌ 24.52.53	5.11.15 Austr	♉ 24.49. 5	5. 9.11 Austr	−3.48	−2. 4
22.14.44	9 35 49	11. 7.14	5.16.58	11. 7.12	5.16.58	−0 2	−0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	−1. 1	−0 28
26.16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16.38.20	−1.31	+0.20

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus nodus ascendens (computante *Hal-*

principio ad finem cum observationibus congruit. Corrigendam esse theoriam duobus minutis primis circiter ex observatione cometæ, ubi motus ejus velocissimus fuit, colligitur.

(y) * *Et indè demonstratur.* † Quâ ratione annua cometarum parallaxis cum telluris quiete conciliari possit legatur apud Ricciolium in almagesto, Tacquetum in Astronomiâ aliosque passim, ubi de Planetarum retrogradationibus agunt. 172.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Halleio) erat in ♉ 21gr. 16′. 30″. Inclinatio orbitæ ad planum ecliptícæ 17gr. 56′. 0″. Perihelium in ♒ 2gr 52′. 50″. Distantia perihelia à sole 58328, existente radio orbis magni 100000. Et tempus æquatum perihelii *Sept.* 4ᵈ. 7ʰ. 39′. Loca verò ex observationibus *Flamstedii* computata, & cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in tabulâ sequente.

1682. Temp. Appar.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Obser.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h.	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug 19.16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18.14.28	25.50. 7	♌ 18.14.40	25.49.55	− 0.12	+0.12
20.15.38	7.55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.22	26.12.52	+0 1	+1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29 38. 2	26.17.37	− 0 47	+2.26
22. 8. 8	9.33.55	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	− 0.10	+1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37.54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+0. 5	+3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+0.43	−0.34
Sept. 1. 7.33	19.16. 9	20 30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+3.49	+3.11
4. 7.22	22.11.28	25.42. 0	12.23.48	25 40.58	12.22. 0	+1. 2	+1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26 59.24	11.33.51	+1.22	− 0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29 58.45	9.26.43	− 0. 1	+0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0 44.10	8 49.10	♏ 0.44. 4	8.48.25	+0. 6	+0.45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus nodus ascendens (computante D. *Bradleo*, astronomiæ apud *Oxonienses* professore *Saviliano*) erat in ♈ 14gr. 16′. Inclinatio orbitæ ad planum ecliptícæ 49gr. 59′. Perihelium in ♉ 12gr. 15′. 20″. Distantia perihelia à sole 998651, existente radio orbis magni 1000000, & tempore æquato perihelii *Septem.* 16ᵈ. 16ʰ. 10′. Loca verò cometæ in hoc orbe à *Bradleo* computata, & cum locis à seipso & patruo suo D. *Poundio*, & à D. *Halleio* observatis collata exhibentur in tabulâ sequente.

1723. Temp. Æquat.	Comet. Long. Obſervat	Lat Bor. Obſervat.	Comet. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long	Differ. Latit.
d. h.	♒ ° ′ ″	° ′ ″	♒ ° ′ ″	° ′ ″	″	″
Octob. 9. 8. 5	♒ 7. 22. 15	5. 2. 0	♒ 7. 21. 26	5. 2. 47	+ 49	− 47
10. 6. 21	6. 41. 12	7. 44. 13	6. 41. 42	7. 43. 18	− 50	+ 55
12. 7. 22	5. 39. 58	11. 55. 0	5. 40. 19	11. 54. 55	− 21	+ 5
14. 8. 57	4. 59. 49	14. 43. 50	5. 0. 37	14. 44. 1	− 48	− 11
15. 6. 35	4. 47. 41	15. 4. 51	4. 47. 45	15. 4. 55	− 4	− 4
21. 6. 22	4. 2. 32	19. 41. 49	4. 2. 21	10. 42. 3	+ 11	− 14
22. 6. 24	3. 59. 2	20. 8. 12	3. 59. 10	20. 8. 17	− 8	− 5
24. 8. 2	3. 55. 29	20. 55. 18	3. 55. 11	20. 55. 9	+ 18	+ 9
29. 8. 56	3. 56. 17	22. 20. 27	3. 56. 42	22. 20. 10	− 25	+ 7
30. 6. 20	3. 58. 9	22. 32. 28	3. 58. 17	22. 32. 12	− 8	+ 16
Nov. 5. 5. 13	4. 16. 30	23. 38. 33	4. 16. 23	23. 38. 7	+ 7	+ 26
8. 7. 6	4. 29. 36	24. 4. 30	4. 29. 54	24. 4. 40	− 18	− 10
14. 6. 20	5. 2. 16	24. 48. 46	5. 2. 51	24. 48. 6	− 35	+ 30
20. 7. 45	5. 42. 20	25. 24. 45	5. 43. 13	25. 25. 17	− 53	− 32
Dec. 7. 6. 45	8. 4. 13	26. 54. 18	8. 3. 55	26. 53. 42	+ 18	+ 36

His exemplis abundè ſatis manifeſtum eſt, quod motus cometarum per theoriam à nobis expoſitam non minus accuratè exhibentur, quam ſolent motus planetarum per eorum theorias. (z) Et propterea orbes cometarum per hanc theoriam enumerari poſſunt, & tempus periodicum cometæ in quolibet orbe revolventis tandem ſciri, & tum demum orbium ellipticorum latera tranſverſa & apheliorum altitudines innoteſcent.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, deſcripſit orbem, cujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20gr. 21′; inclinatio plani orbis ad planum eclipticæ erat 17gr. 2′; perihelium erat in ♒ 2gr. 16′; & diſtantia perihelia à ſole erat 58680, exiſtente radio orbis magni 100000. Et cometa erat in perihelio *Octob.* 16d. 3h. 50′. Congruit hic orbis quamproximè cum orbe cometæ, qui apparuit anno 1682. Si cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic cometa ſpatio annorum 75, & (a) axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt{c}:75\times75$ ad 1, ſeu 1778 ad

(z) * *Et propterea.* Quomodò hæc omnia fieri poſſint variis methodis ſuprà expoſuimus.

(a) * *Et axis major* orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni ut radix cubica numeri 75×75 ad 1 (172). 172.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ad 100 circiter. Et (b) distantia aphelia cometæ hujus à sole, erit ad distantiam mediocrem terræ à sole, ut 35 ad 1 circiter. (c) Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem ellipticum cometæ hujus determinare. Atque hæc ita se habebunt, si cometa, spatio annorum septuaginta quinque, in hoc orbe posthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altiùs ascendere.

Cæterum cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam apheliorum à sole distantiam, & longam moram in apheliis, per gravitates in se mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proindè non est expectandum ut cometa idem in eodem orbe, & iisdem temporibus periodicis accuratè redeat. Sufficit si mutationes non majores obvenerint, quam quæ à causis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, (d) cur cometæ non comprehendantur zodiaco more planetarum, sed indè migrent & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in apheliis suis, ubi tardissimè moventur, quamlongissimè distent ab invicem, & se mutuò quam minime trahant. Quâ de causâ cometæ, qui altius descendunt, ideoque tardissimè moventur in apheliis, debent altiùs ascendere.

Co-

173. (b) * *Et distantia aphelia.* Quoniam distantia perihelia cometæ à sole erat 58680, existente radio orbis magni 1000 o erit eadem distantia perihelia 29, circiter existente radio orbis magni 100, ac proin de distantia aphelia quæ est differentia inter axem majorem orbitæ cometicæ 178 & distantiam perihelium 29, erit earumdem partium 1749, ideóque distantia aphelia cometæ hujus à sole erit ad distantiam mediocrem terræ à sole ut 1749 ad 29, hoc est, ut 35 ad 1 circiter.

(c) * *Quibus cognitis.* (Per prop. 20. lib. 1.).

(d) 173. * *Cur cometæ non comprehendantur Zodiaco.* Ex observato sæpe sæpius cometarum cursu retrogrado deduxit Newtonus cometas non comprehendi Zodiaco more planetarum, sed indè migrare & motibus variis in omnes cœlorum regiones excurrere. Attamen Clariss. Cassinus in monum. Paris. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos reduxit. Verum eo artificio utitur Vir Doctissimus ut distantiam cometæ à terra vel sole pro arbitrio assumat, & modò tellurem inter solem & cometam, modò cometam inter solem & telluram ac denique solem inter cometam & tellurem, pro necessitate, collocet. Quâ ratione id fieri possit non satis intelligitur, nisi ignota omninò fingatur cometarum theoria; concesso enim aliquo cometarum systemate, distantias illas pro lubitu usurpare non licet, sed ex datis motuum elementis, cometarum distantia totaque trajectoria determi-

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus distabat à sole in perihelio suo quam parte sextâ diametri solis; & propter summam velocitatem in viciniâ illâ, & densitatem aliquam atmosphæræ solis, resistentiam nonnullam sentire debuit, & aliquantulum retardari, & propiùs ad solem accedere: & singulis revolutionibus accedendo ad solem, incidet is tandem in corpus solis. Sed & in aphelio ubi tardissimè movetur, aliquando per attractionem aliorum cometarum retardari potest, & subindè in solem

terminantur. Sic Halleius definivit trajectoriam cometæ qui annis 1664. & 1665. apparuit. Ut autem retrogradum hujus cometæ motum ad directum reducat Clariss. Cassinus talem huic cometæ motum tribuit qui cum Halleii computo nequaquam convenit. Quam probe tamen cum observationibus theoria congruat ostendit tabula paulò antè exhibita. Quamvis itaque retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosâ arte reduxerit Cassinus, non id tamen satis esse arbitramur ut eam rejiciamus cometarum theoriam quæ phænomenis apprimè respondet, atque incerti finè ullâ theoriâ erremus. Præterea talem orbitam prædicto cometæ assignat Cassinus ut extrà orbem annuum fere non excurrat; Quod si res ità se haberet, hic cometa in conspectum citò rediisset, cometas enim ad maximam quoque distantiam conspicuos esse constat ex defectu parallaxeos. Nec feliciori successu ad motum directum reduci posse videtur motus retrogradus cometæ an. 1680. Nam præterquam quod omnem cometarum theoriam fictis ad arbitrium hypothesibus everti necesse sit, in explicatione Cassini gravissima occurrit difficultas cujus vim totam sensit Clariss. Vir. Oporteret scilicet ut cometa ille paulò ante 27am. diem Novembris per nodum descendentem transierit & versus diem 17m. Decembris ad nodum ascendentem pervenerit, ideóque cometa breviori quam unius mensis intervallo, totum spatium quod est infrà planum Ecclipticæ trajeciisset. Porrò tanta velocitas caret verisimilitudine, nec conciliari posse videtur cum observatis longo tem-

poris spatio hujus cometæ motibus; hic enim Astronomorum oculis citò sese subduxisset. Singulas explicationes quæ in loco cit. monum. Paris. leguntur percurrere longiùs foret, satis erit addere eas hoc potissimum fine excogitatas fuisse ut nempe servaretur & à gravissimâ objectione liberaretur vorticum hypothesis. Verum his explicationibus cæteroquin ingeniosissimis nondum tamen propositus hnis obtineri videtur; hanc enim difficultatem effugientes vorticum patroni, in aliam incurrunt. Oporteret siquidem ut cometarum vortices ipsum saltem telluris vorticem intersecarent, quod sine vorticum perturbatione ac tandem destructione fieri posse non intelligitur. Alias hypotheses finxerunt alii. Quidam cometas habuerunt tanquam planetas non circà solem nostrum, sed circa alium velut centrum revolventes. Nonnulli eos habuerunt velut satellites planetæ cujusdam primarii in nostro vortice constituti, qui tamen ob maximam illius à nobis distantiam conspici non potest, ità ut cometæ seu satellites sese nobis duntaxat conspicuos præbeant, dum in inferiori & telluris proximiori orbium suarum parte versantur. Sed à Newtonianâ cometarum theoriâ quæ phænomenis consentanea est nequaquam nos removere debent hypotheses illæ quæ eam duntaxat ob causam subtiliter inventæ sunt ut servaretur vorticum hypothesis quam aliis multis difficultatibus premi passim ostendimus. Cæterum quidquid de hâc materiâ diximus & ipsa, prout nobis visum est, rei veritas & commentatorum officium à nobis postulabant.

173.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ſolem incidere. (e) Sic etiam ſtellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem & vapores, cometis in ipſas incidentibus refici poſſunt, & novo alimento accenſæ pro ſtellis novis haberi. Hujus generis ſunt ſtellæ fixæ, quæ ſubito apparent, & ſub initio quam maximè ſplendent, & ſubindè paulatim evaneſcunt. Talis fuit ſtella in cathedrâ Caſſiopeiæ quam *Cornelius Gemma* octavo *Novembris* 1572, luſtrando illam cœli partem nocte ſerena minimè vidit; at nocte proximâ (*Novem.* 9.) vidit fixis omnibus ſplendidiorem, & luce ſuâ vix cedentem veneri. Hanc *Tycho Brahæus* vidit undecimo ejuſdem menſis ubi maximè ſplenduit; & ex eo tempore paulatim decreſcentem & ſpatio menſium ſexdecim evaneſcentem obſervavit. Menſe *Novembri*, ubi primùm apparuit, venerem luce ſuâ æquabat. Menſe *Decembri*

174. (e) 174. * *Sic etiam ſtellæ fixæ.* De ſtellarum variationibus nonnulla hic afferemus quæ habet Clariſſ. D. De Maupertuis in eximio opuſculo de figuris aſtrorum & in mon. Pariſ. an. 1734. Fixas, quæ ſunt totidem ſoles, variis donatas eſſe figuris & ex iis aliquas ad figuram planam vel planitiem accedere non repugnat. Nam à ſphæroide propemodum ſphærico per innumeros gradus depreſſionis verſus polos tandem devenitur ad planum circulare, ſi continuò varietur ratio vis centrifugæ ad gravitatem, ut patet ex num 56. His poſitis, ratio reddi poterit cur fixæ quædam nunc appareant, nunc evaneſcant, cur mutetur appareas ſtellarum quarumdam magnitudo, nec non etiam cur ſtellæ aliquæ quaſi recens accenſæ oriri viſæ ſint, quædam verò quaſi extinctæ videri deſierint. Si in ſtellarum numero reperiantur aliquæ ad figuram planam accedentes, illæ dum faciem ſuam nobis obvertunt, ſphærarum inſtar apparebunt. Si autem reſpectu noſtri ſitum ſuum mutent, magis vel minus ſtellarum illarum ſplendor decreſcet, prout hoc vel illo modo ſeſe nobis oſtendent, ac tandem exiguæ craſſitiei latus exhibeant & ſatis longe à nobis diſtent, conſpectui noſtro ſeſe omninò ſubducent. Quomodò autem fixæ reſpectu noſtri poſitionem ſuam mutent explicari poteſt, ſi ponamus circà ſtellam compreſſam revolvere planetam aliquam ingentis molis aut cometam in orbitâ valde excentricâ & ad æquatorem ſtellæ inclinata; in hâc enim hypotheſi, planeta ad perihelium ſuum accedens juxtà attractionis leges inclinationem fixæ planæ perturbabit, & hinc fieri poterit ut partem lucidam diſci nobis obverſam conſpiciamus quæ ob exiguam lateris compreſſi craſſitiem oculos noſtros anteà effugiebat. Ex his quoque intelligitur fieri poſſe ut circà planetam congregetur annulus ſaturni annulo ſimilis, ſi nempè cometa cujus cauda ex vaporibus tenuiſſimis æſtu ſolis in perihelio elevatis componitur, ad planetam aliquem maximè potentem proximè accederet. Hic enim vaporum torrens attractionis vi ad revolvendum circà planetam annuli inſtar poſſet detorqueri; imò impoſſibile non foret ipſum quoquè corpus cometæ circà planetam rapi & ſic planeta ſatellitem acquireret. Haberet autem planeta ſatellitem ſinè annulo, ſi cometa deſtitueretur caudâ, ſed adjicietur etiam annulus, ſi cometa caudam habuerit, atque annulus aderit ſinè ſatellite, ſi cauda duntaxat à planeta attrahatur. Hæc ſunt quæ ad hunc Newtoni locum præcipuè referuntur; cæterùm in laudatis opuſculis elegantiſſima ſunt problemata quæ conſulat Lector.

bri nonnihil diminuta jovem æquare videbatur. Anno 1573, menſe *Januario* minor erat jove & major Sirio, cui in fine *Februarii* & *Martii* initio evaſit æqualis. Menſe *Aprili* & *Maio* ſtellis ſecundæ magnitudinis, *Junio*, *Julio* & *Auguſto* ſtellis tertiæ magnitudinis, *Septembri*, *Octobri* & *Novembri* ſtellis quartæ, *Decembri* & anni 1574, menſe *Januario* ſtellis quintæ, & menſe *Februario* ſtellis ſextæ magnitudinis æqualis videbatur, & menſe *Martio* ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac ſplendidus, poſtea flavus, & anni 1573 menſe *Martio* rutilans inſtar martis aut ſtellæ aldebaran, *Maio* autem albitudinem ſublividam induxit, qualem in ſaturno cernimus, quem colorem uſque in finem ſervavit, ſemper tamen obſcurior facta. Talis etiam fuit ſtella in dextro pede ſerpentarii, quam *Kepleri* diſcipuli anno 1604, die 30 *Septembris* ſt. vet. apparere cœpiſſe obſervarunt, & luce ſuâ ſtellam jovis ſuperaſſe, cum nocte præcedente minimè apparuiſſet. Ab eo verò tempore paulatim decrevit, & ſpatio menſium quindecim vel ſexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam ſtellâ novâ ſupra modum ſplendente *Hipparchus* ad fixas obſervandas & in catalogum referendas excitatus fuiſſe dicitur. Sed fixæ, quæ per vices apparent & evaneſcunt, quæque paulatim creſcunt, & luce ſua fixas tertiæ magnitudinis vix unquam ſuperant, videntur eſſe generis alterius, & revolvendo partem lucidam & partem obſcuram per vices oſtendere. Vapores autem, qui ex ſole & ſtellis fixis & caudis cometarum oriuntur, incidere poſſunt per gravitatem ſuam in atmoſphæras planetarum & ibi condenſari & converti in aquam & ſpiritus humidos, & ſubindè per lentum calorem in ſales, & ſulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & ſubſtantias alias terreſtres paulatim migrare.

LIBER TERTIUS. PROP. XLII. PROBL. XXII.

SCHO-

DE MUNDI SYSTEMATE.

SCHOLIUM GENERALE.

(f) Hypotheſis vorticum multis premitur difficultatibus. Ut planeta unuſquiſque radio ad ſolem ducto areas deſcribat tempori proportionales, tempora periodica partium vorticis deberent eſſe in duplicatâ ratione diſtantiarum à ſole. Ut periodica planetarum tempora ſint in proportione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à ſole, tempora periodica partium vorticis deberent eſſe in ſeſquiplicatâ diſtantiarum proportione. Ut vortices minores circum ſaturnum, jovem & alios planetas gyrati conſerventur & tranquillè natent in vortice ſolis, tempora periodica partium vorticis ſolaris deberent eſſe æqualia. Revolutiones ſolis & planetarum circum axes ſuos, quæ cum motibus vorticum congruere deberent, ab omnibus hiſce proportionibus diſcrepant. Motus cometarum ſunt ſummè regulares, & eaſdem leges cum planetarum motibus obſervant, & per vortices explicari nequeunt. Feruntur cometæ motibus valdè eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non poteſt, niſi vortices tollantur.

Projectilia, in aëre noſtro, ſolam aëris reſiſtentiam ſentiunt. Sublato aëre, ut fit in vacuo *Boyliano*, reſiſtentia ceſſat, ſiquidem pluma tenuis & aurum ſolidum æquali cum velocitate in hoc vacuo cadunt. Et par eſt ratio ſpatiorum cœleſtium, quæ ſunt ſuprà atmoſphæram terræ. Corpora omnia in iſtis ſpatiis liberrimè moveri debent; & propterea planetæ & cometæ in orbibus ſpecie & poſitione datis ſecundum leges ſuprà expoſitas perpetuò revolvi. Perſeverabunt quidem in orbibus ſuis per leges gravitatis, ſed regularem orbium ſitum primitùs acquirere per leges haſce minimè potuerunt.

Planetæ ſex principales revolvuntur circum ſolem in circulis ſoli concentricis, eâdem motus directione, in eodem plano quamproximè. Lunæ decem revolvuntur circum terram, jovem & ſaturnum in circulis concentricis, eâdem motus directio-

174. (f) * *Hypotheſis vorticum.* (Prop. 52. lib. 2. cum coroll. ſchol. prop. 43. lib. 2. & not. 173. lib. huj.).

tione, in planis orbium planetarum quamproximè. (g) Et hi omnes motus regulares originem non habent ex cauſis mechanicis; ſiquidem cometæ in orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes liberè feruntur. Quo motus genere cometæ per orbes planetarum celerrimè & facillimè tranſeunt, & in apheliis ſuis ubi tardiores ſunt & diutius morantur; quàm longiſſimè diſtant ab invicem, ut ſe mutuò quam minimè trahant. Elegantiſſima hæcce ſolis, planetarum & cometarum compages non niſi conſilio & dominio entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et ſi ſtellæ fixæ ſint centra ſimilium ſyſtematum, hæc omnia ſimili conſilio conſtructa ſuberunt *Unius* dominio: præſertim cum lux fixarum ſit ejuſdem naturæ ac lux ſolis, & ſyſtemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne fixarum ſyſtemata per gravitatem ſuam in ſe mutuò cadant, hic eadem immenſam ab invicem diſtantiam poſuerit. LIBER TERTIUS. PROP. XLII. PROBL. XXI.

Hic omnia regit non ut anima mundi, ſed ut univerſorum dominus. Et propter dominium ſuum, dominus deus (*) Παντοκράτωρ dici ſolet. Nam deus eſt vox relativa & ad ſervos refertur: & deitas eſt dominatio Dei, non in corpus proprium, uti ſentiunt quibus deus eſt anima mundi, ſed in ſervos. Deus ſummus eſt ens æternum, infinitum, abſolutè perfectum: ſed ens utcunque perfectum ſine dominio non eſt dominus deus. Dicimus enim deus meus, deus veſter, deus *Iſraelis*, deus deorum, & dominus dominorum: ſed non dicimus æternus meus, æter-

(g) * *Et hi omnes motus regulares.* Celeberrimi Viri Joannes & Daniel Bernoullius, prior in phyſicâ cœleſti, poſterior in diſquiſitionibus Phyſico-Aſtronomicis mechanicam horumce motuum cauſam ex vorticibus repetunt. Sed cum mechanicæ explicationes illæ omnibus obnoxiæ ſint difficultatibus quibus vorticum hypotheſim premi jam oſtendimus, huic rei diutiùs non immorabimur. Satis erit deſcribere verba quæ habet Johan. Bernoullius mentionem faciens de hoc ipſo Newtoni loco. (Si cauſæ illæ non ſunt mechanicæ, erunt præternaturales & miraculo tribuendæ; ſed magnum Philoſophum non decet ad miraculum recurrere, ubi alicujus phænomeni quæritur explicatio.). Numquid pari jure carteſianum Philoſophum poſſumus interrogare quânam causâ mechanicâ vortices ſecundùm varias directiones ferantur, cur planetarum circumſolarium vortices ab occidente in orientem moveantur? ubi phænomenon aliquod ad primam cauſam deductum eſt, hic hærere cauſamque mechanicam ulteriùs non quærere, magnum Philoſophum non dedecet. 174.

(*) Id eſt Imperator univerſalis.

DE MUNDI SYSTEMATE.

æternus veſter, æternus *Iſraelis*, æternus deorum; non dicimus infinitus meus, vel perfectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad ſervos. Vox deus paſſim (†) ſignificat dominum: ſed omnis dominus non eſt deus. Dominatio entis ſpiritualis deum conſtituit, vera verum, ſumma ſummum, ficta fictum. Et ex dominatione verâ ſequitur deum verum eſſe vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus ſummum eſſe, vel ſummè perfectum. Æternus eſt & infinitus, omnipotens & omniſciens, id eſt, durat ab æterno in æternum, & adeſt ab infinito in infinitum: omnia regit; & omnia cognoſcit, quæ fiunt aut fieri poſſunt. Non eſt æternitas & infinitas, ſed æternus & infinitus; non eſt duratio & ſpatium, ſed durat & adeſt. Durat ſemper, & adeſt ubique, & exiſtendo ſemper & ubique, durationem & ſpatium conſtituit. Cum unaquæque ſpatii particula ſit *ſemper*, & unumquodque durationis indiviſibile momentum *ubique*, certè rerum omnium fabricator ac dominus non erit *nunquam*, *nuſquam*. Omnis anima ſentiens diverſis temporibus, & in diverſis ſenſuum, & motuum organis eadem eſt perſona indiviſibilis. Partes dantur ſucceſſivæ in duratione, coexiſtentes in ſpatio, neutræ in perſona hominis ſeu principio ejus cogitante; & multò minus in ſubſtantia cogitante dei. Omnis homo, quatenus res ſentiens, eſt unus & idem homo durante vitâ ſuâ in omnibus & ſingulis ſenſuum organis. Deus eſt unus & idem deus ſemper & ubique. Omnipræſens eſt non per *virtutem* ſolam, ſed etiam per *ſubſtantiam*: nam virtus ſine ſubſtantia ſubſiſtere non poteſt. In ipſo (‡) continentur & moventur univerſa, ſed ſine mutuâ paſſione. Deus nihil

(†) *Pocokus* noſter vocem *dei* deducit à voce *Arabicâ du*, (& in caſu aliquo *di*,) quæ dominum ſignificat. Et hoc ſenſu principes vocantur dii, *Pſal.* lxxxiv. 6 & *Joan.* x. 45. Et *Moſes* dicitur *deus* fratris *Aaron*, & *deus* regis *Pharaoh* (*Exod.* iv. 16. & vii. 1.) Et eodem ſenſu animæ principum mortuorum olim à gentibus vocabantur dii, ſed falſo propter defectum dominii. (*Nota Autoris*).

(‡) Ita ſentiebant veteres, ut *Pythagoras* apud *Ciceronem*, de Naturâ deorum, *lib.* 1. *Thales*, *Anaxagoras*, *Virgilius*, Georgic. *lib.* iv. *v* 220. & Æneid. *lib.* 6. *v.* 721. *Philo* Allegor. *lib.* 1. ſub initio *Aratus* in Phænom. ſub initio. Ita etiam ſcriptores ſacri ut *Paulus* in Act. xvii. 27. 28. *Johannes* in Evang xiv. 2. *Moſes* in Deut. iv. 39. & x. 14. *David* Pſal. cxxxix. 7. 8. 9. *Salmon* 1. Reg. viii. 27. *Job* xxii. 12. 13.

nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam ſentiunt reſiſtentiam ex omnipræſentiâ dei. Deum ſummum neceſſariò exiſtere in confeſſo eſt: Et eâdem neceſſitate *ſemper* eſt & *ubique*. Unde etiam totus eſt ſui ſimilis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis ſentiendi, intelligendi, & agendi, ſed more minimè humano, more minimè corporeo, more nobis prorſus incognito. Ut cæcus non habet ideam colorum, ſic nos ideam non habemus modorum, quibus deus ſapientiſſimus ſentit & intelligit omnia. Corpore omni & figurâ corporeâ prorſus deſtituitur, ideoque videri non poteſt, nec audiri, nec tangi, nec ſub ſpecie rei alicujus corporeæ coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, ſed quid ſit rei alicujus ſubſtantia minimè cognoſcimus. Videmus tantùm corporum figuras & colores, audimus tantùm ſonos, tangimus tantùm ſuperficies externas, olfacimus odores ſolos, & guſtamus ſapores: intimas ſubſtantias nullo ſenſu, nullâ actione reflexâ cognoſcimus; & multò minùs ideam habemus ſubſtantiæ dei. Hunc cognoſcimus ſolummodo per proprietates ejus & attributa, & per ſapientiſſimas & optimas rerum ſtructuras & cauſas finales, & admiramur ob perfectiones; veneramur autem & colimus ob dominium. Colimus enim ut ſervi, & deus ſine dominio, providentiâ, & cauſis finalibus nihil aliud eſt quam fatum & natura. A cæcâ neceſſitate metaphyſicâ, quæ utique eadem eſt ſemper & ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diverſitas, ab ideis & voluntate entis neceſſariò exiſtentis ſolummodo oriri potuit. Dicitur autem deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, iraſci, pugnare, fabricare, condere, conſtruere. Nam ſermo omnis de deo à rebus humanis per ſimilitudinem aliquam deſumitur, non perfectam quidem, ſed aliqualem tamen. Et hæc de deo, de

13. 14. *Jeremias* xxiii. 23. 24. Fingebant autem idololatræ ſolem, lunam, & aſtra, animas hominum & alias mundi partes eſſe partes dei ſummi & ideò colendas ſed falsò. (*Nota Autoris*).

DE MUNDI SYSTEMATE.

de quo utique ex phænomenis differere, ad philoſophiam naturalem pertinet.

Hactenus phænomena cælorum & maris noſtri per vim gravitatis expoſui, ſed cauſam gravitatis nondum aſſignavi. Oritur utique hæc vis à causâ aliquâ, quæ penetrat ad uſque centra ſolis & planetarum, ſine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *ſuperficierum* particularum, in quas agit (ut ſolent cauſæ mechanicæ) ſed pro quantitate materiæ *ſolidæ*; & cujus actio in immenſas diſtantias undique extenditur, decreſcendo ſemper in duplicatâ ratione diſtantiarum. Gravitas in ſolem componitur ex gravitatibus in ſingulas ſolis particulas, & recedendo à ſole decreſcit accuratè in duplicatâ ratione diſtantiarum ad uſque orbem ſaturni, (h) ut ex quiete apheliorum planetarum manifeſtum eſt, & ad uſque ultima cometarum aphelia, ſi modo aphelia illa quieſcant. Rationem verò harum gravitatis proprietatum ex phænomenis nondum potui deducere, & hypotheſes non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *hypotheſis* vocanda eſt, & hypotheſes ſeu metaphyſicæ, ſeu phyſicæ, ſeu qualitatum occultarum, ſeu mechanicæ, in *philoſophiâ experimentali* locum non habent. In hâc philoſophiâ propoſitiones deducuntur ex phænomenis, & redduntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et ſatis eſt quod gravitas reverà exiſtat, & agat ſecundum leges à nobis expoſitas, & ad corporum cæleſtium & maris noſtri motus omnes ſufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de ſpiritu quodam ſubtiliſſimo corpora craſſa pervadente, & in iiſdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas diſtantias ſe mutuò attrahunt, & contiguæ factæ cohærent: & corpora electrica agunt ad diſtantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuſcula vicina; & lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & ſenſatio omnis excitatur, & membra ani-

274. (h) * *Ut ex quiete apheliorum.* (Prop. 2. lib. huj.).

animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus ſcilicet hujus ſpiritus per ſolida nervorum capillamenta ab externis ſenſuum organis ad cerebrum & à cerebro in muſculos propagatis. (i) Sed hæc paucis exponi non poſſunt; neque adeſt ſufficiens copia experimentorum, quibus leges actionum hujus ſpiritus accuratè determinari & monſtrari debent.

(i) * *Sed hæc paucis exponi non poſſunt.* De hoc ſubtiliſſimo ſpiritu plurimas quæſtiones ſibi proponit Newtonus in tractatu opticæ. 174

FINIS.

INDEX LIBRI TERTII.

REGULÆ PHILOSOPHANDI. Pag. 2.
PHOENOMENA. 6
PROPOSITIONES. 22

INDEX PROPOSITIONUM TOTIUS OPERIS.

IN TOMO PRIMO.

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS. LEX I. *Corpus omne perseverat in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quâtenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare.* Pag. 20

LEX II. *Mutatio motus proportionalis est vi motrici impressæ & fit secundùm lineam rectam quâ vis illa imprimitur.* 21

LEX III. *Actioni contraria semper & æqualis est reactio: sive corporum duorum actiones in se mutuò semper sunt æquales & in contrarias partes diriguntur.* 23

PROPOSITIO I. THEOREMA I. *Areæ quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis, describunt, & in planis immobilibus consistunt & sunt temporibus proportionales.* 89

PROP II. THEOR. II. *Corpus omne quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ & radio ducto ad punctum*

vel immobile vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeturque à vi centripetâ tendente ad idem punctum. Pag. 92

PROP. III. THEOR. III. *Corpus omne quod radio ad centrum corporis alterius utcumque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compositâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.* 94

PROP. IV. THEOR. IV. *Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorumdem circulorum tendere, & esse inter se ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.* 96

PROP. V. PROBLEMA I. *Datâ quibuscunque in locis velocitate quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.* 105

PROP. VI. THEOR. V. *Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur & arcum quemvis jamjam nascente tempore quàm minimo describat & sagitta arcûs duci intelligatur quæ cordam bisecet & producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcûs, ut sagitta directè & tempus bis inversè.* 106

PROP. VII. PROBL. II. *Gyretur corpus in circumferentiâ circuli, requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.* 111

PROP. VIII. PROBL. III. *Moveatur corpus in semicirculo* PQA: *ad hunc effectum requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeò longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS, *ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.* 114

PROP. IX. PROBL. IV. *Gyretur corpus in spirali* PQS *secante radios omnes* SP, SQ &c. *in angulo dato: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.* 136

PROP. X. PROBL. V. *Gyretur corpus in Ellipsi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.* 137

PROP. XI. PROBL. VI. *Revolvatur corpus in Ellipsi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.*

ſeos. Pag. 153

PROP. XII. PROBL. VII. *Moveatur corpus in Hyperbolâ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.* 156

PROP. XIII. PROBL. VIII. *Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.* 160

PROP. XIV. THEOR. VI. *Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta ſit reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ locorum à centro; dico quod orbium latera recta principalia ſunt in duplicatâ ratione arearum quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore deſcribunt.* 163

PROP. XV. THEOR. VII. *Iiſdem poſitis, dico quod tempora periodica in ellipſibus ſunt in ratione ſeſquiplicatâ majorum axium.* 164

PROP. XVI. THEOR. VIII. *Iiſdem poſitis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demiſſiſque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum ſunt in ratione compoſitâ ex ratione perpendiculorum inversè & ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.* 165

PROP. XVII. PROBL. IX. *Poſito quod vis centripeta ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, & quod vis illius quantitas abſoluta ſit cognita, requiritur linea quam corpus deſcribit de loco dato cum datâ velocitate ſecundùm datam rectam egrediens.* 170

PROP. XVIII. PROBL. X. *Datis umbilico & axibus principalibus deſcribere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ tranſibunt per puncta data & rectas poſitione datas contingent.* 176

PROP. XIX. PROBL. XI. *Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.* 176

PROP. XX. PROBL. XII. *Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.* 178

PROP.

PROP. XXI. PROBL. XIII. *Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.* Pag. 185

PROP. XXII. PROBL. XIV. *Trajectoriam per data quinque puncta describere.* 207

PROP. XXIII. PROBL. XV. *Trajectoriam describere quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.* 210

PROP. XXIV. PROBL. XVI. *Trajectoriam describere quæ per data tria puncta & rectas duas positione datas continget.* 214

PROP. XXV. PROBL. XVII. *Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit & rectas tres continget positione datas.* 223

PROP. XXVI. PROBL. XVIII. *Trajectoriam describere quæ transibit per punctum datum & rectas quatuor positione datas continget.* 226

PROP. XXVII. PROBL. XIX. *Trajectoriam describere quæ rectas quinque positione datas continget.* 232

PROP. XXVIII. PROBL. XX. *Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.* 250

PROP. XXIX. PROBL. XXI. *Trajectoriam specie datam describere quæ à rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie, & proportione datas.* 256

PROP. XXX. PROBL. XXII. *Corporis in data trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus assignatum.* 259

PROP. XXXI. PROBL. XXIII. *Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus assignatum.* 270

PROP. XXXII. PROBL. XXIV. *Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, spatia definire quæ corpus rectà cadendo datis temporibus describit.* 292

PROP. XXXIII. THEOR. IX. *Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *est ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum describentis, in subdu-*

plicatâ ratione quam AC *distantia corporis à circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A *habet ad figuræ semidiametrum principalem* ½ AB. Pag. 294

PROP. XXXIV. THEOR. X, *Si figura* BED *parabola est, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis est velocitati quâ corpus centro* B *dimidio intervalli sui* BC *circulum uniformiter describere potest.* 297

PROP. XXXV. THEOR. XI. *Iisdem positis dico quod area figuræ* DES, *radio indefinito* SD *descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando eodem tempore describere potest.* 298

PROP. XXXVI. PROBL. XXV. *Corporis de loco dato* A *cadentis determinare tempora descensus.* 301

PROP. XXXVII. PROBL. XXVI. *Corporis de loco dato sursùm vel deorsùm projecti definire tempora ascensus vel descensus.* 302

PROP. XXXVIII. THEOR. XII. *Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiæ locorum à centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & spatia descripta, sunt arcubus arcuumque sinibus rectis & sinibus versis respectivè proportionalia.* 303

PROP. XXXIX. PROBL. XXVII. *Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectà ascendentis vel descendentis tùm velocitas in locis singulis, tùm tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.* 305

PROP. XL. THEOR. XIII. *Si corpus cogente vi quâcunque centripetâ moveatur utcunque, & corpus aliud rectà ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.* 312

PROP. XLI. PROBL XXVIII. *Positâ cujuscunque generis vi centripetâ & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.* 318

PROP.

PROP. XLII. PROBL. XXIX. *Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate ſecundùm datam rectam egreſſi.* Pag. 332

PROP. XLIII. PROBL. XXX. *Efficiendum eſt ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri poſſit atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quieſcente.* 334

PROP. XLIV. THEOR. XIV. *Differentia virium quibus corpus in orbe quieſcente & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri poſſunt eſt in triplicatâ ratione communis altitudinis inversè.* 336

PROP. XLV. PROBL. XXXI. *Orbium qui ſunt circulis maximè finitimi requiruntur motus apſidum.* 348

PROP. XLVI. PROBL. XXXII. *Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis; requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, ſecundùm rectam in plano illo datam egreſſi.* 361

PROP. XLVII. THEOR. XV. *Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis à centro; corpora omnia in planis quibuſcunque revolventia deſcribent ellipſes & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citròque diſcurrendo ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem temporibus abſolvent.* 362

PROP. XLVIII. THEOR. XVI. *Si rota globo extrinſecus ad angulos rectos inſiſtat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque Cycloïdem vel Epicycloïdem nominare licet) erit ad duplicatum ſinum verſum arcûs dimidii qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.* 364

PROP. XLIX. THEOR. XVII. *Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad du-*

duplicatum ſinum verſum arcûs dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi. Pag. 364

PROP. L. PROBL. XXXIII. *Facere ut corpus pendulum oſcilletur in Cycloïde datâ.* 370

PROP. LI. THEOR. XVIII. *Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum* C *ſit in locis ſingulis ut diſtantia loci cujuſque à centro & hâc ſolâ vi agente corpus* T *oſcilletur (modo jam deſcripto) in perimetro Cycloïdis* QRS*: dico quod oſcillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.* 374

PROP. LII. PROBL. XXXIV. *Definire & velocitates pendulorum in locis ſingulis & tempora quibus oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur.* 377

PROP. LIII. PROBL. XXXV. *Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oſcillationes ſemper iſochronas peragent.* 384

PROP. LIV. PROBL. XXXVI. *Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis invenire tempora quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuſcunque curvis, in plano per centrum virium tranſeunte deſcriptis, deſcendent & aſcendent.* 390

PROP. LV. THEOR. XIX. *Si corpus movetur in ſuperficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium tranſit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa area tempori proportionalem deſcribet.* 392

PROP. LVI. PROBL. XXXVII. *Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, datiſque tum Lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum ſuperficie curvâ cujus axis per centrum illud tranſit; invenienda eſt trajectoria quam Corpus in eadem ſuperficie deſcribet, de loco dato, datâ cum velocitate, versùm plagam in ſuperficie illâ datam egreſſum.* 396

PROP. LVII. THEOR. XX. *Corpora duo ſe invicem trahentia deſcribunt, & circùm commune centrum gravitatis, & circùm ſe mutuò figuras ſimiles.* 404

PROP. LVIII. THEOR. XXI. *Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuò*

mutuò trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quòd figuris, quas corpora ſic mota deſcribunt circùm ſe mutuò, poteſt figura ſimilis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iiſdem deſcribi. Pag. 406

PROP. LIX. THEOR. XXII. *Corporum duorum* S *&* P *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum eſſe ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, & figuris quas corpora circùm ſe mutuò deſcribunt figuram ſimilem & æqualem deſcribentis, in ſubduplicatâ ratione corporis alterius* S, *ad ſummam corporum* S+P. 409

PROP. LX. THEOR. XXIII. *Si corpora duo* S *&* P, *viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus, ſe mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipſeos quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *deſcribit, axis principalis erit ad axem principalem ellipſeos quam corpus idem* P *circa alterum quieſcens* S *eodem tempore periodico deſcribere poſſet, ut ſumma corporum duorum* S+P *ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc ſummam & Corpus illud alterum* S. 410

PROP. LXI. THEOR. XXIV. *Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuò trahentia, neque aliàs agitata vel impedita quomodocunque moveantur, motus eorum perinde ſe habebunt, ac ſi non traherent ſe mutuò, ſed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto viribus iiſdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex reſpectu diſtantiæ corporum à centro illo communi atque reſpectu diſtantiæ totius inter corpora.* 411

PROP. LXII. PROBL. XXXVIII. *Corporum duorum quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus ſe mutuò trahunt, ac de locis datis demittuntur determinare motus.* 412

PROP. LXIII. PROBL. XXXIX. *Corporum duorum quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus ſe mutuò trahunt, deque locis datis, ſecundùm datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.* 412

PROP. LXIV. PROBL. XL. *Viribus quibus corpora ſe mutuò trahunt creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum à centris: re-*

quiruntur motus plurium corporum inter ſe. Pag. 415

PROP. LXV. THEOR. XXV. *Corpora plura quorum vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum ab eorumdem centris, moveri poſſe inter ſe in ellipſibus & radiis ad umbilicos ductis areas deſcribere temporibus proportionales quamproximè.* 418

PROP. LXVI. THEOR. XXVI. *Si corpora tria quorum vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum, ſe mutuò trahent; & attractioness acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint inter ſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipſum ductis, deſcribet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipſeos umbilicum in concurſu radiorum habentis magis accedentem, ſi corpus maximum his attractionibus agitetur, quàm ſi maximum illud vel à minoribus non attractum quieſcat, vel multò minùs vel multò magis attractum; aut multò minùs aut multò magis agitetur.* 421

PROP. LXVII. THEOR. XXVII. *Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius* S, *circa interiorum* PT, *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales & orbem ad formam ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipſum ductis, deſcribere poteſt.* 459

PROP. LXVIII. THEOR. XXVIII. *Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius* S, *circa interiorum* P & T, *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, ſi corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quàm ſi id vel non attractum quieſcat, vel multò magis aut multò minùs attractum aut multò magis aut multò minùs agitetur.* 460

PROP. LXIX. THEOR. XXIX. *In ſyſtemate corporum plurium* A, B, C, D, *&c. Si corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B,

B, C, D, &c. *viribus acceleratricibus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente, & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, &c. *viribus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente: erunt abſolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora* A, B, *quorum ſunt vires.* Pag. 462

PROP. LXX. THEOR. XXX. *Si ad ſphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quod corpuſculum intrà ſuperficiem conſtitutum his viribus nullam in partem attrahitur.* 465

PROP. LXXI. THEOR. XXXI. *Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra ſphæricam ſuperficiem conſtitutum attrahitur ad centrum ſphæræ; vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.* 466

PROP. LXXII. THEOR. XXXII. *Si ad ſphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; ac detur tùm ſphæræ denſitas, tùm ratio Diametri ſphæræ ad diſtantiam corpuſculi à centro ejus: dico quod vis quâ corpuſculum attrahitur, proportionalis erit ſemidiatro ſphæræ.* 468

PROP. LXXIII. THEOR. XXXIII. *Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quod corpuſculum intra ſphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.* 470

PROP. LXXIV. THEOR. XXXIV. *Iiſdem poſitis dico quod corpuſculum extra ſphæram conſtitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.* 470

PROP. LXXV. THEOR. XXXV. *Si ad ſphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis, dico quod ſphæra quævis alia ſimilaris ab eadem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.* 471

PROP. LXXVI. THEOR. XXXVI. *Si ſphæræ in progreſſu à centro*

tro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſunt undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiæ corporis attracti: dico quod vis tota, quâ hujuſmodi ſphæra una attrahit aliam, ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum. Pag. 474

PROP. LXXVII. THEOR. XXXVII. *Si ad ſingula ſphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales diſtantiis punctorum à corporibus attractis: dico quòd vis compoſita, quâ ſphæræ duæ ſe mutuò trahent, eſt ut diſtantia inter centra ſphærarum.* 476

PROP. LXXVIII. THEOR. XXXVIII. *Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujuſmodi ſphæræ duæ ſe mutuò trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra ſphærarum.* 478

PROP. LXXIX. THEOR. XXXIX. *Si ſuperficies ab latitudinem infinitè diminutam jamjam evaneſcens* EFfe, *convolutione ſui circa axem* PS, *deſcribat ſolidum ſphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in* P, *eſt in ratione compoſitâ ex ratione ſolidi* DE*q*×Ff, *& ratione vis quâ particula data in loco* Ff *traheret idem corpuſculum.* 481

PROP. LXXX. THEOR. XL. *Si ad ſphæræ alicujus* ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ; & ad ſphæræ* AB, *in quo corpuſculum aliquod* B *locatur, erigantur de punctis ſingulis* D *perpendicula* DE *ſphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitas* $\frac{DE^q \times PS}{PE}$ *& vis, quam ſphæræ particu-*

la

la ſita in axe ad diſtantiam PE *exercet in corpuſculum* P *trahitur verſus ſphæram, eſt ut area* ANB *comprehenſa ſub axe ſphæræ* AB, *& lineâ curvâ* ANB, *quam punctum* N *perpetuò tangit.* Pag. 483

PROP. LXXXI. PROBL. XLI. *Stantibus jam poſitis, menſuranda eſt area* ANB. 486

PROP. LXXXII. THEOR. XLI. *In ſphærâ centro* S, *intervallo* SA *deſcripta, ſi capiantur* SI, SA, SP, *continuè proportionales: dico quod corpuſculi intra ſphæram, in loco quovis* I, *attractio eſt ad attractionem ipſius extra ſphæram, in loco* P, *in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro* IS, PS, *& ſubduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.* 496

PROP. LXXXIII. PROBL. XLII. *Invenire vim quâ corpuſculum in centro ſphæræ locatum ad ejus ſegmentum quodcunque attrahitur.* 500

PROP. LXXXIV. PROBL. XLIII. *Invenire vim, quâ corpuſculum, extra centrum ſphæræ in axe ſegmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem ſegmento.* 502

PROP. LXXXV. THEOR. XLII. *Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum eſt, attractio longè fortior ſit, quàm cum vel minimo intervallo ſeparantur ab invicem: vires particularum trahentis, in receſſu corporis attracti, decreſcunt in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiarum à particulis.* 503

PROP. LXXXVI. THEOR. XLIII. *Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in receſſu corporis attracti decreſcunt in triplicatâ vel pluſquam triplicatâ ratione diſtantiarum à particulis, attractio longè fortior erit in contactu, quàm cùm trahens & attractum intervallo vel minimo ſeparantur ab invicem.* 503

PROP. LXXXVII. THEOR. XLIV. *Si corpora duo ſibi invicem ſimilia, & ex materiâ æqualiter attractivâ conſtantia, ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: artractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota, erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum par-*

ticulas totis proportionales, & in totis similiter positas. Pag. 504

PROP. LXXXVIII. THEOR. XLV. *Si particularum æqualium corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut distantiæ locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis, & eadem erit cum vi globi ex materiâ consimili & æquali constantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.* 506

PROP. LXXXIX. THEOR. XLVI. *Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum à singulis: vis ex omnium viribus composita, quâ corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.* 508

PROP. XC. PROBL. XLIV. *Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescentes in quacunque distantiarum ratione: invenire vim, quâ corpusculum attrahitur ubivis positum in rectâ quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.* ibid.

PROP. XCI. PROBL. XLV. *Invenire attractionem Corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quâcunque distantiarum ratione decrescentes.* 511

PROP. XCII. PROBL. XLVI. *Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.* 520

PROP. XCIII. THEOR. XLVII. *Si solidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu à solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquàm quadraticæ, & vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie planâ, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi à plano, & index ternario minor quàm index potestatis distantiarum.* 522

PROP. XCIV. THEOR. XLVIII. *Si media duo similaria, spatio pla-*

planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ. Pag. 535

PROP. XCV. THEOR. XLIX. *Iisdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.* 536

PROP. XCVI. THEOR. L. *Iisdem positis, & quod motus ante incidentiam velocior sit quàm postea, dico quòd corpus inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.* 537

PROP. XCVII. PROBL. XLVII. *Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerare possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.* 542

PROP. XCVIII. PROBL XLVIII. *Iisdem positis, & circa axem* AB *descriptâ superficie quacunque attractiva* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam* EF *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.* 546

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI PRIMI.

INDEX
PROPOSITIONUM
LIBRI SECUNDI
IN TOMO SECUNDO.

PROPOSITIO I. THEOREMA I. *Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentia amissus, est ut spatium movendo confectum.* Pag. 17

PROP. II. THEOR. II. *Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem solâ vi insitâ per medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione geometricâ, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.* 18

PROP. III. PROBL. I. *Corporis cui, dùm in medio similari rectà ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.* 20

PROP. IV. PROBL. II. *Posito quòd vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis, definire motum projectilis in eodem resistentiam velocitati proportionalem patientis.* 27

PROP. V. THEOR. III. *Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ per medium similare moveatur; tempora verò sumantur in progressione geometricâ à minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem progressione geometricâ inversè, & quòd spatia sunt æqualia quæ singulis temporibus describuntur.* 46

PROP. VI. THEOR. IV. *Corpora sphærica homogenea & æqualia, resistentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita & solis viribus insitis incitata, temporibus quæ sunt reciprocè ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, & amit-*

amittunt partes velocitatum proportionales totis. Pag. 52

PROP. VII. THEOR. V. *Corpora ſphærica quibus reſiſtitur in ratione duplicatâ velocitatum, temporibus quæ ſunt ut motus primi directè & reſiſtentiæ primæ inversè, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.* ibid.

PROP. VIII. THEOR. VI. *Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectà aſcendat vel deſcendat, & ſpatium totum deſcriptum diſtinguatur in partes æquales, inque principiis ſingularum partium (addendo reſiſtentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus aſcendit, vel ſubducendo ipſam quando corpus deſcendit) inveſtigentur vires abſolutæ; dico quod vires illæ abſolutæ ſunt in progreſſione geometricâ.* 61

PROP. IX. THEOR. VII. *Poſitis jam demonſtratis, dico quod ſi tangentes angulorum ſectoris circularis & ſectoris hyperbolici ſumantur velocitatibus proportionales, exiſtente radio juſtæ magnitudinis: erit tempus omne aſcendendi ad locum ſummum ut ſector circuli, & tempus omne deſcendendi à loco ſummo ut ſector hyperbolæ.* 64

PROP. X. PROBL. III. *Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas & medii reſiſtentia in locis ſingulis.* 79

PROP. XI. THEOR. VIII. *Si corpori reſiſtitur, partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, & idem ſolâ vi inſitâ in medio ſimilari movetur: ſumantur autem tempora in progreſſione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progreſſione geometricâ.* 121

PROP. XII. THEOR. IX. *Iiſdem poſitis, dico quòd ſi ſpatia deſcripta ſumantur in progreſſione arithmeticâ, velocitates datâ quâdam quantitate auctæ erunt in progreſſione geometricâ.* 123

PROP. XIII. THEOR. X. *Poſito quod corpus ab uniformi gravi-*

gravitate deorsùm attractum rectà ascendit vel descendit; & quòd eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ: dico quod, si circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum à dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum sectores, rectis à centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contrà. Pag. 125

PROP. XIV. THEOR. XI. *Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione arithmeticâ; si vires ex resistentiâ & gravitate compositæ sumantur in progressione geometricâ.* 131

PROP. XV. THEOR. XII. *Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum à centro immobili, sitque vis centripeta in duplicatâ ratione densitatis: dico quod corpus gyrari potest in spirali quæ radios omnes à centro illo ductos intersecat in angulo dato.* 146

PROP. XVI. THEOR. XIII. *Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum à centro immobili, sitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejusdem distantiæ: dico quod corpus gyrari potest in spirali quæ radios omnes à centro illo ductos intersecat in angulo dato.* 158

PROP. XVII. PROBL. IV. *Invenire & vim centripetam & medii resistentiam, quâ corpus in datâ spirali, datâ velocitatis lege revolvi potest.* 160

PROP. XVIII. PROBL. V. *Datâ lege vis centripetæ, invenire medii densitatem in locis singulis, quâ corpus datam spiralem describet.* 161

PROP. XIX. THEOR. XIV. *Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (sepositâ condensationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & sine omni motu à pressione illâ orto permanent in locis suis.* 166

PRO-

PROP. XX. THEOR. XV. *Si fluidi ſphærici & in æqualibus à centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis, partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.* Pag. 168

PROP. XXI. THEOR. XVI. *Sit fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus à vi centripetâ diſtantiis ſuis à centro reciprocè proportionali deorsùm trahentur: dico quod, ſi diſtantiæ illæ ſumantur continuè proportionales, denſitates fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continuè proportionales.* 174

PROP. XXII. THEOR. XVII. *Sit fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus à gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum à centro reciprocè proportionali deorsùm trahantur: dico quod ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione muſicâ, denſitates fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione geometricâ.* 177

PROP. XXIII. THEOR. XVIII. *Si fluidi ex particulis ſe mutuò fugentibus compoſiti denſitas ſit ut compreſſio, vires centrifugæ particularum ſunt reciprocè proportionales diſtantiis centrorum ſuorum. Et vice versâ, particulæ viribus quæ ſunt reciprocè proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuò fugientes componunt fluidum elaſticum, cujus denſitas eſt compreſſioni proportionalis.* 186

PROP. XXIV. THEOR. XIX. *Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum à centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione ponderum & ratione duplicatâ temporum oſcillationum in vacuo.* 189

PROP. XXV. THEOR. XX. *Corpora funependula quibus, in medio quovis, reſiſtitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejuſdem gravitatis ſpecificæ medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in Cycloïde eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.* 194

PROP. XXVI. THEOR. XXI. *Corporum funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in Cycloïde ſunt Iſochronæ.* 197

PROP.

PROP. XXVII. THEOR. XXII. *Si corporibus funependulis resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales quamproximè.* Pag. 198

PROP. XXVIII. THEOR. XXIII. *Si corpori funependulo in Cycloïde oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcûs descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.* 202

PROP. XXIX. PROBL. VI. *Posito quod corpori in Cycloïde oscillanti resistitur in duplicatâ ratione velocitatis invenire resistentiam in locis singulis.* 204

PROP. XXX. THEOR. XXIV. *Si recta* AB *æqualis sit Cycloïdis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK *quæ sint ad longitudinem penduli ut resistentia corporis in arcûs punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum & arcum ascensu toto subsequente descriptum ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit areæ* BKa *à perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.* 212

PROP. XXXI. THEOR. XXV. *Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in datâ ratione, differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.* 219

PROP. XXXII. THEOR. XXVI. *Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint & proportionales singulæ in uno systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ in uno sunt systemate & eæ inter se quæ in altero) & si non tangant se mutuò quæ in eodem sunt systemate nisi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugant se mutuò, nisi viribus acceleratri-*

ratricibus quæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè: dico quod ſyſtematum particulæ illæ pergent inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Pag. 250

PROP. XXXIII. THEOR. XXVII. *Iiſdem poſitis, dico quod ſyſtematum partes majores reſiſtuntur in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione velocitatum ſuarum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione denſitatis partium ſyſtematum.* 254

PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII. *Si globus & cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias liberè diſpoſitis conſtante, ſecundùm plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit reſiſtentia globi duplò minor quàm reſiſtentia cylindri.* 268

PROP. XXXV. PROBL. VII. *Si medium rarum ex particulis quàmminimis quieſcentibus æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias liberè diſpoſitis conſtet: invenire reſiſtentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.* 275

PROP. XXXVI. PROBL. VIII. *Aquæ, de vaſe cylindrico per foramen in fundo factum effluentis, definire motum.* 280

PROP. XXXVII. THEOR. XXIX. *Cylindri, qui in fluido compreſſo infinito & non elaſtico ſecundùm longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia quæ oritur à magnitudine ſectionis tranſverſæ, eſt ad vim quâ totus ejus motus, interea dùm quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri quamproximè.* 301

PROP. XXXVIII. THEOR. XXX. *Globi in fluido compreſſo infinito & non elaſtico uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas fluidi ad denſitatem globi quamproximè.* 312

PROP. XXXIX. THEOR. XXXI. *Globi, per fluidum in canali cylindrico clauſum & compreſſum uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim quâ totus ejus motus interea dùm octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad exceſſum*

hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicatâ orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſuprà circulum maximum globi, & ratione denſitatis fluidi ad denſitatem globi quamproximè. Pag. 316

PROP. XL. PROBL. IX. *Globi, in medio fluidiſſimo compreſſo progredientis invenire reſiſtentiam per phænomena.* 316

PROP. XLI. THEOR. XXXII. *Preſſio non propagatur per fluidum ſecundùm lineas rectas, niſi ubi particulæ fluidi in directum jacent.* 340

PROP. XLII. THEOR. XXXIII. *Motus omnis per fluidum propagatus divergit à recto tramte in ſpatia immota.* 342

PROP. XLIII. THEOR. XXXIV. *Corpus omne tremulum in medio elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in medio verò non elaſtico motum circularem excitabit.* 353

PROP. XLIV. THEOR. XXXV. *Si aqua in canalis cruribus erectis* KL, MN *vicibus alternis aſcendat & deſcendat, conſtruatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua aſcendet iiſdem temporibus quibus pendulum oſcillatur.* 355

PROP. XLV. THEOR. XXXVI. *Undarum velocitas eſt in ſubduplicatâ ratione latitudinum.* 357

PROP. XLVI. PROBL. X. *Invenire velocitatem undarum.* *ibid.*

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII. *Pulſibus per fluidum propagatis, ſingulæ fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis penduli.* 360

PROP. XLVIII. THEOR. XXXVIII. *Pulſuum in fluido elaſtico propagato velocitates ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè & ſubduplicatâ ratione denſitatis inverſè; ſi modo fluidi vis elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.* 384

PROP. XLIX. PROBL. XI. *Datis medii denſitate & vi elaſticâ, invenire velocitatem pulſuum.* 387

PROP. L. PROBL. XII. *Invenire pulſuum diſtan as.* 390

PRO-

PROP. LI. THEOR. XXXIX. *Si cylindrus ſolidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum uniformi motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem, perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; dico quod tempora periodica partium fluidi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri.* Pag. 398

PROP. LII. THEOR. XL. *Si ſphæra ſolida, in fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem; perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum à centro ſphæræ.* 403

PROP. LIII. THEOR. XLI. *Corpora quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejuſdem ſunt denſitatis cum vortice, & eadem lege cum ipſius partibus quoad velocitatem & curſus determinationem moventur.* 419

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI SECUNDI.

INDEX
PROPOSITIONUM
LIBRI TERTII
IN TOMO III. PARTE PRIMA.

PROPOSITIO I. THEOREMA I. *Vires quibus Planetæ circumjoviales perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum Jovis & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.* Pag. 22

PROP. II. THEOR. II. *Vires quibus Planetæ primarii perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere ſolem & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.* ibid.

PROP. III. THEOR. III. *Vim quâ Luna retinetur in orbe ſuo, reſpicere Terram & eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.* 23

PROP. IV. THEOR. IV. *Lunam gravitare in Terram & vi gravitatis retrahi ſemper à motu rectilineo & in orbe ſuo retineri.* 25

PROP. V. THEOR. V. *Planetas circumjoviales gravitare in Jovem, circum ſaturnios in Saturnum & circumſolares in Solem & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.* 31

PROP. VI. THEOR. VI. *Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.* 33

PROP. VII. THEOR. VII. *Gravitatem in corpora univerſa fieri, eamque proportionalem eſſe quantitati materiæ in ſingulis.* 43

PROP. VIII. THEOR. VIII. *Si globorum duorum in ſe mutuò gravitantium materia, undique in regionibus quæ à centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus globi alterutrius in alterum recipro-*

ciprocè ut quadratum distantiæ inter centra. Pag. 45
PROP. IX. THEOR. IX. *Gravitatem pergendo à superficiebus planetarum deorsùm decrescere in ratione distantiarum à centro quamproximè.* 53
PROP. X. THEOR. X. *Motus Planetarum in Cœlis diutissimè conservari posse.* 53
PROP. XI. THEOR. XI. *Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quiescere.* 58
PROP. XII. THEOR. XII. *Solem motu perpetuò agitari; sed nunquam longè discedere à communi gravitatis centro planetarum omnium.* 58
PROP. XIII. THEOR. XIII. *Planetæ moventur in ellipsibus umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.* 60
PROP. XIV. THEOR. XIV. *Orbium aphelia & nodi quiescunt.* 62
PROP. XV. PROBL. I. *Invenire orbium principales diametros.* 66
PROP. XVI. PROBL. II. *Invenire orbium excentricitates & aphelia.* 67
PROP. XVII. THEOR. XV. *Planetarum motus diurnos uniformes esse; & librationem Lunæ ex ipsius motu diurno oriri.* 68
PROP. XVIII. THEOR. XVI. *Axes Planetarum diametris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse.* 72
PROP. XIX. PROBL. III. *Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.* 73
PROP. XX. PROBL. IV. *Invenire & inter se comparare pondera corporum in terræ hujus regionibus diversis.* 103
PROP. XXI. THEOR. XVII. *Puncta æquinoctialia regredi, & axem terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in Ecclipticam & bis redire ad positionem priorem.* 117
PROP. XXII. THEOR. XVIII. *Motus omnes lunares ex allatis principiis consequi.* 119
PROP. XXIII. PROBL. V. *Motus inæquales satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.* 120
PROP. XXIV. THEOR. XIX. *Fluxum ac refluxum maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.* 122

IN TOMO III. PARTE SECUNDA.

PROP. XXV. PROBL. VI. *Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.* Pag. 375

PROP. XXVI. PROBL. VII. *Invenire incrementum horarium aræ quam Luna, radio ad terram ducto, in orbe circulari describit.* 379

PROP. XXVII. PROBL. VIII. *Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam à Terrâ.* 391

PROP. XXVIII. PROBL. IX. *Invenire Diametros orbis in quo Luna, sine excentricitate moveri deberet.* 392

PROP. XXIX. PROBL. X. *Invenire variationem Lunæ.* 400

PROP. XXX. PROBL. XI. *Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe circulari.* 407

PROP. XXXI. PROBL. XII. *Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe elliptico.* 424

PROP. XXXII. PROBL. XIII. *Invenire motum medium nodorum Lunæ.* 435

PROP. XXXIII. PROBL. XIV. *Invenire motum verum nodorum Lunæ.* 445

PROP. XXXIV. PROBL. XV. *Invenire variationem horariam inclinationis orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.* 464

PROP. XXXV. PROBL. XVI. *Dato tempore invenire inclinationem orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.* 471

PROP. XXXVI. PROBL. XVII. *Invenire vim Solis ad Mare movendum.* 537

PROP. XXXVII. PROBL. XVIII. *Invenire vim Lunæ ad mare movendum.* 539

PROP. XXXVIII. PROBL. XIX. *Invenire figuram corporis Lunæ.* 547

PROP. XXXIX. PROBL. XX. *Invenire præcessionem Æquinoctiorum.* 560

PROP. XL. THEOR. XX. *Cometas in sectionibus conicis umbilicos*

cos in centro Solis habentibus moveri & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere. Pag. 578

PROP. XLI. PROBL. XXI. *Cometæ in Parabola moti trajectoriam ex datis tribus obſervationibus determinare.* 597

PROP. XLII. PROBL. XXII. *Inventam Cometæ trajectoriam corrigere.* 657

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI TERTII, ET TOTIUS OPERIS.