BnF Gallica

Oeuvres de Lagrange / publiées par les soins de M. J.-A. Serret [et G. Darboux] ; [précédé d'une notice sur la vie et [...]

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

{BnF Gallica

Lagrange, Joseph-Louis (1736-1813). Oeuvres de Lagrange / publiées par les soins de M. J.-A. Serret [et G. Darboux] ; [précédé d'une notice sur la vie et les ouvrages de J.-L. Lagrange, par M. Delambre]. 1867-1892.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter
utilisationcommerciale@bnf.fr.

ŒUVRES

DE LAGRANGE.

1898

J

994

V

1559

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

ŒUVRES

DE LAGRANGE,

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE M. J.-A. SERRET,

SOUS LES AUSPICES

DE SON EXCELLENCE

LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME PREMIER.

BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE IMPR.

DÉPOT LÉGAL
Seine
2e 5212
1867

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—

M DCCC LXVII

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

Pages.

AVERTISSEMENT V

Notice sur la vie et les ouvrages de M. le Comte J.-L. LAGRANGE, par *M. Delambre*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences IX

SECTION PREMIÈRE.

MÉMOIRES EXTRAITS DES RECUEILS DE L'ACADÉMIE DE TURIN.

I. Recherches sur la méthode *De maximis et minimis* 3

II. Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes 23

III. Recherches sur la nature et la propagation du son 39

IV. Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son 151

V. Addition aux premières recherches sur la nature et la propagation du son 319

VI. Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies 335

VII. Application de la méthode exposée dans le Mémoire précédent à la solution de différents Problèmes de Dynamique 365

VIII. Solution de différents Problèmes de Calcul intégral 471

IX. Solution d'un Problème d'Arithmétique 671

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

NOUVELLES RECHERCHES

SUR

LA NATURE ET LA PROPAGATION DU SON.

NOUVELLES RECHERCHES

SUR

LA NATURE ET LA PROPAGATION DU SON.

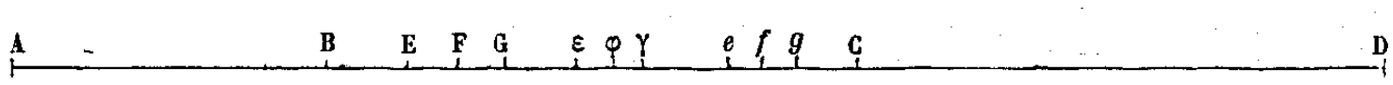
(*Miscellanea Taurinensia*, t. II, 1760-1761.)

CHAPITRE PREMIER.

REMARQUES SUR LA THÉORIE DE LA PROPAGATION DU SON, DONNÉE PAR M. NEWTON.

1. Soient (*fig.* 1) E, F, G trois particules d'air en repos, placées sur

Fig. 1.



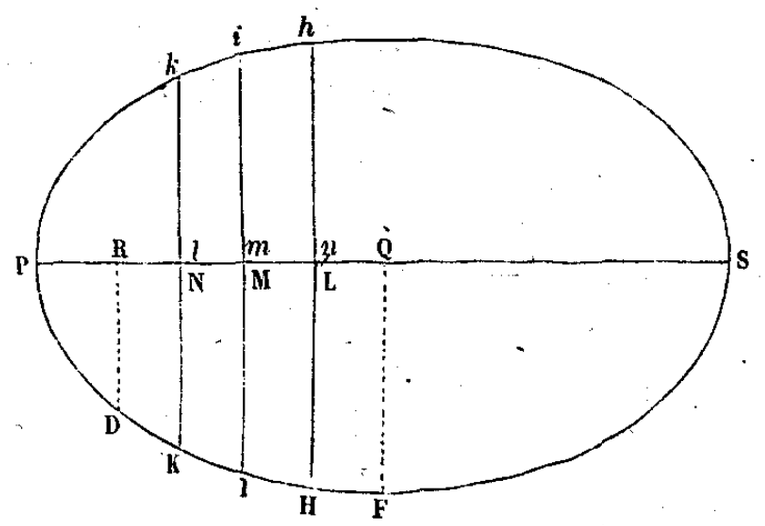
la droite BC à des distances égales l'une de l'autre; imaginons que ces particules parviennent, dans un temps quelconque t, en ε, φ, γ; et supposons, avec M. Newton (*Prop.* XLVII, Liv. II des *Principes mathématiques*), que la loi de leur mouvement soit renfermée dans une seule courbe PKS (*fig.* 2), de telle manière qu'en faisant $PH = t$, et prenant les portions d'arc HI, IK égales entre elles, et qui aient un rapport donné aux distances primitives EF, FG, les abscisses correspondantes PL, PM, PN soient égales aux espaces parcourus Eε, Fφ, Gγ; il est clair qu'on aura

$$\varepsilon\gamma = EG - LN;$$

par conséquent, si on suppose que l'élasticité de l'air soit en raison directe de sa densité, l'élasticité de l'air condensé en εγ sera à son élasticité

naturelle, que je nomme E, en raison inverse de $\varepsilon\gamma$ à EG, ou de EG — LN à EG; donc l'élasticité de la particule F transportée en φ, sera exprimée par $\frac{E \times EG}{EG - LN}$. Par le même raisonnement on trouvera en coupant dans

Fig. 2.



l'arc PKS les parties HF, DK égales à HI, IK, et menant les ordonnées FQ, DR, que l'élasticité de la particule E en ε sera égale à $\frac{E \times EG}{EG - QM}$, et celle de la particule G en γ égale à $\frac{E \times EG}{EG - MR}$; d'où l'excès de l'élasticité de l'air en ε sur son élasticité en γ sera

$$E \times EG \left(\frac{1}{EG - QM} - \frac{1}{EG - MR} \right) = E \times EG \, \frac{QM - MR}{(EG - QM)(EG - MR)},$$

ou, à cause que les excursions des particules sont fort petites par hypothèse,

$$E \frac{QM - MR}{EG}.$$

Cette quantité est la force qui fait mouvoir la partie du milieu φ, ou $\varepsilon\gamma$, dont la masse est $D \times EG$, en posant D pour la densité naturelle de l'air; donc la force accélératrice de la particule φ sera $\frac{E}{D} \frac{QM - MR}{\overline{EG}^2}$; or la loi du mouvement de cette particule demande qu'elle soit sollicitée par une force accélératrice

$$\frac{T^2}{2h} \frac{QM - MR}{\overline{DI}^2} = \frac{T^2}{2h} \frac{QM - MR}{\overline{KH}^2},$$

h étant la hauteur de laquelle un corps pesant tombe dans le temps T;

donc on doit avoir

$$\frac{E}{D}\frac{QM-MR}{\overline{EG}^2}=\frac{T^2}{2h}\frac{QM-MR}{\overline{KH}^2},$$

ce qui se réduit, en supposant $KH=\alpha EG$, à

$$\frac{E}{D}=\frac{T^2}{2h}\frac{1}{\alpha^2};$$

d'où l'on tire

$$\alpha=\pm\sqrt{\frac{T^2D}{2Eh}},$$

la nature de la courbe PKS demeurant indéterminée.

De là résulte donc cette conclusion, dont l'exactitude ne peut être révoquée en doute, savoir : que la loi des mouvements des particules de l'air n'est pas unique et déterminée, comme l'a cru M. Newton, mais que, soit celle des pendules adoptée par ce grand Géomètre, soit celle des corps qui tombent par leur pesanteur, que M. Cramer jugeait absurde et contradictoire, ou toute autre qu'on imagine à volonté, a également lieu et peut être indifféremment employée dans la solution analytique. Je dis *dans la solution analytique*, car, lorsqu'il s'agira de déterminer cette loi dans des cas particuliers, il faudra encore avoir égard aux premiers ébranlements des particules donnés par l'hypothèse.

2. J'avais déjà trouvé cette conclusion générale dans le premier Chapitre de mes *Recherches sur la nature et la propagation du Son* (*), imprimées dans le tome I^er^ des *Miscellanea Taurinensia;* mais elle m'avait paru alors si paradoxe et si éloignée de la nature de la question, que j'avais cru pouvoir la regarder comme une preuve de l'insuffisance des *Principes* de M. Newton. Or je vais démontrer ici que cette même conclusion est au contraire entièrement conforme à la théorie de la propagation du son que j'ai donnée dans le Chapitre I^er^ de la seconde Section des *Recherches précédentes*.

(*) Comme j'aurai souvent occasion dans la suite de renvoyer à ces mêmes *Recherches*, je les appellerai simplement *Recherches précédentes*, et j'en citerai les Chapitres et les numéros en chiffres romains pour les distinguer de ceux de la Dissertation présente.

Qu'on considère une particule quelconque de la fibre AD, dont la distance à la particule E soit x dans l'état d'équilibre; on trouvera aisément, par la construction ci-dessus, que l'espace parcouru par cette particule dans le temps t sera égal à l'abscisse qui répond à l'arc PH $= t$ diminué d'un arc αx, c'est-à-dire à un arc $t - \alpha x$. Or, quelle que soit la nature de la courbe PHS, il est constant qu'on peut en regarder les arcs comme des fonctions données des abscisses correspondantes, et de même les abscisses comme des fonctions des arcs; donc l'espace parcouru par une particule quelconque de la fibre AD, pendant le temps t, sera exprimé généralement par $\varphi(t - \alpha x)$. Cette formule, en faisant $t = 0$, doit représenter les ébranlements primitifs de la fibre AD; donc, si on suppose, comme dans l'endroit cité des *Recherches précédentes*, qu'une particule quelconque E soit ébranlée par le corps sonore, il faudra que la fonction $\varphi(-\alpha x)$ soit toujours nulle, excepté lorsque $x = 0$. Par conséquent, la formule générale $\varphi(t - \alpha x)$ aura seulement une valeur réelle, lorsque $t - \alpha x = 0$, savoir $x = \frac{t}{\alpha}$; par où l'on voit que l'ébranlement excité dans la particule E se propagera dans la fibre AD, de manière que, dans un temps quelconque t, il parviendra à la particule qui est à une distance $\frac{t}{\alpha}$ de la particule E; d'où il s'ensuit que la vitesse du son sera uniforme et égale à

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\frac{T^2 D}{2Eh}}} = \sqrt{\frac{2Eh}{T^2 D}},$$

ou, en mettant au lieu de $\frac{E}{D}$ la hauteur A de l'air supposé homogène,

$$\frac{\sqrt{2Ah}}{T},$$

ce qui s'accorde avec le n° LVI des *Recherches précédentes*, et avec ce que M. Newton a trouvé par une méthode différente (*Prop.* XLIX, Liv. II des *Principes*).

Au reste, il est clair qu'à cause de l'ambiguïté des signes de la valeur

de α, la formule $\varphi(t-\alpha x)$ renfermera réellement les deux formules $\varphi\left(t-\frac{x}{\sqrt{c}}\right)$ et $\varphi\left(t+\frac{x}{\sqrt{c}}\right)$, en posant, pour abréger, c au lieu de $\frac{2hA}{T^2}$; donc, en prenant deux fonctions différentes, l'une pour le signe + et l'autre pour le signe —, et les ajoutant ensemble, on aura

$$\varphi\left(t-\frac{x}{\sqrt{c}}\right)+\psi\left(t+\frac{x}{\sqrt{c}}\right)$$

pour l'expression générale de l'espace parcouru par chaque particule de la fibre AD dans un temps quelconque t.

Nous verrons dans la suite les conséquences qui résultent de cette formule, par rapport à la propagation du son considérée d'une manière générale; mais nous remarquerons d'avance que la vitesse de la propagation est toujours égale à $\sqrt{c}$, comme on l'a trouvé ci-dessus dans un cas particulier.

3. Telle est la solution générale qui peut se déduire des *Principes* de M. Newton; cet illustre Auteur n'en a tiré cependant qu'une solution assez particulière et même peu exacte, mais qui l'a conduit néanmoins au même résultat sur la vitesse de la propagation. C'est ce qu'il faut développer.

M. Newton commence par supposer que la courbe PKS est un cercle dont le diamètre PS est égal à la plus grande excursion E*e* de la particule E, et dont la circonférence est à l'intervalle BC des *pulsions*, comme KH à EG, savoir comme α est à 1 selon nos dénominations; d'où il résulte que le mouvement de chaque particule d'air est le même que celui d'un pendule qui décrit des arcs de cycloïde, et que la durée de chaque oscillation est égale à la circonférence entière du cercle PKS*k*P, savoir

$$\alpha \times \mathrm{BC} = \frac{\mathrm{T}}{\sqrt{2hA}}\mathrm{BC}.$$

M. Newton suppose ensuite que, dans le temps d'une oscillation, la *pulsion* en avançant parcourt sa largeur BC, c'est-à-dire qu'il se forme en CD une nouvelle fibre sonore CD égale à la première BC; d'où il déduit

la vitesse du son

$$\frac{\sqrt{2hA}\times BC}{T\times BC}=\frac{\sqrt{2hA}}{T},$$

précisément comme on l'a trouvée ci-dessus.

Je remarque d'abord que la première hypothèse de M. Newton, savoir, que la courbe PKS soit un cercle, ne peut être admise qu'analytiquement et non relativement à la question de la propagation du son, car :

1° Les ébranlements primitifs dépendent absolument de l'impulsion du corps sonore, laquelle peut être quelconque; par conséquent il est impossible que ces ébranlements soient toujours exprimés par la même courbe, et encore moins par un cercle.

2° Comme le cercle est une courbe rentrante, il est clair qu'on peut toujours trouver un arc $t-\alpha x$, dont l'abscisse représentera (suivant la construction) l'excursion d'une particule quelconque distante comme l'on voudra de la particule E; d'où il s'ensuit que toutes les particules de la fibre AD infiniment prolongée de part et d'autre doivent être toutes en mouvement à la fois, ce qui détruit la propagation du son et est directement contraire à la nature même de la question.

A l'égard des oscillations des particules qui forment la *pulsïon* BC, nous démontrerons plus bas (**15**) que leur durée est toujours la même, quelle que puisse être la nature de cette *pulsion,* et qu'ainsi la formule $\frac{\sqrt{2hA}}{T}$ BC, que donne l'hypothèse particulière de M. Newton, est exacte et conforme à la véritable théorie de la propagation du son.

Il en est de même de l'autre hypothèse de M. Newton, savoir, qu'il s'engendre une seconde fibre égale à la première, lorsque cette première a achevé une vibration entière. Cette hypothèse est légitime, comme on le verra plus bas (**12** et **15**); mais doit-on l'admettre sans la démontrer? On est d'autant plus en droit d'en exiger la démonstration que, suivant la construction de M. Newton, les *pulsions* AB, BC, CD,... ne se forment point l'une après l'autre, mais existent toutes à la fois et ne font que changer de place sur la fibre AD, comme il est aisé de s'en convaincre en examinant cette construction.

En voilà assez pour prouver l'insuffisance de la théorie de M. Newton, et pour rendre raison pourquoi elle conduit néanmoins aux véritables lois de la propagation du son.

4. Nous venons de montrer que la courbe PKS ne peut être un cercle. Or je dis qu'elle ne peut pas même être une courbe algébrique ou transcendante. Pour le prouver, je remarque que la fonction $\varphi\left(t-\frac{x\mathrm{T}}{\sqrt{2h\mathrm{A}}}\right)$, qui représente en général les excursions des particules de la fibre AD pour un temps quelconque t, doit aussi représenter les excursions primitives, telles qu'elles sont engendrées dans le premier instant par l'action du corps sonore sur les particules de l'air contigu. Or il est clair que cette impression ne saurait s'étendre à l'infini, mais qu'elle devra même être renfermée dans un très-petit espace autour du corps, à cause de l'extrême petitesse de ses vibrations; d'où il suit que dans le premier instant il ne peut y avoir qu'un certain nombre de particules, dans la fibre aérienne, qui soient mises en mouvement, et pour lesquelles la valeur de $\varphi\left(t-\frac{x\mathrm{T}}{\sqrt{2h\mathrm{A}}}\right)$ doive être réelle; il faudra, en conséquence, pour remplir cette condition, que la fonction $\varphi\left(t-\frac{x\mathrm{T}}{\sqrt{2h\mathrm{A}}}\right)$ s'évanouisse toujours d'elle-même, lorsque, t étant égal à zéro, x surpassera une quantité donnée. Soit a la longueur de la portion de la fibre qui est ébranlée au commencement, il faudra avoir en général

$$\varphi\left[-\frac{(a+z)\mathrm{T}}{\sqrt{2h\mathrm{A}}}\right]=0,$$

prenant pour z une quantité quelconque positive.

Telle devra donc être la nature de la courbe PHS, d'où dépend la valeur de φ, que tous les arcs exprimés par $-\frac{(a+z)\mathrm{T}}{\sqrt{2h\mathrm{A}}}$ répondent toujours au même point de l'axe où les abscisses ont leur origine; c'est ce qui ne saurait avoir lieu dans aucune courbe, soit géométrique, soit transcendante, puisqu'il faudrait pour cela que dans un tel point elle se transformât tout à coup en une droite perpendiculaire à l'axe.

CHAPITRE II.

DES FONCTIONS IRRÉGULIÈRES ET DISCONTINUES.

Observations sur la nature et l'usage de ces fonctions.

5. Nous venons de démontrer que, pour trouver les ébranlements des particules de l'air dans le cas de la nature, il faut se servir d'une ligne courbe dont le cours devienne tout à coup rectiligne en un point donné, condition qui est absolument incompatible avec la loi de continuité, à laquelle toutes les courbes, soit algébriques, soit mécaniques, sont nécessairement soumises.

De là on voit la nécessité d'admettre dans ce calcul d'autres courbes que celles que les Géomètres ont considérées jusqu'à présent, et d'employer un nouveau genre de fonctions variables indépendantes de la loi de continuité, et qu'on peut très-bien appeler *fonctions irrégulières* et *discontinues*. Mais ce n'est pas ici le seul usage qu'on doit faire de ces sortes de fonctions; elles sont nécessaires pour un grand nombre de questions importantes de Dynamique et d'Hydrodynamique; car, lorsqu'on a un système de corps ou de points mobiles, dont le nombre est infini, et qu'on en cherche les mouvements après les avoir, comme que ce soit, dérangés de leur état d'équilibre, il est facile de comprendre que tous ces mouvements ne pourront être contenus dans une même formule, à moins qu'elle ne soit aussi applicable au premier état du système, qui est tout à fait arbitraire, et dans lequel la loi de continuité est le plus souvent violée. M. Euler est, je crois, le premier qui ait introduit dans l'Analyse ce nouveau genre de fonctions, dans sa solution du problème *de chordis vibrantibus*, qui rentre dans la classe de ceux dont nous venons de parler; mais nous avons exposé ailleurs (*Rech. préc.*, XV) les difficultés dont cette solution est susceptible, et la nécessité où l'on était de l'établir et de la confirmer par une méthode aussi directe et rigoureuse

que celle que nous avons donnée dans le Chapitre V des *Recherches précédentes;* M. Euler même m'a fait l'honneur de me l'avouer dans une lettre particulière qu'il m'a écrite au sujet de ma théorie sur le son. Cette méthode cependant, qui consiste à regarder d'abord le nombre des corps mobiles comme fini et indéterminé, est extrêmement pénible et embarrassante, et elle le devient encore beaucoup plus lorsqu'il s'agit de rendre leur nombre infini. Un tel passage du fini à l'infini dans mes formules n'ayant pas paru assez évident et démonstratif à deux grands Géomètres, MM. Daniel Bernoulli et d'Alembert, comme ils ont daigné me le faire sentir dans des lettres particulières, j'ai cru devoir chercher de nouveau une autre méthode plus simple, par laquelle on pût éviter tous les embarras qui se rencontrent dans la transformation des formules, et qui levât de même tous les doutes qui pourraient encore se présenter sur l'exactitude de mes résultats.

6. Problème I. — *Étant donné un système d'un nombre infini de points mobiles, dont chacun dans l'état d'équilibre soit déterminé par la variable x, et dont le premier et le dernier, qui répondent à $x = 0$ et à $x = a$, soient supposés fixes, trouver les mouvements de tous les points intermédiaires, dont la loi est contenue dans la formule $\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dx^2}$, z étant l'espace décrit par chacun d'eux durant un temps quelconque t.*

Qu'on multiplie cette équation par $\mathrm{M}dx$, M étant une fonction quelconque de x, et qu'on l'intègre en ne faisant varier que x; il est clair que si dans cette intégrale, prise en sorte qu'elle évanouisse lorsque $x = 0$, on fait $x = a$, on aura la somme de toutes les valeurs particulières de la formule $\frac{d^2z}{dt^2}\mathrm{M}dx = c\frac{d^2z}{dx^2}\mathrm{M}dx$, qui répondent à chaque point mobile du système donné. Cette somme sera donc

$$\int \frac{d^2z}{dt^2}\mathrm{M}\,dx = c\int \frac{d^2z}{dx^2}\mathrm{M}\,dx.$$

Or l'intégrale $\int \frac{d^2z}{dx^2}\mathrm{M}dx$, où la différence d^2z ne dépend que de la

variable x, peut se transformer par les règles connues en

$$\frac{dz}{dx}\mathrm{M} - \int \frac{dz}{dx}\,\frac{d\mathrm{M}}{dx}\,dx;$$

cette dernière intégrale se change de même en

$$z\,\frac{d\mathrm{M}}{dx} - \int z\,\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2}\,dx;$$

de sorte qu'on aura

$$\int \frac{d^2z}{dx^2}\,\mathrm{M}\,dx = \frac{dz}{dx}\,\mathrm{M} - z\,\frac{d\mathrm{M}}{dx} + \int z\,\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2}\,dx;$$

or, puisque $\int \frac{d^2z}{dx^2}\,\mathrm{M}\,dx$ est égal à zéro, lorsque $x = 0$, si l'on suppose que $\int z\,\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2}\,dx$ le soit aussi, il faudra que $\frac{dz}{dx}\,\mathrm{M} - z\,\frac{d\mathrm{M}}{dx}$ évanouisse de même dans ce point; mais, par hypothèse, on a ici $z = 0$; donc il suffira que l'on ait $\frac{dz}{dx}\,\mathrm{M} = 0$ ou bien $\mathrm{M} = 0$, lorsque $x = 0$.

Par là notre équation intégrale deviendra

$$\int \frac{d^2z}{dt^2}\,\mathrm{M}\,dx = c\left(\frac{dz}{dx}\,\mathrm{M} - z\,\frac{d\mathrm{M}}{dx}\right) + c\int z\,\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2}\,dx.$$

Posons $x = a$, et puisque z s'évanouit de nouveau par hypothèse, faisons disparaître de même l'autre terme $\frac{dz}{dx}\,\mathrm{M}$ par une valeur convenable de M.

Il ne restera après cela que la simple équation

$$\int \frac{d^2z}{dt^2}\,\mathrm{M}\,dx = c\int z\,\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2}\,dx.$$

Soit supposé $\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2} = k\mathrm{M}$, k désignant une constante indéterminée dont on trouvera la valeur au moyen des conditions qu'on a déjà attachées à la quantité M; on aura

$$\int \frac{d^2z}{dt^2}\,\mathrm{M}\,dx = kc\int z\,\mathrm{M}\,dx.$$

Soit encore $\int z\mathrm{M}\,dx = s$; prenant la différence de part et d'autre dans la supposition que le seul t soit variable, on a, à cause de M = une fonction de x,

$$\int \frac{dz}{dt}\,\mathrm{M}\,dx = \frac{ds}{dt},$$

et, différentiant une seconde fois,

$$\int \frac{d^2z}{dt^2}\,\mathrm{M}\,dx = \frac{d^2s}{dt^2};$$

ces valeurs substituées dans la dernière équation intégrale, il en résulte

$$\frac{d^2s}{dt^2} = cks,$$

équation qu'il faut maintenant intégrer en ne regardant que le temps t comme variable. Nous avons donc deux équations différentielles à intégrer, dont l'une regarde simplement la variabilité de x et l'autre celle de t, ce qui fait qu'elles rentrent dans la classe ordinaire des équations différentielles à deux changeantes.

Commençons par l'équation $\frac{d^2s}{dt^2} = cks$, et faisons usage de la méthode inventée par M. d'Alembert pour ces sortes d'équations.

Soit supposé $\frac{ds}{dt} = r$, on aura

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dr}{dt},$$

et l'équation donnée se changera en

$$\frac{dr}{dt} = cks;$$

qu'on la multiplie par un coefficient quelconque μ, et qu'on la joigne avec celle qu'on a faite par hypothèse, on aura

$$\frac{ds + \mu\,dr}{dt} = \mu cks + r = \mu ck\left(s + \frac{1}{\mu ck}\,r\right);$$

soit fait $\mu = \frac{1}{\mu ck}$ et par conséquent

$$\mu^2 = \frac{1}{ck}, \quad \mu = \pm \frac{1}{\sqrt{ck}},$$

j'aurai donc

$$\frac{ds + \mu dr}{dt} = \frac{1}{\mu}(s + \mu r),$$

différentielle dont l'intégrale est, par les méthodes connues, en ajoutant une constante A,

$$s + \mu r = \mathrm{A}\, e^{\frac{t}{\mu}};$$

substituant la valeur de μ, on a, à cause de l'ambiguïté des signes, les deux équations

$$s + \frac{r}{\sqrt{ck}} = \mathrm{A}\, e^{t\sqrt{ck}}, \qquad s - \frac{r}{\sqrt{ck}} = \mathrm{B}\, e^{-t\sqrt{ck}},$$

B étant une nouvelle constante arbitraire.

Pour déterminer les valeurs de A et de B, supposons que s et r deviennent S et R lorsque $t = 0$, nous aurons

$$\mathrm{S} + \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{ck}} = \mathrm{A}, \qquad \mathrm{S} - \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{ck}} = \mathrm{B};$$

substituant ces valeurs, et joignant ensemble les deux équations, il nous vient

$$s = \mathrm{S}\,\frac{e^{t\sqrt{ck}} + e^{-t\sqrt{ck}}}{2} + \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{ck}}\,\frac{e^{t\sqrt{ck}} - e^{-t\sqrt{ck}}}{2};$$

de même, en retranchant l'une équation de l'autre, on trouve

$$r = \mathrm{R}\,\frac{e^{t\sqrt{ck}} + e^{-t\sqrt{ck}}}{2} + \mathrm{S}\sqrt{ck}\,\frac{e^{t\sqrt{ck}} - e^{-t\sqrt{ck}}}{2};$$

ces équations se réduisent à la forme suivante qui est beaucoup plus simple, savoir :

$$s = \mathrm{S}\cos\left(t\sqrt{-ck}\right) + \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{-ck}}\sin\left(t\sqrt{-ck}\right),$$

$$r = \mathrm{R}\cos\left(t\sqrt{-ck}\right) - \mathrm{S}\sqrt{-ck}\sin\left(t\sqrt{-ck}\right).$$

Or, par supposition,

$$s = \int z\,\mathrm{M}\,dx \quad \text{et} \quad r = \frac{ds}{dt} = \int \frac{dz}{dt}\,\mathrm{M}\,dx,$$

ou bien, puisque $\frac{dz}{dt}$ exprime la vitesse qui répond à l'espace z et au temps t, si on dénote cette vitesse par u, on a

$$r = \int u\,\mathrm{M}\,dx.$$

Pour avoir de même les valeurs de S et de R, supposons que Z soit en général la valeur de z et U celle de u au commencement du mouvement, lorsque $t = 0$, on aura

$$\mathrm{S} = \int \mathrm{ZM}\,dx \quad \text{et} \quad \mathrm{R} = \int \mathrm{UM}\,dx;$$

substituant ces valeurs, on changera les équations précédentes en celles-ci :

$$\int z\,\mathrm{M}\,dx = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{ZM}\,dx + \frac{\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)}{\sqrt{-ck}}\int \mathrm{UM}\,dx,$$

$$\int u\,\mathrm{M}\,dx = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{UM}\,dx - \sqrt{-ck}\,\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{ZM}\,dx.$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver la valeur de M par la résolution de l'équation

$$\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2} = k\,\mathrm{M},$$

qu'on intégrera par la même méthode que nous avons pratiquée ci-dessus; prenant deux constantes quelconques A et B, on trouvera aisément que la valeur de M est en général $\mathrm{A}e^{x\sqrt{k}} + \mathrm{B}e^{-x\sqrt{k}}$; or M doit premièrement être égal à zéro lorsque $x = 0$, ce qui donne $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$ et $\mathrm{B} = -\mathrm{A}$; par conséquent,

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}\left(e^{x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{k}}\right).$$

Changeons la constante A et supposons-la divisée par $2\sqrt{-1}$, on aura

plus simplement

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}\sin\left(x\sqrt{-k}\right).$$

Il faut maintenant faire en sorte que M évanouisse lorsque $x = a$, d'où l'on a

$$\mathrm{A}\sin\left(a\sqrt{-k}\right) = 0,$$

et prenant pour ν un nombre quelconque entier positif ou négatif,

$$a\sqrt{-k} = \frac{\nu\varpi}{2},$$

ce qui nous apprend que $\sqrt{-k}$ peut avoir une infinité de valeurs différentes, qui remplissent toutes également les conditions données. Substituons à présent pour M sa valeur trouvée, et retenant pour plus de simplicité la quantité $\sqrt{-k}$, on aura, après avoir divisé par A,

$$\int z\sin\left(x\sqrt{-k}\right)dx = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{Z}\sin\left(x\sqrt{-k}\right)dx + \frac{\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)}{\sqrt{-ck}}\int \mathrm{U}\sin\left(x\sqrt{-k}\right)dx,$$

$$\int u\sin\left(x\sqrt{-k}\right)dx = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{U}\sin\left(x\sqrt{-k}\right)dx - \sqrt{-ck}\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{Z}\sin\left(x\sqrt{-k}\right)dx.$$

Ces deux équations doivent se vérifier pour toutes les valeurs qu'on peut donner à $\sqrt{-k}$, et c'est d'après une telle condition qu'il faut déterminer les valeurs cherchées de z et de u par celles de Z et U qui sont supposées données.

Pour cela il faut commencer par faire disparaître au moyen de quelques transformations la quantité $\sqrt{-k}$ qui n'est point renfermée dans des sinus ou des cosinus; ces transformations ne consistent qu'à prendre les intégrales par parties comme nous l'avons déjà pratiqué plus haut, en sorte que l'intégrale qui reste se trouve naturellement multipliée ou divisée par $\sqrt{-k}$. Par ce moyen, on transformera d'abord

l'expression

$$\int \mathrm{U} \sin(x\sqrt{-k})\,dx$$

dans celle-ci

$$\sin(x\sqrt{-k})\int \mathrm{U}\,dx - \sqrt{-k}\int\left[\cos(x\sqrt{-k})\int \mathrm{U}\,dx\right]dx.$$

Je remarque maintenant que la valeur de $\sin(x\sqrt{-k})$ devient nulle dans les deux cas de $x = 0$ et de $x = a$, d'où il suit que puisque les formules intégrales que nous manions ici doivent être prises pour toute l'étendue de x, depuis 0 jusqu'à a, on aura plus simplement

$$\int \mathrm{U} \sin(x\sqrt{-k})\,dx = -\sqrt{-k}\int\left[\cos(x\sqrt{-k})\int \mathrm{U}\,dx\right]dx.$$

Par une opération contraire, on trouvera ensuite

$$\int \mathrm{Z} \sin(x\sqrt{-k})\,dx = -\frac{\mathrm{Z}\cos(x\sqrt{-k})}{\sqrt{-k}} + \frac{1}{\sqrt{-k}}\int \frac{d\mathrm{Z}}{dx}\cos(x\sqrt{-k})\,dx;$$

et puisque $\mathrm{Z} = 0$ lorsque $x = 0$ et $x = a$, par l'hypothèse du problème, on aura pour notre cas

$$\int \mathrm{Z} \sin(x\sqrt{-k})\,dx = \frac{1}{\sqrt{-k}}\int \frac{d\mathrm{Z}}{dx}\cos(x\sqrt{-k})\,dx.$$

Ces valeurs substituées, il en résulte

$$\int z \sin(x\sqrt{-k})\,dx = \cos(t\sqrt{-ck})\int \mathrm{Z} \sin(x\sqrt{-k})\,dx$$
$$-\frac{\sin(t\sqrt{-ck})}{\sqrt{c}}\int\left(\int \mathrm{U}\,dx\right)\cos(x\sqrt{-k})\,dx,$$

$$\int u \sin(x\sqrt{-k})\,dx = \cos(t\sqrt{-ck})\int \mathrm{U} \sin(x\sqrt{-k})\,dx$$
$$-\sqrt{c}\sin(t\sqrt{-ck})\int \frac{d\mathrm{Z}}{dx}\cos(x\sqrt{-k})\,dx.$$

Avant d'aller plus loin je remarque que comme on aura occasion dans la suite de comparer des valeurs de Z et de U avec des valeurs de z et u qui ne répondent pas aux mêmes x, pour ne pas se méprendre dans ces opé-

rations, il sera utile de distinguer par des expressions différentes les x qui conviennent aux Z et U, d'avec ceux qui conviennent aux z et u; je désignerai les premiers par la lettre X que je substituerai partout dans les seconds membres des équations précédentes au lieu de x, en retenant néanmoins le dx qui ne peut causer aucun embarras; j'observe de plus que les intégrales qui entrent dans les termes de ces membres se rapportent uniquement à la variable x ou X, ce qui fait qu'on peut mettre aussi sous le signe ces quantités $\sin(t\sqrt{-kc})$ et $\cos(t\sqrt{-kc})$, qui sont constantes à leur égard; j'aurai donc

$$\int z\sin(x\sqrt{-k})\,dx = \int \mathrm{Z}\sin(\mathrm{X}\sqrt{-k})\cos(t\sqrt{-kc})\,dx$$
$$-\frac{1}{\sqrt{c}}\int\left(\int \mathrm{U}\,dx\right)\cos(\mathrm{X}\sqrt{-k})\sin(t\sqrt{-kc})\,dx,$$

$$\int u\sin(x\sqrt{-k})\,dx = \int \mathrm{U}\sin(\mathrm{X}\sqrt{-k})\cos(t\sqrt{-kc})\,dx$$
$$-\sqrt{c}\int\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\cos(\mathrm{X}\sqrt{-k})\sin(t\sqrt{-kc})\,dx.$$

Je développe à présent les produits des sinus et cosinus par les méthodes connues; j'obtiens

$$\int z\sin(x\sqrt{-k})\,dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{Z}\sin[(\mathrm{X}+t\sqrt{c})\sqrt{-k}]\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\int \mathrm{Z}\sin[(\mathrm{X}-t\sqrt{c})\sqrt{-k}]\,dx$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{c}}\int\left(\int \mathrm{U}\,dx\right)\sin[(\mathrm{X}+t\sqrt{c})\sqrt{-k}]\,dx$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{c}}\int\left(\int \mathrm{U}\,dx\right)\sin[(\mathrm{X}-t\sqrt{c})\sqrt{-k}]\,dx.$$

$$\int u\sin(x\sqrt{-k})\,dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{U}\sin[(\mathrm{X}+t\sqrt{c})\sqrt{-k}]\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\int \mathrm{U}\sin[(\mathrm{X}-t\sqrt{c})\sqrt{-k}]\,dx$$
$$-\frac{\sqrt{c}}{2}\int\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\sin[(\mathrm{X}+t\sqrt{c})\sqrt{-k}]\,dx$$
$$+\frac{\sqrt{c}}{2}\int\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\sin[(\mathrm{X}-t\sqrt{c})\sqrt{-k}]\,dx.$$

Ces équations sont réduites maintenant à la forme nécessaire pour en tirer les valeurs de z et de u. Voici comment je m'y prends.

Je considère qu'en substituant pour $\sqrt{-k}$ sa valeur $\frac{\nu\varpi}{2a}$, le nombre ν, qui peut être tel qu'on veut, pourvu qu'il soit entier, doit nécessairement disparaître de l'équation, puisqu'elle doit être vraie pour toutes les valeurs possibles de ν. Il faut donc faire en sorte que la quantité $\sqrt{-k}$ disparaisse elle-même de l'équation qui la renferme, ce qu'on ne peut obtenir dans notre cas qu'en rendant égaux tous les angles multiples de $\sqrt{-k}$ dans tous les termes de l'une et de l'autre équation; mais comme on pourrait être embarrassé dans les différentes valeurs qu'il faut donner à X, je ne retiendrai cette lettre X que dans la seule expression $\sin\left[(\mathrm{X}+t\sqrt{c})\sqrt{-k}\right]$ et je mettrai, dans l'autre expression $\sin\left[(\mathrm{X}-t\sqrt{c})\sqrt{-k}\right]$, X′ au lieu de X, en désignant de même par Z′ et U′ les valeurs de Z et de U qui y répondent; ainsi j'aurai par la comparaison des angles, après avoir divisé par $\sqrt{-k}$,

$$x=\mathrm{X}+t\sqrt{c}=\mathrm{X}'-t\sqrt{c},$$

et ensuite les équations

$$z=\frac{\mathrm{Z}}{2}+\frac{\mathrm{Z}'}{2}-\frac{\int \mathrm{U}\,dx}{2\sqrt{c}}+\frac{\int \mathrm{U}'\,dx}{2\sqrt{c}},$$

$$u=\frac{\mathrm{U}}{2}+\frac{\mathrm{U}'}{2}-\frac{\sqrt{c}}{2}\frac{d\mathrm{Z}}{dx}+\frac{\sqrt{c}}{2}\frac{d\mathrm{Z}'}{dx}.$$

Maintenant, l'abscisse qui convient à Z et U étant X, elle deviendra égale à $x-t\sqrt{c}$ qui est sa valeur tirée de l'équation ci-dessus; on aura de même pour l'abscisse X′ qui répond à Z′ et à U′ l'expression $x+t\sqrt{c}$; donc si, pour plus de commodité, on joint à chaque quantité son abscisse en forme d'exposant placé entre deux parenthèses, on aura enfin les valeurs de z et de u exprimées de la manière suivante :

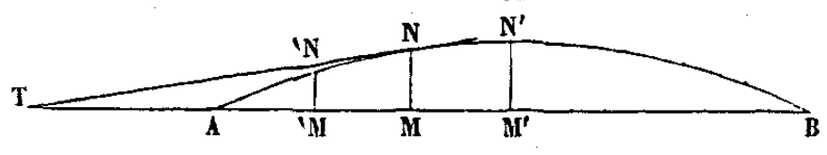
$$z=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Z}^{(x+t\sqrt{c})}+\mathrm{Z}^{(x-t\sqrt{c})}\right]+\frac{1}{2\sqrt{c}}\left[\left(\int \mathrm{U}\,dx\right)^{(x+t\sqrt{c})}-\left(\int \mathrm{U}\,dx\right)^{(x-t\sqrt{c})}\right],$$

$$u=\frac{1}{2}\left[\mathrm{U}^{(x+t\sqrt{c})}+\mathrm{U}^{(x-t\sqrt{c})}\right]+\frac{\sqrt{c}}{2}\left[\left(\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)^{(x+t\sqrt{c})}-\left(\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)^{(x-t\sqrt{c})}\right].$$

Telles sont donc les valeurs de z et de u pour chaque point mobile du système donné et pour tous les instants de leurs mouvements; valeurs qui ne dépendent, comme on le voit, que des quantités Z et U données à volonté dans le commencement du mouvement.

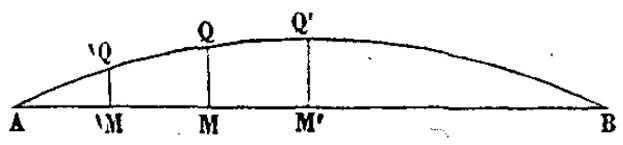
7. Les formules qu'on vient de trouver nous mènent directement à la construction suivante. Sur l'axe AB $= a$ (*fig.* 3), j'élève à chaque

Fig. 3.



point M la perpendiculaire MN égale à la valeur de Z, c'est-à-dire à la valeur initiale de z qui répond à l'abscisse $x =$ AM. J'en fais autant à l'égard des valeurs initiales de u sur un autre axe de même longueur AB (*fig.* 4), et j'obtiens par ce moyen les deux courbes ANB, AQB que j'ap-

Fig. 4.



pelle *courbes fondamentales*, et qui sont les lieux géométriques des quantités Z et U.

Ces courbes seront régulières ou irrégulières, suivant la nature des quantités Z et U; mais elles se termineront toujours d'un côté et de l'autre aux extrémités A et B de l'axe, puisque les valeurs de Z et de U dans ces points sont nulles par supposition.

Je trace ensuite sur deux autres axes égaux AB, AB (*fig.* 5 et 6) les

Fig. 5.

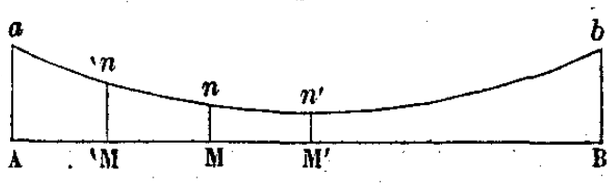
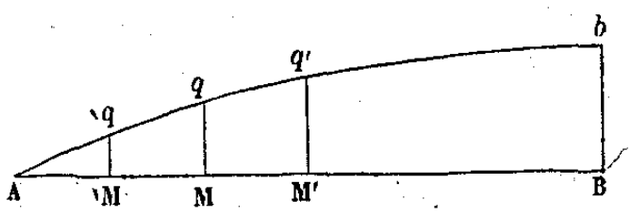


Fig. 6.



nouvelles courbes *anb*, A*qb*, telles que chaque ordonnée M*n* de la première soit toujours quatrième proportionnelle à la sous-tangente MT de

la courbe ANB, à l'ordonnée correspondante MN et à la quantité constante $\sqrt{c}$, et que l'ordonnée Mq de la seconde soit égale à l'aire AQM de la courbe AQB, divisée par la même quantité $\sqrt{c}$.

Ces quatre courbes ainsi données, si l'on cherche les valeurs de z et de u qui répondent à une abscisse quelconque $x = \mathrm{AM}$ et à un temps quelconque t, on n'aura qu'à prendre, de part et d'autre des points M, les points M′ et ′M éloignés par des intervalles MM′ et ′MM égaux à $t\sqrt{c}$, et l'on aura

$$z = \frac{\mathrm{M'N'} + {}'\mathrm{M}\,{}'\mathrm{N} + \mathrm{M'}q' - {}'\mathrm{M}\,{}'q}{2},$$

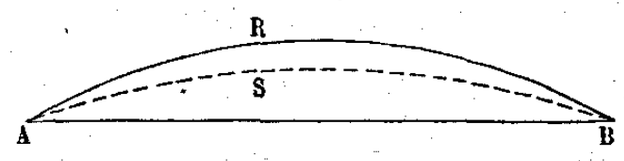
$$u = \frac{\mathrm{M'Q'} + {}'\mathrm{M}\,{}'\mathrm{Q} + \mathrm{M'}n' - {}'\mathrm{M}\,{}'n}{2}.$$

Quelque générale que paraisse cette construction que nous venons de trouver, elle ne l'est cependant pas tout à fait, car il y a une infinité de cas où elle ne saurait avoir lieu; c'est ce qui arrivera toutes les fois que les points ′M et M′ tomberont au delà de A et de B.

Pour voir ce qu'il faudra faire dans ces cas, et comment les courbes données pourront être continuées de part et d'autre, il est nécessaire de reprendre les dernières formules intégrales d'où l'on a tiré les valeurs de z et de u, et de les examiner avec attention; pour mieux y réussir nous réduirons ces formules à des constructions géométriques.

Soit imaginée la ligne ARB (*fig.* 7) qui soit le lieu géométrique des

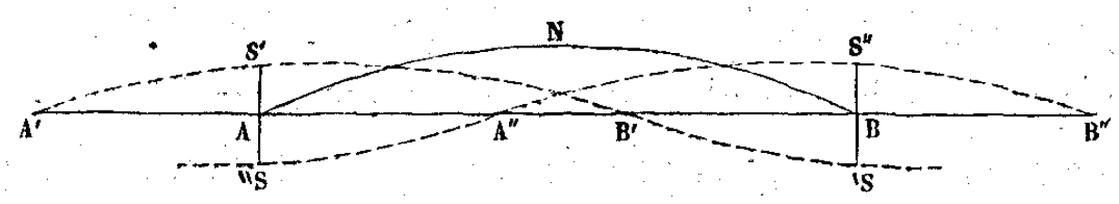
Fig. 7.



valeurs de z pour tous les points de l'axe AB, et soit décrite sur le même axe la courbe ASB qui ait à chaque abscisse x l'ordonnée $\sin(x\sqrt{-k})$. Il est manifeste que si l'on fait les produits des ordonnées correspondantes de ces deux courbes, l'aire d'une troisième courbe qui aura ces produits pour ordonnées sera la valeur de l'intégrale $\int z \sin(x\sqrt{-k})\,dx$.

Pour construire de même les autres formules intégrales, supposons d'abord $t\sqrt{c} < a$, et ayant tracé (*fig.* 8) la ligne ANB qui renferme toutes

Fig. 8.



les valeurs de Z, qu'on coupe de part et d'autre du point A les deux portions de l'axe AA', AA'' égales entre elles et à $t\sqrt{c}$, et qu'on transporte la courbe ASB en A'S'B' et en A''S''B''; il est clair que si l'on prend de nouveau les produits des ordonnées de chacune de ces courbes par les ordonnées correspondantes de la courbe ANB, les aires de ces produits exprimeront les valeurs des intégrales

$$\int Z \sin\left[(X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}\right] dx \quad \text{et} \quad \int Z \sin\left[(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}\right] dx.$$

Mais il faut remarquer que comme ces intégrales ne doivent s'étendre que depuis X = o jusqu'à X = a = AB, les aires qui les exprimeront ne pourront contenir que les parties de l'une et de l'autre courbe qui répondent à l'axe AB. D'où il s'ensuit que les deux portions A'S' et S''B'', qui se trouvent au dehors de l'espace compris entre les ordonnées AS', BS'' élevées des points A et B, ne seront ici d'aucun usage, mais qu'il faudra au contraire ajouter à l'une et l'autre courbe ce qui lui manque par rapport à l'axe entier AB; c'est-à-dire que la courbe A'S'B' devra être continuée jusqu'en 'S, et de même la courbe B''S''A'' jusqu'en ''S; ce qui étant exécuté, on aura les deux branches S'B''S et S''A''''S, qui seront celles qu'on devra employer dans la formation des aires proposées. Pour cela examinons la nature des fonctions $\sin\left[(X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}\right]$ et $\sin\left[(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}\right]$, qui forment les courbes A'S'B''S et B''S''A''''S, en comptant les abscisses X du point d'origine A, et voyons ce que ces fonctions deviennent au delà du point B' et en deçà du point A''.

Puisque les deux courbes A'S'B', A''S''B'' ne sont que la même courbe ASB (*fig.* 7, p. 169) dans laquelle, nommant x les abscisses, les ordon-

nées sont exprimées par $\sin(x\sqrt{-k})$, la question se réduit à déterminer la valeur de $\sin(x\sqrt{-k})$ lorsque x est négatif et lorsque x est plus grand que a; soit donc en premier lieu x négatif : on aura, comme on le sait,

$$\sin(-x\sqrt{-k}) = -\sin(x\sqrt{-k}),$$

c'est-à-dire que la fonction donnée de x ne recevra point d'autre changement, sinon qu'elle deviendra négative. Soit ensuite $x > a$, mais $< 2a$, savoir $x = 2a - z$, on aura

$$\sin(x\sqrt{-k}) = \sin[(2a-z)\sqrt{-k}] = \sin(2a\sqrt{-k} - z\sqrt{-k}).$$

Or, par la valeur déterminée ci-dessus de $\sqrt{-k}$, $2a\sqrt{-k} = \nu\varpi$, et par les règles connues de la Trigonométrie,

$$\sin(\nu\varpi - z\sqrt{-k}) = \sin(-z\sqrt{-k}) = -\sin(z\sqrt{-k});$$

donc, puisque $z = 2a - x$ on aura, dans ce cas,

$$\sin(x\sqrt{-k}) = \sin[(2a-x)\sqrt{-k}].$$

De là il s'ensuit :

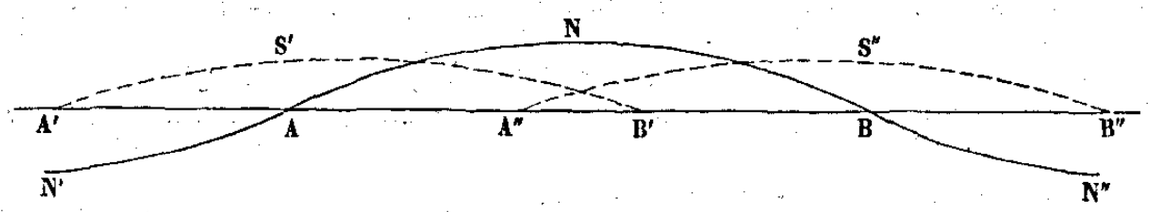
1° Que pour avoir la continuation A″″S du côté des abscisses négatives de la courbe A″S″B″, on n'aura qu'à renverser la même courbe au-dessous de l'axe, en sorte que le point A″ demeure immobile;

2° Que pour avoir la continuation B′′′S du côté des abscisses plus grandes que a dans la courbe A′S′B′, il faudra aussi renverser cette courbe de la même façon que l'autre, mais en prenant ici le point B′ pour fixe.

Je dis maintenant que la portion de courbe A″″S est la même que la portion A′S′, ainsi que la portion B′′′S est la même que la portion B″S″, et que par conséquent, au lieu des deux courbes S′B′′′S et S″A″″S, on peut substituer les deux autres A′S′B′ et A″S″B″ lorsqu'il ne s'agit que d'avoir la somme des mêmes parties. Je dis ensuite que la somme des aires formées des produits des ordonnées de l'une et de l'autre courbe S′B′′′S et S″A″″S par celles de la courbe ANB sera égale à la somme des aires qu'on pourra former de la même façon par les ordonnées

des courbes A′S′B′, A″S″B″, pourvu que dans les espaces AA′, BB″ on prenne, pour ordonnées de la courbe ANB, celles qui conviennent aux espaces AA″ et BB′ avec des signes contraires; d'où je déduis que si l'on veut continuer la courbe ANB de part et d'autre de l'axe, afin qu'elle réponde immédiatement à toute l'étendue des courbes A′S′B′ et A″S″B″, on n'a qu'à la renverser au-dessous de l'axe en AN′ et BN″, le point A demeurant immobile dans le premier cas et le point B dans le second, comme on le voit clairement dans la *fig.* 9.

Fig. 9.



Il résulte donc de tout ce qu'on vient de démontrer que pour avoir la valeur de l'expression composée

$$\int Z \sin[(X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}]\,dx + \int Z \sin[(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}]\,dx,$$

on n'a qu'à prendre la somme des deux aires qui se formeront par les produits des ordonnées des courbes A′S′B′ et A″S″B″ multipliées par les ordonnées correspondantes de la courbe N′ANBN″. La moitié de cette somme, si l'on suppose U = o, devra donc être égale à l'aire formée par les deux courbes ARB, ASB.

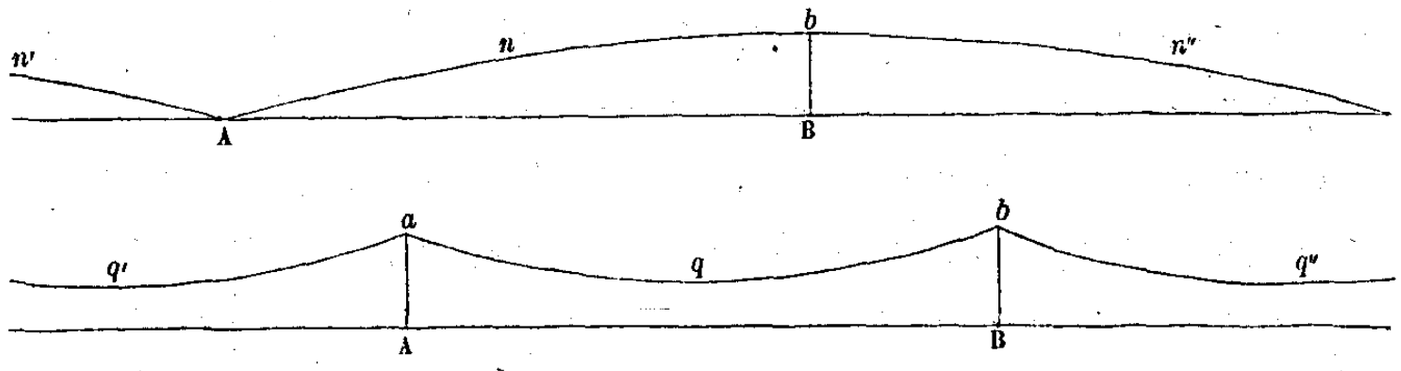
Or, puisque les ordonnées de la courbe ASB, qui est la même que les deux courbes A′S′B′ et A″S″B″, renferment la quantité $\sqrt{-k}$, laquelle doit s'évanouir de l'équation, on ne parviendra à se défaire de cette quantité qu'en égalant la valeur de z, qui multiplie chaque ordonnée de ARB, à la demi-somme des valeurs de Z qui multiplient la même ordonnée dans l'une et l'autre courbe A′S′B′ et A″S″B″; prenant pour ces valeurs de Z les ordonnées correspondantes de la courbe N′ANBN″, on coupera donc des points A′ et A″, qui sont les origines des courbes A′S′B′, A″S″B″, deux abscisses égales à x, ou bien, à cause de

$$AA' = AA'' = t\sqrt{c}$$

on coupera du point A, origine de la courbe génératrice ANB, deux abscisses $x + t\sqrt{c}$ et $x - t\sqrt{c}$, et la demi-somme des ordonnées correspondantes dans cette courbe sera la valeur cherchée de z.

Si l'on suppose la courbe ANB anéantie et qu'on y substitue la courbe AQB (*fig.* 4, p. 168), on aura par la construction précédente les valeurs de la vitesse u dans le cas où $Z = 0$. Mais si l'on veut avoir égard à la fois aux deux courbes ANB et AQB, il faudra encore faire attention aux autres formules intégrales que nous avons négligées, et qui se construisent de la même façon que les précédentes, avec cette seule différence qu'au lieu des courbes ANB, AQB il faut employer les *anb* et A*qb* (*fig.* 5 et 6, p. 168). On s'y prendra donc à l'égard de ces dernières courbes d'une manière parfaitement analogue à celle qu'on vient de pratiquer pour les premières; il faudra seulement observer que, comme les deux formules intégrales qui naissent de chacune d'elles ont des signes différents, les branches A′S′B′ et A″S″B″ devront être situées l'une au-dessus et l'autre au-dessous de l'axe; c'est pourquoi la partie A″″S, qui doit servir de continuation à la branche B′S′ au lieu de sa partie A′S′, se trouvera du même côté de l'axe, comme aussi la partie B′″S à l'égard de l'autre branche A″S″, dont elle est le supplément au lieu de S″B″; d'où il s'ensuit que les branches de continuation dans les courbes A*nb* et *aqb* se trouveront au-dessus de l'axe, comme on le voit dans la *fig.* 10. On prendra donc dans

Fig. 10.



ces courbes ainsi continuées de part et d'autre les ordonnées qui répondent aux abscisses $x + t\sqrt{c}$ et $x - t\sqrt{c}$ en comptant du point A, et leur demi-différence donnera ce qu'il faut ajouter à la valeur de z et de u.

La construction que nous venons de trouver est la même pour le fond

que celle qu'on a donnée plus haut, mais elle est plus générale en ce que les courbes ici se trouvent continuées de part et d'autre par une étendue égale à l'axe AB; ce qui suffit pour résoudre tous les cas où $t\sqrt{c}$ ne surpasse point a, comme on l'a supposé d'abord.

Tous les autres cas demanderont donc encore une nouvelle continuation, qu'on pourrait trouver aussi en suivant une méthode analogue à celle que nous avons employée ci-dessus, mais qu'on déduira plus aisément de la réflexion suivante. Je considère d'abord le sinus de l'angle $(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, qui est celui qui donne des valeurs de X plus grandes que a; je trouve que ce sinus ne change point en retranchant de X un multiple quelconque de $2a$, car $\sin\left[(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k} - 2\mu a\sqrt{-k}\right]$ devient $\sin\left[(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k} - \mu\nu\varpi\right]$, en substituant, au lieu de $\sqrt{-k}$, sa valeur $\frac{\nu\varpi}{2a}$. Or, μ étant un nombre quelconque entier, $\mu\nu$ le sera aussi, et par conséquent, par les règles connues, ce sinus deviendra égal à $\sin\left[(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}\right]$, tel qu'il était d'abord. J'examine de même le sinus de l'autre angle $(X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, d'où naissent les valeurs négatives de X, et je vois que ce sinus demeure le même en ajoutant à X un multiple quelconque de $2a$, car on trouve aussi

$$\sin\left[(X + t\sqrt{c})\sqrt{-k} + \mu\nu\varpi\right] = \sin(X + t\sqrt{c}).$$

Ces deux propositions prouvent donc que les abscisses X peuvent être augmentées ou diminuées de $2a$, de $4a$,..., sans qu'il en résulte aucun changement dans les formules intégrales; d'où il suit que les ordonnées à toutes ces abscisses ainsi augmentées ou diminuées seront nécessairement les mêmes. Donc, puisque nous avons ci-dessus trouvé moyen d'étendre les courbes *fondamentales* jusqu'à l'abscisse $2a$ d'un côté, et jusqu'à l'abscisse $-a$ de l'autre, on pourra à présent les étendre tant qu'on voudra, en appliquant à chaque abscisse exprimée par $z \pm 2\mu a$ l'ordonnée qui convient à la simple abscisse z, dont la valeur est supposée contenue entre les limites $+2a$ et $-a$. Il ne faudra pour cela que transporter successivement le long de l'axe toute la courbe qui répond à

l'abscisse $2a$, et qui est composée de deux branches égales, situées l'une au-dessus et l'autre au-dessous du même axe; d'où il résultera une courbe continue et de figure anguiforme, c'est-à-dire contenant plusieurs ventres égaux situés alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe. Nous appellerons les courbes ainsi formées *courbes génératrices*.

On fera la même chose à l'égard des autres courbes formées par les tangentes et par la quadrature des courbes *fondamentales;* mais comme la portion de ces courbes, qui répond à l'abscisse $2a$, est composée de deux branches égales, situées l'une et l'autre du même côté de l'axe, la courbe qui résultera de la répétition de cette partie contiendra aussi plusieurs ventres égaux, mais tous placés du même côté de l'axe.

Voilà comment, par la simple description réitérée des branches données ANB, AQB, *anb*, A*qb*, on peut prolonger toutes ces courbes à l'infini, et avoir par conséquent des ordonnées réelles pour toutes les abscisses exprimées par $x + t\sqrt{c}$ et $x - t\sqrt{c}$, quelle que soit la valeur du temps t; ce qui suffit pour que la construction des valeurs de z et de u ne soit plus sujette à aucune exception.

Le problème dont la solution nous a jusqu'à présent occupé est le même que celui qu'on a résolu dans le Chapitre V des *Recherches précédentes;* car il est facile de voir que les équations du n° XIX, dans le cas où le nombre des points mobiles est infini, peuvent se réduire à la formule générale $\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dx^2}$. Aussi la construction que nous venons de trouver s'accorde entièrement avec celle qu'on a donnée dans le n° XXXIX, et plus amplement dans le n° XLV, ce qui doit être regardé comme une confirmation de la justesse et de la bonté de nos calculs.

Remarques sur la solution précédente.

8. Quoique la solution précédente soit beaucoup moins compliquée que celle qui se trouve dans mes *Recherches sur le Son*, elle l'est cependant encore à un point qui la rend assez difficile à suivre. C'est pourquoi il me paraît bon de l'éclaircir par quelques remarques, qui fassent con-

naître plus à fond la nature et l'esprit de la méthode qui nous y a conduit.

Comme la question est de trouver les mouvements d'une infinité de points mobiles, dans la supposition que leur état d'équilibre ait été dérangé d'une manière quelconque, on ne peut pas, ainsi qu'on l'a prouvé plus haut, exprimer tous ces mouvements par une seule formule générale; mais il faut regarder au contraire chaque point mobile comme isolé, et en chercher le mouvement, en résolvant comme autant de problèmes à la fois qu'il y a de points mobiles dans le système donné. Une telle question demande donc, pour être pleinement résolue, d'autres procédés que ceux de l'analyse ordinaire; c'est ce que M. d'Alembert a eu soin de faire remarquer au sujet des cordes vibrantes, dans l'article II de son Addition au *Mémoire sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, imprimée parmi les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1750. *Dans tout autre cas*, dit-il (c'est-à-dire dans tous les cas où la courbe initiale n'aura point les conditions prescrites par cet Auteur), *le problème ne pourra se résoudre, au moins par ma méthode, et je ne sais même s'il ne surpassera pas les forces de l'analyse connue. En effet, on ne peut, ce me semble, exprimer y analytiquement d'une manière plus générale qu'en la supposant une fonction de t et de s; mais, dans cette supposition, on ne trouve la solution du problème que pour le cas où les différentes figures de la corde vibrante peuvent être renfermées dans une seule et même équation. Dans tous les autres cas il me paraît impossible de donner à y une forme plus générale.*

La méthode que nous avons exposée ci-dessus est une réduction de celle que j'ai inventée pour résoudre le problème des vibrations d'une corde chargée d'un nombre indéfini de petits poids; ainsi elle remplit la condition que tous les points mobiles soient considérés chacun en particulier, et en même temps elle n'est pas sujette aux difficultés qui se présentent en passant du nombre indéfini des points mobiles à un nombre réellement infini.

Le fondement principal de l'une et de l'autre de ces méthodes, c'est l'ingénieuse analyse inventée par M. d'Alembert pour intégrer des équa-

tions différentielles d'un degré quelconque, et contenant un nombre quelconque de variables, pourvu qu'elles ne paraissent que sous une forme linéaire. Aussi est-ce une justice qu'il faut rendre à ce savant Géomètre, que de reconnaître que nous lui devons le principal secours qui nous a aidé à franchir les difficultés que lui-même semble avoir crues insurmontables à l'analyse.

A l'égard des procédés de nos deux méthodes, ils ne diffèrent d'abord entre eux que parce que l'on a substitué, dans les derniers, des différentiations et des intégrations au lieu des sommes et des différences algébriques qui se trouvent dans les autres; mais, comme on pourrait craindre que ces opérations n'entraînassent les inconvénients qu'on a indiqués dans le n° XV des *Recherches précédentes*, il me paraît utile de développer cet objet plus en détail, en rapprochant l'analyse que j'ai donnée ci-dessus de celle du Chapitre III des mêmes *Recherches*.

J'imagine d'abord qu'au lieu de la simple équation générale $\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dx^2}$, qui appartient à tous les points mobiles, il y en ait une infinité dont chacune représente le mouvement de chacun des points en particulier; mouvement qui dépend d'ailleurs de tous les autres, puisque la différentielle d^2z qu'on prend, en ne faisant varier que x, exprime la différence seconde des valeurs de z pour trois points consécutifs. Je multiplie donc chacune de ces équations par un coefficient indéterminé M, ou plutôt par la quantité $M dx$, en regardant M comme une variable qui peut convenir à toutes les équations en général, et j'en prends la somme par une intégration indiquée à la manière ordinaire.

Maintenant, comme il s'agit de joindre ensemble les coefficients de chaque valeur de z qui répond à chaque point mobile, je transforme mon équation intégrale en sorte que les différentielles de z dépendantes de x s'évanouissent.

Les transformations dont je fais usage dans cette occasion sont celles qu'on appelle *intégrations par parties*, et qui se démontrent ordinairement par les principes du calcul différentiel; mais il n'est pas difficile de voir qu'elles ont leur fondement dans le calcul général des sommes

et des différences; d'où il suit qu'on n'a point à craindre d'introduire par là dans notre calcul aucune loi de continuité entre les différentes valeurs de z.

Après cela, je détermine les valeurs de l'indéterminée M par la comparaison des coefficients des termes correspondants z et $\frac{d^2z}{dt^2}$; et je trouve pour cela une équation différentielle du deuxième degré, qui contient une nouvelle indéterminée constante k, et dont l'intégration entraîne encore dans la valeur de M deux autres constantes arbitraires. Je détermine ces constantes à être telles, que M s'évanouisse lorsque $x = 0$ et lorsque $x = a$, puisque, les valeurs de z étant nulles dans ces deux points, les M qui les multiplient ne doivent non plus avoir des valeurs réelles; par ce moyen, on fait disparaître de l'équation intégrale les termes qui sont absolument algébriques, et qui auraient d'ailleurs empêché le reste des opérations. Ces deux conditions laissent encore indéterminée la valeur d'une constante par laquelle toute l'expression de M est multipliée; mais cette constante s'évanouit ensuite d'elle-même par la division. A l'égard de la constante k, on trouve une infinité de valeurs différentes qui toutes lui conviennent également, et dont le nombre répond à celui des équations particulières qu'on résout à la fois. C'est de ce nombre infini de valeurs de k que dépend ensuite la détermination de toutes les valeurs de z.

De là je passe à l'intégration actuelle de notre équation formée par l'addition de toutes les équations particulières. Cette intégration ne regarde que la variabilité de t, et elle s'achève selon les méthodes connues du calcul intégral, puisque ici la loi de continuité a lieu. Après cela je substitue la valeur de M, et il en résulte une équation assez simple qui renferme toutes les valeurs de z pour chaque point mobile dans tous les instants du mouvement, avec les valeurs particulières des mêmes z et des vitesses u dans le premier instant; valeurs qu'on suppose données à volonté, et qui ne sont point réglées par aucune loi de continuité. Je trouve en même temps une formule semblable pour les vitesses u de tous les points dans un temps quelconque.

Jusqu'ici cette analyse est parfaitement d'accord avec celle du Chapitre cité de mes *Recherches ;* mais elle en diffère entièrement dans la suite, où il s'agit de tirer les valeurs de z et de u.

Comme il est nécessaire que nos dernières formules soient vérifiées, quelque valeur qu'on donne à k, parmi le nombre infini de celles qu'on a trouvées, il est visible qu'il faut chasser cette même quantité k à l'aide d'autant d'équations particulières qu'il y a de différentes fonctions de k. C'est à quoi nous sommes parvenu en employant différentes transformations et réductions, dont on a rendu compte dans le cours de cette analyse, et qui me paraissent les seules capables de remplir l'objet proposé.

La construction qu'on a donnée ensuite des valeurs de z et de u par le moyen des courbes *génératrices,* et la manière de continuer ces courbes à l'infini de part et d'autre, dépendent d'une considération intime sur la nature de nos formules. Il est vrai que les principes d'où l'on a tiré cette construction pourraient paraître trop recherchés, mais elle n'en est pas moins démonstrative et certaine; ce n'a été que pour conserver une entière rigueur que j'ai été obligé d'avoir recours à de tels principes; car, dès que l'on aura démontré dans deux ou trois Problèmes de cette sorte, que la nature des courbes *génératrices* est la même que celle qu'on trouve en supposant ces courbes représentées par une fonction régulière et continue, ainsi que l'a fait M. d'Alembert dans sa solution du Problème des vibrations des cordes, on sera assez fondé à appliquer la méthode de ces fonctions aux cas mêmes où l'on voudra supposer qu'elles n'aient point lieu.

9. Après tout ce que nous venons d'expliquer, il ne sera pas difficile de déterminer le degré de généralité dont notre méthode est susceptible. On verra premièrement qu'elle ne pourra réussir à moins que l'indéterminée z et ses différences ne se trouvent que sous une forme linéaire, et, de plus, qu'elles ne soient point mêlées avec la variable t; lorsque ces conditions seront observées, quoique les différentielles de z montent à un degré plus haut que le second, et qu'il y ait même un terme sans z qui soit une fonction quelconque de t et de x, on pourra toujours se ser-

vir avec succès des artifices et des transformations enseignées, comme on le verra dans les solutions que nous donnerons dans la suite. Toute la difficulté ne tombera plus que sur l'intégration des équations en M et en *s*, équations qui se rapportent aux méthodes ordinaires du calcul intégral. En second lieu, le succès de notre méthode demande qu'on puisse faire disparaître des équations la quantité *k* qui a toujours une infinité de valeurs; cette opération renferme des difficultés plus considérables, et je ne suis point encore parvenu jusqu'à présent à trouver pour cela une méthode directe et générale; cependant, nous ferons voir dans la suite que cet objet pourra toujours être rempli sinon exactement, au moins en se servant des approximations et des séries.

Pour ce qui est de la première condition, qui est absolument indispensable dans notre méthode, il est aisé de démontrer qu'elle aura toujours lieu dans les mouvements d'un système quelconque d'un nombre infini de points mobiles, lorsque ces mouvements seront supposés infiniment petits, comme le sont tous les mouvements réciproques qu'on observe dans la nature; d'où il suit qu'on pourra toujours les calculer soit exactement, soit seulement par approximation.

CHAPITRE III.

DE LA PROPAGATION DU SON.

10. La masse de l'air étant naturellement de trois dimensions, il est clair que, pour calculer la propagation du son en toute rigueur, il faudrait résoudre les formules générales que M. Euler a données dans ses *Recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique* (*Miscellanea Taurinensia*, t. II, p. 1). Mais ces formules n'étant point du nombre de celles sur lesquelles notre méthode peut avoir prise, il faut renoncer pour le présent, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'on soit aidé par de nouveaux secours, à toute théorie de la propagation du son envisagée sous ce point de vue. Cependant, comme il est très-probable que les

ébranlements des particules de l'air, pour produire le son, doivent être infiniment petits, ainsi que nous tâcherons de le prouver dans la suite, on pourra s'en tenir aux formules que M. Euler a aussi données pour ce cas; formules qui sont sans comparaison beaucoup plus simples que les premières, et qui, par la raison qu'on a dite plus haut (9), rentrent nécessairement dans la classe de celles qu'on peut soumettre à notre analyse.

Quoique la manière dont M. Euler a trouvé ces formules soit sans contredit la plus directe et la plus rigoureuse qui se puisse imaginer, cependant, puisque la supposition des ébranlements infiniment petits rend le calcul incomparablement plus simple, j'ai cru qu'on ne serait point fâché de le trouver ici.

Soient X, Y, Z les coordonnées rectangles qui déterminent la position d'une particule quelconque de fluide dans l'état d'équilibre; supposons que ces coordonnées, dans le temps t, deviennent $\mathrm{X}+x$, $\mathrm{Y}+y$, $\mathrm{Z}+z$; il ne sera pas difficile de voir que, si les quantités x, y, z sont supposées infiniment petites, le parallélipipède $d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$, qui représente une particule dans l'état d'équilibre, pourra être censé se changer en un autre

$$(d\mathrm{X}+dx)(d\mathrm{Y}+dy)(d\mathrm{Z}+dz),$$

ou, en négligeant les puissances plus hautes de dx, dy, dz,

$$d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}+d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,dz+d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}\,dy+d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}\,dx.$$

De là il suit qu'en nommant E l'élasticité naturelle de la portion infiniment petite de fluide renfermée dans le premier parallélipipède, l'élasticité de la même portion, lorsqu'elle remplira le second, se trouvera, en négligeant ce qui se doit négliger,

$$\frac{\mathrm{E}\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}+d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,dz+d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}\,dy+d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}\,dx},$$

ou

$$\mathrm{E}-\mathrm{E}\left(\frac{dx}{d\mathrm{X}}+\frac{dy}{d\mathrm{Y}}+\frac{dz}{d\mathrm{Z}}\right).$$

Soit prise maintenant la différence de cette quantité, en ne faisant varier

que X, et l'on aura, E étant constant,

$$-\mathrm{E}\left(\frac{d^2x}{d\mathrm{X}^2}+\frac{d^2y}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}}+\frac{d^2\mathrm{Z}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}}\right)d\mathrm{X}$$

pour la différence d'élasticité de deux particules infiniment voisines et placées dans la direction de la ligne X; donc, si l'on considère une autre particule intermédiaire à celles-ci, et qui leur soit contiguë par tous les points des deux faces opposées $d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$, il est clair que cette particule sera repoussée par l'excès de l'élasticité de la particule antérieure sur celle de la particule postérieure avec une force qui sera exprimée par

$$-\mathrm{E}\left(\frac{d^2x}{d\mathrm{X}^2}+\frac{d^2y}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}}+\frac{d^2z}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}}\right)d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}.$$

Cette force, divisée par la masse à mouvoir, qui est ici (en posant D pour la densité naturelle du fluide) $\mathrm{D}\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$, sera donc $-\frac{\mathrm{T}^2}{2h}\frac{d^2x}{dt^2}$, h étant l'espace qu'un corps pesant parcourt dans le temps T; d'où l'on aura l'équation

$$\frac{\mathrm{T}^2}{2h}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\left(\frac{d^2x}{d\mathrm{X}^2}+\frac{d^2y}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}}+\frac{d^2z}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}}\right).$$

On trouvera de même, par un semblable raisonnement, les deux autres équations

$$\frac{\mathrm{T}^2}{2h}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\left(\frac{d^2y}{d\mathrm{Y}^2}+\frac{d^2x}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{X}}+\frac{d^2z}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}\right),$$

$$\frac{\mathrm{T}^2}{2h}\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\left(\frac{d^2z}{d\mathrm{Z}^2}+\frac{d^2x}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}}+\frac{d^2y}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{Y}}\right).$$

Il est visible que ces trois équations s'accordent avec celles de M. Euler, en posant, selon les hypothèses de cet Auteur, $h=g$, $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}=h$, $\mathrm{T}=1$, et substituant p, q et r pour x, y et z.

11. Au reste, ces formules sont fondées sur l'hypothèse que l'élasticité de l'air soit proportionnelle à sa densité; mais il n'est pas difficile de les étendre à telle autre hypothèse qu'on voudra.

Pour embrasser la question dans toute la généralité possible, supposons que l'élasticité de l'air soit comme une fonction quelconque de la

densité, de sorte que nommant s la densité dans un instant quelconque, l'élasticité correspondante soit exprimée par $\mathrm{E}\varphi(s)$; il est clair, par les calculs du numéro précédent, que

$$s = \frac{\mathrm{D}\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}{(d\mathrm{X}+dx)(d\mathrm{Y}+dy)(d\mathrm{Z}+dz)} = \mathrm{D} - \mathrm{D}\left(\frac{dx}{d\mathrm{X}} + \frac{dy}{d\mathrm{Y}} + \frac{dz}{d\mathrm{Z}}\right);$$

donc, à cause de dx, dy, dz infiniment petits par rapport à $d\mathrm{X}$, $d\mathrm{Y}$, $d\mathrm{Z}$, on aura

$$\mathrm{E}\varphi(s) = \mathrm{E}\varphi(\mathrm{D}) - \left(\frac{dx}{d\mathrm{X}} + \frac{dy}{d\mathrm{Y}} + \frac{dz}{d\mathrm{Z}}\right)\mathrm{ED}\varphi'(\mathrm{D}),$$

φ' marquant une telle fonction de φ que $\varphi'(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds}$.

Maintenant, comme D est une quantité constante, les différences de $\mathrm{E}\varphi(s)$ seront exprimées simplement par

$$\mathrm{ED}\varphi'(\mathrm{D})\,d\left(\frac{dx}{d\mathrm{X}} + \frac{dy}{d\mathrm{Y}} + \frac{dz}{d\mathrm{Z}}\right);$$

d'où l'on voit que, pour avoir les équations du mouvement du fluide, il ne faudra qu'écrire au lieu de E, dans les calculs du numéro précédent, $\mathrm{ED}\varphi'(\mathrm{D})$, ou $\mathrm{E}\varphi'(\mathrm{D})$ simplement en posant $\mathrm{D} = 1$.

Si le fluide était composé de parties de différentes densités, il faudrait regarder alors la quantité D, non plus comme constante, mais comme une variable exprimée par quelque fonction de X, Y, Z. Ainsi, on parviendrait aux trois équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{T}^2}{2h}\frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{E}\varphi'(\mathrm{D})\left(\frac{d^2x}{d\mathrm{X}^2} + \frac{d^2y}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}} + \frac{d^2z}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}}\right)\\
&\quad + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\frac{d\mathrm{D}\varphi'(\mathrm{D})}{d\mathrm{X}}\left(\frac{dx}{d\mathrm{X}} + \frac{dy}{d\mathrm{Y}} + \frac{dz}{d\mathrm{Z}}\right) - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\frac{d\varphi(\mathrm{D})}{d\mathrm{X}},\\
\frac{\mathrm{T}^2}{2h}\frac{d^2y}{dt^2} &= \mathrm{E}\varphi'(\mathrm{D})\left(\frac{d^2y}{d\mathrm{Y}^2} + \frac{d^2x}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{X}} + \frac{d^2z}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}\right)\\
&\quad + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\frac{d\mathrm{D}\varphi'(\mathrm{D})}{d\mathrm{Y}}\left(\frac{dx}{d\mathrm{X}} + \frac{dy}{d\mathrm{Y}} + \frac{dz}{d\mathrm{Z}}\right) - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\frac{d\varphi(\mathrm{D})}{d\mathrm{Y}},\\
\frac{\mathrm{T}^2}{2h}\frac{d^2z}{dt^2} &= \mathrm{E}\varphi'(\mathrm{D})\left(\frac{d^2z}{d\mathrm{Z}^2} + \frac{d^2x}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}} + \frac{d^2y}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{Y}}\right)\\
&\quad + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\frac{d\mathrm{D}\varphi'(\mathrm{D})}{d\mathrm{Z}}\left(\frac{dx}{d\mathrm{X}} + \frac{dy}{d\mathrm{Y}} + \frac{dz}{d\mathrm{Z}}\right) - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\frac{d\varphi(\mathrm{D})}{d\mathrm{Z}}.
\end{aligned}$$

Supposons, par exemple, que la différente densité des particules du fluide vienne du poids du fluide supérieur; dans ce cas, quelle que soit la fonction φ, on aura toujours, en supposant que la direction de Z soit verticale,

$$\frac{\mathrm{E}d\varphi(\mathrm{D})}{dZ} = -\mathrm{D};$$

d'où l'on trouvera la valeur de D qui sera une fonction de Z seulement. De là on pourrait tirer les équations nécessaires pour trouver les lois de la propagation du son, en ayant égard à la densité variable des couches de l'atmosphère; mais, pour ne pas trop nous engager dans des difficultés de calcul, nous nous contenterons dans tout le cours des recherches suivantes de regarder la densité de l'air comme constante; ce qui ne nous éloignera pas sensiblement de la vérité, pourvu qu'on ne considère la propagation du son que près de la surface de la terre. C'est donc sur les équations du numéro précédent que nous fonderons principalement nos recherches sur la propagation du son; mais, comme ces équations sont encore trop compliquées à cause des trois variables qu'elles renferment, il sera bon de commencer par les simplifier au moyen de quelques hypothèses qui limitent le mouvement de chaque particule de l'air. Or, de toutes les hypothèses qu'on peut employer pour cela, les plus commodes et les plus conformes à la nature sont les deux suivantes. La première consiste à imaginer la masse de l'air réduite à une simple ligne physique, dans lequel cas on fait disparaître à volonté deux variables quelconques x et y, avec leurs correspondantes X et Y. La seconde hypothèse est de supposer que les ébranlements se propagent dans toute la masse de l'air par des ondulations sphériques autour du corps sonore; dans ce cas chaque couche concentrique d'air est supposée subir le même ébranlement dans toutes ses parties; d'où il suit que la détermination de l'ébranlement de chaque couche ne peut dépendre que du temps t et du rayon de la couche, c'est-à-dire de la distance du corps sonore.

§ I. — *De la propagation du son dans une ligne physique d'air.*

12. Si l'on fait, selon la première hypothèse,

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad X = 0, \quad Y = 0,$$

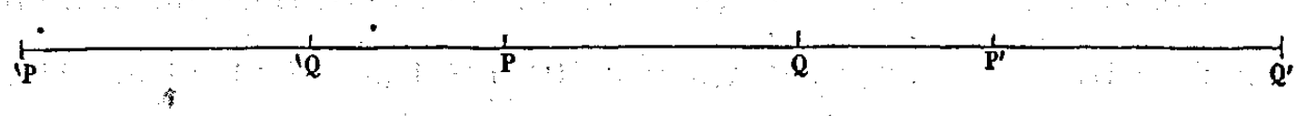
et qu'on pose, pour abréger, c au lieu de $\frac{2hE}{T^2D}$, on trouve l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dZ^2},$$

qui est la même que celle que nous avons appris à construire dans le Problème I, Z dénotant ici la même chose que x; d'où il suit que, pour avoir les lois de la propagation du son dans cette hypothèse, il ne faudra qu'appliquer la construction donnée, suivant les différents ébranlements excités par les corps sonores et la nature du milieu élastique qui les environne. Quoique cette matière ait déjà été traitée dans la seconde Section de mes *Recherches sur le Son*, elle peut néanmoins l'être encore d'une manière beaucoup plus générale. Je la reprendrai donc ici avec d'autant plus de plaisir qu'elle me donnera occasion de faire plusieurs remarques nouvelles et importantes.

Que la droite PQ (*fig.* 11) représente une ligne physique d'air étendue

Fig. 11.



d'un côté et de l'autre à l'infini, et qu'au lieu de supposer, comme je l'ai fait dans la Section citée, que la seule particule P reçoive du corps sonore une impulsion quelconque, on imagine que toutes les particules contenues dans l'espace PQ soient ébranlées en même temps, PQ représentant, suivant M. Newton, la *pulsion* primitive de la fibre sonore; il s'agit de déterminer les lois de la propagation de cette pulsion. Ayant tracé pour cela, selon ce qui a été enseigné plus haut, les deux courbes *fondamentales*, qui représentent les déplacements primitifs des particules, avec les vitesses qui leur ont été imprimées, et ayant construit de même les deux autres courbes qui résultent de la quadrature et des tan-

gentes de celles-ci, et que nous appellerons dorénavant courbes *dérivées*, on remarquera :

1° Que les courbes *fondamentales* se termineront nécessairement aux deux points P et Q qui sont les limites de l'agitation primitive, par supposition ;

2° Que, puisque la fibre aérienne est supposée s'étendre à l'infini de part et d'autre, aucune de ses particules ne pourra être absolument fixe ; d'où il suit que les extrémités A et B des courbes *fondamentales*, qui sont censées fixes, devront dans ce cas être reculées à l'infini, ce qui fera disparaître toutes les branches de continuation, en sorte que les courbes *génératrices* ne renfermeront aucune ordonnée réelle au delà des points P et Q ;

3° Qu'il en sera de même pour les courbes *dérivées*, excepté celle qui dépend des quadratures, laquelle dégénérera du côté de Q en une droite parallèle à l'axe, comme il est facile de le voir en examinant la génération de cette courbe.

Ces choses posées et bien entendues, voici comment je raisonne. Je suppose que l'on demande l'état de la particule qui répond à l'abscisse x pour un temps quelconque t écoulé depuis le premier instant du mouvement. Je n'aurai qu'à prendre la demi-somme des ordonnées dont les abscisses sont $x + t\sqrt{c}$ et $x - t\sqrt{c}$ dans les deux courbes *fondamentales*, et la demi-différence des ordonnées pour les mêmes abscisses dans les courbes *dérivées*, et joignant ensemble la première des demi-sommes et la seconde des demi-différences, comme aussi la seconde demi-somme et la première demi-différence, j'aurai l'espace parcouru par la particule pendant le temps donné t et sa vitesse à la fin de ce temps. Je vois donc que cet espace et cette vitesse seront toujours nulles, lorsque l'abscisse $x \pm t\sqrt{c}$ restera en deçà du point P ; ensuite que l'espace sera constant et la vitesse nulle, lorsque l'abscisse $x \pm t\sqrt{c}$ tombera au delà de Q. D'où je conclus que, pour un temps quelconque t, il n'y aura et il ne pourra y avoir d'autres particules en mouvement que celles pour lesquelles la valeur de $x \pm t\sqrt{c}$ sera plus grande que la distance du point P au point A,

et moindre que la distance du point Q au même point A, qui est toujours l'origine des abscisses, quoique placé à une distance infinie. Examinons séparément les deux cas de $x + t\sqrt{c}$ et de $x - t\sqrt{c}$.

Soit p la distance entre le point A et le point P, et soit $x = p + z$, z sera une nouvelle abscisse qui aura son origine en P. Posons maintenant en premier lieu

$$p + z - t\sqrt{c} = p,$$

on aura

$$z = t\sqrt{c};$$

posons ensuite

$$p + z - t\sqrt{c} = p + \mathrm{PQ},$$

on aura

$$z = \mathrm{PQ} + t\sqrt{c}.$$

Par là on peut avoir les limites de l'agitation des particules dans le temps t, en tant qu'elle résulte des termes dépendant de l'expression $x - t\sqrt{c}$; car il ne faut que prendre sur la ligne PQ les points P′ et Q′ tels que $\mathrm{PP}' = t\sqrt{c}$ et $\mathrm{P}'\mathrm{Q}' = \mathrm{PQ}$, et la portion P′Q′ de la fibre sera la seule où cette agitation aura lieu. On trouvera de la même manière les limites de l'agitation des particules qui dépend de la valeur de $x + t\sqrt{c}$; car, en faisant

$$p + z + t\sqrt{c} = p \quad \text{et} \quad p + z + t\sqrt{c} = p + \mathrm{PQ},$$

on a deux valeurs de z, savoir

$$z = -t\sqrt{c} \quad \text{et} \quad z = \mathrm{PQ} - t\sqrt{c}.$$

On prendra donc de nouveau, sur la même ligne prolongée du côté opposé, deux autres points ‘P et ‘Q tels, que $\mathrm{P}\,'\mathrm{P} = t\sqrt{c}$ et $\mathrm{P}\,'\mathrm{Q} = \mathrm{P}\,'\mathrm{P} - \mathrm{PQ}$, c'est-à-dire que $'\mathrm{P}\,'\mathrm{Q} = \mathrm{PQ}$, et tous les mouvements, dont la détermination dépendra de la valeur de $x + t\sqrt{c}$, seront renfermés dans ce dernier espace ‘P ‘Q.

De ce qu'on vient de démontrer il s'ensuit que la *pulsion* primitive,

c'est-à-dire l'onde excitée par le corps sonore dans l'espace PQ de la fibre aérienne indéfinie, s'est comme divisée en deux autres, qui, dans le temps t, ont été transportées, l'une à droite en P'Q', et l'autre à gauche en 'P'Q, conservant toujours la même étendue PQ. Pour connaître la vitesse de la propagation de ces *pulsions* secondaires, on n'a qu'à chercher celle des points P' et 'P, dont la position par rapport à P est déterminée généralement par les équations

$$z = t\sqrt{c} \quad \text{et} \quad z = -t\sqrt{c};$$

donc puisque z représente ici les espaces parcourus par ces points dans le temps t, il est évident que leur mouvement sera uniforme et leur vitesse égale à $\sqrt{c}$, et que cela aura lieu quelle qu'ait été la nature de la *pulsion* primitive. Il est inutile de nous arrêter à examiner la valeur de $\sqrt{c}$ qui est $\frac{1}{T}\frac{\sqrt{2hE}}{D}$, puisque cette expression, en substituant pour $\frac{E}{D}$ la quantité A ou nk qui est sa valeur, devient la même que celle qu'on a trouvée ailleurs (LVI), et que M. Newton a déduite de sa théorie, comme on l'a déjà remarqué ci-dessus (1).

13. Ce serait ici le lieu de faire voir l'application de la formule générale que nous avons trouvée d'après les *Principes* de M. Newton dans le numéro cité; mais cette formule étant entièrement semblable à celle que M. d'Alembert a donnée sur les vibrations des cordes, il est clair qu'en admettant les fonctions discontinues qui sont indispensables dans la matière dont il s'agit ici (4), on aura la même construction que nous avons donnée (7), et que, par conséquent, la théorie de la propagation du son qui en résultera ne sera point autre que celle qui vient d'être expliquée. Par là on prouvera aisément ce que l'on a avancé plus haut (1), que la vitesse de la propagation, selon cette théorie, est déterminée par la quantité $\frac{\sqrt{2hA}}{T}$ qui divise x dans les fonctions φ et ψ.

14. La manière dont nous venons de considérer la propagation du son

est beaucoup plus générale et plus conforme à la nature que celle qu'on a employée dans le Chapitre I de la Section II des *Recherches précédentes*. En effet, l'hypothèse que j'avais adoptée dans cet Ouvrage, savoir qu'une seule particule d'air fût ébranlée par le corps sonore à chacune de ses vibrations, ne paraît pas pouvoir subsister avec l'équilibre mutuel de toutes les particules de la fibre; il me semble beaucoup plus naturel d'imaginer que la première particule poussée par le corps sonore condense jusqu'à une certaine distance les particules suivantes, pourvu que cette distance ne soit pas telle, que les *pulsions* ou ondes sonores qui se succéderont les unes aux autres puissent se troubler et s'entre-détruire, comme il arriverait nécessairement si le temps qu'elles mettent à parcourir leur largeur était moindre que l'intervalle du temps entre deux vibrations successives du corps sonore. On pourra déterminer les limites de la plus grande largeur des ondes, en prenant le nombre des vibrations que fait dans une seconde le son le plus aigu que nous puissions entendre et divisant par ce nombre l'espace que les ondes sonores parcourent dans le même temps. Ce nombre peut se déduire rigoureusement de la formule connue des vibrations des cordes, que nous avons démontré être exacte pour quelque figure que la corde prenne; si donc on s'en tient à ce que dit M. Euler dans l'Article XIII de sa *Théorie de la Musique*, on aura le nombre 7520, par lequel divisant le nombre 1240 qui exprime en pieds l'espace parcouru par le son dans une seconde, selon les expériences moyennes, il viendra pour quotient 1 pouce et 2 lignes environ, qui sera par conséquent la mesure de la plus grande étendue que puissent avoir les ondes sonores pour former des sons distincts et perceptibles à l'oreille.

15. Jusqu'ici nous n'avons encore considéré que le mouvement progressif des ondes sonores; si on voulait aussi connaître les mouvements particuliers qui les composent, on les trouverait aisément par les principes établis ci-dessus.

Supposons que x ou bien z soit donné, au lieu de t, dans les équations

$$z = t\sqrt{c} \quad \text{et} \quad z = \text{PQ} + t\sqrt{c},$$

la différence des deux valeurs de t nous donnera la durée du mouvement de chaque particule de l'onde P'Q', laquelle sera $\frac{PQ}{\sqrt{c}}$. Or, puisque $\sqrt{c}$ est la vitesse constante avec laquelle les ondes avancent continuellement, il est clair que l'agitation de chaque particule ne durera précisément que le temps que l'onde met à parcourir toute sa largeur PQ. Il en sera de même pour les ondes propagées du côté opposé, ce qu'il est aisé de reconnaître par le moyen des deux équations

$$z = -t\sqrt{c} \quad \text{et} \quad z = PQ - t\sqrt{c}$$

qui leur appartiennent.

Pour ce qui est de la nature de chaque mouvement particulier, il faudra la déterminer par la construction générale des espaces et des vitesses. On trouvera pour cela :

1° Que toutes les particules subissent successivement la même agitation dépendante de la nature de toute la *pulsion* primitive;

2° Que, si on suppose que la *pulsion* primitive consiste dans le seul déplacement des particules, sans aucune vitesse imprimée, l'agitation de chaque particule ne sera composée que d'une seule allée et d'un retour à son lieu d'équilibre, après lequel elle demeurera immobile;

3° Que, si l'on suppose au contraire que la *pulsion* primitive ne consiste que dans l'impression d'une certaine vitesse, les particules, pendant tout le temps de leur agitation, s'écarteront continuellement de leurs points d'équilibre et n'y reviendront plus comme auparavant;

4° Qu'enfin, si la *pulsion* primitive dépend de l'une et de l'autre cause, l'agitation des particules sera composée de celles dont nous venons de parler, ce qui paraît être le cas de la nature.

16. M. Euler, dans une lettre du 23 octobre 1759, m'a fait l'honneur de me mander que la lecture de mes *Recherches sur le Son* lui avait suggéré le dénoûment d'une difficulté qui s'était présentée à lui depuis longtemps. Cette difficulté consistait à savoir pourquoi, les ébranlements primitifs se répandant d'abord naturellement de deux côtés opposés, les

ébranlements dérivatifs ne se propagent plus que d'un seul côté et toujours suivant la même direction. La raison de cette différence dépend de la nature particulière des ébranlements dérivatifs, qui est telle que leur propagation ne peut avoir lieu que d'un seul côté.

Pour s'en convaincre, qu'on examine les formules des valeurs de z et de u trouvées à la fin du n° 6, et supposant que z et u soient les excursions et les vitesses données, qu'on cherche celles qui en résultent pour un temps quelconque t' et pour une particule quelconque déterminée par l'abscisse x'. Il est visible qu'il n'y a pour cela qu'à substituer z à la place de Z, et u à la place de U; et désignant par z' et u' les valeurs cherchées, on aura

$$z' = \frac{1}{2}\left[z^{(x'+t'\sqrt{c})} + z^{(x'-t'\sqrt{c})}\right] + \frac{1}{2\sqrt{c}}\left[\left(\int u\,dx\right)^{(x'+t'\sqrt{c})} - \left(\int u\,dx\right)^{(x'-t'\sqrt{c})}\right],$$

$$u' = \frac{1}{2}\left[u^{(x'+t'\sqrt{c})} + u^{(x'-t'\sqrt{c})}\right] + \frac{\sqrt{c}}{2}\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^{(x'+t'\sqrt{c})} - \left(\frac{dz}{dx}\right)^{(x'-t'\sqrt{c})}\right].$$

Maintenant on sait, par ce qu'on a démontré (12), que les termes dont les exposants sont $(x - t\sqrt{c})$ sont les seuls qui déterminent la propagation suivant la direction PP′, et que la propagation suivant P′P dépend simplement des termes qui renferment la quantité $(x + t\sqrt{c})$; donc, pour connaître la propagation des ébranlements de l'onde P′Q′, il ne faudra substituer, au lieu de z et de u, que les seuls termes

$$\frac{1}{2}\,Z^{(x-t\sqrt{c})} - \frac{1}{2\sqrt{c}}\left(\int U\,dx\right)^{(x-t\sqrt{c})},$$

$$\frac{1}{2}\,U^{(x-t\sqrt{c})} - \frac{\sqrt{c}}{2}\left(\frac{dZ}{dx}\right)^{(x-t\sqrt{c})};$$

ce qui donnera, en posant $x' \pm t'\sqrt{c}$ au lieu de x dans les exposants,

$$z' = \frac{1}{4}\left[Z^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} + Z^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}\right]$$
$$- \frac{1}{4\sqrt{c}}\left[\left(\int U\,dx\right)^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} + \left(\int U\,dx\right)^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}\right]$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{c}}\left[\left(\int \mathrm{U}\,dx\right)^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}-\left(\int \mathrm{U}\,dx\right)^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}\right]$$

$$-\frac{1}{4}\left[\mathrm{Z}^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}-\mathrm{Z}^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}\right],$$

$$u'=\frac{1}{4}\left[\mathrm{U}^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}+\mathrm{U}^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}\right]$$

$$-\frac{\sqrt{c}}{4}\left[\left(\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}+\left(\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}\right]$$

$$+\frac{\sqrt{c}}{4}\left[\left(\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}-\left(\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}\right]$$

$$-\frac{1}{4}\left[\mathrm{U}^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}-\mathrm{U}^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}\right].$$

Dans ces formules il est visible que les termes dont les exposants renferment la quantité $+t'\sqrt{c}$ s'évanouissent tous d'eux-mêmes, et qu'il ne reste que ceux où la même quantité se trouve avec le signe négatif; d'où il s'ensuit que la propagation des ébranlements z' et u' ne peut se faire que dans le seul sens PP′.

On prouverait la même chose pour les ébranlements propagés d'abord suivant la direction opposée P′P; car, en substituant pour z et u les seuls termes dont les exposants contiennent $+t\sqrt{c}$, on verra que les formules résultantes ne seront composées que de termes où la quantité $t'\sqrt{c}$ se trouvera avec le signe $+$.

17. Nous avons supposé ci-dessus que la fibre aérienne était infinie de l'un et de l'autre côté, et cette hypothèse nous a donné des courbes *génératrices* composées d'une seule branche terminée de part et d'autre, et pour ainsi dire isolée. Mais il n'en serait pas de même si la fibre était elle-même terminée des deux côtés ou d'un côté simplement; car, puisque la manière de continuer les courbes *fondamentales* et *dérivées* est générale, et que les extrémités fixes de la fibre sont les points autour desquels on doit, pour ainsi dire, faire tourner chaque branche pour en avoir la continuation, ainsi qu'on l'a enseigné (7), il est évident que, dans le cas d'une seule extrémité fixe, les courbes *génératrices* seront

composées de deux branches égales et semblablement situées de part et d'autre du point qui constitue cette extrémité, et que dans le cas de deux extrémités fixes les courbes *génératrices* auront un nombre infini de branches égales et semblablement situées autour des deux points qui constituent les extrémités données. De là, si on cherche la propagation des ondes sonores par la méthode du n° 12, on trouvera sans beaucoup de peine que chaque onde, venant rencontrer une des extrémités fixes, devra se réfléchir, pour ainsi dire, et retourner en arrière avec la même vitesse et conservant la même nature qu'elle avait avant la réflexion, d'où il résultera des échos simples ou composés, ainsi qu'on l'a expliqué (Chapitre II de la Section II des *Recherches précédentes*).

Je ne m'arrêterai pas ici à démontrer plus en détail cette théorie des échos, non plus que les autres propriétés du son, qui dépendent des principes que nous venons d'établir. Il ne faut que relire attentivement la Section citée pour voir que les propositions qu'on a démontrées, en ne considérant que des mouvements instantanés dans les particules de l'air, sont aussi vraies dans l'hypothèse présente des ondulations.

Mais il est un point essentiel de la théorie du son, dont on n'a pas encore parlé jusqu'à présent; c'est son intensité. Or, de ce que les ondes sonores ne souffrent aucune altération en parcourant un espace quelconque, comme on l'a fait voir (12), il est simple de conclure que l'intensité du son sera constante et indépendante de la distance du corps sonore. Mais cette conclusion ne peut avoir lieu que dans l'hypothèse que le son soit obligé de suivre une seule et même direction, comme si l'on supposait l'air renfermé dans des tuyaux ou des conduits assez étroits par rapport à leur longueur; ainsi, dans les aqueducs de Rome, le P. Kircher rapporte que les sons ne reçoivent point de diminution sensible par l'espace de 600 pieds environ. Il n'en est pas de même pour l'air libre, dans lequel le son se propageant de tous côtés à la ronde doit s'affaiblir à mesure qu'il s'éloigne du corps sonore; et c'est ce que l'expérience journalière apprend, et que nous allons aussi démontrer par la théorie, en adoptant la seconde hypothèse du n° 11 qui reste encore à examiner.

§ II. — *De la propagation du son dans l'hypothèse des ondes sphériques.*

18. Dans cette hypothèse on conserve à la masse de l'air ses trois dimensions; mais on suppose que, ayant pris un point fixe pour centre, toutes les particules qui se trouvent dans la direction de chaque rayon se meuvent sans sortir de cette direction, et que leurs mouvements ne dépendent que du temps t et de la distance de chacune d'elles au centre. De là il est clair qu'il doit se former dans l'air des ondulations sphériques et concentriques, dont la détermination soit contenue dans une seule équation, de même que dans le cas de l'hypothèse précédente. Cette équation peut se trouver soit par l'application des formules générales, ainsi que l'a fait M. Euler dans son Mémoire (*Miscellanea Taurinensia*, t. II, p. 1), ou plus simplement encore, quoique avec moins de rigueur, en considérant le mouvement d'un fluide élastique renfermé dans un tuyau conique, comme on le verra plus bas. Nous nous contenterons pour le présent d'emprunter l'équation de M. Euler et d'y appliquer notre méthode, afin d'avoir une construction qui ne soit point assujettie à la loi de continuité, comme l'exige la théorie de la propagation du son. Cette équation, en substituant z pour u et x pour U, se réduit à celle-ci

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c\frac{d^2 z}{dx^2} + 2c\frac{d\frac{z}{x}}{dx},$$

qui peut être traitée de la même manière que celle du Problème I.

19. Problème II. — *Conservant les mêmes noms et les mêmes suppositions du* Problème I, *avec cette seule différence que les mouvements des particules soient contenus dans l'équation* $\frac{d^2 z}{dt^2} = c\frac{d^2 z}{dx^2} + 2c\frac{d\frac{z}{x}}{dx}$, *construire cette même équation.*

Je commence par multiplier l'un et l'autre membre par Mdx, M étant une fonction quelconque de x, ensuite j'intègre en ne faisant varier

que x; j'ai

$$\int \frac{d^2 z}{dt^2} \mathrm{M}\, dx = c \int \frac{d^2 z}{dx^2} \mathrm{M}\, dx + 2c \int d\frac{\frac{z}{x}}{dx} \mathrm{M}\, dx.$$

Je transforme d'abord l'intégrale

$$\int \frac{d^2 z}{dx^2} \mathrm{M}\, dx$$

en

$$\frac{dz}{dx}\mathrm{M} - \int \frac{dz}{dx}\frac{d\mathrm{M}}{dx}\, dx,$$

ensuite en

$$\frac{dz}{dx}\mathrm{M} - z\frac{d\mathrm{M}}{dx} + \int z\frac{d^2\mathrm{M}}{dx}\, dx.$$

Je change de même l'autre intégrale

$$\int d\frac{\frac{z}{x}}{dx} \mathrm{M}\, dx$$

en

$$\frac{z\mathrm{M}}{x} - \int \frac{z}{x}\frac{d\mathrm{M}}{dx}\, dx,$$

et je tire par la substitution la nouvelle équation

$$\int \frac{d^2 z}{dt^2} \mathrm{M}\, dx = c\left(\mathrm{M}\frac{dz}{dx} - z\frac{d\mathrm{M}}{dx} + \frac{2z\mathrm{M}}{x}\right) + c\int z\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2} - \frac{2}{x}\frac{d\mathrm{M}}{dx}\right) dx.$$

Je dois maintenant supposer M tel que

$$\frac{\mathrm{M}\,dz}{dx} - \frac{z\,d\mathrm{M}}{dx} + \frac{2z\mathrm{M}}{x} = 0,$$

lorsque $x = 0$ et lorsque $x = a$; or, puisque l'on a déjà dans ces deux cas $z = 0$ par hypothèse, il suffit que M le soit aussi, ce qui donnera les mêmes conditions à remplir par les constantes de M, que l'on a eues dans le Problème I.

L'équation restante sera donc

$$\int \frac{d^2 z}{dt^2} \mathrm{M}\, dx = c\int z\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2} - \frac{2}{x}\frac{d\mathrm{M}}{dx}\right) dx,$$

où il faudra supposer

$$\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2} - \frac{2\,d\mathrm{M}}{x\,dx} = k\mathrm{M}.$$

Cette équation en M est intégrable par les méthodes connues; mais en voici une qui est, si je ne me trompe, la plus simple qu'on puisse employer dans ce cas.

Soit supposé $\mathrm{M} = e^{\int \frac{dx}{p}}$, on aura par la substitution

$$-\frac{dp}{p^2\,dx} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{px} = k, \quad \text{savoir} \quad kp^2 + \frac{2p}{x} + \frac{dp}{dx} = 1.$$

Je vois que cette équation peut s'écrire ainsi

$$k\left(p + \frac{1}{kx}\right)^2 dx + d\left(p + \frac{1}{kx}\right) = dx;$$

donc si l'on fait $p + \frac{1}{kx} = q$, on aura

$$kq^2\,dx + dq = dx,$$

d'où l'on tire

$$dx = \frac{dq}{1 - kq^2},$$

et intégrant par les logarithmes,

$$x = \frac{1}{2\sqrt{k}} \log\left(\frac{1 + q\sqrt{k}}{1 - q\sqrt{k}}\right),$$

ou bien en passant aux exponentielles, avec l'addition d'une constante C,

$$q\sqrt{k} = \frac{\mathrm{C}e^{2x\sqrt{k}} - 1}{\mathrm{C}e^{2x\sqrt{k}} + 1},$$

donc

$$p = -\frac{1}{kx} + \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{C}e^{2x\sqrt{k}} - 1}{\mathrm{C}e^{2x\sqrt{k}} + 1}.$$

Il faut maintenant, pour avoir la valeur de M, intégrer la quantité $\frac{dx}{p}$. Or il est visible que si l'on substitue pour p son expression telle qu'on

vient de la trouver, on a une différentielle qu'il serait assez difficile, peut-être impossible, de ramener à l'intégration; mais on peut simplifier beaucoup le calcul, en supposant l'arbitraire C nulle ou infinie; dans le premier cas on a

$$p = -\frac{1}{kx} - \frac{1}{\sqrt{k}},$$

et dans le second

$$p = -\frac{1}{kx} + \frac{1}{\sqrt{k}},$$

et combinant l'une et l'autre valeur,

$$p = -\frac{1}{kx} \pm \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On aura donc

$$\int \frac{dx}{p} = \int \frac{kx\,dx}{-1 \pm x\sqrt{k}} = -1 \pm x\sqrt{k} + \log(-1 \pm x\sqrt{k});$$

et par conséquent, en ajoutant une constante A,

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}\,(-1 \pm x\sqrt{k})\,e^{-1 \pm x\sqrt{k}},$$

ou bien, à cause de l'ambiguïté des signes,

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}\,(-1 + x\sqrt{k})\,e^{-1+x\sqrt{k}} + \mathrm{B}\,(-1 - x\sqrt{k})\,e^{-1-x\sqrt{k}}.$$

Or il faut que $\mathrm{M} = 0$ lorsque $x = 0$, d'où il suit que $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$, et par conséquent $\mathrm{B} = -\mathrm{A}$; donc en changeant la valeur de la constante A,

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}\,(e^{x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{k}}) - \mathrm{A}\,x\sqrt{k}\,(e^{x\sqrt{k}} + e^{-x\sqrt{k}}),$$

ou bien encore

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}\,[\sin(x\sqrt{-k}) - x\sqrt{-k}\cos(x\sqrt{-k})].$$

Telle est la valeur de M qu'il fallait trouver; si l'on en prend la différence, on a

$$\frac{d\mathrm{M}}{dx} = -\mathrm{A}\,kx\sin(x\sqrt{-k}),$$

d'où l'on voit qu'au commencement où $x = 0$, on a aussi $\frac{d\mathrm{M}}{dx} = 0$, de

sorte que le terme $-z\frac{dM}{dx}$ s'évanouit de lui-même, sans qu'il soit besoin de supposer $z = 0$ dans ce point; ce qui nous montre que la valeur de z pourra être ici tout ce que l'on voudra.

Il faut maintenant déterminer k par la condition que M devienne nul lorsque $x = a$; on aura donc pour cela

$$A[\sin(a\sqrt{-k}) - a\sqrt{-k}\cos(a\sqrt{-k})] = 0,$$

ce qui donne

$$a\sqrt{-k} = \frac{\sin(a\sqrt{-k})}{\cos(a\sqrt{-k})} = \text{tang}(a\sqrt{-k}),$$

c'est-à-dire que l'angle $a\sqrt{-k}$ devra être égal à sa tangente. Cherchant donc un tel angle et le nommant φ, on aura

$$\sqrt{-k} = \frac{\varphi}{a}.$$

Quoiqu'il soit impossible d'exprimer cet angle algébriquement, on peut néanmoins, par la seule considération du cercle, se convaincre qu'il n'est pas unique et déterminé, mais qu'il y en a une infinité qui ont tous la même propriété, de sorte que $\sqrt{-k}$ aura aussi une infinité de valeurs différentes qui satisferont toutes également. On peut voir dans le tome II de l'*Introduction à l'Analyse des infiniment petits* de M. Euler le dernier Problème du Chapitre XXII, où l'on trouvera une manière assez simple de déterminer tous ces angles par approximation. Au reste, nous n'aurons pas besoin dans la suite de connaître leurs valeurs, il nous suffira de savoir que leur nombre est infini.

Après avoir ainsi déterminé la variable M, si on suppose, comme dans le Problème I, $\int zM\,dx = s$, et qu'on pratique les mêmes différentiations à l'égard de t, notre dernière équation intégrale deviendra $\frac{d^2s}{dt^2} = cks$, qui est la même que nous avons déjà intégrée dans le Problème cité. On

aura donc ici de même

$$s = \mathrm{S}\cos\left(t\sqrt{-ck}\right) + \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{-ck}}\sin\left(t\sqrt{-ck}\right),$$

$$r = \mathrm{R}\cos\left(t\sqrt{-ck}\right) - \mathrm{S}\sqrt{-ck}\sin\left(t\sqrt{-ck}\right),$$

et mettant à la place des quantités s, r, S et R leurs valeurs en z, u, Z et U,

$$\int z\,\mathrm{M}\,dx = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{ZM}\,dx + \frac{\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)}{\sqrt{-ck}}\int \mathrm{UM}\,dx,$$

$$\int u\,\mathrm{M}\,dx = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{UM}\,dx - \sqrt{-ck}\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{ZM}\,dx.$$

Il faut maintenant substituer la valeur de M et faire les autres opérations que demande notre méthode; mais comme cette valeur de M est différente de celle du Problème I, il est clair que les mêmes procédés que nous avons suivis alors ne suffiront pas à présent; on pourra cependant s'en servir de nouveau avec succès, en préparant par une simple transformation les expressions $\int z\mathrm{M}\,dx$, $\int u\mathrm{M}\,dx$ avec les deux autres $\int \mathrm{ZM}\,dx$ et $\int \mathrm{UM}\,dx$ de la manière que voici. Substituant la valeur de M, j'ai d'abord

$$\int z\sin\left(x\sqrt{-k}\right)dx - \sqrt{-k}\int zx\cos\left(x\sqrt{-k}\right)dx;$$

or il est clair que si l'on n'avait que le premier membre de cette expression, on serait exactement dans le cas du Problème I; il ne s'agira donc que de ramener aussi le second membre à la même forme; pour cela je change d'abord la formule

$$\int zx\cos\left(x\sqrt{-k}\right)dx$$

en

$$\frac{zx\sin\left(x\sqrt{-k}\right)}{\sqrt{-k}} - \frac{1}{\sqrt{-k}}\int \frac{d\,zx}{dx}\sin\left(x\sqrt{-k}\right)dx,$$

ensuite je remarque que, puisqu'on suppose que les intégrales ne s'é-

tendent que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, le terme algébrique, qui est de lui-même égal à zéro dans le cas de $x = 0$, et qui le devient aussi dans le cas de $x = a$, à cause que z s'évanouit par hypothèse, ce terme, dis-je, devra être entièrement effacé, de sorte que l'on aura simplement

$$\int zx \cos(x\sqrt{-k})\,dx = -\frac{1}{\sqrt{-k}} \int \frac{d\,zx}{dx} \sin(x\sqrt{-k})\,dx.$$

Substituant donc cette transformée dans l'expression de $\int z\mathrm{M}\,dx$, elle deviendra

$$\int \left(z + \frac{d\,zx}{dx}\right) \sin(x\sqrt{-k})\,dx.$$

Faisant des opérations semblables sur les autres expressions intégrales, et supposant pour plus de simplicité

$$z + \frac{d\,zx}{dx} = z', \quad u + \frac{d\,ux}{dx} = u',$$

$$\mathrm{Z} + \frac{d\,\mathrm{Z}x}{dx} = \mathrm{Z}', \quad \mathrm{U} + \frac{d\,\mathrm{U}x}{dx} = \mathrm{U}',$$

nos deux équations intégrales deviendront

$$\int z' \sin(x\sqrt{-k})\,dx = \cos(t\sqrt{-ck}) \int \mathrm{Z}' \sin(x\sqrt{-k})\,dx + \frac{\sin(t\sqrt{-ck})}{\sqrt{-ck}} \int \mathrm{U}' \sin(x\sqrt{-k})\,dx,$$

$$\int u' \sin(x\sqrt{-k})\,dx = \cos(t\sqrt{-ck}) \int \mathrm{U}' \sin(x\sqrt{-k})\,dx - \sqrt{-ck} \sin(t\sqrt{-ck}) \int \mathrm{Z}' \sin(x\sqrt{-k})\,dx.$$

Ces équations sont réduites à l'état de celles que nous avons appris à construire dans le Problème précédent. Il sera donc facile de leur appliquer la même méthode; or, puisque tout se réduit à faire disparaître la quantité $\sqrt{-k}$ à cause du nombre infini de valeurs dont elle est susceptible, il est clair que quoique ces valeurs ne soient pas les mêmes ici que dans le Problème cité, néanmoins les résultats des opérations seront par-

faitement semblables, en sorte qu'il ne faudra que substituer z', u', Z' et U' à la place de z, u, Z et U pour avoir tout d'un coup

$$z' = \frac{1}{2}\left[Z'^{(x+t\sqrt{c})} + Z'^{(x-t\sqrt{c})}\right] + \frac{1}{2\sqrt{c}}\left[\left(\int U'\,dx\right)^{(x+t\sqrt{c})} - \left(\int U'\,dx\right)^{(x-t\sqrt{c})}\right],$$

$$u' = \frac{1}{2}\left[U'^{(x+t\sqrt{c})} + U'^{(x-t\sqrt{c})}\right] + \frac{\sqrt{c}}{2}\left[\left(\frac{dZ'}{dx}\right)^{(x+t\sqrt{c})} - \left(\frac{dZ'}{dx}\right)^{(x-t\sqrt{c})}\right].$$

Remettant à présent au lieu de z', u', Z', U' leurs valeurs en z, u, Z et U, on aura deux équations qui détermineront les deux variables inconnues z et u par les données Z et U pour un temps quelconque t.

20. Les deux formules que nous venons de trouver étant parfaitement analogues à celles du Problème I admettront aussi une construction semblable à celle qu'on a déduite des courbes *fondamentales* et *dérivées* (7). Supposons donc ici que les courbes ANB, AQB (*fig.* 1 et 2, p. 151 et 152) soient les lieux des valeurs de Z' et de U', savoir de $Z + \frac{dZx}{dx}$ et de $U + \frac{dUx}{dx}$ pour chaque abscisse x, et que les autres courbes *anb*, A*q*B (*fig.* 3 et 4, p. 168) en dépendent de la manière qu'on a dit dans le numéro cité; on aura pour une abscisse quelconque $x = AM$, et pour un temps quelconque $t = \frac{MM'}{\sqrt{c}} = \frac{M'M}{\sqrt{c}}$,

$$z' = z + \frac{dzx}{dx} = \frac{M'N' + 'M'N}{2} + \frac{M'q' - 'M'q}{2},$$

$$u' = u + \frac{dux}{dx} = \frac{M'Q' + 'M'Q}{2} + \frac{M'n' - 'M'n}{2}.$$

Si on désigne par P et Q ces valeurs de z' et u', de sorte que

$$z + \frac{dzx}{dx} = 2z + x\frac{dz}{dx} = P,$$

$$u + \frac{dux}{dx} = 2u + x\frac{du}{dx} = Q,$$

on aura en intégrant, après avoir multiplié par $x\,dx$,

$$zx^2 = \int P x\,dx, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{\int P x\,dx}{x^2},$$

et de même

$$ux^2 = \int \mathrm{Q}x\,dx, \quad \text{d'où} \quad u = \frac{\int \mathrm{Q}x\,dx}{x^2}.$$

Que φ et ψ représentent deux fonctions quelconques régulières ou irrégulières, telles que

$$\mathrm{MN} = \varphi(\mathrm{AM}) = \varphi(x),$$
$$\mathrm{MQ} = \psi(\mathrm{AM}) = \psi(x),$$

on aura

$$\mathrm{M'N'} = \varphi(\mathrm{AM'}) = \varphi(x + t\sqrt{c}),$$
$$\text{`M`N} = \varphi(\mathrm{A\,`M}) = \varphi(x - t\sqrt{c}),$$
$$\mathrm{M'Q'} = \psi(\mathrm{AM'}) = \psi(x + t\sqrt{c}),$$
$$\text{`M`Q} = \psi(\mathrm{A\,`M}) = \psi(x - t\sqrt{c}),$$

et

$$\mathrm{M}n = \sqrt{c}\,\frac{d\varphi(\mathrm{AM})}{d\mathrm{AM}} = \sqrt{c}\,\frac{d\varphi(x)}{dx},$$

$$\mathrm{M}q = \frac{1}{\sqrt{c}}\int \psi(\mathrm{AM})\,d\mathrm{AM} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int \psi(x)\,dx,$$

et par conséquent

$$\mathrm{M'}n' = \sqrt{c}\,\frac{d\varphi(x + t\sqrt{c})}{dx},$$

$$\text{`M`}n = \sqrt{c}\,\frac{d\varphi(x - t\sqrt{c})}{dx},$$

$$\mathrm{M'}q' = \frac{1}{\sqrt{c}}\int \psi(x + t\sqrt{c})\,dx,$$

$$\text{`M`}q = \frac{1}{\sqrt{c}}\int \psi(x - t\sqrt{c})\,dx;$$

donc

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\left[\varphi(x + t\sqrt{c}) + \varphi(x - t\sqrt{c})\right] + \frac{1}{2\sqrt{c}}\int\left[\psi(x + t\sqrt{c})\,dx - \int \psi(x - t\sqrt{c})\,dx\right],$$

$$\mathrm{Q} = \frac{1}{2}\left[\psi(x + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{c})\right] + \frac{\sqrt{c}}{2}\left[\frac{d\varphi(x + t\sqrt{c})}{dx} - \frac{d\varphi(x - t\sqrt{c})}{dx}\right].$$

Soit supposé

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x), \quad \frac{d\varphi'(x)}{dx} = \varphi''(x), \ldots,$$

$$\int \varphi(x)\,dx = {}^{\prime}\varphi(x), \quad \int {}^{\prime}\varphi(x)\,dx = {}^{\prime\prime}\varphi(x), \ldots,$$

et ainsi pour la fonction ψ, on aura

$$\int x\varphi(x \pm t\sqrt{c})\,dx = x\int \varphi(x \pm t\sqrt{c})\,dx - \int dx \int \varphi(x \pm t\sqrt{c})\,dx$$
$$= x\,{}^{\prime}\varphi(x \pm t\sqrt{c}) - {}^{\prime\prime}\varphi(x \pm t\sqrt{c});$$

traitant de la même manière les autres formules intégrales qui comprennent les valeurs de $\int Px\,dx$ et de $\int Qx\,dx$, on aura, après toutes les substitutions,

$$z = \frac{{}^{\prime}\varphi(x + t\sqrt{c})}{2x} - \frac{{}^{\prime\prime}\varphi(x + t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$+ \frac{{}^{\prime\prime}\psi(x + t\sqrt{c})}{2x\sqrt{c}} - \frac{{}^{\prime\prime\prime}\psi(x + t\sqrt{c})}{2x^2\sqrt{c}}$$
$$+ \frac{{}^{\prime}\varphi(x - t\sqrt{c})}{2x} - \frac{{}^{\prime\prime}\varphi(x - t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$- \frac{{}^{\prime\prime}\psi(x - t\sqrt{c})}{2x\sqrt{c}} + \frac{{}^{\prime\prime\prime}\psi(x + t\sqrt{c})}{2x^2\sqrt{c}},$$

$$u = \frac{{}^{\prime}\psi(x + t\sqrt{c})}{2x} - \frac{{}^{\prime\prime}\psi(x + t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$+ \sqrt{c}\,\frac{\varphi(x + t\sqrt{c})}{2x} - \sqrt{c}\,\frac{{}^{\prime}\varphi(x + t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$+ \frac{{}^{\prime}\psi(x - t\sqrt{c})}{2x} - \frac{{}^{\prime\prime}\psi(x - t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$- \sqrt{c}\,\frac{\varphi(x - t\sqrt{c})}{2x} + \sqrt{c}\,\frac{{}^{\prime}\varphi(x - t\sqrt{c})}{2x^2}.$$

21. On peut simplifier ces expressions de la manière suivante. Au lieu de ${}^{\prime\prime}\varphi(x + t\sqrt{c}) + \frac{{}^{\prime\prime\prime}\psi(x + t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}$ je pose simplement $\Delta(x + t\sqrt{c})$, et au lieu de ${}^{\prime\prime}\varphi(x - t\sqrt{c}) - \frac{{}^{\prime\prime\prime}\psi(x - t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}$ je substitue de même la seule

expression $\Gamma(x - t\sqrt{c})$, Δ et Γ étant de nouvelles fonctions variables différentes de φ et ψ; et prenant les différences de la manière indiquée ci-dessus on obtiendra les formules

$$z = \frac{\Delta'(x + t\sqrt{c})}{2x} - \frac{\Delta(x + t\sqrt{c})}{2x^2} + \frac{\Gamma'(x - t\sqrt{c})}{2x} - \frac{\Gamma(x - t\sqrt{c})}{2x^2},$$

$$u = \sqrt{c}\,\frac{\Delta''(x + t\sqrt{c})}{2x} - \sqrt{c}\,\frac{\Delta'(x + t\sqrt{c})}{2x^2} - \sqrt{c}\,\frac{\Gamma''(x - t\sqrt{c})}{2x} + \sqrt{c}\,\frac{\Gamma'(x - t\sqrt{c})}{2x^2},$$

lesquelles s'accordent pour le fond avec celles que M. Euler a données dans ses *Recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique* (*Miscellanea taurinensia*, t. I, p. 9), où il nomme u ce que nous avons appelé z' et V ce que nous avons nommé x.

22. La construction trouvée au commencement du n° 20 n'est bonne que pour les cas où $x \pm t\sqrt{c}$ n'est pas plus grand que a ni moindre que zéro, puisque les valeurs de Z et de U ne sont données que pour la simple étendue de l'axe $AB = a$. Il faut donc chercher ici, comme on l'a fait dans le Problème I, une manière de continuer les courbes ANB, AQB,... au delà des points A et B. Pour cela, ayant conservé la construction du n° 7 avec la même équation des courbes A′S′B′, A″S″B″, on examinera leur cours au delà des points B′ et A″, en supposant (19) la quantité $\sqrt{-k}$ déterminée par l'équation

$$a\sqrt{-k} = \frac{\sin(a\sqrt{-k})}{\cos(a\sqrt{-k})}.$$

Pour ce qui regarde la branche A″″S qui est du côté des abscisses négatives, rien n'est d'abord plus facile que de la trouver; car faisant x négatif, $\sin(x\sqrt{-k})$ devient simplement négatif sans changer de valeur, d'où il s'ensuit que cette branche ne doit être que la branche même A″S″ renversée de la manière qu'on l'a déjà fait (*fig.* 6, p. 168). Ainsi on

prouvera de nouveau, par le même raisonnement du n° 7, que la partie des aires qui répond à l'abscisse AA″ sera la même que celle qu'on pourrait former sur l'abscisse AA′, en employant la courbe A′S′ et la courbe AN continuée au-dessous de l'axe de la même manière que la courbe A″S″; d'où l'on voit que la continuation de la courbe ANB au delà de A sera aussi la même que celle qu'on a pratiquée dans la *fig.* 7, p. 169.

Mais il n'en sera pas ainsi pour la continuation au delà de B, car $\sin(x\sqrt{-k})$ n'ayant plus dans le cas présent des valeurs égales et contraires autour du point B′ qui répond à $x = a$, la branche B′'S ne saurait non plus être la même que la B′'S renversée. Il ne serait pas difficile de connaître la nature de cette branche B′'S, mais cela ne servirait de rien pour l'objet présent, puisque la méthode du n° 7 demande que la branche B′'S puisse être substituée à la place de la branche B″S″, afin qu'on ait la courbe entière A″S″B″, qui soit la même que la courbe A′S′B′ et que la courbe ASB. Pour remplir cette condition il n'y a pas d'autre moyen que de transformer chaque portion d'aire qui répond à B′B en une autre égale et dans laquelle la branche B′'S soit semblable et diamétralement opposée à la branche B′S′, comme dans la *fig.* 6, p. 168. Examinons pour cela cette expression intégrale

$$\int \mathrm{Z}' \sin\left[(a+z)\sqrt{-k}\right] dz,$$

laquelle étant prise depuis le point B′ où $z = 0$ jusqu'au point B, exprime l'aire formée par les produits des ordonnées des deux courbes ANB, A′S′B′ relativement à l'espace B′B, et voyons si l'on peut la changer en une autre de la forme de

$$-\int (\mathrm{Z}) \sin\left[(a-z)\sqrt{-k}\right] dz,$$

(Z) désignant une quantité quelconque donnée en Z′.

Je prends cette autre expression

$$\int \mathrm{R} \sin\left[(a+z)\sqrt{-k}\right] dz,$$

et je la change dans son égale

$$\int \mathrm{R}\sin(a\sqrt{-k})\cos(z\sqrt{-k})\,dz + \int \mathrm{R}\cos(a\sqrt{-k})\sin(z\sqrt{-k})\,dx.$$

Je substitue ensuite à la place de $\sin(a\sqrt{-k})$ la quantité $a\sqrt{-k}\cos(a\sqrt{-k})$ tirée de l'équation qui détermine la valeur de $\sqrt{-k}$, et je fais évanouir à l'aide d'une intégration par parties le coefficient $\sqrt{-k}$ introduit par cette substitution; j'ai ainsi

$$\int \mathrm{R}\sin(a\sqrt{-k})\cos(z\sqrt{-k})\,dz = a\sqrt{-k}\int \mathrm{R}\cos(a\sqrt{-k})\cos(z\sqrt{-k})\,dz$$
$$= a\mathrm{R}\cos(a\sqrt{-k})\sin(z\sqrt{-k}) - a\int \cos(a\sqrt{-k})\sin(z\sqrt{-k})\,d\mathrm{R}.$$

Le terme algébrique de cette transformée s'évanouit de lui-même lorsque $z = 0$; donc, si l'on suppose $\mathrm{R} = 0$ lorsque $z = \mathrm{B'B}$ (nous verrons ci-après que cette supposition est possible), on pourra l'effacer entièrement, et la première transformée deviendra par la substitution

$$\int \mathrm{R}\cos(a\sqrt{-k})\sin(z\sqrt{-k})\,dz - a\int \cos(a\sqrt{-k})\sin(z\sqrt{-k})\,d\mathrm{R}$$
$$= \int \mathrm{R}\sin[(a+z)\sqrt{-k}]\,dz.$$

Développons à présent les produits des sinus et cosinus; on aura l'équation

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{R}\sin[(a+z)\sqrt{-k}]\,dz - \frac{1}{2}\int \mathrm{R}\sin[(a-z)\sqrt{-k}]\,dz$$
$$-\frac{1}{2}a\int \sin[(a+z)\sqrt{-k}]\,d\mathrm{R} + \frac{1}{2}a\int \sin[(a-z)\sqrt{-k}]\,d\mathrm{R}$$
$$= \int \mathrm{R}\sin[(a+z)\sqrt{-k}]\,dz,$$

et réduisant,

$$\int \left(\mathrm{R} + a\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right)\sin[(a+z)\sqrt{-k}]\,dz = -\int \left(\mathrm{R} - a\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right)\sin[(a-z)\sqrt{-k}]\,dz.$$

Comparant donc les deux membres de cette équation avec les formules

proposées

$$\int Z' \sin\left[(a+z)\sqrt{-k}\right] dz, \quad -\int (Z) \sin\left[(a-z)\sqrt{-k}\right] dz,$$

on aura

$$Z' = R + a\frac{dR}{dz}, \quad (Z) = R - a\frac{dR}{dz};$$

d'où l'on déduira le rapport entre (Z) et Z'. Multipliant la première équation par $e^{\frac{z}{a}} dz$ et intégrant, il vient

$$\int Z' e^{\frac{z}{a}} dz = aRe^{\frac{z}{a}}$$

et

$$R = \frac{1}{a} e^{-\frac{z}{a}} \int Z' e^{\frac{z}{a}} dz;$$

d'où l'on tire, en substituant,

$$(Z) = \frac{2}{a} e^{-\frac{z}{a}} \int Z' e^{\frac{z}{a}} dz - Z'.$$

Or, nous avons supposé que R était égal à zéro lorsque $z = B'B$; on satisfera donc à cette condition en prenant l'intégrale $\int Z' e^{\frac{z}{a}} dz$, telle qu'il s'évanouisse dans ce cas; il ne faudra pour cela que poser $B'B - y$ au lieu de z, et $-dy$ au lieu de dz, et commencer l'intégration avec les abscisses y du point B en allant vers B'; on aura par ce moyen

$$(Z) = \frac{2}{a} e^{\frac{y}{a}} \int Z' e^{-\frac{y}{a}} dy - Z'.$$

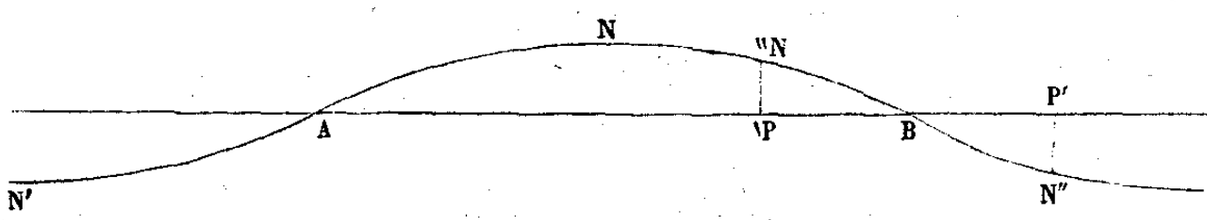
Telle est la valeur de (Z) qui, étant prise au lieu de Z', pour multiplier chaque ordonnée correspondante de la branche B'S, produira une aire égale à celle qui se formerait en multipliant la valeur de Z' par l'ordonnée correspondante non pas de la branche B'S, mais de celle qui serait la vraie continuation de la courbe A'S'B' dans notre cas. De là et du rai-

sonnement du n° 7, il n'est pas difficile de conclure que la portion d'aire qui répond naturellement à B′B dans la formule

$$\int Z' \sin\left[(X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}\right] dx$$

peut être changée en une autre formée sur BB″ par les ordonnées de la branche S″B″ et par celles d'une autre branche, comme la BN″ (*fig.* 12),

Fig. 12.



qui serve, pour ainsi dire, de continuation à la courbe fondamentale ANB, et qui soit telle qu'en prenant de part et d'autre de B les abscisses égales BP′, B'P = y, on ait toujours

$$P'N'' = (Z) = \frac{2}{a} e^{\frac{y}{a}} \int Z' e^{-\frac{y}{a}} dy - Z'$$

$$= \frac{2}{a} e^{\frac{y}{a}} \int {}'P''N e^{-\frac{y}{a}} dy - {}'P''N.$$

Voilà donc comment il faudra continuer la courbe *fondamentale* ANB au delà de B, pour pouvoir faire usage de la construction donnée ci-dessus lorsque X a des valeurs plus grandes que a.

Tout ce que nous avons jusqu'ici enseigné sur la manière de continuer cette courbe d'un côté et de l'autre s'appliquera aussi à l'autre courbe *fondamentale* AQB et encore aux courbes *dérivées anb*, Aqb, pourvu que dans ces dernières on ait soin de placer les deux branches de continuation au-dessus de l'axe par la raison qu'on a dite à la fin du n° 7.

La construction qu'on vient de trouver n'est encore suffisante que pour les cas où X est contenu entre les limites $-a$ et $+2a$. Pour lui donner toute la généralité possible, reprenons la formule

$$\int Z' \sin\left[(a + z)\sqrt{-k}\right] dz,$$

qui a été changée en

$$-\int (\mathrm{Z}) \sin\left[(a-z)\sqrt{-k}\right] dz;$$

posant $a + z = x$, on aura

$$\int \mathrm{Z}' \sin\left(x\sqrt{-k}\right) dx = \int (\mathrm{Z}) \sin\left[(x-2a)\sqrt{-k}\right] dx;$$

d'où l'on voit que l'abscisse x peut être diminuée de $2a$, pourvu qu'on change l'ordonnée Z′ en (Z); de même, si ((Z)) est une fonction de (Z), telle que (Z) l'est de Z′, on pourra diminuer de $2a$ l'abscisse qui se rapporte à (Z), en changeant (Z) en ((Z)); donc on pourra aussi diminuer l'abscisse de Z′ de $4a$ en changeant immédiatement Z′ en ((Z)), et ainsi de suite. De là il résulte que le reste de la continuation des courbes, soit *fondamentales*, soit *dérivées*, au delà du point B, pourra se déduire aisément de la branche qui répond à l'abscisse $2a$; car on n'aura qu'à transformer successivement cette branche en d'autres, dont les ordonnées aux mêmes abscisses se répondent entre elles comme les expressions Z′, (Z), ((Z)),..., et appliquer ensuite par ordre et suivant la direction AB toutes ces branches l'une à côté de l'autre le long de l'axe AB prolongé à l'infini.

Par un raisonnement tout opposé, on prouvera que la continuation des mêmes courbes au delà de A se fera par un assemblage semblable de branches dérivées l'une après l'autre de la seule branche qui répond à l'abscisse $2a$, mais avec des opérations contraires aux précédentes, savoir, de manière que les ordonnées qui répondent à une même abscisse x dans chaque branche, à commencer du point A, soient entre elles comme les quantités (Z) et Z′.

Par là on trouvera sans difficulté que les courbes dont il s'agit auront autour du point A une figure semblable, avec cette seule différence que pour les courbes *fondamentales* les deux branches infinies de part et d'autre de A seront diamétralement opposées, savoir, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe, et que pour les courbes *dérivées*, les branches

seront l'une et l'autre du même côté de l'axe; d'où il s'ensuit qu'ayant exécuté la continuation du côté des abscisses positives à l'infini, suivant ce qu'on a dit ci-dessus, on n'aura plus qu'à renverser la même courbe au delà de A, et au-dessous ou au-dessus de l'axe, selon qu'elle appartiendra aux *fondamentales* ou aux *dérivées*.

23. Par la méthode qui vient d'être expliquée, nous avons la manière de continuer de part et d'autre à l'infini les courbes qui dépendent des valeurs de Z et de U, données à volonté dans le premier instant du mouvement, sans s'embarrasser que les différentes branches de ces courbes soient liées entre elles par la loi de continuité. Mais, si on voulait se borner à admettre cette loi, on pourrait obtenir les mêmes résultats avec beaucoup moins de peine par la simple considération des formules données à la fin du n° **20**. Toute la difficulté se réduirait à chercher la nature des fonctions φ et ψ au delà des points A et B, par la condition que z et u soient égaux à zéro dans ces points, quelque valeur qu'on suppose à t.

Posons d'abord dans ces formules $x = 0$, $z = 0$, $u = 0$, on aura les équations

$$0 = \frac{'\varphi(t\sqrt{c}) + '\varphi(-t\sqrt{c})}{2x} - \frac{''\varphi(t\sqrt{c}) + ''\varphi(-t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$+ \frac{''\psi(t\sqrt{c}) - ''\psi(-t\sqrt{c})}{2x\sqrt{c}} - \frac{'''\psi(t\sqrt{c}) - '''\psi(-t\sqrt{c})}{2x^2\sqrt{c}},$$

$$0 = \frac{'\psi(t\sqrt{c}) + '\psi(-t\sqrt{c})}{2x} - \frac{''\psi(t\sqrt{c}) + ''\psi(-t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$+ \sqrt{c}\,\frac{\varphi(t\sqrt{c}) - \varphi(-t\sqrt{c})}{2x} - \sqrt{c}\,\frac{'\varphi(t\sqrt{c}) - '\varphi(-t\sqrt{c})}{2x^2}.$$

De ces deux équations il suffira de vérifier la première, puisque la seconde n'en est que la différentielle divisée par dt; mais il se présente dans cette opération une difficulté, car les termes étant divisés les uns par x, les autres par x^2, on peut être en doute si, en faisant à part égaux à zéro les numérateurs de x et de x^2, toute la formule disparaîtra, à cause

que x est déjà lui-même égal à zéro. Pour lever cette difficulté, supposons que x, au lieu d'être tout à fait nul, soit seulement infiniment petit et égal à α, et développons chaque fonction $''\varphi(\alpha \pm t\sqrt{c})$, $''\psi(\alpha \pm t\sqrt{c}),\ldots$ suivant la formule connue

$$\varphi(z+a) = \varphi(z) + \alpha\varphi'(z) + \frac{\alpha^2\varphi''(z)}{2} + \frac{\alpha^3\varphi'''(z)}{2.3} + \ldots;$$

en effaçant ce qui se détruit et en négligeant les termes qui se trouvent multipliés par des puissances de α, on aura l'équation

$$0 = -\frac{''\varphi(t\sqrt{c}) + ''\varphi(-t\sqrt{c})}{2\alpha^2} + \frac{\varphi(t\sqrt{c}) + \varphi(-t\sqrt{c})}{4}$$
$$-\frac{'''\psi(t\sqrt{c}) - '''\psi(-t\sqrt{c})}{2\alpha^2} + \frac{'\psi(t\sqrt{c}) - '\psi(-t\sqrt{c})}{4},$$

qui doit être vraie indépendamment de la quantité α; donc on aura

$$[''\varphi(t\sqrt{c}) + ''\varphi(-t\sqrt{c})] + ['''\psi(t\sqrt{c}) - '''\psi(-t\sqrt{c})] = 0,$$
$$[\varphi(t\sqrt{c}) + \varphi(-t\sqrt{c})] + ['\psi(t\sqrt{c}) - '\psi(-t\sqrt{c})] = 0,$$

équations auxquelles on satisfera en posant

$$''\varphi(-t\sqrt{c}) = -''\varphi(t\sqrt{c}) \quad \text{et} \quad '''\psi(-t\sqrt{c}) = '''\psi(t\sqrt{c}),$$

ou bien, en différentiant,

$$''\psi(-t\sqrt{c}) = -''\psi(t\sqrt{c}).$$

Or, t étant une variable qui peut croître à l'infini en commençant à zéro, $t\sqrt{c}$ pourra représenter une abscisse quelconque positive; donc la nature des fonctions $''\varphi$ et $''\psi$ devra être telle que, faisant les abscisses négatives, ces fonctions deviennent simplement négatives sans changer de valeur. Il en sera de même des fonctions φ et ψ, puisque, en différentiant deux fois les équations précédentes, elles deviennent

$$\varphi(-t\sqrt{c}) = -\varphi(t\sqrt{c}) \quad \text{et} \quad \psi(-t\sqrt{c}) = -\psi(t\sqrt{c});$$

d'où l'on voit que les deux courbes ANB, AQB, qui représentent ces

fonctions, devront avoir de part et d'autre du point A des branches égales et diamétralement opposées, ainsi qu'on l'a trouvé (22). Il n'en sera pas tout à fait ainsi pour les courbes *anb* et A*qb* qui contiennent les fonctions $'\varphi$ et $'\psi$, car on a pour ces fonctions

$$\varphi'(-t\sqrt{c}) = \varphi'(t\sqrt{c}) \quad \text{et} \quad '\psi(-t\sqrt{c}) = '\psi(t\sqrt{c}),$$

ce qui montre que les ordonnées doivent être exactement les mêmes à des abscisses égales, positives et négatives, et que par conséquent les branches autour de A seront semblablement situées sur l'axe, ce qui s'accorde avec ce qui a été enseigné dans le numéro cité.

Examinons maintenant les valeurs des mêmes fonctions pour les abscisses qui surpassent l'axe donné a. Posant $x = a$, $z = 0$ et $u = 0$, on aura de nouveau deux équations; la première sera

$$0 = \frac{'\varphi(a+t\sqrt{c}) + '\varphi(a-t\sqrt{c})}{2a} - \frac{''\varphi(a+t\sqrt{c}) + ''\varphi(a-t\sqrt{c})}{2a^2}$$
$$+ \frac{''\psi(a+t\sqrt{c}) - ''\psi(a-t\sqrt{c})}{2a\sqrt{c}} - \frac{'''\psi(a+t\sqrt{c}) - '''\psi(a-t\sqrt{c})}{2a^2\sqrt{c}},$$

la seconde ne sera que la différentielle de celle-ci divisée par dt, et par conséquent nous pourrons nous dispenser d'y avoir égard. Or, afin que les fonctions φ et ψ ne dépendent pas l'une de l'autre, on fera séparément

$$a\,'\varphi(a+t\sqrt{c}) - ''\varphi(a+t\sqrt{c}) = -a\,'\varphi(a-t\sqrt{c}) + ''\varphi(a-t\sqrt{c})$$

et

$$a\,''\psi(a-t\sqrt{c}) - '''\psi(a+t\sqrt{c}) = a\,''\psi(a-t\sqrt{c}) - '''\psi(a-t\sqrt{c}).$$

Différentions deux fois la première et trois fois la seconde; on aura, en changeant les signes,

$$\varphi(a+t\sqrt{c}) - a\varphi'(a+t\sqrt{c}) = -\varphi(a-t\sqrt{c}) + a\varphi'(a-t\sqrt{c})$$

et

$$\psi(a+t\sqrt{c}) - a\psi'(a+t\sqrt{c}) = -\psi(a-t\sqrt{c}) + a\psi'(a-t\sqrt{c}),$$

équations qui sont tout à fait semblables entre elles.

Je multiplie par $e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}}\sqrt{c}\,dt$ et j'intègre; j'ai

$$-a\varphi(a+t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}} = -a\varphi(a-t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}} - 2\int\varphi(a-t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}}\sqrt{c}\,dt,$$

où l'on voit que la valeur de l'intégrale du dernier terme doit être égale à zéro lorsque $t = 0$, puisque dans ce cas les deux autres termes se détruisent d'eux-mêmes. On aura donc

$$\varphi(a+t\sqrt{c}) = \varphi(a-t\sqrt{c}) + \frac{2e^{\frac{t\sqrt{c}}{a}}}{a}\int\varphi(a-t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}}\sqrt{c}\,dt.$$

Or, si l'on fait $t\sqrt{c} = y$, et que l'intégration soit supposée commencer du point où $y = 0$, on aura

$$\varphi(a+y) = \varphi(a-y) + \frac{2e^{\frac{y}{a}}}{a}\int\varphi(a-y)\,e^{-\frac{y}{a}}dy,$$

ce qui nous fait connaître la manière dont les valeurs de la fonction φ, qui sont de part et d'autre à distances égales de l'extrémité B de l'axe, doivent être liées entre elles. Or il est aisé de voir, en relisant les n^{os} **20** et **22**, que $\varphi(a-y)$ dénote ici la même chose que Z′, et $\varphi(a+y)$ la même chose que $-(Z)$; donc l'équation précédente donne le même rapport entre Z′ et (Z) qu'on a trouvé dans le dernier des numéros cités, et par conséquent aussi la même continuation de la courbe ANB au delà de B. Il est vrai que l'équation entre (Z) et Z′ donnée dans l'endroit mentionné n'était d'abord censée appartenir qu'à la seule portion de l'axe comprise depuis l'abscisse a jusqu'à l'abscisse $2a$, et que pour toutes les autres abscisses plus grandes à l'infini, on a donné une manière générale de continuer la courbe au moyen des branches déjà connues; mais il ne faudra que considérer toutes les branches de continuation au delà de B, pour s'apercevoir qu'elles auront constamment avec celles qui sont en deçà de B le même rapport que la quantité $-(Z)$ a avec la quantité Z′.

Ce qu'on vient de démontrer sur la fonction φ doit se dire de même de l'autre fonction ψ qui appartient à la courbe AQB, et il ne sera pas difficile de l'appliquer aussi aux autres fonctions φ' et $'\psi$ pour les courbes *aqb*, ANB, et de faire voir le parfait accord qu'il y a entre les résultats de ces procédés et ceux qu'on a trouvés plus haut par une voie différente.

Cette matière aurait peut-être besoin d'être traitée avec un plus long détail que nous ne l'avons fait ici, mais ceux qui auront bien saisi l'esprit de nos méthodes n'auront pas de peine à suppléer d'eux-mêmes à ce qui peut manquer pour l'entière exactitude des démonstrations, sans qu'il soit nécessaire de nous étendre davantage là-dessus.

24. Il est à remarquer au reste que l'on abrégerait beaucoup la solution précédente, si, par le moyen de quelque substitution convenable, on parvenait à ramener tout d'un coup l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{d\frac{z}{x}}{dx}\right)$$

à la forme

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = c\frac{d^2z'}{dx^2}.$$

Or pour cela il n'y aurait qu'à supposer

$$z = \frac{\int z'x\,dx}{x^2},$$

ce qui donne, en différentiant,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\int\frac{d^2z'}{dt^2}x\,dx}{x^2},$$

$$\frac{d\frac{z}{x}}{dx} = \frac{z'}{x^2} - \frac{3\int z'x\,dx}{x^4},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\frac{dz'}{dx}}{x} - \frac{3z'}{x^2} + \frac{6\int z'x\,dx}{x^4},$$

et substituant,

$$\frac{\int \frac{d^2z'}{dt^2}\,x\,dx}{x^2} = c\left(\frac{dz'}{dx}\frac{1}{x} - \frac{z'}{x^2}\right);$$

multipliant par x^2 et différentiant de nouveau,

$$\frac{d^2z'}{dt^2}\,x\,dx = c\,\frac{d^2z'}{dx^2}\,x\,dx,$$

ou bien

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = c\,\frac{d^2z'}{dx^2},$$

équation réduite au cas du Problème I. Or, puisque la valeur de z' est ici égale à

$$\frac{1}{x}\,\frac{d(zx^2)}{dx} = 2z + x\frac{dz}{dx},$$

telle qu'on l'a supposée dans l'analyse du Problème précédent, il est facile de voir que la solution qu'on aura de cette façon reviendra entièrement à celle qu'on a déjà trouvée. Il est vrai qu'il faudra pour cela que la quantité k ait aussi les mêmes valeurs, et c'est ce qu'il sera aisé de prouver, car on sait que la détermination de k dépend de la condition que les termes algébriques $\mathrm{M}\frac{dz'}{dx} - z'\frac{d\mathrm{M}}{dx}$ disparaissent lorsque $x = a$ (*voyez* Problème I). Or on a ici

$$z' = 2z + x\frac{dz}{dx};$$

donc

$$dz' = 3dz + xd\,\frac{dz}{dx},$$

d'où l'on aura, en posant $x = a$ et $z = 0$, l'équation

$$3\mathrm{M}\frac{dz}{dx} + a\mathrm{M}\frac{d^2z}{dx^2} - a\frac{d\mathrm{M}}{dx}\,\frac{dz}{dx} = 0.$$

Maintenant, puisque z doit toujours disparaître lorsque $x = a$, quel

que soit le temps t, on aura aussi

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

et, par conséquent, par l'équation fondamentale,

$$0 = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2}{a}\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{a^2}$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{2}{a}\frac{dz}{dx};$$

laquelle valeur substituée, on aura

$$\left(\mathrm{M} - a\frac{d\mathrm{M}}{dx}\right)\frac{dx}{dz} = 0,$$

ou bien

$$\mathrm{M} - a\frac{d\mathrm{M}}{dx} = 0.$$

Or M étant égal à $\sin(x\sqrt{-k})$ (6), on aura, en substituant et posant ensuite $x = a$,

$$\sin(a\sqrt{-k}) - a\sqrt{-k}\cos(a\sqrt{-k}) = 0,$$

d'où l'on tire, comme dans le n° 18,

$$a\sqrt{-k} = \frac{\sin(a\sqrt{-k})}{\cos(a\sqrt{-k})} = \mathrm{tang}(a\sqrt{-k}).$$

Il y a encore une autre substitution qu'on pourrait employer au lieu de la précédente; cette substitution consiste à faire

$$z = y - x\frac{dy}{dx},$$

ce qui réduira l'équation en z à une équation en y de la forme de

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dx^2},$$

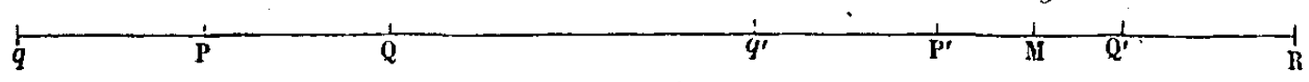
et cette équation étant construite par la méthode du Problème I, on aura pour la valeur de z des formules analogues à celles qu'on a trouvées à la fin du n° 20.

Application de la solution précédente à la recherche des lois de la propagation du son.

25. L'application du Problème précédent à la théorie de la propagation du son se présente d'elle-même. Imaginons un corps sonore quelconque mis en vibration au milieu d'un air tranquille, homogène et libre de tous côtés; il est visible que ce corps peut être regardé comme placé sensiblement au centre d'une sphère aérienne d'une étendue indéfinie; donc on ne s'écartera que très-peu de la vérité en calculant les mouvements communiqués à toute la masse de l'air, dans l'hypothèse des ondulations sphériques du n° **18** et d'après la construction donnée dans les n^os^ **20** et suivants.

Pour cela, ayant mené la ligne indéfinie PR qui représente le rayon de la sphère totale d'air qui environne le corps sonore, soit pris PQ pour le

Fig. 13.



rayon de la petite sphère dans laquelle sont contenues les particules qui ont reçu leur mouvement primitif du corps sonore placé en P, et soient tracées sur la ligne PQ les courbes qui représentent les valeurs données de Z et U que nous avons appelées courbes *fondamentales;* il suit du n° **22** que chacune de ces deux courbes devra être continuée du côté opposé P*q* avec une branche semblable, égale et diamétralement opposée à la première. Il est vrai que cette proposition n'a été démontrée que pour les courbes qui représentent les variables Z′ et U′, mais il est facile de voir qu'elle a également lieu ici, où, à cause de $x = 0$ au point P, les valeurs de Z′ et U′ deviennent 2Z et 2U. On prouvera de même que les autres branches de continuation qui, suivant la théorie du numéro cité, devraient être ajoutées du côté PR, disparaîtront entièrement à cause du rayon *a* infini, de sorte que les courbes *génératrices* seront toutes renfermées dans le seul espace *q*Q. Or, cela posé, qu'on demande pour un temps quelconque *t* les mouvements des particules qui composent la

fibre rectiligne PR, mouvements qui selon l'hypothèse doivent être sensiblement les mêmes pour toutes les autres fibres partant du centre P.

Soit, pour faciliter cette recherche, $t > \frac{PQ}{\sqrt{c}}$; il est évident qu'il faudra rejeter dans la construction du n° 20 les termes qui répondent aux abscisses $x + t\sqrt{c}$, ces termes ne pouvant ici produire aucune valeur réelle; il n'y aura donc que les termes relatifs aux abscisses $x - t\sqrt{c}$ qui entrent dans la détermination des quantités z et u, d'où dépend la connaissance des mouvements en question. Ayant pris (*fig.* 13, p. 217) sur la ligne PR le point P′ tel, que $PP' = t\sqrt{c}$, et ayant coupé de part et d'autre les parties P′Q′, P′q' égales à PQ et Pq, je transporte en q'P′Q′ les deux courbes qui renferment les valeurs des Z et U, telles qu'elles ont été décrites sur le diamètre qPQ, et prenant le point P′ pour l'origine des abscisses x, je trouve pour une particule quelconque M

$$z' = \frac{1}{2}\left[Z + \frac{dZx}{dx} - \frac{1}{\sqrt{c}}\int\left(U + \frac{dUx}{dx}\right)dx\right],$$

$$u' = \frac{1}{2}\left[U + \frac{dUx}{dx} - \sqrt{c}\,\frac{d\left(Z + \frac{dZx}{dx}\right)}{dx}\right].$$

Or, par les suppositions faites à la fin du n° 19, on a généralement

$$z' = z + \frac{dzx}{dx},$$

$$u' = u + \frac{dux}{dx},$$

l'origine des x étant au point P. Mettant donc ici, pour transporter cette origine en P′, $x + t\sqrt{c}$ au lieu de x et intégrant après avoir multiplié par $(x + t\sqrt{c})\,dx$, il viendra les deux équations suivantes :

$$z(x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2}Z x^2 + \frac{1}{2}t\sqrt{c}\left(\int Z\,dx + Zx\right)$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{c}}\int(x + t\sqrt{c})\,dx\int\left(U + \frac{dUx}{dx}\right)dx,$$

$$u(x+t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2}\mathrm{U}x^2 + \frac{1}{2}t\sqrt{c}\left(\int \mathrm{U}\,dx + \mathrm{U}x\right)$$
$$- \frac{\sqrt{c}}{2}\int (x+t\sqrt{c})\,d\left(\mathrm{Z} + \frac{d\,\mathrm{Z}x}{dx}\right).$$

Si l'on simplifie les expressions intégrales par la méthode des intégrations par parties et qu'on ajoute les constantes nécessaires, on aura

$$z(x+t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2}(x^2+xt\sqrt{c})\,\mathrm{Z} + \frac{1}{2}t\sqrt{c}\int \mathrm{Z}\,dx - \frac{1}{2}t\sqrt{c}\,\mathrm{A}$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{c}}\left(\frac{x^2}{2}+xt\sqrt{c}\right)\int \mathrm{U}\,dx - \frac{1}{4\sqrt{c}}\int \mathrm{U}x^2\,dx + \frac{\mathrm{D}}{4\sqrt{c}},$$

$$u(x+t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2}(x^2+xt\sqrt{c})\,\mathrm{U} + \frac{1}{2}t\sqrt{c}\int \mathrm{U}\,dx - \frac{1}{2}t\sqrt{c}\,\mathrm{B}$$
$$- \frac{\sqrt{c}}{2}(x^2+xt\sqrt{c})\frac{d\mathrm{Z}}{dx} - \frac{\sqrt{c}}{2}(x+2t\sqrt{c})\,\mathrm{Z} + \frac{\sqrt{c}}{2}\int \mathrm{Z}\,dx - \frac{\sqrt{c}}{2}\mathrm{A}.$$

L'addition des constantes sert à rendre égal à zéro le dernier membre de chacune des équations précédentes lorsque $x + t\sqrt{c} = 0$, ou $x = -t\sqrt{c} = -\mathrm{PP}'$, ce qui est nécessaire, puisque alors les premiers membres disparaissent d'eux-mêmes; ainsi, en supposant que les intégrations commencent toutes au point P′ où $x = 0$, les lettres A, B, D représenteront les valeurs des intégrales $\int \mathrm{Z}\,dx$, $\int \mathrm{U}\,dx$, $\int \mathrm{U}x^2\,dx$ prises depuis P′ jusqu'à q', lesquelles sont les mêmes que si on les prenait de l'autre côté depuis P′ jusqu'à Q′. Il faut néanmoins remarquer que dans la première équation l'on ne trouve point de constante qui fasse évanouir le terme $-\frac{1}{2\sqrt{c}}\left(\frac{x^2}{2}+xt\sqrt{c}\right)\int \mathrm{U}\,dx$ dans le cas de $x = -t\sqrt{c}$; c'est une omission que j'ai faite exprès à cause d'un nouveau terme qu'il faut encore ajouter à la même équation. Pour voir la raison de ceci, on n'a qu'à se souvenir de ce que, dans l'expression des valeurs de z' et de u', nous avons regardé comme généralement nuls tous les termes qui répondaient aux abscisses exprimées par $x + t\sqrt{c}$; il en est cependant

un qu'on ne peut pas négliger, c'est celui qui est exprimé par la formule intégrale

$$\int \left(\mathrm{U} + \frac{d\,\mathrm{U}x}{dx}\right) dx = \int \mathrm{U}\,dx + \mathrm{U}x,$$

car il est évident que quoique les valeurs de U disparaissent sur la ligne QR depuis le point Q, l'intégrale $\int \mathrm{U}\,dx$ conserve toujours la même valeur constante qu'on a désignée ci-dessus par B; de là il est facile de conclure qu'il faut ajouter à la valeur de z' le terme $\frac{\mathrm{B}}{2\sqrt{c}}$ et par conséquent à la valeur de $z\left(x+t\sqrt{c}\right)^2$ le terme $\left(\frac{x^2}{2}+xt\sqrt{c}\right)\frac{\mathrm{B}}{2\sqrt{c}}$, lequel fera justement disparaître l'autre terme $-\frac{1}{2\sqrt{c}}\left(\frac{x^2}{2}+xt\sqrt{c}\right)\int \mathrm{U}\,dx$ lorsque $x = -t\sqrt{c}$, $\int \mathrm{U}\,dx$ devenant alors égal à B.

Si l'on examine maintenant la forme des deux équations précédentes, on verra aisément que l'on peut se passer de l'addition des constantes, en donnant une autre origine aux intégrales $\int \mathrm{Z}\,dx$, $\int \mathrm{U}\,dx$, $\int \mathrm{U}x^2\,dx$, et les faisant commencer du point q' en allant vers R; ainsi l'on aura plus simplement

$$z = \frac{\left(x^2+xt\sqrt{c}\right)\mathrm{Z}+t\sqrt{c}\int \mathrm{Z}\,dx}{2\left(x+t\sqrt{c}\right)^2} - \frac{\left(x^2+2xt\sqrt{c}\right)\int \mathrm{U}\,dx+\int \mathrm{U}x^2\,dx}{4\sqrt{c}\left(x+t\sqrt{c}\right)^2},$$

$$u = \frac{\left(x^2+xt\sqrt{c}\right)\mathrm{U}+t\sqrt{c}\int \mathrm{U}\,dx}{2\left(x+t\sqrt{c}\right)^2} - \sqrt{c}\,\frac{\left(x^2+xt\sqrt{c}\right)\frac{d\mathrm{Z}}{d\tilde{x}}+\left(x+2t\sqrt{c}\right)\mathrm{Z}-\int \mathrm{Z}\,dx}{2\left(x+xt\sqrt{c}\right)^2}.$$

26. Il est visible par ces formules que z et u sont toujours égaux à zéro lorsque la valeur de x tombe au delà des points q' et Q'; d'où il suit que pour le temps donné t, il n'y a que la seule partie $q'\mathrm{Q}'$ de la fibre qui soit en mouvement; or, comme le point du milieu P' a été pris tel que $\mathrm{PP}' = t\sqrt{c}$, il est évident que l'onde aérienne $q'\tilde{\mathrm{Q}}'$ avancera toujours

avec une vitesse constante et égale à $\sqrt{c}$, qui est la même que nous avons trouvée plus haut dans la première hypothèse (12). On pourrait ici développer les lois particulières que chaque particule d'air observera dans ses mouvements, dépendamment des premières impressions Z et U produites par le corps sonore; mais laissant ces discussions peu importantes en elles-mêmes, nous nous contenterons de faire observer en général la variation des quantités z et u à mesure que le temps t augmente.

Pour cela, comme l'espace PQ est toujours très-petit (14), on peut, sans erreur sensible, lorsque le temps t a déjà une valeur considérable, négliger x par rapport à $t\sqrt{c}$; ainsi il viendra

$$z = \frac{x\mathrm{Z} + \int \mathrm{Z}dx - \frac{1}{\sqrt{c}}\int \mathrm{U}dx}{2t\sqrt{c}},$$

$$u = \frac{x\mathrm{U} + \int \mathrm{U}dx - \left(x\frac{d\mathrm{Z}}{dx} + 2\mathrm{Z}\right)\sqrt{c}}{2t\sqrt{c}},$$

d'où l'on voit qu'en général les valeurs de z et de u diminuent dans la raison inverse de $t\sqrt{c}$ ou de PP', ce qui montre que la force ou l'intensité du son doit décroître à très-peu près dans la raison inverse des distances simples du centre de propagation.

Je ne pousserai pas plus loin l'examen de ces formules et je ne chercherai pas non plus à déduire de la théorie exposée dans le n° 22 les lois de la réflexion qui aurait lieu dans l'hypothèse présente, si la masse de l'air était renfermée dans un vase sphérique de grandeur finie. Ces recherches étant de peu d'utilité, je me contenterai d'en avoir posé tous les principes dans la solution générale du Problème précédent.

CHAPITRE IV.

APPLICATION DE NOTRE MÉTHODE DU CHAPITRE II A DIFFÉRENTES HYPOTHÈSES.

27. Les Problèmes dont nous allons maintenant nous occuper, quoique peu nécessaires pour la matière que nous traitons, serviront néanmoins à faire voir l'utilité et l'extension de notre méthode du Chapitre II; ils pourront aussi être d'usage dans plusieurs autres points de la théorie du son.

PROBLÈME III. — *Construire l'équation* $\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dx^2} + mc\frac{d\frac{z}{x}}{dx}$.

Multipliant par $M\,dx$ et pratiquant les mêmes réductions que dans le Problème II, on aura l'équation en M

$$\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{m}{x}\frac{dM}{dx} = kM,$$

qu'il faudra intégrer. Or il est facile de s'assurer, au moyen de quelques transformations convenables, que cette équation tombe dans le cas général de Riccati et que par conséquent son intégrabilité dépend de certaines conditions qui se réduisent ici à ce que m soit un nombre pair positif ou négatif; mais la méthode ordinaire d'intégration pour ces mêmes cas est si laborieuse que je ne saurais me résoudre à la pratiquer; d'ailleurs il ne suffit pas de trouver une expression algébrique de M, il faut de plus qu'elle soit telle, qu'on puisse dans la suite du calcul chasser aisément la quantité k à l'aide de quelques réductions, comme on a fait dans les Problèmes précédents. Il m'a donc fallu imaginer une autre méthode, et voici comment je m'y suis pris.

Puisque l'on a trouvé pour le cas de $m = 0$, qui est celui du Problème I, $M = A\sin(x\sqrt{-k})$, et pour le cas de $m = 2$ dans le Problème II $M = A\left[\sin(x\sqrt{-k}) - x\sqrt{-k}\cos(x\sqrt{-k})\right]$, ce qui s'exprime plus simplement par $M = A\sin(x\sqrt{-k}) - Ax\frac{d\sin(x\sqrt{-k})}{dx}$, on est assez fondé

à croire que lorsque m aura une valeur quelconque 4, 6,..., l'expression de M sera de la forme suivante :

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}\sin\left(x\sqrt{-k}\right) + \mathrm{B}x\frac{d\sin\left(x\sqrt{-k}\right)}{dx} + \mathrm{C}x^2\frac{d^2\sin\left(x\sqrt{-k}\right)}{dx^2} + \ldots,$$

A, B, C,..., étant des coefficients à déterminer par la substitution et la comparaison des termes.

Mais pour embrasser une plus grande généralité, je suppose

$$\sin\left(x\sqrt{-k}\right) = u,$$

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}u + \mathrm{B}\frac{du}{dx} + \mathrm{C}\frac{d^2u}{dx^2} + \mathrm{D}\frac{d^3u}{dx^3} + \ldots,$$

et je regarde les quantités A, B, C,... comme des fonctions variables de x, dont il faut chercher la valeur convenable à l'équation donnée.

Je commence par prendre la différentielle de M que je mets sous la forme suivante :

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} \dfrac{d\mathrm{M}}{dx} = \dfrac{d\mathrm{A}}{dx}u + \dfrac{d\mathrm{B}}{dx} & \dfrac{du}{dx} + \dfrac{d\mathrm{C}}{dx} & \dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d\mathrm{D}}{dx} & \dfrac{d^3u}{dx^3} & +\ldots, \\ \qquad + \mathrm{A} & \quad + \mathrm{B} & \quad + \mathrm{C} & & +\ldots. \end{array}$$

Je trouve de même

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} \dfrac{d^2\mathrm{M}}{dx^2} = \dfrac{d^2\mathrm{A}}{dx^2}u + \dfrac{d^2\mathrm{B}}{dx^2} & \dfrac{du}{dx} + \dfrac{d^2\mathrm{C}}{dx^2} & \dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2\mathrm{D}}{dx^2} & \dfrac{d^3u}{dx^3} & +\ldots, \\ \qquad + \dfrac{2d\mathrm{A}}{dx} & \quad + \dfrac{2d\mathrm{B}}{dx} & \quad + \dfrac{2d\mathrm{C}}{dx} & & +\ldots, \\ & \quad + \mathrm{A} & \quad + \mathrm{B} & & +\ldots. \end{array}$$

On trouvera de plus par la nature de la fonction u

$$k\mathrm{M} = \mathrm{A}\frac{d^2u}{dx^2} + \mathrm{B}\frac{d^3u}{dx^3} + \mathrm{C}\frac{d^4u}{dx^4} + \mathrm{D}\frac{d^5u}{dx^5} + \ldots.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2} - \frac{m}{x}\frac{d\mathrm{M}}{dx} - k\mathrm{M} = 0$$

et ordonnant les termes par rapport à la variable u, on aura

$$\left.\begin{aligned} u\left(\frac{d^2\mathrm{A}}{dx^2}-\frac{m}{x}\frac{d\mathrm{A}}{dx}\right)+\frac{du}{dx}\left(\frac{d^2\mathrm{B}}{dx^2}-\frac{m}{x}\frac{d\mathrm{B}}{dx}+2\frac{d\mathrm{A}}{dx}-\frac{m\mathrm{A}}{x}\right)\\ +\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{d^2\mathrm{C}}{dx^2}-\frac{m}{x}\frac{d\mathrm{C}}{dx}+2\frac{d\mathrm{B}}{dx}-\frac{m\mathrm{B}}{x}\right)\\ +\frac{d^3u}{dx^3}\left(\frac{d^2\mathrm{D}}{dx^2}-\frac{m}{x}\frac{d\mathrm{D}}{dx}+2\frac{d\mathrm{C}}{dx}-\frac{m\mathrm{C}}{x}\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}=0,$$

d'où l'on tirera les équations particulières

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\mathrm{A}}{dx^2}-\frac{m}{x}\frac{d\mathrm{A}}{dx}=0,\\ &\frac{d^2\mathrm{B}}{dx^2}-\frac{m}{x}\frac{d\mathrm{B}}{dx}+2\frac{d\mathrm{A}}{dx}-\frac{m\mathrm{A}}{x}=0,\\ &\frac{d^2\mathrm{C}}{dx^2}-\frac{m}{x}\frac{d\mathrm{C}}{dx}+2\frac{d\mathrm{B}}{dx}-\frac{m\mathrm{B}}{x}=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

qui sont très-aisées à résoudre; dans l'intégration de toutes ces équations, à l'exception de la première, on peut négliger les constantes qui ne serviraient qu'à rendre les valeurs des quantités B, C, D,... plus compliquées sans les rendre plus générales. Ainsi f et h étant les deux constantes de la première quantité A, on aura

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}=f+hx^{m+1},\\ &\mathrm{B}=-fx-hx^{m+2},\\ &\mathrm{C}=f\frac{(m-2)}{2(m-1)}x^2+h\frac{(m+4)}{2(m+3)}x^{m+3},\\ &\mathrm{D}=-f\frac{(m-2)(m-4)}{2.3(m-1)(m-2)}x^3-h\frac{(m+4)(m+6)}{2.3(m+3)(m+4)}x^{m+4},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

où la loi de la progression est assez manifeste.

28. Dans ces formules on voit clairement que si m est un nombre pair positif à commencer par 2, la série des termes multipliés par f devient

exacte et finie, tandis que l'autre série, qui est toute multipliée par h, va à l'infini; c'est tout le contraire lorsque m est un nombre pair négatif à commencer de -4, car dans ce cas la seconde série se termine après un nombre fini de termes, la première allant à l'infini; d'où il suit que, puisque les quantités f et h sont absolument arbitraires, il n'y a qu'à faire $h = 0$ dans le premier cas et $f = 0$ dans le second, et l'on aura algébriquement la valeur de M en x, en cherchant celle des coefficients A, B, C,..., dont le nombre est alors limité.

On pourrait au premier aspect former des doutes sur l'exactitude des formules précédentes, par la raison qu'elles ne paraissent pas satisfaire aux cas de $m = 0$ et de $m = -2$, dans lesquels on sait d'ailleurs que M a une valeur finie.

Pour lever cette difficulté, il ne faut que recourir à l'intégration immédiate des équations qui doivent donner les valeurs de A et de B dans les deux cas proposés; on trouvera pour le premier

$$A = f, \quad B = 0, \quad C = 0, \ldots,$$

et pour le second

$$A = hx^{-1}, \quad B = 0, \quad C = 0;$$

c'est un inconvénient attaché à toutes ces sortes de formules générales d'intégration, d'être en défaut dans certains cas qui demandent un examen à part.

On pourrait encore être embarrassé dans l'usage des formules précédentes, lorsque $m = \pm 1$, $m = \pm 3$, $m = \pm 5$,..., puisque dans ces cas tous les termes de la série f ou h deviennent infinis, à l'exception seulement de quelques-uns des premiers. Mais il est aisé de se tirer de cet embarras, si l'on fait réflexion que les constantes f et h étant absolument arbitraires peuvent être supposées tout ce qu'on veut; ainsi il n'y a qu'à faire f ou h égaux à 0 ou à $0 \times g$, car ce 0 détruisant celui du dénominateur, les termes qui étaient infinis redeviendront finis et se trouveront de nouveau multipliés par une constante arbitraire g; ceux au contraire qui étaient demeurés finis s'évanouiront par cette supposition; d'où résulte la règle générale, savoir, de ne conserver que les termes qui

reçoivent une valeur infinie, en les dégageant cependant de l'infini qu'ils renferment.

Ayant ainsi trouvé la valeur de M, il ne s'agit plus que de poursuivre le calcul de la même manière qu'on l'a fait dans le Problème I; on aura donc de nouveau les deux équations

$$\int z\,\mathrm{M}\,dx = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{ZM}\,dx + \frac{\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)}{\sqrt{-ck}}\int \mathrm{UM}\,dx,$$

$$\int u\,\mathrm{M}\,dx = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{UM}\,dx - \sqrt{-ck}\,\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{ZM}\,dx;$$

substituant la valeur de

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}\sin\left(x\sqrt{-k}\right) + \mathrm{B}\frac{d\sin\left(x\sqrt{-k}\right)}{dx} + \mathrm{C}\frac{d^2\sin\left(x\sqrt{-k}\right)}{dx^2} + \ldots,$$

et faisant disparaître les différences de $\sin\left(x\sqrt{-k}\right)$ par la méthode des intégrations par parties, on obtiendra

$$\int z'\sin\left(x\sqrt{-k}\right)dx = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{Z}'\sin\left(x\sqrt{-ck}\right)dx + \frac{\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)}{\sqrt{-ck}}\int \mathrm{U}'\sin\left(x\sqrt{-k}\right)dx,$$

$$\int u'\sin\left(x\sqrt{-k}\right)dx = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{U}'\sin\left(x\sqrt{-k}\right)dx - \sqrt{-ck}\,\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{Z}'\sin\left(x\sqrt{-k}\right)dx,$$

où

$$z' = \mathrm{A}z - \frac{d\,\mathrm{B}z}{dx} + \frac{d^2\,\mathrm{C}z}{dx^2} - \ldots,$$

$$\mathrm{Z}' = \mathrm{AZ} - \frac{d\,\mathrm{BZ}}{dx} + \frac{d^2\,\mathrm{CZ}}{dx^2} - \ldots,$$

$$u' = \mathrm{A}u - \frac{d\,\mathrm{B}u}{dx} + \frac{d^2\,\mathrm{C}u}{dx^2} - \ldots,$$

$$\mathrm{U}' = \mathrm{AU} - \frac{d\,\mathrm{BU}}{dx} + \frac{d^2\,\mathrm{CU}}{dx^2} - \ldots.$$

Enfin l'on tirera les valeurs de z et de u par les mêmes procédés qu'on a suivis dans les Problèmes I et II.

Je ne m'arrêterai pas ici à examiner la nature des courbes *génératrices* et la manière de les continuer, laquelle dépend de la valeur de M; il serait cependant aisé de le faire suivant les principes que nous avons établis, mais comme je ne donne ici cette solution générale que comme une simple application de ma méthode, il vaut mieux la simplifier autant qu'il est possible, en y introduisant les fonctions indéterminées φ et ψ comme on l'a pratiqué dans le Problème II. On trouvera donc par ce moyen les deux équations suivantes :

$$\mathrm{A}z - \frac{d\mathrm{B}z}{dx} + \frac{d^2\mathrm{C}z}{dx^2} + \ldots = \frac{\varphi(x+t\sqrt{c}) + \varphi(x-t\sqrt{c})}{2} + \frac{\psi(x+t\sqrt{c}) - \psi(x-t\sqrt{c})}{2\sqrt{c}},$$

$$\mathrm{A}u - \frac{d\mathrm{B}u}{dx} + \frac{d^2\mathrm{C}u}{dx^2} + \ldots = \frac{\psi(x+t\sqrt{c}) + \psi(x-t\sqrt{c})}{2} + \sqrt{c}\,\frac{\varphi'(x+t\sqrt{c}) - \varphi'(x-t\sqrt{c})}{2},$$

qu'il faudra ensuite intégrer pour avoir les valeurs de z et de u; ces intégrations, quoique toujours possibles, ne laisseraient pas que d'être souvent fort embarrassantes; c'est pourquoi je vais résoudre le même Problème par une autre méthode moins directe à la vérité et moins lumineuse que la précédente, mais telle qu'elle donnera les valeurs de z et de u en termes finis.

Autre construction de l'équation $\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dx^2} + mc\frac{d\frac{z}{x}}{dx}$.

29. Au lieu de multiplier cette équation par $\mathrm{M}dx$, en supposant M une fonction de x, et de l'intégrer ensuite eu égard à la seule variabilité de x, je la multiplie au contraire par $\mathrm{M}dt$, où M est supposée une fonction de t, et j'en prends la somme en considérant la seule t comme variable; je poursuis le calcul de la même façon qu'auparavant en faisant toujours varier t au lieu de x. Je trouve d'abord l'équation en M

$$\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2} = k\mathrm{M},$$

d'où je tire

$$\mathrm{M} = \sin\left(t\sqrt{-k}\right);$$

puis, en supposant $\int z\mathrm{M}dt = s$, il me vient l'équation fondamentale

$$ks = c\frac{d^2s}{dx^2} + mc\frac{d\frac{s}{x}}{dx}.$$

Pour intégrer cette nouvelle équation, je fais $\frac{s}{x} = y$, ce qui la réduit par la substitution à

$$ky = c\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(m+2)c}{x}\frac{dy}{dx},$$

équation qui, étant comparée à celle en M du Problème précédent, donnera pour la valeur de y la suite

$$\mathrm{A}u + \mathrm{B}\frac{du}{dx} + \mathrm{C}\frac{d^2u}{dx^2} + \mathrm{D}\frac{d^3u}{dx^3} + \ldots,$$

les valeurs des A, B, C,... étant les mêmes qu'auparavant, mais étant transformées par la substitution de $m+2$ au lieu de $-m$. A l'égard de la valeur de u, elle sera ici égale à $\sin\left(x\sqrt{-\frac{k}{c}}\right)$; il faut observer qu'elle peut être également $\cos\left(x\sqrt{-\frac{k}{c}}\right)$; d'où il suit qu'en prenant deux quantités P, Q constantes à l'égard de x, on aura généralement

$$u = \mathrm{P}\sin\left(x\sqrt{-\frac{k}{c}}\right) + \mathrm{Q}\cos\left(x\sqrt{-\frac{k}{c}}\right);$$

donc si on fait

$$s = \mathrm{P}\left[\mathrm{A}\sin\left(x\sqrt{-\frac{k}{c}}\right) + \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{c}}\mathrm{B}\cos\left(x\sqrt{-\frac{k}{c}}\right) + \frac{k}{c}\mathrm{C}\sin\left(x\sqrt{-\frac{k}{c}}\right) + \ldots\right]$$

$$+ \mathrm{Q}\left[\mathrm{A}\cos\left(x\sqrt{-\frac{k}{c}}\right) - \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{c}}\mathrm{B}\sin\left(x\sqrt{-\frac{k}{c}}\right) + \frac{k}{c}\mathrm{C}\cos\left(x\sqrt{-\frac{k}{c}}\right) - \ldots\right],$$

on aura

$$A = fx + hx^{-m},$$

$$B = -fx^2 - hx^{1-m},$$

$$C = f\frac{(m+4)}{2(m+3)}x^3 + h\frac{(m-2)}{2(m-1)}x^{2-m},$$

$$D = -f\frac{(m+4)(m+6)}{2.3(m+3)(m+4)}x^4 - h\frac{(m-2)(m-4)}{2.3(m-1)(m-2)}x^{3-m},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où l'on voit que les coefficients des termes de la série f sont les mêmes que ceux de la série h dans les formules du Problème précédent, et réciproquement; donc il suffira d'appliquer aux formules présentes les mêmes remarques qu'on a déjà faites sur les différents cas de m positif ou négatif.

Soit divisée toute l'équation par A, il est évident que, puisque l'on ne doit prendre à la fois que l'une des deux séries, selon que m est positif ou négatif, les fractions $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\cdots$ seront toujours égales à zéro lorsque $x = 0$; soit, de plus, lorsque $x = 0$, Z la valeur de $\frac{z}{A}$ et U la valeur de $d\frac{\frac{z}{A}}{dx}$, valeurs qui pourront très-bien être l'une et l'autre des fonctions de t; on aura, en faisant d'abord $x = 0$ dans l'équation ainsi préparée,

$$\int ZM\,dt = Q;$$

ensuite, différentiant la même équation et y faisant de nouveau $x = 0$, il viendra

$$\int UM\,dt = P\frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{c}}(1+\mu),$$

équation dans laquelle μ est une constante qui désigne la valeur de $d\frac{\frac{B}{A}}{dx}$; posant, pour abréger, U au lieu de $\frac{U}{1+\mu}$, on substituera $\int ZM\,dt$ au lieu de Q et $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{-k}}\int UM\,dt$ au lieu de P. Maintenant, pour chasser la lettre k

de l'équation, on se servira de la méthode des intégrations par parties qui a déjà été tant de fois mise en usage; car, puisque $M = \sin(t\sqrt{-k})$, on peut, au lieu de $\int ZM\,dt$, substituer indifféremment

$$\frac{1}{\sqrt{-k}}\int \frac{dZ}{dt}\cos(t\sqrt{-k})\,dt \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{k}\int \frac{d^2Z}{dt^2}\sin(t\sqrt{-k})\,dt,$$

en négligeant les termes algébriques qui doivent être supposés d'eux-mêmes égaux à zéro; il en est de même de l'expression $\int UM\,dt$. Ces opérations achevées, on mettra sous les signes d'intégration les sinus et cosinus de $x\sqrt{-\frac{k}{c}}$, et on développera à l'ordinaire les produits de ces sinus et cosinus par les sinus et cosinus correspondants de $t\sqrt{-k}$; on obtiendra ainsi l'équation

$$\begin{aligned}\int z\sin(t\sqrt{-k})\,dt = {} & \frac{1}{2}\int\left(AZ+\frac{B}{\sqrt{c}}\frac{dZ}{dt}+\frac{C}{c}\frac{d^2Z}{dt^2}+\ldots\right)\sin\left[\left(t-\frac{x}{\sqrt{c}}\right)\sqrt{-k}\right]dt\\ & +\frac{1}{2}\int\left(AZ-\frac{B}{\sqrt{c}}\frac{dZ}{dt}+\frac{C}{c}\frac{d^2Z}{dt^2}+\ldots\right)\sin\left[\left(t+\frac{x}{\sqrt{c}}\right)\sqrt{-k}\right]dt\\ & +\frac{1}{2\sqrt{c}}\int\left(A\int U\,dt+\frac{B}{\sqrt{c}}U+\frac{C}{c}\frac{dU}{dt}+\ldots\right)\sin\left[\left(t-\frac{x}{\sqrt{c}}\right)\sqrt{-k}\right]dt\\ & -\frac{1}{2\sqrt{c}}\int\left(A\int U\,dt-\frac{B}{\sqrt{c}}U+\frac{C}{c}\frac{dU}{dt}+\ldots\right)\sin\left[\left(t+\frac{x}{\sqrt{c}}\right)\sqrt{-k}\right]dt.\end{aligned}$$

Or, suivant les principes de notre méthode, on égalera le t du premier membre aux quantités $t-\frac{x}{\sqrt{c}}$ et $t+\frac{x}{\sqrt{c}}$ du second; d'où l'on aura $t+\frac{x}{\sqrt{c}}$ pour la valeur de t dans les termes multipliés par $\sin\left(t-\frac{x}{\sqrt{c}}\right)$ et $t-\frac{x}{\sqrt{c}}$ pour la valeur de t dans les autres termes qui se trouvent multipliés par $\sin\left(t+\frac{x}{\sqrt{c}}\right)$; or, Z et U étant des fonctions de t, on peut les exprimer généralement par Δt et Γt, ou si, pour abréger davantage, on pose $Z+\frac{1}{\sqrt{c}}\int U\,dt=\Delta t$ et $Z-\frac{1}{\sqrt{c}}\int U\,dt=\Gamma t$, on tirera de l'équation pré-

cédente

$$z = \frac{A}{2}\left[\Delta\left(t+\frac{x}{\sqrt{c}}\right)+\Gamma\left(t+\frac{x}{\sqrt{c}}\right)\right]$$
$$+\frac{B}{2\sqrt{c}}\left[\Delta'\left(t+\frac{x}{\sqrt{c}}\right)-\Gamma'\left(t-\frac{x}{\sqrt{c}}\right)\right]$$
$$+\frac{C}{2c}\left[\Delta''\left(t+\frac{x}{\sqrt{c}}\right)+\Gamma''\left(t-\frac{x}{\sqrt{c}}\right)\right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on aimait mieux que l'expression de Z fût composée de fonctions de $x+t\sqrt{c}$ et de $x-t\sqrt{c}$, il n'y aurait qu'à faire quelques légères transformations à l'équation finale qui donne immédiatement la valeur de z; mais, sans avoir recours à cet expédient qui est sans doute le plus direct, il suffit de remarquer que l'équation différentielle de z ne contenant que le dt^2, il faut que l'expression de z soit telle qu'elle demeure la même en changeant t en $-t$. Soit donc mis dans la formule précédente $-t$ au lieu de t, $\Delta\left(t+\frac{x}{\sqrt{c}}\right)$ et $\Gamma\left(t-\frac{x}{\sqrt{c}}\right)$ deviendront

$$\Delta\left(-t+\frac{x}{\sqrt{c}}\right)=\Delta\left[\frac{1}{\sqrt{c}}(x-t\sqrt{c})\right],$$
$$\Gamma\left(-t-\frac{x}{\sqrt{c}}\right)=\Gamma\left[\frac{-1}{\sqrt{c}}(x+t\sqrt{c})\right].$$

Changeant les valeurs des fonctions Δ et Γ, on pourra mettre simplement $\Delta(x-t\sqrt{c})$ au lieu de $\Delta\left[\frac{1}{\sqrt{c}}(x-t\sqrt{c})\right]$, et $\Gamma(x+t\sqrt{c})$ au lieu de $\Gamma\left[\frac{-1}{\sqrt{c}}(x-t\sqrt{c})\right]$; mais il faudra mettre ensuite

$$\sqrt{c}\,\Delta'(x-t\sqrt{c}),\quad c\Delta''(x-t\sqrt{c}),\ldots$$

au lieu de

$$\Delta'\left[\frac{1}{\sqrt{c}}(x-t\sqrt{c})\right],\quad \Delta''\left[\frac{1}{\sqrt{c}}(x-t\sqrt{c})\right],\cdots;$$

et

$$-\sqrt{c}\,\Gamma'(x+t\sqrt{c}),\quad c\Gamma''(x+t\sqrt{c}),\ldots$$

au lieu de

$$\Gamma'\left[\frac{1}{\sqrt{c}}(x+t\sqrt{c})\right],\quad \Gamma''\left[\frac{1}{\sqrt{c}}(x+t\sqrt{c})\right],\cdots,$$

comme il est aisé de s'en assurer avec un peu de réflexion; on aura de cette manière

$$z=\frac{A}{2}[\Gamma(x+t\sqrt{c})+\Delta(x-t\sqrt{c})]$$
$$+\frac{B}{2}[\Gamma'(x+t\sqrt{c})+\Delta'(x-t\sqrt{c})]$$
$$+\frac{C}{2}[\Gamma''(x+t\sqrt{c})+\Delta''(x-t\sqrt{c})]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En rapprochant cette formule de celle qu'on a trouvée dans le numéro précédent, il sera facile de déterminer le rapport des fonctions $\Gamma(x+t\sqrt{c})$ et $\Delta(x-t\sqrt{c})$ aux fonctions $\varphi(x+t\sqrt{c})+\frac{1}{\sqrt{c}}\psi(x+t\sqrt{c})$ et $\varphi(x-t\sqrt{c})-\frac{1}{\sqrt{c}}\psi(x-t\sqrt{c})$.

Cette méthode conduit, comme on le voit, à des résultats beaucoup plus simples que la première, mais elle est aussi moins générale et ne peut à la rigueur être employée que dans l'hypothèse que toutes les valeurs de z, qui répondent à différentes abscisses x dans un même instant, soient liées entre elles par la loi de continuité. Ce n'est que d'après la première solution qu'il sera permis de prendre pour Γ et Δ des fonctions quelconques, régulières ou non.

Des oscillations d'un fluide élastique renfermé dans un tuyau de figure conoïdale quelconque.

30. Soit imaginé tout le fluide partagé en une infinité de tranches perpendiculaires à l'axe, dont la largeur variable soit exprimée par X qui désigne une fonction de la partie correspondante x de l'axe; il est clair que, si l'on suppose que les tranches conservent toujours leur parallélisme et que z soit l'espace infiniment petit parcouru par une tranche quelcon-

que $X\,dx$ dans le temps t, cette quantité $X\,dx$ deviendra

$$\left(X+\frac{dX}{dx}z\right)(dx+dz)=X\,dx+\frac{dX}{dx}z\,dx+X\,dz,$$

en supprimant les infiniment petits du second ordre; donc, si c désigne l'élasticité du fluide dans son état naturel, l'élasticité du fluide contenu dans la tranche $X\,dx$ sera, après le temps t,

$$c\frac{X\,dx}{X\,dx+\frac{dX}{dx}z\,dx+X\,dz}=c\left(1-\frac{dz}{dx}-\frac{dX}{X\,dx}z\right),$$

en négligeant ce qui se doit négliger. La différence de cette expression prise négativement donne l'excès de l'élasticité d'une tranche quelconque sur celle qui la suit immédiatement; donc, si on multiplie cet excès par la largeur $X+\frac{dX}{dx}z$ de la tranche et qu'on divise ensuite par la masse $X\,dx$, on aura la force accélératrice qui tend à faire parcourir l'espace z; donc l'équation du mouvement du fluide sera

$$\frac{d^2z}{dt^2}=c\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d\frac{dX}{X\,dx}z}{dx}\right)\left(\frac{X+\frac{dX}{dx}z}{X}\right),$$

qui se réduit, par la supposition de z infiniment petit, à

$$\frac{d^2z}{dt^2}=c\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d\frac{dX}{X\,dx}z}{dx}\right).$$

Telle est l'équation générale, mais jusqu'à présent je ne connais encore que quelques cas où elle soit constructible; ce sont ceux qui peuvent être compris dans la solution du Problème III, c'est-à-dire où l'on a $\frac{dX}{X\,dx}=\frac{m}{x}$ ou bien $X=hx^m$, ce qui donne un conoïde formé par la révolution d'une parabole ou d'une hyperbole quelconque. On aura donc, dans cette hypothèse,

$$\frac{d^2z}{dt^2}=c\left(\frac{d^2z}{dx^2}+m\frac{d\frac{z}{x}}{dx}\right),$$

équation intégrable exactement toutes les fois que m sera un nombre pair positif ou négatif (28); dans tous les autres cas la valeur de z sera exprimée par une suite infinie.

Soit $m = 2$, on aura le cas du Problème II, et la formule du n° 28 donnera

$$z + \frac{dxz}{dx} = \frac{\varphi(x + t\sqrt{c}) + \varphi(x - t\sqrt{c})}{2} + \frac{\Psi(x + t\sqrt{c}) - \Psi(x - t\sqrt{c})}{2\sqrt{c}},$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans le n° 20; de plus, la formule du n° 29 donne

$$z = \frac{\Gamma(x + t\sqrt{c}) + \Delta(x - t\sqrt{c})}{x^2} - \frac{\Gamma'(x + t\sqrt{c}) + \Delta'(x - t\sqrt{c})}{x},$$

ce qui s'accorde encore avec le n° 21.

Si on fait $m = 1$, le conoïde sera formé par la révolution d'une parabole Apollonienne autour de son axe, et la valeur de z ne pourra être donnée que par des séries.

31. Scolie. — Si le tuyau avait une figure plane, l'équation précédente aurait encore lieu, et le cas de $m = 1$ appartiendrait à un tuyau triangulaire; ainsi l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d\frac{z}{x}}{dx}\right)$$

pourrait servir à trouver les lois de la propagation du son dans un plan, et c'est dans cette vue que M. Euler me fit l'honneur de me la proposer dans la même lettre dont j'ai fait mention (16). En faisant usage de ma nouvelle méthode, je reconnus bientôt que cette équation n'était pas intégrable exactement, mais qu'on pouvait la rendre telle en donnant au terme $\frac{d\frac{z}{x}}{dx}$ le coefficient 2. Voilà ce qui m'a conduit à l'hypothèse des ondulations sphériques que nous avons examinée au long dans le Chapitre précédent, hypothèse qui est d'ailleurs beaucoup plus conforme à

la nature que celle des ondulations simplement circulaires. Je fis part à M. Euler des changements que j'avais faits à son hypothèse et des résultats qui m'en étaient venus, dans une lettre de la fin de décembre 1759; mais j'ai vu depuis avec beaucoup de plaisir que ce savant Auteur en avait déjà fait de même, et était parvenu aux mêmes conclusions que moi sur les lois de la propagation des ébranlements de l'air dans une sphère. (*Voyez* son Mémoire imprimé dans le tome II des *Miscellanea Taurinensia*, à la tête de ces Recherches.)

32. Supposons maintenant le tuyau d'une longueur donnée a, et bouché à ses deux extrémités; il faudra que la nature des fonctions Γ et Δ (29) soit telle, que z s'évanouisse aux points où $x = 0$ et $x = a$, quel que soit d'ailleurs le temps t. Par un raisonnement semblable à celui du n° 23, on trouvera pour la première de ces conditions

$$\Gamma(t\sqrt{c}) + \Delta(-t\sqrt{c}) = 0,$$

ce qui apprend comment la fonction Δ doit être continuée du côté des abscisses négatives; pour satisfaire ensuite à l'autre condition, faisons

$$\Gamma(a + t\sqrt{c}) = T, \quad \Delta(a - t\sqrt{c}) = \theta,$$

et soient α, β, γ,... les valeurs des quantités $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}, \cdots$, lorsque $x = a$; on aura

$$\alpha(T + \theta) + \frac{\beta}{\sqrt{c}}\frac{d(T-\theta)}{dt} + \frac{\gamma}{c}\frac{d^2(T+\theta)}{dt^2} + \ldots = 0.$$

Soit maintenant

$$T = -\theta + y,$$

on aura

$$\alpha y + \frac{\beta}{\sqrt{c}}\frac{dy}{dt} + \frac{\gamma}{c}\frac{d^2y}{dt^2} + \ldots = \frac{2\beta}{\sqrt{c}}\frac{d\theta}{dt} + \ldots;$$

l'intégration de cette équation sera toujours possible. Soient a', a'', a''',... les racines de l'équation

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots = 0;$$

la valeur de y sera de la forme suivante :

$$y = \mathrm{F}\, e^{a' t \sqrt{c}} \int (- a' \beta e^{-a' t \sqrt{c}}\, d\theta - \ldots)$$
$$+ \mathrm{G}\, e^{a'' t \sqrt{c}} \int (- a'' \beta e^{-a'' t \sqrt{c}}\, d\theta - \ldots)$$
$$+ \mathrm{H}\, e^{a''' t \sqrt{c}} \int (- a''' \beta e^{-a''' t \sqrt{c}}\, d\theta - \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

F, G, H,... désignant des constantes à déterminer par la substitution et la comparaison des termes.

Si la quantité y était égale à zéro, il est évident que les courbes génératrices, qui représentent les fonctions Γ et Δ, ne seraient qu'un assemblage de branches toutes égales et semblables à celles qui répondent à la portion a de l'axe; ainsi il ne serait pas difficile de comprendre que le système des particules reprendrait toujours sa première position après chaque intervalle de temps égal à $\frac{2a}{\sqrt{c}}$; or, pour que ce cas puisse avoir lieu, il suffira que le coefficient β et tous ceux qui multiplient les différences impaires de y soient nuls, c'est-à-dire que la valeur de z soit telle, qu'elle ne renferme que des différences paires des fonctions Γ et Δ, ou au moins que leurs coefficients s'évanouissent en posant $x = a$. Ces conditions ne pouvant avoir lieu dans notre cas, on en doit conclure que les oscillations des particules de l'air contenu dans les tuyaux donnés changeront continuellement et ne reviendront jamais les mêmes, si ce n'est par une espèce de hasard dépendant de la nature des premiers ébranlements. Je dis par une espèce de hasard, puisque je suppose que ces ébranlements soient quelconques; car on pourrait d'ailleurs les supposer tels, que le système fût toujours soumis aux lois de l'isochronisme : c'est ce qui est connu de tous les Géomètres; mais nous aurons dans la suite occasion d'examiner cette matière plus à fond qu'on ne l'a encore fait.

Des vibrations des cordes inégalement épaisses.

33. Il est facile de voir que l'équation pour le mouvement des cordes tendues qui sont d'une épaisseur variable sera de la même forme que celle qu'on a donnée (*Rech. préc.*, XII), avec cette seule différence que la quantité c devra être regardée non plus comme constante, mais comme une variable exprimée par quelque fonction de x. Conservant donc les mêmes noms, et supposant X une fonction donnée de x, on aura

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{X}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Soit, dans un cas particulier,

$$\mathrm{X} = hx^n;$$

je fais

$$x = s^{\frac{2}{2-n}}, \quad y = \frac{z}{s},$$

et prenant ds pour constante, je trouve, après les substitutions et les réductions convenables,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{(2-n)^2h}{4}\left(\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{n-4}{n-2}\frac{d\frac{z}{s}}{ds}\right),$$

équation qui est dans le cas du Problème III. Donc, si on suppose

$$m = -\frac{n-4}{n-2}, \quad c = \frac{(2-n)^2h}{4},$$

et qu'on substitue s au lieu de x dans les formules des n^{os} **28** ou **29**, on aura la valeur de z, laquelle étant ensuite multipliée par s donnera celle de y en s et en t, où il n'y aura plus qu'à remettre, au lieu de s, sa valeur en x tirée de l'équation de supposition

$$x = s^{\frac{2}{2-n}}.$$

De là il est évident que y aura une valeur finie et exacte toutes les fois

que $\frac{n-4}{n-2}$ sera un nombre pair positif ou négatif; c'est ce qui arrivera lorsque $n = \frac{4\mu-4}{2\mu-1}$, μ étant pris pour exprimer un nombre quelconque entier; dans tous les autres cas la série ira à l'infini. Au reste, soit qu'on trouve pour y une valeur exacte ou non, les vibrations de la corde ne seront jamais isochrones, excepté dans le seul cas de $n = 0$, qui est celui d'une épaisseur uniforme ; car il est visible que la corde étant supposée fixe à ses deux bouts, on aura les mêmes conditions à remplir que dans le n° 32; donc les conséquences en seront aussi les mêmes.

Le défaut d'isochronisme dans les cordes inégalement épaisses les rend incapables de produire un son fixe et appréciable à l'oreille; aussi les artistes les rejettent-ils toujours et les nomment-ils communément cordes *fausses*, par la raison qu'elles ne peuvent jamais s'accorder parfaitement avec les autres.

Cette observation peut servir, ce me semble, à démontrer l'insuffisance de la théorie de M. Taylor sur les vibrations des cordes; car il est visible que, quelque inégale que puisse être une corde sonore, elle devrait cependant faire toujours des vibrations de même durée, si la figure qu'elle prend d'elle-même ne pouvait être autre que celle qui convient à l'isochronisme, tel que cet Auteur le suppose.

Au reste on pourra toujours résoudre l'équation générale

$$\frac{d^2y}{dt^2} = X\frac{d^2y}{dx^2}$$

directement par ma méthode, toute la difficulté se réduisant à l'intégration de l'équation en M

$$h\mathrm{M} = \mathrm{X}\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2}.$$

Les cas les plus connus de l'intégrabilité de cette équation sont ceux de

$$\mathrm{X} = hx^n,$$

n étant égal à $\frac{4\mu-4}{2\mu-1}$, que nous avons examinés précédemment; il peut y en avoir d'autres, mais il serait trop long de les examiner ici.

Des oscillations d'une chaîne pesante.

34. Ce Problème étant célèbre parmi les Géomètres, je crois pouvoir me dispenser de donner l'analyse par laquelle on trouve que la force accélératrice de chaque point de la chaîne est comme la somme des angles de contingence depuis le sommet, moins l'angle de contingence multiplié par le rapport du poids total de la portion inférieure de la chaîne au petit poids dont ce point est chargé. Soient donc x la longueur d'une partie quelconque de la chaîne, à commencer par le bout inférieur, $X dx$ la pesanteur où dx est la masse de la portion infiniment petite, et y l'espace parcouru horizontalement dans le temps t, on aura l'équation

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dy}{dx} - \frac{\int X dx}{X}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Or, soit $X = fx^n$, on aura

$$\frac{\int X dx}{X} = \frac{x}{n+1},$$

et faisant

$$x = \frac{s^2}{h}, \quad y = \frac{z}{s},$$

il viendra

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{h}{4(1+n)}\left[\frac{d^2z}{ds^2} + (2n-1)\left(\frac{d\frac{z}{s}}{ds}\right)\right],$$

équation réduite à notre formule générale, et qui aura une solution exacte toutes les fois que $2n-1$ sera un nombre pair quelconque, c'est-à-dire que $n = \frac{2\mu+1}{2}$. Dans le cas où la chaîne est d'une pesanteur uniforme, on a $n = 0$; ainsi m sera égal à -1 dans les formules du n° 27, et l'on trouvera que les deux séries, dont l'une est toute multipliée par f et l'autre par h, reviendront précisément à la même.

Soit l la longueur de la chaîne, on aura dans le point de suspension $y = \frac{z}{\sqrt{hl}}$; donc, ce point étant supposé fixe, il faudra que z y soit égal à zéro, d'où l'on retrouvera les mêmes conditions entre les fonctions

$\Gamma(a+t\sqrt{c})$ et $\Delta(a-t\sqrt{c})$ que dans le n° 32. Maintenant, puisque la chaîne est libre dans tous ses autres points, il est visible que ce serait mal à propos qu'on supposerait $y=0$ lorsque $x=0$, mais il faudra remplacer cette condition par celle-ci

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0;$$

car il est naturel de penser que la courbure de la chaîne doive s'évanouir à son extrémité inférieure, par la raison qu'il n'y a ici aucun appui à l'action des parties supérieures. Or

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{h^2}{4s^5}\left(s^2\frac{d^2z}{ds^2}-3s\frac{dz}{ds}+3z\right);$$

donc, lorsque s est zéro ou simplement infiniment petit, $\frac{d^2y}{dx^2}$ se réduit à $\frac{3h^2z}{4s^5}$ et par conséquent on aura de même ici $z=0$, lorsque $s=0$, et. $\Gamma(t\sqrt{c})+\Delta(-t\sqrt{c})=0$, comme dans le numéro cité. Au reste, ce Problème étant absolument analogue aux précédents est susceptible de remarques semblables. Je me contenterai simplement de faire observer que si l'on voulait le résoudre directement par notre méthode générale, on parviendrait, après les opérations ordinaires, à cette équation en M,

$$k\mathrm{M}=\frac{d^2\frac{\mathrm{M}\int\mathrm{X}dx}{\mathrm{X}}}{dx^2}-\frac{d\mathrm{M}}{dx},$$

qui est constructible par les méthodes connues dans le cas où

$$\mathrm{X}=hx^{\frac{2\mu+1}{2}};$$

il faudrait ensuite déterminer la quantité k avec les autres constantes de M, par la condition

$$\frac{\mathrm{M}\int\mathrm{X}dx}{\mathrm{X}}\frac{dy}{dx}-\frac{d\frac{\mathrm{M}\int\mathrm{X}dx}{\mathrm{X}}}{dx}y+\mathrm{M}y=0,$$

ou bien

$$\frac{\mathrm{M}\int\mathrm{X}dx}{\mathrm{X}}\frac{dy}{dx}-\frac{d\mathrm{M}}{dx}\frac{\int\mathrm{X}dx}{\mathrm{X}}y+\mathrm{M}\left(\int\mathrm{X}dx\right)\frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{X}^2dx}y=0,$$

lorsque $x = a$ et $x = 0$. Or dans le premier cas, y étant lui-même égal à zéro, il suffira que M le soit aussi; dans le second il est clair que toute la quantité s'évanouira d'elle-même à cause du facteur $\int X dx$ qui multiplie tous ses termes; cependant on supposera toujours $M = 0$, afin de terminer la suite des points mobiles au bout inférieur de la chaine.

35. Scolie I. — Par les formules données dans ce Chapitre, on peut résoudre le Problème du n° 61 de l'excellent *Traité de la résistance des fluides*, de M. d'Alembert, d'une manière peut-être plus analytique que ne l'a fait cet Auteur. Voici en quoi consiste ce Problème : il s'agit de trouver deux quantités A et B telles, que $A dx + B dz$ et $z B dx - z A dz$ soient l'une et l'autre des différentielles exactes. Pour rendre la question plus générale, je me propose de rendre exactes les deux différentielles $\alpha dt + \beta dx$, $x^m \beta dt + b x^n \alpha dx$; soit la première égale à dp et la seconde égale à dq, on aura

$$\alpha = \frac{dp}{dt}, \quad \beta = \frac{dp}{dx}, \quad x^m \beta = \frac{dq}{dt}, \quad b x^n \alpha = \frac{dq}{dx};$$

donc

$$x^m \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dt}, \quad b x^n \frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx}.$$

Je différentie ces équations en faisant varier x seul dans la première et t seul dans la seconde, et je compare ensuite les deux valeurs de $\frac{d^2 q}{dx\,dt}$; j'ai

$$\frac{dx^m \frac{dp}{dx}}{dx} = b x^n \frac{d^2 p}{dt^2},$$

savoir

$$b x^{n-m} \frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{m}{x} \frac{dp}{dx},$$

équation qui est, comme on le voit, susceptible de notre méthode; en suivant cette méthode, on trouvera d'abord l'équation en M

$$k M x^{n-m} = \frac{d^2 M}{dx^2} - m \frac{d \frac{M}{x}}{dx};$$

qu'il faut intégrer avant d'aller plus avant. Pour cela je fais

$$x = s^u, \quad \mathrm{M} = \mathrm{N}s^v,$$

et supposant

$$u = \frac{2}{n - m + 2}, \quad v^2 - (u + mu)v + mu^2 = 0,$$

je trouve, après les substitutions et les réductions,

$$k\mathrm{N}u^2 = \frac{d^2\mathrm{N}}{ds^2} + \frac{2v - u - mu + 1}{s}\frac{d\mathrm{N}}{ds},$$

équation qui se rapporte à celle du n° 27. On voit donc par là que l'équation en M sera constructible exactement par nos formules toutes les fois que $2v - u - mu + 1$ sera un nombre pair quelconque; le reste du calcul n'ayant plus de difficulté, on trouvera pour la valeur de p une expression exacte et finie, composée de fonctions très-générales de x et de t. Si $n = m$, alors on a $u = 1$, et l'équation qui donne la valeur de v devient

$$v^2 - (1 + m)v + m = 0,$$

d'où l'on tire

$$v = 1 \quad \text{ou} \quad v = m;$$

dans le premier cas, le coefficient $2v - u - mu + 1$ devient égal à $2 - m$, et dans le second égal à m; or, dans le Problème de M. d'Alembert, on a $m = 1$, d'où l'on voit que ce Problème n'admet point de solution exacte, au moins suivant ma méthode; cependant, si l'on veut se contenter d'une solution seulement approchée, on pourra y parvenir immédiatement par les formules du Problème III, car si dans l'équation

$$bx^{n-m}\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{d^2p}{dx^2} + \frac{m}{x}\frac{dp}{dx}$$

on fait

$$x = s^u, \quad p = qs^v,$$

et qu'on suppose les valeurs u et v déterminées par ces équations

$$u = \frac{2}{n - m + 2},$$

$$v^2 + (2 - u + mu)v + mu - u + 1 = 0,$$

il vient

$$bu^2\frac{d^2q}{dt^2}=\frac{d^2q}{ds^2}+(2\nu-u+1+mu)\frac{d\frac{q}{s}}{ds},$$

équation qui a la même forme que celle du Problème cité, et qui par conséquent est susceptible des mêmes solutions. Lorsque $m=n$, on a $u=1$ et $\nu=-1$ ou $\nu=-m$; la première racine rend le coefficient de $\frac{d\frac{q}{s}}{ds}$ égal à $m-2$ et la seconde le rend égal à $-m$, ce qui conduit aux mêmes conclusions que plus haut. Au reste, il est visible que le Problème présent renferme dans sa généralité tous ceux dont nous avons traité dans ce Chapitre.

36. Scolie II. — L'équation

$$k\mathrm{M}=\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2}-\frac{m}{x}\frac{d\mathrm{M}}{dx},$$

étant transformée par la substitution de $fs^{\frac{1}{1+m}}$ au lieu de x, devient

$$\frac{f^2k}{(1+m)^2}\mathrm{M}s^{\frac{2m}{1+m}}=\frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2},$$

et, faisant ensuite $\mathrm{M}=e^{\int y\,ds}$,

$$\frac{dy}{ds}+y^2=\frac{f^2k}{(1+m)}s^{\frac{2m}{1+m}},$$

qui est l'équation même de Riccati. Les formules trouvées dans la solution du Problème III donnent, comme on le voit, une construction générale de cette équation; mais il faut remarquer que ces formules ne sont encore que des cas particuliers des intégrales complètes, qui résultent de la supposition de quelques constantes égales à zéro; pour les compléter on joindra à la valeur déjà trouvée de y la quantité $\frac{e^{-2\int y\,ds}}{\int e^{-2\int y\,ds}\,ds}$, ce qui est facile à démontrer.

CHAPITRE V.

CONTINUATION DES RECHERCHES SUR LA PROPAGATION DU SON.

§ I. — *De la propagation du son, en supposant que les ébranlements des particules de l'air ne soient pas infiniment petits.*

37. Quelque naturelles que paraissent les hypothèses que nous avons examinées dans le Chapitre III, elles donnent cependant la vitesse du son moindre que la véritable d'environ 163 pieds par seconde, comme on le peut conclure des n^os^ **12** et **26**. Cette différence est sans doute assez considérable pour ne pas être attribuée aux erreurs des expériences qui servent d'éléments à notre théorie, comme j'étais porté à le penser quand je donnai mes premières *Recherches sur le son* (LVII); mais quelle pourrait donc en être la cause? M. Euler a cru la trouver dans la supposition des ébranlements infiniment petits, sur laquelle on a jusqu'ici fondé les calculs de la propagation du son (*voyez* son Mémoire : Recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique, *Miscellanea Taurinensia*, t. II). Cette conjecture est plausible, mais je doute qu'en l'examinant à fond on la trouve aussi satisfaisante qu'elle le paraît d'abord. Pour en apprécier la valeur, voici la méthode que j'ai imaginée.

PROBLÈMES PRÉLIMINAIRES.

38. PROBLÈME IV. — *Construire l'équation* $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + y$, *y étant une fonction quelconque de x et de t.*

Je la multiplie par Mdx, je l'intègre, et j'opère à l'égard des termes $\int \frac{d^2z}{dt^2}\,\mathrm{M}dx$ et $c\int \frac{d^2z}{dx^2}\,\mathrm{M}dx$, comme dans le Problème I; je parviens

ainsi à cette équation en s,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = cks + \int \mathrm{M}y\,dx;$$

par les mêmes procédés je trouve l'intégrale

$$s + \mu r = \mathrm{A}e^{\frac{t}{\mu}} + \mu e^{\frac{t}{\mu}} \int e^{\frac{-t}{\mu}}\,dt \int \mathrm{M}y\,dx,$$

d'où résultent les deux équations

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} \int z\,\mathrm{M}\,dx = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{ZM}\,dx + \dfrac{\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)}{\sqrt{-ck}}\int \mathrm{UM}\,dx \\ \qquad + \dfrac{1}{2\sqrt{ck}}e^{t\sqrt{ck}}\int e^{-t\sqrt{ck}}\,dt\int \mathrm{M}y\,dx \\ \qquad - \dfrac{1}{2\sqrt{ck}}e^{-t\sqrt{ck}}\int e^{t\sqrt{ck}}\,dt\int \mathrm{M}y\,dx, \end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} \int u\,\mathrm{M}\,dx = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{UM}\,dx - \sqrt{-ck}\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{ZM}\,dx \\ \qquad + \dfrac{1}{2}e^{t\sqrt{ck}}\int e^{-t\sqrt{ck}}\,dt\int \mathrm{M}y\,dx \\ \qquad + \dfrac{1}{2}e^{-t\sqrt{ck}}\int e^{t\sqrt{ck}}\,dt\int \mathrm{M}y\,dx. \end{cases}$$

Or, puisque $\mathrm{M} = \sin\left(x\sqrt{-k}\right)$, il faut, pour pouvoir chasser la quantité k des équations précédentes, réduire tous leurs termes, en sorte que cette quantité k ne se rencontre que dans des fonctions de la forme de $\sin\left[(x)\sqrt{-k}\right]$, (x) marquant une fonction quelconque de x et t. Les termes qui renferment $\int \mathrm{ZM}dx$, $\int \mathrm{UM}dx$ étant les mêmes ici que dans le Problème I, ils se ramèneront à cette forme par les réductions enseignées; ainsi toute la difficulté se réduira aux termes affectés de deux signes d'intégration et provenant de la quantité y.

Prenons d'abord le terme

$$\frac{1}{2\sqrt{ck}}e^{t\sqrt{ck}}\int e^{-t\sqrt{ck}}\,dt\int \mathrm{M}y\,dx,$$

et commençons par faire disparaître la quantité k du coefficient $\frac{1}{2\sqrt{ck}}$. Pour cela, soit changée l'intégrale

$$\int \mathrm{M} y\,dx = \int \sin(x\sqrt{-k})\, y\,dx.$$

en son équivalente

$$\sin(x\sqrt{-k}) \int y\,dx - \sqrt{-k} \int \cos(x\sqrt{-k})\,dx \int y\,dx;$$

ce qui donnera par la substitution, et en effaçant le terme $\sin(x\sqrt{-k}) \int y\,dx$ à cause de $\sin(x\sqrt{-k}) = 0$ au premier et au dernier point de l'intégrale $\int \mathrm{M} y\,dx$, la transformée

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}\sqrt{c}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}}\,dt \int \cos(x\sqrt{-k})\,dx \int y\,dx.$$

Posons, pour abréger, $\int y\,dx = \mathrm{Y}$, et mettons au lieu de $\cos(x\sqrt{-k})$ sa valeur exponentielle $\frac{1}{2}(e^{x\sqrt{k}} + e^{-x\sqrt{k}})$; transportant le signe d'intégration qui regarde x au devant de celui qui regarde t (ce qui est permis à cause que la quantité $e^{-t\sqrt{ck}}$, qui est entre les deux signes, est une quantité constante à l'égard de x), on aura

$$\frac{1}{4\sqrt{-1}\sqrt{c}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int dx \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}}\,\mathrm{Y}\,dt + \frac{1}{4\sqrt{-1}\sqrt{c}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int dx \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}}\,\mathrm{Y}\,dt.$$

Soit fait $x - t\sqrt{c} = p$, $x + t\sqrt{c} = q$, et soit nommée P la fonction de t et de p qui vient de la substitution de $p + t\sqrt{c}$ au lieu de x dans la quantité Y, et Q la fonction de t et de q qui vient de la substitution de $q - t\sqrt{c}$ au lieu de x dans la même quantité Y; en prenant, au lieu des variables t et x, les nouvelles variables t et p, et t et q, on changera les deux expressions intégrales

$$\int dx \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}}\,\mathrm{Y}\,dt \quad \text{et} \quad \int dx \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}}\,\mathrm{Y}\,dt$$

en celles-ci :

$$\int dp \int e^{p\sqrt{k}} \mathrm{P}\, dt \quad \text{et} \quad \int dq \int e^{-q\sqrt{k}} \mathrm{Q}\, dt,$$

qui ont les mêmes valeurs, quoique sous des formes différentes. Dans ces dernières expressions, les intégrations $\int e^{p\sqrt{k}} \mathrm{P}\, dt$ et $\int e^{-q\sqrt{k}} \mathrm{Q}\, dt$ devront se faire en variant seulement t; donc, si on suppose que les intégrales $\int \mathrm{P}\, dt$ et $\int \mathrm{Q}\, dt$ soient prises avec cette condition, on aura

$$e^{p\sqrt{k}} \int \mathrm{P}\, dt \quad \text{et} \quad e^{-q\sqrt{k}} \int \mathrm{Q}\, dt,$$

ce qui donnera les transformées

$$\int e^{p\sqrt{k}}\, dp \int \mathrm{P}\, dt \quad \text{et} \quad \int e^{-q\sqrt{k}}\, dq \int \mathrm{Q}\, dt,$$

dans lesquelles il faudra faire maintenant p et q variables, et t constante; or, à cause que les quantités $\int \mathrm{P}\, dt$ et $\int \mathrm{Q}\, dt$ ne contiennent point de x, il est visible qu'il reviendra au même d'intégrer $e^{p\sqrt{k}}\, dp \int \mathrm{P}\, dt$ et $e^{-q\sqrt{k}}\, dq \int \mathrm{Q}\, dt$, en supposant p et q seuls variables, et de remettre après l'intégration, au lieu de p et q, leurs valeurs $x - t\sqrt{c}$ et $x + t\sqrt{c}$, que de restituer d'abord ces valeurs à la place de p et de q, et d'intégrer ensuite en faisant varier x; d'où il s'ensuit qu'on aura

$$\int dx \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}} \mathrm{Y}\, dt = \int dp \int e^{p\sqrt{k}} \mathrm{P}\, dt = \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, dx \int \mathrm{P}\, dt,$$

$$\int dx \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}} \mathrm{Y}\, dt = \int dq \int e^{-q\sqrt{k}} \mathrm{Q}\, dt = \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, dx \int \mathrm{Q}\, dt.$$

Par conséquent la transformée cherchée du terme

$$\frac{1}{2\sqrt{ck}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}}\, dt \int \mathrm{M}\, y\, dx.$$

deviendra, après toutes les substitutions,

$$\frac{1}{4\sqrt{-1}\sqrt{c}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, dx \int \mathrm{P}\, dt + \frac{1}{4\sqrt{-1}\sqrt{c}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, dx \int \mathrm{Q}\, dt,$$

laquelle, en mettant hors des signes d'intégration la quantité exponentielle $e^{-t\sqrt{ck}}$, qui est constante à l'égard de x, se réduit plus simplement à

$$\frac{1}{4\sqrt{-1}\sqrt{c}}\left(\int e^{x\sqrt{k}}dx\int \mathrm{P}\,dt+\int e^{-x\sqrt{k}}dx\int \mathrm{Q}\,dt\right).$$

Par des opérations et des réductions semblables on changera encore l'autre terme

$$\frac{1}{2\sqrt{ck}}e^{-t\sqrt{ck}}\int e^{t\sqrt{ck}}dt\int \mathrm{M}\,y\,dx$$

en

$$\frac{1}{4\sqrt{-1}\sqrt{c}}\left(\int e^{x\sqrt{k}}dx\int \mathrm{Q}\,dt+\int e^{-x\sqrt{k}}dx\int \mathrm{P}\,dt\right);$$

donc, en retranchant la transformée du second terme de celle du premier, on aura

$$\frac{1}{4\sqrt{-1}\sqrt{c}}\int\left(e^{x\sqrt{k}}-e^{-x\sqrt{k}}\right)\left(\int \mathrm{P}\,dt-\int \mathrm{Q}\,dt\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{2\sqrt{c}}\left(\int \mathrm{Q}\,dt-\int \mathrm{P}\,dt\right)\sin\left(x\sqrt{-k}\right)dx.$$

Substituant cette expression dans l'équation (A), et égalant entre eux tous les angles multiples de $\sqrt{-k}$, suivant les règles de notre méthode, on trouvera pour la valeur de z les formules qu'on a déjà trouvées dans le Problème I, jointes avec la quantité $\frac{1}{2\sqrt{c}}\left(\int \mathrm{Q}\,dt-\int \mathrm{P}\,dt\right)$.

Après avoir ainsi trouvé la valeur de z, il ne sera pas difficile de déduire celle de u de l'équation (B). Pour cela, comme dans cette équation les termes qui renferment y sont exempts du coefficient $\frac{1}{\sqrt{ck}}$, on y mettra d'abord, et sans aucune préparation, à la place de M sa valeur exponentielle $\frac{e^{x\sqrt{k}}-e^{-x\sqrt{k}}}{2\sqrt{-1}}$; ensuite, faisant des observations et des réductions analogues à celles que nous avons faites précédemment, on trouvera que, si P′ et Q′ sont pris pour exprimer les valeurs de y après les substitutions de $p+t\sqrt{c}$ et de $q-t\sqrt{c}$ au lieu de x, les termes dont il s'agit

deviendront $\frac{1}{2}\int\left(\int P'dt+\int Q'dt\right)\sin(x\sqrt{-k})\,dx$; par conséquent l'expression de u renfermera, outre les formules trouvées à la fin du n° 6, encore celle-ci, $\frac{1}{2}\left(\int P'dt+\int Q'dt\right)$.

COROLLAIRE. — Donc le terme y ajouté à l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2}=c\frac{d^2z}{dx^2}$$

produit dans les valeurs de z et de u une augmentation qu'on déterminera ainsi. Soit intégré $y\,dx$, en ne faisant varier que x, et l'intégrale trouvée $\int y\,dx$ étant multipliée par dt soit intégrée de nouveau, en supposant d'abord $x+t\sqrt{c}$ constant et t seul variable; puis, en supposant $x-t\sqrt{c}$ constant et t seul variable, retranchant cette seconde intégrale de la première et divisant la différence par $2\sqrt{c}$, on aura ce qu'il faut ajouter à la valeur de z. Ensuite soit intégré simplement $y\,dt$ d'abord, en traitant $x+t\sqrt{c}$ comme constante et t comme variable, puis en traitant $x-t\sqrt{c}$ comme constante et t de même comme variable; la somme de ces deux intégrales divisée par 2 sera l'augmentation de la valeur de u.

39. SCOLIE I. — Dans l'excellent *Traité de la cause des vents* de M. d'Alembert, on trouve à l'article 87 une méthode fort simple et fort ingénieuse pour rendre complètes ces deux différentielles,

$$\alpha\,ds+\beta\,du \quad \text{et} \quad \rho\alpha\,du+\nu\beta\,ds+du\,\Delta(u,s)+ds\,\Gamma(u,s).$$

Le Problème se réduit à celui que nous venons de résoudre, car, en supposant la première de ces différentielles égale à dp, on trouve $\alpha=\frac{dp}{ds}$ et $\beta=\frac{dp}{du}$; mais, pour que la seconde différentielle soit exacte, il faut que

$$\frac{d[\rho\alpha+\Delta(u,s)]}{ds}=\frac{d[\nu\beta+\Gamma(u,s)]}{du},$$

ce qui donne, en substituant et différentiant,

$$\rho\frac{d^2p}{ds^2}+\frac{d\Delta(u,s)}{ds}=\nu\frac{d^2p}{du^2}+\frac{d\Gamma(u,s)}{du},$$

équation qui reviendra au même que celle du Problème précédent, si l'on pose z au lieu de p, t au lieu de s, x au lieu de u, c au lieu de $\frac{\nu}{\rho}$ et y au lieu de $\frac{1}{\rho}\left[\frac{d\Gamma(u,s)}{du}-\frac{d\Delta(u,s)}{ds}\right]$.

Si d'un côté la solution de M. d'Alembert est plus simple que la nôtre, de l'autre elle paraît insuffisante pour les cas où les valeurs de p seraient prises à volonté lorsque $s=0$; et c'est précisément dans ces cas que rentre la question qui est l'objet du Problème précédent. Au reste, si l'on introduit dans notre solution, au lieu de Z et de U, des fonctions indéterminées, on en tirera des formules analogues à celles que M. d'Alembert a trouvées par sa méthode. Il est vrai que nos formules se présenteront sous une autre forme que celles de cet Auteur; mais la comparaison n'en sera pas difficile et ne demandera d'ailleurs qu'un peu d'adresse de calcul; c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas.

40. Scolie II. — Ce savant Géomètre a encore rendu l'usage de sa méthode plus général en l'appliquant à déterminer les quantités α et β par les conditions que

$$\alpha ds+\beta du \quad \text{et} \quad \rho\alpha du+p\beta du+\gamma\beta ds+m\alpha ds+du\Delta(u,s)+ds\Gamma(u,s)$$

soient l'une et l'autre des différentielles complètes. Faisant

$$\alpha ds+\beta du=dq,$$

et substituant dans la seconde différentielle les valeurs de α et β en q, on trouvera par les conditions de l'intégrabilité l'équation suivante :

$$\rho\frac{d^2q}{ds^2}+p\frac{d^2q}{ds\,du}+\frac{d\Delta(u,s)}{ds}=\gamma\frac{d^2q}{du^2}+m\frac{d^2q}{du\,ds}+\frac{d\Gamma(u,s)}{du},$$

qui peut se rapporter à cette forme,

$$\frac{d^2z}{dt^2}=b\,\frac{d^2z}{dt\,dx}+c\frac{d^2z}{dx^2}+y.$$

Quoique cette équation soit étrangère à la matière que nous traitons, je crois qu'on ne sera point fâché de voir comment notre méthode s'y applique. Je commence ici par supposer $\frac{dz}{dt} = u$, et je décompose par ce moyen l'équation proposée dans les deux suivantes :

$$\frac{dz}{dt} = u, \quad \frac{du}{dt} = b\frac{du}{dx} + c\frac{d^2z}{dx^2} + y;$$

je multiplie la première de ces équations par Ndx et la seconde par Mdx, je les ajoute ensemble et j'en prends l'intégrale en faisant évanouir par des intégrations par parties les différences de z qui naissent de la variabilité de x; j'ai

$$\int\left(\mathrm{N}\frac{dz}{dt} + \mathrm{M}\frac{du}{dt}\right)dx = \int\left[c\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2}z + \left(\mathrm{N} - b\frac{d\mathrm{M}}{dx}\right)u\right]dx + \int \mathrm{M}y\,dx$$
$$+ b\mathrm{M}u + c\mathrm{M}\frac{dz}{dx} - c\frac{d\mathrm{M}}{dx}z.$$

Négligeant ces derniers termes algébriques qui disparaissent d'eux-mêmes, dans la supposition que z et M soient égaux à zéro au premier et au dernier point de l'intégrale, et comparant terme à terme, on aura

$$k\mathrm{N} = c\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2}, \quad k\mathrm{M} = \mathrm{N} - b\frac{d\mathrm{M}}{dx};$$

d'où l'on tire

$$k^2\mathrm{M} + bk\frac{d\mathrm{M}}{dx} - c\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2} = 0, \quad \mathrm{M} = \mathrm{A}e^{mkx} + \mathrm{B}e^{nkx},$$

m et n étant les racines de l'équation

$$1 + by - cy^2 = 0.$$

Or, M devant être égal à zéro lorsque $x = 0$ et $x = a$, on aura

$$\mathrm{B} = -\mathrm{A} \quad \text{et} \quad e^{mka} - e^{nka} = 0,$$

ce qui fournira une infinité de valeurs de k; on aura donc

$$\mathrm{M} = e^{mkx} - e^{nkx},$$

et par conséquent

$$\mathrm{N} = ck\,(m^2\,e^{mkx} - n^2\,e^{nkx}).$$

Soit maintenant

$$\int (\mathrm{N}z + \mathrm{M}u)\,dx = s,$$

notre équation deviendra

$$\frac{ds}{dt} = ks + \int \mathrm{M}y\,dx;$$

d'où l'on tire, en intégrant et conservant les noms que nous avons employés dans tout le cours des *Recherches précédentes*,

$$\int (\mathrm{N}z + \mathrm{M}u)\,dx = e^{kt}\int (\mathrm{NZ} + \mathrm{MU})\,dx + e^{kt}\int e^{-kt}dt \int \mathrm{M}y\,dx.$$

Or, la quantité N étant multipliée par un coefficient k, pour le faire disparaître on changera les intégrales

$$\int \mathrm{N}z\,dx \quad \text{et} \quad \int \mathrm{NZ}\,dx$$

en

$$-\int \frac{dz}{dx}\,dx \int \mathrm{N}\,dx \quad \text{et} \quad -\int \frac{d\mathrm{Z}}{dx}\,dx \int \mathrm{N}\,dx,$$

en négligeant les autres termes qui deviennent nuls à cause que z et Z disparaissent quand $x = 0$ et $x = a$; substituant donc les valeurs de M et de $\int \mathrm{N}dx$, on aura

$$\begin{aligned}
&\int \left(u - cm\frac{dz}{dx}\right) e^{mkx}\,dx - \int \left(u - cn\frac{dz}{dx}\right) e^{nkx}\,dx \\
&= \int \left(\mathrm{U} - cm\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right) e^{(mx+t)k}\,dx - \int \left(\mathrm{U} - cn\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right) e^{(nx+t)k}\,dx \\
&\quad + e^{kt}\int e^{-kt}dt \int e^{mkx}y\,dx - e^{kt}\int e^{-kt}dt \int e^{nkx}y\,dx.
\end{aligned}$$

Soient P la fonction de p et de t qui vient de la substitution de p au lieu de $mx - t$ dans y, et Q la fonction de q et de t qui vient de la substitution de q à la place de $nx - t$ dans la même quantité y; les deux

derniers termes de la formule précédente se changeront, selon ce qui a été enseigné plus haut, en ceux-ci :

$$\int\left(\int \mathrm{P}\,dt\right)e^{mkx}\,dx-\int\left(\int \mathrm{Q}\,dt\right)e^{nkx}\,dx.$$

Maintenant, puisque m est supposé différent de n, il est clair que les quantités exponentielles e^{mkx}, e^{nkx} et $e^{(mx+t)k}$, $e^{(nx+t)k}$ ne sauraient jamais devenir égales; donc il faudra nécessairement décomposer l'équation en deux, afin d'en chasser la quantité k; par ce moyen, on trouvera, en retenant les expressions employées dans le Problème I,

$$u-cm\frac{dz}{dx}=\left(\mathrm{U}-cm\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)^{\left(x-\frac{t}{m}\right)}+\int \mathrm{P}\,dt,$$

$$u-cn\frac{dz}{dx}=\left(\mathrm{U}-cn\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)^{\left(x-\frac{t}{n}\right)}+\int \mathrm{Q}\,dt.$$

S'il arrivait que $n=m$, alors, la première de ces équations demeurant la même, on ne ferait qu'augmenter n d'une quantité infiniment petite α, c'est-à-dire on supposerait $n=m+\alpha$, et, ôtant la première équation de la seconde, il viendrait, après avoir divisé par α,

$$\frac{dz}{dx}=\left[\frac{d\mathrm{Z}}{dx}-\frac{d\left(\mathrm{U}-cm\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)}{dx}\,\frac{t}{cm^2}\right]^{\left(x-\frac{t}{m}\right)}+\int\frac{d\mathrm{P}}{dp}\,\frac{p+t}{cm^2}\,dt.$$

Si n était infini, ce qui arrivera lorsque $c=0$, alors on aurait aussi $cn=0$, et la seconde équation deviendrait

$$u=\mathrm{U}^{(x)}+\int \mathrm{Q}\,dt.$$

Si l'on veut maintenant comparer les résultats de cette solution avec ceux de M. d'Alembert, on prendra pour

$$\left(\mathrm{U}-cm\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)^{\left(x-\frac{t}{m}\right)}\quad\text{et}\quad\left(\mathrm{U}-cn\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)^{\left(x-\frac{t}{n}\right)}$$

des fonctions indéterminées de $x - \frac{t}{m}$ et de $x - \frac{t}{n}$, et faisant les substitutions et les réductions nécessaires, on trouvera pour α et β des formules analogues à celles que cet Auteur a données. Quoique j'aie fait tous les calculs que cette comparaison demande, je ne les insérerai point ici pour ne pas passer les bornes que je me suis prescrites dans cette Dissertation.

41. Problème V. — *Construire l'équation* $\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dx^2} + c\frac{d\frac{z}{x}}{dx} + y$.

En suivant notre méthode, on parviendra aux mêmes équations (A) et (B) du Problème précédent, avec cette seule différence que la quantité M sera maintenant égale à

$$\sin(x\sqrt{-k}) - x\sqrt{-k}\cos(x\sqrt{-k})$$

comme dans le Problème II, ce qui rendra l'expression $\int \mathrm{M}y\,dx$ composée des deux termes

$$\int \sin(x\sqrt{-k})\,y\,dx - \sqrt{-k}\int \cos(x\sqrt{-k})\,yx\,dx;$$

on aura donc dans l'équation (A)

$$\frac{1}{2\sqrt{ck}}\int \mathrm{M}y\,dx = \frac{1}{2\sqrt{ck}}\int \sin(x\sqrt{-k})\,y\,dx + \frac{1}{2\sqrt{c}\sqrt{-1}}\int \cos(x\sqrt{-k})\,yx\,dx$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{c}\sqrt{-1}}\int \cos(x\sqrt{-k})\left(\int y\,dx + xy\right)dx,$$

en réduisant le premier terme, comme on l'a fait dans le Problème précédent. Il faudra pourtant observer que l'intégrale $\int y\,dx$ soit prise de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $x = a$, afin que le terme

$$\frac{\sin(x\sqrt{-k})\int y\,dx}{\sqrt{ck}}$$

que nous négligeons s'évanouisse de même. Supposant donc maintenant $\int y\,dx + xy = \mathrm{Y}$, et faisant les autres observations et réductions suivant les principes établis dans les Problèmes II et IV, on trouvera que la

valeur de z', savoir de $z + \frac{dz\,x}{dx}$, du n° 20, devra être ici augmentée de la quantité

$$\frac{1}{2\sqrt{c}}\left(\int Q\,dt - \int P\,dt\right).$$

On tirera de même de l'équation (B) la valeur de u'; mais on pourra s'épargner la peine de ce calcul, en cherchant, d'après la valeur trouvée de z', celle de $\frac{dz'}{dt} = u'$.

Usage des Problèmes précédents.

42. Examinons d'abord le cas d'une ligne physique d'air; il est facile de trouver que l'équation rigoureuse du mouvement des particules sera

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -c\frac{d\frac{1}{1+\frac{dz}{dx}}}{dx}\left(1+\frac{dz}{dx}\right) = c\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{1+\frac{dz}{dx}},$$

car la portion du fluide, qui dans l'état d'équilibre occupe l'espace dx, après le temps t remplira l'espace $dx\left(1+\frac{dz}{dx}\right)$, et son élasticité sera par conséquent diminuée dans le rapport $\frac{1}{1+\frac{dz}{dx}}$; donc la différence d'élasticité des deux particules adjacentes s'exprimera par

$$c\frac{d\frac{1}{1+\frac{dz}{dx}}}{dx}\left(1+\frac{dz}{dx}\right)dx;$$

donc, divisant par la masse dx de la particule intermédiaire, on aura la force qui tend à la mouvoir; donc, etc.

Je réduis la fraction $\frac{1}{1+\frac{dz}{dx}}$ en suite par une division infinie; il vient

$$1-\frac{dz}{dx}+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2-\ldots;$$

j'aurai donc, en substituant,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dx^2} - c\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + e\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2} - \ldots.$$

Or, si on suppose $\frac{dz}{dx}dx$ infiniment petit par rapport à dx, il est clair que le second membre de cette équation se réduit au seul terme $c\frac{d^2z}{dx^2}$, et qu'ainsi l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dx^2}$$

donnera une valeur de z qui pourra être regardée comme exacte; c'est le cas que nous avons déjà traité. Mais, si on suppose seulement z fort petit et cependant fini, l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dx^2}$$

ne donnera plus qu'une valeur approchée de z; on substituera donc cette valeur dans les termes

$$-c\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + c\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2} - \ldots$$

qu'on avait négligés, et intégrant l'équation par la méthode du Problème IV, on aura une valeur de z plus exacte; on substituera de nouveau la valeur de z ainsi corrigée, et l'on en tirera une autre encore plus exacte que la précédente; en opérant ainsi de suite, on approchera toujours de plus en plus de la valeur de z.

Or si, pour faciliter le calcul, on introduit les fonctions indéterminées dans notre solution du Problème I, on a pour la première valeur de z

$$z = \varphi(x + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{c});$$

maintenant il faut supposer

$$y = -c\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + c\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2} - \ldots,$$

ce qui donne

$$\int y\,dx = \mathrm{Y} = -\frac{c}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{c}{3}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 - \ldots$$
$$= -\frac{1}{2}c\varphi'^2(x - t\sqrt{c}) - \frac{1}{2}c\psi'^2(x - t\sqrt{c})$$
$$- c\varphi'(x + t\sqrt{c})\,\psi'(x - t\sqrt{c}),$$

en négligeant les termes suivants qui doivent être regardés comme infiniment petits d'un ordre plus élevé; on aura donc

$$\mathrm{P} = -\frac{1}{2}c\varphi'^2(p + 2t\sqrt{c}) - c\varphi'(p + 2t\sqrt{c})\,\psi'(p) - \frac{1}{2}c\psi'^2(p),$$
$$\mathrm{Q} = -\frac{1}{2}c\varphi'^2(q) - c\varphi'(q)\,\psi'(q - 2t\sqrt{c}) - \frac{1}{2}c\psi'^2(q - 2t\sqrt{c}),$$

et par conséquent

$$\int \mathrm{P}\,dt = -\frac{1}{2}c\int \varphi'^2(p + 2t\sqrt{c})\,dt - \frac{\sqrt{c}}{2}\varphi(p + 2t\sqrt{c})\,\psi'(p) - \frac{1}{2}ct\psi'^2(p),$$
$$\int \mathrm{Q}\,dt = -\frac{1}{2}ct\varphi'^2(q) + \frac{\sqrt{c}}{2}\varphi'(q)\,\psi(q - 2t\sqrt{c}) - \frac{1}{2}c\int \psi'^2(q - 2t\sqrt{c})\,dt.$$

Que (φ) dénote la valeur de l'intégrale $\int \varphi'^2(p + 2t\sqrt{c})\,dt\sqrt{c}$, et (ψ) celle de l'intégrale $\int \psi'^2(q - 2t\sqrt{c})\,dt\sqrt{c}$, on trouvera, après avoir restitué au lieu de p et de q leurs valeurs,

$$\frac{\int \mathrm{Q}\,dt - \int \mathrm{P}\,dt}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{4}t\sqrt{c}\,[\psi'^2(x - t\sqrt{c}) - \varphi'^2(x + t\sqrt{c})]$$
$$+ \frac{1}{4}\psi(x - t\sqrt{c})\,\varphi'(x + t\sqrt{c})$$
$$+ \frac{1}{4}\psi'(x - t\sqrt{c})\,\varphi(x + t\sqrt{c}) - \frac{1}{4}(\psi) + \frac{1}{4}(\varphi),$$

quantité qui devra être ajoutée à la première valeur de z.

Pour voir maintenant combien cette correction peut influer sur la vitesse de la propagation des ébranlements, on observera que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ doivent être telles, qu'elles soient toujours égales à

zéro, lorsque les abscisses x ne sont pas très-petites (4); d'où il suit que pour la propagation du côté des abscisses positives x, il ne faudra retenir que les fonctions de $x - t\sqrt{c}$ ou de $q - 2t\sqrt{c}$; on aura donc

$$z = \psi(x - t\sqrt{c}) + \frac{1}{4} t\sqrt{c}\,\psi'^2(x - t\sqrt{c}) - \frac{1}{4}(\psi).$$

Or, en supposant la valeur de $\psi(x - t\sqrt{c})$ très-petite, $\psi'^2(x - t\sqrt{c})$ sera un infiniment petit du second ordre, et (ψ) sera aussi du même ordre à très-peu près, à cause que la fonction $\psi(x - t\sqrt{c})$ n'a de valeur que dans une fort petite étendue de l'axe; mais $t\sqrt{c}$ devant être à peu près égal à x recevra une valeur considérable, donc le terme (ψ) s'évanouira auprès du terme $t\sqrt{c}\,\psi'^2(x - t\sqrt{c})$, et la valeur de z se réduira à

$$\psi(x - t\sqrt{c}) + \frac{1}{4} t\sqrt{c}\,\psi'^2(x - t\sqrt{c}).$$

Le premier terme $\psi(x - t\sqrt{c})$ donne, comme il est facile de voir et comme on l'a démontré ailleurs, la vitesse de la propagation égale à $\sqrt{c}$, et il est clair que cette vitesse ne peut varier à moins que la quantité $\sqrt{c}$ ne varie de même; supposons donc $\sqrt{c} + \alpha$, au lieu de $\sqrt{c}$, α étant une quantité assez petite, on aura pour le premier terme de la valeur de z

$$\psi(x - t\sqrt{c} - t\alpha),$$

qui se réduit à

$$\psi(x - t\sqrt{c}) - t\alpha\psi'(x - t\sqrt{c});$$

comparant cette expression avec celle qu'on a trouvée par notre approximation, on a

$$\alpha = -\frac{\sqrt{c}}{4}\psi'(x - t\sqrt{c});$$

mais

$$-\sqrt{c}\,\psi'(x - t\sqrt{c}) = \frac{d\psi(x - t\sqrt{c})}{dt} = u,$$

en désignant par u la vitesse propre de la particule qui répond à l'ab-

scisse x; donc

$$\alpha = \frac{u}{4},$$

et par conséquent la vitesse de la propagation deviendra à très-peu près égale à

$$\sqrt{c} + \frac{u}{4}.$$

Cette conclusion paraît donc en quelque sorte favorable à l'hypothèse des ébranlements finis, mais elle perdra toute sa force pour peu qu'on s'arrête à l'examiner.

Par ce qu'on vient de trouver, on a

$$z = \psi\left(x - t\sqrt{c} - \frac{tu}{4}\right);$$

soit a la longueur de l'onde aérienne excitée immédiatement par le corps sonore, il est clair que z ne commencera à avoir une valeur que quand on aura

$$x - t\sqrt{c} - \frac{tu}{4} = a;$$

d'où il s'ensuit qu'au bout du temps t le son sera parvenu jusqu'à la particule qui répond à l'abscisse

$$x = a + t\left(\sqrt{c} + \frac{u}{4}\right),$$

u étant la vitesse que cette particule reçoit en même temps. Or, en premier lieu cette vitesse ne peut être qu'infiniment petite, puisqu'il serait absurde qu'une particule d'un fluide élastique reçût tout d'un coup une vitesse finie par l'action des autres parties adjacentes; en second lieu, il est visible que la formule trouvée détruirait l'uniformité de la vitesse du son et la ferait dépendre en quelque sorte de la nature des ébranlements primitifs, ce qui est contraire à toutes les expériences.

Il serait, après cela, inutile de pousser plus loin l'approximation de la valeur de z; car, outre qu'il n'en résulterait que des termes moindres

que celui que nous venons d'examiner, l'expression de la vitesse du son deviendrait toujours plus compliquée et par conséquent moins conforme à la véritable.

43. Passons maintenant à l'hypothèse des ondulations sphériques, et cherchons par le moyen du Problème V si le changement que la supposition des ébranlements finis cause dans leur propagation peut s'accorder avec les phénomènes.

Par les principes posés dans le n° 30, on trouvera pour l'équation rigoureuse du mouvement du fluide

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -c\,\frac{d\left[\dfrac{x^2}{(x+z)^2}\,\dfrac{1}{1+\dfrac{dz}{dx}}\right]}{dx}\,\frac{(x+z)^2}{x^2}\left(1+\frac{dz}{dx}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{d^2z}{dx^2}}{1+\dfrac{dz}{dx}} + \frac{2}{x+z}\,\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x(x+z)},$$

d'où l'on tire, par la voie des séries,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2d\frac{z}{x}}{dx}\right) - c\left(\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2z}{dx^2} + 2\,\frac{z}{x}\,\frac{d\frac{z}{x}}{dx}\right)$$

$$+ c\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2\,\frac{z^2}{x^2}\,\frac{d\frac{z}{x}}{dx}\right] - \ldots$$

On aura donc, selon le Problème V,

$$y = -c\left(\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2z}{dx^2} + 2\,\frac{z}{x}\,\frac{d\frac{z}{x}}{dx}\right),$$

en négligeant les autres termes qui renferment plus de deux dimensions de z; donc

$$\int y\,dx = -\frac{c}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - c\,\frac{z^2}{x^2},$$

et

$$\int y\,dx + xy = \mathrm{Y} = \frac{d(x\int y\,dx)}{dx} = -\frac{c}{2}\frac{d\left[x\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}{dx} - c\frac{d\frac{z^2}{x}}{dx}.$$

Maintenant, il faut substituer au lieu de z sa valeur tirée des formules du Problème II. Pour abréger ces substitutions, je remarque d'abord, comme il est évident, qu'il ne faudra employer que les seules fonctions de $x - t\sqrt{c}$; d'où il suit que si l'on pose

$$z + \frac{dzx}{dx} = \varphi\,(x - t\sqrt{c}),$$

on aura

$$z = \frac{{}'\varphi\,(x - t\sqrt{c})}{x} - \frac{{}''\varphi\,(x - t\sqrt{c})}{x^2}.$$

Je remarque ensuite que, lorsque x a une valeur considérable, on peut négliger, auprès des termes qui contiennent x seul au dénominateur, tous ceux qui sont divisés par des puissances de x plus hautes que l'unité; par ce moyen, on aura simplement

$$z = \frac{{}'\varphi\,(x - t\sqrt{c})}{x}, \quad \mathrm{Y} = -c\frac{\varphi\,(x - t\sqrt{c})\,\varphi'\,(x - t\sqrt{c})}{x};$$

donc

$$\mathrm{P} = -\frac{c\varphi(p)\varphi'(p)}{p + t\sqrt{c}},$$

$$\int \mathrm{P}\,dt = -\sqrt{c}\,\varphi(p)\varphi'(p)\log(p + t\sqrt{c}) = -\sqrt{c}\cdot\varphi\,(x - t\sqrt{c})\,\varphi'\,(x - t\sqrt{c})\log x,$$

$$\mathrm{Q} = -\frac{c\varphi\,(q - 2t\sqrt{c})\,\varphi'\,(q - 2t\sqrt{c})}{q - t\sqrt{c}},$$

d'où l'on tirera par les quadratures la valeur de $\int \mathrm{Q}\,dt$; mais il est facile de voir que cette valeur sera infiniment petite par rapport à celle de $\int \mathrm{P}\,dt$, à cause que la fonction φ et ses différences sont toujours infiniment petites, et qu'elles n'ont outre cela des valeurs réelles que dans une très-petite portion de l'axe; ne prenant donc que la formule $\frac{1}{2\sqrt{c}}\int \mathrm{P}\,dt$

et l'ôtant de $z + \frac{dxz}{dx}$, savoir de $\varphi(x - t\sqrt{c})$, on aura pour l'augmentation de cette fonction

$$\frac{1}{2}\varphi(x - t\sqrt{c})\,\varphi'(x - t\sqrt{c})\log x;$$

or, si on suppose, comme on l'a fait plus haut, que la quantité $\sqrt{c}$ croisse d'une très-petite quantité α, on trouvera ici

$$\alpha = -\frac{\varphi(x - t\sqrt{c})\log x}{2t},$$

ce qui changera la fonction

$$\varphi(x - t\sqrt{c})$$

en

$$\varphi\left[x - t\sqrt{c} + \frac{\log x}{2}\varphi(x - t\sqrt{c})\right].$$

Prenant a pour le rayon de la première onde aérienne excitée par le corps sonore, les lois de la propagation du son seront donc contenues dans la formule

$$x - t\sqrt{c} + \frac{\log x}{2}\varphi(x - t\sqrt{c}) = a.$$

Je crois superflu de m'arrêter ici à examiner les conséquences de cette formule, car il est facile de voir qu'elles ne seront pas plus favorables à la supposition dont il s'agit que ne l'ont été celles qu'on a trouvées dans le numéro précédent.

44. Corollaire. — Après ce qu'on vient de démontrer, je crois qu'on peut regarder comme une vérité assez constante, que l'hypothèse des ébranlements infiniment petits est la seule recevable dans la théorie de la propagation du son, comme nous avions promis de le prouver dans le n° 10. Je vais donc rentrer dans cette hypothèse, et chercher à déterminer les lois de la propagation du son d'une manière plus générale et plus exacte que je ne l'ai fait.

§ II. — *Essai d'une construction générale des trois équations du* n° 10.

45. Je multiplie la première de ces équations par L, la seconde par M et la troisième par N, en supposant que L, M, N soient des fonctions quelconques de X, Y, Z; j'en fais une somme que je multiplie encore par $dX\,dY\,dZ$, et dont je prends l'intégrale en faisant varier l'une après l'autre les trois changeantes X, Y et Z. De cette manière, j'aurai l'équation

$$\int\left(\frac{d^2x}{dt^2}\mathrm{L}+\frac{d^2y}{dt^2}\mathrm{M}+\frac{d^2z}{dt^2}\mathrm{N}\right)dX\,dY\,dZ$$
$$=c\int\left(\frac{d^2x}{dX^2}\mathrm{L}+\frac{d^2y}{dX\,dY}\mathrm{L}+\frac{d^2z}{dX\,dZ}\mathrm{L}+\frac{d^2y}{dY^2}\mathrm{M}+\frac{d^2x}{dY\,dX}\mathrm{M}\right.$$
$$\left.+\frac{d^2z}{dY\,dZ}\mathrm{M}+\frac{d^2z}{dZ^2}\mathrm{N}+\frac{d^2x}{dZ\,dX}\mathrm{N}+\frac{d^2y}{dZ\,dY}\mathrm{N}\right)dX\,dY\,dZ,$$

qui renferme le mouvement de chaque point mobile du système donné. On remarquera que c est mise ici pour $\frac{2\mathrm{E}h}{\mathrm{T}^2\mathrm{D}}$, ainsi que nous l'avons pratiqué partout ailleurs.

En suivant notre méthode, on prendra autant d'intégrales par parties qu'il en faudra pour faire disparaître toutes les différences de x, y, z suivant X, Y, Z; on aura donc

$$\int\frac{d^2x}{dX^2}\mathrm{L}\,dX\,dY\,dZ=\int x\frac{d^2\mathrm{L}}{dX^2}dX\,dY\,dZ+\int\left(\frac{dx}{dX}\mathrm{L}-x\frac{d\mathrm{L}}{dX}\right)dY\,dZ,$$
$$\int\frac{d^2y}{dX\,dY}\mathrm{L}\,dX\,dY\,dZ=\int y\frac{d^2\mathrm{L}}{dX\,dY}dX\,dY\,dZ+\int\frac{dy}{dY}\mathrm{L}\,dY\,dZ-\int y\frac{d\mathrm{L}}{dX}dX\,dZ,$$
$$\int\frac{d^2z}{dX\,dZ}\mathrm{L}\,dX\,dY\,dZ=\int z\frac{d^2\mathrm{L}}{dX\,dZ}dX\,dY\,dZ+\int\frac{dz}{dZ}\mathrm{L}\,dY\,dZ-\int z\frac{d\mathrm{L}}{dX}dX\,dY,$$

$$\int\frac{d^2y}{dY^2}\mathrm{M}\,dX\,dY\,dZ=\int y\frac{d^2\mathrm{M}}{dY^2}dX\,dY\,dZ+\int\left(\frac{dy}{dY}\mathrm{M}-y\frac{d\mathrm{M}}{dY}\right)dX\,dZ,$$
$$\int\frac{d^2x}{dY\,dX}\mathrm{M}\,dX\,dY\,dZ=\int x\frac{d^2\mathrm{M}}{dY\,dX}dX\,dY\,dZ+\int\frac{dx}{dX}\mathrm{M}\,dX\,dZ-\int x\frac{d\mathrm{M}}{dY}dY\,dZ,$$
$$\int\frac{d^2z}{dY\,dZ}\mathrm{M}\,dX\,dY\,dZ=\int z\frac{d^2\mathrm{M}}{dY\,dZ}dX\,dY\,dZ+\int\frac{dz}{dZ}\mathrm{M}\,dX\,dZ-\int z\frac{d\mathrm{M}}{dY}dX\,dY,$$

$$\int \frac{d^2z}{dZ^2} N dX dY dZ = \int z \frac{d^2N}{dZ^2} dX dY dZ + \int \left(\frac{dz}{dZ} N - z \frac{dN}{dZ} \right) dX dY,$$

$$\int \frac{d^2x}{dZ dX} N dX dY dZ = \int x \frac{d^2N}{dZ dX} dX dY dZ + \int \frac{dx}{dX} N dX dY - \int x \frac{dN}{dZ} dY dZ,$$

$$\int \frac{d^2y}{dZ dY} N dX dY dZ = \int y \frac{d^2N}{dZ dY} dX dY dZ + \int \frac{dy}{dY} N dX dY - \int y \frac{dN}{dZ} dX dZ.$$

Dans ces transformées, il y a, comme on le voit, deux sortes d'expressions intégrales : les unes, plus générales, renferment trois intégrations, suivant la variabilité des trois coordonnées X, Y, Z, et expriment par conséquent la somme d'autant de valeurs particulières qu'il y a de particules dans la masse totale du fluide; les autres, au contraire, moins générales, ne renferment chacune que deux intégrations suivant la variabilité de deux des coordonnées X, Y et Z, et ne dénotent en conséquence que la somme d'autant de valeurs particulières qu'il y a de particules dans une seule tranche du fluide. Celles-ci pourront donc être regardées comme des constantes à l'égard de la troisième variable manquante, et l'on sera toujours le maître de les faire évanouir, en donnant certaines limitations aux valeurs des quantités L, M et N, selon la figure de l'espace dans lequel on suppose que la masse de l'air est renfermée.

Ainsi, par exemple, si cette figure est celle d'un parallélipipède quelconque, on voit aisément que x est nul dans les deux plans opposés qui sont perpendiculaires à la ligne X; d'où il suit que les intégrales qui contiennent x seront aussi nulles dans toute leur étendue, à cause que ces intégrales ne varient que suivant Y et Z; par une raison semblable, on verra que les intégrales contenant y et z s'évanouiront aussi d'elles-mêmes; donc, pour achever de faire évanouir les autres intégrales, on supposera L tel, qu'il devienne égal à zéro lorsque $X = o$ et lorsque $X = a$, quels que soient Y et Z; ensuite, M devra devenir égal à zéro lorsque $Y = o$ et $Y = b$, X et Z étant quelconques; enfin, N devra disparaître de même en posant $Z = o$ et $Z = c$, pour toute l'étendue des X et Y; a, b, c étant les trois dimensions du parallélipipède donné.

Si la masse du fluide avait une autre figure quelconque, on trouverait aussi, en ayant égard à cette figure, les conditions qui pourront faire

disparaître toutes les expressions intégrales à deux seules changeantes; il est vrai que le plus souvent ces opérations ne pourront s'exécuter, faute de connaître les valeurs exactes et générales des quantités L, M et N; mais il suffira de les imaginer exécutées pour démontrer que l'on peut toujours omettre les expressions intégrales dont nous parlons. Ainsi l'on aura simplement après les substitutions

$$\int\left(\frac{d^2x}{dt^2}\mathrm{L}+\frac{d^2y}{dt^2}\mathrm{M}+\frac{d^2z}{dt^2}\mathrm{N}\right)d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$$
$$=c\int\left[x\left(\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2}+\frac{d^2\mathrm{M}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}}+\frac{d^2\mathrm{N}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}}\right)\right.$$
$$+y\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{d\mathrm{Y}^2}+\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{X}}+\frac{d^2\mathrm{N}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}\right)$$
$$\left.+z\left(\frac{d^2\mathrm{N}}{d\mathrm{Z}^2}+\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}}+\frac{d^2\mathrm{M}}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{Y}}\right)\right]d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}.$$

On fera maintenant

$$(\mathrm{A})\qquad\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2}+\frac{d^2\mathrm{M}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}}+\frac{d^2\mathrm{N}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}}=k\mathrm{L},$$

$$(\mathrm{B})\qquad\frac{d^2\mathrm{M}}{d\mathrm{Y}^2}+\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{X}}+\frac{d^2\mathrm{N}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}=k\mathrm{M},$$

$$(\mathrm{C})\qquad\frac{d^2\mathrm{N}}{d\mathrm{Z}^2}+\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}}+\frac{d^2\mathrm{M}}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{Y}}=k\mathrm{N},$$

équations par lesquelles on déterminera les valeurs des quantités L, M et N. Il faudra de plus que ces valeurs satisfassent aux conditions énoncées ci-dessus, et c'est par là qu'on déterminera toutes les constantes que l'intégration aura entraînées, comme aussi la constante k qui ne pourra manquer d'avoir autant de valeurs différentes qu'il y a de particules mobiles.

Cela fait, notre équation principale pourra se mettre sous la forme ordinaire

$$\frac{d^2s}{dt^2}=kcs,$$

ayant ici

$$s=\int(x\mathrm{L}+y\mathrm{M}+z\mathrm{N})d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z};$$

d'où l'on tirera, comme dans le Problème I,

$$s = \mathrm{S}\cos\left(t\sqrt{-ck}\right) + \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{-ck}}\sin\left(t\sqrt{-ck}\right),$$

$$r = \mathrm{R}\cos\left(t\sqrt{-ck}\right) - \mathrm{S}\sqrt{-ck}\sin\left(t\sqrt{-ck}\right).$$

Or, soient

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z',$$

et que (x), (y), (z), (x'), (y'), (z') désignent les valeurs de x, y, z, x', y', z', lorsque $t = 0$; on aura donc

$$(\mathrm{D}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int (x\mathrm{L} + y\mathrm{M} + z\mathrm{N})\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z} \\ \quad = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right) \displaystyle\int [(x)\mathrm{L} + (y)\mathrm{M} + (z)\mathrm{N}]\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z} \\ \qquad + \dfrac{\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)}{\sqrt{-ck}} \displaystyle\int [(x')\mathrm{L} + (y')\mathrm{M} + (z')\mathrm{N}]\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z}, \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{E}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int (x'\mathrm{L} + y'\mathrm{M} + z'\mathrm{N})\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z} \\ \quad = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right) \displaystyle\int [(x')\mathrm{L} + (y')\mathrm{M} + (z')\mathrm{N}]\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z} \\ \qquad - \sqrt{-ck}\sin\left(t\sqrt{-ck}\right) \displaystyle\int [(x)\mathrm{L} + (y)\mathrm{M} + (z)\mathrm{N}]\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z}. \end{array} \right.$$

Voilà les équations d'où l'on tirerait, suivant notre méthode, les valeurs exactes de x, y, z, si l'on avait celles de L, M, N, et qu'on pût faire disparaître la quantité k, ainsi qu'on l'a fait dans les Problèmes précédents.

Mais le premier de ces objets nous présente d'abord des difficultés insurmontables, soit qu'en effet les équations (A), (B), (C) ne soient pas susceptibles d'intégration, soit qu'elles demandent d'autres méthodes que celles que nous connaissons. Si on voulait se borner à des constructions particulières, il serait aisé d'en trouver, mais elles ne sauraient être d'aucune utilité dans la recherche des lois de la propagation du son.

46. Il est visible, par exemple, qu'on peut supposer

$$\mathrm{L} = \mathrm{A}e^{(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z})\sqrt{k}},$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{B}e^{(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z})\sqrt{k}},$$
$$\mathrm{N} = \mathrm{C}e^{(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z})\sqrt{k}},$$

A, B, C, p, q, r étant des constantes à déterminer par la substitution et la comparaison des termes; pour cela, on trouvera les trois équations

$$\mathrm{A} = c(\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}pq + \mathrm{C}pr),$$
$$\mathrm{B} = c(\mathrm{B}q^2 + \mathrm{A}pq + \mathrm{C}rq),$$
$$\mathrm{C} = c(\mathrm{C}p^2 + \mathrm{A}pr + \mathrm{B}qr),$$

qui donne, en posant R pour $\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}$,

$$p = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}\sqrt{c}}, \quad q = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{R}\sqrt{c}}, \quad r = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{c}};$$

mais les valeurs de L, M et N n'étant que particulières, on ne pourra s'en servir, suivant notre méthode, que dans l'hypothèse que les valeurs de x, y et z soient renfermées dans certaines conditions, car il est visible que L, M et N étant exprimées par une même fonction de $p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z}$, multipliée seulement par des constantes différentes, les valeurs de x, y, z devront être les mêmes pour tous les points dont la position est renfermée dans la formule

$$p\mathrm{X} + q\mathrm{Y} + r\mathrm{Z} = \text{constante},$$

et de plus ces valeurs devront garder entre elles un rapport constant. Supposé que ces conditions aient lieu, on pourra poursuivre le calcul en substituant les valeurs trouvées de L, M et N dans l'équation (D), et transformant ensuite le terme

$$\int [\mathrm{A}(x') + \mathrm{B}(y') + \mathrm{C}(z')]\, e^{(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z})\sqrt{k}}\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z}$$

en

$$-\sqrt{k}\int\Big[p\mathrm{A}\int(x')\,d\mathrm{X} + q\mathrm{B}\int(y')\,d\mathrm{Y} + r\mathrm{C}\int(z')\,d\mathrm{Z}\Big]\, e^{(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z})\sqrt{k}}\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z},$$

et réduisant $\cos(t\sqrt{-ck})$ et $\sin(t\sqrt{-ck})$ en exponentielles imaginaires, on aura

$$\begin{aligned}
&\int (\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z)\,e^{(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z})\sqrt{k}}\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}\\
&\quad=\tfrac{1}{2}\int\Big[\mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(y)+\mathrm{C}(z)-\tfrac{1}{\sqrt{c}}p\mathrm{A}\int(x')\,d\mathrm{X}-\tfrac{1}{\sqrt{c}}q\mathrm{B}\int(y')\,d\mathrm{Y}\\
&\qquad\qquad-\tfrac{1}{\sqrt{c}}r\mathrm{C}\int(z')\,d\mathrm{Z}\Big]\,e^{(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z}+t\sqrt{c})\sqrt{k}}\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\int\Big[\mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(y)+\mathrm{C}(z)+\tfrac{1}{\sqrt{c}}p\mathrm{A}\int(x')\,d\mathrm{X}+\tfrac{1}{\sqrt{c}}q\mathrm{B}\int(y')\,d\mathrm{Y}\\
&\qquad\qquad+\tfrac{1}{\sqrt{c}}r\mathrm{C}\int(z')\,d\mathrm{Z}\Big]\,e^{(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z}-t\sqrt{c})\sqrt{k}}\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z},
\end{aligned}$$

équation d'où l'on tirera, suivant notre méthode,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z\\
&\quad=\tfrac{1}{2}\Big[\mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(y)+\mathrm{C}(z)+\tfrac{1}{\sqrt{c}}p\mathrm{A}\int(x')\,d\mathrm{X}\\
&\qquad+\tfrac{1}{\sqrt{c}}q\mathrm{B}\int(y')\,d\mathrm{Y}+\tfrac{1}{\sqrt{c}}r\mathrm{C}\int(z')\,d\mathrm{Z}\Big]^{(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z}+t\sqrt{c})}\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\Big[\mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(y)+\mathrm{C}(z)-\tfrac{1}{\sqrt{c}}p\mathrm{A}\int(x')\,d\mathrm{X}\\
&\qquad-\tfrac{1}{\sqrt{c}}q\mathrm{B}\int(y')\,d\mathrm{Y}-\tfrac{1}{\sqrt{c}}r\mathrm{C}\int(z')\,d\mathrm{Z}\Big]^{(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z}-t\sqrt{c})}
\end{aligned}$$

Les quantités mises en forme d'exposants dénotent, comme dans le Problème I, les valeurs qu'il faut donner aux coordonnées; ainsi X, Y, Z étant les coordonnées qui répondent à x, y, z, et (X), (Y), (Z) étant supposées celles qui répondent aux expressions qui ont l'exposant $p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z}\pm t\sqrt{c}$, les valeurs de ces dernières devront être telles, que

$$p(\mathrm{X})+q(\mathrm{Y})+r(\mathrm{Z})=p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z}\pm t\sqrt{c};$$

Au reste, si l'on introduit dans cette solution les fonctions indéterminées, elle reviendra au même que celle que M. Euler a donnée dans son Mémoire, car on aura

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z=\varphi(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z}+t\sqrt{c})+\psi(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z}-t\sqrt{c});$$

d'où l'on tirera les valeurs de y et de z en faisant, selon l'hypothèse,

$$y = fx, \quad z = hx;$$

substituant ensuite ces valeurs dans les équations différentielles du n° 10, on trouvera

$$f = \frac{B}{A}, \quad h = \frac{C}{A},$$

conformément aux formules données par M. Euler dans ses *Recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique* (*Miscellanea Taurinensia*, t. II).

Voilà le Problème résolu analytiquement pour une infinité de cas, mais il faut avouer qu'aucune de ces solutions ne sera applicable à la théorie de la propagation du son, dans laquelle les ébranlements primitifs doivent être supposés quelconques. Il en sera de même de toute autre solution qui se trouvera en intégrant les équations (A), (B), (C) dans des cas particuliers. C'est pourquoi nous renoncerons pour le présent à déterminer les valeurs exactes de x, y et z par les voies ordinaires de notre méthode, et nous nous bornerons à les trouver, s'il est possible, par approximation, en supposant que le temps t soit fort petit; nous verrons ensuite quelles conséquences on pourra tirer d'un tel calcul pour la connaissance des lois de la propagation du son en général.

47. Je commence par développer l'expression $\cos(t\sqrt{-k})$ en poussant la série jusqu'aux quantités infiniment petites du quatrième ordre; j'ai

$$\cos(t\sqrt{-ck}) = 1 + \frac{1}{2}kt^2c + \frac{1}{2.3.4}k^2t^4c^2,$$

ce qui changera le terme de l'équation (D)

$$\cos(t\sqrt{-ck})\int[(x)\mathrm{L} + (y)\mathrm{M} + (z)\mathrm{N}]\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$$

en

$$\int(x)\left[\mathrm{L} + \frac{1}{2}t^2ck\,\mathrm{L} + \frac{1}{2.3.4}t^4c^2k^2\,\mathrm{L}\right]d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$$
$$+\int(y)\left[\mathrm{M} + \frac{1}{2}t^2ck\,\mathrm{M} + \frac{1}{2.3.4}t^4c^2k^2\,\mathrm{M}\right]d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$$
$$+\int(z)\left[\mathrm{N} + \frac{1}{2}t^2ck\,\mathrm{N} + \frac{1}{2.3.4}t^4c^2k^2\,\mathrm{N}\right]d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}.$$

Or les équations (A), (B), (C) donnent d'abord

$$k\mathrm{L} = \frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2} + \frac{d^2\mathrm{M}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}} + \frac{d^2\mathrm{N}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}},$$

$$k\mathrm{M} = \frac{d^2\mathrm{M}}{d\mathrm{Y}^2} + \frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{X}} + \frac{d^2\mathrm{N}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}},$$

$$k\mathrm{N} = \frac{d^2\mathrm{N}}{d\mathrm{Z}^2} + \frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}} + \frac{d^2\mathrm{M}}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{Y}};$$

multipliant ces équations par k et substituant de nouveau au lieu de $k\mathrm{L}$, $k\mathrm{M}$, $k\mathrm{N}$ leurs valeurs, on aura ensuite

$$k^2\mathrm{L} = \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^4} + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2 d\mathrm{Y}^2} + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2 d\mathrm{Z}^2} + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{X}^3 d\mathrm{Y}} + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}^3} + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}^2}$$
$$+ \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{X}^3 d\mathrm{Z}} + \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}^3} + \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}\,d\mathrm{Y}^2},$$

$$k^2\mathrm{M} = \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{Y}^4} + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{Y}^2 d\mathrm{X}^2} + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{Y}^2 d\mathrm{Z}^2} + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}^3 d\mathrm{X}} + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{X}^3} + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}^2}$$
$$+ \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{Y}^3 d\mathrm{Z}} + \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}^3} + \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{X}^2 d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}},$$

$$k^2\mathrm{N} = \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{Z}^4} + \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{Z}^2 d\mathrm{X}^2} + \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{Z}^2 d\mathrm{Y}^2} + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}^3 d\mathrm{X}} + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}^3} + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}^2 d\mathrm{Z}}$$
$$+ \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{Z}^3 d\mathrm{Y}} + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{Y}^3} + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{X}^2 d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}.$$

Par là, on pourra faire évanouir la lettre k de l'expression précédente; car on aura

$$(\mathrm{F}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{L} + \frac{1}{2}t^2 ck\,\mathrm{L} + \frac{1}{2.3.4}t^4 c^2 k^2 \mathrm{L} \\ \quad = \mathrm{L} + \frac{1}{2}t^2 c\left(\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2} + \frac{d^2\mathrm{M}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}} + \frac{d^2\mathrm{N}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}}\right) \\ \qquad + \frac{1}{2.3.4}t^4 c^2\left(\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^4} + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2 d\mathrm{Y}^2} + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2 d\mathrm{Z}^2} + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{X}^3 d\mathrm{Y}} + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}^3}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}^2} + \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{X}^3 d\mathrm{Z}} + \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}^3} + \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}^2 d\mathrm{Z}}\right), \end{array} \right.$$

$$(G)\quad \begin{cases} \mathrm{M} + \frac{1}{2}t^2ck\mathrm{M} + \frac{1}{2.3.4}t^4c^2k^2\mathrm{M} \\ \quad = \mathrm{M} + \frac{1}{2}t^2c\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{d\mathrm{Y}^2} + \frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{X}} + \frac{d^2\mathrm{N}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}\right) \\ \qquad + \frac{1}{2.3.4}t^4c^2\left(\frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{Y}^4} + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{Y}^2d\mathrm{X}^2} + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{Y}^2d\mathrm{Z}^2} + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}^3d\mathrm{X}} + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{X}^3}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}^2} + \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{Y}^3d\mathrm{Z}} + \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}^3} + \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{X}^2d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}\right), \end{cases}$$

$$(H)\quad \begin{cases} \mathrm{N} + \frac{1}{2}t^2ck\mathrm{N} + \frac{1}{2.3.4}t^4c^2k^2\mathrm{N} \\ \quad = \mathrm{N} + \frac{1}{2}t^2c\left(\frac{d^2\mathrm{N}}{d\mathrm{Z}^2} + \frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}} + \frac{d^2\mathrm{M}}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{Y}}\right) \\ \qquad + \frac{1}{2.3.4}t^4c^2\left(\frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{Z}^4} + \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{Z}^2d\mathrm{X}^2} + \frac{d^4\mathrm{N}}{d\mathrm{Z}^2d\mathrm{Y}^2} + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^3d\mathrm{X}} + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}^3}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}^2d\mathrm{Z}} + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{Z}^3d\mathrm{Y}} + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{Y}^3} + \frac{d^4\mathrm{M}}{d\mathrm{X}^2d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}\right). \end{cases}$$

Or, quelles que soient les valeurs des quantités L, M, N, il est certain qu'elles seront des fonctions de X, Y, Z, ce que nous dénoterons ainsi

$$\mathrm{L}^{(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})},\quad \mathrm{M}^{(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})},\quad \mathrm{N}^{(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})};$$

de sorte que, si l'on suppose que les variables X, Y, Z deviennent $\mathrm{X}+pt$, $\mathrm{Y}+qt$, $\mathrm{Z}+rt$, les valeurs correspondantes de L, M, N s'exprimeront à notre manière par

$$\mathrm{L}^{(\mathrm{X}+pt,\,\mathrm{Y}+qt,\,\mathrm{Z}+rt)},\quad \mathrm{M}^{(\mathrm{X}+pt,\,\mathrm{Y}+qt,\,\mathrm{Z}+rt)},\quad \mathrm{N}^{(\mathrm{X}+pt,\,\mathrm{Y}+qt,\,\mathrm{Z}+rt)}.$$

Cela posé, on sait que si L représente une fonction quelconque de la variable X, laquelle croisse d'une quantité très-petite pt, la valeur de L deviendra, en négligeant les quantités infiniment petites au-dessus du quatrième ordre,

$$\mathrm{L} + pt\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{X}} + \frac{1}{2}p^2t^2\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2} + \frac{1}{2.3}p^3t^3\frac{d^3\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^3} + \frac{1}{2.3.4}p^4t^4\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^4};$$

donc, si l'on suppose que la fonction L renferme, outre la variable X, les

variables Y et Z qui croissent en même temps des quantités très-petites qt, rt, on trouvera par un calcul assez simple

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}^{(\mathrm{X}+pt,\,\mathrm{Y}+qt,\,\mathrm{Z}+rt)} &= \mathrm{L} + t\left(p\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{X}} + q\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}} + r\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}}\right)\\
&+ \frac{1}{2}t^2\left(p\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2} + 2pq\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}} + q^2\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}^2} + 2pr\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}} + 2qr\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}} + r^2\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}^2}\right)\\
&+ \frac{1}{2.3}t^3\left(p^3\frac{d^3\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^3} + 3p^2q\frac{d^3\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2\,d\mathrm{Y}} + 3pq^2\frac{d^3\mathrm{L}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}^2} + q^3\frac{d^3\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}^3} + 3p^2r\frac{d^3\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2\,d\mathrm{Z}}\right.\\
&\left. + 3pr^2\frac{d^3\mathrm{L}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}^2} + 3q^2r\frac{d^3\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}^2\,d\mathrm{Z}} + 3qr^2\frac{d^3\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}^2} + 6pqr\frac{d^3\mathrm{L}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}} + r^3\frac{d^3\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}^3}\right)\\
&+ \frac{1}{2.3.4}t^4\left(p^4\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^4} + 4p^3q\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^3\,d\mathrm{Y}} + 6p^2q^2\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2\,d\mathrm{Y}^2} + 4pq^3\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}^3}\right.\\
&+ q^4\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}^4} + 4p^3r\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^3\,d\mathrm{Z}} + 6p^2r^2\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2\,d\mathrm{Z}^2} + 4pr^3\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}^3}\\
&+ 4q^3r\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}^3\,d\mathrm{Z}} + 6q^2r^2\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}^2\,d\mathrm{Z}^2} + 4qr^3\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}^3} + 12p^2qr\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}\\
&\left. + 12pq^2r\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}^2\,d\mathrm{Z}} + 12pqr\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}^2} + r^4\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}^4}\right).
\end{aligned}$$

De cette formule je déduis les suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8}\mathrm{L}^{(\mathrm{X}+pt,\,\mathrm{Y}+qt,\,\mathrm{Z}+rt)} + \frac{1}{8}\mathrm{L}^{(\mathrm{X}+pt,\,\mathrm{Y}-qt,\,\mathrm{Z}+rt)}\\
&+ \frac{1}{8}\mathrm{L}^{(\mathrm{X}+pt,\,\mathrm{Y}+qt,\,\mathrm{Z}-rt)} + \frac{1}{8}\mathrm{L}^{(\mathrm{X}+pt,\,\mathrm{Y}-qt,\,\mathrm{Z}-rt)}\\
&+ \frac{1}{8}\mathrm{L}^{(\mathrm{X}-pt,\,\mathrm{Y}+qt,\,\mathrm{Z}+rt)} + \frac{1}{8}\mathrm{L}^{(\mathrm{X}-pt,\,\mathrm{Y}-qt,\,\mathrm{Z}+rt)}\\
&+ \frac{1}{8}\mathrm{L}^{(\mathrm{X}-pt,\,\mathrm{Y}+qt,\,\mathrm{Z}-rt)} + \frac{1}{8}\mathrm{L}^{(\mathrm{X}-pt,\,\mathrm{Y}-qt,\,\mathrm{Z}-rt)}\\
&= \mathrm{L} + \frac{1}{2}t^2\left(p^2\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2} + q^2\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}^2} + r^2\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}^2}\right)\\
&+ \frac{1}{2.3.4}t^4\left(p^4\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^4} + 6p^2q^2\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2\,d\mathrm{Y}^2} + q^4\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}^4} + 6p^2r^2\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2\,d\mathrm{Z}^2}\right.\\
&\left. + 6q^2r^2\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}^2\,d\mathrm{Z}^2} + r^4\frac{d^4\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}^4}\right),
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}L^{(X,Y+qt,Z-rt)}+\frac{1}{4}L^{(X,Y-qt,Z+rt)}+\frac{1}{4}L^{(X,Y+qt,Z-rt)}+\frac{1}{4}L^{(X,Y-qt,Z-rt)}$$

$$=L+\frac{1}{2}t^2\left(q^2\frac{d^2L}{dY^2}+r^2\frac{d^2L}{dZ^2}\right)+\frac{1}{2.3.4}t^4\left(q^4\frac{d^4L}{dY^4}+6q^2r^2\frac{d^4L}{dY^2dZ^2}+r^4\frac{d^4L}{dZ^4}\right),$$

$$\frac{1}{8}L^{(X+pt,Y+qt,Z+rt)}+\frac{1}{8}L^{(X+pt,Y+qt,Z-rt)}$$

$$+\frac{1}{8}L^{(X-pt,Y-qt,Z+rt)}+\frac{1}{8}L^{(X-pt,Y-qt,Z-rt)}$$

$$-\frac{1}{8}L^{(X+pt,Y-qt,Z+rt)}-\frac{1}{8}L^{(X+pt,Y-qt,Z-rt)}$$

$$-\frac{1}{8}L^{(X-pt,Y+qt,Z+rt)}-\frac{1}{8}L^{(X-pt,Y+qt,Z-rt)}$$

$$=\frac{1}{2}2pqt^2\frac{d^2L}{dX\,dY}+\frac{1}{2.3.4}t^4\left(4p^3q\frac{d^4L}{dX^3dY}+4pq^3\frac{d^4L}{dX\,dY^3}\right.$$

$$\left.+12pqr^2\frac{d^4L}{dX\,dY\,dZ^2}\right),$$

$$\frac{1}{8}L^{(X+pt,Y+qt,Z+rt)}+\frac{1}{8}L^{(X+pt,Y-qt,Z+rt)}$$

$$+\frac{1}{8}L^{(X-pt,Y+qt,Z-rt)}+\frac{1}{8}L^{(X-pt,Y-qt,Z-rt)}$$

$$-\frac{1}{8}L^{(X+pt,Y+qt,Z-rt)}-\frac{1}{8}L^{(X+pt,Y-qt,Z-rt)}$$

$$-\frac{1}{8}L^{(X-pt,Y+qt,Z+rt)}-\frac{1}{8}L^{(X-pt,Y-qt,Z+rt)}$$

$$=\frac{1}{2}2prt^2\frac{d^2L}{dX\,dZ}+\frac{1}{2.3.4}t^4\left(4p^3r\frac{d^4L}{dX^3dZ}+4pr^3\frac{d^4L}{dX\,dZ^3}\right.$$

$$\left.+12pq^2r\frac{d^4L}{dX\,dY^2dZ}\right).$$

On formera de pareilles formules à l'égard des expressions

$$M^{(X+pt,Y+qt,Z+rt)} \quad \text{et} \quad N^{(X+pt,Y+qt,Z+rt)},$$

et en donnant des valeurs convenables aux constantes indéterminées p, q, r on changera, par les substitutions, l'équation (F) en celle-ci :

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{L})\quad & \mathrm{L} + \tfrac{1}{2}t^2ck\mathrm{L} + \tfrac{1}{2.3.4}t^4c^2k^2\mathrm{L} \\
& = \mathrm{L}^{(X,Y,Z)} \\
& - \tfrac{1}{4}\mathrm{L}^{\left(X,\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} - \tfrac{1}{4}\mathrm{L}^{\left(X,\ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& - \tfrac{1}{4}\mathrm{L}^{\left(X,\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} - \tfrac{1}{4}\mathrm{L}^{\left(X,\ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \tfrac{1}{8}\mathrm{L}^{\left(X+t\sqrt{c},\ \ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} + \tfrac{1}{8}\mathrm{L}^{\left(X+t\sqrt{c},\ \ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \tfrac{1}{8}\mathrm{L}^{\left(X+t\sqrt{c},\ \ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} + \tfrac{1}{8}\mathrm{L}^{\left(X+t\sqrt{c},\ \ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \tfrac{1}{8}\mathrm{L}^{\left(X-t\sqrt{c},\ \ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} + \tfrac{1}{8}\mathrm{L}^{\left(X-t\sqrt{c},\ \ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \tfrac{1}{8}\mathrm{L}^{\left(X-t\sqrt{c},\ \ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} + \tfrac{1}{8}\mathrm{L}^{\left(X-t\sqrt{c},\ \ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \tfrac{1}{8}\mathrm{M}^{\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} + \tfrac{1}{8}\mathrm{M}^{\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \tfrac{1}{8}\mathrm{M}^{\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} + \tfrac{1}{8}\mathrm{M}^{\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& - \tfrac{1}{8}\mathrm{M}^{\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} - \tfrac{1}{8}\mathrm{M}^{\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& - \tfrac{1}{8}\mathrm{M}^{\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} - \tfrac{1}{8}\mathrm{M}^{\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)} \\
& + \tfrac{1}{8}\mathrm{N}^{\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)} + \tfrac{1}{8}\mathrm{N}^{\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)}
\end{aligned}
$$

$$+\tfrac{1}{8}N\left(X-t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\tfrac{c}{2}}\right)+\tfrac{1}{8}N\left(X-t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\tfrac{c}{2}}\right)$$

$$-\tfrac{1}{8}N\left(X+t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\tfrac{c}{2}}\right)-\tfrac{1}{8}N\left(X+t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\tfrac{c}{2}}\right)$$

$$-\tfrac{1}{8}N\left(X-t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\tfrac{c}{2}}\right)-\tfrac{1}{8}N\left(X-t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\tfrac{c}{2}}\right);$$

on trouvera de même les transformées (M) et (N) des deux autres équations (G) et (H), et l'on aura ainsi, en substituant, la transformée entière de la formule

$$\cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int[(x)\mathrm{L}+(y)\mathrm{M}+(z)\mathrm{N}]\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z},$$

qu'on substituera ensuite dans l'équation (D).

Supposons, pour un moment, que les quantités (x'), (y'), (z') soient nulles dans cette équation, la lettre k s'en ira entièrement et ne se trouvera plus que dans les expressions des quantités L, M et N. Or, quoique nous ne connaissions point la forme de ces expressions, on pourra cependant vérifier l'équation indépendamment de k, comme notre méthode le demande; car pour cela il ne s'agira que de comparer ensemble les quantités qui se trouveront multipliées par les fonctions L, M, N qui auront des valeurs égales.

Que (X), (Y), (Z) dénotent les coordonnées qui répondent à l'expression générale $\mathrm{L}^{(X+pt,\ Y+qt,\ Z+rt)}$, on aura, selon notre hypothèse,

$$(\mathrm{X})=\mathrm{X}+pt,\quad(\mathrm{Y})=\mathrm{Y}+qt,\quad(\mathrm{Z})=\mathrm{Z}+rt,$$

X, Y, Z étant les coordonnées qui répondent à l'expression L simplement et aux quantités x, y, z, (x), (y), (z). Supposons donc que les valeurs de (X), (Y), (Z) soient diminuées des quantités pt, qt, rt (ce qui est permis, puisque ces quantités sont constantes à l'égard des intégrations indiquées dans l'équation), elles deviendront X, Y, Z; mais en même temps les coordonnées correspondantes à (x), (y), (z), et qui étaient auparavant X, Y, Z, deviendront $\mathrm{X}-pt$, $\mathrm{Y}-qt$, $\mathrm{Z}-rt$. De

cette manière, toutes les quantités exprimées généralement par

$$L^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)},\ M^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)},\ N^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)},$$

redeviendront

$$L^{(X,\,Y,\,Z)},\ M^{(X,\,Y,\,Z)},\ N^{(X,\,Y,\,Z)} \quad \text{ou simplement} \quad L,\ M,\ N;$$

mais à leur tour les quantités (x), (y), (z), qui les multiplient, se changeront en

$$(x)^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)},\ (y)^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)},\ (z)^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)}.$$

Après ces transformations, on joindra ensemble tous les termes de l'équation qui se trouvent multipliés par L, M, N, et on décomposera ensuite cette équation en trois portions, dont chacune devra se vérifier séparément et indépendamment des valeurs de L, M et N. On aura donc par là

(P)
$$\begin{aligned}
x = {} & (x)^{(X,\,Y,\,Z)} \\
& - \tfrac{1}{4}(x)^{\left(X,\ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} - \tfrac{1}{4}(x)^{\left(X,\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& - \tfrac{1}{4}(x)^{\left(X,\ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} - \tfrac{1}{4}(x)^{\left(X,\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \tfrac{1}{8}(x)^{\left(X-t\sqrt{c},\ \ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} + \tfrac{1}{8}(x)^{\left(X-t\sqrt{c},\ \ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \tfrac{1}{8}(x)^{\left(X-t\sqrt{c},\ \ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} + \tfrac{1}{8}(x)^{\left(X-t\sqrt{c},\ \ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \tfrac{1}{8}(x)^{\left(X+t\sqrt{c},\ \ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} + \tfrac{1}{8}(x)^{\left(X+t\sqrt{c},\ \ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \tfrac{1}{8}(x)^{\left(X+t\sqrt{c},\ \ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} + \tfrac{1}{8}(x)^{\left(X+t\sqrt{c},\ \ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \tfrac{1}{8}(y)^{\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} + \tfrac{1}{8}(y)^{\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{8}(x)\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)+\frac{1}{8}(x)\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)$$

$$-\frac{1}{8}(x)\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)-\frac{1}{8}(x)\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)$$

$$-\frac{1}{8}(x)\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)-\frac{1}{8}(x)\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)$$

$$+\frac{1}{8}(z)\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)+\frac{1}{8}(z)\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)$$

$$+\frac{1}{8}(z)\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)+\frac{1}{8}(z)\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)$$

$$-\frac{1}{8}(z)\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)-\frac{1}{8}(z)\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)$$

$$-\frac{1}{8}(z)\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)-\frac{1}{8}(z)\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{2}}\right).$$

On aura de même, pour les valeurs de y et de z, deux autres formules que je nommerai (Q) et (R), et que je m'abstiens de rapporter, puisqu'on peut les déduire de la précédente en changeant simplement x, (x), X en y, (y), Y pour la formule (Q), et en z, (z), Z pour la formule (R), et réciproquement.

Ce sont là les valeurs de x, y, z dans l'hypothèse que (x'), (y') et (z') soient nulles. Supposons maintenant que ces quantités aient une valeur, mais qu'en même temps les (x), (y) et (z) soient nulles; il est clair que dans l'équation (D) on aura, à la place du terme

$$\cos(t\sqrt{-ck})\int[(x)\mathrm{L}+(y)\mathrm{M}+(z)\mathrm{N}]\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z},$$

l'autre terme

$$\frac{\sin(t\sqrt{-ck})}{\sqrt{-ck}}\int[(x')\mathrm{L}+(y')\mathrm{M}+(z')\mathrm{N}]\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z};$$

or, si l'on fait attention que

$$\frac{\sin(t\sqrt{-ck})}{\sqrt{-ck}}=\int\cos(t\sqrt{-ck})\,dt,$$

il ne sera pas difficile d'apercevoir que les expressions de L, M et N, qui qui se trouveront en faisant disparaître la lettre k, ne seront que les intégrales de celles qu'on a trouvées plus haut, prises en regardant t seul comme variable. Ainsi un terme quelconque de la transformée sera représenté par

$$\int\left[(x')\int \mathrm{L}^{(\mathrm{X}+pt,\ \mathrm{Y}+qt,\ \mathrm{Z}+rt)}\,dt\right]d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z};$$

or il est visible que l'intégration suivant t, dans l'expression

$$\int \mathrm{L}^{(\mathrm{X}+pt,\ \mathrm{Y}+qt,\ \mathrm{Z}+rt)}\,dt,$$

se réduit à trois intégrations suivant X, Y, Z; d'où il s'ensuit que l'intégrale

$$\int\left[(x')\int \mathrm{L}^{(\mathrm{X}+pt,\ \mathrm{Y}+qt,\ \mathrm{Z}+rt)}\,dt\right]d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$$

pourra se transformer, par des intégrations par parties, en celle-ci :

$$-\int\left[\mathrm{L}^{(\mathrm{X}+pt,\ \mathrm{Y}+qt,\ \mathrm{Z}+rt)}\int(x')\,dt\right]d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z},$$

qui pourra encore se mettre sous cette autre forme :

$$\int\left[\mathrm{L}^{(\mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z})}\int(x')^{(\mathrm{X}-pt,\ \mathrm{Y}-qt,\ \mathrm{Z}-rt)}\,dt\right]d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z},$$

où l'intégrale de $(x')^{(\mathrm{X}-pt,\ \mathrm{Y}-qt,\ \mathrm{Z}-rt)}$ devra être prise en faisant varier t dans les valeurs $\mathrm{X}-pt$, $\mathrm{Y}-qt$, $\mathrm{Z}-rt$ des coordonnées de (x').

Faisant des observations et des réductions semblables sur tous les autres termes, et comparant ensuite les quantités L, M et N entre elles, on trouvera pour x, y, z des formules qui ne différeront de celles qu'on a trouvées ci-dessus, qu'en ce qu'à la place des quantités (x), (y), (z) il y aura les quantités intégrales $\int(x')\,dt$, $\int(y')\,dt$, $\int(z')\,dt$.

Il est maintenant facile de voir, en examinant l'équation (D), que les deux solutions particulières qui viennent d'être trouvées renferment la

solution générale, et qu'il ne faudra qu'ajouter ensemble les expressions trouvées de x, y, z dans les cas où (x'), (y'), (z') ou (x), (y), (z) sont nulles, pour avoir les expressions complètes pour le cas où ces quantités sont toutes réelles.

De plus, comme l'équation (E) n'est que la différentielle de l'équation (D) prise en variant t seul, on aura tout d'un coup les valeurs des vitesses, en différentiant les formules qu'on vient de trouver pour les valeurs des espaces x, y, z; il viendra donc

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P}') \qquad x' = {} & (x')^{(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})} \\
& - \frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d(x)}{dt}\right]^{\left(\mathrm{X},\mathrm{Y}-t\sqrt{\frac{c}{6}},\mathrm{Z}-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& - \frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d(x)}{dt}\right]^{\left(\mathrm{X},\mathrm{Y}+t\sqrt{\frac{c}{6}},\mathrm{Z}-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& - \frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d(x)}{dt}\right]^{\left(\mathrm{X},\mathrm{Y}-t\sqrt{\frac{c}{6}},\mathrm{Z}+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& - \frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d(x)}{dt}\right]^{\left(\mathrm{X},\mathrm{Y}+t\sqrt{\frac{c}{6}},\mathrm{Z}+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d(x)}{dt}\right]^{\left(\mathrm{X}-t\sqrt{c},\mathrm{Y}-t\sqrt{\frac{c}{6}},\mathrm{Z}-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d(x)}{dt}\right]^{\left(\mathrm{X}-t\sqrt{c},\mathrm{Y}+t\sqrt{\frac{c}{6}},\mathrm{Z}-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d(x)}{dt}\right]^{\left(\mathrm{X}-t\sqrt{c},\mathrm{Y}-t\sqrt{\frac{c}{6}},\mathrm{Z}+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d(x)}{dt}\right]^{\left(\mathrm{X}-t\sqrt{c},\mathrm{Y}+t\sqrt{\frac{c}{6}},\mathrm{Z}+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)} \\
& + \frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d(x)}{dt}\right]^{\left(\mathrm{X}+t\sqrt{c},\mathrm{Y}-t\sqrt{\frac{c}{6}},\mathrm{Z}-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d(x)}{dt}\right]^{\left(X+t\sqrt{c},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)}$$

$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d(x)}{dt}\right]^{\left(X+t\sqrt{c},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)}$$

$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d(x)}{dt}\right]^{\left(X+t\sqrt{c},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)}$$

$$+\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d(y)}{dt}\right]^{\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)}$$

$$+\frac{1}{8}\left[(y')-\frac{d(y)}{dt}\right]^{\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)}$$

$$+\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d(y)}{dt}\right]^{\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)}$$

$$+\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d(y)}{dt}\right]^{\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)}$$

$$-\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d(y)}{dt}\right]^{\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)}$$

$$-\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d(y)}{dt}\right]^{\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)}$$

$$-\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d(y)}{dt}\right]^{\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)}$$

$$-\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d(y)}{dt}\right]^{\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{6}}\right)}$$

$$+\frac{1}{8}\left[(z')+\frac{d(z)}{dt}\right]^{\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)}$$

$$+\frac{1}{8}\left[(z')+\frac{d(z)}{dt}\right]^{\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)}$$

$$+\frac{1}{8}\left[(z')+\frac{d(z)}{dt}\right]^{\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)}$$

$$+\frac{1}{8}\left[(z')+\frac{d(z)}{dt}\right]^{\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)}$$

$$-\frac{1}{8}\left[(z')+\frac{d(z)}{dt}\right]^{\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)}$$

$$-\frac{1}{8}\left[(z')+\frac{d(z)}{dt}\right]^{\left(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z+t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)}$$

$$-\frac{1}{8}\left[(z')+\frac{d(z)}{dt}\right]^{\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)}$$

$$-\frac{1}{8}\left[(z')+\frac{d(z)}{dt}\right]^{\left(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\ Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\ Z-t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)}.$$

Les valeurs de y' et de z' se trouveront de même en substituant dans cette formule à la place de x', (x), (x'), X, leurs correspondantes y', (y), (y'), Y ou z', (z), (z'), Z et réciproquement.

48. Voilà des formules très-générales par lesquelles, connaissant dans un instant quelconque le mouvement de toutes les parties du fluide, on pourra déterminer à très-peu près leur mouvement dans les instants suivants, au moins pendant un intervalle de temps fort court. Or, si après ce temps on recommence le calcul en substituant à la place de (x), (y), (z), (x'), (y'), (z') les valeurs trouvées de x, y, z, x', y', z', on en tirera des nouvelles valeurs de x, y, z, x', y', z' qui serviront pour un second intervalle de temps égal au premier; et opérant ainsi de suite on pourra trouver les mouvements du fluide pour tel espace de temps qu'on voudra; mais il faut avouer que cette méthode ne sera guère praticable pour un temps assez long; car nos formules n'étant qu'approchées, l'inexactitude de chaque résultat influera nécessairement sur tous les résultats suivants, et par conséquent plus le nombre des opérations sera grand, plus aussi on risquera de s'éloigner de la vérité.

Conséquences qui résultent des formules précédentes par rapport à la propagation du son.

49. Imaginons d'abord qu'un corps sonore n'ébranle qu'une seule particule d'air dont la position soit déterminée par les coordonnées [X], [Y], [Z], et voyons comment et par quels degrés cet ébranlement unique se propagera au loin dans toute la masse de l'air pendant un temps quelconque t fort court.

Il est d'abord évident que dans les équations (P), (Q), (R), (P′), (Q′), (R′) il faudra regarder comme nulles toutes les quantités (x), (y), (z), (x'), (y'), (z'), qui auront un autre exposant que ([X], [Y], [Z]); or, soit en général l'exposant de chacune de ces quantités exprimé par $(X - pt, Y - qt, Z - rt)$, il suit de ce qu'on vient de dire que les valeurs de x, y, z, x', y', z' seront aussi nulles pour toutes les particules dont la position ne sera point déterminée par des coordonnées X, Y, Z, telles que

$$X - pt = [X], \quad Y - pt = [Y], \quad Z - qt = [Z],$$

savoir que

$$X = [X] + pt, \quad Y = [Y] + qt, \quad Z = [Z] + rt;$$

si donc on donne successivement à p, q, r toutes leurs valeurs particulières conformément à nos formules, on aura autant de valeurs de X, Y, Z, qui détermineront la position de toutes les particules de l'air qui auront quelque mouvement au bout du temps t.

Supposons p, q, r donnés et faisons varier t; il est clair que les coordonnées X, Y, Z appartiendront à une ligne droite qui passera par le point auquel répondent les coordonnées [X], [Y], [Z] et qui fera avec les lignes X, Y, Z des angles dont les cosinus seront

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}};$$

d'où il s'ensuit qu'en donnant à p, q, r des valeurs différentes, on aura aussi des droites de différente position, mais qui s'entrecouperont toutes

dans un même point et qu'on pourra par conséquent regarder comme autant de rayons sonores excités par l'ébranlement donné de la particule qui est à leur centre.

Ces rayons croîtront uniformément avec le temps, de sorte qu'au bout d'un temps quelconque t leur longueur sera généralement exprimée par

$$t\sqrt{c(p^2+q^2+r^2)};$$

on aura donc, pour la vitesse de la propagation du son dans chacun d'eux, la formule $\sqrt{c(p^2+q^2+r^2)}$, dont la valeur se connaîtra en substituant au lieu de p, q, r leurs valeurs particulières. Par ces substitutions, on aura les trois quantités suivantes :

$$\sqrt{c\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)}=\sqrt{\frac{c}{3}},$$

$$\sqrt{c\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)}=2\sqrt{\frac{c}{3}},$$

$$\sqrt{c\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)}=\sqrt{\frac{7c}{6}},$$

qui constitueront pour ainsi dire autant d'espèces différentes de rayons sonores.

C'est une chose digne de remarque que la plus grande vitesse $2\sqrt{\frac{c}{3}}$ approche beaucoup de celle qu'on trouve par l'expérience; car $\sqrt{c}$ étant égal environ à 979 pieds et c à 958441, on aura $\sqrt{\frac{c}{3}}=565$, et par conséquent $2\sqrt{\frac{c}{3}}=1130$ qui est à très-peu près le nombre de pieds que le son parcourt dans une seconde, selon les expériences moyennes. Cependant il ne paraît pas que ce résultat soit encore capable de mettre la théorie d'accord avec l'expérience sur la vitesse de la propagation du son. Voici les raisons qui m'obligent à suspendre mon jugement là-dessus.

1° Nos formules ne sont qu'approchées et ne peuvent avoir lieu que pendant un temps assez court, après lequel chaque particule mobile doit être regardée comme un nouveau centre de rayons sonores.

2° La position de chaque rayon n'est pas fixe, puisqu'elle dépend de celle des trois axes principaux, laquelle est absolument arbitraire; d'où il suit qu'en changeant la position des axes, les rayons qui avaient auparavant une vitesse donnée pourront prendre la place de ceux qui avaient des vitesses différentes; ce qui paraît renfermer une espèce de contradiction, puisqu'une même particule de fluide pourrait en ce cas avoir ou ne pas avoir de mouvement. Cet inconvénient, qui vient sans doute de ce que nos formules ne renferment pas tous les termes nécessaires, sera aussi attaché à toutes les autres formules qu'on trouvera par approximation; d'où il résulte que, jusqu'à ce qu'on ait trouvé des formules tout à fait exactes et rigoureuses, on ne sera pas en état de prononcer sur le point dont il s'agit.

3° Nous avons trouvé dans les deux hypothèses du Chapitre III la vitesse du son égale à $\sqrt{c}$, et cette même valeur peut se trouver aussi par les formules de ce Chapitre, en considérant la plus grande vitesse des rayons estimée suivant la direction de chacun des trois axes, ce qui paraît mieux cadrer avec la nature particulière de ces formules.

50. Nous n'avons encore considéré que l'effet qui résulte de l'ébranlement d'une seule particule d'air; supposons maintenant que tant de particules qu'on voudra soient ébranlées d'une manière quelconque dans le premier instant du temps t; on trouvera, en raisonnant sur nos formules de la même manière qu'on a fait ci-dessus, que chacun des ébranlements primitifs excitera dans le fluide environnant les mêmes rayons sonores que s'il était seul, de sorte que les particules d'air qui se trouveront dans la rencontre de plusieurs rayons auront un mouvement composé de tous les mouvements qui dépendront de chaque ondulation particulière. C'est ce qui nous fournit une explication complète et rigoureuse de la manière dont plusieurs sons différents peuvent coexister et se répandre dans une même masse d'air, sans se nuire mutuellement les uns aux autres (*Recherches précédentes*, LXIII).

Au reste, comme chaque particule d'air ébranlée devient elle-même un centre de rayons sonores, il est évident que le son doit se répandre

également en tous sens, ce qui est aussi un des principaux phénomènes de sa propagation.

51. Quoiqu'il ne soit pas nécessaire de connaître la nature particulière de chaque ébranlement, il est cependant bon de faire attention à la différence qui se trouve entre les ébranlements primitifs et dérivatifs, par rapport à leur propagation. Supposons pour cela qu'ayant déduit de nos formules les valeurs de $x, y, z,\ldots$ pour un temps quelconque désigné par (t), on les substitue dans les mêmes formules à la place de (x), (y), $(z),\ldots$, pour trouver les valeurs correspondantes de $x, y, z,\ldots$ pour un second intervalle de temps marqué par t; et soit par exemple

$$\alpha\left[(x)+\int(x')\,dt\right]^{[X+p(t),\ Y+q(t)\ Z+r(t)]}$$

un terme quelconque de la valeur de x, et

$$\alpha\left[(x')+\frac{d(x)}{dt}\right]^{[X+p(t),\ Y+q(t),\ Z+r(t)]}$$

le terme correspondant de la valeur de x', lesquels doivent être substitués au lieu de (x) et de (x') dans les termes de la forme de

$$\alpha\left[(x)+\int(x')\,dt\right]^{(X+pt,\ Y+qt,\ Z+rt)}$$

pour la valeur de x, et dans ceux de la forme de

$$\alpha\left[(x')+\frac{d(x)}{dt}\right]^{(X+pt,\ Y+qt,\ Z+rt)}$$

pour la valeur de x'. On remarquera d'abord que dans nos formules un terme quelconque, dont l'exposant est $(X+pt,\ Y+qt,\ Z+rt)$ est toujours accompagné d'un autre terme exprimé de la même manière, mais avec l'exposant $(X-pt,\ Y-qt,\ Z-rt)$; on sait de plus, par ce qui a été dit ci-dessus, que les termes

$$\left[(x)+\int(x')\,dt\right]^{(X+pt,\ Y+qt,\ Z+rt)},$$

$$\left[(x')+\frac{d(x)}{dt}\right]^{(X+pt,\ Y+qt,\ Z+rt)},$$

marquent la propagation des ébranlements (x), (x') suivant une ligne qui fait avec les trois axes principaux des angles dont les cosinus sont

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

d'où il s'ensuit que les termes

$$\left[(x)+\int(x')\,dt\right]^{(X-pt,\ Y-qt,\ Z-rt)},$$

$$\left[(x')+\frac{d(x)}{dt}\right]^{(X-pt,\ Y-qt,\ Z-rt)},$$

dénoteront la propagation des mêmes ébranlements (x) et (x') dans la même ligne prolongée du côté opposé. Or, cela posé, je dis que si Cc (*fig.* 14) représente un rayon de la propagation d'un ébranlement

Fig. 14.



primitif excité en C, la propagation de l'ébranlement dérivatif qui est en c sera nulle suivant la direction cC opposée à celle de son ébranlement primitif. Pour le prouver, il n'y a qu'à faire voir qu'en substituant

$$\alpha\left[(x)+\int(x')\,dt\right]^{(X+pt,\ Y+qt,\ Z+rt)}$$

au lieu de (x), et

$$\alpha\left[(x')+\frac{d(x)}{dt}\right]^{(X+pt,\ Y+qt,\ Z+rt)}$$

au lieu de (x') dans les termes

$$\left[(x)+\int(x')\,dt\right]^{(X-pt,\ Y-qt,\ Z-rt)},$$

$$\left[(x')+\frac{d(x)}{dt}\right]^{(X-pt,\ Y-qt,\ Z-rt)},$$

ces termes deviendront nuls. Or, comme dans les exposants $X-pt$, $Y-qt$, $Z-rt$, le temps t est négatif par rapport aux coordonnées X, Y, Z, il est visible que l'intégrale $\int(x)\,dt$ et la différentielle $\frac{d(x)}{dt}$ seront

aussi nécessairement négatives; d'où l'on aura par la substitution

$$\left[(x) - \int (x')\,dt\right] = \alpha\left[(x) + \int (x')\,dt - \int (x')\,dt - (x)\right] = 0,$$

et de même

$$\left[(x') - \frac{d(x)}{dt}\right] = \alpha\left[(x) + \frac{d(x)}{dt} - \frac{d(x)}{dt} - x'\right] = 0,$$

donc, etc.

Au reste, la remarque que nous venons de faire sur les formules générales de ce Chapitre est entièrement analogue à celle qu'on a déjà faite sur les formules particulières du Chapitre III, dans le n° 16, remarque dont nous sommes redevables à M. Euler et qui est d'une grande importance dans la théorie de la propagation du son.

52. Il ne nous reste plus qu'à examiner le changement qui doit arriver aux rayons sonores par la rencontre d'un obstacle quelconque, qui s'oppose entièrement, ou en partie, au mouvement des particules contiguës de l'air. Pour cela, il n'y a qu'à chercher quelle devra être la position d'une particule mobile quelconque, lorsque les coordonnées

$$\mathrm{X} = [\mathrm{X}] + pt, \quad \mathrm{Y} = [\mathrm{Y}] + qt, \quad \mathrm{Z} = [\mathrm{Z}] + rt$$

tomberont au delà de l'obstacle immobile. Or, en examinant les calculs du n° 47, on voit que les valeurs des X, Y, Z, pour une particule quelconque mobile, sont les mêmes que celles qui constituent les fonctions

$$\mathrm{L}^{(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})}, \quad \mathrm{M}^{(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})}, \quad \mathrm{N}^{(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})};$$

donc tout se réduit à examiner la nature de ces fonctions et à voir de quelle manière il faudra les transformer, afin que les quantités X, Y, Z ne surpassent jamais des valeurs données.

Imaginons donc que la masse de l'air soit interrompue de quelque côté, et comme terminée par une espèce de paroi immobile de figure donnée; il est constant, par ce qui a été enseigné dans le n° 45, que les expressions intégrales à deux seules changeantes, que nous avons traitées

comme nulles dans le numero cité, devront disparaître par elles-mêmes, en tant qu'elles se rapporteront à un point quelconque de la figure proposée. Rappelons-nous ces expressions négligées dans les calculs précédents et considérons d'abord celles qui ont le signe — ; je dis que leur somme est toujours évanouissante, quelle que soit la figure à laquelle il faille les rapporter. Pour le prouver, ajoutons-les ensemble; on aura

$$\int \left(\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{X}} + \frac{d\mathrm{M}}{d\mathrm{Y}} + \frac{d\mathrm{N}}{d\mathrm{Z}}\right)(x\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z} + y\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z} + z\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}).$$

Or, soit le rapport entre les trois coordonnées X, Y, Z, exprimé par l'équation

$$d\mathrm{Z} = \mathrm{P}\,d\mathrm{X} + \mathrm{Q}\,d\mathrm{Y},$$

il est aisé de prouver qu'on peut ramener tous les termes de l'expression précédente à la variabilité des seules coordonnées X, Y, en substituant au lieu de $d\mathrm{Z}$, $\mathrm{P}\,d\mathrm{X}$ dans le produit $d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$, et $\mathrm{Q}\,d\mathrm{Y}$ dans le produit $d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}$; d'où l'on aura la transformée

$$\int \left(\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{X}} + \frac{d\mathrm{M}}{d\mathrm{Y}} + \frac{d\mathrm{N}}{d\mathrm{Z}}\right)(x\mathrm{P} + y\mathrm{Q} + z)\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}$$

qu'il faudra maintenant intégrer en faisant varier X et Y l'un après l'autre. Mais x, y, z dénotant les espaces parcourus par une même particule suivant les directions des trois coordonnées X, Y, Z, il n'est pas difficile de voir que $\frac{x\mathrm{P} + y\mathrm{Q} + z}{\sqrt{1 + \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2}}$ dénotera l'espace que cette même particule décrira suivant une direction perpendiculaire à la surface dont l'équation est

$$d\mathrm{Z} = \mathrm{P}\,d\mathrm{X} + \mathrm{Q}\,d\mathrm{Y};$$

or, il est clair que dans notre cas cet espace doit être nul, puisque le mouvement est entièrement arrêté suivant la direction perpendiculaire à chaque point de la paroi immobile; donc on aura

$$\frac{x\mathrm{P} + y\mathrm{Q} + z}{\sqrt{1 + \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2}} = 0,$$

et par conséquent

$$x\mathrm{P} + y\mathrm{Q} + z = 0.$$

Joignant ensemble les autres formules qui ont le signe +, on aura l'expression

$$\int \left(\frac{dx}{d\mathrm{X}} + \frac{dy}{d\mathrm{Y}} + \frac{dz}{d\mathrm{Z}}\right)(\mathrm{L}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z} + \mathrm{M}\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z} + \mathrm{N}\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y})$$

qui doit aussi être égale à zéro, en tant qu'elle se rapporte à chacun des points de la surface exprimée par

$$d\mathrm{Z} = \mathrm{P}\,d\mathrm{X} + \mathrm{Q}\,d\mathrm{Y}.$$

Or, le facteur

$$\mathrm{L}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z} + \mathrm{M}\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z} + \mathrm{N}\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}$$

se réduira, de la même façon que ci-dessus, à

$$(\mathrm{LP} + \mathrm{MQ} + \mathrm{N})\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y},$$

d'où l'on tirera l'équation

$$\mathrm{LP} + \mathrm{MQ} + \mathrm{N} = 0,$$

qui devra avoir lieu pour tous les points de la surface proposée; et cette équation renfermera en général les conditions que doivent avoir les valeurs de L, M, N (45).

Supposons maintenant, pour simplifier les choses,

$$\mathrm{P} = 0, \quad \mathrm{Q} = 0,$$

de sorte que la paroi immobile soit un plan perpendiculaire à l'axe des Z; l'équation trouvée se réduira à

$$\mathrm{N} = 0,$$

ou bien, si l'on veut que le plan donné soit perpendiculaire à l'axe des X, et que sa distance au point de l'origine des abscisses soit égale à a, on aura

$$\mathrm{L} = 0,$$

X étant égal à a, et Y et Z étant quelconques; ce qui s'exprimera à notre manière par

$$L^{(a, Y, Z)} = o.$$

Or, si dans l'expression générale $L^{(X, Y, Z)}$ on suppose que X surpasse a d'une quantité infiniment petite u, de sorte que $X = a + u$, on aura à très-peu près

$$L^{(X, Y, Z)} = L^{(a+u, Y, Z)} = L^{(a, Y, Z)} + u\frac{dL^{(a, Y, Z)}}{dX},$$

ou

$$L^{(a+u, Y, Z)} = u\frac{dL^{(a, Y, Z)}}{dX};$$

de même, si l'on suppose u négative, on aura

$$L^{(a-u, Y, Z)} = -u\frac{dL^{(a, Y, Z)}}{dX},$$

d'où je tire

$$L^{(a+u, Y, Z)} = -L^{(a-u, Y, Z)},$$

et remettant pour u sa valeur $X - a$,

$$L^{(X, Y, Z)} = -L^{(2a-X, Y, Z)}.$$

Maintenant, comme les fonctions $M^{(X, Y, Z)}$, $N^{(X, Y, Z)}$ doivent avoir un certain rapport avec la fonction $L^{(X, Y, Z)}$, en vertu des équations (A), (B), (C), il est clair que la même condition

$$L^{(a, Y, Z)} = o$$

servira aussi à trouver les transformations qui conviennent aux fonctions M et N, lorsque X est supposé plus grand que a; pour y parvenir, je reprends les équations mentionnées, et comparant la première, différentiée

suivant la variable Y et divisée par $d\mathrm{Y}$, à la seconde, différentiée suivant la variable X et divisée par $d\mathrm{X}$, je trouve

$$\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}} = \frac{d\mathrm{M}}{d\mathrm{X}};$$

et de même, comparant la première, différentiée suivant Z et divisée par $d\mathrm{Z}$, à la troisième, différentiée suivant X et divisée par $d\mathrm{X}$, j'ai

$$\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}} = \frac{d\mathrm{N}}{d\mathrm{X}};$$

posons dans ces deux équations $\mathrm{X} = a$, de sorte que

$$\frac{d\mathrm{L}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}}{d\mathrm{Y}} = \frac{d\mathrm{M}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}}{d\mathrm{X}},$$
$$\frac{d\mathrm{L}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}}{d\mathrm{Z}} = \frac{d\mathrm{N}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}}{d\mathrm{X}};$$

or, ayant en général

$$\mathrm{L}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})} = 0,$$

on aura aussi

$$\frac{d\mathrm{L}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}}{d\mathrm{Y}} = 0, \quad \frac{d\mathrm{L}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}}{d\mathrm{Z}} = 0;$$

donc

$$\frac{d\mathrm{M}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}}{d\mathrm{X}} = 0, \quad \frac{d\mathrm{N}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}}{d\mathrm{X}} = 0.$$

Supposons maintenant $\mathrm{X} = a + u$ dans les fonctions indéterminées $\mathrm{M}^{(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})}$, $\mathrm{N}^{(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})}$ et développons-les en poussant les séries jusqu'aux infiniment petits du second ordre; on aura

$$\mathrm{M}^{(a+u,\mathrm{Y},\mathrm{Z})} = \mathrm{M}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})} + u\frac{d\mathrm{M}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}}{d\mathrm{X}} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2\mathrm{M}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}}{d\mathrm{X}^2},$$
$$\mathrm{N}^{(a+u,\mathrm{Y},\mathrm{Z})} = \mathrm{N}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})} + u\frac{d\mathrm{N}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}}{d\mathrm{X}} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2\mathrm{N}^{(a,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}}{d\mathrm{X}^2},$$

et de même, en prenant u négativement,

$$\mathrm{M}^{(a-u,\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})} = \mathrm{M}^{(a,\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})} - u\frac{d\mathrm{M}^{(a,\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}}{d\mathrm{X}} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2\mathrm{M}^{(a,\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}}{d\mathrm{X}^2},$$

$$\mathrm{N}^{(a-u,\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})} = \mathrm{N}^{(a,\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})} - u\frac{d\mathrm{N}^{(a,\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}}{d\mathrm{X}} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2\mathrm{N}^{(a,\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}}{d\mathrm{X}^2};$$

d'où, à cause de l'hypothèse

$$\frac{d\mathrm{M}^{(a,\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}}{d\mathrm{X}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\mathrm{N}^{(a,\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}}{d\mathrm{X}} = 0,$$

on déduit

$$\mathrm{M}^{(a+u,\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})} = \mathrm{M}^{(a-u,\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})},$$

$$\mathrm{N}^{(a+u,\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})} = \mathrm{N}^{(a-u,\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})},$$

ou bien, restituant pour u sa valeur $\mathrm{X} - a$,

$$\mathrm{M}^{(\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})} = \mathrm{M}^{(2a-\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})},$$

$$\mathrm{N}^{(\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})} = \mathrm{N}^{(2a-\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}.$$

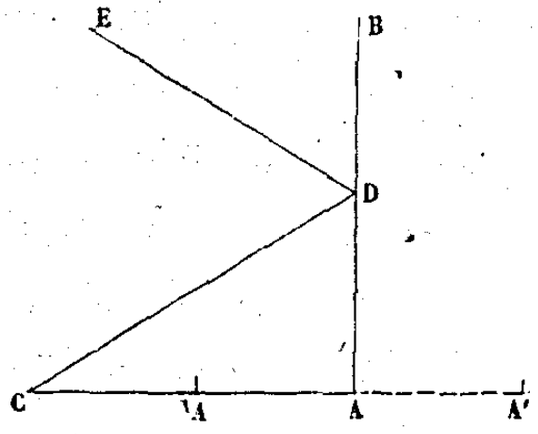
Soient reprises maintenant les formules (D), (E), et supposant que X surpasse a d'une quantité infiniment petite, on commencera par changer l'expression $\mathrm{L}^{(\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}$ des termes $x\mathrm{L}$, $x'\mathrm{L}$, ou, ce qui est la même chose, des termes $x\mathrm{L}^{(\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}$, $x'\mathrm{L}^{(\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}$ en $-\mathrm{L}^{(2a-\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}$, lorsque X deviendra plus grand que a, et l'on aura par conséquent ces termes transformés en $-x\mathrm{L}^{(2a-\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}$, $-x'\mathrm{L}^{(2a-\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}$, sur lesquels on opérera comme auparavant pour en tirer les valeurs de x et x'. Or, puisque les coordonnées qui répondent à x et x' sont les mêmes que celles qui entrent dans l'expression de L, il est clair que, sans autre opération, il suffira de changer la valeur X de l'abscisse de x et x' en $2a - \mathrm{X}$, en rendant en même temps ces quantités x et x' négatives. On changera de même les expressions $\mathrm{M}^{(\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}$, $\mathrm{N}^{(\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}$ qui entrent dans les termes $\mathrm{M}y$, $\mathrm{M}y'$, et $\mathrm{N}z$, $\mathrm{N}z'$ des mêmes formules (D), (E), en $\mathrm{M}^{(2a-\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}$ et $\mathrm{N}^{(2a-\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z})}$, et, par un raisonnement semblable au précédent, on trouvera que l'abscisse X,

en tant qu'elle répond aux autres quantités y, y', z, z', deviendra de même $2a - X$, mais sans que la valeur de ces quantités soit changée.

On conclura donc pour notre cas que, lorsque le temps t sera tel que l'abscisse $[X] + pt$ surpassera a, il faudra mettre à sa place l'abscisse $2a - [X] - pt$ et faire en même temps l'espace x négatif, laissant les mêmes les deux coordonnées $[Y] + pt$ et $[Z] + qt$ et les deux autres espaces y, z.

Voici maintenant le changement qui en résultera dans les rayons sonores. Que CA (*fig.* 15) représente l'axe des X qui est le même que

Fig. 15.



celui des [X] et qui rencontre perpendiculairement le plan inébranlable AB; que C soit un centre de rayons sonores déterminé par les trois coordonnées [X], [Y], [Z], et que CD soit un de ces rayons quelconque déterminé par les coordonnées $[X] + pt$, $[Y] + qt$, $[Z] + rt$. Supposons maintenant que t soit augmenté en sorte que $[X] + pt$ surpasse a, c'est-à-dire que pt surpasse CA, et soit par exemple égal à CA′, le point A′ tombant derrière l'obstacle immobile AB; il faudra, suivant ce que nous venons d'enseigner, changer la valeur de $[X] + pt$ en $2a - [X] - pt$, ce qui donnera, en supposant $CA = \alpha$ et par conséquent $a = [X] + \alpha$,

$$[X] + 2\alpha - pt \quad \text{au lieu de} \quad [X] + pt;$$

ou bien, posant $AA' = \theta$ et par conséquent $pt = \alpha + \theta$,

$$[X] + \alpha - \theta \quad \text{au lieu de} \quad [X] + pt, \quad \text{savoir de} \quad [X] + \alpha + \theta;$$

d'où l'on voit que le point A′ sera transporté en 'A, les distances AA′ et A'A au plan AB étant égales de part et d'autre; donc, comme les deux

autres coordonnées perpendiculaires à l'axe CA demeurent les mêmes, le rayon CD sera continué du côté CA dans la direction de la droite DE, dont la position devra être telle qu'elle se trouve dans le plan des deux lignes CD, CA, et qu'elle fasse de plus avec le plan BA l'angle BDE égal à l'angle CDA. Le rayon CD sera donc réfléchi par le plan BA, en sorte que l'angle de réflexion soit égal à l'angle d'incidence, tout de même qu'il arrive à un corps parfaitement élastique.

Voilà donc la réflexion du son déduite de ses vrais principes et prouvée d'une manière rigoureuse et exacte, ce que personne n'avait encore fait (*Rech. préc.*, LXI).

Au reste, si nous n'avons considéré qu'une surface plane, ce n'a été que pour rendre notre calcul moins embarrassant; car il n'aurait pas été difficile de l'appliquer aussi à des surfaces courbes d'une nature quelconque; mais, comme les rayons sonores se multiplient continuellement et se répandent en tout sens, comme on l'a fait voir (**50**), il serait assez inutile de déterminer les lois de la réflexion de chaque rayon à la rencontre d'un obstacle de figure quelconque. Il suffit, pour l'explication des échos, d'avoir prouvé que cette réflexion doit toujours avoir lieu, lorsque l'air est appuyé sur un obstacle quelconque inébranlable.

53. Scolie I. — Il est visible que, dans les formules (P), (Q), (R), (P′), (Q′), (R′), on peut regarder les expressions $(x)^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)},\ldots$ comme des fonctions indéterminées de $X+pt$, $Y+qt$, $Z+rt$, de sorte qu'en substituant pour (x), (x'), (y), (y'), (z), (z') des fonctions de différente nature et composées des mêmes variables qui constituent l'exposant de chacune des quantités (x), (x'),..., on aura les valeurs de x, x', y,..., données en fonctions indéterminées, ainsi que M. d'Alembert l'a pratiqué le premier dans la théorie des vibrations des cordes et ailleurs.

Au reste, pour démontrer que ces valeurs de x, y, z satisfont aux trois équations du n° **10**, il faudra nécessairement regarder t comme infiniment petit, et développer les fonctions indéterminées comme on l'a pratiqué à l'égard des fonctions L, M, N (**47**), en négligeant tous les termes

qui seront multipliés par des puissances de t plus hautes que la quatrième.

54. Scolie II. — Si l'on voulait se borner à chercher les valeurs de x, y, z par les séries, on y parviendrait fort aisément par les principes du n° 47; car, développant en suites infinies les expressions $\cos(t\sqrt{-ck})$ et $\sin(t\sqrt{-ck})$ de l'équation (D), et faisant ensuite évanouir toutes les puissances de k par les transformations enseignées dans le même numéro, on obtiendra une équation qui ne renfermera que les fonctions inconnues L, M, N avec leurs différences; or ces différences pourront toujours se réduire aux quantités finies L, M, N par les opérations connues des intégrations par parties; car, soit par exemple

$$\frac{1}{2}t^2c\int(x)\frac{d^2\mathrm{L}}{d\mathrm{X}^2}d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,dZ$$

un terme quelconque de l'équation (D) transformée comme nous venons de le dire, ce terme se réduira, en négligeant toujours les intégrales à deux seules changeantes, à

$$\frac{1}{2}t^2c\int\frac{d^2(x)}{d\mathrm{X}^2}\mathrm{L}\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,dZ,$$

et généralement il suffira d'ôter les différentiations aux quantités L, M, N, et de les appliquer aux quantités (x), (y), (z), (x'), (y'), (z'), par lesquelles celles-là sont multipliées. Cela fait, comme l'équation ne renfermera plus que les fonctions finies L, M, N qui, à cause de la quantité k qu'elles contiennent, ne doivent point entrer dans les valeurs de x, y, z, on trouvera ces valeurs en comparant ensemble tous les termes qui seront multipliés séparément par L, M, N. On aura donc par là

$$x=(x)+t(x')+\frac{1}{2}t^2c\left[\frac{d^2(x)}{d\mathrm{X}^2}+\frac{d^2(y)}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}}+\frac{d^2(z)}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}}\right]+\ldots,$$

$$y=(y)+t(y')+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z=(z)+t(z')+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où les quantités (x), (y), (z), (x'), (y'), (z') devront être regardées

comme des fonctions indéterminées des trois variables X, Y, Z, pour qu'on puisse avoir les valeurs des différences $\frac{d^2(x)}{dX^2}$, $\frac{d^2(y)}{dX\,dY}$, ... Or, dans le cas où t est supposé infiniment petit, si l'on néglige les termes multipliés par des puissances de t plus hautes que la quatrième, et qu'on pratique ensuite sur les fonctions (x), (y),... des réductions analogues à celles qui ont été pratiquées sur les fonctions L, M, N dans le calcul du n° 47, il sera aisé de réduire les expressions de x, y, z à des fonctions de $X + pt$, $Y + qt$, $Z + rt$, comme dans le Scolie précédent, ce qui sera une preuve de la justesse de nos calculs.

Au reste la méthode que nous n'avons fait qu'indiquer dans ce Scolie est générale et peut aussi être appliquée à la résolution d'une infinité d'autres équations de la nature de celles que nous avons examinées dans tout le cours des *Recherches précédentes*. Mais on trouvera toujours des séries composées de puissances croissantes de t et qui par conséquent ne seront bonnes que tant que t aura des valeurs fort petites.

§ III. — *Conjectures sur la loi de l'élasticité des particules de l'air.*

55. Nous avons vu que la vitesse du son, suivant la théorie, est exprimée par

$$\sqrt{c} = \frac{\sqrt{2hE}}{T^2D},$$

et nous avons vu aussi qu'elle diffère de la véritable d'environ 163 pieds par seconde, quantité qui ne peut raisonnablement être négligée; comment donc concilier sur ce point la théorie et l'expérience?

L'expression $\frac{\sqrt{2hE}}{T^2D}$ est fondée sur l'hypothèse ordinaire que l'élasticité des parties de l'air soit exactement proportionnelle à leur densité; mais ne pourrait-on pas supposer que l'élasticité variât dans une autre raison peu différente de celle de la densité simple. Si on voulait en géné-

ral supposer E proportionnel à $\varphi(D)$, comme dans le n° 11, il n'y aurait qu'à mettre dans nos calculs $E\varphi'(D)$ au lieu de E, tout le reste demeurant le même; ce qui ne produirait d'autre différence dans les résultats, sinon que la vitesse du son serait augmentée dans la raison de $\sqrt{\varphi'(D)}$ à 1.

Soit l'élasticité proportionnelle à une puissance quelconque m de la densité, ce qui paraît le cas le plus naturel; on aura

$$\varphi(D) = D^m \quad \text{et} \quad \varphi'(D) = mD^{m-1};$$

d'où, en posant $D = 1$, on tire pour la vitesse du son $\sqrt{m}\sqrt{c}$ ou $979\sqrt{m}$ pieds par seconde; par conséquent, en prenant 1142 pieds par seconde pour l'expression véritable de cette vitesse, il faudra que

$$979\sqrt{m} = 1142,$$

ce qui donnera

$$\sqrt{m} = \frac{1142}{979},$$

et en fractions décimales

$$m = 1,36,$$

ou à très-peu près

$$m = 1 + \frac{1}{3}.$$

Or, comme l'élasticité se mesure par le poids comprimant, il est clair que si cette hypothèse a lieu dans la nature, il faudra que la densité devenant double, triple, quadruple,..., les poids comprimants croissent comme les nombres $2\sqrt[3]{2}$, $3\sqrt[3]{3}$, $4\sqrt[3]{4}$,..., qui surpassent les nombres de la progression arithméthique 2, 3, 4,..., d'environ 0,519, 1,327, 2,350,....

Ces différences paraissent à la vérité trop fortes pour qu'on puisse raisonnablement supposer qu'elles aient échappé aux savants Physiciens qui ont déterminé par l'expérience les lois de la compression de l'air; aussi je ne donne l'hypothèse de l'élasticité proportionnelle à $D^{1+\frac{1}{3}}$ que comme une légère conjecture, et je me contenterai seulement de faire observer que l'expérience même paraît jusqu'à un certain point favo-

rable à la supposition que l'élasticité croisse dans une raison plus grande que la densité, puisqu'on sait que de très-habiles Physiciens ont trouvé que, lorsque la densité est devenue quadruple de la naturelle, l'air ne se comprime plus que suivant une proportion moindre que celle des poids.

56. Au reste, il est clair que si l'hypothèse $P = D$, et en général $P = D^m$, avait exactement lieu dans la nature, la densité d'une particule d'air deviendrait nulle lorsque le poids comprimant serait nul, ce qui paraît renfermer quelque espèce de contradiction; si donc, pour éviter un pareil inconvénient, on suppose que le poids comprimant soit proportionnel à quelque autre fonction φ de la densité, on satisfera tout à la fois à la théorie de la propagation du son et aux expériences de la compression de l'air, si on peut déterminer φ en sorte que

$$\varphi'(D) = 1 + \frac{1}{3}$$

(en y mettant $D = 1$), et qu'en même temps $\varphi(D)$ soit assez sensiblement proportionnel à D, tant que D est contenu entre les limites 1 et 4.

CHAPITRE VI.

RÉFLEXIONS SUR LA THÉORIE DES INSTRUMENTS A VENT.

57. Dans le n° LII des *Recherches précédentes*, j'ai réduit la théorie des flûtes à celle des oscillations d'une fibre élastique d'air dont les deux extrémités soient fixes, comme dans les cordes sonores; mais cette supposition n'est pas exacte, car on sait que l'air renfermé dans le tuyau communique toujours avec l'air extérieur, ou de deux côtés comme dans toutes les espèces de flûtes, ou d'un côté seulement comme dans les trompettes, les cors de chasse, et dans les tuyaux d'orgue bouchés; je vais donc maintenant avoir égard à ces circonstances.

Considérons d'abord des flûtes de forme exactement cylindrique, et supposons que la colonne d'air qui y est renfermée soit soutenue, à ses deux extrémités, par une force égale au ressort naturel de l'air extérieur.

Dénotant par z les excursions longitudinales de chaque partie d'air, on aura l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dx^2},$$

d'où il sera aisé de tirer, par le Problème I ci-dessus, les mêmes résultats que dans le numéro cité, en supposant, comme on l'a pratiqué partout ailleurs, z nul lorsque $x = 0$ et $x = a$, a étant ici la longueur entière de la flûte; mais, dans le cas que nous nous proposons d'examiner, ce n'est plus cette condition qui doit avoir lieu; il faut que l'élasticité de la première et de la dernière particule soit la même que l'élasticité naturelle de l'atmosphère, savoir, que

$$c\left(1 - \frac{dz}{dx}\right) = c \quad \text{ou bien} \quad \frac{dz}{dx} = 0,$$

lorsque $x = 0$ et $x = a$. Or, puisque dans ces deux points les deux termes $\frac{dz}{dx}\mathrm{M}$ et $z\frac{d\mathrm{M}}{dx}$ doivent disparaître d'eux-mêmes, par la nature de notre méthode (*voyez* Problème I), il faudra que la différentielle $\frac{d\mathrm{M}}{dx}$ y devienne nulle; c'est pourquoi l'on aura

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}\cos\left(x\sqrt{-k}\right) \quad \text{et} \quad \sqrt{-k} = \frac{\nu\pi}{2a},$$

et par conséquent les équations

$$\int z\cos\left(x\sqrt{-k}\right)dx = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{Z}\cos\left(x\sqrt{-k}\right)dx + \frac{\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)}{\sqrt{-ck}}\int \mathrm{U}\cos\left(x\sqrt{-k}\right)dx,$$

$$\int u\cos\left(x\sqrt{-k}\right)dx = \cos\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{U}\cos\left(x\sqrt{-k}\right)dx - \sqrt{-ck}\sin\left(t\sqrt{-ck}\right)\int \mathrm{Z}\cos\left(x\sqrt{-k}\right)dx.$$

Ces équations fourniront une construction à peu près semblable à celle du n° 7, mais on pourra s'en passer lorsqu'il ne sera question que de déterminer la durée commune des oscillations des particules de l'air; car il suffira pour cela de considérer que les équations trouvées demeurent invariables lorsqu'on augmente la valeur de t d'un multiple quelconque de $\frac{2a}{\sqrt{c}}$; d'où il s'ensuit qu'au bout de chaque intervalle de temps $\frac{2a}{\sqrt{c}}$, les valeurs de z et de u reviendront les mêmes, et que par conséquent toutes les particules reprendront aussi la même situation et le même mouvement; ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans l'endroit cité des *Recherches précédentes*, quoique d'après une autre hypothèse.

Cela aura lieu en général pour toutes les valeurs possibles de ν; mais si on suppose que les valeurs de ν soient renfermées dans la formule particulière

$$\nu = m\mu,$$

m étant un nombre entier, positif et déterminé, et μ un nombre quelconque entier, il est évident, par la nature des sinus et cosinus, que les valeurs de z et de u reviendront les mêmes après chaque intervalle de temps égal à $\frac{2a}{m\sqrt{c}}$, et qu'ainsi la durée des oscillations se réduira à la moitié, au tiers, au quart,..., selon que m sera exprimé par 2, 3, 4,....

Or, dans ce cas, il est clair que si l'on décrit une courbe où, les abscisses étant x, les ordonnées soient $\cos(x\sqrt{-k})$, cette courbe aura autant de ventres égaux et semblables qu'il y a d'unités dans le nombre m; par conséquent les quantités Z, U, z, u, qui sont multipliées par chacune de ces ordonnées, devront former aussi des courbes de pareille forme; autrement le Problème demeurerait indéterminé ou plutôt indéterminable, puisqu'on pourrait trouver pour z et u plusieurs valeurs différentes, ce qui serait absurde.

On voit par là que ce cas répond exactement à celui que nous avons examiné dans le n° XLIX des *Recherches précédentes*, et qu'il contient par conséquent l'explication des sons harmoniques.

58. Supposons maintenant que la flûte soit bouchée à l'extrémité opposée à l'embouchure; puisque alors $z = 0$, x étant égal à a, le terme $z\frac{d\mathrm{M}}{dx}$ disparaîtra de lui-même et le terme restant $\mathrm{M}\frac{dz}{dx}$ donnera

$$\mathrm{M} = 0,$$

d'où l'on tirera

$$\cos(a\sqrt{-k}) = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{-k} = (2\nu + 1)\frac{\varpi}{4a},$$

ν marquant un nombre quelconque entier positif ou négatif.

Cette valeur substituée dans les deux équations du numéro précédent, on verra aisément que les termes $\cos(t\sqrt{-ck})$ et $\sin(t\sqrt{-ck})$ ne reprendront les mêmes valeurs que lorsque t sera augmenté de $\frac{4a}{\sqrt{c}}$; ce qui donnera la durée des oscillations double de celle qu'on a trouvée dans le cas précédent.

Ce fait est confirmé par l'expérience, par laquelle on trouve en effet que les tuyaux bouchés donnent justement l'octave du son qu'ils donneraient étant ouverts. Mais il y a plus : comme la durée des oscillations ne peut s'accourcir, à moins que $2\nu + 1$ ne devienne le produit de deux nombres entiers et par conséquent impairs, il s'ensuit qu'elle ne pourra devenir que le tiers, ou la cinquième partie, ou etc., de la durée naturelle $\frac{4a}{\sqrt{c}}$; d'où il résulte qu'une flûte bouchée, après avoir rendu le son fondamental, ira immédiatement à la douzième, et puis à la dix-septième, etc., sans passer par aucune des octaves intermédiaires.

Voilà l'explication exacte d'un phénomène assez singulier, que M. Daniel Bernoulli a le premier fait remarquer dans l'article III de son *Mémoire sur les vibrations des cordes* (Académie de Berlin, 1753), mais dont ni lui ni aucun autre, que je sache, n'avaient encore jusqu'ici rendu raison.

59. Lorsque les flûtes n'ont pas une forme cylindrique, ou en général lorsqu'il s'agit des trompettes et des cors de chasse, il semble qu'on pourrait tirer leur théorie des calculs du n° 30; cependant voici une difficulté.

On sait que ces instruments, quelque figure qu'ils aient, donnent toujours, par une simple variation d'embouchure, tous les sons qui répondent aux nombres 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ..., et il n'est pas difficile de voir, en appliquant aux formules générales du n° 28 les remarques des numéros précédents, que cela demande nécessairement que les valeurs de k soient 1, 2, 3, 4,..., comme dans les flûtes cylindriques. Or je ne vois point comment l'expression de M du n° 27 pourrait fournir de telles valeurs pour k, à moins que les coefficients alternatifs A, C,... ou B, D,... ne fussent nuls, ainsi qu'on l'a déjà remarqué dans le n° 32.

Au reste, quels que soient les mouvements des particules de l'air dans les instruments à vent, ils seront toujours renfermés dans les trois équations générales du n° 10, dont nous avons donné une construction approchée dans le Chapitre précédent. Il est vrai que cette construction ne nous apprendra rien sur la nature des vibrations des particules, mais les équations (D) et (E) font connaître que, pour que ces vibrations deviennent synchrones, il faut que toutes les valeurs de $\sqrt{-k}$ soient commensurables entre elles, afin qu'il y ait un certain intervalle de temps après lequel, les fonctions $\sin(t\sqrt{-ck})$ et $\cos(t\sqrt{-ck})$ reprenant toujours les mêmes valeurs, les équations mentionnées redeviennent aussi exactement les mêmes.

Cette condition cependant n'est point nécessaire, si l'on suppose que les équations dont il s'agit soient vérifiées indépendamment des quantités $\sin(t\sqrt{-ck})$ et $\cos(t\sqrt{-ck})$, ce qui a lieu lorsque chacune des intégrales

$$\int (x\,\mathrm{L} + y\,\mathrm{M} + z\,\mathrm{N})\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z},$$

$$\int (x'\,\mathrm{L} + y'\,\mathrm{M} + z'\,\mathrm{N})\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z},$$

$$\int [(x)\,\mathrm{L} + (y)\,\mathrm{M} + (z)\,\mathrm{N}]\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z},$$

$$\int [(x')\,\mathrm{L} + (y')\,\mathrm{M} + (z')\,\mathrm{N}]\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$$

s'évanouit d'elle-même. Il ne sera donc pas inutile d'examiner ici quelles

doivent être les valeurs de x, y, z, x', y', z',..., pour que ces dernières conditions aient lieu.

60. Pour cela, soient substituées au lieu de L, M, N leurs valeurs tirées des équations de condition (A), (B), (C) du n° 45, et faisant évanouir par des intégrations par parties les différences de L, M, N, on aura d'abord, en négligeant les intégrales à deux seules changeantes qui sont nulles par la nature même des quantités x, y, z et des fonctions L, M, N, la transformée suivante

$$\begin{aligned}\int &(x\mathrm{L}+y\mathrm{M}+z\mathrm{N})\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}\\ =\frac{1}{k}\int\Big[&\left(\frac{d^2x}{d\mathrm{X}^2}+\frac{d^2y}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}}+\frac{d^2z}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}}\right)\mathrm{L}\\ &+\left(\frac{d^2y}{d\mathrm{Y}^2}+\frac{d^2x}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{X}}+\frac{d^2z}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}\right)\mathrm{M}\\ &+\left(\frac{d^2z}{d\mathrm{Z}^2}+\frac{d^2x}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}}+\frac{d^2y}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{Y}}\right)\mathrm{N}\Big]\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z},\end{aligned}$$

où l'on voit que les quantités multipliées par L, M, N sont les mêmes que celles qui composent les seconds membres des équations différentielles proposées, ce qui ne pourra jamais être autrement, quelque forme que puissent avoir ces équations, puisqu'il est clair que les nouvelles intégrations par parties dont on fait usage ici ne servent qu'à défaire ce qu'on avait fait par les premières.

On aura donc, en posant α pour une constante quelconque,

$$\begin{aligned}\int\Big[&\left(\alpha x+\frac{d^2x}{d\mathrm{X}^2}+\frac{d^2y}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}}+\frac{d^2z}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}}\right)\mathrm{L}\\ &+\left(\alpha y+\frac{d^2y}{d\mathrm{Y}^2}+\frac{d^2z}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}+\frac{d^2x}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{X}}\right)\mathrm{M}\\ &+\left(\alpha z+\frac{d^2z}{d\mathrm{Z}^2}+\frac{d^2x}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}}+\frac{d^2y}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{Y}}\right)\mathrm{N}\Big]\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}\\ =(\alpha+k)\int&(x\mathrm{L}+y\mathrm{M}+z\mathrm{N})\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z},\end{aligned}$$

et par conséquent, tant que α ne sera pas égal à $-k$, on satisfera à

l'équation

$$\int (x\mathrm{L} + y\mathrm{M} + z\mathrm{N})\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z} = 0,$$

en faisant séparément

$$(a) \qquad \alpha x + \frac{d^2x}{d\mathrm{X}^2} + \frac{d^2y}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}} + \frac{d^2z}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}} = 0,$$

$$(b) \qquad \alpha y + \frac{d^2y}{d\mathrm{Y}^2} + \frac{d^2z}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}} + \frac{d^2x}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{X}} = 0,$$

$$(c) \qquad \alpha z + \frac{d^2z}{d\mathrm{Z}^2} + \frac{d^2z}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}} + \frac{d^2y}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}} = 0,$$

d'où l'on tirera les valeurs de x, y, z qu'on pourra exprimer généralement ainsi :

$$x = \mathrm{A}\,\varphi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$
$$y = \mathrm{A}\,\psi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$
$$z = \mathrm{A}\,\chi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$

les lettres φ, ψ, χ marquant des fonctions variables données.

La constante A peut être quelconque et même une fonction du temps t, qui est ici regardé comme constant, mais les autres constantes qui se trouveront dans les fonctions φ, ψ, χ devront être déterminées par les conditions qu'on supposera aux quantités x, y, z, conditions qui dépendront dans le cas présent de la figure du tuyau qui renferme les particules mobiles de l'air.

A l'égard de la constante α, elle sera susceptible d'une infinité de valeurs qui seront les mêmes précisément que celle de la quantité k, mais prises négativement; ce qu'on peut démontrer en général de la manière suivante. Les équations trouvées (a), (b), (c), comparées avec les équations fondamentales du n° **10**, donnent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c\alpha x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -c\alpha y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -c\alpha z;$$

d'où l'on tire l'équation

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -c\alpha s,$$

qui, comparée avec l'équation en s trouvée dans le n° 45,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = kcs,$$

donne

$$\alpha = -k.$$

En raisonnant et opérant de même sur les autres formules intégrales qui doivent aussi être égales à zéro, on trouvera pour x', y', z', comme aussi pour (x), (y), (z) et (x'), (y'), (z'), des valeurs qui ne différeront de celles de x, y, z que dans la constante arbitraire par laquelle les fonctions φ, ψ, χ peuvent être multipliées; on aura ainsi

$$\begin{aligned}
x' &= \mathrm{B}\varphi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}), \quad & y' &= \mathrm{B}\psi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}), \quad & z' &= \mathrm{B}\chi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z});\\
(x) &= \mathrm{E}\varphi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}), \quad & (y) &= \mathrm{E}\psi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}), \quad & (z) &= \mathrm{E}\chi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z});\\
(x') &= \mathrm{F}\varphi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}), \quad & (y') &= \mathrm{F}\psi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}), \quad & (z') &= \mathrm{F}\chi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}).
\end{aligned}$$

Maintenant, il faut observer que comme les équations (a), (b), (c) ne rendent l'intégrale proposée égale à zéro que tant que α n'est pas égal à $-k$, et que d'ailleurs les équations (D) et (E) du n° 45 doivent avoir lieu en général pour toutes les valeurs de k, il restera encore à vérifier ces équations dans le cas de $k = -\alpha$; or, substituant dans l'équation (D) les valeurs trouvées ci-dessus de x, y,..., il viendra

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}\int [\mathrm{L}\varphi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{M}\psi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{N}\chi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})]\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z}\\
&= \left[\mathrm{E}\cos(t\sqrt{c\alpha}) + \frac{\mathrm{F}\sin(t\sqrt{c\alpha})}{\sqrt{c\alpha}}\right]\\
&\quad \times \int [\mathrm{L}\varphi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{M}\psi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{N}\chi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})]\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z};
\end{aligned}$$

ce qui donnera

$$\mathrm{A} = \mathrm{E}\cos(t\sqrt{c\alpha}) + \frac{\mathrm{F}\sin(t\sqrt{c\alpha})}{\sqrt{c\alpha}}.$$

On aura de même, par l'équation (E),

$$\mathrm{B} = \mathrm{F}\cos(t\sqrt{c\alpha}) - \mathrm{E}\sqrt{c\alpha}\sin(t\sqrt{c\alpha});$$

donc

$$x=\left[\mathrm{E}\cos\left(t\sqrt{c\alpha}\right)+\frac{\mathrm{F}\sin\left(t\sqrt{c\alpha}\right)}{\sqrt{c\alpha}}\right]\varphi(\alpha,\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}),$$

$$y=\left[\mathrm{E}\cos\left(t\sqrt{c\alpha}\right)+\frac{\mathrm{F}\sin\left(t\sqrt{c\alpha}\right)}{\sqrt{c\alpha}}\right]\psi(\alpha,\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}),$$

$$z=\left[\mathrm{E}\cos\left(t\sqrt{c\alpha}\right)+\frac{\mathrm{F}\sin\left(t\sqrt{c\alpha}\right)}{\sqrt{c\alpha}}\right]\chi(\alpha,\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z});$$

$$x'=\left[\mathrm{F}\cos\left(t\sqrt{c\alpha}\right)-\mathrm{E}\sqrt{c\alpha}\sin\left(t\sqrt{c\alpha}\right)\right]\varphi(\alpha,\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}),$$

$$y'=\left[\mathrm{F}\cos\left(t\sqrt{c\alpha}\right)-\mathrm{E}\sqrt{c\alpha}\sin\left(t\sqrt{c\alpha}\right)\right]\psi(\alpha,\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}),$$

$$z'=\left[\mathrm{F}\cos\left(t\sqrt{c\alpha}\right)-\mathrm{E}\sqrt{c\alpha}\sin\left(t\sqrt{c\alpha}\right)\right]\chi(\alpha,\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}).$$

Il n'est pas difficile de voir ici que les vibrations des particules seront toutes synchrones à celles d'un pendule simple dont la longueur serait $\frac{2h}{\alpha\mathrm{T}^2c}=\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{E}}$; par conséquent, quelles que soient les valeurs de α, le fluide pourra toujours faire des oscillations isochrones d'autant d'espèces qu'il y aura de différentes valeurs de α. Au reste, ce cas est celui de l'isochronisme ordinaire, où les forces accélératrices sont proportionnelles aux espaces à parcourir.

61. Supposons maintenant

$$\alpha x+\frac{d^2x}{d\mathrm{X}^2}+\frac{d^2y}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}}+\frac{d^2z}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}}=p,$$

$$\alpha y+\frac{d^2y}{d\mathrm{Y}^2}+\frac{d^2z}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}+\frac{d^2x}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{X}}=q,$$

$$\alpha z+\frac{d^2z}{d\mathrm{Z}^2}+\frac{d^2x}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}}+\frac{d^2y}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{Y}}=r,$$

on aura

$$\int(p\mathrm{L}+q\mathrm{M}+r\mathrm{N})\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}=(\alpha+k)\int(x\mathrm{L}+y\mathrm{M}+z\mathrm{N})\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}.$$

Donc, pour que l'intégrale

$$\int(x\mathrm{L}+y\mathrm{M}+z\mathrm{N})\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$$

devienne nulle, il suffira de faire

$$\int(p\mathrm{L}+q\mathrm{M}+r\mathrm{N})\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}=0,$$

sans qu'il soit séparément $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, comme dans les équations (a), (b), (c).

Or, cette dernière formule étant semblable à la formule

$$\int (x\mathrm{L} + y\mathrm{M} + z\mathrm{N})\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z},$$

qui a fourni les équations (a), (b), (c), on trouvera par des procédés pareils les équations suivantes :

$$(p) \qquad \beta p + \frac{d^2 p}{d\mathrm{X}^2} + \frac{d^2 q}{d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}} + \frac{d^2 r}{d\mathrm{X}\, d\mathrm{Z}} = 0,$$

$$(q) \qquad \beta q + \frac{d^2 q}{d\mathrm{Y}^2} + \frac{d^2 r}{d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z}} + \frac{d^2 p}{d\mathrm{Y}\, d\mathrm{X}} = 0,$$

$$(r) \qquad \beta r + \frac{d^2 r}{d\mathrm{Z}^2} + \frac{d^2 p}{d\mathrm{Z}\, d\mathrm{X}} + \frac{d^2 q}{d\mathrm{Z}\, d\mathrm{Y}} = 0;$$

d'où l'on tirera les valeurs de p, q, r, qui, étant substituées ci-dessus, donneront des nouvelles valeurs de x, y, z,....

Il faut remarquer que dans la transformation de la formule

$$\int (p\mathrm{L} + q\mathrm{M} + r\mathrm{N})\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z},$$

on trouvera des intégrales à deux changeantes de même forme que celles qui résultent de la formule

$$\int (x\mathrm{L} + y\mathrm{M} + z\mathrm{N})\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z};$$

il faudra donc les faire évanouir, en supposant aux valeurs de p, q, r les mêmes conditions qu'à celles de x, y, z; d'où il s'ensuit que, comme les équations (p), (q), (r) sont d'ailleurs entièrement semblables aux équations (a), (b), (c), on aura de même

$$p = \mathrm{A}\varphi(\beta, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$
$$q = \mathrm{A}\psi(\beta, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$
$$r = \mathrm{A}\chi(\beta, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$

et de plus que la quantité β aura les mêmes valeurs que la quantité $-k$.

Maintenant, au lieu de substituer ces valeurs de p, q, r dans les équations en x, y, z, je multiplie ces mêmes équations telles qu'elles sont par un coefficient indéterminé H, et j'ajoute chacune d'elles avec sa correspondante d'entre les trois autres (p), (q), (r), ce qui me donne

$$\mathrm{H}\alpha x + (\beta - \mathrm{H})p + \mathrm{H}\frac{d^2x}{d\mathrm{X}^2} + \frac{d^2p}{d\mathrm{X}^2} + \mathrm{H}\frac{d^2y}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}} + \frac{d^2q}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}} + \mathrm{H}\frac{d^2z}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}} + \frac{d^2r}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}} = 0,$$

$$\mathrm{H}\alpha y + (\beta - \mathrm{H})q + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

$$\mathrm{H}\alpha z + (\beta - \mathrm{H})r + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Soit donc fait

$$\beta - \mathrm{H} = \alpha, \quad \text{savoir} \quad \mathrm{H} = \beta - \alpha,$$

et supposant pour abréger

$$\mathrm{H}x + p = p', \quad \mathrm{H}y + q = q', \quad \mathrm{H}z + r = r',$$

on aura

$$\alpha p' + \frac{d^2p'}{d\mathrm{X}^2} + \frac{d^2q'}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}} + \frac{d^2r'}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}} = 0,$$

$$\alpha q' + \frac{d^2q'}{d\mathrm{Y}^2} + \frac{d^2r'}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}} + \frac{d^2p'}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{X}} = 0,$$

$$\alpha r' + \frac{d^2r'}{d\mathrm{Z}^2} + \frac{d^2p'}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}} + \frac{d^2q'}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{Y}} = 0,$$

d'où l'on tirera comme ci-dessus

$$p' = \mathrm{A}\varphi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$
$$q' = \mathrm{A}\psi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$
$$r' = \mathrm{A}\chi(\alpha, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$

A marquant une nouvelle constante arbitraire.

Or, les conditions qui déterminent les constantes de p, q, r étant les mêmes que celles qui déterminent les constantes de x, y, z, par ce qui a été dit ci-dessus, elles seront encore les mêmes pour les constantes de p' q', r', d'où il s'ensuit qu'on aura aussi pour α les mêmes valeurs que pour β, savoir les mêmes que celles de la quantité $-k$.

Maintenant, comme

$$x = \frac{p' - p}{\mathrm{H}}, \quad y = \frac{q' - q}{\mathrm{H}}, \quad z = \frac{r' - r}{\mathrm{H}},$$

on aura, en substituant et prenant deux différentes constantes arbitraires A′, A″, et marquant par α', α'' deux valeurs quelconques de $-k$,

$$x = \mathrm{A}'\varphi(\alpha', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{A}''\varphi(\alpha'', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$
$$y = \mathrm{A}'\psi(\alpha', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{A}''\psi(\alpha'', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$
$$z = \mathrm{A}'\chi(\alpha', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{A}''\chi(\alpha'', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$

formules qui serviront aussi pour les autres variables x', y', z', (x), (y),..., en ne faisant que changer les constantes A′, A″.

Or, pour trouver le rapport entre les quantités x, y, z, x', y', z' et (x), (y), (z), (x'), (y'), (z'), dépendant du temps t, on remarquera qu'il y a ici deux cas où les équations (p), (q), (r) ne remplissent point la condition proposée de

$$\int (x\mathrm{L} + y\mathrm{M} + z\mathrm{N})\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z} = 0,$$

savoir, celui où $k = -\alpha'$ et celui où $k = -\alpha''$. Il faudra donc, dans ces cas, recourir immédiatement aux équations (D) et (E), et substituant au lieu de x, y, z,... les expressions trouvées, faire en sorte que ces équations deviennent possibles lorsque $k = -\alpha'$ et $k = -\alpha''$.

Soient désignées par B′, B″, les constantes qui répondent aux quantités x, y, z, et par E′, E″, F′, F″ celles qui répondent aux quantités (x), (y), (z) et (x'), (y'), (z'), et posons d'abord $k = -\alpha'$, il est clair que la formule

$$\int [\mathrm{L}\varphi(\alpha'', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{M}\psi(\alpha'', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{N}\chi(\alpha'', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})]\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z}$$

évanouira par elle-même, suivant ce qui a été démontré dans le numéro précédent; donc l'équation (D) se réduira comme ci-dessus à

$$\mathrm{A}' \int [\mathrm{L}\varphi(\alpha', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{M}\psi(\alpha', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{N}\chi(\alpha', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})]\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z}$$
$$= \left[\mathrm{E}' \cos\left(t\sqrt{c\alpha'}\right) + \frac{\mathrm{F}' \sin\left(t\sqrt{c\alpha'}\right)}{\sqrt{c\alpha'}}\right]$$
$$\times \int [\mathrm{L}\varphi(\alpha', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{M}\psi(\alpha', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{N}\chi(\alpha', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})]\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z},$$

d'où l'on tire

$$A' = E' \cos\left(t\sqrt{c\alpha'}\right) + \frac{F' \sin\left(t\sqrt{c\alpha'}\right)}{\sqrt{c\alpha'}}.$$

On tirera de même, de l'équation (E),

$$B' = F' \cos\left(t\sqrt{c\alpha'}\right) - E'\sqrt{c\alpha'} \sin\left(t\sqrt{c\alpha'}\right).$$

Après cela, on supposera $k = -\alpha''$ et l'on trouvera par des procédés semblables

$$A'' = E'' \cos\left(t\sqrt{c\alpha''}\right) + \frac{F'' \sin\left(t\sqrt{c\alpha''}\right)}{\sqrt{c\alpha''}},$$

$$B'' = F'' \cos\left(t\sqrt{c\alpha''}\right) - E''\sqrt{c\alpha''} \sin\left(t\sqrt{c\alpha''}\right).$$

On aura donc

$$x = \left[E' \cos\left(t\sqrt{c\alpha'}\right) + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \sin\left(t\sqrt{c\alpha'}\right)\right] \varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ \left[E'' \cos\left(t\sqrt{c\alpha''}\right) + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \sin\left(t\sqrt{c\alpha''}\right)\right] \varphi(\alpha'', X, Y, Z),$$
$$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$x' = \left[F' \cos\left(t\sqrt{c\alpha'}\right) - E'\sqrt{c\alpha'} \sin\left(t\sqrt{c\alpha'}\right)\right] \varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ \left[F'' \cos\left(t\sqrt{c\alpha''}\right) - E''\sqrt{c\alpha''} \sin\left(t\sqrt{c\alpha''}\right)\right] \varphi(\alpha'', X, Y, Z),$$
$$y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$z' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit par ces formules que le mouvement de chaque particule sera composé de deux mouvements analogues chacun au mouvement représenté par les formules du numéro précédent; d'où il est aisé de conclure que les vibrations ne seront jamais isochrones, à moins que les mouvements composants ne soient synchrones entre eux, ce qui ne pourra arriver que lorsque les quantités α' et α'' seront commensurables entre elles.

62. En suivant la méthode que nous venons d'expliquer, on pourra

supposer de nouveau, au lieu des équations (p), (q), (r),

$$\beta p + \frac{d^2p}{dX^2} + \frac{d^2q}{dX\,dY} + \frac{d^2r}{dX\,dZ} = P,$$

$$\beta q + \frac{d^2q}{dY^2} + \frac{d^2r}{dY\,dZ} + \frac{d^2p}{dY\,dX} = Q,$$

$$\beta r + \frac{d^2r}{dZ^2} + \frac{d^2p}{dZ\,dX} + \frac{d^2q}{dZ\,dY} = R,$$

et ensuite

$$\gamma P + \frac{d^2P}{dX^2} + \frac{d^2Q}{dX\,dY} + \frac{d^2R}{dX\,dZ} = 0,$$

$$\gamma Q + \frac{d^2Q}{dY^2} + \frac{d^2R}{dY\,dZ} + \frac{d^2P}{dY\,dX} = 0,$$

$$\gamma R = \frac{d^2R}{dZ^2} + \frac{d^2P}{dZ\,dX} + \frac{d^2Q}{dZ\,dY} = 0;$$

d'où, par des opérations analogues à celles qui ont été pratiquées ci-dessus, on parviendra aux formules suivantes :

$$x = \left[E' \cos\left(t\sqrt{c\alpha'}\right) + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \sin\left(t\sqrt{c\alpha'}\right)\right] \varphi(\alpha', X, Y, Z)$$

$$+ \left[E'' \cos\left(t\sqrt{c\alpha''}\right) + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \sin\left(t\sqrt{c\alpha''}\right)\right] \varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$

$$+ \left[E''' \cos\left(t\sqrt{c\alpha'''}\right) + \frac{F'''}{\sqrt{c\alpha'''}} \sin\left(t\sqrt{c\alpha'''}\right)\right] \varphi(\alpha''', X, Y, Z),$$

$$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$x' = \left[F' \cos\left(t\sqrt{c\alpha'}\right) - E'\sqrt{c\alpha'} \sin\left(t\sqrt{c\alpha'}\right)\right] \varphi(\alpha', X, Y, Z)$$

$$+ \left[F'' \cos\left(t\sqrt{c\alpha''}\right) - E''\sqrt{c\alpha''} \sin\left(t\sqrt{c\alpha''}\right)\right] \varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$

$$+ \left[F''' \cos\left(t\sqrt{c\alpha'''}\right) - E'''\sqrt{c\alpha'''} \sin\left(t\sqrt{c\alpha'''}\right)\right] \varphi(\alpha''', X, Y, Z),$$

$$y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui donnent les mouvements des particules composés de trois mouvements simples, analogues chacun à celui du n° 60; d'où il s'ensuit que l'isochronisme n'y aura lieu que lorsque les quantités α', α'', α''', qui expriment trois valeurs quelconques de $-k$, seront toutes commensurables entre elles.

En suivant encore la même méthode, on trouvera pour les valeurs de x, y, z, x', y', z' des formules composées de 4, 5, 6,... termes semblables dont chacun répondra à une quelconque des valeurs de k; on pourra donc par ce moyen avoir autant de solutions particulières qu'il y aura de combinaisons à faire, une à une, deux à deux, trois à trois,..., des valeurs de k, de sorte que, leur nombre étant m, celui de solutions particulières sera $2^m - 1$; mais, si le nombre des valeurs commensurables est seulement égal à n, il n'y aura que $2^n + m - n - 1$ de ces solutions qui rendent les oscillations isochrones.

63. *Remarque.* — Si l'on poussait les expressions des valeurs de x, y,..., jusqu'à ce que le nombre de leurs termes fût égal à celui des valeurs de k, on aurait alors une solution générale et applicable à tous les cas possibles; quoique cette proposition ne soit pas une suite nécessaire de l'analyse précédente, il est aisé de la démontrer en rigueur par le moyen des principes jusqu'ici établis.

Pour cela, je suppose qu'on développe la formule (D) en autant de formules particulières qu'il y a de valeurs de k, et qu'on en tire par la combinaison la valeur de chacune des quantités x, y, z,..., soit en se servant des règles ordinaires, soit en employant une méthode analogue à celle dont nous avons fait usage dans le Chapitre III des *Recherches précédentes* (XXIV); il est facile de voir que ces valeurs seront exprimées de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
x = {} & \mathrm{P}' \left[\mathrm{S}' \cos\left(t\sqrt{c\alpha'}\right) + \frac{\mathrm{U}'}{\sqrt{c\alpha'}} \sin\left(t\sqrt{c\alpha'}\right) \right] \\
& + \mathrm{P}'' \left[\mathrm{S}'' \cos\left(t\sqrt{c\alpha''}\right) + \frac{\mathrm{U}''}{\sqrt{c\alpha''}} \sin\left(t\sqrt{c\alpha''}\right) \right] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \mathrm{P}^{(m)} \left[\mathrm{S}^{(m)} \cos\left(t\sqrt{c\alpha^{(m)}}\right) + \frac{\mathrm{U}^{(m)}}{\sqrt{c\alpha^{(m)}}} \sin\left(t\sqrt{c\alpha^{(m)}}\right) \right], \\
y = {} & \mathrm{Q}' \left[\mathrm{S}' \cos\left(t\sqrt{c\alpha'}\right) + \frac{\mathrm{U}'}{\sqrt{c\alpha'}} \sin\left(t\sqrt{c\alpha'}\right) \right] \\
& + \mathrm{Q}'' \left[\mathrm{S}'' \cos\left(t\sqrt{c\alpha''}\right) + \frac{\mathrm{U}''}{\sqrt{c\alpha''}} \sin\left(t\sqrt{c\alpha''}\right) \right] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$+ \mathrm{Q}^{(m)}\left[\mathrm{S}^{(m)}\cos\left(t\sqrt{c\alpha^{(m)}}\right) + \frac{\mathrm{U}^{(m)}}{\sqrt{c\alpha^{(m)}}}\sin\left(t\sqrt{c\alpha^{(m)}}\right)\right],$$

$$z = \mathrm{R}'\left[\mathrm{S}'\cos\left(t\sqrt{c\alpha'}\right) + \frac{\mathrm{U}'}{\sqrt{c\alpha'}}\sin\left(t\sqrt{c\alpha'}\right)\right]$$

$$+ \mathrm{R}''\left[\mathrm{S}''\cos\left(t\sqrt{c\alpha''}\right) + \frac{\mathrm{U}''}{\sqrt{c\alpha''}}\sin\left(t\sqrt{c\alpha''}\right)\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \mathrm{R}^{(m)}\left[\mathrm{S}^{(m)}\cos\left(t\sqrt{c\alpha^{(m)}}\right) + \frac{\mathrm{U}^{(m)}}{\sqrt{c\alpha^{(m)}}}\sin\left(t\sqrt{c\alpha^{(m)}}\right)\right],$$

posant $\alpha^{(m)}$ pour la dernière des valeurs de $-k$.

Les quantités S′, S″,..., $\mathrm{S}^{(m)}$ et U′, U″,..., $\mathrm{U}^{(m)}$ sont mises pour dénoter les valeurs des expressions

$$\int[(x)\mathrm{L} + (y)\mathrm{M} + (z)\mathrm{N}]\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z} \quad \text{et} \quad \int[(x')\mathrm{L} + (y')\mathrm{M} + (z')\mathrm{N})],$$

lorsqu'on fait successivement $-k$ égal à α', α'',..., $\alpha^{(m)}$. Les autres quantités P′, P″,...., $\mathrm{P}^{(m)}$, Q′, Q″,..., $\mathrm{Q}^{(m)}$, R′, R″,..., $\mathrm{R}^{(m)}$ sont différentes pour chaque particule, c'est-à-dire sont des fonctions variables de X, Y, Z.

Or, si l'on regarde ces fonctions comme indéterminées, on pourra en connaître la valeur par le moyen de la substitution et de la comparaison, ainsi qu'on le pratique dans la méthode connue des indéterminées. Substituons donc au lieu de x, y, z, dans l'équation (D), les expressions ci-dessus, et supposant pour abréger que S, U dénotent en général les valeurs de S′, S″,..., U′, U″,..., lorsqu'il y a encore $-k$ au lieu de α', α'',..., on aura

$$\left[\mathrm{S}'\cos\left(t\sqrt{c\alpha'}\right) + \frac{\mathrm{U}'}{\sqrt{c\alpha'}}\sin\left(t\sqrt{c\alpha'}\right)\right]\int(\mathrm{P}'\,\mathrm{L} + \mathrm{Q}'\,\mathrm{M} + \mathrm{R}'\,\mathrm{N})\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$$

$$+\left[\mathrm{S}''\cos\left(t\sqrt{c\alpha''}\right) + \frac{\mathrm{U}''}{\sqrt{c\alpha''}}\sin\left(t\sqrt{c\alpha''}\right)\right]\int(\mathrm{P}''\,\mathrm{L} + \mathrm{Q}''\mathrm{M} + \mathrm{R}''\,\mathrm{N})\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left[\mathrm{S}^{(m)}\cos\left(t\sqrt{c\alpha^{(m)}}\right) + \frac{\mathrm{U}^{(m)}}{\sqrt{c\alpha^{(m)}}}\sin\left(t\sqrt{c\alpha^{(m)}}\right)\right]\int(\mathrm{P}^{(m)}\mathrm{L} + \mathrm{Q}^{(m)}\mathrm{M} + \mathrm{R}^{(m)}\mathrm{N})\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$$

$$= \mathrm{S}\cos\left(t\sqrt{-ck}\right) + \frac{\mathrm{U}}{\sqrt{-ck}}\sin\left(t\sqrt{-ck}\right),$$

équation qui doit être identique en faisant $-k$ égal à α', α'',..., $\alpha^{(m)}$.

Soit donc posé en général $-k=\alpha^{(\mu)}$, le second membre de l'équation deviendra

$$S^{(\mu)}\cos\left(t\sqrt{c\alpha^{(\mu)}}\right)\frac{U^{(\mu)}}{\sqrt{c\alpha^{(\mu)}}}\sin\left(t\sqrt{c\alpha^{(\mu)}}\right),$$

et le terme $\mu^{ième}$ du premier membre étant

$$\left[S^{(\mu)}\cos\left(t\sqrt{c\alpha^{(\mu)}}\right)+\frac{U^{(\mu)}}{\sqrt{c\alpha^{(\mu)}}}\sin\left(t\sqrt{c\alpha^{(\mu)}}\right)\right]\int\left(P^{(\mu)}L+Q^{(\mu)}M+R^{(\mu)}N\right)dX\,dY\,dZ,$$

pour identifier les deux membres, on supposera que

$$\int\left(P^{(\mu)}L+Q^{(\mu)}M+R^{(\mu)}N\right)dX\,dY\,dZ$$

soit égal à 1, et que toutes les autres formules exprimées généralement par

$$\int\left(PL+QM+RN\right)dX\,dY\,dZ$$

soient nulles, $-k$ étant égal à $\alpha^{(\mu)}$ dans les valeurs de L, M, N; d'où l'on voit que les valeurs de P, Q, R devront être telles, que la formule générale

$$\int\left(P^{(\mu)}L+Q^{(\mu)}M+R^{(\mu)}N\right)dX\,dY\,dZ$$

soit toujours égale à 1, lorsque $k=-\alpha^{(\mu)}$, et qu'elle soit toujours égale à zéro, lorsque k a une autre valeur quelconque,

Or, par ce qui a été démontré dans le n° 60, on trouvera d'abord, pour remplir cette dernière condition, les équations suivantes :

$$\alpha^{(\mu)}P^{(\mu)}=\frac{d^2P^{(\mu)}}{dX^2}+\frac{d^2Q^{(\mu)}}{dX\,dY}+\frac{d^2R^{(\mu)}}{dX\,dZ},$$

$$\alpha^{(\mu)}Q^{(\mu)}=\frac{d^2Q^{(\mu)}}{dY^2}+\frac{d^2R^{(\mu)}}{dY\,dZ}+\frac{d^2P^{(\mu)}}{dY\,dX},$$

$$\alpha^{(\mu)}R^{(\mu)}=\frac{d^2R^{(\mu)}}{dZ^2}+\frac{d^2P^{(\mu)}}{dZ\,dX}+\frac{d^2Q^{(\mu)}}{dZ\,dY},$$

d'où il résultera, comme dans le numéro cité,

$$P^{(\mu)} = A\varphi(\alpha^{(\mu)}, X, Y, Z),$$
$$Q^{(\mu)} = A\psi(\alpha^{(\mu)}, X, Y, Z),$$
$$R^{(\mu)} = A\chi(\alpha^{(\mu)}, X, Y, Z).$$

Soit maintenant la valeur de

$$\int [L\varphi(\alpha^{(\mu)}, X, Y, Z) + M\psi(\alpha^{(\mu)}, X, Y, Z) + N\chi(\alpha^{(\mu)}, X, Y, Z)]\, dX\, dY\, dZ,$$

en y posant $-k = \alpha^{(\mu)}$, exprimée par $D^{(\mu)}$; on aura, pour satisfaire à la première condition,

$$AD^{(\mu)} = 1,$$

et par conséquent

$$A = \frac{1}{D^{(\mu)}}.$$

Substituant enfin les valeurs trouvées de P, Q, R dans les expressions de x, y, z, et posant pour plus de simplicité E′, E″,... au lieu de $\frac{S'}{D'}$, $\frac{S''}{D''}, \cdots$, et F′, F″,... au lieu de $\frac{U'}{D'}$, $\frac{U''}{D''}, \cdots$, il viendra

$$x = \left[E' \cos(t\sqrt{c\alpha'}) + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \sin(t\sqrt{c\alpha'})\right] \varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ \left[E'' \cos(t\sqrt{c\alpha''}) + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \sin(t\sqrt{c\alpha''})\right] \varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \left[E^{(m)} \cos(t\sqrt{c\alpha^{(m)}}) + \frac{F^{(m)}}{\sqrt{c\alpha^{(m)}}} \sin(t\sqrt{c\alpha^{(m)}})\right] \varphi(\alpha^{(m)}, X, Y, Z),$$
$$y = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$z = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Par des raisonnements et des opérations semblables, on tirera de

l'équation (E)

$$
\begin{aligned}
x' = {} & [\mathrm{F}' \cos(t\sqrt{c\alpha'}) - \mathrm{E}'\sqrt{c\alpha'} \sin(t\sqrt{c\alpha'})]\, \varphi(\alpha', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) \\
& + [\mathrm{F}'' \cos(t\sqrt{c\alpha''}) - \mathrm{E}''\sqrt{c\alpha''} \sin(t\sqrt{c\alpha''})]\, \varphi(\alpha'', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + [\mathrm{F}^{(m)} \cos(t\sqrt{c\alpha^{(m)}}) - \mathrm{E}^{(m)}\sqrt{c\alpha^{(m)}} \sin(t\sqrt{c\alpha^{(m)}})]\, \varphi(\alpha^{(m)}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}), \\
y' = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
z' = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Voilà, comme l'on voit, une construction générale des mêmes équations que nous avons déjà traitées dans le § II du Chapitre précédent par une voie fort différente, et seulement par approximation; mais il faut avouer que cette construction n'est guère utile pour la connaissance du mouvement des particules de l'air. Car les valeurs de x, y, z sont composées de suites infinies dont les termes ne sont point convergents ou du moins ne peuvent point être regardés comme tels, puisque les constantes E, F, que ces termes renferment, dépendent des premières valeurs de x, y, z, et de x', y', z', qui doivent être supposées quelconques.

64. Scolie. — Il est clair que la méthode de la Remarque précédente peut être employée dans une infinité d'autres équations de même espèce, et qu'elle s'applique également, que le nombre des corps mobiles soit infini ou qu'il soit fini, de sorte qu'on peut la regarder comme une simplification et une généralisation de celle dont nous nous sommes servis dans le Chapitre III des *Recherches précédentes*.

Au reste, cette méthode sert à démontrer la belle proposition de M. Daniel Bernoulli que : *lorsqu'un système quelconque de corps fait des oscillations infiniment petites, le mouvement de chaque corps peut être considéré comme composé de plusieurs mouvements partiels et synchrones chacun à celui d'un pendule simple*. (*Voyez* les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1753.)