

The Virtual Laboratory

Max-Planck-Institute for the History of Science, Berlin
ISSN 1866-4784 - http://vlp.mpiwg-berlin.mpg.de/

Helmholtz, Hermann von. 1861. Zur Theorie der Zungenpfeifen. Annalen der Physik und Chemie 114: 321-327

http://vlp.mpiwg-berlin.mpg.de/references?id=lit1918

und endlich zeigte ein von mir untersuchtes käufliches Kupfer eine Zunahme von ungefähr 8 Proc.

London den 8. August 1861.

XIII. *Zur Theorie der Zungenpfeifen; von R. Helmholtz.*

Unter Zungenpfeifen verstehe ich alle solche Blasinstrumente, in denen dem Luftstrom der Weg durch einen schwingenden elastischen Körper bald geöffnet, bald verschlossen wird. Die erste Arbeit, welche die Mechanik der Zungenpfeifen verständlich machte, war die von W. Weber. Er experimentirte aber hauptsächlich mit metallenen Zungen, die wegen ihrer grofsen Masse und Elasticität nur dann von der Luft kräftig bewegt werden, wenn sich der von der Pfeife angegebene Ton nicht zu sehr von dem Eigenton der freien Zunge unterscheidet. Daher sind die Pfeifen mit metallenen Zungen in der Regel nur fähig einen einzigen Ton anzugeben, nämlich nur denjenigen unter den theoretisch möglichen Tönen, welcher dem eigenen Ton der Zunge am nächsten liegt.

Anders verhält es sich mit Zungen von leichtem, wenig Widerstand leistendem Material, wie es die Rohrzungen der Clarinette, Oboe, des Fagotts, die menschlichen Lippen in den Trompeten, Posaunen, Hörnern sind. Sehr geeignet für die Versuche sind auch membranöse Zungen aus vulkanisirtem Kautschuk, ähnlich den Stimmbändern des Kehlkopfs gestellt; nur mufs man sie, damit sie leicht und gut ansprechen, schräg gegen den Luftstrom stellen.

Die Wirkung der Zungen ist wesentlich verschieden, je nachdem die von ihnen geschlossene Oeffnung sich öffnet,

wenn sich die Zunge dem Winde entgegen nach der Windlade zu bewegt, oder wenn sie sich mit ihm gegen das Ansatzrohr bewegt. Die ersteren nenne ich *einschlagende Zungen,* die letzteren *ausschlagende.* Die Zungen der Clarinette, Oboe, des Fagotts, der Zungenwerke der Orgel sind alle einschlagende Zungen. Die menschlichen Lippen in den Blechinstrumenten repräsentiren dagegen ausschlagende Zungen. Die von mir gebrauchten Kautschukzungen kann man einschlagend und ausschlagend stellen.

Die Gesetze für die Tonhöhe der Zungenpfeifen ergeben sich vollständig, wenn man die Bewegung der Zunge unter dem Einflusse des periodisch wechselnden Luftdrucks im Ansatzrohr und Windrohr bestimmt, und berücksichtigt, dafs das Maximum der Geschwindigkeit der ausströmenden Luft nur erreicht werden kann, wenn die von der Zunge gedeckte Oeffnung ihre gröfste Weite erreicht hat.

1) *Zungen mit cylindrischem Ansatzrohr ohne Windrohr.* Die Zunge wird betrachtet als ein Körper, der durch elastische Kräfte in seine Gewichtslage zurückgeführt wird, und durch den, wie der Sinus der Zeit periodisch wechselnden, Druck im Ansatzrohr, wieder daraus entfernt wird. Die Bewegungsgleichungen [1]) zeigen, dafs der Augenblick stärksten Drucks in der Tiefe des Ansatzrohrs fallen mufs zwischen eine gröfste Elongation der Zunge nach aufsen, die ihm voraufgeht, und eine gröfste Elongation nach innen, welche nachfolgt, und wenn man sich die Schwingungsdauer gleich der Peripherie eines Kreises in 360 Grade abgetheilt denkt, ist der Winkel ε, um welchen das Maximum des Druckes nach dem Durchgang der Zunge durch ihre Mittellage eintritt, gegeben durch die Gleichung

$$\text{tang } \varepsilon = \frac{L^2 - \lambda^2}{\beta^2 L^2 \lambda},$$

wo L die Wellenlänge des Tons der freien Zunge in der Luft bezeichnet, λ die des wirklich eingetretenen Tons und β^2 eine Constante ist, welche bei Zungen von leichtem Ma-

1) Aehnlich zu behandeln, wie Seebeck's Theorie des Mittönens. Repertorium der Physik. VIII. 60—64

terial und gröfserer Reibung gröfser ist als bei schwerem und vollkommen elastischem Material. Der Winkel ε ist zu nehmen zwischen -90° und $+90^\circ$.

In derselben Weise mufs nun bestimmt werden die Zeit, um welche der gröfste Druck in der Tiefe des Ansatzrohrs abweicht von der gröfsten Geschwindigkeit, welche letztere wieder zusammenfallen mufs mit derjenigen Stellung der Zunge, wo die Oeffnung am weitesten ist. Die Berechnung dieser Gröfse ergiebt sich aus meinen Untersuchungen über die Luftbewegung im Innern eines offenen cylindrischen Rohrs [1]). Das Maximum der nach der Oeffnung gerichteten Geschwindigkeit geht dem Maximum des Drucks voraus um einen Winkel δ (die Schwingungsdauer als Peripherie eines Kreises betrachtet), der gegeben ist durch die Gleichung

$$\text{tang } \delta = \frac{-\lambda^2}{4\pi Q} \sin\left[\frac{4\pi(l+a)}{\gamma}\right],$$

worin Q den Querschnitt, l die Länge des Ansatzrohrs bezeichnet und a eine von der Form abhängige Constante, welche bei Röhren, deren Querschnitt vom Radius ϱ ist, gleich $\frac{\pi}{4}\varrho$ ist. Der Winkel δ ist wieder zwischen -90° und $+90^\circ$ zu nehmen.

Da nun Luft in das Ende des Ansatzrohrs nur eintreten kann, wenn die Zunge geöffnet ist, so mufs bei *einschlagenden* Zungen das Maximum der nach aufsen gerichteten Geschwindigkeit der Luft zusammenfallen mit der gröfsten Elongation der Zunge nach innen; es mufs also seyn

$$-\varepsilon = \delta + 90^\circ$$

und δ sowie ε müssen negativ seyn.

Bei *ausschlagenden* Zungen dagegen mufs das Maximum der Luftausströmung zusammenfallen mit der gröfsten Elongation der Zunge nach aufsen, es mufs seyn

$$\frac{\pi}{2} = \delta + \varepsilon$$

und δ wie ε müssen positiv seyn.

1) Journal für reine und angewandte Mathematik, LVII.

Beide Fälle vereinigen sich in der Gleichung

$$\text{tang}\,\varepsilon = \text{cotang}\,\delta$$

oder

$$\sin\frac{4\pi(l+a)}{\lambda} = \frac{4\pi}{\lambda} Q\beta^2 \cdot \frac{L^2}{\lambda^2 - L^2} \quad \ldots \quad (1)$$

bei der die Zungen beziehlich einschlagen oder ausschlagen müssen, je nachdem die auf beiden Seiten der Gleichung 1 stehenden Gröfsen positiv oder negativ ausfallen.

Da Q und β^2 sehr kleine Gröfsen sind, kann $\sin\frac{4\pi(l+a)}{\lambda}$ nur in dem Falle einen erheblichen Werth annehmen, wenn $\lambda^2 - L^2$ sehr klein ist, also der Ton der Pfeife dem der freien Zunge nahe kommt, wie das bei den metallenen Zungen meist der Fall ist. Wenn aber der Unterschied beider Töne $\lambda - L$ grofs ist, mufs im Gegentheil $\sin\frac{4\pi(l+a)}{\lambda}$ sehr klein seyn, also nahehin

$$l + a = \mathfrak{a}\frac{\lambda}{4}$$

worin $\mathfrak{a}$ eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Der Druckwechsel in der Tiefe des Ansatzrohrs ist nun proportional $\sin\frac{2\pi(l+a)}{\lambda}$, also ein Maximum, wenn

$$l + a = 2\mathfrak{a}\frac{\lambda}{4}$$

und ein Minimum, wenn

$$l + a = (2\mathfrak{a} + 1)\frac{\lambda}{4}$$

Im ersten Fall ist die Kraft des Luftdrucks nicht ausreichend, um die Zunge zu bewegen, im zweiten Falle genügt sie bei nicht zu schweren und widerstehenden Zungen. Daher sprechen gut an die Töne, bei welchen nahehin

$$1 + a = (2\mathfrak{a} + 1)\frac{\lambda}{4}$$

bei denen also die Luftsäule des Ansatzrohrs wie die einer gedackten Pfeife schwingt. Gleichzeitig sieht man, dafs diese Töne fast unabhängig sind von der eigenen Tonhöhe der Zunge.

Von dieser Art sind die Töne der Clarinette; auch membranöse einschlagende Kautschukzungen an Glasröhren bis zu 16 Fufs Länge sprechen leicht an, und lassen verschiedene Obertöne hervorbringen, die der Gleichung 1 gut entsprechen. Ausschlagende Zungen müssen sehr tief gestimmt seyn, um reine Töne des Rohrs zu geben, daher die menschlichen Lippen dazu geeignet sind, in denen die elastischen Faserzüge mit einer grofsen Masse wässerigen unelastischen Gewebes belastet sind. Cylindrische Glasröhren können leicht wie Trompeten angeblasen werden und geben die Töne einer gedackten Pfeife. Von diesen sind die höheren, in denen die Differenz $L^2 - \lambda^2$ grofs ist, fest anzugeben, und rein gestimmt, die unteren dagegen nicht ganz unabhängig vom Werthe von L, d. h. der Spannung und Dicke der Lippen, daher unsicher und veränderlich.

2) *Zungen mit kegelförmigem Ansatzrohr ohne Windrohr.* Es findet ein sehr merkwürdiger Unterschied statt zwischen cylindrischen und kegelförmigen Ansatzröhren. Die Luftbewegung im Innern der letztern läfst sich nach denselben Grundsätzen bestimmen, welche ich für die cylindrischen Röhren gebraucht habe, indem man innerhalb des Rohrs das Potential der Luftbewegung setzt gleich

$$\frac{A}{r} \sin 2\pi \frac{(R-r+a)}{\lambda} + \frac{B}{r} \cos 2\pi \frac{(R-r)}{\lambda}$$

worin r der Abstand eines beliebigen Punktes von der Spitze des Kegels ist, R der Werth von r für die weite Mündung der Röhre. Man erhält, wenn man $\frac{B}{A}$ vernachlässigt,

$$\operatorname{tang} \delta = -\frac{\lambda^2}{2\pi Q} \cdot \sin \frac{2\pi(l+a)}{\lambda} + \left[\cos \frac{2\pi(l+a)}{\lambda} + \frac{\lambda}{2\pi r} \sin \frac{2\pi(l+a)}{\lambda}\right]$$

worin r auf den Ort der Zunge zu beziehen ist. Auch hier ist zu setzen

$$\operatorname{cotang} \delta = \operatorname{tang} \varepsilon.$$

Es interessiren uns hier hauptsächlich die von dem Zungen-

ton stark abweichenden Töne der Pfeife, für welche also $L^2 - \lambda^2$ grofs, tang ε daher ebenfalls sehr grofs ist, und tang δ sehr klein. Für diese mufs also entweder nahebin seyn

$$\sin \frac{2\pi (l+a)}{\lambda} = 0$$

was aber keine Töne giebt, weil hierbei der Druckwechsel in der Tiefe des Ansatzrohrs zu schwach ist, oder

$$\text{tang} \frac{2\pi (l+a)}{\lambda} = -\frac{2\pi r}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Diefs ist die Gleichung für die kräftig ansprechenden höheren Töne der Röhre.

Ich gebe hier folgend die Reihe der aus Gleichung 2 berechneten Töne für eine kegelförmige Röhre aus Zink, welche folgende Maafse hatte:

Länge $l = 122{,}7$ Ctm.

Durchmesser der Oeffnungen 5,5 und 0,7 Ctm.

Reducirte Länge $l + a$, berechnet 124,77 Ctm.

Ton	Wellenlänge berechnet	Länge der entsprechenden offenen Pfeife	gedackten Pfeife
1) H —	283,61	$= \frac{2}{1} . 141{,}80$	$= \frac{4}{1} . 70{,}90$
2) h —	139,83	$= \frac{2}{2} . 139{,}84$	$= \frac{4}{3} . 104{,}88$
3) fis$_1$	91,81	$= \frac{2}{3} . 137{,}71$	$= \frac{4}{5} . 114{,}76$
4) h$_1$ +	67,94	$= \frac{2}{4} . 135{,}88$	$= \frac{4}{7} . 118{,}89$
5) dis$_2$	53,76	$= \frac{2}{5} . 134{,}39$	$= \frac{4}{9} . 120{,}95$
6) g$_2$	44,40	$= \frac{2}{6} . 133{,}21$	$= \frac{4}{11} . 122{,}11$
7) b$_2$ —	37,79	$= \frac{2}{7} . 132{,}26$	$= \frac{4}{13} . 122{,}82$
8) c$_3$	32,87	$= \frac{2}{8} . 131{,}50$	$= \frac{4}{15} . 123{,}28$
9) dis$_3$	29,22	$= \frac{2}{9} . 131{,}47$	$= \frac{4}{17} . 124{,}17$

Die Töne vom 2ten bis 9ten konnten beobachtet werden, und fanden sich vollständig übereinstimmend mit der Rechnung. Man sieht aus den beiden letzten Rubriken, dafs die hohen Töne sich fast genau denen einer gedackten Pfeife anschliefsen, deren Länge der reducirten Länge der Röhre 124,7 gleich ist; die tieferen schliefsen sich näher an die

einer offenen Pfeife, deren Länge bis zur Spitze des Kegels reichte. Die reducirte Länge einer solchen wäre $R + a = 142{,}6$ Ctm. Gewöhnlich werden die Töne der Blechinstrumente den Tönen einer offenen Pfeife gleich gesetzt, aber die oberen sind verhältnifsmäfsig zu tief gegen die unteren, in unserem Falle um mehr als einen halben Ton. Bei den Trompeten und Hörnern wird dieser Fehler vielleicht einigermafsen durch den Schallbecher an der Mündung corrigirt. Bei den Posaunen helfen die Auszüge nach.

Während die Trompeten, Posaunen und Hörner zu den Zungenwerken dieser Klasse mit kegelförmigem Rohr und tiefen ausschlagenden Zungen gehören, tragen die Oboen und Fagotte hohe einschlagende Zungen. Sie geben bei der Ueberblasung ebenfalls die höhere Octave und dann die Duodecime, wie eine offene Pfeife. Die Rechnung nach Gleichung 2 stimmt für die Oboe sehr gut mit Zamminer's Messungen.

XIV. *Ueber Fluorescenz der Auszüge aus den verschiedenen Theilen der Pflanzen;* *von C. B. Greifs.*

Ausgehend von der längst bekannten Erfahrung, dafs man, wenn man die Rinde der Rofskastanien mit Wasser auszieht, eine Flüssigkeit erhält, welche, sobald man durch ein vorgehaltenes Convexglas die aufgefangenen Sonnenstrahlen in dieselbe hineinbringt, einen schönen intensiv blauen Lichtkegel zeigt, unternahm ich es, die Auszüge aus den Rinden anderer Bäume in derselben Hinsicht zu untersuchen. Ich fand mich um so mehr dazu veranlafst, als bekanntlich die Fluorescenz des Rofskastanienrindenauszugs durch den in der Rinde vorkommenden Bitterstoff Aesculin bedingt ist, und als auch in den Rinden einiger anderer Bäume bereits