

The Virtual Laboratory

Max-Planck-Institute for the History of Science, Berlin
ISSN 1866-4784 - http://vlp.mpiwg-berlin.mpg.de/

Helmholtz. 1852. Akustik. Theorie. In: Die Fortschritte der Physik im Jahre 1848. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin, 101-118. Berlin: G. Reimer

http://vlp.mpiwg-berlin.mpg.de/references?id=lit29062

1. Theorie.

J. Challis. Theoretical determination of the velocity of sound. Phil. mag. XXXII 276*.

Airy. Remarks on Professor Challis's theoretical determination of the velocity of sound. ibd. 339*.

J. Challis. On the velocity of sound. ibd. 494*.

J. Challis. Additional analytical considerations respecting the velocity of sound. ibd. XXXIII 98*.

G. G. Stokes. On a difficulty in the theory of sound. ibd. 349*.

J. Challis. On the vibrations of an elastic fluid. ibd. 360*.

J. Challis. Further investigation of the nature of aërial vibrations. ibd. 462*.

R. Moon. On a difficulty suggested by Prof. Challis in the theory of sound. Proc. of the Cambridge Philos. Society 1848 Novb. — Philos. Mag. XXXIV 136*.

G. G. Stokes. On some points in the received theory of sound. ibd. 52*.

J. Challis. Continuation of researches in the mathematical theory of aërial vibrations. ibd. 88*.

Eli. W. Blake. A determination of the general law according to which pulses differing in intensity are propagated in elastic media with remarks on the received theory of the velocity of sound. Sill. Amer. Journal. vol. V. 372*.

G. Wertheim. Mémoire sur la vitesse du son dans les liquides C. R. XXVII 150*. — Ann. d. ch. et d. ph. XXIII 434*. — Inst. No. 762. p. 237*. Pogg. Ann. LXXVII 427* und 544*; Arch. d. sc. ph. et nat. IX. 52*.

Sc. Russel. On the effect of the rapid motion of the observer on sound. Athen 1848 No. 108 b. p. 835*; Inst. No. 768 p. 288*; Arch. d. sc. ph. et nat. IX. 138*.

Robert-Lefebvre. Théorie mathématique des sons musicaux. C. R. XXVII 648*.

A. Seebeck. Ueber die Schwingungen gespannter und nicht gespannter Stäbe. Ber. d. Sächs. Ges. I. 159; Pogg. Ann. LXXIII 442*.

A. Seebeck. Versuche über die Töne steifer Saiten. Ber. d. Sächs. Ges. I. 365*.

Duhamel. Sur la résonnance multiple des corps. C. R. XXVII 457*. Inst. No. 775. 341. Ann. d. ch. et d. ph. XXV 45; Arch. d. sc. ph. et nat. X. 52*.

Der Unterschied der nach hydrodynamischen Principien berechneten Schallgeschwindigkeit 916,322 Fufs engl. und der beobachteten von 1089 Fufs ist bisher hergeleitet worden von der Erwärmung und Erkältung, welche die Luft bei ihrer Verdichtung und Verdünnung erleidet. Bei Berücksichtigung dieses Umstandes entspricht nämlich einer gleichen Dichtigkeitsänderung eine gröfsere Aenderung der Spannung, als es nach dem Mariotte'schen Gesetze der Fall sein würde, und demgemäfs wird bekanntlich auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elastischer Wellen vergröfsert. Nun ist die durch direkte Versuche ermittelte Gröfse der Erwärmung der Gase durch Compression allerdings nicht hinreichend, um den ganzen Unterschied zu erklären, indessen haben wir auch allen Grund anzunehmen, dafs die gefundenen Zahlen durch die bei solchen Versuchen nicht zu vermeidenden Verluste von Wärme zu klein ausgefallen sind.

Hr. J. Challis hat in den vorn citirten Aufsätzen im Phil. Mag. diese Erklärung als ungenügend darzustellen und eine ganz neue rein hydrodynamische Theorie der Schallbewegung zu entwickeln gesucht, aus welcher sich eine gröfsere Geschwindigkeit der Fortpflanzung ergeben sollte, als aus der bisherigen. Der erste Einwand Bd. XXXII. S. 283., dafs die elastische Kraft der Luft bei Verdichtung mit Temperaturänderung zwar gröfser, bei Verdünnung aber kleiner sein müsse als ohne dieselbe, während eine gröfsere Schallgeschwindigkeit nur durch Vermehrung der elastischen Kraft in beiden Fällen erzeugt werden könne, beruht auf einem Mifsverständnifs, welches bei einem so fertigen Mathe-

matiker überrascht. Derselbe ist von Hrn. Airy ibd. 343 zurückgewiesen, indem er erinnert, dafs es nicht auf die absolute Gröfse der elastischen Kräfte ankomme, sondern auf ihren Unterschied von denen des Gleichgewichtzustands, und dafs dieser Unterschied in beiden Fällen vergröfsert sei. In den weiteren Aufsätzen Bd. XXXII 498 und XXXIII sucht Hr. Challis dagegen aus den Gleichungen für die Schallbewegungen mit Berücksichtigung des Einflusses der Erwärmung nachzuweisen, dafs dieser Einfluſs nicht blos in einer Aenderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestehen könne, sondern auch den Charakter der Bewegung ändere. Dagegen ist zu erinnern, dafs alle unsere Theorien kleiner elastischer Schwingungen nur eine Art von Bewegung darstellen sollen, welcher sich wirklich stattfindende Bewegungen immer mehr nähern, je kleiner sie sind; deshalb sind wir berechtigt in den Gleichungen die Aenderungen der Dichtigkeit gegen die ganze Dichtigkeit, die Geschwindigkeiten der schwingenden Theile gegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu vernachlässigen, wie es auch Hr. Moon in seiner oben citirten Antwort gegen Hrn. Challis thut, und dann reducirt sich der Einfluſs der Temperaturänderung wirklich auf eine bloſse Aenderung der Schallgeschwindigkeit, wie es auch aus den von letzterem selbst aufgestellten Gleichungen folgt.

Um eine neue Theorie des Schalls zu gründen, sucht Hr. Challis in seinem ersten Aufsatze ein partikuläres Integral der hydrodynamischen Gleichungen, durch welches eine nach einer Richtung sich fortpflanzende Bewegung dargestellt wird. Wir haben bekanntlich zweierlei Systeme von hydrodynamischen Gleichungen, eines für Bewegungen von endlicher Gröfse, und ein zweites einfacheres für unendlich kleine Schwingungen. Nennen wir ϱ die Dichtigkeit, p den Druck, u die Geschwindigkeit in Richtung der x, v die in Richtung der y, w die in Richtung der z für den Punkt dessen Coordinaten x, y, z sind zur Zeit t, ferner a^2 die Constante, welche der Gleichung genügt $p = a^2\varrho$, und betrachten wir nur Fälle, in welchen sich eine Funktion φ von x, y, z und t so finden läfst, dafs $u = \frac{d\varphi}{dx}$, $v = \frac{d\varphi}{dy}$, $w = \frac{d\varphi}{dz}$, so reducirt sich bekanntlich das System der exakten Gleichungen

für Bewegungen von Gasen, welche nicht dem Einfluſs äuſserer Kräfte ausgesetzt sind, auf folgende zwei:

$$\text{I.}\begin{cases} c-a^2\ln.\varrho=\frac{d\varphi}{dt}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] \\ -\frac{d.\ln.\varrho}{dt}=\frac{d.\ln.\varrho}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d.\ln.\varrho}{dy}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d.\ln.\varrho}{dz}\frac{d\varphi}{dz}+\frac{d^2\varphi}{dx^2} \\ \qquad\qquad +\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2} \end{cases}$$

Die Gleichung für unendlich kleine Schwingungen erhält man hieraus, wenn man die höheren Dimensionen der Ableitungen von φ wegläſst, und ϱ eliminirt:

$$\text{II.}\begin{cases} o=\frac{d^2\varphi}{dt^2}-a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) \\ \text{Eine ganz ähnliche existirt für } \varrho \\ o=\frac{d^2\varrho}{dt^2}-a^2\left(\frac{d^2\varrho}{dx^2}+\frac{d^2\varrho}{dy^2}+\frac{d^2\varrho}{dz^2}\right) \end{cases}$$

Hr Challis benutzt zunächst nur die letzteren Gleichungen, und findet als ein seiner Forderung entsprechendes partikuläres Integral

$$\frac{d\varphi}{dz}=w=mf\sin.\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(z-at\sqrt{1+\frac{e\lambda^2}{\pi^2}}+c\right)\right]$$

wo λ die Wellenlänge bezeichnet und f irgend eine Funktion von x und y, welche der Gleichung entspricht

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}+4ef=0.$$

Dieses Integral zeigt also Vibrationen an, parallel der Axe der z, welche sich parallel dieser selben Axe mit der Geschwindigkeit $a\sqrt{1+\frac{e\lambda^2}{\pi^2}}$ fortpflanzen; letztere ist, da e in der Untersuchung als Bezeichnung einer nothwendig positiven aber noch unbestimmten Gröfse eingeführt ist, stets gröfser als die sonst gefundene Fortpflanzungsgeschwindigkeit a. Die Funktion f, welche die Vertheilung der Gleichgewichtsstörungen in Ebenen darstellt, die auf der z Axe senkrecht stehn, muſs zwei willkührliche Funktionen von x und y enthalten, da sie durch eine partielle Differenzialgleichung zweiten Grades gegeben ist. Als einfachsten Fall betrachtet Hr. Challis den, wo die Störungen nach allen

Richtungen senkrecht auf der Axe der z dieselben sind, also nur von der Entfernung von dieser Axe abhängen; er erhält so eine bestimmte Funktion für f, welche Verdichtungswellen bezeichnet von der Gestalt concentrischer Ringe, welche in der Richtung der z fortschreiten. Die Wellen nehmen bei wachsendem Durchmesser der Ringe an Intensität ab, die intensivste Welle aber schreitet längs der Axe dieser Ringe fort innerhalb einer cylindrischen Hülle; der Durchmesser dieser Hülle hängt von der Gröfse e ab. Diese Art von Bewegung in einem cylindrischen Faden betrachtet Hr. CHALLIS als die elementare, er nennt sie „nicht divergirende Wellen," und bemüht sich schliefslich nachzuweisen, dafs die Gröfse $e\lambda^2$, welche die gröfsere Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedingt, nur von der Natur des Stoffes abhängig sei, aber dies ist die schwache Stelle seiner Untersuchung.

Hr. AIRY hat darauf gezeigt, dafs sich die von Hrn. CHALLIS gefundenen Bewegungen zusammensetzen lassen aus ebenen Wellen, deren Normalen gleiche Winkel mit der Axe der z bilden, und je zwei in derselben Ebene mit dieser Axe liegen. Liegen z. B. diese Normalen in der Ebene der xz, und bilden mit ihr den Winkel α, so sind die Geschwindigkeitsgleichungen für die eine

$$w_{\mathrm{I}} = m \sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x \sin\alpha + z\cos\alpha - at)\right\}$$

und für die andere

$$w_{\mathrm{II}} = m \sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(-x \sin\alpha + z\cos\alpha - at)\right\}$$

ihre Summe

$$w = 2m\cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\alpha\right\}\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(z\cos\alpha - at)\right\}$$

die letztere Gleichung kann geschrieben werden ganz übereinstimmend mit der von Hrn. CHALLIS gefundenen

$$w = mf\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda_1}(z - a_1 t)\right\}$$

wo $\lambda_1 = \frac{\lambda}{\cos\alpha}, a_1 = \frac{a}{\cos\alpha}$ und $f = \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\alpha\right\}$. Bei einem solchen Zusammenwirken zweier ebenen Wellensysteme laufen also die einzelnen Phasen nach der Halbirungslinie des Winkels den

ihre Normalen bilden mit einer gröfseren Geschwindigkeit ab, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls beträgt; dieselbe hängt aber ab von der Gröfse des Winkels α, und ist keine Unveränderliche. Durch Zusammensetzung verschiedener ähnlicher Paare von verschiedener Intensität, Wellenlänge und Lage, deren Normalen aber alle denselben Winkel mit der z Axe bilden, kann man den allgemeineren von Hrn. Challis behandelten Fall darstellen, die Ringsysteme dagegen, wenn man alle diejenigen Wellensysteme zusammensetzt, welche gebildet werden, wenn man ein solches Paar um die z Axe rotiren läfst.

Hr. Challis verwahrt sich in seinem zweiten Aufsatze gegen diese Zerlegung seiner nicht divergirenden Wellen in ebene Wellen, indem er den partikulären Integralen der allgemeinen Bewegungsgleichungen, welche die Bewegung ebener und sphärischer Wellen darstellen, alle physikalische Bedeutung abspricht, weil, wie er nachzuweisen sucht, diese Gleichungen auf physikalische Vorstellungen angewendet in Widersprüche führen. Für ebene Wellen braucht er zu diesem Behufe die vollständigen Gleichungen I. Setzt man voraus, dafs die Bewegungen nur der Axe der z parallel seien, dafs Druck und Geschwindigkeit in den auf z senkrechten Ebenen gleich seien, und eliminirt man ϱ aus den Gleichungen I, so erhält man die exakte Gleichung für ebene Wellen:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \left\{a^2 - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dxdt} = 0$$

und ein entsprechendes Integral derselben ist:

$$w = \psi_{(z-(a+w)t)}$$

wo ψ eine willkührliche Funktion der in Parenthese beistehenden Gröfse ist. Dieser Ausdruck bezeichnet eine Bewegung, bei welcher die Phasenpunkte ohne Bewegung mit der Geschwindigkeit a fortschreiten, diejenigen aber, in denen die Geschwindigkeit m ist, mit der $a+m$. Es läfst sich aus der Integralgleichung leicht der entsprechende Ausdruck für die Dichtigkeiten ableiten. Man findet

$$\ln\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{1}{a}w$$

wo ϱ_0 die Dichtigkeit in der Gleichgewichtslage bezeichnet. Den

positiven Werthen von w entsprechen demnach Werthe von $\varrho > \varrho_0$, den negativen solche von $\varrho < \varrho_0$. Es schreiten also in den durch die obige Integralgleichung gegebenen Wellensystemen die Phasen der gröfseren Dichtigkeit schneller fort, als die der geringeren, und die Wellen müssen im Fortschreiten ihre Gestalt ändern. Hr. CHALLIS spricht nun der obigen Gleichung, von deren Richtigkeit man sich übrigens leicht durch Integriren überzeugen kann, alle physikalische Gültigkeit ab, weil bei diesem ungleichmäfsigen Fortschreiten verschiedener Phasen derselben Welle es endlich dazu kommen müsse, dafs ein Punkt ohne Geschwindigkeit einen ihm voranliegenden der Verdünnungsphase einhole, und überhole, und er zugleich eingeholt und überholt werde von einem der hinter ihm liegenden Verdichtungsphase, so dafs nach jener Gleichung in demselben Punkte der z Axe gleichzeitig Verdünnung, Verdichtung und normale Dichtigkeit, positive, negative und keine Geschwindigkeit vorhanden sein müsse, was in diesem Falle der physikalischen Anwendung Unsinn sei, deshalb könne diese Form des Integrals überhaupt nicht mögliche physikalische Verhältnisse aussprechen. Indessen kann dieses Princip nicht zugegeben werden. Wenn die Differenzialgleichungen alle Bedingungen der betrachteten Bewegungen enthalten, so mufs auch jedes ihnen entsprechende reelle partikuläre Integral einen möglichen Fall solcher Bewegung aussprechen. Führt dasselbe aber aus anwendbaren Werthen über zu nicht anwendbaren, so mufs an der Grenze beider ein in den Differenzialgleichungen nicht berücksichtigtes Verhältnifs vorkommen. Dieses ist in diesem Falle von Hrn. STOKES aufgefunden. Bei der Aufstellung der hydrodynamischen Gleichungen I. mufs man nämlich die Voraussetzung machen, dafs die Dichtigkeits- und Geschwindigkeitsänderungen bei dem Uebergange von einem Theilchen auf die benachbarten continuirliche seien, also $\frac{d\varrho}{dx}$ und $\frac{dw}{dx}$ endliche Gröfsen. Jene Gleichungen finden aber keine Anwendung mehr, sobald an irgend einer Stelle eins dieser Verhältnisse unendlich geworden ist. Das mufs aber eintreten, sobald irgend ein Punkt der Verdichtungsphase irgend einen von geringerer Dichtigkeit erreicht. Nur bis zu diesem Augenblicke ist die obige Gleichung

gültig; was dann geschieht kann nicht mehr aus den Gleichungen I. abgeleitet werden, sondern mufs durch eine besondere Betrachtung ermittelt werden. Am passendsten scheint der Vergleich mit einer überschlagenden Wasserwelle zu sein. Jedenfalls müssen aber die eintretenden Aenderungen in der ganzen Ausdehnung der Welle gleichmäfsig eintreten, so dafs doch wieder ebene Wellen anderer Form entstehen, und nach denselben Gesetzen fortschreiten wie vor der Aenderung.

Damit ist die prinzipielle Schwierigkeit beseitigt. Uebrigens möchte in der Praxis die Formänderung ebener Schallwellen und ihre Brandung kaum von Wichtigkeit sein bei der ungemein geringen Amplitüde reiner musikalischer Töne. Ist w verschwindend klein gegen a, so verändert sich die obige exakte Formel in die bekannte

$$w = \psi_{(x-at)}.$$

Uebrigens ist zu bemerken, dafs wir in den Fällen, wo wir die exakte Formel anwenden müssen, nicht mehr Wellen verschiedener Richtung durch Addition zusammensetzen dürfen, weil die ungestörte Superposition der Schwingungen bei einer solchen Intensität derselben nicht mehr stattfindet. Es äufsert sich dies in der Rechnung dadurch, dafs eine Summe partikulärer Integralgleichungen die Gleichungen I. nicht mehr erfüllt.

Ein leichter zu beseitigender Einwand von Hrn. Challis gegen die gewöhnliche Theorie des Schalles bezieht sich auf die Kugelwellen. Das bekannte partikuläre Integral der Gleichungen für kleine Schwingungen für diese Art der Bewegung ist

$$\varrho - \varrho_0 = \frac{\psi_{(at-r)}}{r}.$$

Nehmen wir an, es sei nur eine einzelne Welle vorhanden, deren Mitte den Radius R habe, deren Breite 2ε dagegen vernachlässigt werden könne, und die in einem gleichmäfsig mit ruhender Luft angefüllten Raume fortschreite, so ist der Ausdruck für die Quantität von Masse, welche in dem von der Welle durchlaufenen Raume mehr vorhanden ist als im ruhigen Zustande

$$= 4\pi R \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} \psi_{(at-r)}\, dr.$$

Sie wächst also mit der Zeit in demselben Verhältnisse wie der Radius, wenn das Integral einen bestimmten positiven Werth hat, und da die unbestimmte Funktion darin nach Belieben geändert werden kann, so kann man dem Integral jeden beliebigen Ziffernwerth ertheilen. Nach Hrn. CHALLIS würde also diese Integralgleichung die Folgerung zulassen, dafs sich die Quantität der vorhandenen Materie entweder vermehren oder vermindern könne. Hr. STOKES weist Bd. XXXIV S. 54 dagegen nach, dafs die Gleichung, welche man aus jener Integralgleichung der Dichtigkeit für die Geschwindigkeit der Lufttheilchen ableiten könne, aufser den Vibrationen die der Wellenbewegung angehören, noch eine zum Centrum gerichtete oder von ihm ausgehende Geschwindigkeit angebe, wenn der Ausdruck $\int \psi_{(r-at)} dr$ einen positiven oder negativen Werth habe, und dafs daher die Vermehrung oder Verminderung der Masse rühre. Die Antwort von Hrn. CHALLIS dagegen ibd. S. 91 ist keine.

In dem gröfsten Theil seiner späteren Aufsätze bemüht sich Hr. CHALLIS nachzuweisen, dafs seine nicht divergirenden Wellen den Forderungen der exakten Bewegungsgleichungen Genüge leisten. Er findet für Wellenformen, welche ohne Veränderung der Gestalt parallel der Axe der z fortschreiten sollen, eine bestimmte Gestalt, ausgedrückt durch eine Cosinusreihe von $z - a_1 t$, (Bd. XXXIII S. 363. Gleichung 1 und 2.) während die Vertheilung rund um die Axe der z ausgedrückt bleibt durch eine partielle Differenzialgleichung zweiten Grades nach x und y. Die mathematische Entwicklung erregt einige Bedenken, weil er mehrere Male Sätze, die aus den ungenaueren Gleichungen II geflossen waren, erst nachdem er sie eine Weile gebraucht hat, durch andere ersetzt, welche aus den exakten Gleichungen hergeleitet sind. Aber selbst wenn seine nicht divergirenden Wellen unveränderlich fortschreiten, so beweist das noch nichts für die Nothwendigkeit, dafs wir alle Schallwellen in solche zerlegen müssen, weil in allen Fällen, wo die exakteren Gleichungen gebraucht werden müssen, überhaupt keine einfache Zusammensetzung und Zerlegung der Wellen mehr stattfindet. In denjenigen Fällen aber, wo die nicht exakten Gleichungen anwendbar sind, ist es eine kühne Hoffnung, dafs durch Zusammensetzung

seiner linearen Wellen zu ebenen und sphärischen eine andere Bewegung herauskommen soll, namentlich eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, als die der ebenen Wellen, in welche nachweislich jene linearen aufgelöst werden können.

Hr. Blake hat den Unterschied der aus dem Mariotte'schen Gesetz berechneten Schallgeschwindigkeit von der wirklichen noch auf eine andere Weise zu erklären versucht. Er sucht nämlich auf elementare Weise sich einen Ausdruck zu verschaffen für die Aenderung jener Geschwindigkeit durch Steigerung der Intensität des Schalls. Dieser Ausdruck ist aber falsch, weil er ihn herleitet aus der Annahme, dafs alle Theile der Welle sich mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegen, was nach der oben hingestellten exakten Integralgleichung für ebene Wellen nicht der Fall ist. Er nimmt dann an, dafs erst Schall von einer gewissen Intensität gehört werde, und dafs die beobachtete Schallgeschwindigkeit eben deshalb gröfser sei, als die für eine verschwindend kleine Intensität berechnete.

Hr. Wertheim hat eine ausgedehnte Arbeit zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Flüssigkeiten ausgeführt. Er berechnet dieselben aus den Tönen von Orgelpfeifen, in welchen die betreffende Substanz in Longitudinalschwingungen versetzt wird. Der erste Theil seiner Arbeit besteht in einem Studium der Eigenthümlichkeiten dieser Bestimmungsweise an den Tönen, welche solche Pfeifen in der Luft geben. Bekanntlich sollten die Schwingungszahlen von Tönen verschiedener Pfeifen genau im umgekehrten Verhältnifs der Pfeifenlängen stehn, wenn die Luftbewegung in denselben rein longitudinal wäre. Da dieselbe aber an den beiden Oeffnungen der Pfeife beträchtlich von dieser Voraussetzung abweicht, so trifft dieses Gesetz nie genau zu, und zwar desto weniger, je weiter die Pfeife ist. Hr. Wertheim hat angenommen, diese Störung könne bei einer und derselben Pfeife, der man verschiedene Längen giebt, nach ihrer Wirkung gleichgesetzt werden einer bestimmten

Verlängerung der Pfeife, und hat diese letztere berechnet aus den Tönen, welche er bei drei verschiedenen Pfeifenlängen erhielt. Diese Annahme ist aber nur annähernd richtig, wie sich theils aus Experimenten Anderer [1], theils aus den Wertheim'schen selbst ergiebt, da in allen Fällen, wo die Correktionen einen beträchtlichen Werth annehmen, die drei Werthe, welche man durch Combination je zweier von den drei Beobachtungen berechnen kann, merklich sich unterscheiden, und zwar meist in demselben Sinne. Die Gröfse dieser Correktionen ist veränderlich nach der Weite der Pfeife, nach der Gestalt der Mundöffnung, Stärke des Anblasens u. s. w.; sie ist in vielen der angeführten Versuche sehr beträchtlich bis zu $\frac{2}{5}$ der kürzesten Pfeifenlänge. Eine zweite Schwierigkeit bei genauen Bestimmungen macht die Veränderlichkeit des Tons nach der Heftigkeit des Anblasens; je gröfser die letztere, desto höher wird der Ton, daher auch der aus den Obertönen berechnete Grundton stets höher liegt als der direkt beobachtete. Hr. Wertheim hat sich dieser Störung dadurch zu entziehen gesucht, dafs er die drei zusammengehörigen Versuche bei gleicher Ausflufsgeschwindigkeit, kontrollirt durch gleichen Druck des Manometers, anstellte, und wenn er Obertöne erhielt, aus diesen den zugehörigen Grundton berechnete. Er fand dabei, dafs die Druckhöhen, welche die den einfachen Zahlen entsprechende Reihe der Obertöne hervorriefen, wuchsen im Verhältnifs der Quadrate dieser Zahlen. Die so berechneten Schallgeschwindigkeiten stimmen ziemlich mit der direkt beobachteten $332^m,3$; meist sind sie etwas kleiner bis zu 2 p. C. Um die Pfeifen in tropfbaren Flüssigkeiten ertönen zu machen, mufs die Mundöffnung schmaler und kürzer sein, als in der Luft; Hr. Wertheim hat viele Versuche anstellen müssen, um die beste Stellung der Lippen der Pfeife zu finden, hat aber endlich an offenen Pfeifen ebenso klare und reine Töne erhalten, wie in der Luft; von anderen Nebentönen der Lippen oder des Metalls der Pfeife soll man dieselben leicht durch den Klang unterscheiden können; wesentlich für das Gelingen ist, dafs die Flüssigkeiten von Staub und Luftblasen rein sind. Die Correktionen und

[1] Siehe Liscovius in Poggd. Ann. LVIII. 95.

Unregelmäfsigkeiten sind im Wasser meist geringer als in der Luft. Das Mittel seiner Versuche für Wasser zwischen 10 und 20° C. ist 1173m,4, wovon die einzelnen Versuche bis zu 3 p. C. abweichen. Mit dem Coëfficienten $\sqrt{\frac{5}{3}}$ multiplicirt, über dessen Bedeutung nachher, giebt dieselbe 1437m,1, welche Gröfse fast zusammenfällt mit der von Colladon und Sturm im Genfer-See bei 9° gefundenen, 1435m.

Es folgen noch Bestimmungen der Schallgeschwindigkeit vom Meerwasser in demselben, von verschiedenen anderen Flüssigkeiten in einem kleineren Apparate angestellt. Ich gebe in der folgenden Tabelle unter v die noch nicht mit $\sqrt{\frac{5}{3}}$ multiplicirte Schallgeschwindigkeit, unter c die cubische Zusammendrückung durch 100 Atmosphären.

		v.	c.
Seinewasser	15°	1173,4	0,00491
—	30°	1250,9	0,00433
—	40°	1324,8	0,00388
—	50°	1349,0	0,00375
—	60°	1408,2	0,00346
Meerwasser		1187,0	0,00467
Kochsalzlösung		1275,0	0,00349
Alkohol von 36 Grad		1049,9	0,00733
Absoluter Alkohol		947,0	0,00947
Terpenthinöl		989,8	0,00800
Aether		946,3	0,01002.

Die Werthe der Zusammendrückbarkeit sind berechnet unter der Voraussetzung, dafs die Schallgeschwindigkeit im unbegrenzten Medium erhalten werde aus der in der Orgelpfeife bestimmten durch Multiplikation mit $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Hr. Wertheim bemerkt, dafs die bisher direkt gemessenen Werthe derselben mit Ausnahme der des Aethers hinreichend übereinstimmen mit den berechneten, und dafs die Uebereinstimmung noch gröfser sei mit den neusten, noch nicht veröffentlichten Versuchen von Grassi[1]

[1] s. oben I. 10. B. S. 94.

Mit dem Faktor $\sqrt{\frac{3}{2}}$ hat es folgende Bewandtnifs. Denken wir uns im Innern einer nach den Richtungen der Coordinaten verschieden stark gepreſsten festen elastischen Masse ein Massenelement abgegrenzt durch Ebenen, welche den Coordinatenebenen parallel sind, so wird der Druck, den es in Richtung der x ausübt, X eine lineare Funktion der verschiedenen Compressionen nach den drei Axen sein. Ist die Längeneinheit auf der Axe der x geworden $1 - \Delta x$, auf der der y, $1 - \Delta y$, auf der der z, $1 - \Delta z$, so wird sein

$$X = a^2 \Delta x + b^2(\Delta y + \Delta z)$$
$$Y = a^2 \Delta y + b^2(\Delta x + \Delta z)$$
$$Z = a^2 \Delta z + b^2(\Delta x + \Delta y).$$

Entstehen nun in einer festen unbegrenzten elastischen Masse ebene Wellen normal auf der Axe der x, so werden die Massenelemente nur in der Richtung der x comprimirt und dilatirt, weil seitlich in Richtung der y und z ebenso comprimirte Theilchen daneben liegen, also werden Δy und Δz null werden, und die Kräfte, welche die Fortpflanzung der Wellen bestimmen, werden

$$X = a^2 \Delta x.$$

Wenn s^2 die Dichtigkeit bezeichnet, wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{a}{s}$. Entstehen aber in einem Stabe longitudinale Wellen, und kann sich in jedem Querschnitt nach den Seiten hin das Gleichgewicht herstellen, so dafs der Druck nach den Seiten hin 0 wird, so erhalten wir aus unseren Gleichungen

$$X = a^2 \Delta x + b^2(\Delta y + \Delta z)$$
$$0 = a^2 \Delta y + b^2(\Delta x + \Delta z)$$
$$0 = a^2 \Delta z + b^2(\Delta x + \Delta y),$$

woraus sich ergiebt

$$X = \left(a^2 - \frac{2b^4}{a^2 + b^2}\right)\Delta x.$$

POISSON hatte aus theoretischen Betrachtungen hergeleitet, dafs $\frac{a^2}{b^2} = 3$ sei, WERTHEIM[1] hat experimentell gefunden, dafs

[1] C. R. XXVI 206.

es = 2 sei, danach ergiebt sich in unserem letzten Ausdrucke:

$$X = \tfrac{2}{3}\, a^2 \Delta x$$

und die Schallgeschwindigkeit $= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\frac{a}{s}$. Dieselbe ist also um $\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ kleiner, wenn die Masse quer gegen die Fortpflanzungsrichtung des Schalls sich frei ausdehnen kann und dadurch einen Theil ihrer Spannung verliert, als wenn dies nicht der Fall ist. Da Wertheim das Verhältnifs der Schallgeschwindigkeit in einem verhältnifsmäfsig dünnen Wassercylinder zu der im unbegrenzten Raume ebenso grofs gefunden hatte, wie das derselben in einem elastischen Stabe zu der in einer Masse von drei Dimensionen, so schliefst er, dafs die Flüssigkeiten während der Schallschwingungen nicht Zeit hätten, die Gleichheit des Drucks nach allen Seiten herzustellen, und deshalb sich ebenso bewegten wie feste elastische Körper. Wir können indessen diese Erklärung der Versuche nicht annehmen, weil der Unterschied der Schallgeschwindigkeiten im Stabe und im unbegrenzten Körper wesentlich davon abhängt, dafs sich jener nach den Seiten ausdehnen kann, was bei der von der Pfeife aus Messing oder Glas eingeschlossenen Wassermasse in den besprochenen Versuchen nicht der Fall war. Nun ist allerdings eine Messingröhre einer comprimirten Wassermasse gegenüber nicht als so absolut fest zu setzen, wie sie es bei den Luftschwingungen ist. Schon bei den letzteren erniedrigt sich der Ton der Pfeife, wenn sie aus Holz gefertigt wird, und noch mehr, wenn ein Theil der Wand durch eine nachgiebigere Substanz, z. B. Pergament, ersetzt wird, und etwas Aehnliches mufs bei Wasserschwingungen in Messingröhren vorkommen. Indessen kann dieser Einflufs nicht von der Art der Röhre unabhängig sein, er mufs proportional sein ihrem Radius, umgekehrt proportional ihrer Wanddicke und ihrem Elasticitätscoëfficienten. Ob sich die Resultate der Wertheim'schen Versuche dadurch erklären lassen, mufs künftigen Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Hr. SEEBECK hat eine Rechnungsmethode angegeben, um für die Transversalschwingungen nicht gespannter Stäbe die Lage der Knoten, der Wendepunkte, der Punkte der stärksten Schwingung und Biegung nach einem gemeinsamen Verfahren für die verschiedenen Befestigungsarten der Enden bis zu beliebig genauen Näherungswerthen berechnen zu können. Die Tonhöhen waren schon aus den Untersuchungen von D. BERNOULLI, EULER und POISSON bekannt, die Knoten für Stäbe mit zwei freien Enden durch ersteren, RICCATI und STREHLKE. Hr. SEEBECK ermittelt aus der allgemeinen Gleichung für die Form eines schwingenden Stabes

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + C\sin\alpha x + D\cos\alpha x$$

mit Berücksichtigung der Bedingungen für die Enden zuerst die verschiedenen Werthe von α, verschiedenen Tönen entsprechend, und bringt dann, indem er $y = 0$ für die Knoten, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ für die Wendepunkte setzt, die Gleichung auf die Form

$$\sin\left(\alpha x - \frac{\pi}{4}\right) = \delta\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

wo $\delta = e^{-\alpha x} \pm e^{-\alpha(l-x)} \pm e^{-\alpha l}(\sin\alpha x + \cos\alpha x)$ und für alle Töne mit Ausnahme des ersten eine sehr kleine Gröfse ist. Man setzt es $= 0$, erhält dadurch einen ersten Näherungswerth von αx, mit diesem einen genaueren von δ und so fort. Für den ersten Ton ist der erste Näherungswerth $\alpha x = 1{,}04$. In dieser Form giebt die Gleichung die Entfernung der Knoten eines Stabes, dessen eines Ende eingeklemmt ist, das andre frei, vom freien Ende, die der Wendepunkte desselben vom festen Ende; die der Knoten eines an beiden Enden freien Stabes und die der Wendepunkte eines an beiden Enden eingeklemmten Stabes von einem beliebigen der beiden Enden. Setzt man dagegen

$$\delta = -e^{-\alpha x} \mp e^{-\alpha(l-x)} \pm (\sin\alpha x + \cos\alpha x),$$

so giebt die Gleichung die Wendepunkte eines freien Stabes und die Knoten eines an beiden Enden eingeklemmten.

Ist der Stab an einem Ende angestemmt, am andern eingeklemmt oder frei, so verhält sich sein angestemmtes Ende ganz so wie die Mitte eines an beiden Enden eingeklemmten oder

freien Stabes sich bei den geraden Tönen verhält, und man führt so diese Fälle auf die vorhergehenden zurück. Ist der Stab mit beiden Enden angestemmt, so theilt er sich ganz einfach in gleiche Theile ab. Hr. Seebeck giebt dann noch eine Tafel der so berechneten Werthe für die verschiedenen Fälle.

Um die Correktion zu ermitteln, welche bei Berechnung der Töne gespannter Seiten durch deren Steifheit bedingt wird, hatten Savart und Duhamel die Regel aufgestellt, dafs

$$n^2 = n_{,}^2 + n_{,,}^2,$$

wo n die Schwingungszahl der steifen gespannten Saite, $n_{,}$ die derselben ungespannt, $n_{,,}$ die derselben gespannt und als nicht steif betrachtet. Hr. Seebeck zeigt, dafs dies theoretisch nur gerechtfertigt sei, wenn beide Enden um Queraxen drehbar und nicht eingeklemmt seien. Um die Correktion genauer zu ermitteln ist derselbe von der allgemeinen Bewegungsgleichung eines gespannten Stabes ausgegangen. Ist p das Gewicht der Längeneinheit des Stabes, P das spannende Gewicht, und $a\frac{d^2y}{dx^2}$ das elastische Moment, so dafs bei einem cylindrischen Stabe vom Halbmesser r und dem Elasticitätsmodulus m, $a = \frac{mr^4\pi}{4}$ ist, so ist die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Pg}{p}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{ag}{p}\frac{d^4y}{dx^4}.$$

Ein besonderes Integral dieser Gleichung, welches einem einzelnen Tone von der Schwingungszahl n entspricht, ist

$$y = A_{,}e^{\alpha x + nt} + B_{,}e^{-\alpha x + nt} + C_{,}\sin(\beta x + nt) + D_{,}\cos(\beta x + nt)$$
$$+ A_{,,}e^{\alpha x + nt} + B_{,,}e^{-\alpha x - nt} + C_{,,}\sin(\beta x - nt) + D_{,,}\cos(\beta x + nt)$$

wenn

$$\alpha^2 = \frac{P}{2a} + \sqrt{\frac{P^2}{4a^2} + \frac{n^2p}{ag}}$$

$$\beta^2 = -\frac{P}{2a} + \sqrt{\frac{P^2}{4a^2} + \frac{n^2p}{ag}}.$$

Die Coëfficienten A, B, C, D bestimmen sich aus den Be-

dingungen, denen die Enden unterworfen sind. Sind beide Enden eingeklemmt, so erhält man

$$\operatorname{tg}\beta l = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\left\{1+2(e^{-2\alpha l}+e^{-4\alpha l}+\cdots)-\frac{2}{\cos\beta l}(e^{\alpha l}+e^{-3\alpha l}+\cdots)\right\}$$

und kann daraus Näherungswerthe berechnen, indem man vorläufig setzt

$$\operatorname{tg}\beta l = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2} = \frac{2n}{P}\sqrt{\frac{ap}{g}}$$

und aus dem oben angegebenen Werthe von β^2 findet

$$n^2 = \frac{ag}{p}\beta^4 + \frac{Pg}{p}\beta^2.$$

Hr. SEEBECK fand die Ergebnisse der Rechnung bei einem mit den nöthigen Vorsichtsmafsregeln angestellten Versuche an einer starken und kurzen Stahlsaite vollkommen genau bestätigt. Für gewöhnliche Saiten von geringer Steifheit giebt Hr. SEEBECK mit Vernachlässigung der zweiten Potenzen von $\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}$ folgende Formel

$$n = n_{\prime\prime}\left(1+2\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}\right)$$
$$= n_{\prime\prime}\left(1+\frac{r^2}{l}\sqrt{\frac{m\pi}{P}}\right)$$

Die Correktion beträgt ungefähr die Hälfte für Saiten, deren eines Ende an einen Steg nur angelehnt frei herunterhängt, also wie das angestemmte Ende eines Stabes sich bewegt.

Fehler der harmonischen Reinheit der Obertöne treten erst auf, wenn man die zweite Potenz von $\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}$ berücksichtigen mufs. Man erhält für die Schwingungsmenge des $i$ten Tones in der Zeit 2π

$$n = iN(1+i^2\delta),$$

wenn

$$N = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{Pg}{p}\left(1+4\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}+12\frac{a}{Pl^2}\right)}$$

und

$$\delta = \tfrac{1}{2}\pi\frac{a}{Pl^2}.$$

Bei den gewöhnlichen Monochordsaiten ist diese Abweichung schon völlig unmerklich; sind die Saiten aber so stark, dafs sie merklich wird, so klingt auch der Grundton unrein wegen der Beimischung unreiner Obertöne.

Die Arbeit von Hrn. Duhamel enthält Erörterungen über die Superposition der Schwingungen an tönenden festen Körpern; es ist darin nichts neues enthalten.

Prof. Dr. Helmholtz.

---

2. Physiologische Akustik.

Bonnafont. Mémoire sur la transmission des ondes sonores à travers les parties solides de la tête, pour juger des divers degrés de sensibilité des nerfs acoustiques. C. R. XXVI. 139*;

Segond. Mémoire sur la voix inspiratoire. C. R. XXVI. 252*;

Segond. Note sur les mouvements de totalité du larynx. C. R. XXVII. 85.

Bonnafont. Über die Schallleitung durch die Kopfknochen, als Mittel die Empfindlichkeit der Gehörnerven zu beurtheilen.

Auszug aus einer mit Bezug auf chirurgische Praxis geschriebenen Abhandlung. Von allgemeinem Interesse darin sind folgende Bemerkungen:

1. Die Stellen des Schädels, von denen aus sich der Schall am leichtesten nach den Gehörnerven verbreitet, scheinen zu sein der Zitzenfortsatz des Schläfenbeins, die Schläfen-Scheitelbeingegend, der Jochfortsatz (wohl der des Schläfenbeins). Die Prüfung geschieht mittelst aufgesetzter Stimmgabeln.

2. Es stellt sich heraus, dafs in Fällen, wo wegen angeborner oder zufälliger Verschliefsung der äufseren Gehörgänge